UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

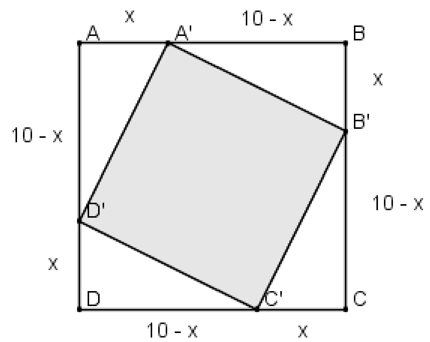
Solução dos exercícios do Capítulo 7

Seção 7.8:

1. Questão 8:
Seja x a idade de Maria e y a de seu filho quando o produto de suas idades era igual à 203, ou seja $xy = 203$. Se Maria teve seu filho aos 22 anos de idade, a idade de Maria, quando o produto das idades era 203, é dada por $x = 22 + y$. Logo, $x.y = (22 + y)y = 203$. Assim, temos que $y^2 + 23y - 203 = 0$, o que nos dá $y = -29$ e $y = 7$. Como a idade é sempre posivitiva a resposta é $y = 7$.

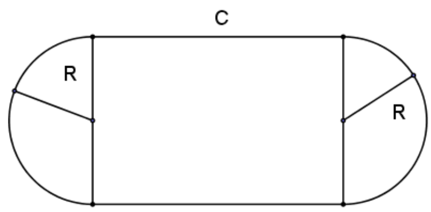
2. Questão 9:
Como um lado da cerca será a parede de armazém existente, a cerca de $50m$ deve cercar apenas 3 lados do retângulo formado. Sendo x e y os lados do retângulo formado pela cerca e a parede do armazém, temos que $2x + y = 50$ e sua área cercada é dada por $S = x.y$. Daí $S = x.(50 - 2x) = 50x - 2x^2$. Como S em função de x é uma parábola com concavidade para baixo, podemos afirmar que existe um valor máximo para S e é dado por $x = \dfrac{-50}{2 \times (-2)} = 12,5$. Logo, $y = 50 - 2 \times 12,5 = 25$. Portanto o retângulo cercado tem dimensões $12,5 \times 25$ m.

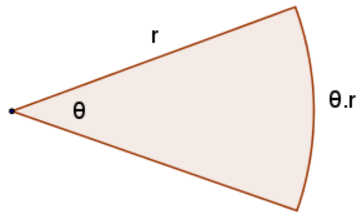
3. Questão 10:
Utilizando o Teorema de Pitágoras no triangulo $AA'D'$, temos que o lado do quadrado circunscrito é dado por $y = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2}$ e sua área por $S = y^2 = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$. Sendo S uma função de x uma parábola com concavidade para cima, podemos afirmar que o ponto que dá área mínima é $x = \dfrac{-(-20)}{2 \times 2} = 5$ m.



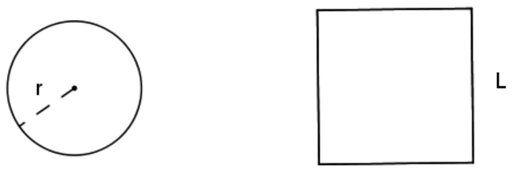
4. Questão 11:
A pista de atletismo terá a forma mostrada na figura abaixo. Portanto, seu perímetro será dado por $2C + 2\pi R = 400$ e a área do campo de futebol será $S = 2CR$. Substituindo o valor de C, obtido pela equação do perímetro, em S, temos que $S = (400 - 2\pi R)R = 400R - 2\pi R^2$. Sendo S em função de R côncava para baixo, o valor de R para qual S será máximo é dado por $R = \dfrac{-400}{2(-2\pi)} = \dfrac{100}{\pi}$ m.
Portanto, $C = \dfrac{400 - \dfrac{2\pi 100}{\pi}}{2} = 100$ m e o campo tem dimensões $100 \times \dfrac{200}{\pi}$ m.

5. Questão 12:
O perímetro da cerca (apenas uma volta) é dado por $p = 2r + \theta r = \dfrac{360}{3} = 120$, logo $\theta = \dfrac{120 - 2r}{r}$.
A área cercada S é dada em função de r por $S = \dfrac{\theta r^2}{2} = \dfrac{(120 - 2r)r^2}{2r} = 60r - r^2$. Sendo S um parábola côncava para baixo, seu ponto de máximo ocorre quando $r = \dfrac{-60}{-2} = 30$ m. Portanto a área máxima será de $S = 900$ m^2.



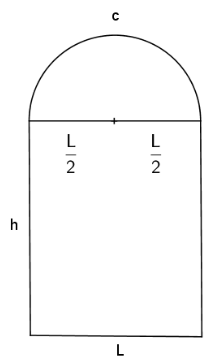


6. Questão 13:
A soma da área das duas figuras formadas pelos dois pedaços de arame é dada por $S = \pi r^2 + L^2$, onde $r = \dfrac{x}{2\pi}$ e $L = \dfrac{(1-x)}{4}$. Portanto $S = \dfrac{(4+\pi)x^2 - 2\pi x + \pi}{16\pi}$. Sendo S côncava para cima, temos de imediato que $x = \dfrac{-(-2\pi)}{2(4+\pi)}$ nos dá o ponto onde S é mínimo. Além disso, poderíamos pensar que S não possui valor máximo, no entanto, a variável x está limitada entre 0 e 1 m, logo o ponto de máximo será dado quando $x = 0$ ou $x = 1$. Para $x = 0$ temos $S(0) = \dfrac{1}{16}$ e para $x = 1$ temos $S(1) = \dfrac{1}{4\pi}$. Como $S(1) > S(0)$, temos que $x = 1$ é o ponto procurado. Portanto, os pedaços que dão área máxima e mínima são $(1, 0)$ e $(\dfrac{\pi}{4+\pi}, \dfrac{4}{4+\pi})$, respectivamente.



7. Questão 14:
A janela normanda está representada na figura abaixo. Para que a maior quantidade de luz passe por ela, suas dimensões devem ser tais que a área da janela seja máxima. A área S da janela é dada por $hL + \dfrac{\pi L^2}{8}$ e seu perímetro p por $2h + L + \dfrac{\pi L}{2}$. Colocando h em função de p e L e substituindo em S, teremos $S = \dfrac{4pL - (4+\pi)L^2}{8}$. Sendo S côncava para baixo, temos o ponto de máximo dado por $L = \dfrac{-4p}{-2(4+\pi)} = \dfrac{2p}{4+\pi}$, portanto $h = \dfrac{p}{4+\pi}$ e a janela terá dimensões $\dfrac{2p}{4+\pi} \times \dfrac{p}{4+\pi}$

8. Questão 15:
Seja x a quantidade de alunos que irão viajar e $R(x)$ a função que dá a receita que o proprietário do ônibus terá. Se x alunos irão viajar, restarão $50 - x$ acentos vazios. Conforme combinado, a receita será dada por 80 reais por lugar ocupado mais 5 reais por acento vazio por aluno que irá viajar, portanto $R(x) = 80x + 5x(50-x) = 330x - 5x^2$. Sendo $S(x)$ côncava para baixo, o número de acentos ocupados que dará receita máxima será $x = \dfrac{-330}{-2 \times 5} = 33$.


c
L
2
L
2
h
L