UFES - CCE - DMAT - **Prova 1 - Solução**

Projeto de Ensino Nivelamento em Matemática - PROGRAD - 05/05/17

Leia a prova com atenção e justifique todas as respostas.

1. Resolva a equação e as inequações em $\mathbb{R}$.

   (a) **(1,0)** $|x+1| + |x-2| = 4$
   Usando a definição de módulo temos:

   $$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

   e

   $$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

   - Se $x < -1$ temos:
     $(-x-1) + (-x+2) = 4$
     $-2x = 3$
     $x = -\frac{3}{2}$
   - Se $-1 \leq x < 2$ temos:
     $(x+1) + (-x+2) = 4$
     $3 = 4$
     Portanto nenhum número desse intervalo satisfaz a equação.
   - Se $2 \leq x$ temos:
     $(x+1) + (x-2) = 4$
     $2x = 5$
     $x = \frac{5}{2}$

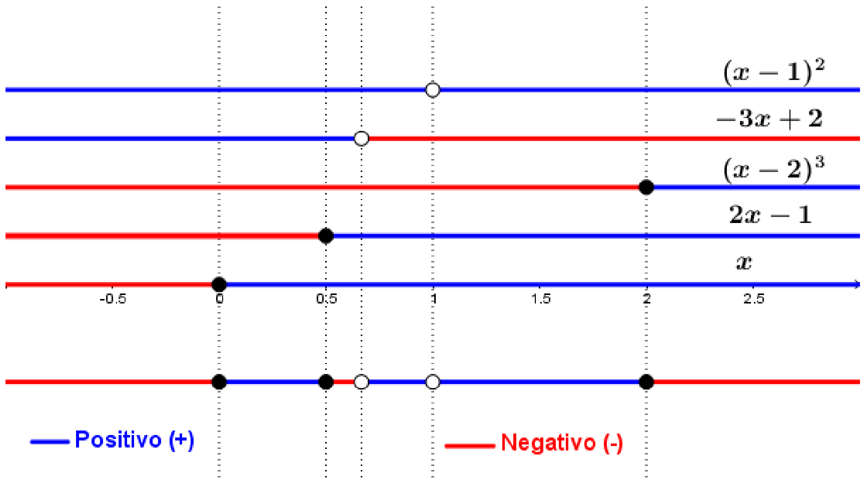
   Por fim concluímos que $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$.

   (b) **(1,0)** $\dfrac{x(2x-1)(x-2)^3}{(-3x+2)(x-1)^2} \geq 0$

   Estudando os sinais de cada parcela temos:

   - $x \geq 0$
   - $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$
   - $(x-2)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
   - $-3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$
   - $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, e $(x-1)^2 = 0$ quando $x = 1$

Fazendo o estudo de sinais temos que a inequação acima é maior que zero quando
$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, 2]$.

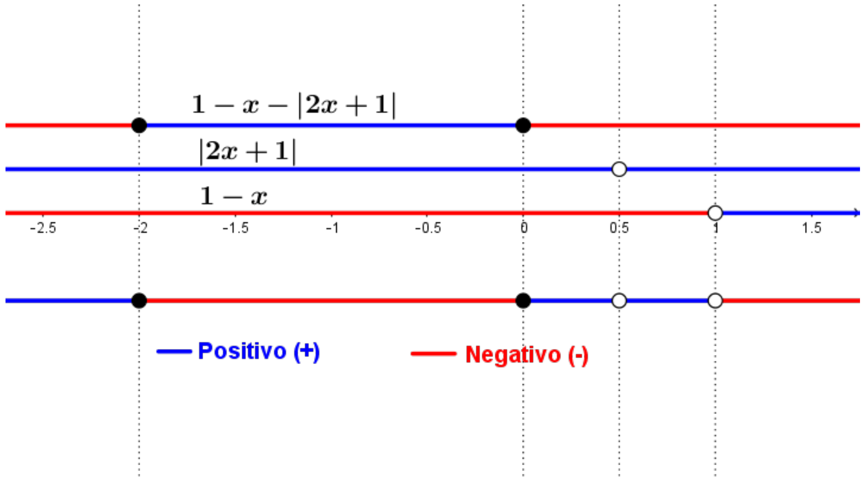


(c) **(1,0)** $\dfrac{1}{|2x+1|} \leq \dfrac{1}{1-x}$
Primeiro reformulamos a inequação:

