ПУТИ ФИЛОСОФИИ

THE WAYS OF PHILOSOPHY

BERTRAND RUSSELL

MATHEMATICAL LOGIC AS BASED ON THE THEORY OF TYPES

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL PHILOSOPHY

WILLARD VAN ORMAN QUINE

SET THEORY AND ITS LOGIC

KURT GÖDEL

RUSSELL'S MATHEMATICAL LOGIC

БЕРТРАН РАССЕЛ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ФИЛОСОФИЮ

ИЗБРАННЫЕ РАБОТЫ

Сибирское университетское издательство
2007

УДК 10 (09)
ББК 87.3
Р24

Перевод с английского

Суровцев В. А.:
Математическая логика, основанная на теории типов

Целищев В. В.:
Введение в математическую философию

В. Куайн Расселовская теория типов

К. Гёдель Расселовская математическая логика

В оформлении обложки использована миниатюра «Рыбы», представленная в английском рукописном бестиарии конца XII в. (РНБ, Лат. Q.v.V.I, XII в., л. 73)

Рассел Б.

Р24 Введение в математическую философию. Избранные работы [Текст] / Бертран Рассел; вступ. статья В. А. Суровцева; пер. с англ. В. В. Целищева, В. А. Суровцева. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007. — 264 с. — (Пути философии).

ISBN-10: 5-379-00306-0
ISBN-13: 978-5-379-00306-7

Настоящий том включает труды Бертрана Рассела, посвященные логике и основаниям математики. «Математическая логика, основанная на теории типов» — самая известная и наиболее цитируемая работа Рассела в области математической логики. Во «Введении в математическую философию» Бертран Рассел в популярной форме пересказывает Principia Mathematica (базовый труд Рассела, написанный совместно с А. Уайтхедом), особо акцентируя внимание на философской значимости достигнутых результатов. В этой работе также нашли отражение взгляды Рассела на природу математики.

В приложении публикуются классические работы Билларда Куайна и Курта Гёделя, посвященные математической философии Рассела.

УДК 10 (09)
ББК 87.3

ISBN-10: 5-379-00306-0
ISBN-13: 978-5-379-00306-7

В. А. Суровцев

ПРОГРАММА ЛОГИЦИЗМА И ТЕОРИЯ ТИПОВ БЕРТРАНА РАССЕЛА[1]

Настоящий том включает работы Бертрана Рассела, посвященные логике и основаниям математики. Работа Рассела «Математическая логика, основанная на теории типов», впервые опубликованная в 1908 г. в *American Journal of Mathematics* и с тех пор неоднократно переиздававшаяся, является самой известной и наиболее цитируемой его работой в области математической логики. В этой работе Б. Рассел впервые дает развернутое решение логических парадоксов, основанное на разработанной им теории типов. Содержание статьи в существенных чертах совпадает с первым томом опубликованного в 1910–1913 гг. монументального трехтомного труда *Principia Mathematica*, написанного Б. Расселом в соавторстве с А. Н. Уайтхедом. Компактность статьи и ясность изложения дает хорошую возможность без излишних деталей проследить магистральную идею разветвленной теории типов с точки зрения ее формального построения и то, как она отражается на различных разделах математики и ее оснований.

В ином жанре написана книга *Введение в математическую философию* (1920). Ее задача — популяризировать идеи *Principia Mathematica*, особо акцентируя внимание на философской значимости достигнутых результатов. Ее основное достоинство заключается в том, что весьма сложные технические результаты применения логики к математике облечены в доступную форму, насколько это вообще возможно в столь специальной области философии. В этой книги также нашли отражение взгляды Рассела на природу математики в рамках логицистского тезиса сведения математики к логике. Цель нижеследующего текста — ввести идеи Рассела в контекст программы логицизма, в русле которого развивались его взгляды на природу математики.

Как указывает П. Бенацерраф: «Логицизм укладывается в несколько различных версий, каждая со своими новшествами, но большинство из этих версий имеет следующую общую структуру: 1. Истины арифметики *переводимы* в истины логики; 2. (1) демонстрируется тем, что (а) устанавливаются определения для «внелогического» словаря (понятий) арифметики в «сугубо логических» терминах и (b) отмечается, что переводы, санкционированные этими определениями, перевели арифметические истины в логические истины, а арифметически ложные утверждения — в логически ложные; 3. Относительно этой арифметической демонстрации затем утверждается, что обоснована аналитичность математических пропозиций, потому что (а) поскольку определения по предположению сохраняют значение, логические переводы имеют то же самое значение, что и арифметические оригиналы и (b) *сами* логические истины мыс-

---

[1] При поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-06-00185-а.

лятся истинными в силу значения, в данном случае — значений встречающихся в них логических частиц (и, таким образом, аналитическими)»[1].

В общих чертах задачу выражения внелогического словаря арифметики в логических терминах осуществил Г. Фреге, сведя основное понятие математики, понятие целого положительного числа, к категориям логики[2]. Он предложил рассматривать число как общее свойство произвольных классов, между элементами которых можно установить взаимнооднозначное соответствие. При этом класс рассматривался как объем некоторого понятия. Например, если считать, что все философы, и только они, — мудрецы, то объем понятий «философ» и «мудрец» характеризует одно и то же число, поскольку с каждым элементом, подпадающим под одно понятие можно соотнести только один элемент, подпадающий под другое понятие. Если отвлечься от содержательной стороны примера, то можно говорить, что если у нас есть класс $\{a, b, c\}$ и класс $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, где $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ — элементы произвольной природы, то эти классы имеют одно и то же число, поскольку мы можем взаимнооднозначно соотнести их элементы, скажем так: a с α, b с β и c с γ. Этот подход нетрудно распространить на классы со сколь угодно большим количеством элементов.

При этом следует отметить, что понятие Фреге понимает как одноместную функцию, областью определения которой являются элементы произвольной природы, а областью значения истина и ложь. Так, например, понятие «философ» выражает функцию «x — философ», где для определенных значений x, высказывания «a — философ», «b — философ» и т. д. будут истинными, а для других ложными. Объем понятия «философ» в этом случае будет образовывать класс предметов, которым функция «x — философ» сопоставляет значение «истина». Если подобного рода функции представить в виде fx и qx, то можно сказать, что им соответствует одно и то же число в том случае, когда классы элементов, которым они сопоставляют значение истина, находятся во взаимнооднозначном соответствии.

Предыдущее рассуждение еще не дает понятия конкретных чисел, оно дает только понятие равночисленности классов. Для того чтобы получить понятия конкретных чисел, нужно указать способ установления равночисленности. Для этого необходимо выделить некоторый класс, равночисленность с которым, т. е. взаимнооднозначное соответствие с его элементами элементов другого класса, будет давать один и тот же результат. Что здесь имеется в виду? Допустим, у нас есть способ взаимнооднозначно соотнести области определения fx и qx. Эта процедура не требует понятия о конкретном числе. Действительно, если fx указывает на класс ожидаемых гостей, а qx на класс столовых приборов, то можно сказать, что эти классы равночисленны, поскольку, независимо от того, сколько придет гостей, столовых приборов окажется ровно столько же. Но нам требуется не просто возможность взаимного соотнесения элементов классов, необходимо также, чтобы мы могли ответить на вопрос «сколько именно таких элементов?».

Самым простым, видимо, было бы выбрать какой-то конкретный класс и считать, что то или иное определенное число соответствует всем классам, находящимся с этим выбранным классом во взаимнооднозначном соответствии.

---

[1] Бенацерраф П. *Фреге: последний логицист // Логика, онтология, язык.* Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 195.

[2] Frege G. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau, 1884. (Русский перевод: Фреге Г. Основоположения арифметики. Томск: Водолей, 2000.)

Например, мы могли бы сказать, что число два соответствует всем тем классам, которые находятся во взаимнооднозначном соответствии с классом спутников Марса, а число три — всем тем классам, которые находятся во взаимнооднозначном соответствии с классом граций и т. д. Но такое определение было бы эмпирическим, а потому бесполезным для целей математики, поскольку зависело бы от действительного существования таких классов. Если же при определении математических понятий мы ориентируемся на логику, чье содержание образуют аналитические, а не синтетические положения, то определения должны вводиться так, чтобы никоим образом не зависеть от реального положения дел.

Фреге находит выход, апеллируя к классам, существование которых не зависит от эмпирической природы. Рассмотрим функцию «$x \neq x$». Область ее определения равна пустому классу (обозначим его как $\varnothing$), поскольку ни для одного предмета она не является истинной. Это положение Фреге считает аналитическим (т. е. чисто логическим), поскольку невозможно предположить существование предмета, неравного самому себе. Самотождественность предмета Фреге, следуя Канту, рассматривает как исходный пункт познания, зафиксированный логически законом тождества $a = a$. Теперь можно ввести определение 0. 0 — это число, которое соответствует всем тем классам, которые находятся во взаимнооднозначном соответствии с $\varnothing$. Далее, раз у нас есть $\varnothing$, мы можем образовать класс, состоящий из этого элемента, т. е. $\{\varnothing\}$, и этот класс задает число, которое соответствует всем тем классам, которые ему равночисленны, а именно, число 1. Из уже имеющихся элементов $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ образуется следующий класс: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, взаимнооднозначное соответствие с которым образует число два. Этот процесс не трудно продолжить, и в результате мы получаем ряд: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$... В этом случае мы получаем определения чисел, которые не зависят от эмпирических характеристик классов, находящихся во взаимнооднозначном соответствии, но основываются исключительно на аналитическом положении о ложности функции «$x \neq x$» для любых аргументов. Отметим, что такой подход не только задает определение конкретных чисел, но и сохраняет все свойства, обычно приписываемые натуральному числовому ряду.

Такой способ определения числа и числового ряда представляется вполне естественным, если бы не одно «но». Оказалось, что подход Фреге не свободен от противоречий.

Прежде чем перейти к противоречиям, обратим внимание на одну особенность фрегеанского способа задания классов. Под классом Фреге понимает любую совокупность элементов, имея в виду, что элементы не специфицированы, т. е. они сами могут быть классами других или тех же самых элементов. Возьмем, например, приведенный выше пример с классами $\{a, b, c\}$ и $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Поскольку на образование классов не накладывается никаких ограничений, каждый из элементов второго класса может быть любым элементом, в том числе классом, составленным из элементов первого класса. Скажем, элемент α может представлять собой класс $\{a, b, c\}$. В этом случае второй класс представлял бы собой $\{\{a, b, c\}, \beta, \gamma\}$, где первый элемент полностью соответствует первому классу. Аналогичное относится и к другим элементам как второго, так и первого класса. При предлагаемом Фреге определении числа это оказывается безразличным, поскольку взаимнооднозначное соответствие элементов сохраняется.

В том же самом смысле, в котором классы могут быть совокупностями любых элементов, неопределимыми являются и функции, которые рассматриваются как способ задания классов. Допустим, что fx задает в указанном выше смысле класс $\{a, b, c\}$и класс $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ в том отношении, что как раз данным аргументам она сопоставляет значение истина. Тогда, поскольку α есть $\{a, b, c\}$, оказывается, что в качестве одного из своих возможных аргументов fx имеет само себя, т. е. допустимо выражение $f(f\hat{x})$, задающее объем такого понятия, которое в качестве подпадающего под него элемента допускает свой собственный объем. Таким образом, оказывается, что в некоторых случаях класс может быть элементом самого себя, а функция своим собственным аргументом.

Но как раз здесь и возникает противоречие, которое обнаружил Рассел.

Рассел формулирует свой парадокс следующим образом: «Пусть w — это класс всех тех классов, которые не являются элементами самих себя. Тогда, каким бы ни был класс x, “x является элементом w” эквивалентно “x не является элементом x”. Поэтому, если x придать значение w, то “w является элементом w” эквивалентно “w не является элементом w”».

Для программы логицизма в фрегеанской трактовке парадокс Рассела был фатальным. Действительно, это противоречие важно как минимум тем, что оно было сформулировано в терминах теории классов, которая рассматривалась как связующее звено логики и математики. Парадокс Рассела показывает, что дело не в порядке с самыми простыми понятиями, если они приняты некритически. Определение числа у Фреге демонстрирует, каким образом, начиная с теории классов, можно свести математику к логике, поскольку класс всегда можно отождествить с объемом понятия. Но если и здесь есть противоречия, то либо не верна математика, либо отказывают наши познавательные установки, отражением которых является обычно принимаемая логика.

Рассел никогда не сомневался в двух вещах: во-первых, классическая математика верна; во-вторых, верен метод логицизма, т. е. предложенный Фреге проект выведения математики из логики. Из этих двух положений может следовать только то, что неверной является обычная трактовка логики. Что здесь не удовлетворяет Рассела? Обычная логика, как традиционная (субъектно-предикатная), так и созданная Фреге истинностно-функциональная, исходит из того, что подлежащим высказывания может быть все, что угодно. Рассел же считает, что это не так. Первоначально свое несогласие он выражает, формулируя так называемую простую теорию типов, правда, считая ее «лишь черновым наброском» решения парадоксов[1]. Конструктивная часть этой теории сводится к ограничениям на построение определенных объектов и запрету рассматривать их как аргументы соответствующих пропозициональных функций.

В терминах классов простую теорию типов можно описать следующим образом. Типы образуют иерархическую систему логических элементов, в которой необходимо строго различать классы и то, что их образует. Элементы класса всегда относятся к типу, низшему, чем сам класс. Так, если α, β, γ относятся к типу n, то образованные из них классы $\{\alpha\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\beta, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и т. д. относятся к типу $n + 1$. Низшим типом логических элементов Рассел считает индивиды, понимаемые как единичные, самостоятельно существующие предметы. Следующий логический тип образуют классы, составленные из индивидов; затем идут классы, образованные из классов, составленных из индивидов, и т. д. Пусть a, b, c ... — индивиды, относящиеся к типу 1, тогда классы $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$ ... образуют второй тип, классы $\{\{a\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c\}\}$ ... — третий тип и т. д.

---

[1] Russell B. *The Principles of Mathematics.* London: Allen & Unwin, Ltd, 1903. Приложение *B*.

Рассел формулирует следующее ограничение на образования подобных объектов: в рамках одного типа нельзя образовывать классы, которые состоят из элементов, относящихся к разным типам. С этой точки зрения незаконными образованиями являются конструкции типа $\{a, \{b, c\}\}$, $\{a, \{b, c\}\}$, $\{a, \{b, c\}, \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}\}$ и т. п. Данное ограничение действительно предотвращает источник парадокса, так как оно запрещает образовывать классы, являющиеся элементами самих себя.

Поскольку каждый класс задается с помощью функций, это решение легко воспроизвести и на этом уровне. Индивиды, т. е. элементы первого типа, являются аргументами функций, относящихся ко второму типу; сами эти функции могут быть аргументами функций следующего типа и т. д. В данном случае ограничение касается запрета образовывать функции, аргументами которых являются функции того же самого типа. Следовательно, так же как класс не может быть своим собственным элементом, так и функция не может быть своим собственным аргументом, т. е. конструкции типа $f(f\hat{x})$ являются незаконными.

Простая теория типов блокирует парадокс Рассела в различных его формулировках, рассматривая конструкции, на которых он основан, как бессмысленные образования. Более того, в рамках простой теории типов нельзя воспроизвести другие теоретико-множественные парадоксы (например, парадоксы Бурали-Форти и Кантора), поскольку каждый из них основан на допущении, что класс может быть своим собственным элементом. Казалось, математика, основанная на теории классов и далее на логике, при заданных ограничениях спасена. Но для Рассела простая теория типов действительно оказалась лишь черновым наброском.

Прежде чем перейти к дальнейшему развитию теории типов, следует указать, чем не удовлетворял Рассела ее первый вариант. В качестве узловых мы указали бы две причины:

1. Наличие других парадоксов, которые не разрешались простой теорией типов.

2. Неудовлетворительность понятия класса, которое Рассел стремится рассматривать как производное, а не как исходное понятие, что связано с преимуществами интенсионального, а не экстенсионального подхода к совокупностям предметов.

Интересно то, что обе эти причины оказались связанными настолько тесно, что указать, которая из них послужила источником разветвленной теории типов, практически невозможно. И, тем не менее, мы начнем с первой, поскольку она имеет объективный исторический источник, тогда как вторая укоренена в философских представлениях собственно Рассела.

Парадоксы, имеющие логический характер, т. е. основывающиеся на форме и истинностном значении высказываний, были известны давно. Самым старым из таких противоречий является так называемый парадокс лжеца. Допустим, кто-то говорит: «Я сейчас лгу». Попытка оценить истинность и ложность этого высказывание при любом ответе приводит к противоречию. Если оно истинно, то в силу выраженного им содержания его значение является ложным; если же оно ложно, то отрицает свое собственное содержание и, стало быть, является истинным. В рамках простой теории типов этот парадокс не разрешим.

Не разрешимы в рамках простой теории типов и другие противоречия, например, парадоксы Дж. Берри, Дж. Ришара, К. Греллинга. Все они имеют одну отличительную особенность, которую мы рассмотрим ниже, пока же в качестве примера остановимся на парадоксе Греллинга, который формулируется следующим образом:

Разделим все слова на два класса гетерологические и автологические по следующему принципу: признак гетерологичности означает, что слово не применимо к самому себе, а автологичность слова указывает, что оно характеризует и само себя. Например, слово «односложный» не является односложным, поэтому оно гетерологично, тогда как слово «многосложный» — само многосложно и, стало быть, является автологичным. Рассмотрим теперь само слово «гетерологический» и зададим вопрос, к какому из указанных классов принадлежит оно. Любой ответ дает противоречие, поскольку, если оно гетерологическое, то является автологическим, а если автологическое, то — гетерологическим.

С точки зрения Рассела эти парадоксы и парадоксы, указанные в предыдущем параграфе имеют один и тот же источник и, стало быть, должны иметь одно и то же решение. Это решение результируется в так называемой разветвленной теории типов. Источник парадоксов Рассел находит в их общей характеристике, которую он называет самореферентностью или рефлексивностью. Эта характеристика заключается в том, что, рассматривая все случаи из совокупности некоторого рода, мы затем пытаемся отнести эту совокупность к этому же роду, и в результате оказывается, что этот новый случай как относится, так и не относится к этому роду. Действительно, если мы вернемся к парадоксам, то все они указывают на общность, которая в качестве элемента включает предмет исходной формулировки. Так, *парадокс Рассела* в класс классов, не имеющих себя в качестве элементов, включает сам себя; *парадокс Лжеца* в общность оцениваемых высказываний включает само высказывание об оценке; *парадокс Греллинга* рассматривает термины, в которых производится различие на классы выражений, как включенные в сами эти классы. Аналогичные замечания относятся и к другим упомянутым парадоксам.

Из этого источника вытекает и принцип решения парадоксов. Характеризуя его как *принцип порочного круга*, Рассел формулирует следующее требование: «То, что включает *все* из совокупности, не должно быть элементом совокупности», подразумевая, что все то, что нарушает это правило, является бессмысленным.

В данной формулировке этот принцип является чисто отрицательным, поскольку он не дает критерий, какие конструкции считать осмысленными. Положительный критерий задается в рамках разветвленной теории типов, но допустимые в ней конструкции зависят от представлений Рассела о том, как можно задать совокупность, общность или класс элементов, выступающих подлежащим какого-то высказывания. Это требует рассмотрения второй из указанных выше причин дальнейшего развития теории типов.

Существенную роль здесь играет ряд соображений, имеющих сугубо философский характер. Рассела считает, что класс или совокупность можно задать двумя различными способами. Элементы класса можно перечислить или же указать определяющее свойство. Первый способ называется экстенсиональным, второй — интенсиональным. Рассел считает, что интенсиональный способ является более фундаментальным, поскольку экстенсиональное определение может быть всегда сведено к интенсиональному, тогда как обратное в общем случае неверно.

В контексте предыдущих замечаний это означает следующее: Класс философов мы, например, можем задать перечислением, указав, что к этому классу относятся *Сократ*, *Платон*, *Аристотель* и т. д. Подобный экстенсиональный способ задания класса работа не только кропотливая, но и неблагодарная, поскольку всегда можно пропустить элемент, который должен входить в этот класс. Действительно, простое перечисление характеризуется тем недостатком, что какой-то из элементов может быть пропущен. Здесь мы уже и не говорим, что перечисление нельзя применить для необозримых классов и, тем более, для классов бесконечных. Даже если предположить, пусть и не бесконечное, но достаточно продолжительное существование человеческого рода, мы не сможем экстенсионально определить класс философов, который, как и человеческий род, может оказаться как необозримым, так и бесконечным.

Из подобного рода соображений Рассел делает вывод, что гораздо удобнее, и более правильно, задавать класс через определяющее свойство (т. е. интенсионально), которое принадлежит его элементам. Как бы мы ни понимали свойство «быть философом», оно однозначно задает совокупность имеющих его элементов. В этом отношении свойство первичнее класса, поскольку свойству всегда соответствует класс, тогда как не всегда возможно задать класс с тем, чтобы не указать свойство, которому удовлетворяли бы все его элементы, и только они. В этом отношении Рассел считает, что свойство, задающее класс, является более фундаментальным, чем общность образующих этот класс элементов.

Здесь следует отметить еще один момент, имеющий непосредственное отношение к собственно философским представлениям Рассела. У него не вызывает сомнений наличие самостоятельно существующих (или, в его терминологии, субсистентных) вещей, гораздо хуже дело обстоит с образованными из них классами. Если существование *Сократа*, *Платона* и *Аристотеля* подтверждено опытом, то существование состоящего из них класса вывести из опыта нельзя. Классы являются результатом абстракции, а потому для Рассела представляют собой фикции, т. е. производные от элементов образования, которые мы можем создать, основываясь на общем свойстве последних. И действительно, в непосредственном знакомстве нам никогда не может быть дана общность {*Сократ*, *Платон*, *Аристотель*, ...}. Таким образом, при объяснении общностей или классов исходными являются не классы и индивиды, из которых они состоят, но свойства и индивиды, которые ими обладают. Другими словами, первичными для Рассела являются не классы, но свойства, которыми могут обладать индивиды и которые задают соответствующий класс.

Следуя Расселу, получается, что о классах вообще, конечных или же бесконечных, мы можем говорить только тогда, когда известно определяющее эти классы свойство. В этом отношении свойство является более примитивным элементом, чем класс, и именно оно должно рассматриваться в качестве исходного. Эту мысль Рассел проводит и на уровне функций. Определяющему свойству всегда соответствует пропозициональная функция, областью значения которой является истина, когда аргументами выступают элементы определимого данным свойством класса.

Итак, определяющие свойства и, стало быть, функции по отношению к классам первичны, это как раз и приводит к разветвленной теории типов. Все дело в том, что один и тот же класс можно задать с помощью различных пропозициональных функций. Так, например, при принятом выше допущении, что философы и только они являются мудрецами, функции «x — философ» и «x — мудрец» будут выполняться для одних и тех же аргументов и, следовательно, определять один и тот же класс. С точки зрения простой теории типов эти две функции будут относиться к одному и тому же типу, и мы можем обозначить их как fx и gx. Но с другими случаями дело обстоит не так просто. Возьмем два высказывания: «Сократ — мудрец» и «Сократ имеет все свойства философа». Первое из них образовано из функции вида fx, но относится ли к такому виду второе? Отметим, что во втором высказывании присутствует выражение «все», указывающее на некоторую общность, правда, общность не индивидов, но свойств. Тем не менее, это выражение относится к логическим элементам конструкции и при неверном подходе может привести к тем самым рефлексивным недоразумениям, о которых говорилось выше.

В «Сократ имеет все свойства философа» функция, место индивидной переменной в которой занимает *Сократ* (т. е. функция «x имеет все свойства философа»), включает еще одну переменную, которая пробегает по свойствам философа, какими бы мы себе их не представляли. Например, ее место могут занимать такие признаки как интеллектуальная честность, логичность и т. п. Таким образом, исходная функция, пробегающая по индивидам, включает еще одну функцию, область пробега которой представляет собой класс свойств. Правда, здесь следует учитывать, что индивидная переменная и переменная свойств играют в исходной функции разную роль.

Это различие связано с тем, что Рассел называет действительной и мнимой переменной. Действительная переменная предполагает *какое-то* значение, которое может изменяться, и с его изменением будет меняться и все высказывание. Мнимая же переменная не предполагает изменение высказывания, поскольку рассматриваются все ее возможные значения. В нашем примере роль действительной переменной играет индивидная переменная, поскольку замена *Сократа* на другие индивиды будет приводить к изменению высказывания, но переменная, указывающая на свойства, подразумевает их все, и, стало быть, пробег этой переменной никакого влияние на высказывание не оказывает. Здесь имеется в виду, что для любого свойства, если оно является свойством философа, то Сократ им обладает. Поэтому функция «x имеет все свойства философа» должна рассматриваться как $(f) . \phi(f\hat{x}, x)$, где $f\hat{x}$ пробегает по свойствам философов и является мнимой переменной, а x — действительной переменной.

Для Рассела очевидно, что конструкция типа $(f) . \phi(f\hat{x}, x)$ (далее будем обозначать ее как Fx) существенно отличается от конструкций типа fx, хотя они и могут задавать один и тот же класс. Здесь необходимо обращать внимание не только на тип аргумента, как было в простой теории типов, но и на порядок функции, который определяется структурными элементами, из которых она построена. Функции «x — мудрец» и «x имеет все свойства философа» относятся к разным порядкам, поскольку вторая из них помимо действительной индивидной переменной включает переменную, хотя и мнимую, относящуюся к другому типу, чем тип индивидной переменной. Рассел разводит порядки функций в соответствии с их конструкцией. Если функция содержит только индивидные переменные, то она относится к первому порядку, но если в структуру функции включена мнимая функциональная переменная, аргументами которой являются индивиды, то эта функция относится ко второму порядку и т. д. В разветвленной теории типов при установлении порядка fx и Fx необходимо обращать внимание не только на тип аргумента x, но и на характер построения f и F. Поэтому, несмотря на сходство аргументов, функции fx и Fx относятся к разным порядкам.

Таким образом, различие между простой и разветвленной теорией типов состоит в следующем. Как указывалось выше, для различения типов функций в простой теории достаточно установить различие в типе их аргументов. В разветвленной теории различие функций определяется к тому же порядком мнимых переменных, используемых при их построении. Поэтому, если с точки зрения простой теории типов fx и Fx относятся к одному и тому же типу, то в разветвленной теории типов они относятся к разным порядкам, поскольку при их построении используются разные типы аргументов. В данном случае, если индивиды относятся к типу 0 и x — индивидная переменная, то fx и Fx — к типу 1, но при этом fx относится к порядку 1, а Fx — к порядку 2.

Согласно порядку функций, соответствующую иерархию образуют и построенные из них высказывания. Элементарные высказывания (т. е. атомарные высказывания плюс истинностные функции атомарных высказываний) в совокупности с высказываниями, содержащими в качестве мнимых переменных только индивидные переменные, образуют первый логический тип. Высказывания, в качестве мнимых переменных включающие высказывания и функции первого логического типа, образуют общность, относящуюся ко второму логическому типу и т. д. В общем случае высказывания, включающие в качестве мнимых переменных высказывания и функции типа n, образуют общность типа $n + 1$.

Обратимся теперь к парадоксам. Источником парадоксов Рассел считает неограниченное использование функций вида Fx, в структуру которых входит указание на общность, заданную мнимыми переменными, относящимися к типу более высокому, чем тип их действительных аргументов. Именно они приводят к «рефлексивным или самореферентным недоразумениям», поскольку включенное в них указание на общность может, в том числе, подразумевать и сами эти функции. В этом случае функция Fx может оказаться значением включенной в нее мнимой переменной. Так, вернемся к примеру с функцией «x имеет все свойства философа». Здесь свойство «иметь все свойства философа» само является свойством философа и, значит, может быть значением мнимой переменной $f\hat{x}$ в $Fx = (f) \,.\, \phi(f\hat{x}, x)$. То есть здесь мы получаем порочный круг, так как Fx рассматривается как одно из возможных значений $f\hat{x}$, которое уже включено в ее же структуру. Таким образом, использование мнимых переменных в структуре функций необходимо ограничить, с тем чтобы конструкции, в которых функции могли бы предполагать сами себя в качестве аргументов, считались не истинными и не ложными, но бессмысленными. Для этого Рассел предлагает выход, аналогичный простой теории типов. Он ограничивает область пробега мнимых переменных, ограничивая их определенным типом.

Дальнейшее развитие теории типов связано с понятием предикативной функции, которая определяется как функция, относящаяся к порядку, следующему за порядком ее аргументов. Если вернуться к нашим примерам, то fx является предикативной функцией от x, тогда как функция $Fx = (f) \,.\, \phi(f\hat{x}, x)$ не является предикативной функцией от x, поскольку включает переменную $f\hat{x}$, более высокого типа, чем x.

Предикативные функции образуют строгую иерархию порядков, которая зависит от той общности, которую они предполагают. Все функции, с помощью которых построены атомарные высказывания, в указанном выше смысле, и высказывания, построенные из атомарных с помощью логических союзов (т. е. элементарные высказывания), являются предикативными функциями от индивидов. Они образуют общность, в которую входят функции вида fx, $\sim fx$, $fx \vee gx$, $fx \supset gx$, где x — индивидная переменная. Предикативные функции от индивидов Рассел обозначает как $f!x$ и относит их к первому порядку. Предикативные функции первого порядка образуют определенную целостность и $f!x$ может быть преобразована в мнимую переменную.

Функции, которые в свою структуру включают указание на другие свойства, относятся к более высоким порядкам. Так, $(f) \,.\, \phi(f\hat{x}, x)$ включает указание не только на индивиды, но и на общность их свойств. Такие функции не являются предикативными функциями от x и относятся ко второму порядку. Но они являются предикативными функциями от функций первого порядка и их можно записать в виде $\psi!(f!\hat{x})$. Функции второго порядка сами образуют целостность, выступая аргументами некоторой другой предикативной функции уже третьего порядка. Этот ряд можно продолжить далее до бесконечности.

Предикативность четко фиксирует порядок функции через указание совокупности ее возможных значений и позволяет ограничить использование мнимых переменных рамками одного типа. Так, например, если мы берем функцию «x имеет все свойства философа», то мы не можем преобразовать «свойство философа» в мнимую переменную до тех пор, пока не укажем, что эта функция является предикативной, т. е. пробег мнимой переменной, которую она включает, ограничен типом ниже ее самой. В этом случае свойство «иметь все свойства философа» относится к порядку более высокому, чем свойства философа, и не должно включаться в их совокупность.

Поэтому, если конструкция $(f) \,.\, \phi(f\hat{x}, x)$ и может приводить к недоразумениям, то конструкция $(f) \,.\, \phi!(f\hat{x}, x)$ является вполне законной, поскольку она предикативна, т. е. ограничена определенным типом, и не может включать в область определения $f\hat{x}$ саму функцию $Fx = (f) \,.\, \phi(f\hat{x}, x)$. Согласно порядку предикативных функций различается и тип высказываний, которые из них построены. Если считать, что индивиды относятся к типу 0, то высказывания включающие функции вида $f!x$, где мнимые переменные ограничены индивидными переменными, относятся к типу 1, функции вида $\phi!(f!\,\hat{x})$, где мнимые переменные ограничены предикативными функциями 1 порядка, — к типу 2 и т. д.

Стратификация функций и высказываний в рамках разветвленной теории типов дает Расселу позитивное решение парадоксов, для которых сформулированный выше принцип порочного круга выступал лишь негативным критерием. Дифференциация функций и построенных из них высказываний на типы и порядки ограничивает употребление такого выражения, как «все», которое не имеет универсального значения, но должно охватывать только строго определенный тип.

Нетрудно видеть, что разветвленная теория типов разрешает все парадоксы, типа парадокса Рассела, поскольку она сохраняет основной принцип простой теории типов, что функция не может быть своим собственным аргументом. Но, помимо того, она устраняет и остальные парадоксы, о которых выше шла речь.

Действительно, возьмем *парадокс Лжеца*. Когда кто-то говорит: «Я сейчас лгу», это, как считает Рассел, подразумевает: «Существует высказывание типа n, которое я утверждаю и которое ложно», но сама эта пропозиция должна относится к типу $n + 1$ и не может являться значением присутствующей в ней мнимой переменной, на которую указывает выражение *некоторое*. И это решает *парадокс Лжеца*.

Или возьмем *парадокс Греллинга*, который, согласно Ф. П. Рамсею, в разветвленной теории типов решается так:

Прилагательное является символом для пропозициональной функции, *например*, «ϕ» для $\phi\hat{x}$. Пусть R является отношением обозначения между «ϕ» и $\phi\hat{x}$. Тогда «w есть гетерологическое» представляет собой «$(\exists\phi) \,.\, wR(\phi\hat{x}) \,.\, {\sim}\phi w$». Здесь, как мы видели, мнимая переменная ϕ должна иметь определенную область значений (*например*, область элементарных функций), членом которой не может быть само $Fx = :. (\exists\phi) : xR(\phi\hat{x}) \,.\, {\sim}\phi x$. Поэтому само «гетерологическое» или «F» не является прилагательным в том смысле, в котором прилагательным является «ϕ». У нас нет $(\exists\phi) \,.\,$ «F»$R(\phi\hat{x})$, поскольку значение «F» не является функцией, включенной в область «ϕ». Поэтому, когда гетерологическое и автологическое определяются недвусмысленно, «гетерологическое» не является прилагательным в рассматриваемом смысле и не является ни гетерологическим, ни автологическим, и противоречия — нет[1].

Иными словами, функции *Fx* и *φx* относятся здесь к разным порядкам, поскольку *Fx*, в отличие от *φx*, не является предикативной функцией от *x*. И если мы должны выполнить требования разветвленной теории типов и сохранить предикативность мнимой переменной *φ*, то включать *Fx* в область ее возможных значений нельзя. Если мы это делаем, то получаем не противоречие, а бессмысленное выражение.

Предлагаемый Расселом подход к решению парадоксов в рамках разветвленной теории типов на первый взгляд кажется вполне оправданным, если бы он не приводил к некоторым нежелательным следствиям в математике, где ограничение, накладываемое на мнимые переменные, исключает весьма важные способы рассуждения. В условиях выдвинутого ограничения необоснованными оказываются те математические положения, которые предполагают указание на все свойства некоторых элементов или, что то же самое, на все функции от некоторых аргументов, независимо от их порядка. Самыми важными здесь, по-видимому, являются принцип математической индукции и дедекиндово сечение.

Принцип математической индукции лежит в основании арифметики, поскольку с его помощью устанавливаются общие свойства членов натурального ряда. Его можно сформулировать следующим образом: «Всякое свойство, предполагаемое 0, а также последующим элементом всякого числа, предполагающего это свойство, предполагается всеми числами натурального ряда». Приемлемый в рамках обычной арифметики этот принцип не соответствует требованиям разветвленной теории типов, поскольку, согласно сформулированному выше ограничению, указанная в этом принципе общность свойств должна быть ограничена определенным порядком и не может распространяться на все числа, о которых идет речь в этом принципе.

Дедекиндово сечение лежит в основании математического анализа, являясь наиболее удобным способом обоснования теории действительных чисел. Метод Дедекинда требует рассматривать действительные числа с точки зрения разбиения рациональных чисел на совокупности, обладающие определенным свойством. В этом случае действительное число представляет собой функцию, аргументом которой является рациональное число. Поскольку в математическом анализе часто используются положения, требующие указания на общность действительных чисел, то задающие их функции, согласно ограничению, накладываемому разветвленной теорией типов, должны быть ограничены некоторым порядком, допустим, n. Тогда, любая функция, включающая указание на общность порядка n, сама не будет задавать никакого действительного числа, поскольку будет относиться к порядку $n + 1$.

При таком подходе необоснованными оказываются наиболее фундаментальные положения математического анализа, например, теорема о существовании верхней границы, утверждающая, что для всякой ограниченной совокупности действительных чисел (или, что то же самое, для каждой ограниченной совокупности задающих их функций) существует действительное число a, которое удовлетворяет следующим условиям: 1) всякое число выбранной совокупности меньше или равно a; 2) для каждого действительного числа, которое меньше a, есть некоторое действительное число, больше его самого. Нетрудно заметить, что функция, задающая число a, должна относиться к порядку

[1] Рамсей Ф. П. *Основания математики* // Ф. П. Рамсей. *Философские работы.* Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. С. 36.

$n + 1$, поскольку указывает на общность функций порядка n. Следовательно, поскольку, как установлено выше, действительные числа задаются функциями порядка n, получается, что a не является действительным числом и теорема оказывается бессмысленной.

Поскольку Рассел не собирается отказываться ни от анализа, ни тем более от арифметики, единственный выход он видит в том, чтобы уравнять порядки функций от одного и того же аргумента. Действительно, в примерах с математической индукцией и теоремой о верхней границе вся проблема заключается в том, что вводимые посредством их функции оказываются на порядок выше, чем функции, об общности которых идет речь в формулировке, хотя они и относятся к одним и тем же аргументам. Следовательно, стоит лишь уменьшить порядок новых функций (а лучше всего эти порядки вообще игнорировать), сохранив различие только в типе аргументов. Каким образом это можно осуществить?

Следуя Расселу, будем называть все функции (независимо от их порядка) формально эквивалентными, если они истинны для одних и тех же аргументов. Формально эквивалентными, например, будут рассмотренные выше функции «x — мудрец» (т. е. fx) и «x имеет все свойства философа» (т. е. $(f) \,.\, \phi(f\hat{x}, x)$), хотя они и относятся к разным порядкам, поскольку первая из них является предикативной функцией от x, а вторая — нет. Стоить отметить, что эти функции взаимозаменимы в контексте в том смысле, что построенное с помощью одной из них высказывание, сохраняет свою истинность, если мы заменим одну функцию на другую. Например, истинными являются и высказывание «Сократ — мудрец», и высказывание «Сократ имеет все свойства философа». Таким образом, возможность замены $(f) \,.\, \phi(f\hat{x}, x)$ на fx уменьшает порядок функции, сохраняя тип аргумента. В общем случае можно предположить, что для любых непредикативных функции от x, относящихся к порядку более высокому, чем 1, можно отыскать предикативную функцию $f!x$, которая будет им формально эквивалентна, т. е. истинна для тех же самых аргументов.

Согласно данному выше определению, предикативная функция будет лишь по типу отличаться от своего аргумента и не будет порождать тех недоразумений, связанных с различием порядков функций, которые указаны выше в связи со способами математических рассуждений. Поэтому, если мы предположим, что для любой функции от x (где x не специфицирован, т. е. может быть как индивидом, так и функцией какого-то порядка) порядка $n + m$ может быть найдена предикативная функция от x (т. е. относящаяся к порядку n), то проблема будет решена.

Это предположение Рассел вводит в виде *аксиомы сводимости*: «Каждая пропозициональная функция для всех своих значений эквивалентна некоторой предикативной функции» или, формально, $\vdash :. (\exists f) :. (x) : \phi x \,.\equiv .\, f!x$.

Для функций «x — мудрец» (при соответствующем понимании свойства «быть мудрецом») и «x имеет все свойства философа» содержание этой аксиомы очевидно, но как сделать его очевидным для всех других случаев? Где гарантия, что подобная предикативная функция есть?

Такую гарантию Рассел находит в том, что формально эквивалентные функции задают один и тот же класс. Поэтому, в общем случае, все такие функции заменимы единственной функцией, а именно, «x есть элемент класса α». Эта функция, очевидно, является предикативной, поскольку ее аргумент всегда лишь одним порядком ниже ее самой. И хотя Рассел считает классы фикциями, оказывается, что эти фикции весьма удобны, коль скоро речь идет об уменьшении порядка функций. Более того, единственным разумным основанием введения классов он считает то, что они обеспечивают очевидность аксиоме сводимости. В частности, он утверждает, что если и возможен некоторый метод сведения порядка пропозициональной функции, не воздействующий на истинность и ложность ее значений, то здравый смысл достигает этого только введением классов.

Здравый смысл, к которому апеллирует Рассел, оказался бы еще более удобным, если бы можно было сразу начать с классов и образующих их индивидов, а не с индивидов и их свойств, что, как указывалось выше, считается более обоснованным. Ибо, как считает Рассел, если мы сразу предположим существование классов, аксиома сводимости станет ненужной. Но если мы начинаем со свойств, считая интенсиональный способ задания совокупностей элементов более фундаментальным, то без аксиомы сводимости не обойтись.

Впрочем, следует отметить, что аксиома сводимости основана на отождествлении всех формально эквивалентных функций с некоторыми предикативными функциями, тогда необходимо предполагать, что и первые, и вторые даны изначально. То есть все свойства, посредством которых можно интенсионально задать класс предметов, уже присутствуют, когда мы устанавливаем их наличие у определенных предметов. В этом случае, если бы у нас был способ однозначного отбора предикативных свойств из всех возможных свойств, то необходимость в аксиоме сводимости также отпала бы[1]. Однако такая способность к дифференциации свойств зависела бы от определенных эпистемологических способностей человека, которую, хотя и можно предполагать, но в рамках математики, как она представлена с точки зрения разветвленной теории типов, обосновать можно только аксиоматически.

Как бы там ни было, аксиоматическое сведение порядков различных функций от одного и того же аргумента через отождествление их с предикативной функцией от того же самого аргумента означает только то, что разветвленная теория типов сводится к простой теории типов, как она сформулирована выше. Действительно, из всех различий порядков функций аксиома сводимости оставляет только то, чтобы предикативная функция (формально эквивалентная всем функциям от одного и того же аргумента) была на порядок выше своего аргумента. Это означает лишь то, что предикативная функция не может быть своим собственным аргументом и, соответственно, класс, который задается данной функцией, не может быть своим собственным элементом.

Из аксиомы сводимости вытекает одно весьма важное следствие: Если понятие предикативной функции тождественно понятию класса, то построение формальной теории можно начинать не с индивидов и свойств, а с классов. Но отождествление предикативных функций с классами возвращает нас к проблемам, которые были сформулированы выше. Первая из них связана с более широкой совокупностью парадоксов, для решения которых и была предназначена разветвленная теория типов. Вторая проблема относится к тому, каким образом задаются классы, если мы исходим из интенсионального подхода, т. е. считаем, что класс задается свойством, пусть и предикативным.

Остановимся на первой проблеме. Поскольку аксиома сводимости позволяет отождествить функции различных порядков с предикативными функциями, может возникнуть подозрение, что вновь объявятся парадоксы, которые уже обсуждались. Однако здесь следует учесть, что Рассел ограничивает применение аксиомы сводимости лишь высказываниями математики. Он считает, что при формулировке парадоксов второй группы задействуются понятия, не имеющие к математике никакого отношения. Поэтому, если мы ограничимся лишь математическими положениями, суть которых Рассел видит в их экстен-

[1] На это, кстати, указывал уже Д. Гильберт. (См.: Гильберт Д., Аккерман В. *Основы теоретической логики.* М.: ИЛ, 1947. С. 231.)

сиональности, т. е. в неразличимости формально эквивалентных функций, то проблем не возникает. Действительно, если считать, что сущность математики заключается в экстенсиональном подходе, то все содержательные различия, связанные с порядком функций, исчезают. Так, если мы задаем класс некоторых предметов, то для математики важно лишь то, чтобы он был задан однозначно, а какие при этом используются функции — безразлично. Допустим, например, что нас интересует класс из *n* элементов, и оказалось, что элементы этого класса являются философами. Для того чтобы задействовать этот класс в вычислительных процедурах, совершенно безразлично, с помощью какой функции мы его зададим, «x — мудрец» (т. е. fx) или «x имеет все свойства философа» (т. е. $(f) \cdot \phi(f\hat{x}, x)$). Все преобразования с классами, например, установление взаимнооднозначного соответствия или операции пересечения и объединения, будут сохраняться.

Конечно, как показал Рассел, введение классов само не свободно от парадоксов. Но аксиома сводимости сохраняет простую теорию типов, поскольку требование предикативности функции, задающей класс, указывает на то, что сама эта функция не может быть своим собственным аргументом. То есть парадоксы, типа парадокса Рассела, не проходят и с принятием этой аксиомы.

Зачем тогда все-таки понадобилась разветвленная теория типов? Здесь следует высказать некоторые соображения. Если бы Рассел изначально ограничился математикой, то разветвленная теория типов была бы не нужна. Но он начинает с более общих проблем, а именно, с проблем непарадоксального языка. Разветвленная теория типов — это не теория математики. Это более общая теория, которая стремится согласовать способы выражения с их непротиворечивостью. Математика же использует частный язык, который получается посредством ограничения общих средств непротиворечивых выражений. Аксиома сводимости, для Рассела, как раз и есть такой способ ограничения, с помощью которого мы из обычных средств выражения получаем то, что непротиворечиво можно сказать на языке математики. Вероятно, можно утверждать, что аксиома сводимости — одна из самых философских концепций Рассела, касающихся математики, ибо именно она сводит общие средства выражения к выражениям математики или, скорее, указывает на то, что считать ее выражениями, предполагая некоторые упрощения в их структуре.

Несмотря на то, что в рамках расселовского подхода аксиома сводимости представляется вполне естественной и, вообще говоря, является отличительной чертой расселовского логицизма, именно она подверглась наиболее серьезной критике. Здесь достаточно указать на помещенные в приложении к данному тому тексты В. Куайна и К. Гёделя, где критика приводящих к ней допущений и вытекающих из нее следствий занимает значительное место. Наибольшее нарекание, как правило, вызывает трактовка этой аксиомы как логического принципа. Действительно, если программа логицизма связывает обоснование математики с переводом ее утверждений в утверждения логики, то и аксиома сводимости должна оказаться логическим принципом. Но, как убедительно показал Ф. П. Рамсей, это положение не является аналитической истиной, поскольку возможно сконструировать модель, в которой она оказывается ложной[1].

В этом проглядывает принципиальный недочет расселовского проекта сведения математики к логике. Этот недочет связан с тем, что Рассел нигде не устанавливает однозначный критерий того, что считать утверждением математики, а, следовательно, логики. Он указывает на то, что в математике речь идет

[1] Рамсей Ф. П. *Основания математики.* С. 60.

не о конкретных предметах, их признаках и отношениях, но о *произвольных* предметах и их возможных *всех* или *каких-то* свойствах и *всех* или *каких-то* отношениях. В этом случае предметы, свойства и отношения представлены переменными; остаются лишь логические константы «некоторые», «все», «какой-то» и т. д. Оперирование переменными и логическими константами Рассел считает основным признаком математической истины, определяя чистую математику как: «класс всех пропозиций формы "*p* влечет *q*", где *p* и *q* суть пропозиции, которые содержат одну или более переменных, одинаковых для обеих пропозиций, и ни *p*, и ни *q* не содержат каких-либо констант, кроме логических»[1]. Таким образом, необходимым признаком математической истины Рассел считает общность формы. То есть специфику математической истины он видит в том, что она относится не к какой-то определенной вещи или классу вещей, но ко всем вещам или каким-то классам вещей. Этот признак необходим, но является ли он достаточным?

Для отрицательного ответа на этот вопрос воспользуемся примером Ф. П. Рамсея: «Возьмем, например, "Любые две вещи различаются по крайней мере тридцатью способами"; это совершенно общая пропозиция, ее можно выразить как следствие, включающее только логические константы и переменные, и она вполне могла бы быть истинной. Но никто не может рассматривать ее как математическую или логическую истину; она совершенно отлична от такой пропозиции как "Любые две вещи в совокупности с любыми другими двумя вещами дают четыре вещи", которая является логической, а не просто эмпирической истиной»[2]. Пример наглядно демонстрирует, что признак общности для математических утверждений явно недостаточен. Необходим какой-то дополнительный критерий, которого Рассел так и не дает.

Принципиальную неполноту подхода Рассела отмечает Р. Карнап, который, рассматривая историю становления программы логицизма, различает два тезиса логицизма: тезис определимости и тезис доказуемости[3]. Математика сводима к логике в смысле первого тезиса, если все понятия математики посредством явных определений могут быть выведены из понятий логики (в частности, понятие числа должно быть определено в рамках логической системы только с использованием логических союзов, кванторов и равенства). Реализация тезиса доказуемости должна привести к тому, что, при условии выполнения первого тезиса, все теоремы арифметики выводимы из аксиом логики с использованием стандартных логических процедур. Р. Карнап утверждает, что Фреге и Рассел понимали программу логицизма в смысле выполнимости первого тезиса. И только Рамсей, с точки зрения поставленной им задачи дополнить признак полной обобщенности предложений математики признаком их тавтологичности, по сути дела уже предвосхитил, как считает Карнап, его дистинкцию, осознав недостаточность выполнения первого тезиса.

Действительно, дальнейшее развитие программы логицизма в большей степени связано с именем Ф. П. Рамсея, который попытался восполнить принципиальный недостаток подхода Рассела, указав недостаточность критерия общности математических утверждений. В качестве достаточного критерия он вводит признак тавтологичности в смысле Витгенштейна. Рамсей считает, что помимо

[1] Russell B. *The Principles of Mathematics.* London: Allen & Unwin, Ltd, 1903. P. 3.

[2] Рамсей Ф. П. *Основания математики.* С. 17.

[3] Carnap R. *The Logicist Foundations of Mathematics // Philosophy of Mathematics* (eds. Benacerraf P., Putnam H.). Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964. P. 31–41.

совершенно общего содержания утверждения математики должны быть тавтологичны по форме, т. е. аналитически истинными. В этом отношении аксиома сводимости безусловно не является логическим принципом. И от нее в рамках программы сведения математики к логике следует избавиться. Рамсей добивается этого построением теории типов, основанной на совершенно иных принципах. Он отказывается от универсальности принципа порочного круга, разводя парадоксы на две группы: логические и семантические. К первой относятся парадоксы Рассела, Кантора и Бурали-Форти, ко второй — парадоксы Лжеца, Греллинга, Ришара и т. п. С точки зрения Рамсея, для решения первых достаточно простой теории типов. Вторые базируются на принципиально иных основаниях. Если парадоксы первой группы связаны с природой математических объектов и действительно относятся к математике и принятым в ней способам рассуждения, то парадоксы второй группы связаны с избранными способами выражения и к содержанию математики никакого отношения не имеют. Как считает Рамсей, для их решения достаточно развести объективную область значения функций и средства выражения этих функций. Этого будет вполне достаточно, так как тип функций будет характеризовать то, что относится к их объективному значению, а порядок — к способу их выражения. Таким образом, порядок не является объективной характеристикой математических утверждений, и в рамках математических утверждений его можно игнорировать, отдавая решение парадоксов второй группы в компетенцию адекватно понятой системы обозначения. Нетрудно заметить, что в этом случае аксиома сводимости становится излишней. Следует отметить, что по результатам теория типов Рамсея совпадает с теорией типов Рассела и в рамках теоретико-типового подхода может вполне ее заменить, но она свободна от сомнительных допущений, типа аксиомы сводимости.

В заключение нельзя не упомянуть еще о двух допущениях, вводимых Расселом в структуру *Principia Mathematica*. Имеются в виду аксиома бесконечности и аксиома мультипликативности. Не останавливаясь подробно на содержании этих принципов, укажем, что они характеризуют не только теоретико-типовой подход Рассела, в отличие, скажем, от аксиомы сводимости, являющейся отличительной чертой расселовской теории типов. Аксиома бесконечности и аксиома мультипликативности, более известная как асиома выбора, характеризуют и аксиоматический подход к теории множеств, развитый Е. Цермело и его последователями. Этот подход изначально не ставил перед собой философской задачи, типа задачи сведения математики к логике[1]. Но в его рамках было убедительно показано, что каких-либо значительных результатов в рамках теории множеств без этих принципов достигнуто быть не может. Несмотря на усилия Ф. П. Рамсея, который стремился представить их в виде тавтологий[2], в общем можно считать доказанным, что эти положения не являются чисто логическими и не могут быть выведены из сугубо логических принципов. Все это ставит вопрос об обоснованности логицистской программы в целом. Но, несмотря на то, что в полном объеме эта программа оказалась невыполнимой (здесь мы даже не касаемся ограничительных результатов К. Гёделя), работы Б. Рассела, безусловно, составили целую эпоху в математической логике и основаниях математики, а его математическая философия еще долгое время будет источником плодотворных идей в этой области.

---

[1] О философской интерпретации аксиоматического подхода к теории множеств см.: Целищев В. В. *Философия математики.* Новосибирск: Наука, 2002.

[2] Рамсей Ф. П. *Основания математики.* С. 61–64.

Б. РАССЕЛ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, ОСНОВАННАЯ НА ТЕОРИИ ТИПОВ*

(1908)

* Russell B. *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types* // B. Russell. *Logic and Knowledge (Essays 1901–1950)*. London: Allen and Unwin, Ltd, 1956.

Перевод В. А. Суровцева.

Нижеследующая теория символической логики зарекомендовала себя прежде всего своей способностью решать определенные противоречия, из которых математикам лучше всего известен парадокс Бурали-Форти, касающийся наибольшего ординала[1]. Но рассматриваемая теория не зависит всецело от этой косвенной рекомендации; она, если я не ошибаюсь, к тому же определенно созвучна здравому смыслу, который в своей основе делает ее правдоподобной. Однако это не та заслуга, на которой следовало бы слишком настаивать, ибо здравый смысл в гораздо большей степени подвержен ошибкам, чем обычно считается. Таким образом, я начну с формулировки некоторых противоречий, которые должны быть разрешены, а затем покажу, каким образом теория логических типов формирует свое решение.

I. ПАРАДОКСЫ

(1) Старейшим противоречием рассматриваемого вида является *парадокс Эпименида*. Критянин Эпименид сказал, что все критяне лжецы и все высказывания, сделанные критянами, определенно ложны. Ложно ли высказывание самого Эпименида? Простейшую форму этого противоречия предоставляет человек, который говорит «Я сейчас лгу»; если он лжет, он говорит правду, и наоборот.

(2) Пусть w — это класс всех тех классов, которые не являются элементами самих себя. Тогда, каким бы ни был класс x, «x является элементом w» эквивалентно «x не является элементом x»[2]. Поэтому, если x придать значение w, то «w является элементом w» эквивалентно «w не является элементом w».

(3) Пусть T — отношение, которое имеет место между двумя отношениями R и S всегда, когда R не имеет отношения R к S. Тогда, какими бы ни были отношения R и S, «R имеет отношение T к S» эквивалентно «R не имеет отношение R к S». Следовательно, если придать значение T как R, так и S, то «T имеет отношение T к T» эквивалентно «T не имеет отношения T к T».

(4) Число слов в названиях конечных целых чисел возрастает по мере возрастания чисел и должно постепенно увеличиваться неогра-

---

[1] См. ниже.

[2] Две пропозиции называются эквивалентными, когда обе они истины или обе ложны.

ниченно, поскольку при заданном конечном числе слов может быть создано только конечное число имен. Поэтому имена некоторых чисел должны состоять по меньшей мере из десяти слов, и среди них должно быть наименьшее. Следовательно, «наименьшее целое число, не именуемое менее чем десятью словами» должно обозначать определенное число. Но «наименьшее целое число, не именуемое менее чем десятью словами» само является именем, состоящим из девяти слов; стало быть, наименьшее целое число, не именуемое менее чем десятью словами, может быть наименовано девятью словами, что является противоречием[1].

(5) Среди трансфинитных ординалов некоторые могут быть определены, а некоторые — нет; ибо совокупное число возможных определений есть $\aleph_0$, тогда как число трансфинитных ординалов превышает $\aleph_0$. Следовательно, должны быть неопределимые ординалы, и среди них должен быть наименьший. Но он и определяется как «наименьший неопределимый ординал», что является противоречием[2].

(6) Парадокс Ришара родствен парадоксу о наименьшем неопределимом ординале[3]. Он состоит в следующем. Рассмотрим все десятичные дроби, которые могут быть определены посредством конечного числа слов; пусть E будет классом таких дробей. Тогда E имеет $\aleph_0$ элементов; следовательно, его члены могут быть упорядочены как 1-й, 2-й, 3-й… Пусть N будет числом, определяемым следующим образом. Если n-я цифра в n-й дроби есть p, то пусть n-я цифра в N будет $p + 1$ (или 0, если $p = 9$). Тогда N отлична от всех членов E, поскольку, каким бы ни было конечное значение n, n-я цифра в N отлична от n-й цифры в n-ных дробях, составляющих E, и, следовательно, N отлична от n-й дроби. Тем не менее мы определили N с помощью конечного числа слов и, следовательно, N должна быть членом E. Таким образом, N и является, и не является членом E.

