Projet 3 (***) : Estimation du modèle à volatilité stochastique de Taylor par distance L_2

Le but de ce projet est de découvrir puis d'appliquer une méthode d'estimation pour le modèle à volatilité stochastique de Taylor alternative à la méthode par Quasi Maximum de Vraisemblance. Cette approche s'appuie sur un critère de minimisation L_2 et une stratégie de déconvolution permettant de filtrer le bruit des observations grâce à la transformée de Fourier pour retrouver les paramètres du modèle.

1 Estimation par minimisation L_2 dans le modèle de Taylor :

Considérons le modèle à volatilité stochastique suivant :

$$\begin{cases} R_{i+1} = \exp\left(\frac{X_{i+1}}{2}\right)\xi_{i+1}^{\beta}, \\ X_{i+1} = \phi_0 X_i + \eta_{i+1}, \end{cases} \tag{1}$$

Les bruits ξ_{i+1} et η_{i+1} sont deux v.a. i.i.d centrées et de variances σ_ξ^2 et σ_0^2 respectivement et nous supposons $|\phi_0| < 1$ pour la stationnarité et l'ergodicité du processus X.

En appliquant la log-transformation $Y_{i+1} = \log(R_{i+1}^2) - \mathbb{E}[\log(\xi_{i+1}^{2\beta})]$ et $\varepsilon_{i+1} = \beta\log(\xi_{i+1}^2) - \tilde{\mathcal{E}}$ où $\tilde{\mathcal{E}} = \beta\mathbb{E}[\log(\xi_{i+1}^2)]$, le modèle log-SV est donné par :

$$\begin{cases} Y_{i+1} = X_{i+1} + \varepsilon_{i+1} \\ X_{i+1} = \phi_0 X_i + \eta_{i+1}, \end{cases} \tag{2}$$

On note $\theta_0 = (\phi_0, \sigma_0^2)$ le vecteur de paramètres inconnu à estimer à partir des observations $(Y_i)_{i\geq 1}$.

1.1 Procédure d'estimation

Notations : On note : $u^*(t) = \int e^{itx}u(x)dx$ la transformée de Fourier de la fonction $u(x)$ et $\langle u, v\rangle = \int u(x)v(x)dx$. On note $||u||_2 = \left(\int |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ la norme de $u(x)$ sur l'espace des fonctions $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Par propriété de la transformée de Fourier, on a $(u^*)^*(x) = 2\pi u(-x)$ et $\langle u_1, u_2\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle u_1^*, u_2^*\rangle$.

La méthode d'estimation est basée sur la minimisation de la distance L_2 définie :

$$||l_\theta - l_{\theta_0}||_2^2 - ||l_{\theta_0}||_2^2$$

où la fonction l_θ est donnée par $l_\theta(x) = \phi x f_\theta(x)$ avec f_θ la densité stationnaire de X_i. Ainsi, au point $\theta = \theta_0$ cette distance est minimale et vaut $-||l_{\theta_0}||_2^2$. Mais, comme cette distance à minimiser est inconnue puisqu'elle dépend du vecteur θ_0 à estimer nous allons considérer une version empirique de ce critère :

$$\mathbf{P}_n m_\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_\theta(\mathbf{Y}_i), \tag{3}$$

avec n le nombre d'observations, $\mathbf{Y}_i = (Y_i, Y_{i+1})$ et :

$$m_\theta(\mathbf{y}_i) : (\theta, \mathbf{y}_i) \in (\Theta \times \mathbb{R}^2) \mapsto m_\theta(\mathbf{y}_i) = ||l_\theta||_2^2 - 2y_{i+1}u^*_{l_\theta}(y_i),$$

où la fonction u_v est donnée par $u_v(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{v^*(-x)}{f^*_\varepsilon(x)}$.

Donnons quelques explications au choix de cette version empirique (3). Dans le modèle 2, les variables $\mathbf{Y}_i$ ne sont pas i.i.d. Néanmoins, par hypothèse elles sont stationnaires et ergodiques ce qui va nous garantir la convergence de $\mathbf{P}_n m_\theta$ vers $\mathbf{P}m_\theta = \mathbb{E}\left[m_\theta(\mathbf{Y}_1)\right]$ quand n tend vers l'infini par le théorème ergodique. Et, si nous calculons la limite $\mathbb{E}\left[m_\theta(\mathbf{Y}_1)\right]$ on peut montrer qu'elle vaut

$$\mathbb{E}\left[m_\theta(\mathbf{Y}_1)\right] = \|l_\theta - l_{\theta_0}\|_2^2 - \|l_{\theta_0}\|_2^2\,.$$

qui est la distance au départ que nous souhaitions minimiser ! L'estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ_0 sera obtenu comme

$$\widehat{\theta}_n = \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbf{P}_n m_\theta$$

.

1.2 Applications pour le modèle SV (2)

1. Montrer le résultat : $\mathbb{E}\left[m_\theta(\mathbf{Y}_1)\right] = \|l_\theta - l_{\theta_0}\|_2^2 - \|l_{\theta_0}\|_2^2\,.$
2. Pour calculer le critère empirique (3) pour le modèle SV (2), nous avons besoin de :
   - la norme $\|l_{\theta_0}\|_2^2$. Montrer que

     $$\|l_{\theta_0}\|_2^2 = \frac{\phi^2\gamma}{4\sqrt{\pi}}$$

     .
     où $\gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\phi^2}}$.
   - la transformée de Fourier des bruits ε_{i+1} donnée $f^*_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{i\beta x}\Gamma(\frac{1}{2} + i\beta x)e^{-i\mathcal{E}x}$ où $\mathcal{E} = \beta\mathbb{E}[\log(\xi^2_{i+1})] = -1.27\beta$ et Var$[\varepsilon_{i+1}]$= $\sigma^2_\varepsilon = \beta^2\frac{\pi^2}{2}$. Ici, Γ représente la fonction gamma donnée par :

     $$\Gamma : u \to \int_0^{+\infty} t^{u-1}e^{-t}dt \qquad \forall u \in \mathbb{C} \text{ such that } \mathcal{R}_e(u) > 0.$$

   - la fonction de déconvolution $u_{l_\theta}(y)$ donnée par $u_{l_\theta}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{-i\phi y\gamma^2\exp\left(\frac{-y^2}{2}\gamma^2\right)}{exp(-i\mathcal{E}y)2^{i\beta y}\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\beta y\right)}\right)$.

L'estimateur par minimisation obtenu est donc :

$$\widehat{\theta}_n = \arg\min_{\theta \in \Theta} \left\{ \frac{\phi^2 \gamma}{4\sqrt{\pi}} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} Y_{i+1} u^*_{l_\theta}(Y_i) \right\}, \tag{4}$$

où Θ est donné par $[-1+r; 1-r] \times [\sigma^2_{min}; \sigma^2_{max}]$ avec r, σ^2_{min} et σ^2_{max} des constantes réelles positives.

3. Simuler des données sous le modèle (1) et construire les données $(Y_i)_{i=1=1,\ldots n}$ avec les paramètres suivants : $\theta_0 = (0.7, 0.3)$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{5\pi}}$, $n = 1000$.
4. Construire l'estimateur (4) de θ_0 en essayant différentes plages d'initialisations de $\theta \in \Theta$.
5. Comparer vos résultats avec l'estimation par Quasi Maximum de vraisemblance du modèle (2). Conclure.