$$\frac{1}{|2x+1|} - \frac{1}{1-x} \leq 0$$

$$\frac{1-x-|2x+1|}{|2x+1|(1-x)} \leq 0$$

Usando a definição do módulo: $1-x-|2x+1| = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ -3x & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$
Daí que esta expressão é positiva se, e somente se, $-2 \leq x \leq 0$.
Então podemos fazer o estudo do sinal

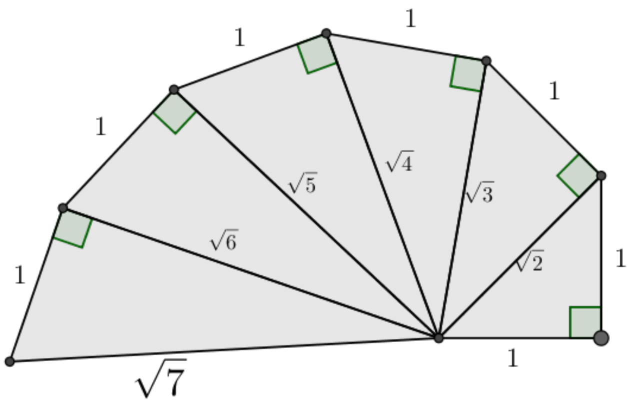


e concluir que o conjunto-solução é $(-\infty,-2] \cup \left[0,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},1\right)$.

2. (a) **(1,0)** Mostre que $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+1$ não é racional.

   Suponhamos que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+1$ seja racional.
   Sabemos que $1 \in \mathbb{Q}$ e que a subtração de racionais é racional, logo devemos ter $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$.
   Se $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$ então $\exists p,q \in \mathbb{Z}$ onde p e q não tem fatores em comum e $\frac{p}{q}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.
   Daí temos que $\frac{p^2}{q^2}=\frac{2}{5} \Rightarrow 5p^2=2q^2$.
   Vemos que $5p^2$ é par e como 2 não divide 5 temos que p^2 é par e consequentemente p é par, pois todo quadrado de um número par é sempre par.
   Seja então $p=2r$, temos que $5.(2r)^2=2q^2 \Rightarrow 5.2r^2=q^2$.
   Daí vemos que q^2 é par e consequentemente q é par, o que é um absurso pois p e q não tem fatores em comum.
   Logo $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \notin \mathbb{Q}$ e consequentemente $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+1$ não é racional.

   (b) **(1,0)** Esboce uma figura que represente um segmento de reta de medida $\sqrt{7}$. (Construir a partir da unidade como em aula).
   São muitas soluções possíveis, mas entre elas:



3. Seja $f(x)=|x-1|+|x-2|$.

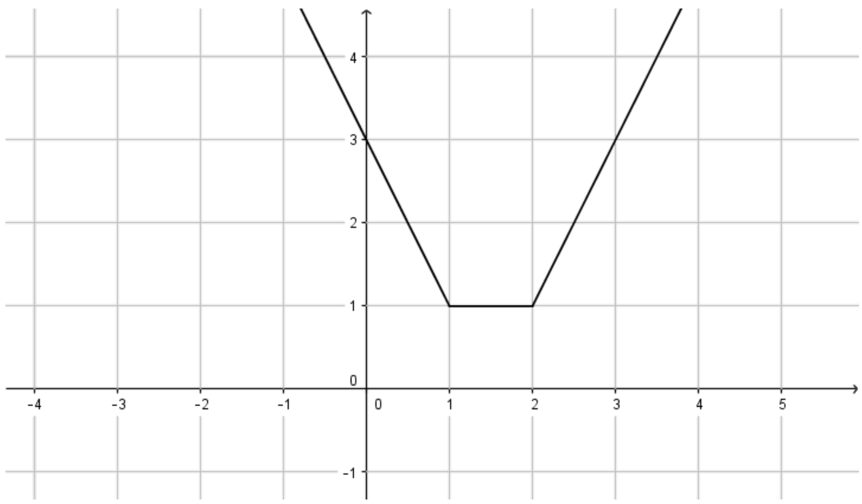
(a) **(0,5)** Dê o domínio de f.
Como os módulos estão definidos para todos os reais $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) **(0,5)** Escreva uma expressão para f sem usar o valor absoluto. (Sugestão: dividir o domínio em intervalos apropriados).