(7) Парадокс Бурали-Форти формулируется следующим образом[4]. Можно показать, что каждая вполне упорядоченная последовательность имеет ординальное число, что последовательность ординалов, возрастающая и включающая любой данный ординал, превышает дан-

[1] Этот парадокс принадлежит м-ру Дж. Берри из Бодлианской библиотеки.

[2] Ср.: König. *Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuum-problem* // Math. Annalen, vol. LXI (1905); A. C. Dixon. *On «well-ordered» aggregates* // Proc. London Math. Soc., series 2, vol. IV, part I (1906); E. W. Hobson. *On the Arithmetic Continuum*, ibid. Решение, предложенное в последней из этих статей, не кажется мне адекватным.

[3] Ср.: Poincaré. *Les mathématiques et la logique* // Revue de Métaphysique et de Morale (May, 1906), особенно разделы VII и IX; см. также Peano. Rivista di Matematica, vol. VIII, № 5 (1906), с. 149 и далее.

[4] *Una questione sui numeri transfinite* // Rendiconti del circolo matematico di Palermo, vol. XI (1897).

ный ординал на один и (на весьма надежных и естественных предпосылках) что последовательность всех ординалов (в порядке увеличения) является вполне упорядоченной. Отсюда следует, что последовательность всех ординалов имеет ординальное число, скажем, Ω. Но в этом случае последовательность всех ординалов, включающих Ω, имеет ординальное число Ω + 1, которое должно быть больше, чем Ω. Следовательно, Ω не является ординальным числом всех ординалов.

У всех указанных выше противоречий (которые суть лишь выборка из бесконечного числа) есть общая характеристика, которую мы можем описать как самореферентность или рефлексивность. Замечание Эпименида должно включать само себя в свою собственную сферу. Если *все* классы, при условии, что они не являются элементами самих себя, являются элементами *w*, то это должно применяться также и к *w*; то же самое относится к аналогичному противоречию с отношениями. В случае имен и определений парадоксы вытекают из рассмотрения неименуемости и неопределимости в качестве элементов имен и определений. В случае парадокса Бурали-Форти последовательность, чье ординальное число вызывает затруднение, является последовательностью всех ординальных чисел. В каждом противоречии нечто говорится о *всех* случаях некоторого рода, и из того, что говорится, по-видимому, производится новый случай, который как относится, так и не относится к тому же самому роду, что и те случаи, *все* из которых рассматривались в том, что было сказано. Просмотрим противоречия одно за другим и увидим, как это происходит.

(1) Когда человек говорит «Я сейчас лгу», мы можем интерпретировать его высказывание как «Существует пропозиция, которую я утверждаю и которая является ложной». Все высказывания, что «существует» то-то и то-то, могут рассматриваться как отрицание того, что противоположное всегда истинно. Таким образом, «Я сейчас лгу» становится «Не для всех пропозиций верно, что или я их не утверждаю, или они являются истинными», другими словами, «Не верно для всех пропозиций *p*, что если я утверждаю *p*, *p* — истинно». Парадокс вытекает из рассмотрения этого высказывания как утверждающего пропозицию, которая, стало быть, должна входить в сферу высказывания. Это, однако, делает очевидным то, что понятие «все пропозиции» является незаконным; ибо в противном случае должна быть пропозиция (типа указанной выше), которая говорит обо всех пропозициях и, тем не менее, не может быть включена в совокупное целое пропозиций, о которых она говорит, без противоречия. Что бы мы ни полагали в качестве совокупного целого пропозиций, высказывание об этой целостности порождает новую пропозицию, которая под угрозой противоречия должна лежать вне рассматриваемой целостности. Увеличивать совокупное целое бесполезно, ибо это равным образом увеличивает

сферу высказываний об этой целостности. Следовательно, совокупного целого пропозиций быть не должно, а «все пропозиции» должно быть бессмысленной фразой.

(2) В этом случае класс *w* определяется указанием на «все классы», а затем оказывается, что он является одним среди них. Если мы находим помощь, решив, что класс не является элементом самого себя, тогда *w* становится классом всех классов, и мы должны решить, что он не является элементом самого себя, т. е. не является классом. Это — единственная возможность, если не существует такой вещи, как класс всех классов в смысле, требуемом этим парадоксом. То, что такого класса нет, вытекает из того, что если мы предположим его существование, это предположение немедленно возрождает (как в указанном выше противоречии) новые классы, лежащие вне предполагаемого совокупного целого всех классов.

(3) Этот случай в точности совпадает с (2) и показывает, что мы не можем на законных основаниях говорить о «всех отношениях».

(4) «Наименьшее целое число, не именуемое менее чем десятью словами» включает совокупное целое имен, ибо оно представляет собой «наименьшее целое число такое, что все имена либо не применимы к нему, либо состоят из более чем десяти слов». Здесь при получении противоречия мы предполагаем, что фраза, содержащая «все имена», сама является именем, хотя из противоречия видно, что она не может быть одним из имен, относительно которых предполагалось, что это все существующие имена. Следовательно, «все имена» есть незаконное понятие.

(5) Этот случай сходным образом показывает, что незаконным понятием является и «все определения».

(6) Это противоречие решается подобно (5), если заметить, что «все определения» — понятие незаконное. Поэтому число *E не* определимо конечным числом слов, будучи фактически не определимым вообще[1].

(7) Противоречие Бурали-Форти показывает, что «все ординалы» незаконное понятие; ибо, в противном случае, все ординалы в порядке увеличения образуют вполне упорядоченную последовательность, которая должна иметь ординальное число большее, чем все ординалы.

Таким образом, все наши противоречия в общем допускают совокупное целое, такое, что если бы оно было законным, то сразу увеличивалось бы за счет новых элементов, определимых в терминах его самого.

Это приводит нас к правилу «То, что включает *все* из совокупности, не должно быть элементом совокупности» или, наоборот, «Если опре-

---

[1] Ср. мою статью: *Les paradoxes de la logique* // Revue de Métaphysique et de Morale (May, 1906), p. 645.

деленная совокупность, при условии, что она обладает целостностью, имела бы элементы, определимые только с точки зрения этой целостности, то эта совокупность не обладает целостностью»[1].

Указанный выше принцип в своей области является, однако, чисто отрицательным. Он подходит для того, чтобы показать, что многие теории являются ошибочными, но он не показывает, как нужно избавляться от ошибок. Мы не можем сказать: «Говоря о *всех* пропозициях, я подразумеваю все пропозиции, кроме тех, в которых упоминаются “все пропозиции”»; ибо в этом объяснении мы упомянули пропозиции, в которых упоминаются все пропозиции, чего нельзя сделать осмысленно. Невозможно избежать упоминания вещи, упоминая, что мы не хотели ее упоминать. Говоря о человеке с длинным носом, можно сказать: «Когда я говорю о носах, я исключаю столь необычно длинные», но это вряд ли было бы успешной попыткой избежать щекотливой темы. Таким образом, если мы не хотим погрешить против указанного выше негативного принципа, необходимо сконструировать нашу логику без упоминания таких вещей, как «все пропозиции» или «все свойства», и даже без необходимости говорить, что мы такие вещи исключаем. Это исключение должно естественно и неизбежно вытекать из нашей позитивной доктрины, которая должна сделать ясным, что «все пропозиции» и «все свойства» являются бессмысленными фразами.

Первое встающее перед нами затруднение касается фундаментальных принципов логики, известных под затейливым названием «законы мышления». Например, высказывание «Все пропозиции являются либо истинными, либо ложными» становится бессмысленным. Если бы это положение было значимым, оно было бы пропозицией и попадало бы в свою собственную сферу действия. Тем не менее должна быть найдена некоторая замена, или всякое общее рассмотрение дедукции становится невозможным.

Другое, более специальное затруднение иллюстрируется частным случаем математической индукции. Мы хотим быть способны сказать: «Если *n* является конечным целым числом, то *n* имеет все свойства, предполагаемые 0 и числами, следующими за всеми теми числами, которые предполагают эти свойства». Но здесь фраза «все свойства» должна быть заменена некоторой другой фразой, которая закрыта для тех же самых возражений. Можно допустить, что фраза «все свойства, предполагаемые 0 и числами, следующими за всеми теми числами, которые предполагают эти свойства» может быть законно обоснованной, даже если фраза «все свойства» — нет. Но фактически это не так. Мы найдем, что фразы формы «все свойства, которые *etc.*» вклю-

[1] Говоря, что совокупность не обладает целостностью, я подразумеваю, что высказывания о всех ее членах являются бессмысленными. Кроме того, обнаружится, что использование этого принципа требует различия между *все* и *какие-то*, рассмотренное в разделе II.

чают *все* свойства, для которых «*etc.*» может значимо утверждаться или отрицаться, а не только те, которые фактически имеют какую-то рассматриваемую характеристику; ибо в отсутствие списка свойств, обладающих этой характеристикой, высказывание о всех свойствах, которые имеют эту характеристику, должно быть гипотетическим и иметь форму «Всегда истинно, что если свойство имеет указанную характеристику, тогда *etc.*». Таким образом, математическую индукцию *prima facie* невозможно сформулировать осмысленно, если фраза «все свойства» лишена смысла. Как мы увидим позже, этого затруднения можно избежать; но сейчас мы должны рассмотреть законы логики, поскольку они являются гораздо более фундаментальными.

II. ВСЕ И КАКОЙ-ТО

Задав высказывание, содержащее переменную x, скажем, $x = x$, мы можем утверждать, что оно имеет место для всех случаев, или же мы можем утверждать какой-то один из случаев, не уточняя, какой именно из примеров мы утверждаем. Это различие, грубо говоря, совпадает с различием между общим и частным изложением у Евклида. Общее изложение говорит нам нечто обо всех, например, треугольниках, тогда как частное изложение берет один треугольник и утверждает это же самое относительно этого одного треугольника. Но выбранный треугольник — это *какой-то* треугольник, а не некоторый один специальный треугольник; поэтому, хотя по ходу доказательства имеют дело только с одним треугольником, это доказательство, тем не менее, сохраняет свою всеобщность. Если мы говорим: «Пусть ABC — треугольник, тогда стороны AB и AC в совокупности больше, чем сторона BC», мы нечто говорим об *одном* треугольнике, а не обо *всех* треугольниках; но этот один треугольник абсолютно не определен, и, следовательно, наше высказывание также абсолютно не определено. Мы утверждаем не какую-то одну определенную пропозицию, но неопределенную пропозицию из всех пропозиций, вытекающих из предположения, что ABC — это тот или иной треугольник. Это понятие неопределенности утверждения является весьма важным, и насущно необходимо не смешивать неопределенное утверждение с определенным утверждением, что одно и то же имеет место во *всех* случаях.

Различие между (1), утверждающим какое-то значение пропозициональной функции, и (2), утверждающим, что функция всегда истинна, подобно различию между общими и частными изложениями у Евклида прослеживается через всю математику. В любой цепи математического рассуждения объекты, свойства которых исследуются, являются аргументами *какого-то* значения некоторой пропозициональной функции. Для иллюстрации возьмем следующее определение:

«Мы называем $f(x)$ непрерывной для $x = a$, если для каждого положительного числа σ, отличного от 0, существует положительное число ε, отличное от 0, такое, что для значений δ, которые численно меньше ε, разность $f(a + \delta) - f(a)$ численно меньше σ».

Здесь функция f есть *какая-то* функция, для которой указанное выше высказывание имеет смысл; это высказывание есть высказывание *об* f и изменяется с изменением f. Но это высказывание не является высказыванием о σ, ε или δ, поскольку рассматриваются все возможные значения последних, а не одно неопределенное значение. (В отношении ε высказывание «Существует положительное число ε, такое, что *etc.*» есть отрицание того, что отрицание «*etc.*» истинно для *всех* положительных чисел.) По этой причине, когда утверждается *какое-то* значение пропозициональной функции, аргумент (например, f выше) называется *действительной* переменной; в то же время, когда о функции говорится как о *всегда* истинной или как о не всегда истинной, аргумент называется *мнимой* переменной[1]. Таким образом, в указанном выше определении f есть действительная переменная, а σ, ε или δ суть мнимые переменные.

Утверждая *какое-то* значение пропозициональной функции, мы просто будем говорить, что утверждаем *пропозициональную функцию*. Так, если мы излагаем закон тождества в форме «$x = x$», мы утверждаем функцию «$x = x$»; т. е. мы утверждаем какое-то значение этой функции. Сходным образом можно было бы сказать, что мы отрицаем пропозициональную функцию, когда отрицаем какой-то ее пример. Мы можем действительно утверждать пропозициональную функцию, только если, какое бы значение мы ни выбрали, это значение является истинным; сходным образом мы можем подлинно отрицать ее, только если, какое бы значение мы ни выбрали, это значение является ложным. Отсюда, в общем случае, когда некоторые значения являются истинными, а некоторые — ложными, мы не можем ни утверждать, ни отрицать пропозициональную функцию[2].

Если ϕx — пропозициональная функция, то посредством «$(x) . \phi x$» мы будем обозначать пропозицию «ϕx всегда истинно». Сходным образом «$(x, y) . \phi(x, y)$» будет обозначать «$\phi(x, y)$ всегда истинно» и т. д. Тогда различие между утверждением всех значений и утверждением какого-

[1] Этими двумя терминами мы обязаны Пеано, который использует их приблизительно в указанном выше смысле. Ср., например: *Formulaire de Mathématiques* (Torino, 1903), vol. IV, p. 5.

[2] М-р МакКолл говорит, что «пропозиции» делятся на три класса: достоверные, переменные и невозможные. Мы можем принять это деление в применении к пропозициональным функциям. Функция, которую можно утверждать, является достоверной, функция, которую можно отрицать, является невозможной, все другие функции являются (в смысле м-ра МакКолла) переменными.

то значения есть различие между (1) утверждением $(x) \,.\, \phi x$ и (2) утверждением ϕx, где x не определен. Последнее отличается от первого тем, что оно не может трактоваться как одна определенная пропозиция.

Различие между утверждением ϕx и утверждением $(x) \,.\, \phi x$, я думаю, впервые подчеркнул Фреге[1]. Его довод в пользу явного введения этого различия совпадает с тем, что является причиной присутствия этого различия в практике математиков; а именно, что дедукция может быть действенной только в случае действительных, а не мнимых переменных. В случае доказательств Евклида это очевидно. Скажем, для рассуждения нам нужен некоторый один треугольник *ABC*, хотя и безразлично, какой именно. Треугольник *ABC* является *действительной* переменной; и хотя он представляет собой *какой-то* треугольник, он остается *одним и тем же* треугольником на протяжении всего доказательства. Но в общем изложении треугольник является мнимой переменной. Если мы переходим к мнимой переменной, мы не можем осуществить какой-либо вывод и поэтому во всех доказательствах должны использоваться действительные переменные. Предположим (возьмем простейший случай), нам известно, что «ϕx всегда истинно», т. е. «$(x) \,.\, \phi x$», и мы знаем, что «ϕx всегда влечет ψx», т. е. «$(x) \,.\, \{\phi x$ влечет $\psi x\}$». Каким образом мы выведем «ψx всегда истинно»? Мы знаем, что всегда истинно следующее: если ϕx — истинно и если ϕx влечет ψx, то ψx — истинно. Но у нас нет посылок в том смысле, что ϕx — истинно и ϕx влечет ψx; у нас есть следующее: ϕx *всегда* истинно и ϕx *всегда* влечет ψx. Для того чтобы осуществить наш вывод, мы должны перейти от «ϕx всегда истинно» к ϕx и от «ϕx всегда влечет ψx» к «ϕx влечет ψx», где этот x, оставаясь каким-то возможным аргументом, должен быть одинаковым в обоих случаях. Тогда из «ϕx» и «ϕx влечет ψx» мы выводим «ψx»; таким образом, ψx является истинным для любого возможного аргумента и, следовательно, истинным всегда. Стало быть, для того чтобы вывести «$(x) \,.\, \psi x$» из «$(x) \,.\, \phi x$» и «$(x) \,.\, \{\phi x$ влечет $\psi x\}$», мы должны перейти от мнимой к действительной переменной, а затем вновь вернуться к мнимой переменной. Эта процедура требуется во всех математических рассуждениях, в которых осуществляется переход от утверждения о всех значениях одной или более пропозициональных функций к утверждению о всех значениях некоторой другой пропозициональной функции, как, например, при переходе от «все равнобедренные треугольники имеют равные углы при основании» к «все треугольники, имеющие равные углы при основании, являются равнобедренными». В частности, этот процесс требуется при доказательстве *Barbara* и других модусов силлогизма. Другими словами, *всякая дедукция оперирует действительными переменными* (или константами).

[1] См. его *Grundgesetze der Arithmetik* (Jena, 1893), B. I, § 17, S. 31.

Можно предположить, что мы могли бы вообще обойтись без мнимых переменных, ограничившись *какой-то* в качестве замены для *все*. Это, однако, не имеет места. Возьмем, например, определение непрерывной функции, процитированное выше. В этом определении σ, ε или δ должны быть мнимыми переменными. Мнимые переменные постоянно требуются в определениях. Возьмем, например, такое: «Целое число называется *простым*, когда оно не имеет целых делителей, кроме 1 и себя самого». Это определение неизбежно включает мнимую переменную формы: «Если n — целое число, отличное от 1 или заданного целого числа, то n не является делителем данного целого числа для всех возможных значений n».

Таким образом, различие между *все* и *какой-то* необходимо для дедуктивного рассуждения и проходит через всю математику; хотя, насколько я знаю, его важность оставалась незамеченной до тех пор, пока на нее не указал Фреге.

Для наших целей это различие имеет разную пользу, которая весьма значительна. В случае таких переменных, как пропозиции или свойства, «какое-то значение» законно, тогда как «всякое значение» — нет. Так, мы можем сказать: «p — истинно или ложно, где p есть какая-то пропозиция», хотя мы не можем сказать «Все пропозиции являются истинными или ложными». Причина этого в том, что в первом случае мы просто утверждаем одну неопределенную пропозицию из пропозиций формы «p — истинно или ложно», тогда как в последнем случае мы утверждаем (если что-то утверждаем) новую пропозицию, отличную от всех пропозиций формы «p — истинно или ложно». Таким образом, «какое-то значение» переменной мы можем принять в случае, где «всякое значение» вело бы к рефлексивным ошибкам; ибо допущение «какого-то значения» не создает таким способом новых значений. Следовательно, фундаментальные законы логики можно установить, рассматривая *какую-то* пропозицию, хотя мы и не можем осмысленно сказать, что они имеют место для *всех* пропозиций. Эти законы имеют, так сказать, частное, а не общее изложение. Не существует одной пропозиции, которая *является*, скажем, законом противоречия; существуют только различные примеры этого закона. О какой-то пропозиции p мы можем сказать: «p и не-p не могут быть обе истинными»; но не существует такой пропозиции, как «Каждая пропозиция p такова, что p и не-p не могут быть обе истинными».

Сходное объяснение применяется к свойствам. Мы можем говорить о каком-то свойстве x, но не о всех свойствах, поскольку тем самым порождались бы новые свойства. Так, мы можем сказать: «Если n есть конечное целое число, и если 0 обладает свойством ϕ, и $m + 1$ обладает свойством ϕ при условии, что им обладает m, отсюда следует, что n обладает свойством ϕ». Здесь нам не нужно уточнять ϕ; ϕ обозначает «какое-то свойство». Но мы не можем сказать: «Конечное целое число определяется как число, которое имеет *каждое* свойство ϕ, предполагаемое 0 и числами, следующими за теми числами, которые его предполагают». Ибо здесь существенно рассмотреть *каждое* свойство[1], а не *какое-то* свойство; и в использовании такого определения мы предполагаем, что оно охватывает *свойство*, отличительное для конечных целых чисел, которое как раз и является разновидностью предпосылки, из которой, как мы видели, вытекают рефлексивные парадоксы.

В указанном выше примере необходимо избегать предположений обыденного языка, который не подходит для выражения требуемых различий. Суть дела может быть далее проиллюстрирована следующим образом: Если для определения конечных целых чисел необходимо использовать индукцию, она должна устанавливать определенные свойства конечных целых чисел, а не свойства двусмысленные. Но если ϕ есть действительная переменная, высказывание «n имеет свойство ϕ при условии, что ϕ предполагается 0 и числами, следующими за теми числами, которые его предполагают» приписывает n свойство, которое изменяется с изменением ϕ, и такое свойство не может использоваться для определения класса конечных целых чисел. Мы хотим сказать: «“n есть конечное целое число” означает “Каким бы ни было свойство ϕ, n обладает свойством ϕ при условии, что ϕ предполагается 0 и числами, следующими за теми числами, которые его предполагают”». Но здесь ϕ стало *мнимой* переменной. Чтобы сохранить ее в качестве действительной переменной, мы должны были бы сказать: «Каким бы ни было свойство ϕ, “n есть конечное целое число” означает: “n обладает свойством ϕ при условии, что ϕ предполагается 0 и числами, следующими за теми числами, которые его предполагают”». Но здесь значение “n есть конечное целое число” изменяется с изменением ϕ, и поэтому такое определение невозможно. Этот случай иллюстрирует важный пункт, а именно следующий: «Область[2] действительной переменной никогда не может быть меньше, чем вся пропозициональная функция, в которой встречается данная переменная». То есть если наша пропозициональная функция есть, скажем, «ϕx влечет p», утверждение этой функции будет означать «какое-то значение “ϕx влечет p” является истинным», но не «“какое-то значение ϕx является истинным” влечет p». В последнем случае в действительности мы имеем «Все значения ϕx истинны» и x является *мнимой* переменной.

III. ЗНАЧЕНИЕ И ОБЛАСТЬ ОБОБЩЕННЫХ ПРОПОЗИЦИЙ

В этом разделе первым мы должны рассмотреть значение пропозиций, в которых встречается слово *все*, а затем разновидность совокупностей, которые допускают пропозиции о всех их членах.

[1] Это выражение не отличается от «все свойства».

[2] *Область* действительной переменной — эта вся функция, относительно которой рассматривается «какое-то значение». Так, в «ϕx влечет p» область x — это не ϕx, но «ϕx влечет p».

Название *обобщенные пропозиции* удобно дать не только тем пропозициям, которые содержат слово *все*, но также и тем, которые содержат слово *некоторые* (в неопределенно частном смысле). Пропозиция «*φx* иногда истинно» эквивалентна отрицанию пропозиции «не-*φx* всегда истинно»; «Некоторые *A* суть *B*» эквивалентно отрицанию того, что «Все *A* не суть *B*»; т. е. отрицанию того, что «Ни одно *A* не суть *B*». Вопрос о том, можно ли найти интерпретации, которые отличают «*φx* иногда истинно» от отрицания того, что «не-*φx* всегда истинно», исследовать не нужно; ибо для наших целей мы можем *определить* «*φx* иногда истинно» как отрицание того, что «не-*φx* всегда истинно». В любом случае два вида пропозиций требуют один и тот же вид интерпретации и подлежат одинаковым ограничениям. В каждом случае есть мнимая переменная; и наличие мнимой переменной образует то, что я имею в виду под обобщенной пропозицией. (Заметим, что ни в одной пропозиции не может быть *действительной* переменной; ибо то, что содержит действительную переменную, есть пропозициональная функция, а не пропозиция.)

Первый вопрос, который необходимо задать в этом разделе, следующий: Как мы должны интерпретировать слово *все* в таких пропозициях, как «Все люди смертны»? На первый взгляд можно подумать, что никаких затруднений нет, что «все люди» — это совершенно ясная идея и что о всех людях мы говорим, что они смертны. Но на эту точку зрения есть много возражений.

(1) Если эта точка зрения правильна, оказалось бы, что «Все люди смертны» не может быть истинным, если людей нет. Однако, как утверждал м-р Брэдли[1], «Правонарушители будут привлекаться к ответственности» вполне может быть истинным, даже если правонарушителей нет; следовательно, как он доказывает далее, мы вынуждены интерпретировать такие пропозиции как гипотетические, подразумевая «Если кто-то является правонарушителем, то он будет привлечен к ответственности»; т. е. «если *x* — правонарушитель, то *x* будет привлечен к ответственности», где область значения, которую может иметь *x*, кем бы он ни был, определенно не ограничивается теми, кто действительно совершил правонарушение. Сходным образом «Все люди смертны» будет означать «Если *x* — человек, то *x* смертен, где *x* может обладать каким-то значением в рамках определенной области». Что представляет собой эта область, остается определить; но в любом случае она шире, чем «человек», ибо указанное выше гипотетическое высказывание часто определенно истинно, когда *x* не является человеком.

(2) «Все люди» — это обозначающая [denoting] фраза; и по причинам, которые я выдвинул в другом месте[2], кажется, что обозначающие фразы никогда не обладают значением в изоляции, но лишь входят в

[1] *Logic*, часть I, раздел II.

[2] *On Denoting* // Mind (October, 1905).

качестве конституент в вербальное выражение пропозиций, которые не содержат конституент, соответствующих рассматриваемым обозначающим фразам. Другими словами, обозначающая фраза определяется посредством пропозиций, в вербальном выражении которых она встречается. Следовательно, невозможно, чтобы эти пропозиции приобретали свое значение через обозначающие фразы; мы должны найти независимую интерпретацию пропозиций, содержащих такие фразы, и не должны использовать эти фразы в объяснении того, что означают такие пропозиции. Поэтому мы не можем рассматривать «Все люди смертны» как высказывание о «всех людях».

(3) Даже если бы такой объект, как «все люди», существовал, ясно, что это не тот объект, которому мы приписываем смертность, когда говорим «Все люди смертны». Если бы мы приписывали смертность этому объекту, мы должны были бы сказать «*Все люди* смертны». Стало быть, предположение, что такой объект, как «все люди», существует, не поможет нам в интерпретации «Все люди смертны».

(4) Кажется очевидным, что если мы встречаем нечто такое, что может быть человеком или замаскированным ангелом, то это нечто входит в сферу «Все люди смертны», чтобы утверждать «Если это нечто — человек, то это нечто — смертно». Таким образом, как и в случае с правонарушителями, вновь становится ясным, что мы на самом деле говорим «Если нечто является человеком, то это нечто — смертно», и что вопрос о том, является то или это человеком, не входит в сферу нашего утверждения, как это было бы, если *все* действительно указывало бы на «все люди».

(5) Таким образом, мы пришли к точке зрения, что то, что подразумевается под «Все люди смертны», более явно может быть установлено в какой-то форме, типа следующей: «Всегда истинно, что если x — человек, то x смертен». Здесь мы должны провести исследование относительно слова *всегда*.

(6) Очевидно, что *всегда* включает некоторые случаи, в которых x не является человеком, как мы видели в примере с замаскированным ангелом. Если x был бы ограничен до случая, когда x является человеком, мы могли бы вывести, что x — смертен, поскольку, если x — человек, то x — смертен. Поэтому с тем же самым значение слова *всегда* мы нашли бы «Всегда истинно, что x — смертен». Но ясно, что без изменения значения *всегда* эта новая пропозиция является ложной, хотя другая была истинной.

(7) Можно надеяться, что «всегда» означало бы «для всех значений x». Но выражение «все значения x», если оно и законно, включало бы в качестве части выражения «все пропозиции» и «все функции» и соответствующие им не оправданные целостности. Следовательно, значение x должно быть как-то ограничено в рамках некоторой узаконенной целостности. Это, по-видимому, ведет нас к традиционной

доктрине «универсума рассуждения», в рамках которого, как предполагается, расположен *x*.

(8) Однако весьма существенно, что мы должны обладать некоторым значением слова *всегда*, которое не должно выражаться в ограничительном условии относительно *x*. Ибо, предположим, что «всегда» означает «всякий раз, когда *x* принадлежит классу *i*». Тогда «Все люди смертны» становится «Всякий раз, когда *x* принадлежит классу *i*, если *x* — человек, то *x* — смертен». Но что должно означать наше новое *всегда*? По-видимому, для ограничения *x* до класса *i* в этой новой пропозиции причин не более, чем их было до этого при ограничении *x* до класса *людей*. Таким образом, если мы не можем обнаружить некоторое естественное ограничение на возможные значения функции (т. е. некоторое ограничение, заданное функцией) «если *x* — человек, то *x* — смертен», и оно не навязывается нам извне, мы перейдем к новому, более широкому универсуму и т. д. *ad infinitum*.

(9) По-видимому, очевидно, что, поскольку все люди смертны, то какой-то *ложной* пропозиции, являющейся значением функции «если *x* — человек, то *x* — смертен», быть не может. Ибо, если она вообще является пропозицией, условие «*x* — человек» должно быть пропозицией, таковой должно быть и следствие «*x* — смертен». Но если условие — ложно, то условное высказывание — истинно; а если данное условие истинно, то это условное высказывание — истинно. Следовательно, ложной пропозиции формы «если *x* — человек, то *x* — смертен» быть не может.

(10) Отсюда следует, что если какие-то значения *x* должны быть исключены, они могут быть только такими значениями, для которых нет пропозиции формы «если *x* — человек, то *x* — смертен»; т. е. для которых эта фраза является бессмысленной. Поскольку, как мы видели в (7), эти значения *x* должны быть исключены, отсюда следует, что функция «если *x* — человек, то *x* — смертен» должна иметь определенную *область значимости* [range of significance][1], которой не хватает для всех воображаемых значений *x*, хотя она и превосходит те значения, которые являются людьми. Таким образом, ограничение на *x* есть ограничение до области значимости функции «если *x* — человек, то *x* — смертен».

(11) Итак, мы приходим к выводу, что «Все люди смертны» означает «Всегда, если *x* — человек, то *x* — смертен», где *всегда* означает «для всех значений функции “если *x* — человек, то *x* — смертен”».

[1] Функция называется значимой для аргумента *x*, если она имеет значение для этого аргумента. Таким образом, мы можем кратко сказать «ϕx является значимой», подразумевая «функция ϕ имеет значение для аргумента *x*». Область значимости функции состоит из всех аргументов, для которых функция является истинной, в совокупности со всеми теми аргументами, для которых она является ложной.

Это — *внутреннее* ограничение на x, заданное природой функций; и это ограничение не требует явного высказывания, поскольку для функции невозможно быть истинной способом более общим, нежели быть истинной для всех ее значений. Кроме того, если область значимости функции есть i, то функция «если x есть i, то если x — человек, то x — смертен» имеет ту же самую область значимости, поскольку она не может быть значимой, если значимой не является ее конституента «если x — человек, то x — смертен». Но здесь область значимости снова является скрытой, как это было в «если x — человек, то x — смертен». Поэтому мы не можем сделать области значимости явными, поскольку попытка так поступить приводит лишь к возникновению новой пропозиции, в которой эта же самая область значимости является скрытой.

Итак, в общем виде «$(x) \,.\, \phi x$» должно означать «всегда ϕx». Это можно интерпретировать, хотя и с меньшей точностью, как «ϕx всегда истинно» или, более явно, как «Все значения функции ϕx истинны»[1]. Таким образом, основополагающее *все* есть «все значения пропозициональной функции», и любое другое *все* производно от этого. И каждая пропозициональная функция имеет определенную *область значимости*, в рамках которой расположены аргументы, для которых функция имеет значения. В рамках этой области аргументов функция является истинной или ложной; вне этой области она бессмысленна.

Приведенную выше аргументацию можно суммировать следующим образом.

Затруднение, которое возникает при попытках ограничить переменную, заключается в том, что ограничение естественным образом выражает себя как условие, что переменная относится к такому-то и такому-то виду и что при таком выражении результирующее условное высказывание свободно от преднамеренного ограничения. Например, попробуем ограничить переменную до *людей* и утверждать (а это подпадает под данное ограничение), что «x — смертен» всегда истинно. Тогда то, что всегда истинно, состоит в том, что если x — человек, то x — смертен; и это условное высказывание истинно даже тогда, когда x не является человеком. Таким образом, переменная никогда не ограничена рамками определенной области, если пропозициональная функция, в которой встречается переменная, остается значимой тогда, когда переменная находится вне этой области. Но если функция перестает быть значимой, когда переменная выходит за рамки определенной области, то переменная *ipso facto* заключена в этой области без необходимости в каком-то явном высказывании этого. Этот принцип необходимо принимать во внимание при развитии логических типов, к которым мы вскоре перейдем.

[1] Лингвистически удобное выражение для этой идеи следующее: «ϕx — истинно для всех возможных значений x», возможное значение понимается как значение, для которого ϕx является значимой.

Теперь мы можем начать рассмотрение того, каким образом случается так, что «все такие-то и такие-то» иногда является оправданной фразой, а иногда — нет. Предположим, мы говорим: «Все элементы, имеющие свойство ϕ, имеют свойство ψ». Согласно указанной выше интерпретации это означает «ϕx всегда влечет ψx». При условии, что область значимости ϕx является той же самой, что и область значимости ψx, это высказывание является значимым; таким образом, если задать какую-то определенную функцию ϕx, то существует пропозиция, говорящая о «всех элементах, выполняющих ϕx». Но иногда (как мы увидим позже) случается так, что то, что вербально проявляется как одна функция, на самом деле представляет собой много аналогичных функций с различными областями значимости. Это, например, применимо к «p — истинно», которая, как мы найдем, на самом деле есть не одна функция от p, но представляет собой различные функции, соответствующие виду пропозиции, которой является p. В таком случае *фраза*, выражающая неопределенную функцию может, благодаря этой неопределенности, быть значимой во всем множестве значений аргумента, превосходящем область значимости какой-то одной функции. В этом случае *все* не обоснованно. Стало быть, если мы пытаемся сказать «Все истинные пропозиции обладают свойством ϕ», т. е. «“p — истинно” всегда влечет ϕp», возможные аргументы для «p — истинно» необходимо превышают возможные аргументы для ϕ и, следовательно, рассматриваемое общее высказывание невозможно. По этой причине подлинных общих высказываний о всех истинных пропозициях сделать нельзя. Однако может случиться, что предполагаемая функция ϕ подобно «p — истинно» является неопределенной, и если случится, что она обладает неопределенностью точно такого же вида, как и «p — истинно», мы всегда будем в состоянии задать интерпретацию для пропозиции «“p — истинно” влечет ϕp». Это произойдет, например, если ϕp есть «не-p — ложно». Таким образом, в этих случаях мы получаем видимость общих пропозиций, рассматривающих *все* пропозиции; но эта видимость своим появлением обязана систематической неопределенности таких слов, как *истинно* и *ложно*. (Эта систематическая неопределенность вытекает из иерархии пропозиций, которая будет объяснена позднее.) Во всех таких случаях мы можем высказаться о *какой-то* пропозиции, поскольку значение неопределенных слов будет приспосабливаться к этой какой-то пропозиции. Но если мы преобразуем нашу пропозицию с помощью мнимых переменных и нечто скажем обо *всем*, мы должны предполагать неопределенность слов, зафиксированную в том или ином возможном смысле, хотя может быть совершенно безразлично то, каким из своих возможных смыслов они должны обладать. Вот так и случается, что высказывания обо *всех* имеют ограничения, которые исключают «все пропозиции» и, тем не менее, одновременно кажутся истинными высказываниями обо «всех пропозициях». Оба этих пункта станут яснее, когда будет объяснена теория типов.

Часто предполагалось[1], что для того, чтобы обоснованно говорить о всех элементах совокупности, требуется, чтобы совокупность была конечной. Так, «Все люди смертны» обоснованно, поскольку люди образуют конечный класс. Но на самом деле это не причина, по которой мы можем говорить о «всех людях». Как видно из приведенного выше обсуждения, существенна не конечность, но то, что можно было бы назвать *логической однородностью*. Это свойство должно принадлежать любой совокупности, чьи элементы суть все элементы, содержащиеся в рамках области значимости некоторой одной функции. Если дело не в скрытой неопределенности общих логических терминов, таких как *истинно* и *ложно*, которая придает видимость единой функции тому, что на самом деле является конгломератом многих функций с различными областями значимости, то с первого взгляда всегда видно, предполагает совокупность это свойство или же нет.

Выводы этого раздела заключаются в следующем: Каждая пропозиция, содержащая *все*, утверждает, что некоторая пропозициональная функция всегда истинна; и это подразумевает, что все значения указанной функции являются истинными, но это не подразумевает, что функция является истинной для всех аргументов, поскольку есть аргументы, для которых какая-то данная функция является бессмысленной, т. е. не имеет значения. Следовательно, мы можем говорить обо *всех* элементах совокупности тогда и только тогда, когда совокупность образует часть или целое *области значимости* некоторой пропозициональной функции, где область значимости определяется как совокупность тех аргументов, для которых рассматриваемая функция является значимой, т. е. имеет значение [value].

IV. ИЕРАРХИЯ ТИПОВ

Тип определяется как область значимости пропозициональной функции, т. е. как совокупность аргументов, для которых указанная функция имеет значения. Всегда, когда в пропозиции встречается мнимая переменная, область значений мнимой переменной является типом; тип фиксируется функцией, относительно которой рассматриваются «все значения». Необходимость разделения объектов на типы вызвана рефлексивными недоразумениями, которые возникают, если такого различия не провести. Как мы видели, этих недоразумений следует избегать с помощью того, что может быть названо «принципом порочного круга»; т. е. «целостность не может содержать элементы, определенные в терминах ее самой». В нашем техническом языке этот

[1] Например, Пуанкаре. См.: Revue de Métaphysique et de Morale (May, 1906).

принцип формулируется так: «То, что содержит мнимую переменную, не должно быть возможным значением этой переменной». Таким образом, все, что содержит мнимую переменную, должно относиться к типу, отличному от возможных значений этой переменной; мы будем говорить, что оно относится к *более высокому* типу. Таким образом, мнимые переменные, содержащиеся в выражении, суть то, что определяет его тип. Это — ведущий принцип в дальнейшем изложении.

Пропозиции, которые содержат мнимые переменные, возникают из пропозиций, не содержащих этих мнимых переменных, посредством процессов, один из которых всегда является процессом *обобщения*, т. е. подстановкой переменной вместо одного из терминов пропозиции и утверждением результирующей функции для всех возможных значений этой переменной. Следовательно, пропозиция называется *обобщенной*, когда она содержит мнимую переменную. Пропозицию, не содержащую мнимых переменных, мы будем называть *элементарной* пропозицией. Ясно, что пропозиция, содержащая мнимые переменные, предполагает другие пропозиции, из которых она может быть получена посредством обобщения; следовательно, все обобщенные пропозиции предполагают элементарные пропозиции. В элементарной пропозиции мы можем различить один или более *членов* от одного или более *понятий*; *члены* суть то, что может рассматриваться как *субъект* пропозиции, тогда как понятия являются предикатами или отношениями, утверждаемыми относительно этих терминов[1]. Члены элементарных пропозиций мы будем называть индивидами; они образуют первый, или низший, тип.

На практике не обязательно знать, какие объекты принадлежат низшему типу; не обязательно даже знать, является ли низший тип переменных, встречающихся в данном контексте, типом индивидов или же каким-то другим. Ибо на практике имеют значение только *относительные* типы переменных; поэтому низший тип, встречающийся в данном контексте, может быть назван типом индивидов постольку, поскольку рассматривается этот контекст. Отсюда следует, что приведенное выше рассмотрение индивидов не существенно для истинности того, что идет далее; существен только способ, которым из индивидов производятся другие типы. Тем не менее тип индивидов можно образовать.

Применяя процесс обобщения к индивидам, входящим в элементарные пропозиции, мы получаем новые пропозиции. Обоснованность этого процесса требует только того, чтобы индивиды не были пропозициями. То, что это так, должно обеспечиваться смыслом, который мы придаем слову *индивид*. Мы можем определить индивид как нечто, лишенное комплексности; тогда очевидно, что он не является пропозицией, поскольку пропозиции существенно комплексны. Сле-

[1] См.: *Principles of Mathematics*, § 48.

довательно, в применении процесса обобщения к индивидам мы не подвержены риску впасть в рефлексивные недоразумения.

Элементарные пропозиции в совокупности с теми пропозициями, которые в качестве мнимых переменных содержат только индивиды, мы будем называть *пропозициями первого порядка*. Они образуют второй логический тип.

Таким образом, мы имеем новую целостность, целостность *пропозиций первого порядка*. Стало быть, мы можем образовать новые пропозиции, в которые первопорядковые пропозиции входят как мнимые переменные. Их мы будем называть *пропозициями второго порядка*; они образуют третий логический тип. Так, например, если Эпименид утверждает «Все пропозиции первого порядка, утверждаемые мной, ложны», он утверждает пропозицию второго порядка; он действительно может ею утверждать, не утверждая в действительности какой-то первопорядковой пропозиции и, поэтому, противоречия не возникает.

Указанный выше процесс можно продолжать бесконечно. $n + 1$-й логический тип будет состоять из пропозиций порядка n, которые будут включать пропозиции порядка $n - 1$, но не более высокого порядка, чем порядок мнимых переменных. Полученные таким образом типы взаимоисключающи, и поэтому рефлексивные недоразумения невозможны до тех пор, пока мы помним, что мнимые переменные должны всегда ограничиваться рамками некоторого одного типа.

На практике иерархия *функций* более удобна, чем иерархия пропозиций. Функции различных порядков могут быть получены из пропозиций различных порядков методом *подстановки*. Если p — пропозиция, и a — конституента p, то пусть «$p/a;x$» означает пропозицию, которая получается при подстановке x вместо a везде, где a входит в p. Тогда p/a, которую мы будем называть матрицей, может занять место функции; ее значение для аргумента x есть $p/a;x$, а ее значение для аргумента a есть p. Сходным образом, если «$p/(a, b);(x, y)$» означает результат первой подстановки x вместо a, а затем подстановки y вместо b, мы можем использовать двухместную матрицу $p/(a, b)$ для того, чтобы представить двухместную функцию. Этим способом мы можем избежать мнимых переменных, отличных от индивидов и пропозиций различных порядков. *Порядок* матрицы будет определяться, как порядок пропозиции, в которой произведена подстановка, а саму эту пропозицию мы будем называть *прототипом*. Порядок матрицы не определяет ее тип: во-первых, потому что она не определяет число аргументов, вместо которых должны быть подставлены другие аргументы (т. е. имеет ли матрица форму p/a, $p/(a, b)$ или $p/(a, b, c)$ и т. д.); во-вторых, потому что, если прототип относится к более высокому, чем первый, порядку, аргументы могут быть либо пропозициями, либо индивидами. Но ясно, что тип матрицы всегда определим посредством иерархии пропозиций.

Хотя и *возможно* заменить функции матрицами, и хотя эта процедура вводит определенное упрощение в объяснение типов, она технически неудобна. Технически удобно заменить прототип p на ϕa и заменить p/aʹx на ϕx; таким образом, там, где как мнимые переменные появлялись бы p и a, если бы применялась матрица, в качестве нашей мнимой переменной, мы теперь имеем ϕ. Для оправдания ϕ в качестве мнимой переменной необходимо, чтобы ее значения ограничивались пропозициями некоторого одного типа. Поэтому мы продолжаем следующим образом.

Функция, аргументом которой является индивид и значением которой всегда является пропозиция первого порядка, будет называться функцией первого порядка. Функция, включающая первопорядковую функцию или пропозицию в качестве мнимой переменной будет называться второпорядковой функцией и т. д. Функция от одной переменной, относящаяся к порядку, следующему за порядком ее аргумента, будет называться *предикативной* функцией; такое же название будет даваться функции от нескольких переменных, если среди этих переменных есть переменная, в отношении которой функция становится предикативной, когда значения приписываются всем другим переменным. Тогда тип функции определяется типом ее значений и числом и типом ее аргументов.

Далее, иерархия функций может быть объяснена следующим образом. Функция первого порядка от индивида x будет обозначаться как $\phi!x$ (для функций будут также использоваться буквы ψ, χ, θ, f, g, F, G). Не первопорядковые функции содержат функцию в качестве мнимой переменной; следовательно, такие функции образуют вполне определенную целостность, и ϕ в $\phi!x$ может быть преобразована в мнимую переменную. Любая пропозиция, в которой ϕ появляется как мнимая переменная и в которой нет мнимых переменных более высокого, чем ϕ типа, является пропозицией второго порядка. Если такая пропозиция содержит индивид x, она не является предикативной функцией от x; но если она содержит первопорядковую функцию ϕ, она является предикативной функцией от ϕ и будет записываться как $f!(\psi!\hat{z})$. Тогда f есть *предикативная функция второго порядка*; возможные значения f снова образуют вполне определенную целостность, и мы можем преобразовать f в мнимую переменную. Таким образом, мы можем определить *предикативные функции третьего порядка*, которые будут представлять собой функции, имеющие в качестве значений пропозиции третьего порядка, а в качестве аргументов второпорядковые предикативные функции. Этим путем мы можем продвигаться до бесконечности. В точности такое же развитие сюжета относится к функциям от нескольких переменных.

Мы будем применять следующие соглашения. Переменные самого низкого типа, встречающиеся в любом контексте, будут обозначаться строчными латинскими буквами (за исключением f и g, которые зарезервированы для функций); предикативная функция от аргумента x (где x может быть любого типа) будет обозначаться как $\phi!x$ (где ψ, χ, θ, f, g, F, G могут заменять ϕ); сходным образом предикативная функция от двух аргументов x и y будет обозначаться как $\phi!(x, y)$; общая функция от x будет обозначаться как ϕx, а общая функция от x и y как $\phi(x, y)$. В ϕx ϕ нельзя преобразовать в мнимую переменную, поскольку ее тип не определен; но в $\phi!x$, где ϕ является предикативной функцией, чей аргумент относится к некоторому заданному типу, ϕ *можно* преобразовать в мнимую переменную.

Важно заметить, что, поскольку существуют различные типы пропозиций и функций и поскольку обобщение может быть применено только в рамках некоторого одного типа, все фразы, содержащие слова «все пропозиции» или «все функции», *prima facie* бессмысленны, хотя в определенных случаях они могут быть интерпретированы как не вызывающие возражений. Противоречия возникают при использовании таких фраз, где нельзя обнаружить простого значения.

Если теперь вернуться к парадоксам, мы сразу же увидим, что некоторые из них разрешаются теорией типов. Всегда, когда упоминается «все пропозиции», мы должны подставить «все пропозиции порядка n», где безразлично, какое значение мы придаем n, но существенно, чтобы n имело *некоторое* значение. Таким образом, когда человек говорит «Я сейчас лгу», мы должны интерпретировать сказанное им как означающее: «Существует пропозиция порядка n, которую я утверждаю и которая является ложной». Это является пропозицией порядка $n + 1$; следовательно, его высказывание является ложным и, однако, его ложность не влечет (как, по-видимому, влечет «Я сейчас лгу»), что он делает истинное высказывание. Это разрешает парадокс лжеца.

Рассмотрим теперь «наименьшее целое число, не именуемое менее чем десятью словами». Прежде всего необходимо заметить, что *именуемость* должна означать «именуемо посредством таких-то и таких-то приписанных имен» и что число приписанных имен должно быть конечно. Ибо если бы оно не являлось конечным, не было бы причин не существования целого числа, не именуемого менее чем десятью словами, и парадокс устранялся бы. Далее мы можем предположить, что «именуемый в терминах имен класса N» означает «является единственным термином, выполняющим некоторую функцию, всецело составленным из имен класса N». Решение этого парадокса лежит, я думаю, в простом наблюдении, что «именуемый в терминах имен класса N» само никогда не именуемо в терминах имен этого класса. Если мы расширяем N, добавляя имя «именуемый в терминах имен класса N», то расширяется наш основной аппарат имен; если этот новый аппарат назвать N', то «именуемый в терминах имен класса N'» остается не именуемым в терминах имен класса N'. Если мы попытаемся расширять N до тех пор, пока он не охватит *все* имена, то «именуемый» становится (согласно тому, что говорилось ранее) «единственным термином, выполняющим некоторую функцию, всецело составленным из имен». Но здесь в качестве мнимой переменной фигурирует функция; следовательно, мы ограничены до предикативной функции некоторого одного типа (ибо непредикативные функции не могут быть мнимыми переменными). Следовательно, для того чтобы избежать парадокса, нам нужно лишь видеть, что именуемость с точки зрения таких функций является непредикативной.

Случай с «наименьшим неопределимым ординалом» вполне аналогичен случаю, который мы только что обсуждали. Здесь, как и ранее, «определимый» должно быть соотнесено с некоторым заданным аппаратом основополагающих идей; и есть причина предполагать, что «определимый в терминах идей класса N» не определимо с точки зрения идей класса N. Верным будет то, что существует некоторый определенный сегмент ряда ординалов, всецело состоящий из определимых ординалов и имеющий в качестве границы наименьший неопределимый ординал. Этот наименьший неопределимый ординал будет определим посредством незначительного расширения нашего основного аппарата; но тогда будет новый ординал, который будет наименьшим ординалом, неопределимым в этом новом аппарате. Если мы расширяем наш аппарат, с тем чтобы включить все возможные идеи, то более нет какой-то причины думать, что существует какой-то неопределимый ординал. Я думаю, что мнимая сила парадокса по большей части лежит в предположении, что если все ординалы определенного класса определимы, должен быть определим и этот класс, а в этом случае определим также и класс, следующий за ним; но для принятия этого предположения причин нет.

Другие парадоксы, в частности парадокс Бурали-Форти, для своего решения требуют некоторого дальнейшего развития темы.

V. АКСИОМА СВОДИМОСТИ

Пропозициональная функция от x, как мы видели, должна относиться к какому-то порядку; следовательно, любое высказывание о «всех свойствах x» бессмысленно. («Свойство x» есть то же самое, что и «пропозициональная функция, имеющая силу для x».) Но для возможности математики абсолютно необходимо иметь некоторый метод делать высказывания, которые были бы эквивалентны тому, что мы подразумеваем, когда (некорректно) говорим о «всех свойствах x». Эта необходимость проявляется во многих случаях, но особенно в связи с математической индукцией. Мы можем сказать, используя *какое-то* вместо *все*, «Какое-то свойство, предполагаемое 0 и числами, следующими за всеми числами его предполагающими, предполагается всяким конечным числом». Но мы не можем перейти к «Конечное число — это число, которое предполагает *все* свойства, предполагаемые 0 и числами, следующими за всеми числами, их предполагающими». Если мы ограничиваем это высказывание до всех первопорядковых свойств чисел, мы не можем вывести, что оно имеет силу для всех второпорядковых свойств. Например, мы не в состоянии доказать, что если m и n являются конечными числами, то $m + n$ является конечным числом. Ибо, согласно данному выше определению, «m есть конечное число» является второпорядковым свойством m; следовательно, тот факт, что $m + 0$ есть конечное число и что если $m + n$ есть конечное число, то таковым является и $m + n + 1$, не позволяет нам вывести по индукции, что $m + n$ есть конечное число. Очевидно, что такое положение дел представляет многое из элементарной математики невозможным.

Или возьмем определение конечности через несовпадение целого и части, что ничуть не облегчает дело. Ибо это определение состоит в следующем: «Говорится, что класс конечен, когда каждое одно-однозначное отношение, областью которого является данный класс и конверсная область которого содержится в этом классе, имеет весь класс в качестве своей конверсной области». Здесь появляется переменное отношение, т. е. переменная функция от двух переменных; мы должны взять *все* значения этой функции, а это требует, что она должна относиться к некоторому приписанному порядку; но никакой приписанный порядок не позволит нам вывести многие из пропозиций элементарной математики.

Следовательно, мы должны отыскать, если возможно, некоторый метод сведения порядка пропозициональной функции, не воздействуя на истинность и ложность ее значений. По-видимому, этого достигает здравый смысл введением *классов*. Если взять какую-то пропозициональную функцию ϕx любого порядка, предполагается, что для всех значений x она эквивалентна высказыванию формы «x принадлежит классу α». Это высказывание относится к первому порядку, поскольку оно не делает отсылок к «все функции такого-то и такого-то типа». И действительно, его единственное практическое преимущество перед первоначальным высказыванием ϕx состоит в том, что оно относится к первому порядку. В предположении, что действительно существуют такие вещи, как классы, преимуществ нет, и противоречие относительно классов, не являющихся членами самих себя, это показывает; если классы существуют, они должны быть чем-то радикально отличным от индивидов. Я полагаю, что главная цель, которой служат классы, и главная причина, которая делает их лингвистически удобными, состоит в том, что они обеспечивают метод сведения порядка пропозициональной функции. Следовательно, я не буду допускать ничего, что, по-видимому, подразумевается при допущении классов здравым смыслом, за исключением следующего. Каждая пропозициональная функция для всех своих значений эквивалентна некоторой предикативной функции.

Это допущение в отношении функций необходимо принять независимо от типа их аргументов. Пусть ϕx — функция какого-то порядка от аргумента x, который сам может быть либо индивидом, либо функцией какого-то порядка. Если ϕ относится к порядку, следующему за x, мы записываем функцию в форме $\phi!x$, в этом случае мы будем называть ϕ *предикативной* функцией. Таким образом, предикативная функция от индивида является функцией первого порядка; для более высоких типов аргументов предикативные функции занимают место, которое первопорядковые функции занимают в отношении индивидов. Затем мы предполагаем, что каждая функция для всех своих значений эквивалентна некоторой предикативной функции от тех же самых аргументов. Это допущение, по-видимому, является сутью обычного допущения классов; во всяком случае, оно сохраняет от классов столь много, чтобы мы могли их как-то использовать, и достаточно мало, чтобы избежать противоречий, которые охотно предполагают классы. Мы будем называть это допущение *аксиомой классов* или *аксиомой сводимости.*

Мы будем предполагать, что каждая функция от двух переменных эквивалентна для всех своих значений предикативной функции от этих переменных, где предикативная функция от двух переменных такова, что в отношении одной из переменных функция становится предикативной (в нашем предыдущем смысле), когда значение приписывается другой переменной. Это допущение, по-видимому, и подразумевается, когда говорят, что любое высказывание о двух переменных определяет отношение между ними. Это допущение мы называем *аксиомой отношений* или *аксиомой сводимости*. Если иметь дело с отношениями между более чем двумя элементами, нужны сходные допущения для трех, четырех... переменных. Но эти допущения для нашей цели не являются необходимыми, поэтому они и не принимаются в данной статье.

С помощью аксиомы сводимости высказывания обо «всех первопорядковых функциях от x» или «всех предикативных функциях от α» охватывают большинство результатов, которые иначе требовали бы высказываний о «всех функциях». Существенный пункт состоит в том, что такие результаты получаются во всех случаях, где уместна только истинность или ложность значений рассматриваемых функций, а этот случай в математике постоянен. Таким образом, математическая индукция, например, нуждается теперь только в том, чтобы быть установленной для всех предикативных функций от чисел; тогда из аксиомы классов следует, что она имеет силу для *любой* функции любого порядка. Можно подумать, что парадоксы, ради которых мы изобрели иерархию типов, появятся вновь. Но это не тот случай, поскольку в таких парадоксах либо затрагивается еще что-то помимо истинности и ложности значений функций, либо встречаются выражения, которые остаются без значения даже после введения аксиомы сводимости. Например, такое высказывание, как «Эпименид утверждает ψx», не эквивалентно «Эпименид утверждает $\phi!x$», даже если ψx и $\phi!x$ эквивалентны. Таким образом, «Я сейчас лгу» остается без значения, если мы пытаемся включить *все* пропозиции, в совокупность тех, которые я мог бы ложно утверждать, и не затрагивается аксиомой классов, если мы ограничиваем ее до пропозиций порядка n. Иерархия пропозиций и функций, стало быть, остается уместной как раз в тех случаях, в которых необходимо избежать парадокса.

VI. ИСХОДНЫЕ ИДЕИ И ПРОПОЗИЦИИ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Исходные идеи, которые требуются в символической логике, по-видимому, сводятся к следующим семи:

(1) Какая-то пропозициональная функция от переменной x или нескольких переменных x, y, z … Она будет обозначаться как ϕx или $\phi(x, y, z \ldots)$.

(2) Отрицание пропозиции. Если p — пропозиция, ее отрицание будет обозначаться как $\sim p$.

