PROVA 1

13 de maio de 2017

QUESTÃO 1

a)

- Se $x \in (-\infty, -1)$ temos:
  $-(x+1) - (x-2) = 4$
  $-2x = 3$
  $x = -\frac{3}{2}$

- Se $x \in [-1, 2)$ temos:
  $+(x+1) - (x-2) = 4$
  $3 = 4$
  Portanto $\nexists x \in \mathbb{R}$ nesse intervalo que seja solução.

- Se $x \in [2, +\infty)$ temos:
  $+(x+1) + (x-2) = 4$
  $2x = 5$
  $x = \frac{5}{2}$

  Portanto $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$.

b) Estudando os sinais de cada parcela temos:

- $x \geq 0$

- $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

- $(x-2)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

- $-3x+ \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$

- $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Fazendo o estudo de sinais temos que a inequação acima é maior que zero quando
$x \in (-\infty, 0]$ ou $x \in [\frac{2}{3}, 2]$.

c) Devemos ter $|2x+1| \geq |1-x|$, então:

- Se $x < -\frac{1}{2}$ temos:
  $-(2x+1) \geq 1 - x$
  $x \leq -2$

- Se $x > -\frac{1}{2}$ temos:
  $+(2x+1) \geq 1 - x$
  $x \geq 0$

- Devemos ter também $|2x+1| \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$ e $1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Portanto $x \in [0, 1)$ ou $x \in (1, +\infty)$

QUESTÃO 2

Suponhamos que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 1$ seja racional.
Sabemos que $1 \in \mathbb{Q}$ e que a soma de racionais é racional, logo devemos ter $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$.
Se $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$ então $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ onde p e q não tem fatores em comum e $\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Daí temos que $\frac{p^2}{q^2} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5p^2 = 2q^2$.
Vemos que $5p^2$ é par e como 2 não divide 5 temos que p^2 é par e consequentemente p é par, pois todo quadrado de um número par é sempre par.
Seja então $p = 2r$, temos que $5.(2r)^2 = 2q^2 \Rightarrow 5.2r^2 = q^2$.
Daí vemos que q^2 é par e consequentemente q é par, o que é um absurso pois p e q não tem fatores em comum.
Logo $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \notin \mathbb{Q}$ e consequentemente $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + 1$ não é racional.

QUESTÃO 3

a) $D_f = \mathbb{R}$

b)

- se $x < 1$ temos
  $f(x) = -(x-1) - (x-2)$
  $f(x) = -2x + 3$

- se $1 \leq x < 2$ temos
  $f(x) = +(x-1) - (x-2)$
  $f(x) = 1$

- se $x \geq 2$ temos
  $f(x) = +(x-1) + (x-2)$
  $f(x) = 2x - 3$

Logo,

QUESTÃO 4

a) Falso. Seja $x = -2$ e $y = -1$, temos que $x < y$. Mas $x^2 = 4$ e $y^2 = 1$, logo $y^2 < x^2$.

b) Verdadeiro.

c) Falso. Seja $x = \frac{1}{4}$. Temos que $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4} \leq \sqrt{\frac{1}{4}}$.

QUESTÃO 5

a) Se x é a idade da pessoa temos que $x + (x - 25) = 95 \Rightarrow x = 60$. Portanto a pessoa tem direito de se aposentar aos 60 anos.

b) Seja x a idade que a pessoa começa a trabalhar e $f(x)$ a idade que a pessoa tem o direito de se aposentar. Sabemos que a soma da idade que a pessoa tem o direito de se aposentar com o tempo de serviço deve ser igual a 95.
Sabemos que o tempo se serviço é dado pela idade da pessoa menos a idade que ela começou a trabalhar, então $f(x)+(f(x)-x) = 95 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(95+x)$.