- se $x < 1$ temos
  $f(x) = -(x-1) - (x-2)$
  $f(x) = -2x + 3$
- se $1 \leq x < 2$ temos
  $f(x) = +(x-1) - (x-2)$
  $f(x) = 1$
- se $x \geq 2$ temos
  $f(x) = +(x-1) + (x-2)$
  $f(x) = 2x - 3$

Logo, $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 2x-3 & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$

(c) **(0,5)** Esboce o gráfico de f.



4. Responda Verdadeiro ou Falso nas sentenças abaixo, justificando suas respostas.

(a) **(0,5)** Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ então $x < y$ se, somente se $x^2 < y^2$.
Falso. Considere $x = -2$ e $y = -1$. Temos $x < y$; mas $x^2 = 4 > 1 = y^2$.

(b) **(0,5)** Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ então $x < y$ se, somente se $x^3 < y^3$.
Verdadeiro. Vamos supor $x < y$ e analisar os casos possíveis:

1º Caso: x e y têm o mesmo sinal.
Primeiro parafraseamos a conclusão para facilitar a análise.

$$x^3 < y^3$$
$$x^3 - y^3 < 0$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2) < 0$$

Sabemos por hipótese que $x - y < 0$. Basta então mostrar que $x^2 + xy + y^2$ é um número positivo. Já sabemos de cara que $x^2, \quad y^2 > 0$; pois $x, \quad y \neq 0$. O xy também é positivo, pois x e y têm o mesmo sinal. Daí que a soma $x^2 + xy + y^2$ de números positivos certamente será também positiva.

2º Caso: x e y têm sinais diferentes, incluindo a possibilidade de um ser zero.
O cubo de um número negativo/nulo/positivo continua sendo negativo/nulo/positivo. Daí que a ordem não se altera nesse caso.

Isso prova que $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$; mas será que $x^3 < y^3 \Rightarrow x < y$? Basta tomar a contrapositiva $x \geq y \Rightarrow x^3 \geq y^3$ e aplicar o mesmo raciocínio.

(c) **(0,5)** Se $x \geq 0$ então $x \geq \sqrt{x}$.
Falso. Seja $x = \frac{1}{4}$. Temos que e $\frac{1}{4} < \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

5. Considere a chamada ”regra 95”para a previdência. Nesta regra o trabalhador teria direito à aposentadoria quando a soma de sua idade com o número de anos de serviço atingisse 95.

(a) **(0,5)** Baseado na regra 95 quem começou a trabalhar aos 25 anos teria direito à aposentadoria com que idade?

Se x é a idade da pessoa temos que $x + (x - 25) = 95 \Rightarrow x = 60$. Portanto a pessoa tem direito de se aposentar aos 60 anos.

(b) **(1,0)** Sendo x a idade com que uma pessoa começa a trabalhar, econtre a idade com que ele tem direito à aposentadoria $f(x)$.

Seja x a idade que a pessoa começa a trabalhar e $f(x)$ a idade que a pessoa tem o direito de se aposentar. Sabemos que a soma da idade que a pessoa tem o direito de se aposentar com o tempo de serviço deve ser igual a 95. Sabemos que o tempo se serviço é dado pela idade da pessoa menos a idade que ela começou a trabalhar, então $f(x) + (f(x) - x) = 95 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(95 + x)$.

(c) **(0,5)** Esboce o gráfico de f, considerando que a idade é um número real não negativo e que é proibido trabalhar antes dos 16 anos.