(3) Дизъюнкция, или логическая сумма двух пропозиций, т. е. «это или то». Если p и q суть две пропозиции, их дизъюнкция будет обозначаться как $p \vee q$[1].

(4) Истинность *какого-то* значения пропозициональной функции; т. е. функции ϕx, где x не уточняется.

(5) Истинность *всех* значений пропозициональной функции. Это обозначается как $(x) . \phi x$, или $(x) : \phi x$; для заключения пропозиций в скобки может потребоваться и большее число точек[2]. В $(x) . \phi x$ x называется мнимой переменной; когда ϕx утверждается, там, где x не уточнен, x называется *действительной переменной*.

(6) Какая-то предикативная функция от аргумента какого-то типа; по обстоятельствам она будет представлена как $\phi ! x$, $\phi ! \alpha$ или $\phi ! R$. Предикативная функция от x — это функция, значения которой являются пропозициями, относящимися к типу, следующему за типом x, если x является индивидом или пропозицией, или за типом значений x, если x является функцией. Она может быть

[1] В предыдущей статье для этого журнала в качестве неопределяемой вместо дизъюнкции я брал импликацию. Выбор между ними — это предмет вкуса. Теперь я выбираю дизъюнкцию, поскольку она позволяет нам минимизировать число исходных пропозиций. (См.: *The Theory of Implication* // American Journal of Mathematics, vol. XXVIII, 1906, p. 159–202.)

[2] При использовании точек мы следуем Пеано. Это использование полностью объяснено м-ром Уайтхедом; см. *On Cardinal Numbers* // American Journal of Mathematics, vol. XXIV и *On Mathematical Concepts of Material World* // Phil. Trans. A., vol. CCV, p. 472.

описана как функция, в которой все мнимые переменные, если таковые есть, относятся к одному типу с x или к меньшему типу. Переменная относится к меньшему, чем x, типу, если она может значимо встречаться как аргумент в самом x или как аргумент в аргументе самого x и т. д.

(7) Утверждение; т. е. утверждение, что некоторая пропозиция является истинной или что какое-то значение некоторой пропозициональной функции является истинным. Утверждение требуется для того, чтобы отличить действительно утверждаемую пропозицию от пропозиции, просто рассматриваемой, или от пропозиции, на которую ссылаются как на условие некоторой другой пропозиции. На утверждение будет указывать знак $\vdash$, предпосланный тому, что утверждается, с достаточным количеством точек, чтобы заключить то, что утверждается, в скобки[1].

Перед тем как перейти к исходным пропозициям, нам нужны некоторые определения. В следующих определениях, так же как и в исходных пропозициях, буквы p, q, r используются для обозначения пропозиций.

$$p \supset q \,.\! = .\, {\sim}p \vee q \quad \mathrm{Df.}$$

Это определение устанавливает, что «$p \supset q$» (которое прочитывается, как «p влечет q») должно означать «p — ложно или q — истинно». Я не намереваюсь утверждать, что «влечет» не может иметь другого смысла, но утверждаю только то, что этот смысл наиболее подходит для того, чтобы задать «влечет» в символической логике. В определении знак равенства и буквы «Df» должны рассматриваться как один символ, совместно означая «значит по определению». Знак равенства без букв «Df» имеет иной смысл, который вскоре будет рассмотрен.

$$p \,.\, q \,.\! = .\, {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q) \quad \mathrm{Df.}$$

Это определяет логическое произведение двух пропозиций p и q, т. е. «p и q оба являются истинными». Приведенное определение устанавливает, что это должно означать «Ложно, что p — ложно или q — ложно». Здесь определение снова не дает единственного смысла, который может быть придан «p и q оба являются истинными», но задает значение, которое наиболее подходит для нашей цели.

$$p \equiv q \,.\! = .\, p \supset q \,.\, q \supset p \quad \mathrm{Df.}$$

[1] Этим знаком, как и введением идеи, которую он выражает, мы обязаны Фреге. См. его *Begriffsschrift* (Halle, 1879), с. 1 (Русский перевод см.: *Исчисление понятий* // Г. Фреге. Логика и логическая семантика. — М.: Аспект Пресс, 2000.) и *Grundgesetze der Arithmetik* (Jena, 1983), vol. I, S. 9.

То есть «$p \equiv q$», которое читается как «p эквивалентно q», означает «p влечет q и q влечет p»; откуда, конечно, следует, что p и q являются оба истинными или оба ложными.

$$(\exists x) \,.\, \phi x \,.\, = \,.\, {\sim}\{(x) \,.\, {\sim}\phi x\} \quad \text{Df.}$$

Это определяет «Существует по крайней мере одно значение x, для которого ϕx является истинным». Мы определяем последнее, как означающее «Ложно, что ϕx всегда ложно».

$$x = y \,.\, = : (\phi) : \phi ! x \,.\, \supset \,.\, \phi ! y \quad \text{Df.}$$

Это — определение равенства. Оно устанавливает, что x и y должны называться равными, когда каждая предикативная функция, выполняющаяся x, выполняется y. Из аксиомы сводимости следует, что если x выполняет ψx, где ψ есть какая-то функция, предикативная или непредикативная, то y выполняет ψy.

Следующие определения менее важны и вводятся только с целью сокращения.

$$(x, y) \,.\, \phi(x, y) \,.\, = : (x) : (y) \,.\, \phi(x, y) \quad \text{Df},$$
$$(\exists x, y) \,.\, \phi(x, y) \,.\, = : (\exists x) : (\exists y) \,.\, \phi(x, y) \quad \text{Df},$$
$$\phi x \,.\, \supset_x \,.\, \psi x : = : (x) : \phi x \supset \psi x \quad \text{Df},$$
$$\phi x \,.\, \equiv_x \,.\, \psi x : = : (x) : \phi x \,.\, \equiv \,.\, \psi x \quad \text{Df},$$
$$\phi(x, y) \,.\, \supset_{x, y} \,.\, \psi(x, y) : = : (x, y) : \phi(x, y) \,.\, \supset \,.\, \psi(x, y) \quad \text{Df}$$

и т. д. для любого числа переменных.

Требуются следующие исходные пропозиции (в 2, 3, 4, 5, 6 и 10 p, q, r обозначают пропозиции):

(1) Пропозиция, выведенная из истинной посылки, является истинной.
(2) $\vdash : p \vee p \,.\, \supset \,.\, p$.
(3) $\vdash : q \,.\, \supset \,.\, p \vee q$.
(4) $\vdash : p \vee q \,.\, \supset \,.\, q \vee p$.
(5) $\vdash : p \vee (q \vee r) \,.\, \supset \,.\, q \vee (p \vee r)$.
(6) $\vdash :. \, q \supset r \,.\, \supset : p \vee q \,.\, \supset \,.\, p \vee r$.
(7) $\vdash : (x) \,.\, \phi x \,.\, \supset \,.\, \phi y$;

т. е. «если все значения ϕx являются истинными, то ϕy является истинным, где ϕy есть какое-то значение»[1].

(8) Если ϕy — истинно, где ϕy есть какое-то значение $\phi \hat{x}$, то $(x) \,.\, x$ — истинно. Этого нельзя выразить в наших символах; ибо, если

[1] Удобно использовать запись $\phi \hat{x}$, чтобы обозначить саму функцию в противоположность тому или иному значению этой функции.

мы записываем «$\phi y \,.\supset.\, (x)\phi x$», это означает «$\phi y$ влечет, что все значения $\phi\hat{x}$ являются истинными, где y может принимать любое значение подходящего типа», что, в общем, не имеет места. То, что мы намереваемся утверждать, заключается в следующем: «Если при любом выбранном y ϕy — истинно, то $(x) \,.\, \phi x$ — истинно», тогда как то, что выражено посредством «$\phi y \,.\supset.\, (x) \,.\, \phi x$», есть «При любом выбранном y, если ϕy — истинно, то $(x) \,.\, \phi x$ — истинно», что является совершенно иным высказыванием, которое, в общем случае, ложно.

(9) $\vdash : (x) \,.\, \phi x \,.\supset.\, \phi a$, где a есть какая-то определенная константа.

Это принцип на самом деле представляет собой много различных принципов, а именно столько, сколько существует возможных значений a. То есть он устанавливает, например, что то, что имеет силу для всех индивидов, имеет силу для Сократа; а также оно имеет силу для Платона и т. д. Этот принцип состоит в том, что общее правило можно применить к частному случаю; но чтобы задать его область, необходимо упомянуть отдельные примеры, поскольку в противном случае нам нужен принцип, который сам заверит нас в общем правиле, что общие правила, которые применимы к частному случаю, могут быть применены к отдельному случаю, скажем, к Сократу. Таким образом, этот принцип отличается от (7); данный принцип высказывается о Сократе, Платоне или какой-то другой константе, тогда как (7) высказывается о переменной.

Указанный принцип никогда не используется в символической логике или в чистой математике, поскольку все наши пропозиции являются общими. И даже тогда, когда (как в «один есть число») мы, по видимости, имеем строго частный случай, при близком рассмотрении он не оказывается таковым. Фактически применение этого принципа является отличительным признаком *прикладной* математики. Стало быть, строго говоря, мы должны исключить его из нашего списка.

(10) $\vdash :. (x) \,.\, p \vee \phi x \,.\supset: p \,.\vee.\, (x) \,.\, \phi x$;

т. е. «если “p или ϕx” — всегда истинно, то или p — всегда истинно, или ϕx — всегда истинно».

(11) Когда $f(\phi x)$ — истинно при любом возможном аргументе x и $F(\phi y)$ — истинно при любом возможном аргументе y, тогда $\{f(\phi x) \,.\, F(\phi x)\}$ является истинным при любом возможном аргументе x.

Это — аксиома «неопределенности переменных». Она нужна, когда о каждой из двух отдельных пропозициональных функций известно, что они всегда являются истинными, и мы хотим вывести, что их логическое произведение всегда является истинным. Этот вывод оправдан только тогда, когда две функции принимают аргументы одного и того же типа, ибо, в противном случае, их логическое произведение бессмысленно.

(12) Если $\phi x \,.\, \phi x \supset \psi x$ — истинно для любого возможного x, то ψx — истинно для любого возможного x.

Эта аксиома требуется для того, чтобы заверить нас в том, что область значимости ψx в предполагаемом случае совпадает с областью значимости $\phi x \,.\, \phi x \supset \psi x \,.\supset.\, \psi x$; фактически обе области совпадают с областью значимости ϕx. В предполагаемом случае мы знаем, что ψx — истинно везде, где и $\phi x \,.\, \phi x \supset \psi x$, и $\phi x \,.\, \phi x \supset \psi x \,.\supset.\, \psi x$ являются значимыми, но без аксиомы мы не знаем, что ψx — истинно, везде, где ψx является значимым. Следовательно, эта аксиома нам необходима.

Аксиомы (11) и (12) требуются, например, при доказательстве

$$(x) \,.\, \phi x : (x) \,.\, \phi x \supset \psi x :\supset.\, (x) \,.\, \psi x.$$

По (7) и (11)

$$\vdash :.\, (x) \,.\, \phi x : (x) \,.\, \phi x \supset \psi x :\supset: \phi y \,.\, \phi y \supset \psi y,$$

отсюда, по (12),

$$\vdash :.\, (x) \,.\, \phi x : (x) \,.\, \phi x \supset \psi x :\supset: \psi y,$$

отсюда результат вытекает по (8) и (10).

(13) $\vdash :.\, (\exists f) :.\, (x) : \phi x \,.\equiv.\, f!x.$

Это — аксиома сводимости. Она устанавливает, что если задать какую-то функцию $\phi\hat{x}$, то существует такая предикативная функция $f!\hat{x}$, что $f!x$ всегда эквивалентна ϕx. Заметим, что поскольку пропозиция, начинающаяся с «$(\exists f)$» по определению есть отрицание пропозиции, начинающейся с «(f)», приведенная аксиома включает возможность рассмотрения «всех предикативных функций от x». Если ϕx есть *какая-то* функция от x, мы не можем высказать пропозицию, начинающуюся с «(ϕ)» или «$(\exists \phi)$», поскольку мы не можем рассматривать «все функции», но только «*какую-то* функцию» или «все *предикативные* функции».

(14) $\vdash :.\, (\exists f) :.\, (x, y) : \phi(x, y) \,.\equiv.\, f!(x, y).$

Это — аксиома сводимости для двухместной функции.

В приведенных выше пропозициях наши x и y могут относиться к любому типу. Единственное, где уместна теория типов, состоит в том, что (11) лишь позволяет нам отождествить действительные переменные, встречающиеся в различных содержаниях, когда демонстрируется, что они относятся к одному и тому же типу, поскольку в обоих случаях входят как аргументы одной и той же функции, и что в (7) и (9) y и a, соответственно, должны относиться к типу, подходящему для аргументов $\phi\hat{z}$. Поэтому, если предположить, например, что у нас есть пропозиция формы $(\phi) \,.\, f!(\phi!\hat{z}, x)$, являющаяся второпорядковой функцией от x, то по (7)

$$\vdash :(\phi) \,.\, f!(\phi!\hat{z}, x) \,.\supset.\, f!(\psi!\hat{z}, x),$$

где $\psi!\hat{z}$ есть какая-то функция *первого* порядка. Но $(\phi) \,.\, f!(\phi!\hat{z}, x)$ нельзя рассматривать так, как если бы она была первопорядковой функцией от x, и брать эту функцию как возможное значение $\psi!\hat{z}$ в указанном выше выражении. Подобное смешение типов приводит к парадоксу *лжеца*.

Снова рассмотрим классы, которые не являются членами самих себя. Ясно, что, поскольку мы отождествляем классы с функциями[1], ни об одном классе нельзя значимо говорить, что он является или не является членом самого себя; ибо члены класса являются аргументами функции, а аргументы функции всегда относятся к типу более низкому, чем функция. И если мы спросим: «Как обстоит дело с классом всех классов? Он, что же, не является классом и поэтому членом самого себя?», ответ двойствен. Во-первых, если «класс всех классов» означает «класс всех классов любого типа», то такого понятия нет. Во-вторых, если «класс всех классов» означает «класс всех классов типа t», то этот класс относится к типу, следующему за t, а потому снова не является членом себя самого.

Таким образом, хотя приведенные выше пропозиции равным образом применяются ко всем типам, они не позволяют нам вывести противоречия. Поэтому в процессе какой-либо дедукции никогда не нужно рассматривать абсолютный тип переменной; необходимо лишь видеть, что различные переменные, встречающиеся в одной пропозиции, относятся к надлежащим соответствующим типам. Это исключает те функции, из которых было получено наше четвертое противоречие, а именно: «Отношение R имеет силу между R и S». Ибо отношение между R и S необходимо относится к более высокому типу, чем любое из них, так что предполагаемая функция является бессмысленной.

VII. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КЛАССОВ И ОТНОШЕНИЙ

Пропозиции, в которые входит функция ϕ, могут по своему истинностному значению зависеть от особой функции ϕ или же они могут зависеть от объема ϕ, т. е. от аргументов, которые выполняют ϕ. Функ-

[1] Это отождествление подлежит модификации, которая вскоре будет объяснена.

ции последнего сорта мы будем называть *экстенсиональными*. Так, например, «Я верю, что все люди смертны» не может быть эквивалентно «Я верю, что все бесперые двуногие смертны», даже если люди по объему совпадают с двуногими бесперыми; ибо я могу и не знать, что по объему они одинаковы. Но «Все люди смертны» должно быть эквивалентно «Все бесперые двуногие смертны», если люди по объему совпадают с двуногими и бесперыми. Таким образом, «Все люди смертны» является экстенсиональной функцией от функции «x — человек», тогда как «Я верю, что все люди смертны» не является экстенсиональной функцией; мы будем называть функцию интенсиональной, когда она не является экстенсиональной. Функции от функций, с которыми особо имеет дело математика, все являются экстенсиональными. Признак экстенсиональной функции f от функции $\phi!\hat{z}$ состоит в следующем:

$$\phi!x \,.\equiv_x .\, \psi!x :\supset_{\phi,\psi} : f(\phi!\hat{z}) \,.\equiv.\, f(\psi!\hat{z}).$$

Из функции f от функции $\phi!\hat{z}$ мы можем вывести соответствующую экстенсиональную функцию следующим образом. Пусть

$$f\{\hat{z}(\psi z)\} \,.=:\, (\exists\phi) : \phi!x \,.\equiv_x .\, \psi x : f\{\phi!\hat{z}\} \quad \text{Df.}$$

Функция $f\{\hat{z}(\psi z)\}$ фактически есть функция от $\psi\hat{z}$, хотя она и не совпадает с функцией $f(\psi!\hat{z})$, предполагая, что эта последняя является значимой. Но трактовать так $f\{\hat{z}(\psi z)\}$ технически удобно, хотя она и содержит аргумент $\hat{z}(\psi z)$, который мы называем «класс, определяемый посредством ψ». Мы имеем

$$\vdash :.\, \phi x \,.\equiv_x .\, \psi x :\supset: f\{\hat{z}(\phi z)\} \,.\equiv.\, f\{\hat{z}(\psi z)\},$$

следовательно, применяя данное выше определение тождества к фиктивным объектам $\hat{z}(\phi z)$ и $\hat{z}(\psi z)$, мы находим, что

$$\vdash :.\, \phi x \,.\equiv_x .\, \psi x :\supset .\, \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z).$$

Это утверждение, а также его конверсия (что также можно доказать), указывает отличительное свойство классов. Следовательно, мы вполне можем трактовать $\hat{z}(\phi z)$ как класс, определяемый посредством ϕ. Тем же самым способом мы устанавливаем

$$f\{\hat{x}\,\hat{y}\,\psi(x, y)\} \,.=:\, (\exists\phi) : \phi!(x, y) \,.\equiv_{x,y} .\, \psi(x, y) : f\{\phi!(\hat{x}, \hat{y})\} \quad \text{Df.}$$

Здесь необходимо несколько слов относительно различия между $\phi!(\hat{x}, \hat{y})$ и $\phi!(\hat{y}, \hat{x})$. Мы будем принимать следующее соглашение. Когда функция (в противоположность своим значениям) представлена в форме, включающей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ (или какие-то другие две буквы алфавита), значение этой функции для аргументов a и b должно обнаруживаться подстановкой a вместо $\hat{x}$ и b вместо $\hat{y}$; т. е. аргумент, упоминающийся первым, должен подставляться вместо буквы, которая встречается в алфавите раньше, а аргумент, упоминающийся вторым, — вместо буквы, которая встречается позднее. И это вполне удовлетворительно проводит различие между $\phi!(\hat{x}, \hat{y})$ и $\phi!(\hat{y}, \hat{x})$. Например:

Значение $\phi!(\hat{x}, \hat{y})$ для аргументов a и b есть $\phi!(a, b)$.
Значение $\phi!(\hat{x}, \hat{y})$ для аргументов b и a есть $\phi!(b, a)$.
Значение $\phi!(\hat{y}, \hat{x})$ для аргументов a и b есть $\phi!(b, a)$.
Значение $\phi!(\hat{y}, \hat{x})$ для аргументов b и a есть $\phi!(a, b)$.

Мы устанавливаем:

$$x \in \phi!\hat{z} \,.=.\, \phi!x \quad \mathrm{Df},$$

следовательно,

$$\vdash :.\, x \in \hat{z}(\psi z) \,.=:\, (\exists\phi) : \phi!y \,.\equiv_y.\, \psi y : \phi!x.$$

К тому же по аксиоме сводимости мы имеем

$$(\exists\phi) : \phi!y \,.\equiv_y.\, \psi y,$$

следовательно,

$$\vdash : x \in \hat{z}(\psi z) \,.\equiv.\, \psi x.$$

Это имеет силу при любом x. Предположим теперь, что мы хотим рассмотреть $\hat{z}(\psi z) \in \hat{\phi}\, f\{\hat{z}(\phi!z)\}$. Согласно изложенному выше, мы имеем

$$\vdash :.\, \hat{z}(\psi z) \in \hat{\phi}\, f\{\hat{z}(\phi!z)\} \,.\equiv.\, f\{\hat{z}(\psi z)\} :\equiv: (\exists\phi) : \phi!y \,.\equiv_y.\, \psi y : f(\phi!z),$$

отсюда

$$\vdash :.\, \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z) \,.\supset:\, \hat{z}(\psi z) \in x \,.\equiv_\chi.\, \hat{z}(\chi z) \in x,$$

где x записывается вместо любого выражения формы $\hat{\phi}\, f\{\hat{z}(\phi!z)\}$.

Мы устанавливаем:

$$cls = \hat{\alpha}\{(\exists\phi\} \,.\, \alpha = \hat{z}(\phi!z)\} \quad \mathrm{Df}.$$

Здесь cls обладает значением, которое зависит от типа мнимой переменной ϕ. Следовательно, пропозиция «$cls \in cls$», например, являющаяся следствием приведенного выше определения, требует, что «*cls*» должно обладать различным значением в двух местах, где оно встречается. Символ «*cls*» может использоваться только там, где необходимо знать тип; он обладает неопределенностью, которая приспосабливается к обстоятельствам. Если мы вводим как неопределяемую функцию «Indiv!x», означающую «x — индивид», мы можем установить

$$Kl = \hat{\alpha}\{(\exists\phi\} \,.\, \alpha = \hat{z}(\phi!z \,.\, \mathrm{Indiv}!z)\} \quad \mathrm{Df.}$$

Тогда Kl — это определенный символ, означающий «класс индивидов».

Мы будем использовать строчные буквы греческого алфавита (иные, чем $\in$, ϕ, ψ, χ, θ), чтобы представлять классы любого типа, т. е. обозначать символы формы $\hat{z}(\phi!z)$ или $\hat{z}(\phi z)$.

С этого пункта теория классов во многом развивается, как в системе Пеано; $\hat{z}(\phi z)$ заменяет $z\in(\phi z)$. Также я устанавливаю:

$$\alpha \subset \beta \,.\!=:\, x\in\alpha \,.\supset.\, x\in\beta \quad \mathrm{Df,}$$
$$\exists!\alpha \,.\!=.\, (\exists x) \,.\, x\in\alpha \quad \mathrm{Df,}$$
$$\mathrm{V} = \hat{x}\,(x = x) \quad \mathrm{Df,}$$
$$\Lambda = \hat{x}\,\{\sim(x = x)\} \quad \mathrm{Df,}$$

где Λ, как и у Пеано, есть нуль-класс. Символы ∃, Λ, V, как и символы *cls* и ∈, не определены и приобретают значение, когда рассматриваемый тип указан иным способом.

Отношения мы трактуем точно таким же способом, устанавливая

$$a\{\phi!(\hat{x}, \hat{y})\}b \,.\!=.\, \phi!(a, b) \quad \mathrm{Df,}$$

(порядок предопределен алфавитным порядком x и y и типографским порядком a и b); отсюда

$$\vdash :.\, a\{\hat{x}\,\hat{y}\,\psi(x, y)\}b \,.\equiv:\, (\exists\phi) : \psi(x, y) \,.\equiv_{x, y}.\, \phi!(x, y) : \phi!(a, b),$$

откуда, по аксиоме сводимости,

$$\vdash : a\{\hat{x}\,\hat{y}\,\psi(x, y)\}b \,.\equiv.\, \psi(a, b).$$

Используя прописные буквы латинского алфавита в качестве сокращения для таких символов, как $\hat{x}\,\hat{y}\,\psi(x, y)$, мы находим, что

$$\vdash :.\, R = S \,.\equiv:\, xRy \,.\equiv_{x, y}.\, xSy,$$

где

$$R = S \,.\!=:\, f!R \,.\supset_f.\, f!S \quad \mathrm{Df.}$$

Мы устанавливаем:

$$\mathrm{Rel} = \hat{R}\,\{\exists\phi) \,.\, R = \hat{x}\,\hat{y}\,\phi!(x, y)\} \quad \mathrm{Df}$$

и находим, что все, что доказывается для классов, имеет свой аналог для двухместных отношений. Следуя Пеано, мы устанавливаем:

$$\alpha\cap\beta = \hat{x}\,(x\in\alpha \,.\, x\in\beta) \quad \mathrm{Df},$$

определяя произведение, или общую часть, двух классов;

$$\alpha\cup\beta = \hat{x}\,(x\in\alpha \,.\vee.\, x\in\beta) \quad \mathrm{Df},$$

определяя сумму двух классов; и

$$-\,\alpha = \hat{x}\,\{\sim(x\in\alpha)\} \quad \mathrm{Df},$$

определяя отрицание класса. Сходным образом для отношений мы устанавливаем:

$$R\dot{\cap}S = \hat{x}\,\hat{y}\,(xRy \,.\, xSy) \quad \mathrm{Df},$$

$$R\dot{\cup}S = \hat{x}\,\hat{y}\,(xRy \,.\vee.\, xSy) \quad \mathrm{Df},$$

$$\dot{-}R = \hat{x}\,\hat{y}\,\{\sim(xRy)\} \quad \mathrm{Df}.$$

VIII. ДЕСКРИПТИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Функции, рассмотренные до сих пор, за исключением нескольких отдельных функций, таких как $R\dot{\cap}S$, были пропозициональными. Но обычные функции математики, такие как x^2, $\sin x$, $\log x$, не являются пропозициональными. Функции этого вида всегда означают «элемент, имеющий такое-то и такое-то отношение к x». По этой причине они могут быть названы *дескриптивными* [descriptive] функциями, поскольку они *описывают* [describe] определенный элемент через его отношение к их аргументам. Так, «$\sin \pi/2$» описывает число 1; однако пропозиции, в которых встречается $\sin \pi/2$, не останутся теми же самыми, если бы в них было подставлено 1. Это, например, обнаруживается из пропозиции «$\sin \pi/2 = 1$», которая содержит значимую информацию, тогда как «$1 = 1$» — тривиально. Дескриптивные функции имеют значение не сами по себе, но только как конституенты пропозиций; и это вообще применяется к фразам формы «элемент, имеющий такое-то и такое-то свойство». Следовательно, имея дело с такими фразами, мы должны определять какую-то пропозицию, в которую они входят, а не фразу саму по себе[1]. Таким образом, мы приходим к следующему определению, в котором «$(\iota x)(\phi x)$» должно читаться, как «*данный* [the] элемент x, который выполняет ϕx».

$$\psi\{(\iota x)(\phi x)\} \,.\, = : (\exists b) : \phi x \,.\, =_x \,.\, x = b : \psi b \quad \mathrm{Df.}$$

Это определение устанавливает, что «элемент, который выполняет ϕ, выполняет ψ» должно означать: «Существует термин b, такой, что ϕx — истинно тогда и только тогда, когда x есть b, и ψb — истинно». Таким образом, все пропозиции о «*данном* таком-то и таком-то» будут ложными, если такого-то и такого-то не существует или их существует несколько.

Общее определение дескриптивной функции является следующим:

$$R\text{‘}y = (\iota x)(xRy) \quad \mathrm{Df};$$

т. е. «$R\text{‘}y$» должно означать «элемент, который имеет отношение R к y». Если же существует несколько или не существует ни одного элемента, имеющего отношение R к y, то все пропозиции о $R\text{‘}y$ будут ложными. Мы устанавливаем:

$$\mathbf{E!}(\iota x)(\phi x) \,.\, = : (\exists b) : \phi x \,.\, \equiv_x \,.\, x = b \quad \mathrm{Df.}$$

Здесь «$\mathbf{E!}(\iota x)(\phi x)$» может прочитываться «Существует такой элемент, как x, который выполняет ϕx», или «тот x, который выполняет ϕx, существует». Мы имеем

$$\vdash :. \mathbf{E!}R\text{‘}y \,.\, \equiv : (\exists b) : xRy \,.\, \equiv_x \,.\, x = b.$$

Кавычка в $R\text{‘}y$ может прочитываться. Так, если R — отношение отца к сыну, то «$R\text{‘}y$» есть «отец y». Если R — отношение сына к отцу, все пропозиции о $R\text{‘}y$ будут ложными, если y не имеет ни одного или у него больше чем один сыновей.

Из сказанного выше обнаруживается, что дескриптивные функции получаются из отношений. Определяемые теперь отношения главным образом важны для рассмотрения дескриптивных функций, которым они дают начало.

$$\mathrm{Cnv} = \hat{Q}\,\hat{P}\,\{xQy \,.\, \equiv_{x,y} \,.\, yPx\} \quad \mathrm{Df.}$$

Здесь Cnv есть сокращение для «конверсия». Это определяет отношение некого отношения к своей конверсии; например, отношение отно-

[1] См. упомянутую выше статью *On Denoting*, где причины этого представлены более пространно.

шения *больше* к отношению *меньше*, отношения отцовства к отношению сыновства, отношение предшественника к отношению наследника и т. д. Мы имеем

$$\vdash . \mathrm{Cnv}‘P = (\iota Q)\{xQy . \equiv_{x,y} . yPx\}.$$

Для сокращения записи, что часто более удобно, мы устанавливаем:

$$\breve{P} = \mathrm{Cnv}‘P \quad \mathrm{Df.}$$

Нам требуется еще одна запись для класса терминов, имеющих отношение R к y. С этой целью мы устанавливаем:

$$\overrightarrow{R} = \hat{\alpha}\ \hat{y}\ \{\alpha = \hat{x}\ (xRy)\} \quad \mathrm{Df,}$$

отсюда

$$\vdash . \overrightarrow{R}‘y = \hat{x}\ (xRy).$$

Сходным образом мы устанавливаем:

$$\overleftarrow{R} = \hat{\beta}\ \hat{x}\ \{\beta = \hat{y}\ (xRy)\} \quad \mathrm{Df,}$$

отсюда

$$\vdash . \overleftarrow{R}‘x = \hat{y}\ (xRy).$$

Далее нам требуется *область* R (т. е. класс элементов, имеющих отношение R к чему-либо), *конверсная область* R (т. е. класс элементов, к которым что-либо имеет отношение R) и *поле* R, представляющее собой сумму области R и конверсной области R. С этой целью мы определяем отношения области, конверсной области и поля к R. Определения таковы:

$$D = \hat{\alpha}\ \hat{R}\ \{\alpha = \hat{x}\ ((\exists y) . xRy)\} \quad \mathrm{Df,}$$
$$[D] = \hat{\beta}\ \hat{R}\ \{\beta = \hat{y}\ ((\exists x) . xRy)\} \quad \mathrm{Df,}$$
$$C = \hat{\gamma}\ \hat{R}\ \{\gamma = ((\exists y) : xRy . \vee . yRx)\} \quad \mathrm{Df.}$$

Заметим, что третье из этих определений значимо только тогда, когда R есть то, что можно было бы назвать *однородным* отношением; т. е. отношением, в котором, если xRy имеет место, x и y относятся к одному и тому же типу. В противном случае, как бы мы ни выбирали x и y, либо xRy, либо yRx были бы бессмысленными. Это наблюдение важно в связи с парадоксом Бурали-Форти.

На основании приведенных определений мы получаем:

$$\vdash . D`R = \hat{x}\{(\exists y) . xRy\},$$
$$\vdash . [D]`R = \hat{y}\{(\exists x) . xRy\},$$
$$\vdash . C`R = \hat{x}\{(\exists y) : xRy . \vee . yRx\},$$

последнее будет значимо только тогда, когда R однородно. «$D`R$» читается как «область $R$»; «$[D]`R$» читается как «конверсная область R»; «$C`R$» читается как «поле R».

Далее нам требуется запись для отношения класса членов, к которым некоторый элемент из α имеет отношение R, к классу α, содержащемуся в области R, а также запись для отношения класса членов, которые имеют отношение R к некоторому элементу из β, к классу β, содержащемуся в конверсной области R. Для второй из них мы устанавливаем:

$$R_\epsilon = \hat{\alpha}\,\hat{\beta}\,\{\alpha = \hat{x}\,((\exists y) . y \in \beta . xRy)\} \quad \text{Df.}$$

Поэтому

$$\vdash . R_\epsilon`\beta = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \beta . xRy\}.$$

Так, если R есть отношение отца к сыну, а β — это класс выпускников Итона, то $R_\epsilon`\beta$ будет классом «отцы выпускников Итона»; если $R$ есть отношение «меньше», а $\beta$ — это класс правильных дробей формы $1-2^{-n}$ для целых значений $n$, то $R_\epsilon`\beta$ будет классом дробей, меньших, чем некоторая дробь формы $1-2^{-n}$; т. е. $R_\epsilon`\beta$ будет классом правильных дробей. Другое вышеупомянутое отношение есть $(\breve{R})_\epsilon$.

В качестве альтернативной записи, часто более удобной, мы устанавливаем:

$$R``\beta = R_\epsilon`\beta \quad \text{Df.}$$

Относительное произведение двух отношений R и S есть отношение, которое имеет место между x и z всегда, когда имеется элемент y, такой, что и xRy, и yRz имеют место. Относительное произведение обозначается как $R \mid S$. Так,

$$R \mid S = \hat{x}\,\hat{z}\,\{(\exists y) . xRy . yRz\} \quad \text{Df.}$$

Мы также устанавливаем:

$$R^2 = R \mid R \quad \text{Df.}$$

Часто требуются произведение и сумма класса классов. Они определяются следующим образом:

$$s‘\kappa = \hat{x}\,\{(\exists\alpha)\,.\,\alpha\in\kappa\,.\,x\in\alpha\}\quad \mathrm{Df},$$
$$p‘\kappa = \hat{x}\,\{\alpha\in\kappa\,.\supset_{\alpha}.\,x\in\alpha\}\quad \mathrm{Df}.$$

Сходным образом для отношений мы устанавливаем:

$$\dot{s}‘\lambda = \hat{x}\,\hat{y}\,\{(\exists R)\,.\,R\in\lambda\,.\,xRy\}\quad \mathrm{Df},$$
$$\dot{p}‘\lambda = \hat{x}\,\hat{y}\,\{R\in\lambda\,.\supset_{R}.\,xRy\}\quad \mathrm{Df}.$$

Нам нужна запись для классов, чьим единственным элементом является x. Пеано использует ιx, поэтому мы будем использовать $\iota‘x$. Пеано показал (это подчеркивал и Фреге), что этот класс нельзя отождествить с x. При обычном взгляде на классы необходимость такого различия остается загадочной; но с точки зрения, выдвинутой выше, она становится очевидной.

Мы устанавливаем:

$$\iota = \hat{\alpha}\,\hat{x}\,\{\alpha = \hat{y}\,(y = x)\}\quad \mathrm{Df},$$

отсюда

$$\vdash .\,\iota‘x = \hat{y}\,(y = x)\quad \mathrm{Df},$$

и

$$\vdash :\mathbf{E!}\,\breve{\iota}‘\alpha\,.\supset.\,\breve{\iota}‘\alpha = (\text{℩}x)(x\in\alpha);$$

т. е. если α — это класс, который имеет только один элемент, то этим элементом является $\breve{\iota}‘\alpha$[1].

Для класса классов, содержащихся в данном классе, мы устанавливаем:

$$\mathrm{Cl}‘\alpha = \hat{\beta}\,(\beta\subset\alpha)\quad \mathrm{Df}.$$

Теперь мы можем перейти к рассмотрению кардинальных и ординальных чисел и того, как их затрагивает учение о типах.

IX. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Кардинальное число класса α определяется как класс всех классов, *сходных* с α; два класса являются сходными, когда между ними имеет-

[1] Таким образом, $\breve{\iota}‘\alpha$ есть то, что Пеано называет $\iota\alpha$.

ся одно-однозначное отношение. Класс одно-однозначных отношений обозначается как 1→1 и определяется следующим образом:

$$1 \to 1 = \hat{R}\,\{xRy \,.\, x'Ry \,.\, xRy' \,.\supset_{x,\,y,\,x',\,y'} .\, x = x' \,.\, y = y'\} \quad \text{Df.}$$

Сходство обозначается как Sim и определяется так:

$$Sim = \hat{\alpha}\,\hat{\beta}\,\{(\exists R) \,.\, R \in 1 \to 1 \,.\, D\text{‘}R = \alpha \,.\, D\text{‘}R = \beta\} \quad \text{Df.}$$

Тогда $\overrightarrow{Sim}\text{‘}\alpha$ есть, по определению, кардинальное число α; его мы будем обозначать как $Nc\text{‘}\alpha$; следовательно, мы устанавливаем:

$$Nc = \overrightarrow{Sim} \quad \text{Df,}$$

отсюда

$$\vdash .\, Nc\text{‘}\alpha = \overrightarrow{Sim}\text{‘}\alpha.$$

Класс кардинальных чисел мы будем обозначать как NC; таким образом,

$$NC = Nc\text{“}cls \quad \text{Df.}$$

0 определяется как класс, чьим единственным элементом является нуль-класс (т. е. Λ), поэтому

$$0 = \iota\text{‘}\Lambda \quad \text{Df.}$$

Определение 1 следующее:

$$1 = \hat{\alpha}\,\{(\exists c) : x \in \alpha \,.\equiv_x .\, x = c\} \quad \text{Df.}$$

Легко доказать, что, согласно определению, 0 и 1 являются кардинальными числами.

Однако необходимо отметить, что, согласно приведенным выше определениям, 0, 1 и все другие кардинальные числа являются неопределенными символами типа *cls* и имеют столь много значений, сколько существует типов. Начнем с 0; значение 0 зависит от значения Λ, а значение Λ различается согласно типу, нуль-классом которого он является. Таким образом, существует столько же 0, сколько существует типов; то же самое применяется ко всем другим кардинальным числам. Тем не менее, если два класса α и β относятся к различным типам, мы можем говорить о них как об имеющих одно и то же кардинальное число или что один из них имеет кардинальное число большее, чем другой, поскольку одно-однозначное отношение может иметь место между элементами α и β даже тогда, когда α и β относятся к различным типам. Например, пусть β будет ι“α, т. е. классом, чьими элементами являются классы, состоящие из единственного члена α. Тогда ι“α относится к более высокому типу, чем α, но подобно α, поскольку соотнесено с α посредством одно-однозначного отношения ι.

Иерархия типов имеет важные следствия в отношении сложения. Предположим, у нас есть класс из α членов и класс из β членов, где α и β являются кардинальными числами; может случиться так, что их совершенно невозможно объединить, чтобы получить класс, состоящий из членов α и из членов β, поскольку, если классы не относятся к одному и тому же типу, их логическая сумма бессмысленна. Только там, где рассматриваемое число классов конечно, мы можем устранить практические следствия этого благодаря тому факту, что мы всегда можем применить объединение к классу, который увеличивает свой тип до любой требуемой степени без изменения своего кардинального числа. Например, при любом классе α класс ι“α имеет то же самое кардинальное число, но относится к типу, идущему за α. Следовательно, для любого конечного числа классов различных типов мы можем увеличить все их до типа, который мы можем назвать наименьшим общим множителем всех рассматриваемых типов; и можно показать, что это может быть сделано таким способом, что результирующие классы не будут иметь общих элементов. Затем мы можем образовать логическую сумму всех полученных таким образом классов, и ее кардинальное число будет арифметической суммой кардинальных чисел изначальных классов. Но там, где у нас есть бесконечные последовательности классов восходящих типов, этот метод применить нельзя. По этой причине мы не можем доказать, что должны быть бесконечные классы. Ибо, предположим, что было бы вообще только n индивидов, где n — конечно. Тогда было бы 2^n классов индивидов, 2^{2^n} классов классов индивидов и т. д. Таким образом, кардинальное число членов каждого типа было бы конечно; и хотя эти числа превосходили бы любое заданное конечное число, не было бы способа сложить их так, чтобы получить бесконечное число. Следовательно, нам необходима (и, по всей видимости, так оно и есть) аксиома в том смысле, что ни один конечный класс индивидов не содержит все индивиды; однако если кто-то отдаст предпочтение тому, что общее число индивидов в универсуме равно, скажем, 10367, то, по-видимому, нет априорного способа опровергнуть его мнение.

На основании предложенного выше способа рассуждения ясно, что доктрина типов избегает всех затруднений относительно наибольшего кардинального числа. Наибольшее кардинальное число есть в каждом типе; но его всегда превосходит кардинальное число следующего типа, поскольку, если α — кардинальное число одного типа, то кардинальное число следующего типа есть 2^α, которое, как показал Кантор, всегда больше, чем α. Поскольку не существует метода сложения различных типов, мы не можем говорить о «кардинальном числе всех объектов каких бы то ни было типов», и поэтому абсолютно наибольшего кардинального числа не существует.

Если принимается, что ни один конечный класс индивидов не содержит всех индивидов, отсюда следует, что существуют классы индивидов, имеющие любое конечное число. Следовательно, все конечные кардинальные числа имеют место как кардинальные числа индивидов; т. е. как кардинальные числа классов индивидов. Отсюда следует, что существует класс $\aleph_0$ кардинальных чисел, а именно класс конечных кардинальных чисел. Следовательно, $\aleph_0$ имеет место как кардинальное число класса классов классов индивидов. Образуя все классы конечных кардинальных чисел, мы находим, что $2^{\aleph_0}$ имеет место как кардинальное число класса классов классов классов индивидов; и так мы можем продолжать неопределенно долго. Можно также доказать существование $\aleph_n$ для каждого конечного n; но это требует рассмотрения ординалов.

Если вдобавок к предположению, что ни один из конечных классов не содержит всех индивидов, мы предполагаем мультипликативную аксиому (т. е. аксиому, что для заданного множества взаимно исключающих классов, ни один из которых не является нулевым, есть по крайней мере один класс, включающий один элемент из каждого класса этого множества), то мы можем доказать, что существует класс, содержащий $\aleph_0$ элементов, так что $\aleph_0$ будет иметь место как кардинальное число индивидов. Это несколько уменьшает тип, до которого мы должны дойти, чтобы доказать теорему о существовании для любого заданного кардинального числа, но не дает нам какой-либо теоремы о существовании, которая раньше или позже не может быть получена иначе.

Многие элементарные теоремы, включающие кардинальные числа, требуют мультипликативную аксиому[1]. Необходимо отметить, что эта аксиома эквивалентна аксиоме Цермело[2] и, следовательно, допущению, что каждый класс может быть вполне упорядочен[3]. Эти эквивалентные предпосылки, по-видимому, доказать невозможно, несмотря на то, что мультипликативная аксиома выглядит достаточно правдоподобной. В отсутствие доказательства, видимо, лучше не принимать

---

[1] Ср.: часть III моей статьи *On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types* // Proc. London Math. Soc., series 2, vol. IV, part I.

[2] Об аксиоме Цермело и о доказательстве того, что эта аксиома влечет мультипликативную аксиому, см. предыдущую сноску. Обратный вывод выглядит так:
Обозначим как Prod‘k мультипликативный класс k, рассмотрим

$$Z`\beta = \hat{R}\,\{(\exists \in x) \,.\, x \in \beta \,.\, D`R = \iota`\beta \,.\, [D]`R = \iota`x\} \quad \text{Df.}$$

и предположим, что

$$\gamma \in \mathrm{Prod}`Z``cl`a \,.\, R = \hat{\hat{\xi}}\,\hat{x}\,\{(\exists S) \,.\, S \in \gamma \,.\, \xi S x\}.$$

Тогда R — это соответствие Цермело. Следовательно, если Prod‘Z“cl‘a не является нулевым, то для a существует по крайней мере одно соответствие Цермело.

[3] См.: Zermelo. *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann* // Math. Annalen, vol. LIX. S. 514–16.

мультипликативную аксиому как допущение, но устанавливать ее как условие в каждом случае, в котором она используется.

X. ОРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Ординальное число есть класс ординально сходных вполне упорядоченных рядов, т. е. отношений, образующих такие ряды. Ординальное сходство, или *подобие*, определяется следующим образом:

$$Smor = \hat{P}\,\hat{Q}\,\{(\exists S) \,.\, S \in 1 \to 1 \,.\, [D]‘S = C‘Q \,.\, P = S \,|\, Q \,|\, \breve{S}\,\} \quad \mathrm{Df},$$

где «*Smor*» есть сокращение для «сходны ординально».

Класс отношений ряда, которые мы будем называть «*Ser*», определяется так:

$$Ser = \hat{P}\,\{xPy \,.\, \supset_{x,\,y} \,.\, \sim (x = y) : xPy \,.\, yPz \,.\, \supset_{x,\,y,\,z} \,.\, xPz : x \in C‘P \,.\, \supset_x \,.\, \overrightarrow{P}‘x \cup \cup\, \iota‘x \cup \overleftarrow{P}‘x = C‘P\} \quad \mathrm{Df}.$$

То есть если читать *P* как «предшествует», то отношение является отношением ряда, если: (1) нет ни одного элемента, предшествующего самому себе; (2) предшественник предшественника есть предшественник; (3) если *x* есть какой-то член поля отношения, то предшественники *x* вместе с *x* в совокупности с его предшественниками образуют все поле отношения.

Вполне упорядоченные отношения ряда, которые мы будем называть Ω, определяются следующим образом:

$$\Omega = \hat{P}\,\{P \in Ser : \alpha \subset C‘P \,.\, \exists!\alpha \,.\, \supset_\alpha \,.\, \exists!(\alpha - \breve{P}“\alpha)\} \quad \mathrm{Df};$$

т. е. *P* порождает вполне упорядоченные ряды, если *P* есть отношение ряда и любой класс α, содержащийся в поле *P* и не являющийся нулевым, имеет первый член. (Отметим, что $\breve{P}“\alpha$ суть члены, входящие после некоторого члена α.)

Если как $No‘P$ обозначить ординальное число вполне упорядоченного отношения *P*, а как *NO* класс ординальных чисел, то мы получим:

$$No = \hat{\alpha}\,\hat{P}\,\{P \in \Omega \,.\, \alpha = \overrightarrow{Smor}‘P\} \quad \mathrm{Df},$$
$$NO = No“\Omega.$$

Из определения *No* мы получаем:

$$\vdash\, : P \in \Omega \,.\, \supset \,.\, No‘P = \overrightarrow{Smor}‘P,$$
$$\vdash\, : \sim(P \in \Omega) \,.\, \supset \,.\, \sim\mathbf{E!}No‘P.$$

Если теперь мы проверим наши определения с точки зрения их связи с теорией типов, мы увидим, прежде всего, что определения «*Ser*» и Ω включают поля отношений ряда. Поле же значимо только тогда, когда отношение является однородным; следовательно, отношения, которые не являются однородными, не порождают ряд. Например, можно подумать, что отношение ι порождает ряд ординального числа ω типа

$$x, \iota`x, \iota`\iota`x, \dots \iota^{n}`x, \dots,$$

и этим способом мы можем попытаться доказать существование ω и $\aleph_0$. Но x и $\iota`x$ относятся к различным типам, и, следовательно, согласно нашему определению, такого ряда нет. Ординальное число ряда индивидов, согласно приведенному выше определению *No*, есть класс отношений индивидов. Следовательно, он по типу отличается от любого индивида и не может образовывать часть какого-то ряда, в котором встречаются индивиды. Опять же, предположим, что все конечные ординалы имеют место как ординальные числа индивидов; т. е. как ординалы рядов индивидов. Тогда конечные ординалы сами образуют ряд, чье ординальное число есть ω; таким образом, ω существует как ординальное число ординалов, т. е. как ординал ряда ординалов. Но тип ординального числа ординалов — это тип классов отношений классов отношений индивидов. Таким образом, существование ω доказывалось в рамках более высокого типа, чем тип конечных ординалов. Опять-таки, кардинальное число ординальных чисел вполне упорядоченного ряда, который может быть создан из конечных ординалов, есть $\aleph_1$; следовательно, $\aleph_1$ имеет место в типе классов классов классов отношений классов отношений индивидов. К тому же ординальные числа вполне упорядоченных рядов, составленных из конечных ординалов, могут быть упорядочены в порядке величины, и результатом будет вполне упорядоченный ряд, ординальное число которого есть ω_1. Следовательно, ω_1 имеет место как ординальное число ординалов ординалов. Этот процесс можно повторить любое конечное число раз, и, таким образом, мы можем в соответствующих типах установить существование $\aleph_n$ и ω_n для любого конечного значения n.

Но вышеуказанный процесс порождения более не ведет к какой-то целостности *всех* ординалов, поскольку, если мы возьмем все ординалы какого-то заданного типа, всегда существуют более высокие ординалы в более высоких типах; и мы не можем объединить множество ординалов, тип которого превышает любую конечную границу. Таким образом, ординалы в каком-то типе могут быть упорядочены в порядке величины во вполне упорядоченный ряд, который имеет ординальное число более высокого типа, чем тип ординалов, составляющих ряд. В новом типе этот новый ординал не является наибольшим. Фактически не существует наибольшего ординала в каком-то типе, но в каждом типе все ординалы меньше, чем некоторый ординал более высокого типа. Невозможно завершить ряд ординалов, поскольку это приводило бы к типам, превышающим каждую приписываемую конечную границу; таким образом, хотя каждый сегмент ряда ординалов вполне упорядочен, мы не можем сказать, что вполне упорядочен весь ряд, поскольку «весь ряд» является фикцией. Следовательно, парадокс Бурали-Форти исчезает.

Из двух последних разделов обнаруживается, что если принять, что число индивидов не является конечным, то можно доказать существование всех канторовских кардинальных и ординальных чисел, за исключением $\aleph_\omega$ и ω_ω. (Хотя вполне возможно, чтобы их существование было доказуемым.) Существование всех конечных кардинальных и ординальных чисел можно доказать без предпосылки о существовании чего бы то ни было. Ибо, если кардинальное число членов в каком-то типе есть n, число членов в следующем типе есть 2^n. Таким образом, если бы индивидов не существовало, то был бы один класс (а именно нуль-класс), два класса классов (а именно тот, что не содержит классов, и тот, что содержит нуль-класс), четыре класса классов классов, и в общем 2^{n-1} классов n-го порядка. Но мы не можем объединить члены различных типов и поэтому не можем этим способом доказать существование какого-то бесконечного класса.

Теперь мы можем подвести итог всему рассмотрению. После установления некоторых парадоксов логики мы нашли, что все они вырастают из того факта, что выражение, указывающее на *все* из некоторой совокупности, по-видимому, обозначает само себя как одно из этой совокупности; как, например, «все пропозиции являются либо истинными, либо ложными» само, по видимости, является пропозицией. Мы решили, что там, где это, судя по всему, встречается, мы имеем дело с ложной целостностью, и что фактически ничего вообще нельзя значимо сказать обо *всем* из предполагаемой совокупности. Чтобы дать ход этому решению, мы объяснили доктрину типов переменных, придерживающуюся принципа, что любое выражение, которое указывает на *все* из некоторого типа, должно, если оно что-либо обозначает, обозначать нечто более высокого типа, чем все то, на что оно указывает. Там, где указывается на все из некоторого типа, есть *мнимая переменная*, принадлежащая этому типу. Таким образом, *любое выражение, содержащее мнимую переменную, относится к более высокому типу, чем эта переменная*. Это — фундаментальный принцип доктрины типов. Изменение в способе, которым конструируются типы (это следует доказать с необходимостью), оставило бы решение противоречий незатронутым до тех пор, пока соблюдается этот фундаментальный принцип. Метод конструирования типов, объясненный выше, продемонстрировал нам, как возможно установить все фундаментальные определения математики и в то же время избежать всех известных противоречий. И оказалось, что на практике доктрина типов уместна лишь там, где затрагиваются теоремы о существовании, или там, где необходимо перейти к некоторому частному случаю.

Теория типов ставит ряд трудных философских вопросов, касающихся ее интерпретации. Однако эти вопросы, в сущности, отделимы от математического развития этой теории и подобно всем философским вопросам вводят элемент неопределенности, который не относится к самой теории. Следовательно, по-видимому, лучше формулировать эту теорию без ссылки на философские вопросы, оставляя их для независимого исследования.

Б. РАССЕЛ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ФИЛОСОФИЮ*

(1919)

* Russell B. *Introduction to Mathematical Philosophy* // B. Russell *Logic and Knowledge* (*Essays 1901–1950*). London: Allen & Unwin, Ltd, 1956.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга задумана существенно как «Введение» и не ставит целью дать исчерпывающее обсуждение проблем, с которыми она имеет дело. Кажется весьма желательным ознакомить читателя с определенными результатами, до сих пор известными только тем, кто преуспел в логическом символизме, в такой форме, которая представила бы минимум трудностей для начинающего. Были сделаны самые значительные усилия для того, чтобы избежать догматизма по таким вопросам, которые открыты серьезным сомнениям, и эта направленность в определенной степени доминировала в выборе рассматриваемых в книге тем. Начала математической логики менее известны по сравнению с ее поздними разделами, но они имеют столь же большой философский интерес. Многое из того, что будет изложено в последующих главах, не есть то, что называется «философией», хотя в философию включаются те темы, которые до сих пор не приобрели статуса научной дисциплины. Природа бесконечности и непрерывности была раньше делом философии, а сейчас принадлежит математике. Математическая *философия*, в строгом смысле, не может, вероятно, включать такие определенные научные результаты, какие были получены в этой области. Скорее, философия математики должна иметь дело с вопросами, находящимися на передней линии знания, где не получено сравнительно определенных результатов. Но спекуляция по поводу таких вопросов едва ли является плодотворной, пока нет знакомства с более научной частью известных принципов математики. Книга, имеющая дело с такими частями, может, следовательно, рассматриваться как *введение* в математическую философию, хотя едва ли можно сказать, за исключением тех мест, где она выходит за пределы своего предмета, что она по-настоящему имеет дело с философией. Она имеет дело, однако, с отраслью знания, которая тем, кто принимает ее, взывает к отрицанию значительной части традиционной философии, и даже доброй части нынешней философии. В этом отношении, а также наличием множества нерешенных проблем математическая логика весьма близка к философии. По этой причине, как и по причинам важности предмета, цель может быть в некоторой степени достигнута кратким рассмотрением основных результатов математической логики в форме, не требующей ни знания математики, ни склонности к математическому символизму. Здесь, однако, с точки зрения дальнейших исследований, как и везде, метод более важен, чем результаты, а метод не может быть объяснен в достаточной мере в рамках такой книги. Остается надеяться, что некоторые читатели заинтересуются настолько, чтобы продолжить изучение метода, которым математическая логика помогает прояснить традиционные проблемы философии. Но это тема, с которой последующие страницы не пытаются иметь дело.

Бертран Рассел

Глава I
РЯД НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Математика представляет собой исследование, которое может быть продолжено, если начинать с ее наиболее знакомых частей, в двух противоположных направлениях. Первое — хорошо знакомое направление — является конструктивным с все более увеличивающейся сложностью: от целых чисел к дробям, действительным числам, комплексным числам; от сложения и умножения к дифференцированию и интегрированию и далее к высшей математике. Другое, менее знакомое, направление идет через анализ к все большей абстрактности и логической простоте; вместо того, чтобы спрашивать, что может быть определено и выведено из предполагаемых начал, мы ищем общие идеи и принципы, в терминах которых могут быть определены или выведены наши начальные принципы. Отличие математической философии от обычной математики заключается в упоре на второе направление. Но следует понимать, что это различие не столько в предмете, сколько в состоянии ума исследователя. Ранние греческие геометры, переходя от эмпирических правил египтян для земельных измерений к общим предположениям, обосновывавших эти правила, то есть к аксиомам и постулатам Евклида, занимались математической философией, имея в виду приведенное выше определение. Но как только аксиомы и постулаты были получены, их дедуктивное использование в том виде, как мы его находим у Евклида, принадлежит математике в обычном смысле. Различие между математикой и математической философией зависит от интереса, инспирирующего исследование, и от стадии, достигнутой в ходе исследования, а не от содержания самого исследования.

Можно установить то же самое различие несколько иным образом. Наиболее ясными и простыми вещами в математике являются не те, к которым приходят логически с самого начала, а те, которые с точки зрения логической дедукции находятся посередине. Как и в случае обычных тел, когда легче всего увидеть те из них, которые не слишком далеки или не слишком близки, или не слишком малы и не слишком велики, так и в случае с концепцией легче всего узреть те из них, которые не являются не слишком сложными и не слишком простыми (используя термин «простой» в логическом смысле). И точно так же, как мы нуждаемся в двух видах инструментов — микроскопе и телескопе — для расширения возможностей нашего ви́дения, мы нуждаемся так же в двух видах инструментов для расширения нашей логической силы. Один из них ведет к высшей математике, а другой к логическим основаниям тех вещей, которые мы склонны считать очевидными в математике. Мы обнаружим, путешествуя к началу математики, что, анализируя наши обычные математические понятия, мы приобретаем новое понимание, новую силу и средства достижения совершенно новых разделов математики. Цель этой книги состоит в объяснении математической философии простым и нетехническим образом, без обращения к трудным или сомнительным вопросам, элементарная трактовка которых вряд ли возможна. Все такие вопросы обсуждаются в Principia Mathematica[1]; данную книгу можно рассматривать просто как введение.

