TP3 : Calibration Modèle d'Heston

Le but de ce Tp est de calculer des prix d'options sous le modèle d'Heston puis de calibrer ce modèle par filtrage. On considère le modèle suivant

$$\begin{cases} dS_s = S_s\left(rds + \sqrt{v_s}dW_s^1\right) \\ dv_s = \lambda(\overline{v} - v_t)ds + \eta\sqrt{v_s}dW_s^2 \\ dW_s^1.dW_s^2 = \rho ds \end{cases} \tag{1}$$

où W_s^1 et W_s^2 sont deux mouvements browniens et r est le taux sans risque. Pour ce modèle, les rendements sont modélisés par un mouvement brownien géométrique avec une variance stochastique. La variance non observée v_s est déterminée par un processus stochastique de retour à la moyenne (1) introduit en 1985 par Cox, Ingersoll et Ross pour la modélisation des taux d'intérêt à court terme. Le paramètre λ est le paramètre de retour à la moyenne positive, $\overline{v}$ est le paramètre positif à long terme et η la volatilité positive du paramètre de variance. De plus, Heston a introduit une corrélation entre les deux mouvements browniens W_s^1 et W_s^2, représenté par le paramètre ρ appartenant à $[-1, 1]$.

Calcul de prix de Call

1. Calculer le prix d'un Call de strike K et à échéance τ sous le modèle (1) en supposant les paramètres suivants : $\lambda = 4, \overline{v} = 0.03, \eta = 0.4, r = 0.05, \rho = -0.5, \tau = 1, S_0 = K = 100, v_0 = \overline{v}$.
2. Calculer le prix de Call par Monte Carlo en utilisant les mêmes paramètres que ci-dessus.

Calibration du modèle d'Heston

On souhaite désormais calibrer la volatilité sous le modèle d'Heston à partir de prix d'options. Pour cela, nous considérons la version discrétisée par un schéma d'Euler (modifié) de (1). Plus précisément, soit

$$\begin{cases} y_t = C(t, \theta, v_t, S_t, K, \tau) + \sigma_\varepsilon \varepsilon_t \\ S_t = S_{t-1}(1 + r\Delta + \sqrt{\Delta V_t}Z_t^1) \\ v_t = |v_{t-1} + \lambda\Delta(\overline{v} - v_{t-1}) + \eta\sqrt{v_{t-1}\Delta}Z_t^2| \\ \text{Cov}(Z_t^1, Z_t^2) = \rho \end{cases} \tag{2}$$

avec la notation $|.|$ pour la valeur absolue et $(Z_t^j)_{t=1,\dots,n}$ des v.a. gaussiennes centrées et réduites $\forall j = 1, 2$. Δ correspond à votre pas de discrétisation ($\Delta = \frac{\tau}{n}$) où n est la nombre de points d'observations et $(\varepsilon_t)_{t=1,\dots,n}$ correspond à des bruits de mesure supposés gaussiens i.i.d et de variance σ_ε^2. Le processus $(y_t)_{t=1,\dots,n}$ correspond à vos observations ici journalières. Ainsi, nous supposons que nous disposons chaque jour du prix d'un Call noté y_t de strike K et de maturité τ indexé sur un sous-jacent S_t. Ce prix contient des erreurs de mesures notées ε_t. Les observations du sous jacent sont également disponibles chaque jour et nous souhaitons mettre en place une méthode de filtrage pour retrouver la trajectoire de la volatilité $(v_t)_{t=1,\dots,n}$.

1. En supposant le paramètre $\theta = (\lambda, \eta, \overline{v}, \rho)$ connu et égale à $(4, 0.4, 0.03, -0.5)$, $\sigma_\varepsilon^2 = 0.1$, une maturité $\tau = 1$ et un strike $K = 100$, mettre en place une méthode de filtrage (par exemple un filtre Bootstrap présenté dans l'Algorithme [1]) pour retrouver la trajectoire de v_t à partir des prix d'options et du sous-jacent qui vous sont transmis.

Algorithm 1 Bootstrap : Let M be the number of particles and n the sample length.

1: **for** $t = 0$ **do**
2:     **for** $i = 1 \cdots M$ **do** :
3:         Sample v_0^i particles from the density $p(v_0)$ with associated weights $w(x_0^i) = p(v_0^i)$.
4:         Normalize the weights $\tilde{w}(v_0^i) = \frac{w(v_0^i)}{\sum_{j=1}^M w(v_0^j)}$.
5:     **end for**
6: **end for**
7: **for** $t = 1, \cdots, n$ **do**
8:     **for** $i = 1 \cdots M$ **do** :
9:         **Prediction step** : Sample $v_t^i \sim p(v_t | v_{t-1}^i)$.
10:         Update the weights $w(v_{0:t}^i) = p(y_t | v_t^i)$.
11:         Normalize the weights : $\tilde{w}(v_{0:t}^i)$.
12:         **Resampling step** : Resample v_t^i for $i = 1, \ldots, M$.
13:         Reset $\tilde{w}(v_{0:t}^i) = 1/M$.
14:     **end for**
15: **end for**

Pour l'étape de resampling (ligne 12) on peut utiliser la fonction sample sur R : sample(1 :M, replace= TRUE, prob=w_t).