ENSAI Calibration des processus, 3ème année GDR

TP2 : Calibration de modèles à volatilité stochastique par filtrage

1 Estimation du modèle log-SV de Taylor

1. Simuler un modèle à volatilité stochastique de Taylor (92) de la forme (1) avec les paramètres suivants $\theta_0 = (\mu, \phi, \sigma_\eta^2) = (-0.8, 0.9, 0.09)$ et un nombre d'observation $n = 252$ jours.

$$\begin{cases} r_t = \exp(x_t/2)\xi_t, \\ x_t = \mu + \phi x_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t, \end{cases} \tag{1}$$

où r_t est le rendement à la date t et x_t the processus de log-volatilité. Les processus (ξ_t) et (η_t) sont mutuellement independant i.i.d. Gaussiens centrés et de variances unitaires et $\theta_0 = (\mu, \phi, \sigma_\eta^2)$ est le vecteur de paramètres.

2. Représenter graphiquement la trajectoire des rendements $(y_t)_{t\geq 1}$ et le processus de log-volatilité $(y_t)_{t\geq 1}$.
3. A partir de ce modèle construire le modèle linéarisé log-SV en construisant le log du carré des rendements centré$y_t = \log(r_t^2) - \mathbb{E}_{\theta_0}[\log(\xi_t^2)]$ avec $\mathbb{E}_{\theta_0}[\log(\xi_t^2)] = -1.27$.
4. Écrire un script Filtre de Kalman permettant d'estimer la volatilité à chaque instant t en supposant θ_0 connu. On rappelle que la moyenne et la variance d'une variable aléatoire $\log(\xi_t^2)$ sont connus et égaux à $\mathbb{E}_{\theta_0}[\log(\xi_t^2)] = -1.27$ and $\sigma_\varepsilon^2 = \mathbb{V}_{\theta_0}[\log(\xi_t^2)] = \pi^2/2$.
5. Relâcher l'hypothèse θ_0 connue et écrire un script permettant d'estimer θ_0 par Quasi Maximum de vraisemblance. Pour le modèle Log-SV, la "Quasi [1]"-log-vraisemblance est donnée par

$$\ell(\theta) = \log L_\theta(Y_{1:n}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\log F_t - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{\nu_t^2}{F_t},$$

où ν_t et F_t sont donnés par

$$\nu_t = (Y_t - \hat{Y}_t^-) \quad \text{et} F_t = \mathbb{V}_\theta[\nu_t] = P_t^- + \sigma_\varepsilon^2,$$

avec $\hat{Y}_t^- = \mathbb{E}_\theta[Y_t|Y_{1:t-1}]$ et $P_t^- = \mathbb{V}_\theta[(X_t - \hat{X}_t^-)^2]$ calculés par le Filtre de Kalman.

L'estimateur de θ_0 est définie comme

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta\in\Theta} \ell(\theta).$$

1. Ici nous supposons que les bruits sont gaussiens.

2 Estimation du modèle non linéaire SV de Taylor par filtrage particulaire

1. Simuler le modèle (1) avec le même jeu de paramètres que la question 1 Section 1.
2. En utilisant vos données $(r_t)_{t\geq 1}$ simulées, implémenter un filtre Bootstrap présenté dans (1) pour estimer x_t à chaque instant t. Pour la partie réechantillonnage, vous pouvez utiliser la fonction resample sur R : resample(weight, method="multinomial or residual or stratified").
3. A l'aide du package pmhtutorial (à installer) comparer vos résultats avec la fonction particleFilterSVmodel qui permet l'estimation de x_t.

Algorithm 1 : Bootstrap : Let M be the number of particles and n the sample length.

for $t = 0$ **do**
  for $i = 1 \cdots M$ **do** :
    Sample x_0^i particles from the density $p(x_0)$ with associated weights $w(x_0^i) = p(x_0^i)$.
    Normalize the weights $\tilde{w}(x_0^i) = \frac{w(x_0^i)}{\sum_{j=1}^{M} w(x_0^j)}$.
  end for
end for
for $t = 1, \cdots, n$ **do**
  for $i = 1 \cdots M$ **do** :
    Prediction step : Sample $x_t^i \sim p(x_t | x_{t-1}^i)$.
    Update the weights $w(x_{0:t}^i) = p(y_t | x_t^i)$.
    Normalize the weights : $\tilde{w}(x_{0:t}^i)$.
    Resampling step : Resample x_t^i.
    Reset $\tilde{w}(x_{0:t}^i) = 1/M$.
  end for
end for

Application sur données réelles : données du Nasdaq

Le but de cette partie est d'appliquer un filtre particulaire pour l'estimation de la volatilité des rendements du Nasdaq en supposant que les rendements sont modélisés par le modèle SV de Taylor (1).

1. Obtenir les données à partir de Quandl en utilisant library("Quandl") et *Quandl("NASDAQOMX/OMXS30", start_date="2012-01-02", end_date="2014-01-02", type="zoo")*
2. A partir de cette série calculer les rendements comme :

$$r_t = 100 \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$$

où S_t est la valeur de l'actif sous-jacent, i.e. la série Nasdaq. Ces rendements correspondent à vos observations y_t à chaque instant t.

3. A partir de ces rendements estimer la volatilité x_t à chaque instant t en utilisant un filtre particulaire en assumant θ_0 connu et égale à $\theta_0 = (-0.1, 0.97, 0.15)$.
4. Comparer la trajectoire de votre estimation de r_t obtenu en utilisant l'estimation de x_t par filtrage avec la trajectoire des rendements observées.