Для образованного человека наших дней очевидной исходной точкой математики является ряд целых чисел

1, 2, 3, 4... и т. д.

Вероятно, только человек с некоторым математическим образованием мог бы полагать в качестве начала 0 вместо 1, и, предлагая как раз такой уровень знания, мы начинаем с ряда:

$$0, 1, 2, 3, ..., n, n + 1, ...,$$

и именно этот ряд мы будем иметь в виду, когда пойдет разговор о «ряде натуральных чисел».

Только на весьма высокой стадии цивилизации этот ряд стал рассматриваться в качестве отправной точки. Потребовалось много веков, чтобы открыть, что пара фазанов и пара дней являются примером числа 2: лежащий в основе уровень абстракций тут отнюдь не мал. И открытие того, что 1 является числом, было трудным. А 0 является совсем недавним приобретением: ни греки, ни римляне не имели такой цифры. Если бы мы занимались математической философией в те времена, мы должны были бы начать с чего-то менее абстрактного, чем ряд натуральных чисел, который был бы достижим только на некоторой стадии нашего путешествия назад. Но на данный момент натуральные числа, по всей видимости, представляются наиболее легкими и знакомыми в математике.

Но хоть натуральные числа и знакомы, они не являются понятными. Очень немного людей готовы к тому, чтобы понять, что значит определение «числа», или «0», или «1». Нетрудно видеть, что начиная с нуля можно достичь любое натуральное число повторением добавления единицы, но при этом мы должны будем определить, что мы имеем в виду под «добавлением 1» и «повторением». Это ни в коем случае не является простым делом. До совсем недавнего времени верили, что некоторые из этих первых понятий арифметики слишком просты и примитивны, чтобы их можно было определить. Так как все определяемые термины определяются через другие термины, ясно, что человеческое познание должно удовлетвориться тем, чтобы принять некоторые термины как вполне постижимые без определения, с тем, чтобы иметь отправную точку для определений. Не совсем ясно, должны ли быть такие термины, которые вообще не *способны* быть определимы-

[1] Cambridge University Press, vol. i, 1910; vol. ii, 1911; vol. iii, 1913. By Whitehead and Russell.

ми: как раз вполне возможно, что, как бы глубоко мы не шли в процессе определения, мы всегда *могли бы* идти дальше. С другой стороны, вполне возможно, что когда анализ заходит достаточно далеко, мы можем достичь терминов, которые на самом деле просты и, следовательно, логически не способны быть определимыми в смысле принятого способа анализа. Это не тот вопрос, который мы должны решать; для наших целей вполне достаточно соображений о том, что человеческие возможности конечны, и поэтому известные нам определения должны с чего-то начинаться, и начинаться с терминов, неопределенных на данный момент времени, хотя не на вечные времена.

Вся традиционная чистая математика, включая аналитическую геометрию, может рассматриваться как состоящая полностью из суждений о натуральных числах. То есть термины, которые она содержит, могут быть определены через натуральные числа, а ее утверждения могут быть выведены из свойств натуральных чисел, если добавить идеи и утверждения чистой логики.

То обстоятельство, что традиционная чистая математика может быть выведена из натуральных чисел, является сравнительно недавним открытием, хотя это давно подозревалось. Пифагор, который верил, что не только математика, но и все остальное может быть выведено из чисел, открыл наиболее серьезную трудность на пути к тому, что называется «арифметизацией» математики. Именно Пифагор открыл существование несоизмеримости, и в частности несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали. Если длина стороны равна одному дюйму, число дюймов в диагонали равно корню квадратному из 2, который оказался вовсе не числом. Эта проблема была решена только в наши дни, и была решена *полностью* только с помощью сведения арифметики к логике, которое будет объяснено в следующих главах. Пока же мы примем за факт арифметизацию математики, хотя этот процесс был настоящим подвигом огромной важности.

После сведения традиционной чистой математики к теории натуральных чисел следующим шагом в логическом анализе было сведение самой этой теории к небольшому числу предпосылок и неопределенных терминов, из которых она могла бы быть выведена. Эта работа была проделана Пеано. Он показал, что вся теория натуральных чисел может быть выведена из трех примитивных идей и пяти примитивных утверждений плюс чистая логика. Эти три идеи и пять утверждений стали залогом для всей традиционной чистой математики. Если они могли бы быть определены и доказаны в терминах других идей и утверждений, то это же справедливо для всей чистой математики. Их логический «вес», если можно использовать такое выражение, тянет на целый ряд наук, которые могут быть выведены из теории натуральных чисел; истинность этих наук гарантирована, если гарантирована истинность пяти примитивных утверждений, если при этом предположить, что все в порядке с используемым при выведении логическим аппаратом. Своей работой Пеано в громадной степени облегчил работу по анализу математики.

Вот три примитивные идеи в арифметике Пеано:

0, число, последующий элемент.

Под «последующим элементом» он понимал следующее число в ряду натуральных чисел. То есть, последующим элементом 0 является 1, последующим элементом 1 является 2, и так далее. Под «числом» он подразумевает, в этой связи, класс всех натуральных чисел[1]. Он не предполагает, что мы знаем все члены этого класса, а предполагает лишь, что мы знаем, что имеется в виду, когда говорим, что то или иное есть число, точно так же, как мы знаем, что имеется в виду, когда мы говорим «Джон есть человек», хотя мы не знакомы индивидуально со всеми людьми.

Пять примитивных утверждений Пеано таковы:

(1) 0 есть число.
(2) Последующий элемент каждого числа есть число.
(3) Никакие два числа не имеют одного и того же последующего элемента.
(4) 0 не является последующим элементом ни для какого числа.
(5) Любое свойство, которое принадлежит 0, а также последующему элементу каждого числа, имеющему это свойство, принадлежит всем числам.

Последнее из этих утверждений есть принцип математической индукции. В последующем мы много чего скажем о математической индукции, а пока мы рассмотрим ее только в том, что касается пеановского анализа арифметики.

Давайте кратко рассмотрим, какого рода теория натуральных чисел получается из упомянутых трех идей и пяти утверждений. Для начала мы определяем 1 как «последующий элемент 0», 2 как «последующий элемент 1», и так далее. Ясно, что мы можем идти с подобного рода определениями столь далеко, сколь нам угодно, так как по утверждению (2) каждое число, достигаемое нами, имеет последующий элемент, а благодаря утверждению (3) этим числом не может быть ни одно из уже достигнутых чисел, потому что в противном случае мы имели бы два различных числа с одним и тем же последующим элементом. Наконец, благодаря утверждению (4), ни одно из достигаемых нами чисел не может оказаться 0. Таким образом, ряд последующих элементов дает нам бесконечный ряд продолжающихся непрерывно новых чисел. Благодаря (5) все числа попадают в этот ряд, начинающийся с 0 и проходящий

[1] Мы используем в настоящей главе понятие «число» в этом смысле. Впоследствии это слово будет использоваться в более общем смысле.

через все следующие далее «последующие элементы»: потому что (a) 0 принадлежит этому ряду, и (b) если число n принадлежит ему, ему принадлежит и его последующий элемент, и тогда, в силу математической индукции, каждое число принадлежит этому ряду.

Предположим, что мы хотим определить сумму двух чисел. Возьмем некоторое число m и определим

$$m + 0$$

как m, и

$$m + (n + 1)$$

как последующий элемент

$$m + n.$$

По утверждению (5) это дает нам определение суммы m и n для любых m и n. Подобным же образом можно определить произведение двух чисел. Читатель может легко убедиться, что любое элементарное утверждение арифметики может быть доказано с помощью наших пяти посылок, а если у него возникнут трудности, он может найти доказательства у Пеано.

Сейчас самое время обратиться к рассмотрениям, выходящим за пределы того, что сделал Пеано, а именно к самому последнему усовершенствованию «арифметизации» математики, проделанному Фреге. Он был первым, кто преуспел в «логицизации» математики, то есть в сведении арифметических понятий к логике, и что, как показали его предшественники, равносильно сведению всей математики. В этой главе мы не будем давать определение числа или конкретных чисел, как это сделал Фреге, а дадим некоторые соображения по поводу того, почему трактовка Пеано является менее законченной, чем она казалась поначалу.

Во-первых, три примитивных идеи Пеано, а именно: «0», «последующий элемент» и «число» — могут иметь бесконечное количество различных интерпретаций, все из которых удовлетворяют пяти примитивным утверждениям. Мы дадим несколько примеров.

(1) Пусть «0» означает 100, и пусть «число» означает все числа в натуральном ряду, начиная со 100. Тогда все наши примитивные утверждения выполняются, даже четвертое, потому что, хотя 100 есть последующий элемент 99, 99 не есть «число» в том смысле, в котором мы сейчас употребляем слово «число». Ясно, что в этом примере вместо 100 может быть подставлено любое другое число.

(2) Пусть «0» имеет свое обычное значение, но пусть «число» означает то, что мы обычно называем четными числами и пусть «последующий элемент» получается добавлением двух к предыдущему числу. Тогда «1» будет выполнять роль двойки, «2» — роль четверки, и так далее; ряд «чисел» будет таковым:

0, двойка, четверка, шестерка, восьмерка...

Все пять утверждений Пеано будут опять-таки выполняться.

(3) Пусть «0» означает число один, и пусть «число» означает множество

1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ...,

и пусть «последующий элемент» означает «половину». И тогда пять аксиом Пеано будут истинными для этого множества.

Ясно, что такие примеры можно умножать бесконечно. В частности, если задан некоторый ряд

$x0, x1, x2, x3, \ldots xn, \ldots,$

являющийся бесконечным, не содержащий повторений, имеющий начало и не содержащий терминов, которые не могут быть достигнуты с самого начала конечным числом шагов, тогда мы имеем множество терминов, удовлетворяющих аксиомам Пеано. В этом легко убедиться, хотя доказательство является несколько длинным. Пусть «0» означает $x0$, пусть «число» означает множество всех терминов и пусть «последующий элемент» для xn означает $xn + 1$. Тогда

(1) «0 есть число», то есть $x0$ есть элемент множества.

(2) «Последующий элемент любого числа есть число», то есть беря любой термин xn в качестве члена множества, имеем в множестве также и $xn + 1$.

(3) «Нет двух чисел, имеющих один и тот же последующий элемент», то есть если xm и xn являются двумя различными членами множества, тогда $xm + 1$ и $xn + 1$ отличны друг от друга. Это следует из того факта, что (по гипотезе) в множестве нет повторений.

(4) «0» не является последующим элементом никакого числа», то есть в множестве нет термина, предшествующего $x0$.

(5) Любое свойство, принадлежащее $x0$ и принадлежащее $xn + 1$, при условии, что оно принадлежит xn, принадлежит всем x. Это следует из соответствующего свойства для чисел. Ряд формы

$x0, x1, x2, \ldots, xn, \ldots,$

в котором имеется первый термин, последующий элемент для каждого термина (так, чтобы не было последнего термина), в котором нет повторений и каждый термин может быть достигнут с начала в конечное число шагов, называется *прогрессией.* Прогрессии играют огромную роль в математике. Как мы только что видели, каждая прогрессия удовлетворяет пяти аксиомам Пеано. Обратно, может быть доказано, что каждый ряд, удовлетворяющий аксиомам Пеано, является прогрессией. Поэтому эти пять аксиом могут быть использованы для определения класса прогрессий: «прогрессии» есть «те ряды, которые удовлетворяют этим пяти аксиомам». Любая прогрессия может быть взята в качестве основы чистой математики: мы можем дать имя «0» ее первому термину, имя «число» целому множеству ее терминов и имя «последующий элемент» следующему термину в прогрессии. Вовсе не необходимо, чтобы прогрессия была составлена из чисел: она может быть составлена из точек пространства, или моментов времени, или любых других терминов, доступных в бесконечном количестве. Различные прогрессии дадут различные интерпретации всех утверждений традиционной чистой математики; все эти возможные интерпретации будут равно истинными.

В системе Пеано нет ничего такого, что позволило бы нам отличить одну интерпретацию примитивной идеи от другой. Предполагается просто, что мы знаем, что подразумевается под «0», предполагается также, что этот символ не означает 100, или Иглы Клеопатры, или чего-то еще другого.

То обстоятельство, что «0», «число» и «последующий элемент» не могут быть определены пятью аксиомами Пеано, а должны быть поняты независимо, является очень важным. Мы хотим, чтобы наши числа не просто удовлетворяли математическим формулам, но и были приложимы правильным образом к обыденным объектам. Мы хотим иметь десять пальцев, два глаза и один нос. Система, в которой «1» означает 100, а «2» означает 101, и т. д., могла бы быть правильной с точки зрения чистой математики, но не повседневной жизни. Мы хотим, чтобы «0», «число» и «последующий элемент» имели такие значения, которые дали бы нам правильные соотношения пальцев, глаз и носов. Мы уже имеем некоторое знание (хотя недостаточное, чтобы сформулировать его или дать анализ), что мы подразумеваем под «1» или «2» и т. д., и наше использование чисел в арифметике должно совпадать с этим знанием. Мы не можем гарантировать, что это будет обеспечиваться пеановским методом; все, что мы можем сделать, если примем этот метод, это сказать «мы знаем, что подразумеваем под “0” и “числом” и “последующим элементом”, хотя мы не можем объяснить, что мы под этим подразумеваем в терминах других более простых концепций». Если мы должны утверждать так, а *рано или поздно* мы должны делать это обязательно, само утверждение вполне допустимо, но как раз цель математической философии состоит в том, чтобы отложить это на возможно большее число шагов. С помощью логической теории арифметики мы сможем отложить это на довольно долгое время.

Можно было бы предположить, что взамен придания значений «0», «числу» и «последующему элементу» в терминах того, что мы знаем, но не можем определить, мы могли бы позволить им стоять для *любых* трех терминов, удовлетворяющих пяти аксиомам Пеано. Они тогда не будут объясняться в терминах, имеющих значение вполне определенное, но не определимое: они будут тогда «переменными», терминами, в отношении которых мы делаем определенные гипотезы, устанавливаемые в пяти аксиомах, но о которых ничего нельзя сказать помимо этих пяти аксиом. Если мы примем этот план, наши теоремы будут доказываться не о некотором распознаваемом множестве терминов, называемых «натуральными числами», но о целом множестве терминов, имеющих определенные свойства. Такого рода процедура не является ошибочной. Больше того, для некоторых целей она представляется полезным обобщением. Но по двум причинам она не может рассматриваться как адекватный базис для арифметики. Во-первых, она не позволяет нам узнать, а имеются ли вообще некоторые множества терминов, удовлетворяющие аксиомам Пеано. Дело в том, что нет никаких предположений о способе обнаружения того, существуют ли такие множества. Во-вторых, как уже мы видели, мы хотим, чтобы наши числа были такими, чтобы они могли использоваться для счета обыденных объектов, а это требует, чтобы числа имели *определенное* значение, а не просто некоторые формальные свойства. Эти определенные значения определяются логической теорией арифметики.

Глава II
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА

Вопрос «Что такое число?» задавался часто, но правильный ответ на него был получен только в наше время. Ответ был дан Фреге в 1884 году в его «Основаниях арифметики»[1]. Хотя это очень небольшая книга, нетрудная и представляющая огромную важность, она почти не привлекла никакого внимания. Определение числа, в ней содержащееся, оставалось практически неизвестным до тех пор, пока оно не было переоткрыто автором этой книги в 1901 году.

В поисках определения числа первая вещь, в которой нам надо иметь ясность, может быть названа грамматикой нашего исследования. Многие философы, пытавшиеся определить число, разрабатывали на самом деле определение множественности [plurality], что является полностью отличным от числа. *Число* есть то, что присуще числам, точно так же как *человек* — что присуще характеристике людей. Множественность есть пример не числа, а некоторого конкретного числа. Трое человек, например, есть пример числа 3, а число 3 есть пример числа. Эта точка зрения кажется тривиальной и едва ли достойной упоминания, и все же она оказалась, за немногими исключениями, слишком тонкой для философов.

Конкретное число не тождественно с некоторой совокупностью терминов, имеющих это число: число 3 не тождественно с тройкой, составленной из Брауна, Джоунса и Робинсона. Число 3 есть нечто, что все тройки имеют в общем и что отличает их от других совокупностей.

[1] G. Frege. *Grundlagen der Arithmetik.* Тот же самый ответ был дан в более полном виде в его работе *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1 (1893).

Число есть нечто, что характеризует определенные *группы* [collections], а именно те из них, которые имеют это число.

Вместо разговоров о «совокупности» мы будем, как правило, говорить о «классе», или иногда о «множестве». В математике для этих же целей используются также термины «многообразие» и «совокупность». Позднее мы более подробно остановимся на классах. Пока же мы будем говорить о них как можно меньше. Но некоторые замечания должны быть сделаны немедленно.

Класс или совокупность могут быть определены двумя способами, которые кажутся совершенно отличными друг от друга. Мы можем пронумеровать все его члены, как это имеет место, когда мы говорим: «Под совокупностью я имею в виду Брауна, Джоунса и Робинсона». Или же я могу упомянуть определяющее свойство, как это имеет место в случае, когда мы говорим о «человечестве» или «обитателях Лондона». Определение, которое перечисляет, называется «экстенсиональным» определением, а то, которое упоминает определяющее свойство, называется «интенсиональным». Из этих двух определений интенсиональное является логически более фундаментальным. Это видно из двух рассмотрений. (1) Экстенсиональное определение может быть всегда сведено к интенсиональному, и (2) интенсиональное определение не может быть часто теоретически сведено к экстенсиональному. Каждое из этих утверждений нуждается в пояснении.

1. Браун, Джоунс и Робинсон скопом обладают определенным свойством, которым во всей вселенной не обладает никто больше, а именно свойством быть или Брауном, или Джоунсом, или Робинсоном. Это свойство может быть использовано для того, чтобы дать интенсиональное определение класса, состоящего из Брауна, Джоунса и Робинсона. Рассмотрим следующую формулу «x есть Браун, или x есть Джоунс, или x есть Робинсон». Эта формула будет истинна как раз для трех x, а именно для Брауна, Джоунса, Робинсона. В этом отношении она напоминает кубическое уравнение с его тремя корнями. Она может быть взята как приписывающее свойство, общее для членов класса, состоящего из этих трех людей, и свойственное только им. Подобная трактовка может быть применена к любому другому классу, заданному экстенсионально.

2. Ясно, что на практике мы знаем часто весьма много о классе, даже не будучи способны перенумеровать его члены. Ни один человек не мог бы на самом деле перечислить всех людей или даже обитателей Лондона, и все же мы знаем достаточно много об этих классах. Этого достаточно, чтобы показать, что экстенсиональное определение не *необходимо* для знания о классе. А когда мы переходим к рассмотрению бесконечных классов, мы обнаруживаем, что перечисление даже теоретически невозможно для существ, живущих конечное время. Мы не можем перенумеровать все натуральные числа: они есть 1, 2, 3 и *так далее.* На некотором этапе мы должны ограничиться этим «и так

далее». Мы не можем перенумеровать всех дробей или всех иррациональных чисел, или же каких-либо еще других бесконечных совокупностей. Таким образом, наше знание о таких совокупностях может быть выведено только из интенсионального определения.

Эти замечания уместны при поисках определения числа в трех различных направлениях. Во-первых, числа сами образуют бесконечную совокупность и не могут, следовательно, быть определены перечислением. Во-вторых, совокупности, имеющие данное число терминов, сами, по предположению, образуют бесконечную совокупность: предполагается, например, что существует бесконечная совокупность троек в мире, потому что если бы это было не так, общее число вещей в мире было бы конечным, что, хотя возможно, все-таки маловероятно. В-третьих, мы хотим определить «число» таким образом, чтобы были возможны бесконечные числа.

Таким образом, мы должны быть способны говорить о числе терминов в бесконечной совокупности, и такая совокупность должна определяться интенсионально, то есть через свойство, общее всем ее членам и свойственное только им.

Для многих целей класс и определяющая характеристика его практически взаимозаменяемы. Существенная разница между ними состоит в том факте, что имеется только один класс, имеющий заданное множество членов, в то время как имеется много различных характеристик, которые могут определять заданный класс. Люди могут быть определены как бесперые двуногие, или как разумные животные, или (более правильно) свойствами, которые Свифт приписал Йеху. Тот факт, что определяющие характеристики никогда не являются единственными, делает классы полезными. В противном случае мы были бы ограничены свойствами, присущими только своим членам[1]. Любое из этих свойств может быть использовано вместо класса, когда единственность не является существенной.

Возвращаясь сейчас к определению числа, становится ясно, что число является способом собирания вместе определенных совокупностей, а именно тех, которые имеют данное число терминов. Мы можем рассматривать все пары в одной связке, тройки — в другой и так далее. Таким образом, мы получаем различные связки совокупностей, и каждая связка состоит из всех совокупностей, имеющих определенное число терминов. Каждая связка есть класс, чьими членами являются совокупности, то есть классы; таким образом, каждая из них является классом классов. Связка, состоящая, например, из всех пар, есть класс классов: каждая пара есть класс из двух членов, а вся связка пар есть класс с бесконечным числом членов, каждый из которых есть класс с двумя членами.

---

[1] Как будет объяснено позднее, классы могут считаться логическими фикциями, сооруженными из определяющих характеристик. Но пока, для того чтобы упростить изложение, мы будем считать классы реально существующими.

Но как мы решим, принадлежат ли две совокупности к той же самой связке? Ответ так и напрашивается: «Найти число членов в совокупности и поместить совокупность в одну и ту же связку, если они имеют одно и то же число членов». Но это предполагает, что мы уже определили числа и что мы знаем, как обнаружить, сколько членов имеется в совокупности. Мы так привыкли к операции счета, что такие предположения проходят незамеченными. На самом деле, однако, счет, хотя весьма и знаком, является логически очень сложной операцией. Больше того, он доступен, как средство обнаружения того, сколько терминов имеет совокупность, только в случае конечных совокупностей. Наше определение числа не должно предполагать заранее, что все числа конечны, и мы не можем в любом случае, не впадая в порочный круг, использовать счет в определении чисел, потому что уже в счете используются числа. Следовательно, нам нужен какой-то другой метод определения того, когда две совокупности имеют одинаковое число терминов.

На самом деле, логически проще обнаружить, имеют ли две совокупности одно и то же число терминов, чем определить, что такое число. Иллюстрация поможет прояснить это. Если бы в мире нигде не было полигамии и полиандрии, то ясно, что число мужей было бы в точности равно числу жен. И для знания этого нам вовсе не нужны данные переписи, как не нужны данные о точном числе жен и мужей. Мы знаем, что число их должно быть одним и тем же в обеих совокупностях, потому что каждый муж имеет одну жену, а каждая жена имеет одного мужа. Отношение мужа и жены является, как говорят, «одно-однозначным».

Отношение называется «одно-однозначным» в том случае, когда x имеет соответствующее отношение к y, и никакой другой термин x' не имеет того же отношения к y, а x не имеет того же отношения ни к какому другому термину y', отличному от y. Если выполняется первое из этих условий, отношение называется «одно-многозначным», когда выполняется второе — отношение называется «много-однозначным». Следует отметить, что в этих определениях число 1 не используется.

В христианских странах отношение мужа к жене является одно-однозначным; в магометанских странах оно является одно-многозначным, а на Тибете — много-однозначным. Отношение отца к сыну является одно-многозначным, а сына к отцу — много-однозначным. Но вот отношение самого старшего из сыновей к отцу является одно-однозначным. Если n есть некоторое число, отношение n к $n + 1$ является одно-однозначным; таковым же является отношение n к $2n$ или к $3n$. Когда мы рассматриваем только положительные числа, отношение n к $n2$ является одно-однозначным, но когда к рассмотрению допущены отрицательные числа, отношение становится дву-однозначным, так как n и $-n$ имеют тот же самый квадрат. Этих примеров должно быть достаточно для того, чтобы сделать ясным понятия одно-однозначного, много-однозначного и одно-многозначного отношений, играющих важную роль в принципах математики, не только в связи с определением числа, но и в связи с другими темами.

Говорят, что два класса «подобны», когда имеется одно-однозначное отношение, соотносящее термины одного класса с терминами другого класса в той же самой манере, как соотносятся в отношении женитьбы мужья с женами. Несколько предварительных определений помогут нам установить это определение более точно. Класс тех терминов, которые имеют данное отношение к чему-либо, называется *областью* этого отношения: таким образом, отцы являются областью отношения отца к ребенку, мужья являются областью отношения мужа к жене, жены являются областью отношения жены к мужу, а мужья и жены вместе являются областью отношения женитьбы. Отношение жены к мужу называется *обратным* отношению мужа к жене. Подобным же образом *меньше* является обратным для *больше*, *позднее* является обратным для *ранее*, и так далее. Вообще говоря, обратное данному отношению x и y есть такое отношение y к x, которое имеет место, если имеет место первое отношение. *Конверсная область* отношения есть область обратного отношения: таким образом, класс жен есть конверсная область отношения мужа к жене. Мы можем установить наше определение подобия следующим образом:

Класс является «подобным» другому классу в том случае, когда имеется одно-однозначное отношение, в котором один класс есть его область, в то время как другой класс есть его конверсная область.

Легко доказать, (1) что каждый класс подобен себе, (2) что если класс α подобен классу β, тогда β подобен α, (3) что если α подобен β и β подобен γ, то α подобен γ. Отношение называется *рефлексивным*, если оно обладает первым из этих свойств, *симметричным*, когда оно обладает вторым свойством, и *транзитивным*, когда оно обладает третьими. Ясно, что отношение, являющееся симметричным и транзитивным, должно быть рефлексивным для всей его области. Отношения, обладающие этими свойствами, являются важными, и следует подчеркнуть, что подобие является одним из этих видов отношений.

С точки зрения здравого смысла ясно, что два конечных класса имеют то же самое число терминов, если они подобны, но не наоборот. Акт счета состоит в установлении одно-однозначного соответствия между множеством считаемых объектов и натуральными числами (исключая нуль), которые используются в этом процессе. Соответственно, здравый смысл заключает, что имеется столько объектов в считаемом множестве, сколько имеется чисел в последнем числе при счете. И мы также знаем, что пока мы ограничиваемся конечными числами, имеется точно n чисел, от 1 до n. Отсюда следует, что последнее число, используемое в счете совокупности, есть число терминов в этой совокупности, при условии, что совокупность конечна. Но этот результат, кроме того, что он приложим только к конечным совокупностям, предполагает тот факт и зависит от него, что два подобных класса имеют одно и то же число терминов; потому что, когда мы считаем, скажем, 10 объектов, мы показываем, что множество этих объектов подобно множеству чисел от 1 до 10. Понятие подобия логически предполагается в операции счета, и оно логически проще, хотя и менее знакомо. При счете считаемые объекты надо брать в определенном порядке — первый, второй, третий и т. д. Но порядок не является сущностью числа: он является не имеющим отношения к делу добавлением, не необходимым с логической точки зрения. Понятие подобия не требует порядка: например, мы видели, что число мужей есть то же самое, что и число жен, не устанавливая среди них никакого порядка. Понятие подобия также не требует, чтобы подобные классы были также конечны. Возьмем, например, натуральные числа (исключая нуль), с одной стороны, и дроби с числителем 1, с другой: ясно, что мы можем сопоставить 2 с 1/2, 3 с 1/3 и так далее, доказывая таким образом, что два класса являются подобными.

Мы можем, таким образом, использовать понятие «подобия» для того, чтобы решить, когда две совокупности принадлежат одной связке, в том смысле, в котором мы задавали этот вопрос ранее в этой главе. Мы хотим сделать такую связку, которая бы содержала класс, не имеющий членов: это будет число 0. Затем мы хотим иметь связку классов, которые имеют один член: это будет число 1. Затем для числа 2 мы хотим связку, состоящую из всех пар, затем из всех троек и так далее. Если задана некоторая совокупность, мы можем определить связку, к которой принадлежит совокупность, как класс всех тех совокупностей, которые «подобны» ей. Весьма легко видеть, что если (например) совокупность имеет три члена, класс всех этих совокупностей, подобных ей, будет классом троек. И какое бы число членов ни имела некоторая совокупность, «подобные» ей совокупности будут иметь то же самое число терминов. Мы можем принять это за *определение* понятия «иметь то же самое число терминов». Ясно, что это дает удовлетворительные результаты, пока мы ограничиваемся конечными совокупностями.

В до сих пор предложенном нет ничего даже в самой малой степени парадоксального. Но когда мы подходим к подлинному определению числа, мы не можем избежать того, что должно казаться с первого взгляда парадоксом, хотя вскоре это впечатление рассеивается. Мы естественно думаем, что класс пар (например) есть нечто отличное от числа 2. В отношении класса пар не возникает никаких сомнений: это понятие неоспоримо и его определение несложно, а вот число 2, в некотором другом смысле, является метафизической сущностью, по поводу которой мы не чувствуем, что она существует или что мы можем выследить ее. Поэтому благоразумнее будет ограничиться классом пар, в котором мы уверены, нежели охотиться за проблематичным числом 2, которое всегда должно оставаться неуловимым. Соответственно мы принимаем следующее определение:

Число класса есть класс всех тех классов, которые ему подобны.

Таким образом, число пары будет классом всех пар. На самом деле, класс всех пар *будет* числом 2, в соответствие с нашим определением. Ценой некоторой неестественности это определение гарантирует определенность и несомненность; нетрудно доказать, что так определенные числа имеют все свойства, которые ожидаются от чисел.

Мы можем сейчас определить числа обобщенно как любую из связок, в которую подобие собирает классы. Число будет множеством классов таких, что любые два из них подобны друг другу, и ничто вне этого множества не является подобным чему-либо в множестве.

Другими словами, число (вообще) есть некоторая совокупность, являющаяся числом одного из своих членов; или, еще более просто:

Число есть нечто, что является числом некоторого класса.

Такое определение имеет вербальную видимость порочного круга, но на самом деле это не так. Мы определяем «число данного класса» без всякого использования понятия числа; следовательно, мы можем определить число общим образом в терминах «числа данного класса», не совершая никакой логической ошибки.

Определения подобного рода являются, на самом деле, общепринятыми. Класс отцов, например, мог бы быть определен сначала через определение того, что такое быть отцом кого-либо. Тогда классом отцов будут все те, кто являются чьим-либо отцом. Подобным же образом, если мы хотим определить, скажем, квадраты чисел, мы должны сначала определить, что имеется в виду, когда говорится, что одно число есть квадрат другого, а затем определять квадраты чисел так, чтобы они были квадратами других чисел. Подобного рода процедура является общепринятой, и важно понять, что она является допустимой и даже часто необходимой.

Мы только что дали определение чисел, которое будет служить для конечных совокупностей. Остается увидеть, как оно может работать для бесконечных совокупностей. Но сначала мы должны решить, что мы имеем в виду под «конечным» и «бесконечным», что не может быть сделано в пределах данной главы.

Глава III
КОНЕЧНОСТЬ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Ряд натуральных чисел может быть определен полностью, как мы видели в главе I, если мы знаем, что подразумевается под тремя терминами «0», «число» и «последующий элемент». Но мы можем сделать дальнейший шаг: мы можем определить все натуральные числа, если мы знаем, что подразумевается под «0» и «последующим элементом». Попытка увидеть, как это может быть сделано, поможет нам понять различие между конечным и бесконечным, а также то обстоятельство, почему она не может быть распространена за пределы конечного. Мы еще не будем рассматривать, как «0» и «последующий элемент» должны быть определены: мы на момент предположим, что знаем, что значат эти термины, и покажем, как при этом могут быть получены все остальные натуральные числа.

Легко видеть, что можем достичь любого наперед заданного числа, скажем, 30 000. Мы сначала определим «1» как «последующий элемент 0», затем мы определяем «2» как «последующий элемент 1» и так далее. В случае наперед заданного числа, такого как 30 000, доказательство, что мы можем достичь его шаг за шагом подобным образом, вполне доступно, если мы запасемся терпением, и сделать это можно в действительном эксперименте: мы можем продолжать процедуру до тех пор, пока не достигнем 30 000. Но хотя такой экспериментальный метод доступен для каждого определенного натурального числа, он не доступен для доказательства общего утверждения, что *все* такие числа могут быть достигнуты этим путем, то есть начиная с 0 и шаг за шагом от каждого числа к его последующему элементу. А есть ли какой-нибудь другой путь, на котором это может быть доказано?

Давайте рассмотрим этот вопрос по-другому. Каковы те числа, которые достижимы, если заданы термины «0» и «последующий элемент»? Есть ли способ, которым можно было бы определить все такие числа? Мы достигаем 1 как последующий элемент 0, 2 как последующий элемент 1, 3 как последующий элемент 2 и т. д. Вот как раз это «т. д.» мы хотим заменить чем-нибудь менее расплывчатым и неопределенным. У нас могло бы быть искушение сказать, что «и так далее» означает, что процесс перехода к последующему элементу может быть повторен любое *конечное число* раз. Но проблема, которой мы сейчас заняты, является проблемой определения «конечного числа», и, следовательно, мы не должны использовать это понятие в нашем определении. Наше определение не должно предполагать, что мы знаем, что такое конечное число.

Ключ к нашей проблеме лежит в *математической индукции.* Нужно вспомнить, что в главе I она была пятым из тех примитивных утверждений, которые мы положили в основу понимания натуральных чисел. Оно утверждает, что любое свойство, которое принадлежит 0 и принадлежит последующему элементу некоторого числа, имеющего это свойство, принадлежит всем натуральным числам. Тогда это утверждение было изложено в виде принципа, но сейчас мы примем его как определение. Нетрудно видеть, что термины, удовлетворяющие ему, являются теми, что и числа, которые могут быть достигнуты от 0 последующими шагами от одного к другому. Этот момент столь важен, что мы прибегнем к некоторым деталям.

Неплохо начать с некоторых определений, которые будут полезны и для других вопросов.

Говорят, что свойство является «наследственным» [hereditary] в ряду натуральных чисел, если всякий раз, когда оно принадлежит числу *n*, оно также принадлежит *n* + 1, последующему элементу *n*. Подобным же образом класс называется «наследственным», если всякий раз, когда *n* является членом этого класса, таковым является и *n* + 1. Легко *увидеть*, хотя мы еще не можем знать этого, что назвать свойство наследственным эквивалентно утверждению, что оно принадлежит всем натуральным числам, не меньшим, чем некоторые из них. Например, оно должно принадлежать всем числам, не меньшим 100, или всем, не меньшим, чем 1000, или же оно может принадлежать всем числам, не меньшим, чем 0, то есть принадлежать всем числам без исключения.

Свойство называется «индуктивным», когда оно является наследственным свойством, которое принадлежит 0. Подобным же образом класс называется индуктивным, когда он является наследственным классом, членом которого является 0.

Если задан наследственный класс, членом которого является 0, то можно сделать вывод о том, что 1 является его членом, потому что наследственный класс содержит последующие элементы его членов, а 1 является последующим элементом 0. Подобным же образом, если задан наследственный класс, членом которого является 1, можно сделать вывод о том, что 2 является его членом, и так далее. Таким образом, мы можем доказать пошаговой процедурой, что любое заранее заданное натуральное число, скажем 30 000, есть член каждого индуктивного класса.

Мы определим «множество последующих элементов» [posterity] данного натурального числа в связи с отношением «непосредственно предшествующего элемента» [immediate predecessor] (которое является обратным «последующему элементу»), как все те термины, которые принадлежат каждому наследственному классу, к которому данное число принадлежит. Опять-таки легко *видеть*, что множество последующих элементов натурального числа состоит из самого себя и всех больших натуральных чисел. Но этого мы пока еще официально не знаем.

Согласно приведенным выше определениям, множество последующих элементов 0 состоит из тех терминов, которые принадлежат каждому индуктивному классу.

Теперь нетрудно убедиться в том, что множество последующих элементов 0 есть то же самое множество, что и те термины, которые достижимы от 0 последовательными шагами от следующего к следующему. Потому что, во-первых, 0 принадлежит обоим этим множествам (в том смысле, в котором мы определили наши термины); во-вторых, если *n* принадлежит обоим множествам, то же самое относится и к *n* + 1. Следует заметить, что мы имеем дело здесь с такого рода материями, которые не допускают строгих доказательств, а именно, со сравнением относительно расплывчатой идеи с относительно точной идеей. Понятие «тех терминов, которые могут быть достигнуты от 0 последовательными шагами от следующего к следующему» является расплывчатым, хотя кажется, что оно несет определенное значение. С другой стороны, «множество последующих элементов 0» является точным и определенным как раз там, где другая идея туманна. Точная идея может рассматриваться как дающая то, что мы намереваемся иметь в виду, когда говорим о терминах, которые могут быть достигнуты от 0 через последовательные шаги.

Мы сейчас принимаем следующее определение:

«Натуральные числа» есть множество последующих элементов 0 в отношении «непосредственно предшествующего элемента» (которое является обратным «последующему элементу»).

Мы, наконец, прибыли к определению одной из трех примитивных идей Пеано в терминах двух других. Как результат этого определения два из его примитивных утверждения — а именно то, которое утверждало, что 0 есть число, а также математическая индукция, — стали не необходимыми, так как они теперь следуют из определения. А утверждение о том, что последующий элемент натурального числа есть натуральное число, требуется в ослабленном виде: «каждое натуральное число имеет последующий элемент».

Мы можем, конечно, легко определить «0» и «последующий элемент» через общее определение числа, к которому мы пришли в главе II. Число 0 есть число терминов в классе, не имеющем членов, то есть в классе, который называется «нуль-класс». По общему определению числа, число терминов в нуль-классе есть множество всех классов, подобных нуль-классу, то есть (как легко доказать) множество, состоящее только из нуль-класса, то есть класса, чей единственный член есть нуль-класс (оно не тождественно нуль-классу: оно имеет один член, а именно нуль-класс, в то время как нуль-класс не имеет членов. Класс, имеющий один член, никогда не идентичен с его членом, и это будет понятно, когда мы подойдем к теории классов). Таким образом, мы имеем чисто логическое определение:

0 есть класс, чей единственный член есть нуль-класс.

Остается определить «последующий элемент». При данном некотором числе n пусть α будет классом, имеющим n членов, и пусть x будет термином, не являющимся членом α. Тогда класс, состоящий из α с добавленным x будет иметь $n + 1$ членов. Таким образом, мы будем иметь следующее определение:

Последующим элементом числа терминов в классе α является число терминов в классе, состоящем из α вместе с x, где x есть некоторый термин, не принадлежащий к этому классу.

Тут требуется некоторая полировка для того, чтобы сделать это определение совершенным, но нас сейчас не должно это занимать[1]. Следует помнить, что мы уже дали логическое определение числа в терминах класса, а именно, мы определили его как множество всех классов, подобных данному классу.

Таким образом, мы свели три примитивных понятия Пеано к идеям логики: мы дали им определение, сделав их вполне определенными, так что они больше не обладают бесконечным числом значений, которые имелись тогда, когда мы требовали от них только выполнения пяти аксиом Пеано. Мы устранили эти понятия из фундаментального аппарата и круга терминов, которые надо просто интуитивно принять, тем самым увеличив дедуктивную ясность математики.

Что касается пяти примитивных утверждений, мы уже преуспели в выведении двух из них из нашего определения «натурального числа». Как обстоят дела с остальными тремя? Очень легко доказать, что 0 не является последующим элементом никакого числа и что последующий элемент любого числа есть число. Но остается некоторая трудность в отношении последнего примитивного утверждения, а именно: «нет двух чисел, имеющих один и тот же последующий элемент». Трудность возникает, когда общее число индивидов во вселенной конечно; для двух данных натуральных чисел m и n, ни одно из которых не является всеобщим числом индивидов во вселенной, легко доказать, что мы не можем иметь $m + 1 = n + 1$ и до тех пор, пока не имеем $m = n$. Но предположим, что всеобщее число индивидов во вселенной равно (скажем) 10, тогда не будет класса из 11 индивидов, и число 11 будет тогда нуль-классом. Им же будет и число 12. Тогда мы будем иметь 11 = 12, и значит, последующий элемент 10 будет таким же, как и последующий элемент 11, хотя 10 не совпадает с 11. Таким образом, мы будем иметь два различных числа с одним и тем же последующим элементом. Этого нарушения третьей аксиомы не могло бы возникнуть, если бы число индивидов во вселенной не было конечным. Мы позднее вернемся к этой теме[2].

Предполагая, что число индивидов во вселенной не является конечным, мы преуспеваем не только в определении трех примитивных понятий Пеано, но также в обнаружении того, как можно доказать его пять примитивных утверждений посредством примитивных понятий и утверждений, принадлежащих логике. Распространение этого результата на те современные отрасли математики, которые не выводимы из теории натуральных чисел, не представляют принципиальных трудностей, как это показано нами в другой работе[3].

---

[1] См.: *Principia Mathematica*, vol. ii, *110.

[2] См. главу XIII.

[3] По поводу геометрии, если она не является полностью аналитической, см.: *Principles of Mathematics*, chap. VI; по поводу рациональной динамики см. там же, chap. VII.

Процесс математической индукции, через который мы определяем натуральные числа, может быть обобщен. Мы определили натуральные числа как «множество последующих элементов» 0 в отношении числа к его непосредственно последующему элементу. Если мы назовем это отношение *N*, любое число *m* будет иметь это отношение к *m* + 1. Свойство является *N*-наследственным, если всякий раз, когда свойство принадлежит к числу *m*, оно также принадлежит *m* + 1, то есть числу, к которому *m* имеет отношение *N*. А число *n* принадлежит «множеству последующих элементов» *m* в отношении, *N* если *n* имеет каждое *N*-наследственное свойство, принадлежащее *m*. Эти определения могут быть применимы и к любому другому отношению, точно таким же образом, как и к *N*. Таким образом, если *R* есть отношение какого-либо рода, мы можем положить следующие определения[1]:

Свойство называется «*R*-наследственным» в том случае, если оно принадлежит термину *x*, а *x* имеет отношение *R* к *y*, то оно принадлежит *y*.

Класс является *R*-наследственным, когда его определяющим свойством является *R*-наследственность.

Термин *x* является «*R*-предшественником» [ancestor] термина *y*, если *y* имеет каждое *R*-наследственное свойство, которое имеет *x*, при условии, что *x* есть термин, которые имеет отношение *R* к чему-либо, или что-либо имеет отношение *R* к *x* (только для исключения тривиальных случаев).

«*R*-потомство» («*R*-множество последующих элементов») термина *x* состоит из всех терминов, для которых *x* есть *R*-предшественник.

Мы так сформулировали наши определения, что если термин есть предшественник чего-либо, он является своим собственным предшественником и принадлежит к своему собственному множеству последующих элементов. Это сделано просто для удобства.

Можно заметить, что если мы возьмем в качестве отношения *R* «быть родителем», то «предшественник (предок)» и «множество последующих элементов (потомство)» будут иметь обычные значения, за исключением того, что человек должен числиться среди своих собственных предков и потомков. Конечно, совершенно ясно, что «предшественник» может быть определен в терминах «родителя», но до тех пор, пока Фреге не развил обобщенную теорию индукции, никто не мог бы определить «предка» в терминах «родителя». Краткое рассмотрение этой точки зрения имеет целью показать важность теории. Человек, первый раз столкнувшийся с проблемой определения «предка»

[1] Эти определения и обобщенная теория индукции идут от Фреге, чьи результаты были опубликованы уже в 1879 году, в его Begriffsschrift. Вопреки громадному значению этой работы, я был, по-моему, первым человеком, который вообще прочитал ее — за более чем 20 лет после ее публикации.

в терминах «родителя», мог бы естественно сказать, что A есть предок Z, если между A и Z имеется определенное число людей, B, C, ..., из которых B есть ребенок A, и каждый есть родитель следующего, пока мы не дойдем до последнего, который является родителем Z. Но это определение не будет адекватным, пока не добавим, что число промежуточных элементов должно быть конечным. Возьмем, например, такой ряд, как

$$-1, -1/2, -1/4, -1/8, \ldots, 1/8, 1/4, 1/2, 1.$$

Здесь мы имеем сначала ряд отрицательных дробей, не имеющий конца, а затем ряд положительных дробей, не имеющий начала. Скажем ли мы, что в этом ряду –1/8 является предшественником 1/8? Это было бы в соответствии с определением, предложенным вначале, но это не будет соответствовать такому определению, которое мы хотели бы иметь для выражения нашей идеи. Поэтому весьма существенно, чтобы число промежуточных членов было конечным. Но, как мы видели, «конечное» определяется через математическую индукцию, и проще определить отношение предшествования в общем виде, чем определять его сначала только для случая отношения n к $n + 1$, а затем расширять на другие случаи. Здесь, как и во множестве других случаев, общность с самого начала, хотя она и требует больших мыслительных затрат поначалу, впоследствии сэкономит мысль и усилит логическую силу.

Использование математической индукции в описанной выше манере в прошлом было несколько таинственным. Как будто не было никаких разумных сомнений в том, что она является вполне нормальным способом доказательства, но никто не понимал достаточно вразумительно, почему она все-таки допустима. Некоторые верили в то, что она на самом деле является индукцией в том смысле слова, который употребляется в логике. Пуанкаре рассматривал принцип математической индукции как чрезвычайно важный, посредством которого бесконечное число силлогизмов может быть сжато в один аргумент. Мы теперь знаем, что все подобные взгляды являются ошибочными и что математическая индукция является определением, а не принципом. Есть такие числа, к которым она может быть применена, а есть и другие, к которым она не может быть применена. Мы *определяем* «натуральные числа» как такие, к которым могут быть применимы доказательства с помощью математической индукции, то есть как такие числа, которые обладают всеми индуктивными свойствами. Отсюда следует, что применимость таких доказательств к натуральным числам есть результат обращения не к мистической интуиции, или аксиоме, или принципу, но чисто вербальному утверждению. Если «четвероногие» определены как животные с четырьмя ногами, тогда можно сделать вывод, что имеющие четыре ноги животные являются четвероногими. И в случае с числами, имеющими индуктивные свойства, ситуация точно такая же.

Мы будем использовать фразу «индуктивные числа» для обозначения того же самого множества, о котором до сих пор говорили как о «натуральных числах». Фраза «индуктивные числа» более предпочтительна, потому что она напоминает о происхождении определения этого множества чисел от математической индукции.

Математическая индукция позволяет лучше, чем что-либо еще, дать существенную характеристику отличия конечного от бесконечного. Принцип математической индукции мог бы быть установлен популярно в такой форме: «что может быть выведено от следующего к следующему, может быть выведено от первого к последнему». Это справедливо, если число промежуточных шагов между первым и последним является конечным, но не наоборот. Всякий, кто наблюдал, как поезд набирает ход, замечал, как толчок передается от вагона к следующему вагону, пока, наконец, весь поезд не оказывается в движении. Когда поезд очень длинный, этот процесс занимает много времени. Если поезд был бы бесконечно длинным, то потребовалось бы бесконечное количество толчков от вагона к вагону, и никогда не наступило бы время, когда тронется весь поезд. Тем не менее, если ряд вагонов не длиннее, чем ряд индуктивных чисел (который, как мы увидим, является примером наименьшей бесконечности), каждый вагон сдвинулся бы рано или поздно, при работающем двигателе, хотя, конечно, при этом будет другой, более дальний от паровоза вагон, который еще не начал двигаться. Этот пример позволяет уяснить суть аргумента от следующего к следующему и его связь с конечностью. Когда мы подходим к бесконечным числам, где аргументы от математической индукции будут больше не значимы, свойства таких чисел помогут нам прояснить, по контрасту, почти бессознательное использование математической индукции при рассмотрении конечных чисел.

Глава IV
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА

Мы довели наш анализ ряда натуральных чисел до того места, где мы получили логические определения членов этого ряда, целого класса его членов и отношения числа к его непосредственно последующему элементу. Мы должны сейчас рассмотреть *порядковый* характер натуральных чисел в таком порядке: 0, 1, 2, 3, ... Мы обычно размышляем о числах именно в таком *порядке*, и существенная часть работы по анализу чисел состоит в поиске определения «порядка» или «ряда» в логических терминах.

Понятие порядка имеет огромную важность в математике. Не только целые, но и рациональные и все действительные числа расположены в порядке величины, и это является самым существенным из их математических свойств. Порядок точек на линии существенен в геометрии, то же относится к слегка более сложному порядку линий, проходящих через точку, или плоскостей через линию. Геометрическое понятие пространственных измерений есть развитие понятия порядка. Концепция *предела*, которая лежит в основе всей высшей математики, является порядковой концепцией. Есть такие разделы математики, которые не зависят от понятия порядка, но они малы по сравнению с теми частями, в которых это понятие задействовано.

В поисках определения порядка первая вещь, которую следует понять, это то, что множество терминов не имеет *единственного* порядка, наличие которого бы исключало наличие других. Множество терминов имеет все порядки, на которые только способно. Иногда один порядок более знаком и естественен для нашего мышления, и поэтому мы склонны считать его единственным порядком для такого множества терминов. Но это ошибочно. Натуральные числа — или «индуктивные числа», как мы будем называть их, — встречаются нам больше всего в порядке величины, но их можно упорядочить бесконечным числом способов. Мы могли бы, например, сначала рассматривать все нечетные числа и затем все четные числа, или сначала 1, а затем все четные числа, а затем все нечетные числа, делящиеся на 3, затем все делящиеся на 5, но не на 2 или 3, затем все делящиеся на 7, но не на 2, 3 или 5, и так дальше по всему ряду простых чисел. Когда мы говорим, что «перестраиваем» числа в такие различные порядки, это является неаккуратным выражением: что мы на самом деле делаем — так это обращаем внимание на определенные отношения между натуральными числами. Мы можем «построить в порядок» натуральные числа не в большей степени, чем «построить в порядок» звездные небеса; но мы можем узреть порядок среди звезд либо по их яркости, либо по распределению на небе. Точно так же мы можем наблюдать различные отношения среди натуральных чисел, которые и дают различные способы упорядочения, все из которых допустимы в равной степени. И это в такой же степени относимо к точкам на линии или моментам времени: один из порядков является более знакомым, но все другие равно значимы. Мы могли бы сначала взять на линии все точки, которые имеют целые координаты, затем те, которые имеют рациональные координаты, затем — с алгебраическими нерациональными координатами и так далее, с любой степенью запутанности, которую мы только захотим. Результирующий порядок для точек будет одним из тех, который уже имелся для точек на прямой, и единственно произвольная вещь относительно различных порядков в множестве терминов — это наше внимание, потому что сами термины, среди которых обнаруживается порядок, всегда имеют все порядки, на которые они только способны.

Один важный результат этого рассмотрения состоит в том, что мы не должны усматривать определение порядка в природе множества терминов, подлежащих упорядочению, так как одно и то же множество терминов имеет много порядков. Порядок коренится не в *классе* терминов, но в отношениях между членами класса, благодаря которым некоторые члены появляются раньше, а некоторые позднее. Тот факт, что класс может иметь много порядков, обязан тому факту, что может иметься много отношений среди членов одного класса. Какие свойства должно иметь отношение для того, чтобы быть причиной возникновения порядка?

Существенные характеристики отношения, дающего порядок, могут быть обнаружены рассмотрением того, что мы способны сказать о двух находящихся в отношении терминах в упорядочиваемом классе, один из которых «предшествует», а второй «следует». А теперь, для того чтобы мы смогли использовать эти слова так, чтобы понимать их естественно, мы потребуем, чтобы упорядочивающие отношения имели три свойства:

(1) Если x предшествует y, то y не должен предшествовать x. Это вполне ясная характеристика тех отношений, которые ведут к рядам. Если x меньше y, y не меньше, чем x. Если x раньше по времени, чем y, y не раньше, чем x. Если x слева от y, то y не слева от x. С другой стороны, отношения, которые не приводят к порядку, часто не имеют этого свойства. Если x брат или сестра y, то y брат или сестра x. Если x имеет тот же рост, что *и* y, то и y имеет тот же самый рост, что x. Если x отличен по высоте от y, то y отличен по высоте от x. Во всех этих случаях, когда имеет место отношение между x и y, тогда то же отношение имеет место между y и x. Но в отношениях порядка такого не может быть. Отношения, имеющие это первое свойство, называются *асимметричными.*

(2) Если x предшествует y и y предшествует z, x должен предшествовать z. Это может быть проиллюстрировано теми же примерами, что и раньше: *менее*, *раньше*, *слева от.* Но как примеры отношений, *не* имеющие этих свойств, мы можем использовать только два из предыдущих примеров. Если x есть сестра или брат y, а y брат или сестра z, x может не быть братом или сестрой z, так как x и z могут быть одним и тем же лицом. То же относится к различию в росте, но не к тождеству, которое имеет второе из наших свойств, но не первое. Отношение «отец», с другой стороны, имеет наше первое свойство, но не второе. Отношение, имеющее второе свойство, называется *транзитивным.*

(3) Если заданы два термина упорядочиваемого класса, то должен быть один, который предшествует, и такой, который следует за ним. Например, из двух целых чисел, дробей или действительных чисел одно больше, а другое меньше, но для двух комплексных чисел это неверно. Для двух моментов времени один должен быть раньше, а другой позже, но для событий, которые могут быть одновременны, этого не может быть. Из двух точек на линии одна должна быть слева от другой. Отношение, имеющее это третье свойство, называется *связным.*

Когда отношение обладает тремя этими свойствами, тогда оно устанавливает порядок среди терминов, между которыми есть это отношение. И всякий раз, когда существует порядок, может быть найдено отношение, порождающее тот порядок, которое имеет эти три свойства.

Перед иллюстрацией этого тезиса мы введем несколько определений.

(1) Отношение называется алиорелятивным[1], или же *влекущим различение*, если нет ни одного термина, имеющего это отношение к самому себе. Таковы, например, отношения «больше», «отличные по размеру», «брат», «муж», «отец» — все они алиорелятивны; но «равный», «рожденный от тех же родителей», «близкий друг» таковыми не являются.

(2) *Квадрат* отношения есть такое отношение, которое содержится между двумя терминами x и z, когда имеется промежуточный термин y, такой, что данное отношение содержится между x и y и между y и z. Таковыми отношениями являются «дедушка по отцу», которое является квадратом «отца», «больше на 2», которое является квадратом «больше на 1», и т. д.

(3) *Область* отношения состоит из всех терминов, которые имеют это отношение к чему-либо, и *обратная область* состоит из всех тех терминов, к которым то или другое имеет это отношение. Эти слова уже определялись, но вспомним их для следующих определений.

(4) *Поле* отношения состоит из области и обратной области вместе.

(5) Одно отношение *содержится в* или *влечется* другим, если первое имеет место всякий раз тогда, когда имеет место второе.

Можно видеть, что *асимметричное* отношение есть то же самое, что отношение, чей квадрат является алиорелятивным. Часто бывает так, что отношение является алиорелятивным без того, чтобы быть асимметричным, хотя асимметричное отношение всегда алиорелятивно. Например, «супруг» является алиорелятивным, но симметричным, так как если x есть супруг y, то y есть супруг x. Но для *транзитивных* отношений все алиорелятивные являются асимметричными и наоборот.

Из определений видно, что *транзитивное* отношение есть такое, которое влечется своим квадратом, или, как мы говорим также, «содержит» собственный квадрат. Таким образом, «предок» транзитивно, потому что предок предка является предком, но «отец» не транзитивно, потому что отец отца не является тому отцом. Транзитивное алиорелятивное отношение — это такое отношение, которое содержит собственный квадрат и влечет различение, или, что то же самое, чей квадрат влечет себя самого и различение — потому что когда отношение является транзитивным и симметричным, то это эквивалентно его алиорелятивности.

[1] Этот термин был введен Ч. Пирсом.

Отношение *связно*, когда, при двух заданных терминах его поля, отношение содержится между первым и вторым или между вторым и первым (не исключая возможности того, что имеют место оба варианта, хотя этого не может быть, если отношение асимметрично).

