4. モーメント母関数 $M_x(t)=E[e^{tX}]$ であるから

$$M_x(t)=E[e^{tX}]$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\left(\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{\lambda^x}{x!}\right)e^{-\lambda}$$

$$=\left(\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^x}{x!}\right)e^{-\lambda}$$

$$=e^{(\lambda e^t)}\cdot e^{-\lambda}$$

$$=\underline{e^{\lambda(e^t-1)}}_{//}$$

5. $$\begin{cases} E[X]=M'_x(0) \\ M'_x(t)=\lambda e^{\lambda(e^t-1)} \end{cases}$$

上記2式より

$$E[X]=M'_x(0)=\lambda e^{\lambda(1-1)}$$
$$=\lambda$$

$$\begin{cases} E[X^2]=M''_x(0) \\ M''_x(t)=\lambda^2 e^{\lambda(e^t-1)} \end{cases}$$

上記2式より

$$E[X^2]=M''_x(0)=\lambda^2$$

以上より

$$\underline{E[X]=\lambda,\ E[X^2]=\lambda^2}_{//}$$