Можно видеть, что отношение, например, «предок» является алиорелятивным и транзитивным, но не связным. Именно потому, что оно не связно, оно не может выстроить человеческую расу в ряд.

Отношение «меньше, чем или равно» среди чисел является транзитивным и связным, но не асимметричным или алиорелятивным.

Отношение «больше или меньше» среди чисел является алиорелятивным и связным, но не транзитивным, потому что если x больше или меньше y, а y больше или меньше z, может оказаться, что x и z есть одно и то же число.

Таким образом, три свойства — (1) алиорелятивность, (2) транзитивность и (3) связность — являются взаимонезависимыми, так как некоторое отношение может иметь два свойства из них, не обладая третьим.

Теперь мы полагаем следующее определение:

Отношение называется *порядковым*, когда оно алиорелятивно, транзитивно и связно или, что одно и то же, когда оно асимметрично, транзитивно и связно.

Ряд есть то же самое, что порядковое отношение.

Можно было подумать, что ряд должен быть *полем* порядкового отношения, но не самим порядковым отношением. Но это было бы ошибкой. Например,

$$1, 2, 3; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 3, 1; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 1, 2; \quad 3, 2, 1$$

являются шестью различными рядами, имеющими одно и то же поле. Если бы поле *было* рядом, то тут был бы только один ряд с данным полем. Что отличает друг от друга эти шесть рядов, так это просто различные упорядочивающие отношения в этих шести случаях. Если задано упорядочивающее отношение, поле и порядок вполне определены. Таким образом, упорядочивающее отношение *может быть* взято в качестве ряда, но поле не может быть взято в качестве такового.

Если дано некоторое отношение порядка, скажем, P, мы будем говорить в связи с этим отношением, что x «предшествует» y, если x имеет отношение P к y, что запишется для краткости в виде xPy. Вот три характеристики, которые P должно иметь для того, чтобы быть порядковым отношением:

(1) Мы никогда не должны иметь xPx, то есть термин не должен предшествовать самому себе.

(2) P^2 должен влечь P, то есть если x предшествует y и y предшествует z, то x должен предшествовать z.

(3) Если x и y являются двумя различными терминами в поле P, мы будем иметь xPy или yPx, то есть один из них должен предшествовать другому.

Читатель может легко убедиться в том, что там, где эти три свойства обнаруживаются в порядковом отношении, там же могут быть найдены характеристики, которые мы ожидаем от ряда, и наоборот. Мы, следовательно, оправданы в том, что берем вышеприведенные определения как определение порядка или ряда. И следует заметить, что определение сделано в чисто логических терминах.

Хотя транзитивное асимметричное связное отношение всегда существует, когда имеется ряд, это не всегда отношение, которое могло бы рассматриваться как наиболее естественное для порождения ряда. Ряд натуральных чисел может служить примером. Отношение, которое предполагается при рассмотрении этого ряда, это отношение непосредственного последующего элемента, то есть отношение между двумя последующими целыми числами. Это отношение является асимметричным, но не транзитивным или связным. Мы можем, однако, вывести из него методом математической индукции отношение «предшествования», которое рассматривалось нами в прошлой главе. Это отношение будет таким же, как и отношение «больше или равно», среди индуктивных целых чисел. С целью порождения ряда натуральных чисел нам нужно отношение «меньше, чем» с отбрасыванием «равно». Это есть отношение m к n, когда m есть предшественник n, но не тождественен n, или, что оказывается тем же самым, когда последующий элемент m есть предшественник n в том смысле, в котором число есть свой собственный предшественник. То есть, мы полагаем следующее определение:

Индуктивное число m есть *меньше, чем* другое число n в том случае, когда n обладает каждым наследственным свойством, которым обладает последующий элемент числа m.

Легко видеть и нетрудно доказать, что отношение «меньше, чем», так определенное, является асимметричным, транзитивным и связным и имеет в качестве своего поля индуктивные числа. Таким образом, посредством этого отношения индуктивные числа обретают порядок в том смысле, в котором мы определили термин «порядок», и этот порядок есть так называемый «натуральный» порядок, или порядок по величине.

Порождение ряда через отношение больше или меньше, напоминающее отношение n к $n+1$, является весьма общепринятым. Ряд королей Англии, например, порожден отношениями каждого из них к его наследнику. Это, вероятно, самый легкий путь к пониманию способа порождения ряда в тех случаях, где этот метод приложим. В этом методе мы переходим от каждого элемента к следующему для него, если существует следующий, или же к предыдущему, если существует предыдущий. Этот метод всегда требует обобщенной формы математической индукции для того, чтобы позволить нам определить «раннее» и «позднее» в таким образом порождаемом ряде. По аналогии с «собственными дробями» давайте дадим имя «собственное множество последующих элементов x по отношению к R» классу тех терминов, которые принадлежат R-множеству последующих элементов некоторого термина, к которому x имеет отношение R в смысле, который мы ранее придали «множеству последующих элементов», подразумевая включение термина в его собственное множество последующих элементов. Возвращаясь к фундаментальным определениям, мы находим, что «собственное множество последующих элементов» может быть определено следующим образом:

«Собственное множество последующих элементов» x по отношению к R состоит из всех терминов, которые обладают R-наследственным свойством, которым обладает каждый термин, к которому x имеет отношение R.

Нужно заметить, что это определение должно быть таковым, чтобы быть применимым не только в случае наличия одного только термина, к которому x имеет отношение R, но также и в случаях (например, в случае отца и сына), где может быть много терминов, к которым x имеет отношение R. Мы определяем далее:

Термин x есть «собственный предшественник» для y по отношению к R, если y принадлежит к собственному множеству последующих элементов x по отношению к R.

Мы будем говорить для краткости «R-потомство» и «R-предки» там, где эти термины будут уместны.

Возвращаясь сейчас к порождению ряда отношением R между последовательными терминами, мы видим, что для осуществления этого метода отношение «собственный R-предок» должно быть алиорелятивным, транзитивным и связным. При каких условиях это должно произойти? Оно будет всегда транзитивным: отношение R, «R-предок» и «собственный R-предок» всегда транзитивны. Но только при определенных условиях оно будет алиорелятивным и связным. Рассмотрим, например, отношение к соседу слева за обеденным столом, за которым сидят двенадцать человек. Если мы назовем это отношение R, собственное R-потомство некоторого человека за столом будет состоять из всех, кто может быть достигнут обходом стола справа налево. При этом будут включены все лица за столом, включая самого человека, так как двенадцать шагов возвращают нас к исходной точке. Таким образом, в таких случаях, хотя отношение «собственный R-предок» связно и хотя R само алиорелятивно, мы не получаем ряда, потому что «собственный R-предок» не является алиорелятивным. Именно по этой причине мы не можем сказать, что один человек предшествует другому по отношению «справа от» или же его производному по линии предшествования.

В примере выше отношение предшествования было связно, но не содержало различия. Пример, где отношение содержит различие, но не связно, выводится из обычного смысла слова «предок». Если x есть собственный предок y, x и y не могут быть одним и тем же человеком; но ведь и неверно, что из любых двух человек один должен быть предком другого.

Вопрос об обстоятельствах, при которых ряд может быть порожден отношениями предшествования, полученными из отношений последовательности, является важным вопросом. Некоторые из наиболее важных случаев таковы: пусть R будет много-однозначным отношением и пусть наше внимание будет ограничено множеством последующих элементов некоторого термина x. При таких условиях отношение «собственный R-предшественник» должно быть связно; следовательно, для того чтобы отношение было порядковым, нужно еще, чтобы оно содержало различение. Это есть обобщение примера за обеденным столом. Другое обобщение состоит в том, что отношение R рассматривается как одно-однозначное отношение и включает как предшественника x, так и множество его последующих элементов. Здесь вновь условие, требуемое для порождения ряда, заключается в том, чтобы отношение «собственный R-предшественник» влекло различение.

Порождение порядка посредством отношений последовательности, хотя оно и важно в своей сфере, менее обще, чем метод, использующий транзитивное отношение для определения порядка. Часто случается, что в ряде имеется бесконечное число промежуточных терминов между любыми двумя терминами, как бы близки они ни были. Возьмем, например, дроби в порядке величины. Между двумя любыми дробями имеются другие, например, арифметическое среднее двух дробей. Следовательно, нет такой вещи, как пара следующих друг за другом дробей. Если бы мы зависели от последовательности как свойства отношений в определении порядка, мы не были бы способны определить порядок по величине среди дробей. Но на самом деле не требуется, чтобы отношения больше или меньше среди дробей порождались отношениями последовательности; первые отношения имеют три характеристики, которые нам нужны для определения порядковых отношений. Во всех таких случаях порядок должен быть определен посредством *транзитивного* отношения, поскольку только такое отношение способно перепрыгнуть через бесконечное число промежуточных терминов. Метод последовательности, подобно счету для нахождения числа совокупности, подходящ для конечных величин; он может быть расширен на некоторые бесконечные ряды, а именно на те, которые, хотя общее число терминов в них бесконечно, содержат конечное число терминов между любыми двумя терминами. Но эта ситуация не является общей. Больше того, надо отказаться от привычки полагать, что ситуация эта является общей. Если этого не сделать, ряды, в которых нет последовательных терминов, останутся трудными и загадочными для восприятия. А такие ряды имеют огромную важность в понимании непрерывности, пространства, времени и движения.

Имеется много способов, которыми может быть порожден ряд, но все они зависят от нахождения или конструирования асимметричного транзитивного связного отношения. Некоторые из этих способов весьма важны. Мы можем взять как иллюстрацию порождение рядов посредством трехместного отношения, которое можно назвать «между». Этот метод очень полезен в геометрии и может служить как введение в отношения, имеющие больше, чем два термина. Оно лучше всего вводится в связи с элементарной геометрией.

Даны некоторые три точки на прямой линии в обычном пространстве. Из этих трех точек одна должна быть *между* другими двумя. Это не относится к точкам на окружности или любой замкнутой кривой, потому что, если даны три точки на окружности, мы можем переходить от одной к другой без прохождения через третью. На самом деле, понятие «между» является характерным для открытых рядов — или ряда в строгом смысле — в противоположность тому, что может быть названо «циклическими» рядами, где, как и в случае людей за обеденным столом, достаточно долгое путешествие приведет нас к исходной точке. Это понятие «между» может быть выбрано как фундаментальное понятие обычной геометрии; но для настоящих целей мы рассмотрим применение его к только прямой линии и упорядочению точек на ней[1]. Возьмем некоторые две точки a и b, прямую (ab), состоящую из трех частей (кроме самих a и b):

1. Точки между a и b.
2. Точки x такие, что a расположена между x и b.
3. Точки y такие, что b расположена между y и a.

Таким образом, прямая (ab) может быть определена в терминах отношения «между».

Для того чтобы это отношение «между» могло расположить точки на прямой в порядке слева направо, мы нуждаемся в некоторых предположениях, а именно в следующих:

1. Если нечто лежит между a и b, a и b не тождественны.
2. Нечто между a и b есть также между b и a.
3. Нечто между a и b не тождественно с a (ни, следовательно, с b, что следует из 2).

[1] Rivista di Matematica, iv, pp. 55ff; *Principles of Mathematics*, p. 394 (§ 375).

4. Если x расположено между a и b, нечто между a и x расположено также между a и b.

5. Если x расположено между a и b и b между x и y, тогда b расположено между a и y.

6. Если x и y расположены между a и b, тогда либо x и y тождественны, либо x расположено между a и y, либо x расположено между y и b.

7. Если b расположено между a и x и также между a и y, тогда либо x и y тождественны, либо x расположено между b и y, либо y расположено между b и x.

Эти семь свойств явно проверяемы на точках на прямой в обычном пространстве. Любое трехместное отношение, которое удовлетворяет этим условиям, может породить ряд, как это видно из следующих определений. Ради определенности давайте предположим, что a слева от b. Тогда точки на прямой (ab) есть (1) точки, между которыми и точкой b лежит точка a — эти точки мы назовем точками слева от a; (2) сама a; (3) точки между a и b; (4) сама b; (5) точки, между которыми и точкой a лежит точка b, — такие точки мы назовем точками справа от b. Мы можем сейчас определить общим образом, что две точки x, y на прямой (ab) таковы, что одна из них x находится «слева от» y в любых следующих случаях:

1. Когда x и y оба слева от a и y между x и a;
2. Когда x слева от a и y есть a или b, или между a и b, или справа от b;
3. Когда x есть a и y между a и b, или есть b, или справа от b;
4. Когда x и y оба между a и b и y есть между x и b;
5. Когда x между a и b и y есть b или справа от b;
6. Когда x есть b и y справа от b;
7. Когда x и y оба справа от b и x между b и y.

Из семи свойств, которые мы приписали отношению «между», может быть выведено, что отношение «слева от», как оно определено выше, является *порядковым* отношением, в том смысле, как мы определили этот термин. Важно заметить, что ничто в нашем аргументе или определениях не зависит от значения «между» как действительного отношения, которое имеет место в эмпирическом пространстве: любое трехместное отношение, имеющее семь формальных свойств, приведенных выше, будет служить так же хорошо.

Циклический порядок, такой как точки на окружности, не может быть порожден посредством трехместного отношения «между». Нам нужно здесь отношение между четырьмя терминами, которое может быть названо «разделением по парам». Это может быть проиллюстрировано путешествием вокруг земного шара. Можно путешествовать из Англии в Новую Зеландию через Суэц или Сан-Франциско. Мы не можем сказать определенно, что любое из этих двух мест находится «между» Англией и Новой Зеландией. Но если человек решился на такое путешествие, то какой бы путь он ни выбрал, времена его пребывания в Англии и Новой Зеландии будут разделены временами, которые он проведет в Суэце или Сан-Франциско, и наоборот.

Обобщая, мы, если взять четыре точки на окружности, можем разделить их на две пары, скажем, a и b и x и y, такие, что для того чтобы прибыть от a к b, нужно пройти через x и y, и для того чтобы пройти от x к y, нужно пройти через a или b. При этих условиях мы говорим, что пара (a, b) «разделена» парой (x, y). Из этого отношения может быть порожден циклический порядок способом, напоминающим тот, которым мы породили открытый порядок посредством «между», но несколько более сложным образом[1].

Цель второй половины этой главы состояла в преподнесении предмета, который можно назвать «порождением порядковых отношений». Когда такие отношения определены, обобщение их из других отношений, обладающих только некоторыми из свойств, требуемыми для рядов, становится важным делом, особенно в философии, геометрии и физике. Но мы не можем в пределах данного тома сделать больше, чем заставить читателя осознать существование этого предмета.

Глава V
ВИДЫ ОТНОШЕНИЙ

Огромная часть философии математики имеет дело с *отношениями*, и самые разнообразные отношения находят самое различное применение. Часто случается, что свойство, принадлежащее *всем* отношениям, является важным только для отношений определенного вида; в этих случаях читатель не будет видеть значимости свойств того или иного рода, если не будет иметь в виду того вида отношений, для которого это свойство полезно. По этим причинам, а также исходя из того, что сам по себе предмет представляет интерес, нам нужно держать в уме общий перечень наиболее полезных математических видов отношений.

Мы имели дело в предыдущей главе с чрезвычайно важным классом *порядковых* отношений. Каждое из трех свойств, которые мы скомбинировали в определении ряда, а именно, *асимметричность*, *транзитивность* и *связность* — само по себе важно. Мы скажем коечто по поводу каждого из трех.

Асимметрия, то есть свойство быть несовместимым с обратным свойством, представляет огромный интерес и важность. Для того чтобы описать его функции, мы рассмотрим несколько примеров. Отноше-

[1] См.: *Principles of Mathematics*, p. 205 (§ 194).

ние *быть мужем* является асимметричным, то же относится к отношению *быть женой*; то есть если a есть муж b, b не может быть мужем a, и подобным же образом для случая жены. С другой стороны, отношение *быть супругом* является симметричным: если a есть супруг b, тогда b есть супруг a. Предположим, что нам дано отношение быть *супругом*, и мы хотим вывести отношение *быть мужем. Муж* это то же самое, что *супруг мужского рода* или *супруг женщины*; таким образом, отношение *быть мужем* может быть выведено из отношения *быть супругом* либо ограничением области до супругов мужского рода, либо ограничением обратной области до женщин. Мы видим из этого примера, что когда дано симметричное отношение, иногда возможно без помощи других отношений разделить его на два асимметричных отношения. Но подобного рода случаи редки и исключительны: это возможно там, где имеются взаимно исключающие классы, скажем α и β, такие, что всякий раз, когда имеется отношение между двумя терминами, один из терминов есть член α и другой — член β, как это имеет место в случае отношения *быть супругом*, где один термин принадлежит классу мужчин, а второй классу женщин. В таком случае отношение с областью, ограниченной классом α, будет асимметричным, и таким же будет отношение с областью, ограниченной классом β. Но такие случаи не того рода, которые имеют место с рядами из двух и более терминов, потому что в рядах все термины, за исключением первого и последнего (если они существуют), оба принадлежат области и обратной области порождающего отношения, так что отношение типа *быть мужем*, где область и обратная область не перекрываются, является исключением.

Вопрос о том, как *сконструировать* отношения, имеющие некоторые полезные свойства, посредством операций над отношениями, которые имеют лишь рудименты этого свойства, является вопросом значительной важности. Транзитивность и связность легко конструируются во многих случаях там, где исходное заданное отношение не обладает ими: например, если R есть вообще некоторое отношение, отношение предшествования, выведенное из R посредством обобщенной индукции, является транзитивным; и если R есть много-однозначное отношение, отношение предшествования будет связным, если оно ограничено последующими элементами данного термина. Но асимметрия является гораздо более трудным свойством для конструирования. Метод, которым мы вывели *быть мужем* из *быть супругом*, как мы видели, не является доступным в большинстве важных случаев, таких как *больше, до, справа от*, где область и обратная область перекрываются. Во всех этих случаях мы можем, конечно, получить симметричное отношение сложением вместе данного отношения и ему обратного, но мы не можем вернуться от этого симметричного отношения к исходному асимметричному отношению, если не прибегнуть к помощи некоторого асимметричного отношения. Возьмем, например, отношение *больше*: отношение *больше или меньше*, то есть *не равно*, является симметричным, но нет ничего такого в этом отношении, что бы показывало, что оно является суммой двух асимметричных отношений. Возьмем такое отношение, как «отличаться по форме». Оно не есть сумма асимметричного отношения и ему обратного, так как формы не образуют единого ряда; но нет ничего, что показало бы, что оно отличается от «различия по величине», если мы не знаем, что величины имеют отношения больше и меньше. Это иллюстрирует фундаментальный характер асимметрии как свойства отношений.

С точки зрения классификации отношений, асимметрия является более важной характеристикой, чем свойство приводить к различию. Асимметричные отношения влекут различие, но не наоборот. «Не равно», например, влечет различие, но оно симметрично. Вообще говоря, мы можем сказать, что если бы мы хотели максимально избавиться от реляционных предложений и заменить их субъектно-предикатными, мы могли бы преуспеть в этом, ограничившись симметричными отношениями: там, где отношения не влекут различие, если они транзитивны, они могут рассматриваться как утверждающие общий предикат. Те же отношения, которые влекут различие, могут рассматриваться как приписывающие несовместимые предикаты. Например, рассмотрим отношение подобия между классами, посредством которого мы определили числа. Это отношение симметрично и транзитивно и не влечет различия. Вполне возможно, хотя это была бы менее простая процедура, нежели принятая нами, рассматривать число совокупности как предикат совокупности: тогда два подобных класса будут двумя классами, имеющими один и тот же числовой предикат, в то время как классы, не являющиеся подобными, будут иметь различные числовые предикаты. Такой метод замены отношений предикатами формально возможен (хотя он очень часто неудобен), пока отношения симметричны, потому что тождество и различие предикатов являются симметричными. Асимметричные отношения, можно сказать, являются наиболее реляционными из всех отношений и очень важны для философа, который хочет исследовать окончательную логическую природу отношений.

Другой класс отношений, находящих повсеместное использование, это класс одно-многозначных отношений, а именно отношений, которые самое большее один термин может иметь к данному термину. Таковы отношения быть отцом, матерью, мужем (за исключением Тибета), быть квадратной степенью, синусом и так далее. Но быть родителем, квадратным корнем и т. п. не являются одно-многозначными. Формально возможно заменить все отношения одно-многозначными отношениями с помощью технических приемов. Возьмем, скажем, отношение меньше среди индуктивных чисел. Если дано некоторое число *n* большее, чем 1, не будет единственного числа, имеющего отношение *меньше* к *n*, но мы можем образовать целый класс чисел, меньших *n*. Это единственный класс, и его отношение к *n* не разделяется другими классами. Мы можем назвать класс чисел, меньших *n*, «собственным множеством предшествующих элементов» *n*, в том смысле, в котором мы говорили о множествах предшествующих и последующих элементов в связи с математической индукцией. Тогда «собственное множество предшествующих элементов» является одно-многозначным отношением (*одно-многозначное* отношение всегда будет включать у нас *одно-однозначные* отношения), так как каждое число определяет единственный класс чисел, составляющих его собственное множество предшествующих элементов. Таким образом, отношение *меньше, чем* может быть заменено на *быть членом собственного множества предшествующих элементов.* При таком способе одно-многозначное отношение, в котором однозначное место занимает класс вместе с членством в этом классе, формально может всегда заменить отношение, не являющееся одно-многозначным. Пеано, который по некоторым причинам всегда инстинктивно считал отношения одно-многозначными, применял этот способ там, где отношения таковыми не являлись. Такая редукция к одно-многозначным отношениям, однако, хотя и возможна по форме, не представляет в техническом отношении упрощения, и есть резон полагать, что то же относится и к философскому анализу, поскольку классы должны рассматриваться как «логические фикции». Мы, следовательно, будем продолжать рассматривать одно-многозначные отношения как специальный вид отношений.

Одно-многозначные отношения входят во все фразы формы «такой-то и такой-то (объект)». «Король Англии», «жена Сократа», «отец Джона Стюарта Милля» и т. п. фразы описывают некоторого человека посредством одно-многозначного отношения к данному термину. Человек не может иметь больше одного отца, и, следовательно, «отец Джона Стюарта Милля» описывает некоторого одного человека, даже если мы не знаем, кого именно. Есть много чего сказать по поводу дескрипций, но в настоящее время нас интересуют отношения, а пример с дескрипциями приведен только для иллюстрации использования одно-многозначных отношений. Следует заметить, что все математические функции получаются из одно-многозначных отношений: логарифм *x*, косинус *x* и т. п. являются, подобно отцу *x*, терминами, описанными посредством одно-многозначного отношения (логарифм, синус и т. п.) к данному термину *x*. Понятие функции вовсе не должно быть ограничено числами или использоваться так, как к этому нас приучили математики; оно должно быть расширено на все случаи одно-многозначных отношений, и «отец *x*» является столь же допустимой функцией, как «логарифм *x*», где *x* является аргументом в обоих выражениях. Функции в этом смысле являются *дескриптивными* функциями. Как мы увидим позднее, есть функции еще более общего и более фундаментального вида, а именно *пропозициональные* функции; но пока мы ограничимся дескриптивными функциями; то есть «термин, имеющий отношение *R* к *x*», или короче «*R* от *x*», где *R* есть одно-многозначное отношение.

Следует заметить, что если «*R* от *x*» призван описывать определенный термин, *x* должен быть термином, к которому нечто имеет отношение *R*, и не должно быть больше одного термина, имеющего отношение *R* к *x*, так как при формулировке фразы «*R* от *x*» подразумевается единственность. Таким образом, мы можем говорить об «(определенном) отце *x*»[1], если *x* есть человеческое существо, при этом исключая Адама и Еву; но мы не можем говорить об «(определенном) отце *x*», если *x* есть стол или стул или что-либо еще, не имеющее отца. Мы будем говорить, что *R* от *x* «существует», когда имеется точно один термин, и не больше, имеющий отношение *R* к *x*. Таким образом, если *R* есть одно-многозначное отношение, *R* от *x* существует всякий раз тогда, когда *x* принадлежит к обратной области *R*, но не наоборот. Рассматривая «*R* от *x*» как функцию в математическом смысле, мы говорим, что x есть «аргумент» функции, и если *y* есть термин, который имеет отношение *R* к *x*, то есть если *y* есть *R* от *x*, тогда *y* есть «значение» функции от аргумента *x*. Если *R* есть одно-многозначное отношение, область возможных аргументов функции есть обратная область *R*, а область значений — область *R*. Таким образом, область возможных аргументов функции «отец *x*» составлена из всех тех, кто имеет отцов, то есть составляет обратную область отношения «быть *отцом*», в то время как область возможных значений для функции составлена из всех отцов, то есть составляет область отношения.

Многие из наиболее важных понятий в логике отношений являются дескриптивными функциями, например: *обратное, область, обратная область, поле.* Другие примеры будут нам встречаться по ходу нашего изложения.

Среди одно-многозначных отношений особо важный класс составляют одно-однозначные отношения. Мы уже имели случай говорить об одно-однозначных отношениях в связи с определением числа, но следует познакомиться с ними более тщательно, не ограничиваясь их формальным определением. Оно может быть получено из определения одно-многозначных отношений: одно-однозначные отношения могут быть определены как одно-многозначные отношения, которые в то же самое время являются обратными по отношению к одно-многозначным отношениям, то есть как отношения, которые являются в одно и то же время и одно-многозначными и много-однозначными. Одно-многозначные отношения могут быть определены как такие отношения, что если *x* имеет это отношение к *y*, не имеется другого термина *x'*,

[1] В английском оригинале речь идет о единственности, подразумеваемой при использовании определенного артикля «the», который мы при переводе заменяем на слово «определенный», заключенное в скобки. См. далее по этому поводу о дескрипциях. (*Примеч. перев.*)

который имеет отношение к y. Или же они могут быть определены следующим образом: если даны два термина x и x', термины, к которым x имеет данное отношение, и термины, к которым x' имеет данное отношение, не имеют общих членов. Или, опять-таки, они могут быть определены как такие отношения, что относительное произведение одного из них и ему обратного влечет тождество, где «относительное произведение» двух отношений R и S есть отношение, которое имеет место между x и z, когда имеется промежуточный термин y, такой, что x имеет отношение R к y и y имеет отношение S к z. Например, если R есть отношение отца к сыну, относительное произведение R и ему обратного отношений будет отношение, которое имеет место между x и человеком z, когда имеется человек y, такой, что x есть отец y, а y есть сын z. Ясно, что x и z должны быть одним и тем же человеком. Если, с другой стороны, мы возьмем отношение родителя и ребенка, которое не является одно-многозначным, мы больше не можем утверждать, что если x есть родитель y и y есть сын z, x и z должны быть одним и тем же человеком, потому что один может быть отцом y, а другой — матерью его. Это иллюстрирует характерную черту одно-многозначных отношений, когда относительное произведение отношения и ему обратного отношения влечет тождество. В случае одно-однозначных отношений имеет место как раз это обстоятельство, и, кроме того, относительное произведение обратного и прямого отношений также дает тождество. Если дано отношение R, удобно, если x имеет отношение R к y, думать об y как получаемом от x «R-шагом» или «R-вектором». В том же самом случае x будет достигаться от y «обратным R-шагом». Таким образом, мы можем утверждать в качестве характеристики одно-многозначных отношений, с которыми мы имеем дело, то обстоятельство, что R-шаг, сопровождаемый обратным R-шагом, возвращает нас к исходному пункту. Это совсем не так для других отношений. Например, если R есть отношение ребенка к родителю, относительное произведение R и обратного к нему отношения является отношением «быть самим собой или братом или сестрой»; если R есть отношение внука к дедушке или бабушке, относительное произведение R и обратного ему отношения есть отношение «быть самим собой или братом или сестрой или первым двоюродным братом или сестрой». Должно быть замечено, что относительное произведение двух отношений не является в общем случае коммутативным, то есть относительное произведение R и S в общем случае не есть то же самое отношение, что относительное произведение S и R. Например, относительное произведение родителя и брата есть дядя, но относительное произведение брата и родителя есть уже родитель.

Одно-однозначные отношения ставят в соответствие два класса, где термин соответствует термину, так что каждый класс или термин имеет соответствующий ему класс или термин. Такие соответствия легко воспринимаются в том случае, когда два класса не имеют общих членов, как это имеет место в случае классов мужей и жен, потому что в этом случае мы заранее знаем, должен ли термин рассматриваться как такой, *от* которого устанавливается соответствие отношением R, или же *к* нему устанавливается такое соответствие. Удобно использовать слово *референт* для термина, *от* которого исходит отношение, и термин *относимое* к термину, *к* которому идет отношение. Таким образом, если x и y есть муж и жена, в связи с отношением «быть мужем» x есть референт и y есть относимое, но в связи с отношением «быть женой» y есть референт и x относимое. Мы говорим, что отношение и ему обратное отношение имеют противоположные «смыслы»; таким образом, «смысл» отношения, идущего от x к y, противоположен смыслу отношения, устанавливающему отношение от y к x. Тот факт, что отношение имеет «смысл», является фундаментальным обстоятельством, и это является причиной того, что порядок может порождаться подходящими отношениями. Следует заметить, что класс всех возможных референтов для данного отношения есть его область, а класс всех возможных относимых есть его обратная область.

Но очень часто случается, что область и обратная область одно-однозначного отношения перекрываются. Возьмем, например, первые десять целых чисел (исключая 0) и добавим к каждому из них 1; таким образом, взамен мы будем иметь целые числа:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.$$

Это те же самые числа, что мы имели сначала, за исключением того, что выпала 1 и добавлено 11. Все еще мы имеем десять целых чисел, которые соответствуют первым десяти числам отношением n к $n + 1$, которое является одно-однозначным. Или вместо добавления 1 мы могли бы удвоить каждое из них, получая при этом

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.$$

Здесь мы все еще имеем пять из начальных наших целых чисел, а именно 2, 4, 6, 8, 10. Ставящим их в соответствие является отношение удвоения, которое опять-таки является одно-однозначным. Мы могли бы заменить каждое число его квадратом, получая при этом множество

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.$$

Тут осталось три числа из исходных, а именно 1, 4, 9. Такой процесс корреляции может варьироваться бесконечно.

Наиболее интересным случаем из приведенных выше является случай, где наше одно-однозначное отношение имеет обратную область, которая является частью, но не целым, от области. Если взамен ограничения области первыми десятью числами мы рассмотрим все индуктивные числа, приведенные выше примеры могли бы быть иллюстрацией к нашему предположению. Мы можем расположить рассматриваемые числа в два ряда, помещая под каждым числом первого ряда ставящееся ему в соответствие число во втором ряду.

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n \ldots$$
$$2, 3, 4, 5, 6, \ldots n + 1 \ldots$$

будут такими двумя рядами для случая отношения от n к $n + 1$.

Когда отношением, устанавливающим соответствие, будет удвоение, мы будем иметь два ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n \ldots$$
$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots 2n \ldots$$

Когда отношение устанавливает соответствие числа и его квадрата, мы имеем два ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n \ldots$$
$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots n^2 \ldots$$

Во всех этих случаях в верхнем ряду находятся все индуктивные числа, а во втором ряду только некоторые.

Случаи подобного рода, где обратная область есть «собственная часть» области (то есть часть, а не целое), будут занимать нас снова, когда мы перейдем к рассмотрению бесконечности. А пока мы только отметим, что они существуют и требуют рассмотрения.

Другой класс соответствий, являющийся часто важным, это класс так называемых «перестановок», где область и обратная область являются тождественными. Рассмотрим, например, шесть возможных расположений трех букв:

$$a, b, c$$
$$a, c, b$$
$$b, c, a$$
$$b, a, c$$
$$c, a, b$$
$$c, b, a$$

Каждое из них может быть получено из другого через соответствие. Возьмем, например, первое и последнее расположения: (a, b, c) и (c, b, a). Здесь а соответствует c, b само с собой и c с a. Ясно, что комбинация двух перестановок снова является перестановкой, то есть перестановки данного класса образуют то, что называется группой.

Эти различные виды соответствий важны в разных отношениях, некоторые для одной цели, некоторые для другой. Общее понятие одно-однозначного соответствия очень важно для философии математики, как это уже мы частично видели, но еще больше увидим дальше. Одно из применений этого понятия будет занимать нас в будущей главе.

Глава VI
ПОДОБИЕ ОТНОШЕНИЙ

Мы видели в главе II, что два класса имеют одно и то же число терминов, когда они «подобны», то есть когда имеется одно-однозначное отношение, чья область есть один класс, а обратная область — другой класс. В таком случае мы говорим, что имеется «одно-однозначное соответствие» между двумя классами.

В настоящей главе мы должны определить отношение между отношениями, которое будет играть ту же роль для них, какую подобие классов играет для классов. Мы назовем это отношение «подобием отношений» или просто «подобием». Как оно может быть определено?

Мы все еще будем использовать понятие соответствия: мы будем предполагать, что область одного отношения может быть поставлена в соответствие с областью другого, а обратная область — с обратной областью. Но этого недостаточно для того рода сходства, которое мы желаем иметь между двумя отношениями. Нам желательно, чтобы всякий раз, когда между двумя терминами имеет место отношение, второе отношение должно иметь место между коррелятами этих терминов. Наипростейшим примером подобного рода вещей является карта. Когда одно место находится к северу от другого, место на карте, соответствующее одному, находится над местом на карте, соответствующим другому; когда одно место находится на запад от другого, место на карте, соответствующее первому, будет слева от места на карте, соответствующего другому, и так далее. Структура карты соответствует стране, которая отражается картой. Пространственные отношения на карте «подобны» пространственным отношениям отображения страны на карте. Как раз такого рода связи между отношениями мы и хотим определить.

Мы можем поначалу с некоторой пользой для себя ввести определенное ограничение. Мы можем ограничиться в определении подобия такими отношениями, которые имеют «поле», то есть такие, которые позволят образовать единственный класс из области и обратной области. Это возможно не всегда. Возьмем, например, отношение «область», то есть отношение, которое область имеет к отношению. Это отношение имеет в качестве области все классы, так как каждый класс есть область некоторого отношения, а в качестве обратной области имеет все отношения, так как каждое отношение имеет область. Но классы и отношения не могут быть соединены вместе для того, чтобы образовать один класс, потому что они принадлежат к различным логическим «типам». Нам не нужно вдаваться в тонкости теории типов, но хорошо бы знать, когда мы обходимся без нее. Мы можем сказать, не обосновывая утверждение, что отношение имеет «поле» только в том случае, когда оно «однородно», то есть когда его область и обратная область одного и того же логического типа, а для грубого указания на то, что мы понимаем под «типом», мы можем сказать, что индивиды, классы индивидов, отношения между индивидами, отношения между классами, отношения классов к индивидам и так далее — все они принадлежат к разным логическим типам. Так вот, понятие подобия не очень-то полезно в применении к отношениям, которые не являются однородными; мы будем, следовательно, в определении подобия упрощать нашу проблему, говоря о «поле» соответствующего отношения. Это в какой-то степени сужает общность нашего определения, но это ограничение не имеет практического значения. И будучи сформулированным, оно не нуждается в том, чтобы его помнить. Мы можем определить два отношения *P* и *Q* как «подобные», или же имеющие подобие, когда имеется одно-однозначное отношение *S*, чья область есть поле *P* и чья обратная область есть поле *Q*, и такое, что если один термин имеет отношение *P* к другому, коррелят первого имеет отношение *Q* к корреляту второго, и обратно. Картинка поможет прояснить ситуацию. Пусть *x* и *y* будут двумя терминами, находящимися в отношении *P*. Тогда должны быть два термина *z* и *w*, такие, что *x* имеет отношение *S* к *z*, *y* имеет отношение *S* к *w* и *z* имеет отношение *Q* к *w*. Если это случается с каждой парой терминов, таких как *x* и *y*, и если обратное случается с каждой парой терминов, таких как *z* и *w*, тогда ясно, что для каждого примера отношения *P* имеется соответствующий пример отношения *Q*, и обратно. И это как раз то, что мы хотели гарантировать нашим определением. Мы можем элиминировать некоторые излишества в набросанном выше определении, заметив, что при реализации указанных выше условий отношение *P* является тем же самым, что относительное произведение *S* и *Q* и обратного отношения *S*; то есть *P*-шаг от *x* к *y* может быть заменен последовательностью *S*-шага от *x* к *z*, *Q*-шагом от *z* к *w* и обратным *S* шагом от *w* к *y*. Таким образом, мы можем установить следующие определения:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S"'] & y \arrow[d, "S"] \\ z \arrow[r, "Q"] & w \end{tikzcd}$$

Отношение *S* является «коррелятором» или «ординальным коррелятором» двух отношений *P* и *Q*, если *S* является одно-однозначным, имеет в качестве обратной области поле *Q*, и такое, что *P* есть относительное произведение *S*, *Q* и обратного отношению *S*.

Два отношения *P* и *Q* «подобны», когда имеется по крайней мере один коррелятор *P* и *Q*.

Эти определения обеспечивают нам то, что мы полагаем в этом случае необходимым.

Можно видеть, что когда два отношения подобны, они разделяют все свойства, которые не зависят от действительных терминов в их полях. Например, если одно из них влечет различие, то же самое можно сказать и о другом; если одно является транзитивным, то таким же является и другое; если связно одно, то связно и другое. Отсюда, если одно является порядковым, то таким же является другое. И опять-таки, если одно является одно-многозначным или одно-однозначным, то и другое много-однозначно или одно-однозначно и так далее, для всех общих свойств отношений. Даже утверждения, включающие действительные термины поля отношения, могут оказаться не истинными в применении к подобному отношению, тем не менее всегда могут быть переведены в аналогичные утверждения. Такого рода рассмотрения ведут нас к проблеме, важность которой в математической философии до сих пор не осознана. Нашу проблему можно установить следующим образом:

Дано некоторое утверждение в языке, синтаксис и грамматика которого нам известны, но не известен словарь. Каковы возможные значения такого утверждения и каковы значения неизвестных слов, делающих утверждение истинным?

Причина, по которой этот вопрос является важным, состоит в том, что в нем представлено в гораздо большей степени, чем это можно было бы предположить, состояние нашего знания природы. Мы знаем, что определенные научные предположения, которые — в наиболее развитых науках — выражены в математических символах, являются более или менее истинными о мире, но мы находимся в большом затруднении относительно интерпретации терминов, которые входят в такие предложения. Мы знаем гораздо больше (если воспользоваться на момент старомодной парой терминов) о *форме* природы, нежели о ее сути [matter].

Соответственно, что мы действительно знаем, когда формулируем законы природы, так это только то, что имеется, вероятно, *некоторая* интерпретация наших терминов, которая сделает законы приблизительно истинными. Таким образом, огромная важность придается вопросу: каковы возможные значения закона, выраженного в терминах, значения которых мы не знаем, а знаем лишь грамматику и синтаксис. Это тот самый вопрос, которым мы задались выше.

Пока мы будем игнорировать этот общий вопрос, который обсудим позднее; до этого мы должны углубиться в проблему подобия.

Из-за того, что когда отношения подобны, их свойства совпадают, за исключением тех случаев, в которых свойства зависят от полей составляющих их терминов, желательно иметь номенклатуру, которая собирает вместе все отношения, которые подобны данному отношению. Точно так же, как мы назвали множество тех классов, которые подобны данному классу, «числом» этого класса, мы можем назвать множество всех тех отношений, которые подобны данному отношению, «числом» этого отношения. Но для того, чтобы избежать путаницы с числом класса, мы будем говорить в случае отношений о «реляционном числе». Таким образом, мы имеем следующее определение:

«Реляционное число» данного отношения есть класс всех тех отношений, которые подобны данному отношению.

«Реляционные числа» есть множество всех тех классов отношений, которые являются реляционными числами различных отношений; или, что то же самое, реляционное число есть класс отношений, состоящих из всех тех отношений, которые подобны одному члену класса.

Когда есть необходимость говорить о числах классов таким образом, что невозможно спутать их с реляционными числами, мы будем называть их «кардинальными числами». Таким образом, кардинальное число есть число применимо к классу. Такие числа включают обычные целые числа из повседневной жизни, а также определенные бесконечные числа, о которых мы будем говорить позднее. Когда мы говорим о числах без уточнения, о каких именно, они должны пониматься как *кардинальные* числа. Определение кардинального числа, если припомнить, таково:

«Кардинальное число» данного класса есть множество всех тех классов, которые подобны данному классу.

Наиболее очевидным применением реляционных чисел являются *ряды.* Два ряда могут рассматриваться одинаково длинными, когда они имеют одно и то же реляционное число. Два *конечных* ряда будут иметь одно и то же реляционное число, когда их поля имеют одно и то же кардинальное число терминов, и только в этом случае, — то есть ряд (скажем) из 15 терминов будет иметь одно и то же реляционное число с любым другим рядом из 15 терминов, но не будет иметь того же числа с рядом из 14 или 16 терминов и уж, конечно, не будет иметь одно и то же реляционное число с отношением, которое не является порядковым. Таким образом, в совершенно специальном случае конечных рядов имеется параллелизм между кардинальными и реляционными числами. Реляционные числа, применимые к рядам, могут быть названы «порядковыми числами» (то, что обычно называется «ординальными» числами, является подклассом порядковых); таким образом, конечное порядковое число определено, когда мы знаем кардинальное число терминов поля ряда, имеющего соответствующее порядковое число. Если *n* есть конечное кардинальное число, реляционное число ряда, который имеет *n* терминов, называется «ординальным» числом *n.* (Есть и бесконечные ординальные числа, но о них мы поговорим позднее.) Когда кардинальное число терминов в поле ряда бесконечно, реляционное число ряда не определяется просто кардинальным числом. В самом деле, для одного кардинального числа существует бесконечное число реляционных чисел, в чем мы убедимся, когда будем рассматривать бесконечные ряды. Когда ряд является бесконечным, то, что мы можем назвать его «длиной», то есть его реляционное число, может варьироваться без изменения кардинального числа; но когда ряд конечен, этого случиться не может.

Мы можем определить сложение и умножение для реляционных чисел точно в такой же манере, как и для кардинальных чисел, и для реляционных чисел может быть развита целая арифметика. Способ, которым это можно сделать, легко виден из рассмотрения случая рядов. Предположим, например, что мы хотим определить сумму двух неперекрывающихся рядов таким образом, чтобы реляционное число суммы могло бы быть определено как сумма реляционных чисел двух рядов. Во-первых, ясно, что между двумя рядами должен быть *порядок* — один из них должен быть помещен перед другим. Таким образом, если P и Q являются порождающими отношениями двух рядов, в ряде, который является их суммой, где P помещено перед Q, каждый член поля P предшествует каждому члену поля Q. Таким образом, порядковое отношение, которое определено как сумма P и Q, не есть просто «P или Q», а есть «P или Q или отношение некоторого члена поля P к некоторому члену поля Q». Предполагая, что P и Q не перекрываются, заключаем, что это отношение является порядковым, но не связным, так как оно не содержится между членом поля P и членом поля Q. Таким образом, сумма *P и Q*, определенная процедурой выше, есть то, что нам нужно для определения суммы двух реляционных чисел. Подобные модификации требуются для произведения и возведения в степень. Получающаяся в результате арифметика не подчиняется закону коммутативности: сумма или произведение двух реляционных чисел в общем случае зависит от порядка, в котором они берутся. Но она удовлетворяет закону ассоциативности, одной форме закона дистрибутивности и двум из формальных законов для возведения в степень, и не только в применении к порядковым числам, но и вообще к реляционным числам. Реляционная арифметика на самом деле является, хотя она и молода, вполне респектабельной ветвью математики.

Не нужно думать, что если ряды являются наиболее очевидным приложением идеи подобия, то нет других важных приложений. Мы уже упоминали карты, и мы могли бы расширить наши идеи в этом направлении от этой иллюстрации к геометрии вообще. Если система отношений, по которой геометрия применяется к определенному множеству терминов, может быть приведена в полное соответствие с системой, применяемой к другому множеству терминов, тогда геометрии двух множеств являются неотличимыми с математической точки зрения, то есть все предложения будут одними и теми же, за исключением того, что в одном случае они приложимы к одному множеству терминов, а в другом случае — к другому. Мы можем проиллюстрировать это отношениями того сорта, которые называются «между», рассмотренные нами в главе IV. Мы здесь видели, что при условии обладания трехчленным отношением определенными формальными логическими свойствами оно порождает ряд и может быть названо «отношением-между». Даны любые две точки, мы можем использовать отношение-между для определения прямой линии, определенной двумя точками; она состоит из a и b вместе со всеми точками x, такими, что отношение-между содержится между тремя точками a, b, x в том или ином порядке. О. Вебленом было показано, что все наше пространство может считаться полем трехчленного отношения-между, и можно определить нашу геометрию посредством свойств, которые мы приписываем нашему отношению-между[1]. Теперь подобие определяется между трехчленными отношениями столь же легко, как и между двухчленными отношениями. Если B *и* B' являются двумя отношениями-между, так что «$x\ B\ (y, z)$» означает «x находится между y и z относительно B», мы назовем S коррелятором B и B', если оно имеет поле B' в качестве своей обратной области, и такое, что отношение B содержится между тремя терминами, когда B' содержится между их S-корреляторами, и только в этом случае. И мы будем говорить, что B подобно B', когда имеется по крайней мере один коррелятор B с B'. Читатель может легко убедиться, что если B подобно B' в этом смысле, нет никакого различия между геометрией, порожденной B, и геометрией, порожденной B'.

Из этого следует, что математик не должен заниматься частными вещами по поводу его точек или же их внутренней природой. Это же относится к линиям, плоскостям, даже если он размышляет как *прикладной математик.* Мы можем сказать, что имеется эмпирическое свидетельство приблизительной истинности таких частей геометрии и, таким образом, истинность не является делом определения. Но нет никаких эмпирических свидетельств того, чем должна быть «точка». Ею может быть все, что как можно ближе удовлетворяет нашим аксиомам, но не как то, что «очень мало» или «не имеет частей». Обладает ли она такими свойствами, это неважно, если она удовлетворяет аксиомам. Если мы можем из эмпирического материала сконструировать логическую структуру, даже весьма сложную, которая будет удовлетворять геометрическим аксиомам, эта структура вполне законно может быть названа «точкой». Мы не должны говорить, что нет больше ничего, что может быть названо «точкой»; мы должны сказать лишь: «Сконструированный нами объект достаточен для геометра; он может быть одним из многих объектов, любого из которых было бы достаточно, но что не очень важно для нас, так как такого объекта вполне достаточно для оправдания эмпирической истинности геометрии и, таким образом, тезиса о том, что геометрия не есть дело определения». Это только иллюстрация общего принципа, что существенным в математике, и в большой степени в физике, является не внутренняя природа наших терминов, а логическая природа их взаимоотношений.

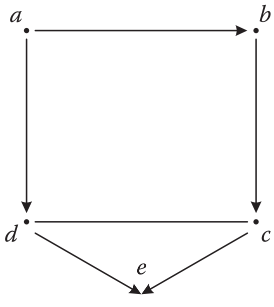
---

[1] Это не применимо к эллиптическому пространству, а только к тем пространствам, в которых прямая линия есть открытый ряд.

Мы можем сказать о двух подобных отношениях, что они имеют одну и ту же «структуру». Для математических целей (хотя не для чисто философских) существенной характеристикой отношения является то, что оно справедливо для определенных вещей, а не их внутренняя природа. Точно так же, как класс может быть определен различными, но равнообъемными концепциями, например, «человек» и «бесперое двуногое», точно так же два отношения, которые концептуально различны, могут иметь место для одного и того же множества примеров. «Пример» отношения должен рассматриваться как пара терминов, с соответствующим порядком, так что один из терминов берется первым, а второй — последним; пара должна быть такова, что ее первый член имеет рассматриваемое отношение к его второму члену. Возьмем (скажем) отношение «быть отцом»: мы можем определить то, что называем «объемом» этого отношения как класс всех упорядоченных пар (x, y) таких, что x есть отец y. С математической точки зрения существенным в отношении «быть отцом» является то, что оно определяет это множество упорядоченных пар. Говоря более обще, мы имеем:

«Объем» отношения есть класс тех упорядоченных пар (x, y) таких, что x имеет отношение, нами рассматриваемое, к y.

Мы теперь делаем дальнейший шаг в процессе абстракции и переходим к рассмотрению того, что имеется в виду под «структурой». Если дано некоторое отношение, мы можем, если это достаточно просто, сконструировать его карту. Ради определенности давайте возьмем отношение, объем которого включает следующие пары: *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *ce*, *dc*, *de*, где *a*, *b*, *c*, *d*, *e* пять терминов, неважно какие. Мы можем взять карту этого отношения как пять точек на плоскости, связав их стрелками, как показано на фигуре. То, что открывается на карте, называется структурой «отношения». Ясно, что «структура» отношения не зависит от конкретных терминов, образующих поле отношения. Поле может изменяться без изменения структуры, и структура может изменяться без изменения поля. Например, если мы добавим пару *ae* к иллюстрации, мы должны при этом изменить структуру, а не поле. Два отношения имеют одну и ту же «структуру», скажем мы, когда для обоих отношений будет одна карта, или, что то же самое, когда любое из отношений может дать карту для другого (так как каждое отношение может быть своей собственной картой). А это как раз и есть то, что мы называем «подобием». То есть два отношения имеют одну и ту же структуру, когда имеется между ними подобие, то есть когда они имеют одно и то же реляционное число. Таким образом, то, что мы определили как «реляционное число», есть то же самое, что имеют в виду под неясным словом «структура» — слово, несмотря на его важность, ни-



когда не бывшее (насколько мы знаем) определенным точным термином для тех, кто использовал это слово.

В традиционной философии есть много спекуляций, которых можно было бы избежать, если бы были поняты важность структуры и трудности, которые стоят за этим понятием. Например, часто говорят, что пространство и время субъективны, но что они имеют объективных двойников; или что феномены являются субъективными, но причиняются вещами-в-себе, которые должны различаться способом, свойственным различию феноменов, которым они дают существование. В случаях, когда делаются такие гипотезы, вообще предполагается, что мы знаем очень мало об объективных двойниках. На самом деле, если бы эта гипотеза была верна, объективные двойники образовали бы мир, имеющий ту же самую структуру, как и феноменальный мир, позволяя нам делать заключения от феноменов к истинам, которые могут быть установлены в абстрактных терминах и которые являются истинными о феноменах. Если феноменальный мир имеет три измерения, таким же должен быть мир, который стоит за феноменами; если мир феноменов является Евклидовым, таким же должен быть и другой мир, и так далее. Короче, каждое предложение, имеющее коммуникативное значение, должно быть истинно об обоих мирах или же ни об одном из них: единственное различие должно лежать как раз в том, что является сущностью индивидуальности, которая всегда избегает слов и запутывает описания, но которая, по той же самой причине, несущественна для науки. Единственная цель, которую философы преследуют при своем клеймении мира феноменов, состоит в том, чтобы убедить себя, что реальный мир очень отличен от мира явлений. Мы можем симпатизировать их желанию доказать столь желательное для них утверждение, но мы не можем поздравить их с успехом. Правда, многие из них не утверждают объективных аналогов феноменам и тем самым избегают вышеприведенного аргумента. Те же, кто допускает двойников, как правило, очень сдержанны по этому поводу, вероятно потому, что они инстинктивно чувствуют, что если этот предмет разрабатывать дальше, это приведет к слишком большому сближению между реальным и феноменальным мирами. Если бы они все-таки продолжили разработку темы, то вряд ли они могли избежать заключений, предлагаемых нами. Именно поэтому, как и по многим причинам, понятие структуры или реляционного числа является важным.

Глава VII
РАЦИОНАЛЬНЫЕ, ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Мы только что видели, как определить кардинальные числа, а также реляционные числа, частным видом которых являются ординальные числа. Каждый из этих видов чисел может быть как конечным, так и бесконечным. Но ни один из них не может быть распространен на знакомые идеи числа, а именно: эти числа не могут быть расширены до отрицательных, дробных, иррациональных и комплексных чисел. В настоящей главе мы дадим логические определения такого рода различных расширений.

Одной из ошибок, которая задержала открытие правильных определений в этой области, была общепринятая идея о том, что каждое расширение числа включает предыдущие виды чисел в качестве специальных случаев. Полагали, что, имея дело с положительными и отрицательными целыми числами, первые должны быть идентифицированы с исходными числами без знака, то есть с целыми числами. Опять-таки думали, что дроби с знаменателем 1 могут быть идентифицированы с натуральными числами, которые являются числителями дробей. И иррациональные числа, такие как корень квадратный из 2, должны были найти свое место среди рациональных дробей, будучи большими, чем некоторые из них, и меньшими, нежели другие, так чтобы рациональные и иррациональные числа могли рассматриваться как один класс «действительных чисел». А когда идея числа была расширена до включения «комплексных» чисел, то есть чисел, включающих корень квадратный из –1, полагали, что действительные числа должны рассматриваться в рамках комплексных чисел, у которых мнимая часть (то есть часть, умножаемая на корень квадратный из –1) равна нулю. Все подобного рода предположения ошибочны и их можно отбросить, как это станет видно, если будут даны корректные определения.

Давайте начнем с *положительных и отрицательных* целых чисел. Ясно, что +1 и –1 оба должны быть отношениями, и на самом деле, обратными друг другу! Вполне ясным и достаточным определением + 1 является трактовка его как отношения $n + 1$ к n, а –1 как n к $n + 1$. Более обще, если m есть некоторое индуктивное число, $+m$ будет отношением $n + m$ к n (для некоторого n), и $-m$ будет отношением n к $n + m$. В соответствии с этим определением $+m$ есть отношение, являющееся одно-однозначным до тех пор, пока n есть кардинальное число (конечное или бесконечное) и m есть индуктивное кардинальное число. Но $+m$ ни при каких обстоятельствах не может быть идентифицировано с m, которое не является отношением, а является классом классов. Буквально во всем $+m$ отлично от m; это же относится к $-m$.

Дроби являются более интересными, чем положительные или отрицательные числа. Дроби нужны нам для многих целей, но главным образом для измерений. Мой друг и соавтор д-р А. Н. Уайтхед развил теорию дробей, специально приспособленную для приложения к измерениям, которая изложена в *Principia Mathematica*[1]. Но если все, что требуется для определения объекта, состоит в определении чисто ма-

[1] Vol. iii, *300ff, особенно 303.

тематических свойств, то цель может быть достигнута более простым методом, который мы здесь и примем. Мы определим дробь m/n как отношение, которое содержится между двумя индуктивными числами x и y, когда $xn = ym$. Это определение позволит нам доказать, что m/n есть одно-однозначное отношение, при условии, что ни m, ни n не равны нулю. И конечно, n/m есть обратное отношению m/n.

Из вышеприведенного определения ясно, что дробь $m/1$ есть отношение между двумя целыми числами x и y, такое, что $x = my$. Это отношение, подобно $+m$, никоим образом не может быть отождествлено с индуктивным кардинальным числом m, потому что отношение и класс классов являются объектами абсолютно различного рода[1]. Как будет видно, $0/n$ есть всегда одно и то же отношение, каким бы ни было число n; короче, это есть отношение 0 к любому другому индуктивному кардинальному числу. Мы можем назвать его нулем рациональных чисел, и оно ни в коем случае не тождественно кардинальному числу 0. Обратно, отношение $m/0$ является всегда одним и тем же, каким бы ни было кардинальное число m. Нет никакого индуктивного кардинального числа, которое могло бы быть поставлено в соответствие с $m/0$. Мы можем назвать его «бесконечностью рациональных чисел». Это пример того сорта бесконечности, который является традиционным в математике и обозначается знаком «∞». Такая бесконечность радикально отлична от истинной канторовской бесконечности, которую мы рассмотрим в следующей главе. Бесконечность рациональных чисел не требует, для своего определения или использования, никаких бесконечных классов или бесконечных целых чисел. Она не является, на самом деле, очень уж важным понятием, и мы могли бы вообще обойтись без нее, если бы встретились с какими-нибудь возражениями. Канторовская бесконечность, с другой стороны, является величайшим и наиболее важным понятием, и понимание ее ведет к совершенно новой области математики и философии.

Следует заметить, что нуль и бесконечность, единственные среди рациональных чисел, не являются одно-однозначными. Нуль является одно-многозначным, а бесконечность много-однозначной.

Нет никаких затруднений в определении *больше* и *меньше* среди дробей. Даны два рациональных числа m/n и p/q, мы будем говорить, что m/n меньше p/q, если mq меньше np. Нетрудно доказать, что отношение «меньше, чем», так определенное, является порядковым, так что дроби образуют ряд в порядке величины. В этом ряду нуль есть наименьший термин, а бесконечность — наибольший. Если мы опустим нуль и бесконечность из нашего ряда, не будет наименьшего и

---

[1] Конечно, на практике мы будем продолжать говорить о дроби как о, скажем, большей или меньшей 1, то есть большей или меньшей, чем рациональное число 1/1. Пока мы имеем в виду, что частное 1/1 и кардинальное число есть вещи различные, нет необходимости в педантичном указании на это различие.

наибольшего рациональных чисел; ясно, что если m/n есть некоторое рациональное число, отличное от нуля и бесконечности, $m/2n$ меньше, а $2m/n$ больше него, хотя ни одно из них не является ни нулем, ни бесконечностью, и поэтому m/n не является ни наименьшим, ни наибольшим из рациональных чисел, и следовательно (когда опущены нуль и бесконечность), нет ни наименьшего, ни наибольшего числа, поскольку m/n выбрано произвольно. Подобным образом мы можем доказать, что как бы ни были близки две дроби, всегда имеются другие дроби между ними. Действительно, пусть m/n и p/q будут двумя дробями, из которых p/q бóльшая. Тогда легко видеть (или доказать), что $(m + p)/(n + q)$ будет больше, чем m/n, и меньше, чем p/q. Таким образом, ряд рациональных чисел таков, что в нем нет двух последовательных терминов, но всегда между любыми двумя имеются другие термины. Так как есть и другие термины между этими другими, и так до бесконечности, ясно, что между двумя рациональными числами существует бесконечное число рациональных чисел, как ни были близки эти два числа[1]. Ряд, который имеет такое свойство, то есть что всегда имеются другие термины между двумя любыми, так что нет последующего термина, называется «компактным». Такие ряды имеют много важных свойств, и важно отметить, что рациональные числа являют собой пример компактного ряда, порождаемый чисто логически, без всякой апелляции к пространству, времени или другим чисто эмпирическим данным.

Положительные и отрицательные рациональные числа могут быть определены подобным же образом, как мы определили положительные и отрицательные целые числа. Имея поначалу определенную сумму двух рациональных чисел m/n и p/q как $(mq + pn)/nq$, мы определим $+p/q$ как отношение $m/n + p/q$ *к* m/n, где m/n есть некоторое рациональное число; и $-p/q$, конечно, обратно по отношению к $+p/q$. Это не единственно возможный способ определения положительных и отрицательных рациональных чисел, но это способ, преимущество которого состоит в том, что он является адаптацией способа, к которому мы прибегли в случае целых чисел.

Мы подходим сейчас к более интересному расширению идеи числа, а именно к расширению, которое называется «действительными» числами, такими, которые включают в себя иррациональные числа. В главе I мы уже упоминали «несоизмеримые» числа и их открытие Пифагором. Именно через них, то есть через геометрию, появилась идея иррациональных чисел. Квадрат, сторона которого один дюйм, имеет диагональ, длина которой есть корень квадратный из 2 дюймов. Но, как обнаружили древние, нет таких дробей, квадрат которых был бы равен 2. Это

---

[1] Строго говоря, это утверждение, как и все те, которые будут встречаться до конца главы, включают то, что называется «аксиомой бесконечности», которая будет обсуждена в одной из следующих глав.

утверждение доказано в десятой книге Евклида, одной из тех книг, про которые школьники думают, что они, к счастью, давно утеряны, в то время как они на самом деле до сих пор являются учебниками. Доказательство потрясающе просто. Если это возможно, пусть m/n будет корнем квадратным из 2, так что $m^2/n^2 = 2$, то есть $m^2 = 2n^2$. Таким образом, m^2 есть четное число, и, следовательно, m должно быть четным числом, потому что квадрат нечетного числа есть нечетное число. Теперь, если m четно, m^2 должно быть делимо на 4, потому что если $m = 2p$, тогда $m^2 = 4p^2$. Таким образом, мы будем иметь $4p^2 = 2n^2$, где p есть половина m. Отсюда $2p^2 = n^2$, и следовательно, n/p будет квадратным корнем из 2. Но тогда мы можем повторить аргумент: если $n = 2q$, то p/q будет также корнем квадратным из 2, и так далее, через нескончаемый ряд чисел, каждое из которых является половинкой предшественника. Но это невозможно; если мы разделим число на 2, и затем снова возьмем половину и так далее, мы должны достигнуть после конечного числа шагов нечетного числа. Или же аргумент может быть представлен еще проще, предположив, что m/n, с которого мы начинаем, является наинизшим; в этом случае m и n не могут быть оба четными; и все же мы видели, что если $m^2/n^2 = 2$, то они должны быть ими. Таким образом, не может быть никакой дроби, чей квадрат равен 2.

Таким образом, никакая дробь не может выразить точно длину диагонали квадрата, сторона которого равна одному дюйму. Это кажется вызовом, брошенным природой арифметике. Как бы арифметик ни гордился (как это делал Пифагор) мощью чисел, природа может запутать его, предподнеся длину, которую нельзя оценить ни одним из чисел. Но проблема не осталась в этой геометрической форме. Как только была изобретена алгебра, та же проблема возникла относительно решения уравнений, хотя при этом проблема стала более широкой, поскольку она включала комплексные числа.

Ясно, что при приближении, все более близком и близком, к квадрату, результатом которого будет 2, мы получим дроби. Мы можем образовать восходящий ряд дробей, все из которых имеют квадраты меньшие, чем 2, но отличающиеся от 2 для последних членов меньше, чем на заранее данную величину. То есть предложим, что я задал заранее некоторую малую величину, например, одну десятимиллиардную; тогда будет найдено, что все термины моего ряда после некоторого, скажем, десятого, имеют квадрат, который отличается от 2 меньше, чем на эту величину. И если я выберу еще меньшую величину, все равно при дальнейшем продвижении по ряду, рано или поздно, мы достигнем, скажем, двадцатого термина, после которого все термины будут иметь квадраты, отличающиеся от 2 на величину, меньшую выбранной. Если мы будем извлекать корень квадратный из 2 по обычному арифметическому правилу, мы будем получать бесконечное десятичное разложение, которое, если взять его с таким-то и таким-то знаком разложения, в точности выполнит указанные выше условия. Равным образом, мы можем образовать нисходящий ряд дробей, чей квадрат превысит 2, но на величину, все меньшую по ходу продвижения в ряду и которая будет отличаться от квадрата, рано или поздно, на величину, меньшую заранее выбранной. Таким образом, мы очертим границы вокруг корня квадратного из 2, и может показаться странным, что он непрерывно ускользает от нас. Тем не менее по-настоящему мы достигнем корня квадратного из 2 не этим методом.

Если мы разделим *все* рациональные числа на два класса, в соответствии с тем, больше или меньше их квадраты числа 2, то мы обнаружим, что среди тех, чей квадрат *не* меньше, чем 2, все имеют квадрат, больший, чем 2. Нет максимального рационального числа, чей квадрат меньше 2, и нет минимального рационального числа, чей квадрат больше 2. Нет нижнего предела, если не считать нуля, в разностях между числами, чей квадрат немного меньше 2, и числами, чей квадрат немного больше 2. Короче, мы можем разделить *все* рациональные числа на два класса такие, что все термины в одном классе меньше, чем все термины в другом, и нет максимума в одном классе и минимума в другом. Между этими двумя классами, где следует находиться $\sqrt{2}$, нет ничего. Таким образом, наша граница, хотя мы очертили ее как можно у́же, была проведена не в том месте, и мы не поймали $\sqrt{2}$.

Приведенный выше метод разделения всех терминов ряда на два класса, из которых один полностью предшествует другому, был введен в оборот Дедекиндом[1] и, следовательно, называется «дедекиндовским сечением». В отношении того, что случается в этой точке, существует четыре возможности: (1) может быть максимум в нижней секции и минимум в высшей секции, (2) может быть максимум в одной и отсутствие минимума в другой, (3) может не быть максимума в одной и иметься минимум в другой, (4) может не быть ни максимума в одной, ни минимума в другой. Из этих четырех случаев первый иллюстрируется любым рядом, в котором имеются последующие термины: в ряду целых чисел, например, нижняя секция должна кончаться некоторым числом n, а верхняя секция должна начинаться с $n + 1$. Второй случай может быть иллюстрирован рядом рациональных чисел, если мы возьмем в качестве нижней секции все рациональные числа вплоть до 1 включительно, а в качестве верхней секции все рациональные числа, большие 1. Третий случай иллюстрируется примером, если мы возьмем в качестве нижней секции все рациональные числа, меньшие 1, а в качестве верхней секции все рациональные числа, начиная с 1, включая саму 1. Четвертый случай, как мы видели, иллюстрируется примером, если мы поместим в нижнюю секцию все рациональные числа, чей квадрат меньше 2, а в верхнюю секцию все рациональные числа, чей квадрат больше 2.

Мы можем пренебречь первым из четырех случаев, так как он возникает только в тех рядах, где имеются последующие термины. Во вто-

[1] Stetigkeit und irrationale Zahlen, 2 Auflage, Brunswick, 1892.

ром из наших четырех случаев мы говорим, что максимум нижней секции есть *низший* предел верхней секции, или же любое множество терминов выбрано из верхней секции таким образом, что ни один термин из верхней секции не стоит перед ними. В третьем из наших четырех случаев мы говорим, что минимум верхней секции есть верхний предел нижней секции, или некоторое множество терминов выбрано из нижней секции таким образом, что ни один термин из нижней секции не находится после них. В четвертом случае мы говорим, что имеется «пробел»: ни верхняя секция, ни нижняя не имеют предела или последнего термина. В этом случае мы можем также сказать, что мы имеем «иррациональную секцию», так как секции рядов рациональных чисел имеют «пробелы», которые соответствуют иррациональным числам.

Задержкой в развитии истинной теории иррациональных чисел была ошибочная вера в то, что должны быть «пределы» в рядах рациональных чисел. Понятие предела является чрезвычайно важным, и перед тем, как пойти дальше, было бы хорошо определить его.

Термин x является «верхним пределом» класса α в связи с отношением P, если (1) α не имеет максимума в P, (2) каждый член α, который принадлежит к полю P, предшествует x, (3) каждый член поля P, который предшествует x, предшествует некоторому члену α. (Под «предшествует» мы подразумеваем «имеет отношение P к».)

Это предполагает следующее определение «максимума»:

Термин x есть «максимум» класса α в связи с отношением P, если x есть член α и поля P и не имеет отношения P к никакому другому члену α.

Эти определения не требуют, чтобы термины, к которым они приложимы, были количественными. Например, если заданы моменты времени, упорядоченные через раньше и позже, их максимум (если таковой есть) будет последним из моментов: но если они упорядочены через позже и раньше, их максимум (если таковой имеется) будет первым из моментов.

«Минимум» класса в связи с P есть его максимум в связи с обратным P отношением; и «нижний предел» в связи с P есть верхний предел в связи с обратным P отношением.

Понятия предела и максимума не требуют обязательно, чтобы отношение, в связи с которым они определяются, должно быть порядковым, но они имеют весьма мало важных приложений, за исключением тех случаев, когда отношение является порядковым или квази-порядковым. Очень важным понятием является понятие «верхнего предела или максимума», которому дано имя «верхней границы». Таким образом, «верхняя граница» множества терминов из ряда есть их последний член, если они имеют таковой, а если его нет, то это первый член после них, если он имеется. Если нет ни максимума, ни предела, то нет и верхней границы. «Нижняя граница» есть нижний предел или минимум.

Возвращаясь к четырем видам дедекиндовского сечения, мы видим, что в случае первых трех видов каждое сечение имеет границу (верхнюю или нижнюю), в то время как четвертый вид границы не имеет. Ясно также, что всякий раз, когда нижняя секция имеет верхнюю границу, верхняя секция имеет нижнюю границу. Во втором и третьем случаях две границы тождественны. В первом случае они являются последующими терминами ряда.

Ряд называется «дедекиндовским», когда каждая секция имеет границу, верхнюю или нижнюю.

Мы видели, что ряд рациональных чисел в порядке величины не является дедекиндовским.

Из-за привычки, сформированной под влиянием пространственного воображения, люди предполагали, что ряды должны иметь пределы в тех случаях, которые казались бы странными, если бы пределов не было. Таким образом, ощущая, что нет *рационального* числа в качестве предела рациональных чисел, чей квадрат меньше 2, они позволили себе «постулировать» *иррациональный* предел, который должен заполнить дедекиндовский пробел. Дедекинд в вышеупомянутой работе положил аксиому, согласно которой пробел должен быть заполнен, то есть что каждое сечение должно иметь границу. По этой причине ряды, которые удовлетворяют этой аксиоме, называются «дедекиндовскими». Но имеется бесконечное число рядов, которые таковыми не являются.

Метод «постулирования» того, что мы хотим, имеет много преимуществ; они, эти преимущества, точно такие же, как преимущества воровства над честным трудом, Давайте оставим их другим, а сами займемся нашим тяжелым трудом.

Ясно, что иррациональное дедекиндовское сечение некоторым образом «представляет» иррациональные числа. Для того чтобы его использовать для этого, что пока является не более чем неясным ощущением, нам нужно найти некоторый способ извлечь из ощущения точное определение. А для того чтобы сделать это, мы должны избавить наш ум от понятия, по которому иррациональные числа должны быть пределом множества рациональных. Точно так же, как дроби, чей знаменатель 1, не тождественны целым числам, так и те рациональные числа, которые больше или меньше иррациональных, или же имеют своим пределом иррациональные числа, не должны отождествляться с дробями. Мы должны определить новый вид чисел, называемых «действительными числами», из которых часть является рациональными числами, а часть иррациональными. Те числа, которые рациональны, «соответствуют» обычным рациональным, тем же образом, как рациональное число $n/1$ соответствует целому числу n; но они не одно и то же с рациональными числами. Для того чтобы решить, чем они должны быть, заметим, что иррациональные числа представлены иррациональным сечением, а сечение представлено его нижней секцией. Давайте ограничимся сечениями, в которых нижняя секция не имеет максимума; в этом случае мы назовем нижнюю секцию «сегментом». Тогда те сегменты, которые соответствуют рациональным числам, состоят из всех рациональных, меньших, чем рациональное число, которому они соответствуют и которое является их границей. Те же, которые представляют иррациональные числа, не имеют границы. Сегменты, имеющие границу и не имеющие ее, таковы, что из любых двух из них, принадлежащих одному ряду, один должен быть частью другого; отсюда, они могут быть упорядочены в ряд через отношение целого и части. Ряд, в котором имеются дедекиндовские пробелы, то есть в котором имеются сегменты без границы, имеет больше сегментов, чем терминов, так как каждый термин определит сегмент, имеющий этот термин в качестве границы, и тогда сегменты без границы будут лишними.

Мы сейчас в состоянии определить действительное число и иррациональное число.

«Действительное число» есть сегмент ряда рациональных чисел в порядке величины.

«Иррациональное число» есть сегмент ряда рациональных чисел, который не имеет границы.

«Рациональное действительное число» есть сегмент ряда рациональных чисел, которые имеют границу.

Таким образом, рациональное действительное число состоит из всех рациональных чисел, меньших определенного рационального числа, и как раз этому рациональному числу соответствует рациональное действительное число. Действительное число 1, например, есть класс собственных дробей.

В тех случаях, где мы естественно предполагаем, что иррациональные числа должны быть пределом рациональных чисел, истина состоит в том, что это предел соответствующего множества рациональных действительных чисел в ряду сегментов, упорядоченных через целое и часть. Например, $\sqrt{2}$ есть верхний предел всех тех сегментов ряда рациональных чисел, который соответствует рациональным числам, чей квадрат меньше 2. Еще более просто, $\sqrt{2}$ есть сегмент, *состоящий* из всех тех рациональных чисел, чей квадрат меньше 2.

Легко доказать, что ряд сегментов любого ряда является дедекиндовским. Потому что, если дано некоторое множество сегментов, их граница будет их логической суммой, то есть классом всех тех терминов, которые принадлежат по крайней мере одному сегменту множества[1].

---

[1] Для дальнейшего рассмотрения предмета, связанного с сегментами и дедекиндовскими отношениями, см. *Principia Mathematica*, vol. ii, *210–214. Более полная трактовка действительных чисел дана в цит. выше vol. iii, *300ff и *Principles of Mathematics*, chaps. xxxiii and xxxiv.

Приведенное выше определение действительных чисел есть пример «конструирования» в противоположность «постулированию», еще один пример чего мы находим в определении кардинального числа. Огромное преимущество этого метода состоит в том, что он не требует новых предложений, но позволяет нам продвигаться дедуктивно от исходного аппарата логики.

Нетрудно определить сложение и умножение для действительных чисел, таким образом определенных. Даны два действительных числа μ и ν, каждое из которых является классом рациональных чисел; возьмем любой член μ и некоторый член ν и сложим их в соответствии с правилом сложения для рациональных чисел. Образуем класс всех таких сумм, получаемых варьированием при выборе членов μ и ν. Это даст нам новый класс рациональных чисел, и легко доказать, что этот новый класс есть сегмент ряда рациональных чисел. Мы определим его как сумму μ и ν. Мы можем установить это определение короче:

Арифметическая сумма двух действительных чисел есть класс арифметических сумм члена одного и члена другого, выбранных всеми возможными способами.

Мы можем определить произведение двух действительных чисел точно таким же образом, умножая члены одного на члены другого всеми различными путями. Класс таким образом порождаемых рациональных чисел определяется как произведение двух действительных чисел. (Во всех таких определениях ряд рациональных чисел должен быть определен так, чтобы исключались 0 и бесконечность.)

Нетрудно расширить наши определения на положительные и отрицательные действительные числа и их сложение и умножение.

Остается дать определение комплексных чисел.

Комплексные числа, хотя могут быть даны в геометрической интерпретации, на самом деле не требуются геометрией в той же настоятельной манере, в которой требуются иррациональные числа. «Комплексное» число означает число, включающее корень квадратный из отрицательного числа, целого ли, дроби или действительного числа. Так как квадрат отрицательного числа является положительным числом, число, чей квадрат является числом отрицательным, должно быть новым числом. Используя букву i для квадратного корня из -1, любое число, включающее квадратный корень из отрицательного числа, можно выразить в форме $x + iy$, где x и y являются действительными числами. Часть iy называется «мнимой» частью этого числа, а x «действительной» частью. (Резон для фразы «действительные числа» состоял в противопоставлении их с «мнимыми».) Комплексные числа давно использовались математиками, несмотря на отсутствие точного определения. Просто предполагалось, что они подчиняются обычным арифметическим правилам, и на этом основании их использование считалось полезным. Они требовались больше для алгебры и анализа, нежели для геометрии. Мы хотим, например, быть способны сказать, что каждое квадратное уравнение имеет два корня, а каждое кубическое уравнение — три корня, и так далее. Но если мы ограничены действительными числами, такое уравнение как $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней, а такое уравнение как $x^3 - 1 = 0$ имеет только один корень. Каждое обобщение числа представляется прежде всего как необходимость при решении некоторой простой проблемы: отрицательные числа были введены для того, чтобы было возможно вычитание во всех случаях, потому что в противном случае $a - b$ было бы бессмысленным, если a меньше b. Дроби были необходимы для того, чтобы было возможно деление, и комплексные числа необходимы для того, чтобы извлечение корня и решение уравнений были всегда возможны. Но расширения числа не *создаются* просто наличием необходимости в них: они создаются определениями, и как раз к определению комплексного числа мы должны сейчас и обратиться.

Комплексное число может рассматриваться и определяться как упорядоченная пара действительных чисел. Здесь, как и везде, возможно много определений. Все, что необходимо, состоит в том, чтобы принятое определение вело к определенным свойствам. В случае комплексных чисел, если они определены как упорядоченная пара действительных чисел, нам нужно гарантировать наличие некоторых требуемых свойств, в частности, чтобы два действительных числа требовались для определения комплексного числа и чтобы среди двух действительных чисел различались первое и второе, и чтобы два комплексных числа были тождественны, когда первое действительное число первого комплексного числа было равно первому действительному числу другого комплексного числа, и то же для второго действительного числа. Далее, необходимо определение правил сложения и умножения. Мы имеем

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x' + (y + y')i$$

$$(x + yi)\ (x + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$$

Таким образом, мы определим, что если даны две упорядоченные пары действительных чисел (x, y) и (x', y'), их сумма будет парой $(x + x', y + y')$, и их произведение будет парой $(xx' - yy', xy' + xy')$. При таких определениях наших упорядоченных пар мы будем иметь желательные свойства. Например, возьмем произведение двух пар $(0, y)$ и $(0, y')$. Это будет, по правилам выше, парой $(-yy', 0)$. Таким образом, квадрат пары $(0, 1)$ будет парой $(-1, 0)$. Теперь эти пары, где второй термин есть 0, являются теми, у которых мнимая часть нулевая. В обозначении $x + iy$ они просто $x + 0i$, что естественно проще писать как x. Точно так же, как естественно, но ошибочно отождествлять рациональные числа, чей знаменатель 1, с целыми числами, так же естественно, но и ошибочно отождествлять комплексные числа, чья мнимая часть равна нулю, с действительными числами. Хотя это ошибочно в теории, это очень удобно на практике; «$x + 0i$» может быть заменено на просто «x», а «$0 + yi$» — на «yi», если помнить при этом, что x не есть на самом деле действительное число, а специальный случай комплексного числа. И когда y есть 1, «yi» может быть, конечно, заменен на «i». Таким образом, пара (0, 1) представлена через i, а пара (−1, 0) представлена через −1. Наши правила умножения делают квадрат (0, 1) равным (−1, 0), то есть квадрат i есть −1. Это есть то, чего мы и хотели получить. Таким образом, наши определения служат всем необходимым целям.

Легко дать геометрическую интерпретацию комплексных чисел в геометрии на плоскости. Этот предмет был пространно рассмотрен У. К. Клиффордом в его «Здравом смысле в точных науках», книге с многими достоинствами, но написанной до того, как была осознана важность чисто логических определений.

Комплексные числа высшего порядка, хотя они менее полезны и важны, чем только что определенные нами, имеют-таки некоторое использование в геометрии, как было указано, например, д-ром Уайтхедом в «Универсальной алгебре». Определение комплексных чисел порядка n получается очевидным расширением определений, рассмотренных нами. Мы определяем комплексное число порядка как одно-многозначное отношение, чья область состоит из определенных действительных чисел и чья обратная область состоит из целых чисел от 1 до n[1]. Это обычно указывается обозначением (x_1, x_2, x_3 ... x_n), где индексы обозначают корреляцию с целыми числами, и корреляция является не необходимо одно-однозначной, а одно-многозначной, потому что x_r и x_s могут быть равны, когда r и s не равны. Приведенное выше определение, с подходящим правилом умножения, будет служить всем целям, для которых нужны комплексные числа высшего порядка.

Мы сейчас завершаем наше обозрение таких расширений числа, которые не требуют бесконечности. Применение чисел к бесконечным совокупностям будет нашей следующей темой.

Глава VIII
БЕСКОНЕЧНЫЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Определение кардинальных чисел, которое было дано в главе II, мы применили в главе III к конечным числам, то есть к обычным натуральным числам. Им мы дали имя «индуктивных чисел», потому что мы обнаружили, что они должны быть определены как числа, которые удовлетворяют математической индукции начиная с 0. Но мы до сих пор не рассматривали совокупностей, которые не имеют индуктивного числа терминов, и не исследовали, можно ли сказать про такие со-

[1] См.: *Principles of Mathematics*, § 360, p. 379.

вокупности, что они вообще обладают числом. Это древняя проблема, которая была решена в наши дни главным образом Георгом Кантором. В настоящей главе мы попытаемся объяснить теорию трансфинитных, или бесконечных, кардинальных чисел как результат комбинаций открытий Кантора и открытий Фреге в логической теории чисел.

Нельзя сказать с определенностью, что в мире на самом деле существуют бесконечные совокупности. Предположение о том, что они существуют, называется «аксиомой бесконечности». Хотя предлагаются различные способы, с помощью которых у нас есть надежда доказательства этой аксиомы, есть причина бояться того, что все они ошибочны, и нет никаких окончательных логических причин верить в то, что аксиома верна. В то же самое время нет определенной логической причины для возражений *против* бесконечных совокупностей, и следовательно, мы вполне оправданно исследуем гипотезу о том, что такие совокупности существуют. Практическая форма этой гипотезы, для наших настоящих целей, есть предположение о том, что если n есть некоторое индуктивное число, то n не равно $n + 1$. При идентификации этой формы нашего предположения с такой формой, в которой утверждается существование бесконечных совокупностей, возникают многие тонкости; но мы оставляем эти рассмотрения до последней главы, когда приступим к обсуждению аксиомы бесконечности. Для настоящих целей мы просто предположим, что если n есть индуктивное число, n не равно $n + 1$. Это уже включено в предположение Пеано о том, что никакие два индуктивных числа не имеют одного и того же последующего элемента. Потому что если было бы $n = n + 1$, тогда $n - 1$ и n имели бы один и тот же последующий элемент, а именно n. Таким образом, мы не предполагаем ничего нового по сравнению с примитивными утверждениями Пеано.

Давайте рассмотрим саму совокупность индуктивных чисел. Это полностью вполне определенный класс. Во-первых, кардинальное число есть множество классов, все из которых подобны друг другу и не подобны ничему другому, кроме себя. Тогда мы определяем «индуктивные числа» как такие среди кардинальных чисел, которые принадлежат к потомству 0 в связи с отношением n к $n + 1$, то есть такие, которые обладают каждым свойством, которым обладает 0 и последующие элементы, обладающие этими свойствами, подразумевая под «последующим» элементом n число $n + 1$. Таким образом, класс «индуктивных» чисел полностью определен. По нашему общему определению кардинальных чисел, число терминов в классе индуктивных чисел должно быть определено как «все те классы, которые подобны классу индуктивных чисел», то есть это множество классов *есть* число индуктивных чисел согласно нашему определению.

Легко видеть, что это число не находится среди индуктивных чисел. Если n есть некоторое индуктивное число, число чисел от 0 до n (включая оба из них) есть $n + 1$; следовательно, общее число индуктивных чисел больше, чем *n*, независимо от того, каким является *n*. Если мы упорядочим индуктивные числа в ряд по порядку величины, этот ряд не будет иметь последнего члена; но если *n* есть индуктивное число, каждый ряд, чье поле имеет *n* членов, имеет последний член, что легко можно доказать. Такие различия можно умножать достаточно долго. Таким образом, число индуктивных чисел является новым числом, отличным от всех из них, не обладающим индуктивными свойствами. Может случиться, что 0 имеет определенное свойство, и что если *n* имеет его, то его будет иметь и $n + 1$, а все же новое число его иметь не будет. Трудности, столь надолго задержавшие появление теории бесконечных чисел, были вызваны главным образом тем фактом, что по крайней мере некоторые из индуктивных свойств неверно приписывались в *обязательном* порядке всем числам. Действительно, полагали, что их нельзя отрицать без противоречия. Первый шаг в понимании бесконечных чисел состоит в осознании ошибочности этого взгляда.

Наиболее примечательное и удивительное различие между индуктивными числами и новым числом является то, что это новое число не изменяется добавлением к нему 1 или вычитанием из него 1, удвоением его или делением пополам, или вообще любыми операциями, которые, по общему мнению, необходимо делают число больше или меньше. Факт неизменяемости числа добавлением к нему 1 был использован Кантором для определения того, что он назвал «трансфинитными» кардинальными числами, но по причинам, которые станут понятными позднее, лучше определить бесконечное кардинальное число как такое, которое не обладает всеми свойствами индуктивных чисел, то есть просто как число, не являющееся индуктивным. Тем не менее свойство не изменяться при добавлении 1 является очень важным, и мы остановимся на нем некоторое время.

Сказать, что класс имеет число, которое не изменяется при добавлении 1, значит сказать, что если мы берем термин *x*, который не принадлежит к классу, мы можем найти одно-однозначное отношение, чья область есть класс, а обратная область получается добавлением *x* к классу. Действительно, в этом случае класс подобен сумме самого себя и термина *x*, то есть классу, имеющему один дополнительный термин. Так что он имеет такое же число, как и класс с одним дополнительным термином, и если *n* есть это число, то $n = n + 1$. В этом случае мы будем также иметь $n = n - 1$, так как будут иметься одно-однозначные отношения, чьи области будут состоять из целого класса, а обратные области из целого класса без точно одного термина. Может быть показано, что случаи, в которых это имеет место, являются теми же самыми, что и более общие случаи, в которых *некоторая* часть (уменьшенное целое) может быть поставлена в одно-однозначное отношение с целым. Когда это может быть сделано, коррелятор, осуществляющий это, как говорят, «отражает» [reflect] целый класс в часть самого себя. По этой причине такие классы называются «рефлективными». Таким образом:

«Рефлективный» класс это такой класс, который подобен собственной части самого себя («собственная часть» есть уменьшенная часть целого).

«Рефлективное» кардинальное число есть кардинальное число рефлективного класса.

Теперь мы рассмотрим свойство рефлективности.

Один из наиболее поразительных примеров «рефлективности» приведен Ройсом по поводу карты: он вообразил ситуацию, когда решено сделать карту Англии на поверхности самой Англии. Карта, если она аккуратна, имеет полное одно-однозначное соответствие с оригиналом; таким образом, наша карта, которая является частью, находится в одно-однозначном отношении с целым и должна содержать такое же количество точек, как и целое, которое должно быть, следовательно, рефлективным числом. Ройс был заинтересован тем, что карта, если она правильна, должна содержать карту карты, и так до бесконечности. Эта точка зрения интересна, но она не занимает нас на данный момент. На самом деле мы должны перейти от занимательных иллюстраций к более определенным вещам, и для этой цели мы не можем сделать ничего лучше, чем рассмотреть сам числовой ряд.

Отношение n к $n + 1$, ограниченное индуктивными числами, является одно-однозначным, имеет в качестве области всеобщность всех индуктивных чисел, а в обратной области все, за исключением 0. Таким образом, целый класс индуктивных чисел подобен тому, чем становится тот же самый класс, если в нем опустить 0. Следовательно, это «рефлективный» класс, в соответствии с определением, и число его членов есть «рефлективное» число. Опять-таки, отношение n к $2n$, ограниченное индуктивными числами, является одно-однозначным, имея в качестве своей области все индуктивные числа, а в качестве обратной области одни только четные индуктивные числа. Отсюда общее число индуктивных чисел есть то же самое, что и число четных индуктивных чисел. Это свойство было использовано Лейбницем (и многими другими) как доказательство того, что бесконечные числа невозможны; мыслилось противоречивым, что «часть должна быть равна целому». Но это одна из тех фраз, правдоподобность которых зависит от невоспринимаемой расплывчатости: слово «равно» имеет много значений, но если его взять в смысле «подобно», то противоречия во фразе нет, так как бесконечная совокупность вполне может иметь части, подобные самой себе. Те, кто считает это невозможным, приписывают, как правило, бессознательно, вообще числам свойства, которые могут быть доказаны только математической индукцией. Только то, что они хорошо знакомы, заставляет нас считать, и кстати ошибочно, их истинными за пределами области конечного.

Всякий раз, когда мы «рефлектируем» класс в часть его самого, то же самое отношение будет необходимо рефлектировать эту часть в меньшую по сравнению с ней часть, и так далее, до бесконечности. Например, мы можем рефлектировать, как мы только что видели, все индуктивные числа в четные числа; мы можем тем же самым отношением (от *n* к *2n*) рефлектировать четные числа в числа, кратные 4, а эти — в кратные 8 и т. д. Это абстрактный аналог проблемы карты Ройса. Четные числа есть «карта» всех индуктивных чисел, числа, кратные 4 — карта карт, кратные 8 — карта карты карты и т. д. Если мы применим тот же самый процесс к отношению от n к $n + 1$, наша «карта» будет состоять из всех индуктивных чисел, за исключением 0; карта карт — из всех чисел начиная с 3 и т. д. Главное использование таких иллюстраций состоит в том, чтобы сделать более знакомой идею рефлективного класса, так чтобы кажущиеся парадоксальными арифметические предложения могли быть легко переведены на язык рефлектирования и классов, в котором атмосфера парадоксальности становится менее плотной.

Было бы полезно дать определение числа, которое является индуктивным кардинальным. Для этой цели мы сначала определим вид рядов, примером которых будет индуктивные кардинальные числа в порядке величины. Этот вид рядов, называемый «прогрессиями», уже рассматривался в главе I. Это ряды, которые могут быть порождены отношением последовательности: каждый член ряда должен иметь последующий элемент, и должен быть точно один член, не имеющий предшествующего элемента. Далее, каждый член ряда должен быть среди последующих элементов этого термина в связи с отношением «непосредственного предшествования». Эти характеристики могут быть сформулированы в следующем определении[1]:

«Прогрессия» есть одно-однозначное отношение, такое, что имеется точно один термин, принадлежащий области, но не обратной области, и область тождественна с множеством последующих элементов этого единственного термина.

Легко видеть, что прогрессия, таким образом определенная, удовлетворяет пяти аксиомам Пеано. Термин, принадлежащий области, но не конверсной области, будет тем, что называется «0»; термин, к которому имеется одно-однозначное отношение, будет «последующим элементом» термина; и область одно-однозначного отношения будет тем, что называется «числом». Если же мы возьмем пять аксиом Пеано, мы будем иметь следующие переводы:

1. «0 есть число» становится: «Член области, который не является членом обратной области, есть член области». Это эквивалентно существованию такого члена, который задается нашим определением. Мы будем называть этот член «первым термином».

[1] См.: *Principia Mathematica*, vol. ii, *123.

2. «Последующий элемент некоторого числа есть число» становится: «Термин, к которому данный член области имеет соответствующее отношение, также есть член области». Это доказывается следующим образом: по определению, каждый член области есть член множества последующих элементов первого термина: отсюда последующий элемент члена области должен быть членом множества последующих элементов первого термина (потому что множество последующих элементов термина всегда содержит его собственные последующие элементы, по общему определению этого множества) и, следовательно, членом области, поскольку, по определению множество последующих элементов первого члена, есть то же самое, что и область.

3. «Нет двух таких чисел, которые имели один и тот же последующий элемент». Достаточно сказать, что в противоположном случае отношение было бы одно-многозначным, тогда как по определению оно одно-однозначное.

4. «0 не есть последующий элемент ни для какого числа» становится «Первый термин не есть член обратной области», что опять-таки является непосредственным следствием определения.

5. Это математическая индукция, и она принимает вид: «Каждый член области принадлежит множеству последующих элементов первого термина», что есть часть нашего определения.

Таким образом, прогрессии, как мы их определили, имеют пять формальных свойств, из которых Пеано дедуцировал арифметику. Легко показать, что две прогрессии «подобны» в смысле, определенном для подобия отношения в главе VI. Мы можем, конечно, вывести отношение, которое является порядковым, из одно-однозначного отношения, которым мы определили прогрессию: используемый тут метод объяснен в главе IV, и соотносятся тут термин с членом его собственного множества последующих элементов в связи с исходным одно-однозначным отношением.

Два транзитивных асимметричных отношения, порождающих прогрессии, являются подобными по тем же самым причинам, что соответствующие одно-однозначные отношения подобны. Класс всех таких транзитивных порождающих прогрессии отношений называется «порядковым числом» в смысле главы VI; оно является на самом деле наименьшим из всех порядковых чисел, которому Кантор дал имя ω — числа, ставшего знаменитым.

Но сейчас мы рассматриваем *кардинальные* числа. Так как две прогрессии являются подобными отношениями, отсюда следует, что их области (или поля, что то же самое) являются подобными классами. Области прогрессий образуют кардинальное число, так как каждый класс, подобный области прогрессии, как легко показать, сам является областью прогрессии. Это кардинальное число является наименьшим из всех бесконечных кардинальных чисел, и Кантор дал ему имя буквы еврейского алфавита — Алеф с индексом 0, для того чтобы отличить его от бо́льших кардинальных чисел, имеющих другие индексы. Таким образом, имя наименьшего бесконечного кардинального числа есть $\aleph_0$.

Сказать, что класс имеет $\aleph_0$ терминов, — это то же самое, что сказать, что он есть член $\aleph_0$, а это то же самое, что сказать, что члены класса могут быть построены в прогрессию. Ясно, что любая прогрессия остается прогрессией, если мы опустим из нее конечное число терминов, или каждый второй термин, или все термины, за исключением каждого десятого или даже сотого термина. Эти методы прореживания прогрессии не приводят к ее исчезновению и, следовательно, не уменьшают числа ее членов, которое остается равным $\aleph_0$. На самом деле любая выборка из прогрессии есть прогрессия, если она не имеет последнего термина, как бы редко не были расположены термины. Рассмотрим (скажем) индуктивные числа вида n^n или n^{n^n}. Такие числа очень редки, и все же их имеется столько же, сколько имеется индуктивных чисел всего, а именно $\aleph_0$.

Обратно, мы может добавлять термины к индуктивным числам без увеличения их числа. Возьмем, например, дроби. Можно было бы подумать, что должно быть больше дробей, чем целых чисел, так как дроби, чей знаменатель 1, соответствуют целым числам, которые кажутся бесконечно малой частью дробей. Но на самом деле число дробей точно такое же, как число индуктивных чисел, а именно $\aleph_0$. Это легко видно, если построить дроби в ряд по следующему плану: если сумма числителя и знаменателя в одной дроби меньше, чем в другой, надо поставить первую перед второй; если суммы равны, вперед надо поставить дробь с меньшим числителем. Это дает нам ряд:

$$1,\ 1/2,\ 2,\ 1/3,\ 3,\ 1/4,\ 2/3,\ 3/2,\ 4,\ 1/5,\ \ldots$$

Этот ряд есть прогрессия, и все дроби рано или поздно встретятся в ней. Отсюда мы можем построить дроби в прогрессию, и их число, следовательно, есть $\aleph_0$.

Неверно, однако, что *все бесконечные* совокупности имеют $\aleph_0$ терминов. Число действительных чисел, например, больше, чем $\aleph_0$, на самом деле оно равно $2^{\aleph_0}$, и нетрудно доказать, что 2^n больше n даже тогда, когда n бесконечно. Самый легкий способ доказать это состоит в доказательстве, во-первых, того, что если класс имеет n членов, он содержит 2^n подклассов, — другими словами, имеется 2^n способов выбора некоторых его членов (включая предельные случаи, когда мы выбираем все или ничего); и, во-вторых, что число подклассов, содержащихся в классе, всегда больше, чем число членов этого класса. Из двух предложений первое знакомо по конечным числам, и нетрудно распространить его на бесконечные числа. Доказательство второго столь просто и поучительно, что я приведу его:

Во-первых, ясно, что число подклассов данного класса (скажем, α) по крайней мере столь же велико, как число членов, так как каждый член составляет подкласс, и мы, таким образом, имеем соответствие всех членов с некоторыми подклассами. Отсюда следует, что число подклассов не *равно* числу его членов, оно должно быть *больше.* Легко доказать, что число все-таки не равно. Для этого нужно показать, что если дано одно-однозначное отношение, чья область состоит из членов, а обратная область содержится среди множества подклассов, должен быть, по крайней мере, один подкласс, не принадлежащий обратной области. Доказательство таково[1]. Когда установлено одно-однозначное соответствие R между всеми членами и некоторыми подклассами, может случиться, что данный член x соответствует подклассу, членом которого он является; или же может случиться, что x соответствует подклассу, членом которого он не является. Давайте образуем целый класс, скажем β, из тех членов x, которые соответствуют подклассам, членами которых они не являются. Это будет подкласс класса α, и он не находится в соответствии ни с одним членом α. Действительно, рассмотрим сначала члены β, каждый из них соответствует (по определению β) некоторому подклассу, членом которого он не является и, следовательно, не находится в соответствии с β. Берем теперь термины, которые не являются членами β , каждый из которых (по определению β) находится в соответствии с некоторым подклассом, членом которого он является, и следовательно, опять-таки не находится в соответствии с β. Таким образом, ни один член α не находится в соответствии с β. Так как R было любым одно-однозначным соответствием всех членов с некоторыми подклассами, отсюда следует, что нет соответствия всех членов со всеми подклассами. Для доказательства неважно, что β может не иметь членов: все, что будет в этом случае, сводится к демонстрации того, что опускаемый подкласс есть нуль-класс. Отсюда, в любом случае число подклассов не равно числу членов и, следовательно, согласно тому, что было сказано ранее, оно больше. Соединяя этот результат с предложением, что если n есть число членов, 2^n есть число подклассов, мы имеем теорему, что 2^n всегда больше, чем n, даже когда n бесконечно.

Из этого предложения следует, что среди кардинальных чисел нет наибольшего. Как бы ни было велико кардинальное число n, число 2^n будет всегда больше. Арифметика кардинальных чисел весьма непривычна до тех пор, пока к ней не привыкнешь. Например,

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + n = \aleph_0,$$

где n есть любое кардинальное число,

$$\aleph_0^2 = \aleph_0$$

(Это следует из случая для рациональных чисел, так как рациональное число определяется парой индуктивных чисел, и легко видеть, что чис-

[1] Это доказательство заимствовано у Кантора с некоторыми упрощениями. См.: *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereiningung*, i., (1892), S. 27.

ло рациональных чисел есть квадрат числа индуктивных чисел, то есть равно $\aleph_0^2$; но мы видели, что оно равно опять-таки $\aleph_0$.)

$$\aleph_0^n = \aleph_0,$$

где n есть любое кардинальное число. (Это следует из $\aleph_0^2 = \aleph_0$ по индукции; ведь если $\aleph_0^n = \aleph_0$, тогда $\aleph_0^{n+1} = \aleph_0^2 = \aleph_0$.) Но $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

На самом деле, как мы увидим позднее, $2^{\aleph_0}$ очень важное число, а именно число терминов в ряду, являющемся «непрерывным» в том смысле, в котором использовал его Кантор. Предполагая в этом смысле слова непрерывными пространство и время (как мы это делаем обычно в кинематике и аналитической геометрии), это будет число точек в пространстве или моментов времени; это будет также число точек в некоторой конечной области пространства, линейной, поверхностной или объемной. После $\aleph_0$ $2^{\aleph_0}$ является наиболее важным и интересным из бесконечных кардинальных чисел.

Хотя сложение и умножение среди кардинальных чисел возможны всегда, вычитание и деление больше не дают определенных результатов и не могут быть использованы таким же образом, каким они используются в элементарной арифметике. Возьмем для начала вычитание: пока вычитаемые числа конечны, все идет хорошо; и если другое число рефлективно, все остается неизменным. Таким образом, $\aleph_0 - n = \aleph_0$, если n конечно, и здесь вычитание дает совершенно определенный результат. Но если мы вычитаем $\aleph_0$ из самого себя, мы можем получить любой результат, от 0 до $\aleph_0$. Это легко видно из примеров. Если из индуктивных чисел вычитаются следующие совокупности $\aleph_0$ терминов, то получаются следующие результаты:

1. Все индуктивные числа — остаток нуль.

2. Все индуктивные числа, начиная с n и далее, — остаток числа от 0 до $n - 1$, нумеруя в общей сложности n терминов.

3. Все нечетные числа — остаток все четные числа, нумеруя в общей сложности $\aleph_0$ терминов.

Все это различные способы вычитания $\aleph_0$ из $\aleph_0$, и все они дают различные результаты.

Что касается деления, весьма похожие результаты следуют из того факта, что $\aleph_0$ остается неизменным, даже в случае умножения на 2 или 3 или любое конечное число n или $\aleph_0$. Отсюда следует, что $\aleph_0$, деленное на $\aleph_0$, может иметь значение от 1 до $\aleph_0$.

Из неоднозначности вычитания и деления следует, что отрицательные числа и рациональные числа не могут быть распространены на бесконечные числа. Сложение, умножение и возведение в степень идут вполне нормально, но обратные операции — вычитание, деление и извлечение корня дают неопределенные результаты, и понятия, которые опираются на них, не работают, когда речь идет о бесконечных числах.

Конечность определялась нами через математическую индукцию, то есть мы определяли число как конечное, когда оно подчинялось математической индукции, начиная с 0, и класс как конечный, когда его число является конечным. Это определение дает результат, которого и следовало ожидать от определения, а именно что конечными числами являются такие числа, которые встречаются в обычном числовом ряду 0, 1, 2, 3, ... Но в настоящей главе бесконечные числа, обсуждаемые нами, не просто не являются неиндуктивными: они также являются *рефлективными.* Кантор использовал рефлективность как *определение* бесконечности и верил, что оно эквивалентно не-индуктивности. То есть он верил, что каждый класс или каждое кардинальное число является либо индуктивным, либо рефлективным. Это может быть истиной, и вполне возможно, что это удастся доказать, но до сих пор предложенные Кантором и другими доказательства (включая автора этой книги некоторое время тому назад) являются ложными по причинам, которые будут понятны, когда мы придем к рассмотрению «аксиомы мультипликативности». А в настоящее время неизвестно, имеются ли классы и кардинальные числа, не являющиеся ни индуктивными, ни рефлективными. Если бы n было таким кардинальным числом, мы не имели бы $n = n + 1$, а n не было бы одним из «натуральных чисел» и не имело бы некоторых индуктивных свойств. Все *известные* бесконечные классы и кардинальные числа являются рефлективными, но пока следует считать, что вопрос о том, существуют ли, до сих пор неизвестные, примеры кардинальных чисел и классов, не являющихся ни рефлективными, ни индуктивными, является открытым. В этой ситуации мы примем следующие определения.

Конечный класс или конечное кардинальное число есть *индуктивный* класс или кардинальное число.

Бесконечный класс или кардинальное число есть такой класс, который *не является индуктивным.*

Все *рефлективные* классы и кардинальные числа бесконечны; но до сих пор неизвестно, являются ли все бесконечные классы и кардинальные числа рефлективными. Мы вернемся к этой теме в главе XII.

Глава IX
БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ И ОРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Бесконечные ряды могут быть определены как ряды, поле которых есть бесконечный класс. Мы уже рассматривали один вид бесконечных рядов, а именно прогрессии. В этой главе мы рассмотрим этот предмет более общим образом.

Наиболее примечательной характеристикой бесконечных рядов является то, что их порядковое число может изменяться просто переупорядочением их терминов. В этом отношении имеется определенная противоположность между кардинальными и ординальными числами.

Вполне возможно сохранять кардинальное число рефлективного класса неизменным, несмотря на добавление к нему терминов. С другой стороны, вполне можно изменять порядковое число ряда без добавления или убавления из него терминов, простым переупорядочением. В то же время, в случае некоторого бесконечного ряда возможно также, как и в случае кардинальных чисел, добавлять к ряду термины без изменения его порядкового числа: все зависит от способа, которым они добавляются.

Для того чтобы сделать дело яснее, лучше начать с примеров. Давайте сначала рассмотрим различные виды рядов, которые могут быть образованы из индуктивных чисел, упорядоченных согласно различным планам. Мы начинаем с ряда

$$1, 2, 3, 4, \dots n, \dots,$$

который, как мы видели уже, представляет наименьшее бесконечное порядковое число, которое Кантор назвал ω. Давайте утончим этот ряд за счет постоянного выполнения операции изымания первого четного числа и сдвига его к концу ряда. Мы получим последовательность различных рядов:

$$1, 3, 4, 5, \dots n, \dots 2$$

$$1, 3, 5, 6, \dots n + 1, \dots 2, 4$$

$$1, 3, 5, 7, \dots n + 2, \dots 2, 4, 6$$

и так далее. Если мы вообразим этот процесс идущим как угодно долго, мы наконец достигнем при этом ряда

$$1, 3, 5, 7, \dots 2n + 1, \dots 2, 4, 6, 8, \dots 2n, \dots,$$

в котором мы имеем сначала все нечетные числа, а затем четные.

Порядковые числа этих различных рядов $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... 2ω. Каждое из этих чисел «больше», чем любой из его предшественников, в следующем смысле:

Одно порядковое число «больше» другого, если некоторый ряд, имеющий первое число, содержит часть, имеющую второе число, и нет ряда, имеющего второе число, который содержал бы часть, имеющую первое число.

Если мы сравним два ряда

$$1, 2, 3, 4, \dots n, \dots$$

$$1, 3, 4, 5, \dots n + 1, \dots 2,$$

мы видим, что первый из них подобен части второго, если опустить его последний термин, а именно число 2, но второй ряд не подобен ни одной части первого. (Это ясно, да и легко показываемо.) Таким образом, второй ряд имеет большее порядковое число по сравнению с первым, в полном соответствии с определением, то есть $\omega + 1$ больше ω. Но если мы добавим термин к началу прогрессии, а не к концу, мы все еще будем иметь прогрессию. Таким образом, $1 + \omega = \omega$. Таким образом, $1 + \omega$ не равно $\omega + 1$. Это характерно для реляционной арифметики вообще: если μ и ν два реляционных числа, общее правило гласит, что $\mu + \nu$ не равно $\nu + \mu$. Случай конечных ординальных чисел, в котором такое равенство справедливо, является полным исключением.

Ряд, только что нами построенный, состоит сначала из всех нечетных чисел, а затем четных, и его порядковое число 2ω. Это число больше, чем ω или $\omega + n$, где n конечно. Следует заметить, что в соответствии с общим определением порядка каждое из этих упорядочений целых чисел должно рассматриваться как результат некоторого определенного отношения. Например, упорядочение, по которому 2 сдвигается на конец ряда, будет определено следующим отношением: «x и y являются конечными целыми числами, и либо y есть 2 и x не есть 2, либо ни x, ни y не есть 2, и x меньше y». Упорядочение, которое помещает впереди все нечетные числа, а затем все четные числа, будет определено следующим отношением: «x и y есть конечные целые числа, и либо x есть нечетно и y четно, либо x меньше y и оба четны, либо оба нечетны». Мы не будем затруднять себя в будущем подобными определениями, но существенным является сам факт, что они *могут* быть даны.

Число, которое мы называем 2ω , а именно число ряда, состоящего из двух прогрессий, иногда называется $\omega \cdot 2$. Умножение, подобно сложению, зависит от порядка сомножителей: прогрессия пар дает такой ряд как

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots x_n, y_n, \ldots,$$

который сам есть прогрессия; но пара прогрессий дает ряд, который в два раза больше прогрессии. Следовательно, необходимо различать 2ω и $\omega \cdot 2$. Мы будем использовать 2ω для пар прогрессий и $\omega \cdot 2$ для прогрессий пар, и такое использование обозначений управляет нашей общей интерпретацией «$\alpha \cdot \beta$» , когда 2ω и $\omega \cdot 2$ реляционные числа: «$\alpha \cdot \beta$» будет обозначать подходяще сконструированную сумму α отношений, каждое из которых имеет β терминов.

Мы можем неопределенно долго продолжать утончение ряда индуктивных чисел. Например, мы можем сначала поместить нечетные числа, затем удвоенные такие числа, затем и их удвоение и так далее. Мы, таким образом, получим ряд

$$1, 3, 5, 7, \ldots; \quad 2, 6, 10, 14, \ldots; \quad 4, 12, 20, 28, \ldots; \quad 8, 24, 40, 56, \ldots,$$

число которого есть ω^2, так как это прогрессия прогрессий. Любая одна из прогрессий этого ряда может быть, конечно, утончена так же, как мы утончили нашу исходную прогрессию. Мы можем переходить к ω^3, ω^4, ... ω^ω и так далее; однако, как бы далеко мы ни ушли, всегда можно уйти дальше.

Ряд всех ординальных чисел, которые могут быть получены таким путем, то есть все, что может быть получено утончением прогрессии, сам по себе больше, чем любой ряд, который может быть получен переупорядочением терминов прогрессий. (Это нетрудно доказать.) Кардинальное число класса таких ординальных чисел, как может быть показано, больше $\aleph_0$; это число, которое Кантор назвал $\aleph_1$. Ординальное число ряда всех ординальных чисел, которые могут быть получены из $\aleph_0$ взятых в порядке величины, называется ω_1. Таким образом, ряд с ординальным числом ω_1 имеет поле с кардинальным числом $\aleph_1$.

Мы можем перейти от ω_1 и $\aleph_1$ к ω_2 и $\aleph_2$ процессом, в точности аналогичным тому, который использовался при переходе от ω и $\aleph_0$ к ω_1 и $\aleph_1$. И нет ничего, что бы воспрепятствовало переходу ко все более новым кардинальным и ординальным числам. Не является известным то, равно ли $2^{\aleph_0}$ любому из кардинальных чисел в ряду алефов. Неизвестно даже, сравнимы ли они по величине. Все, что мы знаем, это то, что они могут быть ни равны, ни больше и ни меньше друг друга. Этот вопрос связан с мультипликативной аксиомой, к которой мы обратимся позже.

Все ряды, которые рассматривались нами в этой главе, были тем, что называется «вполне-упорядоченными». Вполне-упорядоченный ряд это такой ряд, который имеет начало и последующие термины, и имеет *следующий* термин после любой выборки его терминов при условии, что имеются термины после выборки. Это исключает, с одной стороны, компактные ряды, в которых имеются термины между любыми двумя терминами, а с другой стороны, ряды, у которых нет начала. Ряд отрицательных чисел в порядке величины, не имеющий начала, но кончающийся –1, не является вполне-упорядоченным. Но взятый в обратном порядке, начинаясь с –1, он является вполне-упорядоченным, будучи на самом деле прогрессией. Определение таково:

Вполне-упорядоченный ряд есть такой ряд, в котором каждый подкласс (за исключением, конечно, нуль-класса) имеет первый термин.

«Ординальное» число означает реляционное число вполне-упорядоченного ряда. Оно, таким образом, специфицирует порядковое число.

Среди вполне-упорядоченных рядов применима обобщенная форма математической индукции. Свойство называется «трансфинитно наследственным», если, когда оно принадлежит определенной выборке терминов из ряда, оно принадлежит их непосредственно последующему элементу, при условии, что они имеют таковой. Во вполне-упорядоченных рядах свойство трансфинитной наследственности, принадлежащее первому термину ряда, принадлежит всему ряду. Это позволяет доказать много предложений, касающихся вполне-упорядоченных рядов, все из которых истинны о всех рядах.

Легко построить индуктивные числа в ряд, который не является вполне-упорядоченным, и даже построить их в компактный ряд.

Например, мы можем принять следующий план: рассмотрим десятичные дроби от 0,1 (включительно) до 1 (не включая ее) в порядке величины. Они образуют компактный ряд; между любыми двумя может всегда находиться бесконечное число других. Теперь опустим запятую в начале каждой дроби, и мы будем иметь компактный ряд, состоящий из всех конечных целых чисел, за исключением таких, которые делятся на 10. Если мы пожелаем включить и эти последние, это сделать нетрудно; вместо того, чтобы начать с 0,1, включим все десятичные дроби, меньшие 1, но когда мы устраняем запятую, мы переносим вправо любой 0, который встречается в начале нашей дроби. После этого мы можем установить правило упорядочения наших целых чисел следующим образом: из двух целых чисел, которые не начинаются с одной и той же цифры, то, которое начинается с меньшей цифры, ставится первым. Из двух чисел, которые начинаются с одинаковых цифр, но различаются во второй цифре, число, которое имеет меньшую вторую цифру, ставится первым, но перед ним будет число вообще без второй цифры, и так далее. Вообще, если два целых числа совпадают в первых n цифрах, но не сходятся в $(n + 1)$-й, первым ставится то, которое не имеет $(n + 1)$-й цифры, или же она у него наименьшая по сравнению с остальными. Это правило упорядочения, как читатель может легко убедиться, приводит к компактному ряду, содержащему все целые числа, не делящиеся на 10, и, как мы видели, нетрудно включить и эти последние. Из этого примера следует, что возможно конструировать компактные ряды, имеющие $\aleph_0$ терминов. На самом деле, мы уже видели, что имеется $\aleph_0$ рациональных чисел, а рациональные числа в порядке величины образуют компактный ряд. Это, стало быть, другой пример. Мы вернемся к этой теме в следующей главе.

Все обычные законы сложения, умножения и возведения в степень справедливы для трансфинитных кардинальных чисел, но только некоторые из них справедливы для трансфинитных ординальных чисел, и они также справедливы для всех реляционных чисел. Под обычными формальными законами мы имеем в виду следующее:

I. Коммутативный закон:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{и} \quad \alpha \times \beta = \beta \times \alpha.$$

II. Ассоциативный закон:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \text{и} \quad (\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma).$$

III. Дистрибутивный закон:

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Когда не выполняется коммутативный закон, приведенная выше форма дистрибутивного закона должна отличаться от

$$(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha.$$

Как мы скоро убедимся, одна форма может быть истинной, а другая ложной.

IV. Экспоненциальный закон:

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}, \quad \alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma} = (\alpha\beta)^{\gamma}, \quad (\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}.$$

Все эти законы справедливы для кардинальных чисел, конечных или бесконечных, и для всех *конечных* ординальных чисел. Но когда мы переходим к бесконечным ординальным числам или к реляционным числам вообще, некоторые законы остаются справедливыми, а некоторые нет. Коммутативный закон оказывается несправедливым; ассоциативный закон остается; дистрибутивный закон (принимая конвенцию, которую мы привели выше о порядке сомножителей) справедлив в форме

$$(\beta + \gamma)\ \alpha = \beta\text{a} + \gamma\alpha,$$

но не в форме

$$\alpha\ (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Экспоненциальные законы

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma} \quad \text{и} \quad (\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$$

все еще справедливы, но закон

$$\alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma} = (\alpha\beta)^{\gamma},$$

явно связанный с коммутативным законом для умножения, несправедлив.

Определения умножения и возведения в степень, предполагаемые в указанных выше утверждениях, весьма сложны. Читатель, желающий узнать, каковы они и как они доказываются, должен смотреть второй том *Principia Mathematica*, *172–176.

Ординальная трансфинитная арифметика была развита Кантором раньше, чем кардинальная трансфинитная арифметика, из-за полезных технических применений первой в математике. Но с точки зрения философии математики она является менее важной и менее фундаментальной, чем теория трансфинитных кардинальных чисел. Кардинальные числа существенно проще, чем ординальные числа, и любопытным историческим курьезом является то, что они появились позднее как абстракция из ординальных чисел и только по ходу времени стали изучаться сами по себе. Это не относится к работе Фреге, в которой кардинальные числа, конечные и трансфинитные, трактовались совершенно независимо от ординальных чисел. Но именно работа Кантора заставила мир осознать предмет, в то время как работа Фреге оставалась неизвестной, вероятно, главным образом из-за трудностей его символизма. А математики, подобно другим людям, также испытывают больше затруднений в понимании и использовании обозначений, которые сравнительно «просты» в логическом смысле, нежели в манипулировании более сложными обозначениями, которые более близки их повседневной практике. По этой причине истинная важность кардинальных чисел в философии математики была признана только через некоторое время. Важность ординальных чисел, никоим образом сама по себе не малая, все-таки уступает важности кардинальных чисел и определяется, по большей части, важностью более общей концепции реляционных чисел.

Глава X
ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Важность концепции предела в математике гораздо больше, чем обычно думают. Дифференциальное и интегральное исчисление, практически вся высшая математика зависят от понятия предела. Сперва полагали, что в основании этих предметов лежит понятие бесконечно малых, но Вейерштрасс показал ошибочность этой точки зрения: всякий раз, когда считали, что в рассуждение входят бесконечно-малые, оказывалось, что на самом деле речь идет о множестве конечных величин, имеющих нуль в нижнем пределе. Привычно было считать, что «предел» является существенно количественным понятием, а именно понятием количества, к которому другие приближаются все больше и больше, так что среди этих других количеств должны быть такие, которые отличаются от него меньше, чем любая наперед заданная величина. Но на самом деле понятие «предела» является чисто порядковым понятием, вообще не включающим понятие количества (за исключением случав, когда ряды оказываются количественными). Заданная точка на прямой может быть пределом множества точек на прямой, и при этом необязательно введение координат, измерений или каких-либо количеств. Кардинальное число $\aleph_0$ является пределом (в порядке величины) кардинальных чисел 1, 2, 3, ... *n*, ..., хотя численное различие между $\aleph_0$ и конечным кардинальным числом является постоянным и бесконечным: с количественной точки зрения, конечные числа по мере своего роста не подходят ближе к $\aleph_0$. Что делает $\aleph_0$ пределом конечных чисел? Дело в том, что в ряду он стоит за ними, что является *порядковым* фактом, а не количественным.

Есть различные формы понятия «предела», все более увеличивающиеся по сложности. Простейшая и наиболее фундаментальная форма, от которой все остальные берут начало, была уже определена нами, но мы повторим здесь определения, которые ведут к ней, но в общем виде, так, чтобы они не требовали порядкового характера соответствующего отношения. Определения таковы:

«Минимум» класса α в связи с отношением P есть те члены α и поля P (если есть таковые), к которым ни один член α не имеет отношения P.

«Максимум» в связи с P есть минимум в связи с обратным P.

«Секвенция» класса α в связи с отношением P есть минимум «последующих элементов» α, а «последующие элементы» α есть те члены поля P, к которому каждый член общей части α и поля P имеет отношение P.

«Прецеденты» в связи с P есть секвенции в связи с обратным P.

«Верхние пределы» в связи с P есть секвенции, при условии, что α не имеет максимума; если α имеет максимум, он не имеет верхних пределов.

«Нижние пределы» в связи с P есть верхние пределы в связи с обратным P.

Всякий раз, когда P связно, класс имеет самое большее один максимум, один минимум, одну секвенцию и т. д. Таким образом, на практике мы имеем дело, как говорят, с «(единственным) пределом» (если таковой имеется вообще).

Когда P является отношением порядка, мы можем значительно упростить приведенное выше определение предела. Мы можем, в этом случае, определить сначала «границу» класса α, то есть его пределы или максимум, и тогда перейти к различению случаев, где граница есть предел и есть максимум. Для этой цели самое лучшее это использовать понятие «сегмента».

Мы будем говорить о «сегменте P, определенном классом α» как о всех тех терминах, которые имеют отношение P к некоторым, одному или больше, членам α. Это и будет сегментом в смысле, определенном в главе VII; в самом деле, каждый сегмент, определенный в приведенном здесь смысле, определяется *некоторым* классом α. Если P порядковое отношение, сегмент, определенный через α, состоит из всех терминов, которые предшествуют терминам α. Если α имеет максимум, сегментом будут все предшественники максимума. Но если α не имеет максимума, каждый член предшествует некоторому другому члену α, и весь α, следовательно, включен в сегмент, определенный через α. Возьмем, например, класс, состоящий из дробей

$$1/2,\ 3/4,\ 7/8,\ 15/16,\ \ldots,$$

то есть все дроби формы $1 - 1/2^n$ для различных конечных значений n. Этот ряд дробей не имеет максимума, и ясно, что сегмент, который он определяет (в целом ряду дробей в порядке величины), есть класс всех собственных дробей. Или же рассмотрим простые числа, рассматриваемые как выборки из кардинальных чисел (конечных или бесконечных) в порядке величины. В этом случае определяемый сегмент состоит из всех конечных целых чисел.

Предполагая, что P является порядковым отношением, «граница» класса α есть термин x (если он существует), чьи предшественники есть сегмент, определенный через α.

«Максимум» α есть граница, которая является членом α.

«Верхний предел» α есть граница, не являющаяся членом α.

Если класс не имеет границы, он не имеет ни максимума, ни предела. Это тот самый случай «иррационального» сечения Дедекинда или то, что называется «пробелом».

Таким образом, «верхний предел» множества терминов α по отношению к ряду P есть такой термин x (если он существует), который приходит после всех терминов из α, но такой, что каждый более ранний термин приходит перед некоторыми из терминов из α.

Мы можем определить все «*верхние предельные точки*» множества терминов β как все те точки, которые являются верхними пределами множества терминов, выбранных из β. Мы должны, конечно, различать верхние предельные точки и нижние предельные точки. Если мы рассмотрим, например, ряд ординальных чисел:

$$1, 2, 3, \ldots \omega, \omega + 1, \ldots 2\omega, 2\omega + 1, \ldots 3\omega, \ldots \omega^2, \ldots \omega^3, \ldots$$

то верхними предельными точками поля этого ряда будут те, которые не имеют непосредственных предшественников, а именно

$$1, \omega, 2\omega, 3\omega, \ldots \omega^2, \omega^2 + \omega, \ldots 2\omega^2, \ldots\omega^3, \ldots$$

Верхними предельными точками поля этого нового ряда будут

$$1, \omega^2, 2\omega^2, \ldots \omega^3, \ldots \omega^3 + \omega^2 \ldots$$

С другой стороны, ряд ординальных чисел — на самом деле каждый вполне упорядоченный ряд — не имеет никаких предельных точек, потому что не имеется терминов, за исключением последнего, которые не имеют непосредственных последующих элементов. Но если мы рассмотрим такой ряд, как ряд дробей, каждый член этого ряда есть в одно и то же время и верхняя и нижняя предельная точка для подходяще выбранных множеств. Если мы рассмотрим ряд действительных чисел и выберем из него рациональные действительные числа, это множество рациональных чисел будет иметь все действительные числа как верхние и нижние предельные точки. Предельные точки множества называются его «первыми производными», а предельные точки первых производных называются вторыми производными, и так далее.

Имея в виду пределы, мы можем различить несколько степеней того, что может быть названо «непрерывностью» в ряду. Слово «непрерывность» используется очень давно, но оставалось без точного определения вплоть до времени Дедекинда и Кантора. Оба эти человека придали этому термину точное значение, но определение Кантора у́же, чем определение Дедекинда: ряд, непрерывный по Кантору, должен быть непрерывным по Дедекинду, но не наоборот.

Первое определение, которое приходит в голову человеку, пытающемуся придать точное значение непрерывности ряда, состоит в том, что мы назвали «компактностью», то есть в том, что между двумя любыми терминами ряда имеются другие термины. Но это было бы неадекватным определением, потому что существуют «пробелы» в рядах, таких как, например, ряд рациональных чисел. Мы видели в главе VII, что имеется бесчисленное количество способов, которыми ряд рациональных чисел может быть разделен на две части, из которых одна предшествует другой, и в первой нет последнего термина, а вторая не имеет первого термина. Такое положение дел как будто противоречит неясному чувству, которое есть у нас по поводу того, как охарактеризовать «непрерывность», и больше того, оно показывает, что ряд рациональных чисел это не тот ряд, который нужен для многих математических целей. Рассмотрим, например, геометрию: мы хотели бы быть способны утверждать, что при пересечении двух прямых они имеют общую точку, но если ряд точек на прямой был бы подобен ряду рациональных чисел, две прямых могли бы пересечься в «пробеле» и не иметь общей точки. Это грубый пример, но можно привести и другие, которые могут показать, что компактность является неадекватной как математическое определение непрерывности.

Именно потребности геометрии, как, впрочем, и много чего другого, привели к определению «дедекиндовской» непрерывности. Нужно вспомнить, что мы определили ряд как дедекиндовский, когда каждый подкласс поля имеет границу. (Достаточно предположить, что всегда имеется *верхняя* граница или что всегда имеется *нижняя* граница. Если предположена одна из них, то вторая может быть выведена.) То есть ряд является дедекиндовским, когда в нем нет пробелов. Отсутствие пробелов может быть за счет либо терминов, имеющих последующие элементы, либо за счет существования пределов в отсутствие максимума. Таким образом, конечный ряд или вполне упорядоченный ряд являются дедекиндовскими; таким же является и ряд действительных чисел. Первый вид дедекиндовского ряда исключается нашим предположением о том, что ряд должен быть компактным; в этом случае наш ряд должен иметь свойство, которое для многих целей может быть названо непрерывностью. Таким образом, мы приходим к определению:

Ряд имеет «дедекиндовскую непрерывность», когда он является дедекиндовским и компактным.

Но это определение является слишком широким, чтобы быть полезным для многих целей. Предположим, например, что мы хотим быть способны приписывать такие свойства геометрическому пространству, при которых каждая его точка могла бы быть специфицирована координатами, являющимися действительными числами: но это не будет гарантироваться одной только дедекиндовской непрерывностью. Нам нужна гарантия, что каждая точка, которая не может быть специфицирована *рациональными* координатами, может быть специфицирована как предел *прогрессии* точек, чьи координаты являются рациональными, а это последнее свойство наше определение не способно обеспечить.

Мы, таким образом, подошли к более тщательному исследованию ряда в связи с пределами. Это исследование было проделано Кантором, и оно было положено в основу его определения непрерывности, хотя в его простейшей форме это определение скрывает как раз те рассмотрения, которые привели к нему. Мы поэтому сначала ознакомимся с некоторыми концепциями Кантора по данной теме перед тем, как дать его определение непрерывности.

Кантор определяет ряд как «совершенный», когда все его точки являются предельными точками и все предельные точки принадлежат ему. Но это определение не выражает вполне точно, что он имел в виду. Не требуется никаких поправок, пока речь идет о свойстве, что все его точки являются предельными точками; это свойство принадлежит компактным рядам, и никаким другим, если все точки должны быть верхними предельными или нижними предельными точками. Но если только предположено, что они должны быть предельными точками одного рода, без спецификации того, какого именно, будут иметься и другие ряды, которые имеют это свойство — например, ряд десятичного разложения, в котором берется конечная цифра, ей ставится в соответствие повторяющиеся 9 в периоде, и эта периодическая последовательность помещается непосредственно перед цифрой. Такой ряд будет почти компактным, но он имеет исключения, представленные терминами в последовательности, первый из которых не имеет непосредственного предшественника, а второй не имеет непосредственного последующего элемента. За исключением такого ряда, ряд, в котором каждая точка является предельной точкой, есть компактный ряд, и это справедливо даже без спецификации того, является ли каждая точка верхней предельной (или нижней предельной).

Хотя Кантор не очень тщательно рассматривал этот вопрос, мы должны различать виды предельных точек в соответствии с природой наименьших субординарных рядов, которыми они могут быть определены: Кантор предполагал, что они должны быть определены прогрессиями или же регрессиями (которые являются обратными для прогрессий). Когда каждый член нашего ряда есть предел прогрессии или регрессии, Кантор называет наш ряд «конденсированным в себе».

Мы сейчас переходим ко второму свойству, с помощью которого был определен совершенный ряд, а именно, свойству, которое Кантор называл «замкнутостью».

Оно, как мы видели, сначала было определено посредством того факта, что все предельные точки ряда принадлежат ему. Но это имеет существенное значение только в том случае, если наш ряд *задан* как содержащийся в некоторых других бóльших по сравнению с ним рядах (как это имеет место, например, при выборке действительных чисел), и предельные точки берутся относительного большего ряда. В противном случае, если ряд рассматривается сам по себе, он не может не содержать свои предельные точки. Но Кантор *имел в виду* не совсем то, что говорил; в самом деле, в других случаях он говорит совсем другое, то, что он и имеет в виду. А имеет в виду он то, что каждый субординатный ряд, от которого можно ожидать наличие у него предела, имеет-таки предел в данном ряду; то есть каждый субординатный ряд, не имеющий максимума, имеет предел, то есть каждый субординатный ряд имеет границу. Но Кантор не устанавливает это для *каждого* субординатного ряда, а только для прогрессий и регрессий. (Неясно, насколько он осознает это ограничение.) Таким образом, наконец мы приходим к определению, которого и хотели:

Ряд называется «замкнутым», когда каждая прогрессия или регрессия, содержащаяся в ряду, имеет предел в этом ряду.

Затем мы имеем следующее определение:

Ряд является «совершенным», когда он *конденсирован в себе* и *замкнут*, то есть когда каждый термин есть предел прогрессии или регрессии и каждая прогрессия или регрессия, содержащаяся в ряду, имеет в нем предел.

В поисках определения непрерывности Кантор преследовал цель найти такое определение, которое будет прилагаться к ряду действительных чисел и к любому ему подобному ряду, но не к другим рядам. Для этой цели мы должны добавить дополнительное свойство. Среди действительных чисел некоторые являются рациональными и некоторые — иррациональными. Хотя иррациональных чисел больше, нежели рациональных, все же между двумя действительными числами, как бы мало они ни отличались, имеются рациональные числа. Число рациональных чисел, как мы видели, равно $\aleph_0$. Это дает дальнейшее свойство, достаточное для того, чтобы мы имели полную характеристику непрерывности. Оно сводится к тому, что класс с $\aleph_0$ членами содержит их таким образом, что некоторые члены этого класса находятся между двумя произвольными членами, или терминами нашего ряда, как бы близки они ни были. Это свойство, добавленное к совершенству, достаточно для определения класса рядов, которые подобны друг другу и на самом деле являются порядковым числом. Этот класс Кантор определяет как непрерывный ряд.

Мы можем слегка упростить его определение. Для начала мы скажем:

«Медианным классом» ряда является подкласс поля такой, что его члены должны находиться между любых двух членов, или терминов ряда.

Таким образом, рациональные числа являются медианным классом ряда действительных чисел. Ясно, что не может быть медианных классов, кроме как в компактных рядах.

Теперь мы обнаруживаем, что определение Кантора эквивалентно следующему определению:

Ряд является «непрерывным» в том случае, если он (1) является дедекиндовским, (2) содержит медианный класс, имеющий $\aleph_0$ терминов.

Во избежание путаницы мы будем говорить в таких случаях о «канторовской непрерывности». Можно увидеть, что она влечет дедекиндовскую непрерывность, но не наоборот. Все ряды, имеющие канторовскую непрерывность, подобны, что неверно по отношению к рядам, имеющим дедекиндовскую непрерывность.

Понятия *предела* и *непрерывности*, которые мы сейчас определяем, не должны путаться с понятиями предела функции при приближении к заданному аргументу, или непрерывности функции в окрестности заданного аргумента. Последние являются совсем другими понятиями, важными в высшей степени, но выводимыми из первых и более сложными. Непрерывность движения (если оно является непрерывным) есть пример непрерывности функции; с другой стороны, непрерывность пространства и времени (если они непрерывны) является примером непрерывности ряда, или, если выразиться более осторожно, есть вид непрерывности, которая может, при достаточной математической сноровке, быть сведена к непрерывности ряда. Имея в виду фундаментальную важность понятия движения в прикладной математике, да и по другим причинам, было бы неплохо рассмотреть понятия предела и непрерывности в применении к функциям; но это обсуждение лучше сделать в отдельной главе.

Определение непрерывности, которое мы сейчас обсуждаем, а именно непрерывность Дедекинда и Кантора, не очень-то напоминает расплывчатую идею, связанную с этим словом в умах философа и обычного человека. Они полагают, что непрерывность прежде всего есть отсутствие отдельности, стирание различий, характерное для плотного тумана. Туман дает впечатление расплывчатости без множественности или разделения. Такого рода вещи метафизики называют «непрерывностью», совершенно верно при этом замечая, что такое понимание характерно для ума метафизика, детей и животных.

Общая идея, расплывчато очерченная словом «непрерывность», если ее использовать подобным образом, или же словом «поток», явно отлична от той, которую мы определяли. Возьмем, например, ряд действительных чисел. Каждое является тем, чем оно есть, совершенно определенно и бескомпромиссно. Число не переходит через неощутимые изменения в другое число; это твердая, отдельная сущность, и ее расстояние от другой подобной сущности конечно, хотя оно может быть сделано меньше любого наперед заданного количества. Вопрос о соотношении между непрерывностью действительных чисел и видимой непрерывностью является весьма трудным и тонким. Не следует утверждать, что эти два вида непрерывности просто тождественны, но я полагаю, что вполне можно утверждать, что рассматриваемая нами в этой главе математическая концепция дает абстрактную логическую схему, под которую можно подогнать подходящими манипуляциями эмпирический материал, если этот материал является «непрерывным» в любом точно определенном смысле. Было бы совершенно невозможно оправдать этот тезис в рамках настоящего тома. Интересующийся этими вопросами читатель может прочитать о попытке оправдания подобного рода в отношении *времени* в журнале «*Монист*» за 1914–1915 годы, в статьях автора данной книги, а также в некоторых частях его работы «Наше познание внешнего мира». А сейчас мы должны оставить эту проблему для того, чтобы вернуться к теме, больше связанной с математикой.

Глава XI
ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы займемся определением предела функции (если он есть) по мере того, как аргумент приближается к заданному значению, а также определением того, что имеется в виду под «непрерывной функцией». Обе эти идеи являются достаточно техническими, и их вряд ли стоило бы рассматривать в вводном курсе философии математики. Но дело в том, что в умы профессиональных философов столь въелись неправильные взгляды на этот предмет, особенно в связи с так называемым исчислением бесконечно малых, что требуются значительные усилия по выкорчевыванию их. Со времени Лейбница думали, что дифференциальное и интегральное исчисления требуют бесконечно малых величин. Математики (особенно Вейерштрасс) доказали, что это ошибка; но ошибки, содержащиеся в том, что, например, Гегель говорил о математике, умирают трудно, а философы имеют тенденцию игнорировать работы таких людей, как Вейерштрасс.

Пределы и непрерывность функций в работах обычных математиков определены в терминах, включающих числа. Но это не представляется существенным, как показал д-р Уайтхед[1]. Мы, однако, начнем с определений из учебников и покажем, как эти определения могут быть обобщены, чтобы быть приложимыми к рядам вообще, а не только к числовым или численно измеряемым.

Давайте рассмотрим некоторую обычную математическую функцию fx, где x и fx являются действительными числами, а fx является однозначной — то есть когда задан x, имеется только одно значение fx, которое может она иметь. Мы называем x «аргументом», а fx «значением для аргумента x». Когда функция является тем, что мы называем

[1] См.: *Principia Mathematica*, vol. iii, *230–234.

«непрерывной», основная идея, для которой мы ищем точное определение, состоит в том, что малой разнице в x будет соответствовать малая разница в fx, и если мы сделаем разницу в x достаточно малой, мы сможем получить разницу в fx меньшей заранее заданного числа. Мы не хотим в случае непрерывной функции, чтобы были скачки, такие, что при некотором значении x его изменение, как бы оно ни было малым, привело к изменению в fx, превышающему некоторое заданное конечное количество. Обычные простые функции математики имеют это свойство: оно принадлежит, например, функциям x^2, x^3 ... $\log x$, $\sin x$, и т. д. Но вовсе нетрудно определить разрывную функцию. Возьмем нематематический пример, «место рождения самого молодого человека, жившего во время t». Это функция от t, ее значение будет постоянным все время от рождения одного человека до рождения другого человека, и тогда значение изменяется *внезапно* от одного места к другому. Аналогичным математическим примером будет «целое число, являющееся следующим в порядке уменьшения за числом x», где x является действительным числом. Эта функция остается постоянной от одного целого числа до другого, а затем делает внезапный скачок. Фактом является то, что, хотя непрерывные функции более знакомы, они являются исключениями: имеется в бесконечное число раз больше разрывных функций, нежели непрерывных.

Многие функции являются разрывными для одного или нескольких значений переменной и непрерывными для всех остальных. Возьмем, например, $\sin 1/x$. Функция $\sin \Theta$ проходит через все значения от -1 до 1 каждый раз, когда Θ проходит от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ или от $\pi/2$ до $-3\pi/2$, или более обще — от $(2n - 1)\pi/2$ до $(2n + 1)\pi/2$, где n есть некоторое целое число. А теперь мы рассмотрим $1/x$, когда x очень мало; мы видим, что по мере того, как x уменьшается, $1/x$ растет все быстрее и быстрее, так что прохождение циклов значений от одного кратного $+\pi/2$ значения до другого становится все более быстрым по мере того, как x становится все меньше и меньше. Соответственно, $\sin 1/x$ проходит все быстрее и быстрее от -1 до 1 и обратно, по мере того, как x становится меньше. В самом деле, если мы возьмем некоторый интервал, содержащий 0, скажем, интервал от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$, где е есть некоторое очень малое число, $\sin 1/x$ совершит бесконечное число колебаний в этом интервале, и мы не сможем уменьшить колебания, сделав интервал меньше. Таким образом, в области 0, где аргумент принимает значения, функция является разрывной. Легко сконструировать функции, которые являются разрывными в нескольких местах, или даже в $\aleph_0$ мест, или повсюду. Примеры этого можно найти в любой книге по теории функции действительной переменной.

Перейдем теперь к поискам точного определения того, что имеется в виду, когда говорят, что функция непрерывна для данного аргумента и при этом аргумент и значение являются числами действительными. Давайте сначала определим «окрестность» числа x как все числа от $x - \varepsilon$ до $x + \varepsilon$, где ε есть некоторое число, которое в важных случаях будет весьма мало́. Ясно, что непрерывность в данной точке имеет дело с тем, что случается в *некоторой* окрестности точки, как бы ни была она мала.

Мы хотим получить следующее: если a есть аргумент, при котором наша функция должна быть непрерывной, давайте сначала определим окрестность (скажем α), содержащую значение fa, которое функция принимает для аргумента a; мы хотим, чтобы при достаточно малой окрестности, содержащей a, все значения функции для этого аргумента внутри окрестности содержались бы в окрестности a, как бы малой мы ни делали α. То есть если мы сделаем так, что наша функция не будет отличаться от fa больше, чем на очень малую величину, мы можем всегда найти промежуток действительных чисел, в середине которого находится a, такой, что на протяжении всего промежутка fx не будет отличаться от fa больше, чем заранее заданная малая величина. И это будет справедливо независимо от того, какой мы выберем эту малую величину. Таким образом, мы приходим к следующему определению:

Функция $f(x)$ является «непрерывной» для аргумента a, если для каждого положительного числа σ, отличного от 0, но малого до любой желательной величины, существует положительное число ε, отличное от 0, такое, что для всех значений δ, численно меньших[1], чем ε, разность $f(a + \delta) - fa$ численно меньше, чем σ.

В этом определении σ сначала определяет окрестность $f(a)$, а именно окрестность от $f(a) - \sigma$ до $f(a) + \sigma$. Затем определение говорит, что можем (посредством ε) определить окрестность от $a - \varepsilon$ до $a + \varepsilon$, такую, что для всех аргументов в этой окрестности значение функции лежит в окрестности от $f(a) - \sigma$ до $f(a) + \sigma$. Если это может быть сделано, каким бы мы ни выбрали σ, функция «непрерывна» для аргумента a.

До сих пор мы не определили «предела» функции для данного аргумента. Если бы мы это сделали, мы могли бы определить непрерывность функции по-другому: функция непрерывна в точке, в которой ее значения являются теми же самыми, что и предел ее значения при приближении снизу или сверху. Но только исключительно «ручные» функции имеют определенный предел по мере приближения аргумента к данной точке. В общем случае функция колеблется, и при некоторой заданной окрестности данного аргумента, как бы она ни была мала, весь промежуток значений будет соответствовать аргументам в этой окрестности. Поскольку это общий случай, рассмотрим его в первую очередь.

Давайте рассмотрим, что случается, когда аргумент приближается к некоторому значению a снизу. То есть мы хотим рассмотреть, что при этом произойдет, если аргумент содержится в интервале от $a - \varepsilon$

[1] Число «численно меньше» числа ε, когда оно лежит в интервале от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$.

до a, где ε есть некоторое число, которое в важных случаях будет очень мало.

Значения функции для аргументов от $a - \varepsilon$ до a (исключая само a) будет множеством действительных чисел, которое определит определенную часть множества действительных чисел, а именно часть, состоящую из тех чисел, которые не больше, чем все значения для аргументов от $a - \varepsilon$ до a. Если задано некоторое число в этой части, имеются значения столь же большие, как это число для аргументов между $a - \varepsilon$ и a, то есть для аргументов, которые очень мало отличаются от a (если ε очень мало). Давайте возьмем все возможные ε и все возможные соответствующие части. «Окончательной» частью будет общее для всех этих частей, по мере того как аргумент приближается к a. Сказать, что число z принадлежит к окончательной части, значит сказать, что какой бы малой мы ни выбрали величину ε, имеются аргументы между $a - \varepsilon$ и a, для которых значение функции не меньше, чем z.

Мы можем применить тот же самый процесс к верхним частям, то есть к частям, которые идут от некоторой точки вверх, вместо направления снизу к точке. Здесь мы берем те числа, которые не *меньше*, чем все значения для аргументов от $a - \varepsilon$ до a. Это определяет верхнюю часть, которая будет варьироваться по ходу варьирования ε. Беря общее всех таких частей для всех возможных ε, мы получим «окончательную верхнюю часть». Сказать, что число z принадлежит окончательной верхней части, значит сказать, что какой бы малой мы ни сделали ε, имеются аргументы между $a - \varepsilon$ и a, для которых значение функции не *больше*, чем z.

Если термин z принадлежит окончательной части и окончательной верхней части, мы будем говорить, что он принадлежит «окончательному колебанию». Мы можем проиллюстрировать наши рассмотрения еще раз с помощью функции $\sin 1/x$ по мере того, как x приближается к 0. Мы предположим, что это приближение идет снизу, поскольку мы хотим совмещения с нашими определениями.

Давайте начнем с «окончательной части». Между $-\varepsilon$ и 0, каким бы ни было ε, функция будет принимать значение 1 для некоторых аргументов, но никогда не примет большего значения. Отсюда, окончательная часть состоит из всех действительных чисел, положительных и отрицательных, вплоть до 1, включая и саму 1; то есть она состоит из всех отрицательных чисел вместе с 0, вместе с положительными числами вплоть до 1, включая 1.

Подобным образом, «окончательная верхняя часть» состоит из всех положительных чисел вместе с 0, с отрицательными числами вплоть до -1, включая -1.

Таким образом, «окончательное колебание» состоит из всех действительных чисел от -1 до 1, с включением их обеих.

Мы можем сказать более обще, что «окончательное колебание» функции по мере приближения аргумента к a снизу состоит из всех тех чисел x, таких, что как бы близко мы ни подходили к a, мы будем находить значения столь же большие, как x, и столь же малые, как x.

Окончательное колебание может не содержать терминов, или содержать точно один термин, или много терминов. В первых двух случаях функция имеет определенный предел при приближении снизу. Если окончательное колебание имеет один термин, это очевидно. Это равным образом справедливо, если оно не имеет терминов, потому что нетрудно доказать, что если окончательное колебание есть нуль, граница окончательной части точно такая же, как граница окончательной верхней части, и может быть определена как предел функции при приближении снизу. Но если окончательное колебание имеет много терминов, не существует определенного предела функции при приближении снизу. В этом случае мы можем взять верхнюю и нижнюю границы окончательного колебания (то есть нижнюю границу окончательной верхней части и верхнюю границу окончательной части) как верхний и нижний пределы его «окончательных» значений при приближении снизу. Подобным образом мы можем получить верхний и нижний пределы для «окончательных» значений при приближении сверху. Таким образом, мы имеем в общем случае четыре предела функции при приближении к данному аргументу. Предел данного аргумента a существует только тогда, когда все *четыре* предела равны, и он является тогда их общим значением. Если это есть также *значение* для аргумента a, функция непрерывна для этого аргумента. Это может быть взято как определение непрерывности, оно эквивалентно нашему первому определению.

Мы можем определить предел функции для данного аргумента (если он существует) без прохождения через окончательное колебание и четыре предела в общем случае. В этом случае определение будет таким же, как более раннее определение непрерывности. Давайте определим предел при приближении снизу. Если должен быть определенный предел при приближении к a снизу, необходимо и достаточно, что при заданном любом малом числе σ два значения для аргументов, достаточно близких к a (но оба меньшие, чем a) будут отличаться на величину меньшую, чем σ. То есть если ε достаточно мала и оба наши аргумента лежат между $a - \varepsilon$ и a (исключая a), тогда разница между значениями для этих аргументов будет меньше, чем σ. Это будет справедливо для любого σ, как бы она ни была мала; в этом случае функция имеет предел при приближении снизу. Подобным же образом мы определяем случай, когда имеется предел при приближении сверху. Эти два предела, даже если они оба существуют, необязательно должны быть тождественны; если они тождественны, они все еще необязательно тождественны со *значением* для аргумента a. Только в этом последнем случае мы называем функцию *непрерывной* для аргумента a.

Функция называется «непрерывной» (вообще), когда она непрерывна для любого аргумента.

Слегка другой метод получения определения непрерывности состоит в следующем:

Давайте скажем, что функция «окончательно сходится в класс α», если имеется некоторое действительное число, такое, что для этого аргумента и всех аргументов больше него, значение функции есть член класса α. Подобным же образом мы будем говорить, что функция «сходится в α по мере того, как аргумент приближается к x снизу», если имеется некоторый аргумент y меньший, чем x, такой, что во всем интервале от y (включительно) до x (исключая его) функция имеет значения, являющиеся членами α. Мы можем сейчас сказать, что функция непрерывна для аргумента a, для которого она имеет значение α, если она удовлетворяет четырем условиям, а именно:

(1) Дано некоторое действительное число, меньшее, чем fa, функция сходится в последующие элементы этого числа по мере того, как аргумент приближается к a снизу;

(2) Дано некоторое действительное число, большее, чем fa, функция сходится в предшественники этого числа по мере того, как аргумент приближается к a снизу;

(3) и (4) Подобные условия при приближении к a сверху.

Преимущества этой формы определения состоят в том, что она дает анализ непрерывности в четырех условиях, получаемых из рассмотрения аргументов и значений соответственно бóльших или меньших, чем аргумент или значение, для которого должна быть определена непрерывность.

Мы можем применить наши определения, путем их обобщения, к рядам, не являющимся числовыми или численно измеримыми. Весьма удобно для этого случая держать в уме случай движения. У Уэллса есть рассказ, который иллюстрирует для случая движения различие между пределом функции для данного аргумента и ее значением для того же аргумента. Герой рассказа, обладающий, сам не зная того, способностью реализации его желаний, был атакован полицейским. В этот момент у него вырвалось: «Пошел ты ... », и он обнаружил, что полицейский исчез. Если $f(t)$ было положением в пространстве полицейского в момент времени t, а t_0 — момент восклицания, предел положений в пространстве полицейского по мере приближения t к t_0 снизу совпал бы с положением нашего героя, в то время как значение для аргумента t_0 было ... . Но такие события являются, по-видимому, весьма редкими в реальном мире, и предполагается, хотя без достаточно адекватных свидетельств, что все движения являются непрерывными, то есть что если дано некоторое тело и если $f(t)$ — его положение в пространстве во время t, $f(t)$ будет непрерывной функцией от t. Это такое значение «непрерывности» мы хотели бы определить как можно более простыми средствами.

Определения, приведенные для случая, где аргумент и значение являются числами действительными, могут быть легко адаптированы для более общих случаев.

Пусть P и Q будут двумя отношениями, которые вполне можно представить себе как порядковые, хотя для наших определений это вовсе не обязательно. Пусть R будет одно-многозначным отношением, чья область содержится в поле P, а обратная область содержится в поле Q. Тогда R есть (в обобщенном смысле) функция, чьи аргументы принадлежат полю Q, а значения — полю P. Предположим, например, что мы имеем дело с частицей, движущейся по прямой: пусть Q будет временной ряд, P — ряд точек на прямой слева направо, R — отношение положения нашей частицы на линии во время a к времени a, так что «R от a» есть ее положение во время a. Эту иллюстрацию можно держать в уме по ходу всех наших определений.

Мы будем говорить, что функция R непрерывна для аргумента a, если при заданном некотором интервале α на P-ряде, содержащем значение функции для аргумента a, имеется интервал на Q-ряде, содержащий a не как конечную точку, и такой, что повсюду в этом интервале функция имеет значения, которые являются членами α. (Мы подразумеваем под «интервалом» все термины между любыми двумя терминами; то есть если x и y есть два члена поля P и x имеет отношение P к y, мы будем иметь в виду под «P-интервалом x к y» все термины z такие, что x имеет отношение P к x и z имеет отношение P к y — вместе с самими x и y.)

Мы можем легко определить «окончательную часть» и «окончательное колебание». Чтобы определить «окончательную часть» при приближении к аргументу a снизу, возьмем любой аргумент y, который предшествует a (то есть имеет отношение Q к a), возьмем значения функции для всех аргументов вплоть до y с включением y и образуем часть P, определяемую этими значениями, то есть те члены P-ряда, которые стоят раньше или тождественны с некоторыми из этих значений. Образуем все такие части для всех y, которые предшествуют a, и возьмем их общую часть; это и будет окончательная часть. Окончательная верхняя часть и окончательное колебание определяются точно так же, как в предыдущем случае.

Адаптация определения сходимости и соответствующего альтернативного определения непрерывности не представляет трудностей.

Мы говорим, что функция R является «окончательно Q-сходимой в α», если имеется член y обратной области R и поля Q такой, что значение функции для аргумента y и для любого аргумента, к которому y имеет отношение Q, есть член α. Мы говорим, что R «Q-сходится в α по мере приближения данного аргумента к a», если имеется термин y, имеющий отношение Q к a и принадлежащий к обратной области R и такой, что значение функции для данного аргумента в Q-интервале от y (включительно) до a (исключая его) принадлежит α.

Из четырех условий, которым функция должна удовлетворять для того, чтобы быть непрерывной для аргумента *a*, первое принимает следующий вид, полагая *b* как значение для аргумента *a*:

Если дан некоторый термин, имеющий отношение *P* к *b*, *R* *Q*-сходится в последующие элементы *b* (по отношению к *P*) по мере приближения аргумента к *a* снизу.

Второе условие получается заменой *P* его обратным; третье и четвертое условие получаются из первого и второго заменой *Q* на его обратное.

Таким образом, нет ничего в понятиях предела функции или непрерывности функции, что существенно включало бы числа. Оба понятия могут быть определены весьма общим образом, и многие предложения о них могут быть доказаны для любых двух рядов (один из них аргументный ряд, а другой ряд значений). Видно также, что определения не включают бесконечно малых. Они включают бесконечные классы интервалов, становящихся все меньше без всякого ограничения, но не обращающихся в нуль, но они не включают никаких интервалов, не являющихся конечными. Это аналогично тому факту, что если линия длиной в один дюйм поделена пополам, затем полученные отрезки снова разделены пополам, и так до бесконечности, мы никогда на этом пути не достигнем бесконечно малых: после *n* разделений длина каждого кусочка будет $1/2^n$ дюйма, и она является конечной, каким бы ни было конечное число *n*. Процесс последовательного деления не приведет к ординальному числу, которое является бесконечным, так как это существенно пошаговый процесс. Бесконечно малые не могут быть достигнуты на этом пути. Путаница в этих вопросах обусловлена во многом трудностями, которые возникают при обсуждении бесконечности и непрерывности.

Глава XII
ВЫБОРКИ И АКСИОМА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТИ

В этой главе мы должны рассмотреть аксиому, которая может быть сформулирована в терминах логики, но не доказана, и которая удобна, хотя и не необходима в некоторых разделах математики. Она удобна в том смысле, что многие интересные суждения, предположение об истинности которых кажется вполне естественным, не могут быть доказаны без ее помощи. Но она не является необходимой, потому что даже без этих суждений предметы, в которые они входят, все-таки существуют, хотя в несколько уродливой форме.

Перед формулировкой аксиомы мультипликативности мы сначала должны объяснить теорию выборок и определение умножения, когда число сомножителей может быть бесконечным.

При определении арифметических операций единственно правильная процедура состоит в конструировании действительного класса (или отношения, в случае реляционных чисел), имеющего требуемое число терминов. Это иногда требует весьма большой изобретательности, но это является существенным для доказательства существования определяемого числа. Возьмем, например, простейший случай сложения. Предположим, нам дано кардинальное число μ и класс α, имеющий μ терминов. Как мы определим $\mu + \mu$? Для этой цели мы должны иметь *два* класса, имеющих μ терминов, и они не должны перекрываться. Мы можем сконструировать такие классы из α различными путями, из которых следующий, вероятно, наиболее простой: образуем сначала все упорядоченные пары, чей первый термин есть класс, состоящий из единственного члена α, и чей второй термин есть нуль-класс; затем образуем все упорядоченные пары, чей первый термин есть нуль-класс, а второй термин есть класс, состоящий из единственного члена α. Эти два класса пар не имеют общих членов, и логическая сумма двух классов будет иметь $\mu + \mu$ терминов. Точно так же мы можем определить $\mu + \nu$, при условии, что μ есть член некоторого класса α и ν есть член некоторого класса β.

Такие определения, как правило, являются делом подходящей техники. Но в случае умножения, где может быть бесконечное число сомножителей, определение приводит к важным проблемам.

Нет никаких трудностей с умножением, когда число сомножителей конечно. Если даны два класса α и β, из которых первый имеет μ терминов, а второй ν терминов, мы можем определить $\mu \times \nu$ как число упорядоченных пар, которые могут быть образованы выбором первого термина из α и второго из β. Видно, что это определение не требует того, что α и β не должны перекрываться; оно остается адекватным даже тогда, когда α и β тождественны. Например, пусть α будет класс, чьи члены x_1, x_2, x_3. Тогда класс, используемый для определения произведения, есть класс пар:

$$(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3); \quad (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3); \quad (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3).$$

Это определение остается применимым, когда μ и ν оба являются бесконечными, и оно может быть расширено, шаг за шагом, на три или четыре или любое конечное число сомножителей. В отношении этого определения не возникает никаких трудностей, за исключением того, что оно не может быть расширено на *бесконечное* число сомножителей.

Проблема умножения с бесконечным числом сомножителей заключается вот в чем: предположим, что мы имеем класс κ, состоящий из классов; предположим, что задано число терминов в каждом из этих классов. Как мы будем определять произведение всех этих чисел? Если мы можем сделать наше определение общим, оно будет применено как к случаю с конечным κ, так и к случаю с бесконечным κ. Следует заметить, что проблема состоит в том, чтобы справиться со случаем, когда бесконечно *κ*, а не его члены. Если *κ* не является бесконечным, определенный выше метод приложим как к случаю с конечным числом членов, так и к случаю, когда оно бесконечно.

Следующий метод определения умножения в общем случае дан д-ром Уайтхедом. Он объяснен и расписан более тщательно в *Principia Mathematica*, vol. i, *80ff and vol. ii, *114.

Давайте предположим для начала, что к есть класс классов, ни один из которых не перекрывается с любым другим, — например, избирательные округа в стране, где нет всеобщей системы голосования и каждый избирательный округ рассматривается как класс избирателей. Давайте выберем один термин из каждого класса в качестве его *представителя*, как это делается при выборе членов парламента, предполагая, что по закону каждый избирательный округ должен выбрать человека, который имеет право голосовать от этого округа. Мы таким образом прибываем к классу представителей, которые и образуют парламент. Сколько есть способов скомпоновать парламент? Каждый избирательный округ имеет право выбрать любого из своих избирателей, и, следовательно, если имеется μ избирателей в округе, имеется μ возможностей выбора. Выборы в различных округах независимы; таким образом, ясно, что когда общее число округов конечно, число возможных парламентариев получается перемножением числа избирателей во всех округах. Когда мы не знаем, является ли число округов конечным или бесконечным, мы можем принять число возможных парламентариев как *определение* произведения отдельных округов. Этот метод используется, когда определяются бесконечные произведения. А теперь мы должны оставить нашу иллюстрацию и перейти к точным утверждениям.

Пусть κ будет классом классов, и давайте для начала предположим, что ни один член κ не перекрывается с любым другим, то есть что если α и β два различных члена κ, тогда ни один член первого не есть член другого. Мы назовем класс «выборкой» из κ, когда он состоит из точно одного термина из каждого члена κ; то есть μ есть «выборка» из κ, если каждый член μ принадлежит к некоторому члену κ и если α будет некоторым членом κ, μ и α имеют точно один общий термин. Класс всех «выборок» из κ мы назовем «мультипликативным классом» κ. Число терминов в мультипликативном классе κ, то есть число возможных выборок из κ, определяется как произведение чисел членов κ. Это определение применимо и для κ конечного, и для κ бесконечного.

До того, как мы полностью будем довольны этими определениями, мы должны устранить ограничение, что никакие два класса κ не перекрываются. Для этой цели взамен определения сначала класса, называемого «выборкой», мы определим сначала отношение, которое назовем «выборщиком». Отношение R будет называться «выборщиком» из κ, если из каждого члена κ он выбирает один термин как представитель этого члена, то есть если задан некоторый α из κ, имеется точно один термин x, который есть член α и имеет отношение R к α; и в этом будет вся роль R. Формальное определение таково:

«Выборщик» из класса классов есть одно-многозначное отношение, имеющее к в качестве своей обратной области, и такое, что если x имеет это отношение к α, тогда x есть член α.

Если R есть выборщик из κ, и α есть член κ, и x есть термин, который имеет отношение R к α, мы называем x «представителем» α в связи с отношением R.

«Выборка» из κ будет сейчас определена как область выборщика; и мультипликативный класс, как и прежде, будет классом выборок.

Но когда члены класса κ перекрываются, выборщиков может оказаться больше, чем выборок, так как термин x, который принадлежит двум классам α и β, может быть один раз выбран представляющим класс α, а другой раз представляющим класс β, давая при этом два различных выборщика в этих двух случаях, но для той же самой выборки. Для целей определения умножения мы предпочитаем выборщика, а не выборку. Итак, мы определяем:

«Произведение числа членов класса κ» есть число выборщиков из κ.

Мы можем определить возведение в степень, приняв вышеуказанный план. Мы могли бы, конечно, определить μ^ν как число выборщиков из ν классов, каждый из которых имеет μ терминов. Но против такого определения есть возражения, связанные с тем фактом, что мультипликативная аксиома (о которой мы скоро будем говорить) становится излишней при этом определении. Поэтому мы примем следующую конструкцию:

Пусть α будет классом с μ терминами и β классом с ν терминами.

Пусть y будет членом β, и образуем класс всех упорядоченных пар, которые имеют y в качестве их второго термина и член α в качестве первого термина. Будет μ таких пар для заданного y, так как любой член α может быть выбран для первого термина, и α имеет μ членов. Если мы сейчас образуем все классы подобного рода, получающиеся из варьирования y, мы получаем ν классов, так как y может быть любым членом β, и β имеет ν членов. Каждый из этих ν классов представляет класс пар, а именно всех пар, которые могут быть образованы из варьируемого члена α и фиксированного члена β. Мы определяем μ^ν как число выборщиков из класса, состоящего из этих ν классов. Равным образом мы можем определить μ^ν как число выборщиков, поскольку, при взаимной исключительности наших классов пар, число выборщиков то же самое, как и число выборок. Выборка из нашего класса классов будет множеством упорядоченных пар, из которых точно одна в качестве второго термина будет иметь данный член β, а первый член ее будет любым членом α. Таким образом, μ^ν определена выборщиками из определенного множества ν классов, каждый из которых имеет μ терминов, но само множество имеет определенную структуру и более удобную композицию, чем в общем случае. То обстоятельство, что эта конструкция имеет отношение к мультипликативной аксиоме, вскоре станет ясным.

То, что применяется к возведению в степень, применимо также к произведению двух кардинальных чисел. Мы могли бы определить «$\mu \times \nu$» как сумму чисел ν классов, каждый из которых имеет μ терминов, но мы предпочитаем определить его как число упорядоченных пар, составленных из члена α и следующим за ними членом β, где α имеет μ терминов и β имеет ν терминов. Это определение, кроме того, предназначено для избегания необходимости в предположении аксиомы мультипликативности.

С нашими определениями мы можем доказать обычные формальные законы умножения и возведения в степень. Но есть одна вещь, которую мы не можем доказать: мы не можем доказать, что произведение равно нулю, когда один из сомножителей равен нулю. Мы можем доказать это, когда число сомножителей конечно, но не когда оно бесконечно. Другими словами, мы не можем доказать, что если дан класс классов, ни один из которых не является нулевым, то для них должны существовать выборщики. Или, если задан класс взаимно исключающих классов, должен быть по крайней мере один класс, состоящий из терминов, взятых по одному из каждого данного класса. Эти вещи не могут быть доказаны, и хотя с первого взгляда они кажутся очевидными истинами, последующее размышление приводит ко все большему сомнению, до тех пор, пока мы не готовы принять предположение и его следствия, точно так же, как мы принимаем аксиому о параллельных, без предположения, что мы можем знать, является ли она истинной или ложной. Предположение, вольно сформулированное, заключается в том, что выборщики и выборки существуют, когда мы должны ожидать этого от них. Есть много способов его точной формулировки. Мы начнем со следующего определения:

«Если дан некоторый класс взаимно исключающих классов, из которых ни один не является нулевым, имеется по крайней мере один класс, который имеет точно один термин, общий с каждым из данных классов».

Это предложение мы будем называть «мультипликативной аксиомой»[1]. Мы сначала дадим несколько различных форм предложения, эквивалентных друг другу, и затем рассмотрим некоторые пути, на которых истинность или ложность аксиомы представит интерес для математики.

Аксиома мультипликативности эквивалентна предложению, что произведение равно нулю, когда по крайней мере один из его сомножителей равен нулю; то есть что если некоторое число кардинальных

[1] См.: *Principia Mathematica*, vol. i, *88. Также vol. iii, *257–258.

чисел перемножается, результат не может быть нулевым до тех пор, пока одно из чисел не равно 0.

Аксиома мультипликативности эквивалентна предложению, что если *R* есть некоторое отношение и *κ* есть некоторый класс, содержащийся в обратной области *R*, тогда имеется по крайней мере одно одно-многозначное отношение, из которого следует *R*, и имеющее *κ* в качестве своей обратной области.

Аксиома мультипликативности эквивалентна предположению, что если *α* есть некоторый класс и *κ* все подклассы *α*, за исключением нуль-класса, тогда имеется по крайней мере один выборщик из *κ*. В этой форме аксиома была преподнесена ученому миру Цермело, в его «Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann»[1]. Цермело рассматривал аксиому как неоспоримую истину. Нужно признаться, что пока он не сделал ее точной, математики использовали ее без всяких угрызений совести, но делали это как будто неосознанно. И Цермело полностью принадлежит заслуга того, что точная формулировка аксиомы была отделена от вопроса о том, является ли она истинной или ложной.

Как показал Цермело, аксиома мультипликативности, в вышеупомянутом доказательстве, эквивалентна предложению, что каждый класс может быть вполне упорядочен, то есть может быть построен в ряд, в котором каждый подкласс имеет первый термин (за исключением, конечно, нуль-класса). Полное доказательство этого предложения трудно, но нетрудно видеть общие принципы, на которых оно основано. Оно использует форму, которую мы называем «аксиомой Цермело», то есть предполагает, что если дан некоторый класс *α*, имеется по крайней мере одно одно-многозначное отношение, чья обратная область состоит из всех существующих подклассов *α* и такое, что если *x* имеет отношение *R* к *ξ*, тогда *x* есть член *ξ*. Такое отношение указывает «представителя» из каждого подкласса; конечно, часто случается, что два подкласса имеют один и тот же представитель. Цермело, на самом деле, делает вот что: он пересчитывает члены *α*, один за одним, посредством *R* и трансфинитной индукции. Мы берем первого представителя *α*; назовем его x_1. Затем берем представителя класса, состоящего из всех *α* за исключением x_1; назовем его x_2. Он должен быть отличным от x_1, потому что каждый представитель есть член своего класса, а x_1 вычеркнут из этого класса. Проделаем то же, чтобы вычеркнуть x_2, и пусть x_3 будет представителем того, что осталось. На этом пути мы сначала получим прогрессию $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$, предполагая, что *α* не является конечным. Мы затем убираем всю прогрессию; пусть x_ω будет представителем того, что осталось от *α*. На этом пути мы можем идти до тех пор, пока ничего не останется. Последователь-

[1] *Mathematische Annalen*, vol. lix, S. 514–516. В этой форме мы будем называть ее аксиомой Цермело.

ные представители образуют форму вполне упорядоченного ряда, содержащего все члены α. (Приведенное выше есть, конечно, только намеки на общую линию доказательства.) Это предложение называется «теоремой Цермело».

Аксиома мультипликативности эквивалентна также предположению, что из любых двух кардинальных чисел, не равных друг другу, одно должно быть больше. Если аксиома ложна, должны быть кардинальные числа μ и ν такие, что μ не меньше ν, не равно ν, не больше ν. Мы видели, что $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$, возможно, являются примером такой пары.

Можно привести многие другие формы аксиомы, но вышеприведенная является наиболее важной из известных форм. Что касается истинности или ложности аксиомы в любой из ее форм, на настоящее время ничего не известно.

Предложения, которые зависят от аксиомы, но ей не эквивалентные, многочисленны и важны. Возьмем сначала связь сложения и умножения. Мы естественно думаем, что сумма ν взаимно исключающих классов, каждый из которых имеет μ терминов, должна иметь $\mu \times \nu$ терминов. Когда ν конечен, это может быть доказано. Но когда ν бесконечен, это не может быть доказано без аксиомы мультипликативности, за исключением случаев, где благодаря некоторым специальным обстоятельствам может быть доказано существование определенных выборщиков. Аксиома мультипликативности входит сюда следующим образом: предположим, что мы имеем два множества ν взаимно исключающих классов, каждый из которых имеет μ терминов, и мы ходим доказать, что сумма одного множества имеет столько же терминов, сколько имеет сумма другого. Для того чтобы доказать это, мы должны установить одно-однозначное отношение. Теперь, так как в каждом случае имеется ν классов, имеется некоторое одно-однозначное отношение между двумя множествами классов; но мы хотим получить одно-однозначное отношение между терминами классов. Давайте рассмотрим некоторое одно-однозначное отношение S между классами. Тогда, если κ и λ есть два множества классов и α есть некоторый член κ, будет иметься член β из λ, который будет соответствовать α по отношению к S. Но α и β имеют μ терминов и, следовательно, подобны. Имеются, соответственно, одно-однозначные корреляции α и β. Беда в том, что их слишком много. Для того чтобы получить одно-однозначное соответствие суммы κ с суммой λ, мы должны указать *одну выборку* из множества классов корреляторов, и один класс множества состоит из всех одно-однозначных корреляторов α с β. Если κ и λ бесконечны, мы не можем в общем случае знать, что такая выборка существует, до тех пор, пока мы не знаем, что аксиома мультипликативности истинна. Отсюда, мы не может установить обычный вид связи между сложением и умножением.

Этот факт имеет различные любопытные последствия. Начать с того, что мы знаем, что $\aleph_0^2 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Из этого часто делают вывод, что сумма $\aleph_0$ классов, каждый из которых имеет $\aleph_0$ членов, должен сам иметь $\aleph_0$ членов. Но этот вывод ошибочен, так как мы не знаем, что число терминов в такой сумме есть $\aleph_0 \times \aleph_0$, а следовательно, и того, что она есть $\aleph_0$. Это имеет следствия в теории трансфинитных ординальных чисел. Легко доказать, что ординальное число, которое имеет $\aleph_0$ предшественников, должно быть одним из тех, что Кантор назвал «вторым классом», то есть таким, что ряд, имеющий это ординальное число, будет иметь $\aleph_0$ терминов в его поле. Легко также видеть, что если мы возьмем некоторую прогрессию ординальных чисел вторичного класса, предшественники их пределов образуют, самое большее, сумму $\aleph_0$ классов, каждый из которых имеет $\aleph_0$ терминов. Отсюда выводится — ошибочно, если не предполагать при этом истинность аксиомы мультипликативности, — что предшественники предела имеют число $\aleph_0$ и, следовательно, что предел есть число «второго класса». То есть предполагается доказанным, что любая прогрессия ординальных чисел второго класса имеет предел, который опять-таки является ординальным числом второго класса. Это предложение, вместе с его следствием о том, что ω_1 (наименьшее ординальное число третьего класса) не является пределом никакой прогрессии, включено в большинство признанных теорий ординальных чисел второго класса. Принимая во внимание то, каким образом тут входит аксиома мультипликативности, предложение и его следствие не могут считаться доказанными. Они могут быть истинными, а могут и не быть. Все, что может быть сказано к настоящему времени, так это то, что мы определенно не знаем этого. Таким образом, бóльшая часть теории ординальных чисел второго класса может рассматриваться как недоказанная.

Другая иллюстрация может сделать эту точку зрения яснее. Мы знаем, что $2 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Отсюда мы могли бы предположить, что сумма $\aleph_0$ пар должна иметь $\aleph_0$ терминов. Но хотя мы можем доказать это в некоторых случаях, мы не можем сделать этого всегда, до тех пор, пока мы не предположим аксиому мультипликативности. Это обстоятельство иллюстрируется миллионером, который покупал пару носков всякий раз, когда он покупал пару обуви, и только в этом случае, и он имел такую страсть к подобным покупкам, что однажды он купил $\aleph_0$ пар носков и $\aleph_0$ пар обуви. Тут возникает проблема: сколько у него ботинок и сколько у него носков? Было бы естественно предположить, что у него в два раза больше ботинок и в два раза больше носков, чем пар каждого вида покупок, и отсюда у него $\aleph_0$ каждого, так как это число не увеличивается при удвоении. Но это пример трудности, уже замеченной, связи суммы ν классов, каждый из которых имеет μ терминов, с $\mu \times \nu$. Иногда это может быть сделано, иногда нет. В нашем случае это может быть сделано с ботинками, но не с носками, за исключением самых искусственных методов. Причина разницы такова: среди ботинок мы можем различить правые и левые и, следовательно, мы можем сделать выборку из каждой пары, а именно: мы можем выбрать все правые или все левые ботинки; но с носками такого принципа выборки не видно, и мы не можем быть уверены, до тех пор, пока не предположим аксиомы мультипликативности, что имеется некоторый класс, состоящий из одного носка из каждой пары. Отсюда и проблема.

Мы можем изложить дело по-другому. Чтобы доказать, что класс имеет $\aleph_0$ терминов, необходимо и достаточно найти некоторый способ построения его терминов в прогрессию. Нет никакой трудности в проделывании этого с ботинками. *Пары* даны как образующие $\aleph_0$ и, следовательно, как поле прогрессии. Для каждой пары, возьмем сначала левый ботинок, а потом правый, оставляя порядок пары неизменным; на этом пути мы получим прогрессию из всех ботинок. Но с носками мы должны делать произвольный выбор для каждой пары, какой носок поставить первым, а бесконечное число произвольных выборов невозможно. До тех пор, пока мы не найдем *правило*, то есть отношение, которое является выборщиком, мы не знаем, что выборка даже теоретически возможна. Конечно, в случае пространственных объектов, типа носков, мы всегда можем найти некоторый принцип выборки. Например, возьмем центр массы носков: будет иметься p точек пространства таких, что некоторая пара носков даст различные для каждого носка данные для центров массы носков на расстоянии от p. Таким образом, мы можем выбрать из каждой пары тот носок, который имеет его центр масс ближе к p. Но нет никакой теоретической причины, почему бы такой метод выбора должен быть вообще теоретически возможен, и случай с носками, если на то есть добрая воля читателя, может служить для того, чтобы показать, как может быть невозможен выбор.

Нужно заметить, что если *было* бы невозможно выбрать из пары носков один, то отсюда следовало бы, что носки *не могли бы* быть построены в прогрессии, и что не было бы $\aleph_0$ их. Этот случай иллюстрирует, что если μ есть бесконечное число, одно множество пар μ может не содержать того же самого числа терминов, что другое множество пар μ; действительно, если даны $\aleph_0$ пар ботинок, определенно имеется $\aleph_0$ ботинок, но мы не можем быть уверены в том же для носков, до тех пор, пока не предположим аксиомы мультипликативности, или же не обопремся на случайные геометрические методы выбора, такие, как были описаны выше.

Другая важная проблема, связанная с аксиомой мультипликативности, состоит в отношении рефлективности к неиндуктивности. Нужно вспомнить, что в главе VIII мы указали, что рефлективное число должно быть неиндуктивным, но что обратное (насколько это известно в настоящее время) может быть доказано только при предположении аксиомы мультипликативности. Дело тут вот в чем:

Легко доказать, что рефлективный класс является таким, который содержит подклассы, имеющие $\aleph_0$ терминов. (Класс может, конечно, сам иметь $\aleph_0$ терминов.) Таким образом, мы должны доказать, если мы можем, что если дан некоторый неиндуктивный класс, то возможно выбрать прогрессию из его терминов. А теперь нетрудно показать, что неиндуктивный класс должен содержать больше терминов, чем любой индуктивный класс, или, что то же самое, что если α есть неиндуктивный класс и ν есть некоторое индуктивное число, имеются подклассы α, имеющие ν терминов. Таким образом, мы можем образовать множество конечных подклассов α: сначала один класс, не имеющий терминов, затем классы, имеющие 1 термин (столько, сколько членов α), затем классы, имеющие 2 термина, и так далее. Мы, таким образом, получаем прогрессию множеств подклассов, каждое множество состоит из всех тех, которые имеют определенное заданное конечное число терминов. До сих пор мы не использовали аксиомы мультипликативности, а только доказали, что число совокупностей из подклассов α является числом рефлективным, то есть если μ есть число членов α, так что 2^{μ} есть число подклассов α, и $2^{2^{\mu}}$ есть число совокупностей подклассов, тогда, при условии, что μ не индуктивно, $2^{2^{\mu}}$ должно быть рефлективным. Но до того, что мы хотим доказать, еще весьма далеко.

Для того чтобы продвинуться дальше этого пункта, мы должны использовать аксиому мультипликативности. Из каждого множества подклассов давайте выберем один, опуская подкласс, состоящий из одного нуль-класса. То есть мы выбираем один подкласс, содержащий один термин, скажем, α_1; один, содержащий два термина, скажем, α_2; один, содержащий три термина, скажем, α_3; и так далее. (Мы можем делать это, если предполагается аксиома мультипликативности; в противном случае мы не знаем, можем ли мы всегда делать это или нет.) Мы имеем сейчас прогрессию α_1, α_2, α_3, ... подклассов α, взамен прогрессии совокупностей подклассов; таким образом, мы на шаг ближе продвинулись к нашей цели. Мы теперь знаем, что, предполагая аксиому мультипликативности, если μ есть неиндуктивное число, 2^{μ} должно быть рефлективным числом.

Следующий шаг состоит в обнаружении того, что хотя мы не можем быть уверены в том, что новые члены α попадают на некоторой специфицированной стадии в прогрессию α_1, α_2, α_3, ..., мы можем быть уверены, что новые члены попадают туда время от времени. Давайте проиллюстрируем это. Класс α_1, который состоит из одного термина, есть новое начало: пусть единственный термин будет x_1. Класс α_2, состоящий из двух терминов, может содержать, а может и не содержать x_1. Если он содержит его, вводится один новый термин; если не содержит, должно быть введено два новых термина, скажем, x_2 и x_3. В этом случае возможно, что α_3 состоит из x_1, x_2, x_3 и поэтому не вводит новых терминов, но в этом случае α_1 должен ввести новый термин. Первые ν классов α_1, α_2, α_3, ... содержат, самое большее, $1 + 2 + 3 + ... + \nu$ терминов, то есть $\nu(\nu + 1)/2$ терминов; таким образом, было бы возможно, если бы не было повторов в первых ν классах, перейти с единственными повторениями от $(\nu + 1)$-го класса к $\nu(\nu + 1)/2$-му классу. Но к тому времени старые термины больше не будут достаточно многочисленны для того, чтобы образовать следующий класс с правильным числом членов, то есть $(\nu(\nu + 1)/2) + 1$, и, следовательно, на этом этапе должны прийти новые термины, если они не придут раньше. Отсюда следует, что если мы опустим из нашей прогрессии $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ все те классы, составленные полностью из членов, которые входили в предыдущие классы, мы все еще будем иметь прогрессию. Пусть наша новая прогрессия будет называться $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ (Мы будем иметь $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$, потому что α_1 и α_2 должны вводить новые термины. Мы можем иметь или не иметь $\alpha_3 = \beta_3$, но, вообще говоря, β_μ будет α_ν где ν есть некоторое число, большее, чем μ; то есть β-ы есть *некоторые* из α-ов.) Теперь эти β-ы таковы, что любой один из них, скажем β_μ, содержит члены, которые не входили ни в один из предыдущих β-ов. Пусть γ_μ будет частью β_μ, который состоит из новых членов. Таким образом, мы получаем новую прогрессию $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ (Опять γ_1 будет тождественен с β_1 и с α_1; если α_2 не содержит ни одного члена α_1, мы будем иметь $y_2 = \beta_2 = \alpha_2$; но если α_2 все же содержит этот один член, γ_2 будет состоять из другого члена α_2.) Эта новая прогрессия из γ-ов состоит из взаимно исключающих классов. Отсюда выборка из них будет прогрессией; то есть если x_1 есть член y_1, x_2 есть член y_2, x_3 есть член y_3 и так далее, тогда x_1, x_2, x_3 есть прогрессия и есть подкласс α. Предполагая аксиому мультипликативности, такая выборка может быть сделана. Таким образом, дважды используя аксиому, мы можем доказать, что если аксиома истинна, каждое неиндуктивное кардинальное число должно быть рефлективно. Это могло бы быть также выведено из теоремы Цермело, а именно если аксиома истинна, каждый класс может быть вполне упорядочен; потому что вполне упорядоченные ряды должны иметь либо конечное, либо рефлективное число терминов в их поле.

Имеется одно преимущество в изложенном выше прямом аргументе, в противоположность выводу из теоремы Цермело, а именно в том, что этот аргумент не требует универсальной истинности аксиомы мультипликативности, но только ее истинности в приложении к множеству $\aleph_0$ классов. Может случиться, что аксиома будет справедлива для $\aleph_0$ классов, но не для большего числа классов. По этой причине лучше, когда это возможно, ограничить себя более скромными предположениями. Предположение, сделанное в прямом аргументе, изложенном выше, состоит в том, что произведение $\aleph_0$ сомножителей никогда не будет равно нулю до тех пор, пока один из сомножителей не равен нулю. Мы можем установить это предположение в форме: «$\aleph_0$ есть *умножительное* число», где число ν определяется как «умножительное», когда произведение ν сомножителей не равно нулю до тех пор, пока нулю не будет равен один из сомножителей. Мы можем *доказать*, что *конечное* число всегда является умножительным, но мы не можем доказать этого в отношении любого бесконечного числа. Аксиома мультипликативности эквивалентна предположению, что все кардинальные числа являются умножительными. Но для того, чтобы отождествить рефлективность с неиндуктивностью, или же иметь дело с проблемой ботинок и носков, или показать, что любая прогрессия чисел второго класса относится ко второму классу, мы нуждаемся в гораздо более скромном предположении, нежели предположение о том, что $\aleph_0$ является умножительным.

Не так уж невероятно, что многое еще откроется в тех темах, которые были предметом обсуждения в данной главе. Возможно, будут обнаружены такие случаи, когда предложения, доказанные с использованием аксиомы мультипликативности, будут доказаны без нее. Вполне допустимо, что будет показана ложность аксиомы мультипликативности в ее общей форме. С этой точки зрения теорема Цермело предлагает лучшие надежды: континуум или некоторые еще более плотные ряды, *как могло* бы быть доказано, не могут иметь вполне упорядочения своих терминов, что и доказало бы ложность аксиомы мультипликативности через теорему Цермело. Но до сих пор неизвестен метод, с помощью которого такие результаты могут быть обнаружены, и этот вопрос пребывает в полной неясности.

Глава XIII
АКСИОМА БЕСКОНЕЧНОСТИ И ЛОГИЧЕСКИЕ ТИПЫ

Аксиома бесконечности есть предположение, которое можно сформулировать в следующем виде:

«Если *n* есть индуктивное кардинальное число, то имеется по крайней мере один класс индивидов, имеющий *n* членов».

Если аксиома истинна, тогда следует, конечно, что имеется много классов индивидов, имеющих *n* членов, и что общее число индивидов в мире не является индуктивным числом. Потому что, по аксиоме, имеется по крайней мере один класс, имеющий $n + 1$ членов, из чего следует, что имеется много классов с *n* членами и что *n* не есть число индивидов в мире. Так как *n* есть любое индуктивное число, отсюда следует, что число индивидов в мире должно (если аксиома истинна) превышать *любое* индуктивное число. В свете изложенного в предыдущей главе о возможности кардинальных чисел, которые не являются ни индуктивными, ни рефлективными, мы не можем вывести из нашей аксиомы, что имеется по крайней мере $\aleph_0$ индивидов, до тех пор, пока мы не предложим аксиомы мультипликативности. Но мы знаем, что имеется по крайней мере $\aleph_0$ классов, так как индуктивные кардинальные числа есть классы классов и образуют прогрессию, если наша аксиома верна. Причина, по которой мы нуждаемся в этой аксиоме, может быть объяснена следующим образом: одно из пеановских предположений утверждает, что никакие два индуктивных кардинальных числа не имеют одного и того же последующего элемента, то есть мы не можем иметь $m + 1 = n + 1$ до тех пор, пока мы не будем иметь $m = n$, если m и n являются кардинальными числами. В главе VIII мы имели случай использовать примерно то же предположение, что упомянутое сейчас предположение Пеано, а именно, что если n есть индуктивное кардинальное число, n не равно $n + 1$. Можно было бы подумать, что это должно быть доказано. Мы можем доказать, что если α есть индуктивный класс и n есть число членов α, тогда n не равно $n + 1$. Это предположение легко доказывается по индукции, и в голову может прийти мысль, что оно влечет и другое предположение. Но на самом деле это не так, поскольку может не быть такого класса, как α. Но отсюда следует, что если n есть индуктивное кардинальное число, такое, что имеется по крайней мере один класс, имеющий n членов, тогда n не равно $n + 1$. Аксиома бесконечности заверяет нас (истинным или ложным образом), что имеются классы, имеющие n членов, и, таким образом, позволяет нам утверждать, что n не равно $n + 1$. Но без этой аксиомы мы остаемся перед возможностью, что оба числа n и $n + 1$ могут оказаться нуль-классом.

Давайте проиллюстрируем эту возможность на таком примере: предположим, что в мире есть только девять индивидов (я должен попросить читателя подождать объяснения, что имеется в виду под термином «индивид»). Тогда индуктивные кардинальные числа от 0 до 9 будут такими, как мы и ожидаем, но 10 (определенное как 9 + 1) будет нуль-классом. Нужно вспомнить, что $n + 1$ есть совокупность всех тех классов, которые имеют термин x такой, что когда x отнят, остается класс n терминов. Применяя это определение, мы видим, что в предполагаемом нами случае 9 + 1 есть класс, не состоящий из классов, то есть нуль-класс. То же самое будет истинным о 9 + 2 и вообще о $9 + n$, если n не есть нуль. Таким образом, 10 и все последующие индуктивные числа будут тождественны, так как все они будут нуль-классом. В таком случае индуктивные кардинальные числа не образуют прогрессии, и не будет истинным утверждение о том, что два числа не могут иметь один и тот же последующий элемент, потому что 9 и 10 в качестве последующего элемента будут иметь нуль-класс. (При этом 10 является нуль-классом.) И вот для предотвращения таких арифметических катастроф и требуется аксиома бесконечности.

Существенно то, что пока мы имеем дело с арифметикой конечных целых чисел и не вводим бесконечных целых или бесконечных классов, или рядов конечных целых или дробей, все желаемые результаты можно получить без аксиомы бесконечности. То есть мы можем иметь дело со сложением, умножением, возведением в степень конечных целых чисел и дробей, но мы не можем иметь дело с бесконечными целыми числами или иррациональными числами. Таким образом, мы не имеем теории трансфинитных чисел и теории действительных чисел. Надо объяснить, почему это так.

Предполагая, что число индивидов в мире *n*, мы имеем число классов индивидов равным 2^n. Этот результат был изложен в главе VIII: число классов, содержащихся в классе, имеющем *n* членов, равно 2^n. И 2^n всегда больше, чем *n*. Отсюда число классов в мире больше числа индивидов. Если мы предположим, что число индивидов равно 9, как мы только что сейчас сделали, число классов будет равно 2^9, то есть 512. Таким образом, если мы возьмем наши числа для счета классов, а не индивидов, наша арифметика будет нормальной до тех пор, пока мы не достигнем 512: первое число, которое окажется нулем, будет 513. Если мы продвинемся к классам классов, мы окажемся еще в более замечательной ситуации: число их будет 2^{512}, число столь большое, что оно потрясает воображение, поскольку оно записывается с использованием 153 цифр. Если мы перейдем к классам классов классов, мы получим число, равное двум в степени со 153 цифрами; количество цифр в этом числе в три раза больше, чем 10^{152}. В условиях недостатка бумаги такое число выписывать полностью нежелательно, и если мы хотим получить еще бо́льшие числа, это можно сделать через углубление в логическую иерархию. На этом пути для любого заданного индуктивного кардинального числа можно найти место среди чисел, не являющихся нулем, просто продвигаясь вглубь логической иерархии на достаточное расстояние[1].

Что касается рациональных чисел, то там ситуация такая же. Если рациональное число μ/ν должно иметь ожидаемые свойства, должно быть достаточно объектов любого рода, которые подлежат счету, так, чтобы гарантировать, что внезапно не вторгся бы нуль-класс. Но это может быть гарантировано для любого заданного числа μ/ν без аксиомы бесконечности, просто продвижением по логической иерархии на достаточную дистанцию. Если мы не сможем сделать этого счетом индивидов, мы можем постараться прибегнуть к счету классов индивидов; если и этого недостаточно, мы попытаемся с классами классов, и т. д. В конце концов, сколь мало бы ни было в мире индивидов, мы достигнем стадии, где имеется больше чем μ объектов, каким бы ни было индуктивное число μ. Даже если бы не было индивидов вообще, это все равно было бы истинным, потому что тогда был бы один класс, а именно нуль-класс, 2 класса классов (а именно нуль-класс классов и класс, чей единственный член есть нуль-класс индивидов), 4 класса классов классов, 16 следующего уровня, 65 536 на следующем и т. д. Таким образом, не потребуется такого предположения, как аксиома бесконечности, для того чтобы достичь любого заданного рационального числа или индуктивного кардинального числа.

Аксиома требуется, когда мы имеем дело с целым классом или рядом индуктивных кардинальных чисел или рациональных чисел. Нам

---

[1] По этому поводу см.: *Principia Mathematica*, vol. ii, *120ff. Соответствующая проблема в связи с рациональными числами изложена там же, vol. iii, *303ff.

нужен весь класс индуктивных кардинальных чисел для установления существования $\aleph_0$ и весь ряд для установления существования прогрессий: для получения этих результатов необходимо, чтобы мы могли быть способны сделать единственный класс, в котором ни одно индуктивное кардинальное число не было бы нулем. Нам нужен весь ряд рациональных чисел в порядке величины для того, чтобы определить действительные числа как сегменты: это определение не даст желаемого результата до тех пор, пока ряд рациональных чисел не будет компактным, чего не может быть, если всеобщее число рациональных чисел, на рассматриваемой стадии, является конечным.

Было бы естественным предположить — как я и делал сам в прошлом, — что посредством таких конструкций, которые мы обсуждаем, аксиома бесконечности может быть *доказана.* Можно сказать: пусть число индивидов есть n, где n может быть и 0, что не портит нашей аргументации; тогда, если мы образуем полное множество индивидов, классов, классов классов и т. д., взятые все вместе они образуют число терминов в нашем целом множестве:

$$n + 2n + 2^{2^n} \ldots \text{ до бесконечности,}$$

которое есть $\aleph_0$. Таким образом, беря все виды объектов вместе и не ограничивая себя объектами какого-либо одного из типов, мы определенно получим бесконечный класс, и в этом случае аксиома бесконечности нам не нужна. Вот что пока можно сказать по этому поводу.

Сейчас, перед тем как углубиться в этот аргумент, первое, что нам нужно заметить, что есть тут ощущение какого-то фокуса: это напоминает фокусника, вытаскивающего из шляпы предметы. Человек, который носил шляпу, полностью уверен в том, что там не было кроликов, но он не в силах объяснить, откуда они там появились. Так и наш читатель, если у него есть здравое чувство реальности, будет убежден, что невозможно произвести бесконечную совокупность из конечной совокупности, хотя он, вполне возможно, не сможет найти изъянов в аргументации. Было бы, правда, ошибкой уверовать в чувство, что вас обманывают; подобно эмоциям, чувства могут сбить нас с толку. Но они представляют в первую очередь основания для очень тщательной проверки аргумента, который возбуждает эти чувства. И когда вышеприведенный аргумент подвергается проверке, он оказывается, с моей точки зрения, ошибочным, хотя ошибка эта весьма тонкая, избежать которой довольно трудно.

Ошибка, имеющаяся в данном случае, может быть названа «смешением типов». Для того чтобы объяснить понятие «типа» полностью, потребовался бы целый том; больше того, цель этой книги состоит в избегании таких общих тем, которые неясны и противоречивы, и в изолировании для удобства начинающих тех частей, которые могут быть приняты как олицетворяющие математически определенные истины. Теория типов не принадлежит к законченным и определенным частям нашей темы: многое находится еще в зачаточной форме, есть много неясностей и путаницы. Но необходимость *некоторой* доктрины типов менее сомнительна, чем точная форма, которую доктрина должна иметь; и в связи с аксиомой бесконечности легко видеть необходимость некоторой такой доктрины.

Эта необходимость вытекает, например, из «противоречия наибольшего кардинального числа». Мы видели в главе VIII, что число классов, содержащееся в данном классе, всегда больше, чем число членов этого класса, и мы делаем вывод, что не имеется наибольшего кардинального числа. Но если бы мы могли, как и предполагали некоторое время назад, сложить вместе класс индивидов, класс классов индивидов и т. д., мы могли бы получить класс, членами которого были бы собственные подклассы. Класс, состоящий из всех объектов, которые могут быть подсчитаны, независимо от их вида, должен, если он вообще имеется, иметь кардинальное число, которое является самым большим из возможных. Так как все его подклассы будут его членами, подклассов не может быть больше, чем членов класса. Так мы приходим к противоречию.

Когда я в первый раз набрел на это противоречие в 1901 году, я попытался найти изъян в доказательстве Кантора о том, что нет наибольшего кардинального числа, которое мы привели в главе VIII. Применяя это доказательство к предполагаемому классу всех вообразимых объектов, я пришел к новому и более простому противоречию, а именно:

Всеобъемлющий класс, который мы рассматриваем, должен включать все, и в том числе себя в качестве одного из его членов. Другими словами, если имеется такая вещь, как «все», тогда «все» есть нечто и есть член класса «все». Но нормально класс не есть член самого себя. Человечество, например, не есть человек. Образуем сейчас ансамбль всех классов, которые не являются членами самих себя. Это есть некоторый класс: является ли он членом самого себя? Если он является, то он является одним из классов, которые не являются членами самих себя, то есть он не есть член самого себя. Если он не является членом самого себя, он не является одним из тех классов, которые не являются членом самого себя, то есть он есть член самого себя. Таким образом, две гипотезы — что он является членом самого себя и что он не является членом самого себя — приводят к своему отрицанию. Это противоречие.

Нетрудно сотворить столько таких противоречий, сколько захочется. Разрешение таких противоречий посредством теории типов полностью изложено в *Principia Mathematica*[1], а также более кратко в статьях, представленных автором в *American Journal of Mathematics*[2]

---

[1] Vol. i, Introduction, chap., ii, *12 and *20; vol. ii, Prefatory Statement.

[2] *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*, vol. xxx, 1908, p. 222–252.

и в *Revue de Métaphysique et de Morale*[1]. Здесь достаточно наброска решения.

Ошибка состоит в образовании того, что мы можем назвать «нечистыми» классами, то есть классов, которые не являются чистыми по своему типу. Как мы увидим в более поздней главе, классы являются логической фикцией; и утверждение, которое кажется утверждением о классе, будет значимо только в том случае, если оно может быть переведено в такую форму, где нет упоминания о классе. Это налагает ограничение на способы, которыми номинально, но не реально, осуществляется значимо именование классов: предложение или множество символов, в котором такие псевдоимена входят неверным образом, не являются ложными, а просто являются бессмысленными. Предположение о том, что класс является членом самого себя или что он не является членом самого себя, является как раз бессмысленным. Более обще предполагать, что класс индивидов есть член или не есть член другого класса индивидов, бессмысленно; конструировать символически некоторый класс, чьи члены не находятся на одном уровне логической иерархии, означает использование символов таким образом, что они больше ничего не символизируют.

Таким образом, если имеется n индивидов в мире и 2^n классов индивидов, мы не можем образовать новый класс, состоящий из индивидов и классов и имеющий $n + 2^n$ членов. На этом пути попытки избежать необходимости аксиомы бесконечности проваливаются. Я не претендую на объяснение доктрины типов, и лишь указываю, в самых грубых чертах, почему есть необходимость в такой доктрине. Я имею целью сказать ровно столько, сколько требуется, чтобы показать, что мы не можем *доказать* существование бесконечных чисел и классов фокусническими методами, которые мы обсуждаем. Остаются, однако, некоторые другие возможные методы, которые следует рассмотреть.

Различные аргументы по поводу существования бесконечных классов даны в *Principles of Mathematics*, § 339 (p. 357). В той степени, в какой эти аргументы предполагают, что если n есть индуктивное кардинальное число, n не равно $n + 1$, они уже разбирались. Имеется аргумент, рассмотренный Платоном в диалоге «Парменид», суть которого в том, что если имеется такое число, как 1, тогда 1 имеет бытие; но 1 не тождественно бытию, и, следовательно, 1 и бытие есть два, и, следовательно, имеется такое число, как 2, а 2 вместе с 1 составляют класс из трех терминов и т. д. Этот аргумент ложен, частично потому, что «бытие» не есть термин, имеющий некоторое определенное значение, а еще больше потому, что если для него изобретено определенное значение, будет найдено, что числа не имеют бытия — они на самом деле то, что называется «логическими фикциями», как мы это увидим, когда подойдем к рассмотрению определения классов.

[1] *Les paradoxes de la logique*, 1906, p. 627–650.

Аргумент, по которому число чисел от 0 до n (включительно для обоих терминов) есть $n + 1$, зависит от предположения, что для любого числа вплоть до n ни одно число не равно своему последующему элементу. А это, как мы видели, не всегда истинно, если ложна аксиома бесконечности. Должно быть понятно, что равенство $n = n + 1$, которое могло бы быть истинно для конечного n, в случае, если n превышает общее число индивидов в мире, будет совершенно другим, нежели равенство для рефлективных чисел. В случае рефлективных чисел равенство означает, что если задан класс n терминов, то этот класс «подобен» классу, получаемому прибавлением другого термина. Но в применении к числу, которое слишком велико для действительного мира, оно просто означает, что не имеется класса с n индивидами. Это не значит, что если мы нагромоздим иерархию типов, достаточно большую для гарантии существования класса из n терминов, то обнаружим, что этот класс «подобен» одному из его $n + 1$ терминов, потому что если n есть индуктивное число, то это не случится, независимо от истинности или ложности аксиомы бесконечности.

Существует аргумент, использованный Больцано[1] и Дедекиндом[2] для доказательства существования рефлективных классов. Вкратце аргумент таков: объект не является тождественным с идеей объекта, но имеется (по крайней мере, в сфере бытия) идея некоторого объекта. Отношение объекта к идее является одно-однозначным, а идеи являются лишь некоторыми из объектов. Отсюда отношение «идея (чего-то)» представляет отражение целого класса объектов в часть самого себя, а именно в ту часть, которая составлена из идей. Соответственно, класс объектов и класс идей являются бесконечными. Этот аргумент интересен не только сам по себе, но и потому, что ошибки или то, что я принимаю за содержащиеся в нем ошибки, являются весьма поучительными. Главная ошибка состоит в предположении, что имеется идея для каждого объекта. Конечно, очень трудно решить, что понимается под «идеей», но давайте предположим, что мы знаем это. Мы должны тогда предположить, что, начиная, скажем, с Сократа, имеется идея Сократа, и так до бесконечности. Но ясно, что это не так, в том смысле, что все эти идеи эмпирически существуют в умах людей. За пределами третьей и четвертой стадии они становятся мифическими. Если аргумент все-таки значим, то «идеи» должны быть идеями Платона, существующими на небесах, и определенно не на земле. Но тогда становится сомнительным, а существуют ли такие идеи. Если мы все-таки знаем, что они существуют, то на основании некоторой логической теории, доказывающей, что для вещи необходимо, чтобы была ее идея. Мы определенно не можем получить этот результат эмпирически, или приложить его, как говорил Дедекинд, к «Gedankenwelt» — к миру моих мыслей.

---

[1] Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, 13.

[2] Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* № 66.

Если бы мы захотели заняться полной проверкой отношения идеи к объекту, мы должны были бы провести большое число психологических и логических исследований, которые не имеют прямого отношения к нашей основной теме. Но некоторые вещи стоит отметить. Если идея понимается логически, она может быть *идентична* объекту или же может быть *дескрипцией* (в смысле, объясняемом в следующих главах). В первом случае аргумент ложен, потому что для доказательства рефлективности существенным является различие объекта и идеи. Во втором случае аргумент также ложен, потому что отношение объекта и дескрипции не является одно-однозначным: имеется неисчислимое количество правильных дескрипций любого заданного объекта. Сократ, например, может быть описан как «учитель Платона», или «философ, который выпил цикуту», или как «муж Ксантиппы». Если — возвращаясь к оставшейся гипотезе — «идея» интерпретируется психологически, то тут нужно подчеркнуть, что нет никакой определенной психологической сущности, которая могла бы быть названа (единственной) идеей объекта: имеется неисчислимое количество вер и установок, каждая из которых может быть названа (неопределенной) идеей объекта в том смысле, в котором мы могли бы сказать «моя идея Сократа совершенно отлична от вашей», но нет никакой центральной сущности (за исключением самого Сократа), которая могла бы связать различные «идеи о Сократе», и значит, нет никакого одно-однозначного отношения идеи и объекта, которое предполагается в аргументе. И как мы уже заметили, с психологической точки зрения (в расширенном смысле) идей существует вряд ли больше по сравнению с самой малой частью вещей в мире. По всем этим причинам аргумент, приведенный выше, в пользу логического существования рефлективных классов должен быть отвергнут.

Можно было бы подумать, что бы там ни говорилось о *логических* аргументах, *эмпирические* аргументы, выводимые из пространства и времени, разнообразия цветов и прочего, вполне достаточны для доказательства реального существования бесконечного числа отдельных вещей. Я в это не верю. У нас нет никаких причин верить, если исключить предубеждения, в бесконечность пространства и времени, во всяком случае в смысле, в котором пространство и время являются физическими фактами, а не математическими фикциями. Мы естественно считаем пространство и время непрерывными или, по крайней мере, компактными; но и это опять-таки главным образом предубеждение. Теория квантов в физике, является она истинной или ложной, иллюстрирует тот факт, что физика никогда не сможет привести доказательств непрерывности, хотя вполне возможно, что представит опровержение этому. Чувств недостаточно для того, чтобы точно различить непрерывное движение и быструю дискретную последовательность, которая знакома нам по кино. Мир, в котором все движение состояло бы из серии небольших конечных скачков, мог бы быть эмпирически неотличим от такого мира, где движение непрерывно. Адекватная защита этих тезисов потребовала бы слишком много места, и сказанное мною дано читателю лишь для размышления. Если мои соображения верны, то нет никаких эмпирических причин верить в то, что число вещей в мире бесконечно; но также нет в настоящее время эмпирических причин полагать, что их число конечно, хотя теоретически можно допустить, что однажды могут появиться некоторые свидетельства, хотя и не окончательные, в пользу конечности.

Из того факта, что бесконечное не является самопротиворечивым, но также и не демонстриуемо логически, мы должны заключить, что ничего не может быть известно априори относительно того, является ли мир конечным или бесконечным. Если принять терминологию Лейбница, то по нашему заключению некоторые из возможных миров конечны, некоторые бесконечны, и у нас нет средств узнать, к какому типу относится наш действительный мир. Аксиома бесконечности будет истинна в одних возможных мирах и ложна в других, и является ли она истинной или ложной в нашем мире, мы сказать не можем.

По всей главе нами без объяснений использовались в качестве синонимов слова «индивид» и «вещь» [particular]. Было бы невозможно объяснить их адекватно без дальнейших деталей теории типов, что вряд ли возможно в рамках настоящей книги. Тем не менее можно сказать, перед тем как мы оставим эту тему, несколько слов по этому поводу, чтобы устранить путаницу в использовании этих слов.

В обычном утверждении мы можем отличить глагол, выражающий атрибут или отношение, от существительного, выражающего субъект атрибуции или терминов отношения. «Цезарь жил» приписывает атрибут Цезарю; «Брут убил Цезаря» выражает отношение между Цезарем и Брутом. Используя слово «субъект» в обобщенном смысле, мы можем назвать и Цезаря, и Брута субъектами этого суждения: тот факт, что Брут есть грамматический субъект, а Цезарь — объект, является несущественным с логической точки зрения; так, то же самое может быть выражено словами «Цезарь был убит Брутом», где Цезарь есть грамматический субъект. Таким образом, в простых суждениях мы будем иметь атрибут или отношение, имеющее место между двумя или более «субъектами» в расширенном смысле. (Отношение может иметь больше, чем два термина, например, «A дает B для C» есть отношение трех терминов.) Часто случается, при более тщательном рассмотрении, что термины, кажущиеся субъектами, не обнаруживаются среди реальных субъектов, но могут быть подвержены анализу. В результате этого анализа, однако, их место занимает новый субъект. Случается также, что глагол грамматически может быть сделан субъектом: например, мы можем сказать: «Убийство есть отношение, имеющее место между Брутом и Цезарем». Но в таких случаях грамматика уводит в сторону, и, следуя правилам философской грамматики, в нашем предложении Брут и Цезарь появятся в качестве субъектов, а убийство как глагол.

Мы, таким образом, пришли к концепции терминов, которые, когда они входят в предложение, могут входить только в качестве субъектов и никогда по-другому. Это есть часть старого схоластического определения *субстанции*, но постоянство сквозь время, принадлежащее этому понятию, не входит в то понятие, которое мы обсуждаем. Мы определим «собственные имена» как те термины, которые могут входить в суждение только как *субъекты* (используя слово «субъект» в предложенном нами расширенном смысле). Мы далее определим «индивиды» и «вещи» [particular] как объекты, которые могут быть поименованы собственными именами. (Было бы лучше определить их прямо, нежели посредством символов, которыми они символизируются; но для того, чтобы сделать это, нам пришлось бы углубиться в метафизику гораздо больше, чем желательно здесь.)

Конечно, вполне возможно, что здесь имеется бесконечный регресс: что на первый взгляд появляется как вещь, при близком рассмотрении на самом деле оказывается классом или некоторым комплексом. Если бы это было так, то аксиома бесконечности должна была быть, конечно, истинной. Но если бы это не было так, то должно было бы теоретически возможно в анализе достичь окончательных субъектов, которые и придают значение словам «индивид» или «вещь». Именно к ним применяется аксиома бесконечности. Если она истинна о них, то она истинна и о классах, из них состоящих, и о классах классов и т. д. Подобным же образом, если она ложна о них, она ложна о всей иерархии их. Поэтому вполне естественно провозгласить аксиому именно о них, нежели о некоторой стадии в иерархии. Но что касается вопроса о том, является ли аксиома истинной или ложной, у нас до сих пор нет метода обнаружения этого.

Глава XIV
НЕСОВМЕСТИМОСТЬ И ТЕОРИЯ ДЕДУКЦИИ

Мы исследовали, правда, несколько бегло, ту часть философии математики, которая не требует критического рассмотрения идеи *класса.* В предыдущей главе, однако, мы столкнулись с такими проблемами, которые настоятельно требуют такого рассмотрения. Перед тем как проделать это, мы должны рассмотреть некоторые другие части философии математики, которые мы до сих пор игнорировали. В целостном рассмотрении предмета те части, которых мы сейчас будем касаться, идут сначала: они являются более фундаментальными, чем все, что мы до сих пор рассматривали. Три темы будут занимать нас до того, как мы перейдем к теории классов, а именно: (1) теория дедукции, (2) пропозициональные функции, (3) дескрипции. Из них третья логически не предполагается теорией классов, но она является более простым примером такого *рода* теории, который нужен в трактовке классов. А в настоящей главе нас будет занимать первая из тем — теория дедукции.

Математика является дедуктивной наукой: начиная с определенных предпосылок, она прибывает, строгим процессом дедукции, к различным теоремам, которые и составляют математику. Это верно, что в прошлом математическая дедукция часто была лишена строгости; правда и то, что совершенная строгость является едва ли достижимым идеалом. Тем не менее, если в математическом доказательстве отсутствует строгость, доказательство дефектно; бесполезно при этом утверждать, что здравый смысл подсказывает нам, что доказательство верно, потому что, если бы мы полагались только на здравый смысл, нам лучше было бы и вовсе избавиться от аргументации, нежели допускать ошибку в доказательстве во имя спасения здравого смысла. Никакая апелляция к здравому смыслу, или «интуиции», или к чему-либо еще, за исключением строгой дедуктивной логики, не нужна математике, как только сформулированы посылки.

Кант, заметив, что геометры его времени не могут доказать своих теорем с помощью одной лишь аргументации без помощи фигур, изобрел теорию математического размышления, в соответствии с которой вывод никогда не является строго логическим, но всегда требует поддержки того, что называется «интуицией». Вся тенденция в развитии современной математики, с ее все более усиливающимися требованиями к строгости, свидетельствует против теории Канта. Вещи, которые не могли быть *доказаны* во времена Канта, не могли быть *познаны* вообще — например, аксиома о параллельных. Что может быть познано в математике и математическими методами, может быть дедуцировано из чистой логики. Все остальное, что принадлежит человеческому познанию, может быть узнано другим образом — эмпирически, через чувства или опыт в некоторой форме, но не априорно. Позитивные основания для этого тезиса можно найти в *Principia Mathematica*; защита их дана в *Principles of Mathematics.* Мы не можем здесь сделать больше, чем отослать читателя к этим работам, так как предмет обсуждения слишком объемен, чтобы говорить о нем походя. А тем временем мы будем предполагать, что вся математика является дедуктивной, и перейдем к исследованию того, что входит в дедукцию.

В дедукции мы имеем одно или больше предложений, называемых *посылками*, из которых мы выводим предложение, называемое *заключением.* Для наших целей будет удобно, когда несколько посылок записываются как одно предложение, так что мы могли бы говорить об одной посылке и одном заключении. Таким образом, мы будем считать дедукцию процессом, в котором мы переходим от знания определенного предложения, посылки, к знанию определенного другого предложения, заключения. Мы не будем считать такой процесс *логическим* до тех пор, пока он не будет *правильным*, то есть до тех пор, пока не будет такого отношения между посылкой и заключением, когда мы имеем право верить заключению, если мы знаем об истинности посылки. Именно это отношение представляет главный интерес в логической теории дедукции.

Для того чтобы получить истину в процессе вывода предложения, мы должны знать, что некоторое другое предложение является истинным и что между ними имеется отношение, называемое «импликацией», то есть что (как мы говорим) посылка «имплицирует» или влечет заключение. (Мы вскоре определим это отношение.) Или мы можем знать, что некоторое другое предложение ложно и что имеется отношение между двумя предложениями, называемое «дизъюнкцией», выражаемое через «*p* или *q*»[1], так что знание того, что одно из предложений ложно, позволяет нам вывести, что другое предложение истинно. А может быть, мы пожелаем вывести *ложность* некоторого предложения, а не истинность. Это может быть выведено из истинности другого предложения при условии, что мы знаем, что оба предложения являются «несовместимыми», то есть если одно из них истинно, то другое ложно. Это может быть также сделано из ложности другого предложения, точно так же, как из одного истинного предложения выводилось другое истинное предложение; то есть из ложности *p* мы можем вывести ложность *q*, когда *q* влечет *p*. Все эти четыре ситуации — типы вывода. Когда наш ум настроен на вывод, кажется естественным взять «импликацию» в качестве примитивного фундаментального отношения, так как это отношение должно содержаться между *p* и *q*, если мы способны вывести *истинность q* из *истинности p.* Но по техническим причинам это не лучшая идея в качестве примитивной. До того как перейти к примитивным идеям и определениям, давайте рассмотрим различные функции от предложений, образованных вышеупомянутыми отношениями предложений.

Наипростейшей из таких функций является отрицание, «не-*p*». Это такая функция от *p*, которая истинна, когда *p* ложно, и ложна, когда *p* истинно. Удобно говорить об истинности предложения или о его ложности как об его «истинностном значении»[2]; то есть *истина* есть «истинностное значение» истинного предложения и *ложность* есть истинностное значение ложного предложения. Таким образом, не-*p* имеет противоположное истинностное значение по сравнению с *p*.

В качестве следующей мы можем взять *дизъюнкцию*, «*p* или *q*». Это функция, чье истинностное значение есть истина, когда *p* истинно, и также, когда *q* истинно, но ложно, когда оба *p* и *q* ложны.

Следующей мы возьмем *конъюнкцию*, «*p* и *q*». Она имеет истину в качестве истинностного значения, когда оба *p* и *q* истинны; в противном случае ее истинностное значение есть ложь.

---

[1] Мы будем использовать буквы *p*, *q*, *r*, *s*, *t* для обозначения пропорциональных переменных.

[2] Этот термин ввел Фреге.

Следующей возьмем *несовместимость*, то есть «*p* и *q* не являются оба истинными». Это отрицание конъюнкции; это также дизъюнкция отрицаний *p* и *q*, то есть это «не-*p* или не-*q*». Ее истинностное значение есть истина, когда *p* ложно, и подобным же образом когда *q* ложно; его истинностное значение есть ложь, когда *p* и *q* оба истинны.

Теперь возьмем импликацию, то есть «*p* влечет *q*», или «если *p*, то *q*». Она должна пониматься в самом широком смысле, позволяющем нам вывести истинность *q*, когда мы знаем истинность *p*. Таким образом, мы интерпретируем ее как означающую: «До тех пор, пока *p* не оказывается ложной, *q* истинна», или «или *p* ложно, или *q* истинно» (тот факт, что «влечет» может иметь другие значения, нас не касается; мы берем то значение, которое удобно для нас). То есть «*p* влечет *q*» должно значить «не-*p* или *q*»: его истинностное значение должно быть истинно, если *p* ложно, или же если *q* истинно, и ложь, если *p* истинно и *q* ложно.

Мы имеем, таким образом, пять функций: отрицание, дизъюнкцию, несовместимость, конъюнкцию и импликацию. Мы могли бы добавить другие функции, например, совместную ложность, «не-*p* и не-*q*», но и этих пяти достаточно. Отрицание отличается от всех остальных тем, что является функцией от одного предложения, в то время как остальные функции являются функциями от двух предложений. Но все пять функций характеризуются тем, что их истинностное значение зависит только от истинностных значений предложений, являющихся аргументами функций. Если заданы истинность или ложность *p*, или *p* и *q* (в зависимости от вида функции), тем самым заданы истинность или ложность отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, несовместимости или импликации. Функция от предложений, которая имеет это свойство, называется «истинностной функцией».

Все значение истинностной функции исчерпывается утверждением об обстоятельствах, при которых она истинна или ложна. «Не-*p*», например, есть просто функция от *p*, которая истинна, когда *p* ложно, и ложна, когда *p* истинно: никакого другого значения ей не приписывается. То же самое относится к «*p* или *q*» и к остальным функциям. Отсюда следует, что две функции, имеющие одни и те же истинностные значения для всех значений аргумента, являются неразличимыми. Например, «*p* и *q*» есть отрицание «не-*p* или не-*q*» и обратно; таким образом, любая из них может быть *определена* как отрицание другой. Нет в истинностных функциях никакого значения сверх и помимо того, как, при каких условиях они истинны или ложны.

Ясно, что указанные выше пять истинностных функций не являются независимыми. Мы можем определить некоторые из них в терминах других. Нет никаких трудностей в сведении к двум из них; в *Principia Mathematica* выбраны отрицание и дизъюнкция. Импликация тогда определяется как «не-*p* или *q*»; несовместимость как «не-*p* или не-*q*»; конъюнкция как отрицание несовместимости. Но как было показано

Шеффером[1], мы можем ограничиться *одной* примитивной идеей вместо пяти, а Нико[2] показал, что это позволит нам свести примитивные предложения, требуемые в теории дедукции, к двум неформальным принципам и одному формальному. Для этой цели мы должны взять как неопределяемую либо несовместимость, либо совместную ложь. Мы выберем первый вариант.

Наша примитивная идея есть некоторая истинностная функция, называемая «несовместимость», которую мы обозначим через p/q. Отрицание может быть определено немедленно как несовместимость предложения с самим собой, то есть «не-p» определяется как p/p. Дизъюнкция есть несовместимость не-p и не-q, то есть $(p/p)/(q/q)$. Импликация есть несовместимость p и не-q, то есть $p/(q/q)$. Конъюнкция есть отрицание несовместимости, то есть $(p/q)/(p/q)$. Таким образом, все наши остальные четыре функции определены в терминах несовместимости.

Ясно, что нет никакого ограничения в конструировании истинностных функций либо через введение новых аргументов, либо через их повторение. Нас эта проблема интересует в связи с понятием вывода.

Если мы знаем, что p истинно и что p влечет q, мы можем утверждать q. Есть всегда *нечто* неизбежно психологическое в выводе: вывод есть метод получения нового знания, и отношение, которое позволяет нам делать вывод правильным, совсем не является психологическим; но реальный переход от утверждения p к утверждению q есть процесс психологический, и мы не должны представлять его в чисто логических терминах.

В математической практике, когда мы делаем вывод, мы всегда имеем некоторое выражение, содержащее пропозициональные переменные, скажем, p и q, которое является истинным для всех значений p и q просто благодаря своей форме. Мы также имеем другое выражение, являющееся частью первого, которое тоже является истинным для всех значений p и q. Благодаря принципам вывода мы можем опустить эту часть из нашего исходного выражения и утверждать то, что осталось. Это несколько абстрактное рассмотрение может быть сделано яснее несколькими примерами.

Давайте предположим, что мы знаем пять формальных принципов дедукции, приведенных в *Principia Mathematica* (М. Нико свел их к одному, но поскольку оно является очень сложным, мы начнем с пяти). Эти пять предложений таковы:

(1) «p или p» влечет p — то есть если или p истинно, или p истинно, тогда p истинно.

(2) q влечет «p или q» — то есть, дизъюнкция «p или q» истинна, если одна из ее альтернатив истинна.

[1] Trans. Am. Math. Soc., vol. xiv, p. 481–488.

[2] Proc. Camb. Phil. Soc., vol. xix, i, January 1917.

(3) «*p* или *q*» влечет «*q* или *p*». Это предложение нам не потребовалось бы, имей мы теоретически более совершенную нотацию, поскольку в понятии дизъюнкции нет идеи порядка и поэтому «*p* или *q*» и «*q* или *p*» должны быть тождественны. Но так как наши символы в любом приемлемом виде неизбежно вводятся по некоторому порядку, нам нужны подходящие предположения, показывающие, что порядок не является существенным.

(4) Если или *p* истинно, или «*q* или *r*» истинно, тогда или *q* истинно, или «*p* или *r*» истинно. (Сложность этого предложения служит для увеличения его дедуктивной силы.)

(5) Если *q* влечет *r*, тогда «*p* или *q*» влечет «*p* или *r*».

Таковы *формальные* принципы дедукции, используемые в *Principia Mathematica.* Формальный принцип дедукции имеет двойное использование, и для того чтобы сделать это яснее, мы привели здесь эти пять предложений. Принцип используется как посылка вывода, а также используется для установления того факта, что посылка влечет заключение. В схеме вывода мы имеем предложение *p* и предложение «*p* влечет *q*», откуда мы выводим *q.* Теперь, когда мы имеем дело с принципами дедукции, наш аппарат примитивных предложений должен дать в нашем выводе как *p*, так и «*p* влечет *q*». То есть наши правила дедукции должны использоваться не *только как правила*, которые позволяют нам устанавливать «*p* влечет *q*», но *также* и как посылки, то есть какр в нашей схеме. Предположим, например, что мы хотим доказать, что если *p* влечет *q*, тогда, если *q* влечет *r*, то отсюда следует, что *p* влечет *r.* Мы здесь имеем отношение трех предложений, устанавливающее импликации. Пусть

$$p_1 = p \text{ влечет } q,\ p_2 = q \text{ влечет } r \text{ и } p_3 = p \text{ влечет } r.$$

Мы должны доказать, что p_1 влечет, что p_2 влечет p_3. Возьмем пятый из наших упомянутых выше принципов, подставим не-*p* вместо *p* и вспомним, что «не-*p* или *q*» по определению есть то же самое, что «*p* влечет *q*». Тогда наш пятый принцип дает:

Если *q* влечет *r*, тогда «*p* влечет *q*» влечет «*p* влечет *r*»,
то есть «p_2 влечет, что p_1 влечет p_3».

Назовем это предложение *A*.

Но четвертый из наших принципов, когда мы подставляем не-*p*, не-*q* вместо *p* и *q*, и с учетом определения импликации, становится:

«Если *p* влечет, что *q* влечет *r*, тогда *q* влечет, что *p* влечет *r*».

При подстановке p_2 вместо *p*, p_1 вместо *q* и p_3 вместо *r* предложение принимает вид:

«Если p_2 влечет, что p_1 влечет p_3, тогда p_1 влечет, что p_2 влечет p_3».

Назовем это предложение *B.*

С помощью пятого принципа мы доказываем, что

«p_2 влечет, что p_1 влечет p_3»,

которое и является нашим предложением *A*.

Таким образом, мы имеем здесь пример схемы вывода, так как *A* представляет *p* в нашей схеме, а *B* представляет «*p* влечет *q*». Отсюда, мы прибываем к *q*, а именно

«p_1 влечет, что p_2 влечет p_3»,

что и требовалось доказать. В этом доказательстве применение нашего пятого принципа, дающего *A*, является применением независимой посылки. А вот применение нашего четвертого принципа, дающего *B*, используется в качестве *формы* вывода. Формальное и материальное использование посылок в дедукции весьма переплетены в теории, и рассмотрение их по отдельности не является на практике таким уж важным делом, памятуя, что теоретически они различны.

Самый простой способ получения новых результатов из посылок — это как раз тот, который был проиллюстрирован на примере дедукции выше, но который на самом деле вряд ли может быть назван дедукцией. Примитивные предложения, какими бы они ни были, должны рассматриваться как утверждаемые для всех возможных значений пропозициональных переменных *p*, *q*, *r*, которые входят в них. Мы можем, следовательно, подставлять вместо (скажем) *p* любое выражение, чьим значением является всегда суждение, то есть например, не-*p*, «*s* влечет *t*» и так далее. Посредством таких подстановок мы получаем множество специальных случаев из нашего исходного предложения, но с практической точки зрения получаемые предложения являются в сущности новыми. Допустимость подстановок подобного рода гарантируется посредством неформального принципа вывода[1].

Мы можем сейчас установить один формальный принцип вывода, к которому Нико свел пять упомянутых выше принципов. Для этой цели мы сначала должны показать, как определенные истинностные функции могут быть определены в терминах несовместимости. Мы уже видели, что

$p/(q/q)$ означает «*p* влечет *q*».

Мы теперь видим, что

$p/(q/r)$ означает «*p* влечет и *q* и *r*».

Действительно, это выражение значит «*p* несовместимо с несовместимостью *q* и *r*», то есть «*p* влечет, что *q* и *r* не несовместимы», то есть «*p* влечет, что *q* и *r* оба истинны», потому что, как мы видели, конъюнкция *q* и *r* есть отрицание их несовместимости.

---

[1] Ни один такой принцип не был явно сформулирован в *Principia Mathematica* или в упомянутой выше статье Нико. Но это кажется мне упущением.

Заметим далее, что $t/(t/t)$ значит «t влечет само себя». Это частный случай $p/(q/q)$.

Давайте будем писать $\bar{p}$ для отрицания p; таким образом $\overline{p/s}$ будет означать отрицание p/s, то есть будет значить конъюнкцию p и s. Можно убедиться, что

$$(s/q)/\ \overline{p/s}$$

выражает несовместимость s/q с конъюнкцией p и s; другими словами, оно устанавливает, что если p и s оба истинны, s/q сложно, то есть s и q оба истинны. Если сказать проще, оно устанавливает, что p и s совместно влекут совместно s и q.

Теперь, положим $P = p/(q/r)$

$$\pi = t/(t/t)$$

$$Q = (s/q)/\ \overline{p/s}$$

Тогда единственный формальный принцип дедукции Нико таков:

$$P/(\pi/Q).$$

Другими словами, P влечет π и Q вместе.

Он использует дополнительно один неформальный принцип, принадлежащий теории типов (которая сейчас не должна заботить нас), а также принцип, в соответствии с которым, если дано p и дано, что p влечет q, то мы можем утверждать q. Этот принцип таков:

«Если $p/(r/q)$ истинно и p истинно, тогда q истинно».

Из этого следует весь аппарат теории дедукции, за исключением того, что касается существования или универсальной истины «пропозициональных функций», которые мы рассмотрим в следующей главе.

Если я не ошибаюсь, есть определенная путаница в головах некоторых авторов по поводу отношения между предложениями, за счет которого вывод является правильным. Для того чтобы вывод от p к q был *правильным* [valid], необходимо, чтобы было истинно p и чтобы было истинно предложение «не-p или q». Всякий раз, когда мы имеем эти условия, q без сомнения является истинным. Но вывод будет иметь место только в том случае, если предложение «не-p или q» *известно* каким-то другим способом, нежели через знание *не-p* или знание q. Всякий раз, когда p ложно, «не-p или q» истинно, но это бесполезно для вывода, который требует того, чтобы p было истинным. Всякий раз, когда известно, что q истинно, конечно, должно быть известно, что и «не-p или q» истинно, но это опять-таки бесполезно для вывода, так как q уже известно и, следовательно, не нужно его выведение. На самом деле, вывод возникает только тогда, когда «не-p или q» известно таким образом, что мы не знаем до этого, какая из альтернатив является истинной. А это случается при таких обстоятельствах, в которых существуют отношения определенной формы между p и q. Например, мы знаем, что если r влечет отрицание s, тогда s влечет отрицание r. Между «*r* влечет не-*s*» и «*s* влечет не-*r*» имеется формальное отношение, позволяющее нам *знать*, что первое влечет второе без предварительного знания того, что первое ложно, или знания того, что второе истинно. Именно при таких обстоятельствах отношение импликации является практически полезным для осуществления выводов.

Но это формальное отношение требуется только для того, чтобы мы могли *знать*, что либо посылка ложна, либо заключение истинно. Для *значимости* вывода требуется именно истинность «не-*p* или *q*»; все дальнейшее требуется для практической осуществимости вывода. Профессор К. Льюис[1] особо изучал более узкое формальное отношение, которое мы называем «формальной дедуцируемостью». Он был убежден, что более широкое отношение, выражаемое через «не-*p* или *q*», не должно называться «импликацией». Это, однако, просто вопрос терминологии. При условии непротиворечивого использования слов не имеет никакого значения то, как мы их определим. Сущность различия между подходом, который защищаю я, и подходом профессора Льюиса заключается в следующем: он утверждает, что когда одно предложение *q* «формально дедуцируемо» из другого предложения *p*, отношение, которое мы воспринимаем как отношение между ними, является «строгой импликацией», которое не выражается через «не-*p* или *q*», а представляет собой более узкое отношение, имеющее место только при определенных формальных связях *p* и *q*. Я утверждаю, что независимо от того, есть ли такое отношение, о котором он говорит, математика в нем не нуждается, и оно, следовательно, из общих соображений экономии не допускается в наш аппарат фундаментальных концепций. Всякий раз, когда между двумя предложениями имеет место отношение «формальной дедуцируемости», мы имеем случай убедиться в том, что или первое предложение ложно, или второе истинно, и ничего из того, что лежит за пределами этого факта, нет необходимости допускать в наши посылки. Наконец, детальные возражения профессора Льюиса против моего взгляда могут быть встречены тоже детальной контраргументацией, а их правдоподобность заключается в скрытых и неосознанных предположениях, которые я отвергаю. Я заключаю, следовательно, что нет необходимости допускать в качестве фундаментального понятия любую форму следования, не выразимую через истинностные функции.

Глава XV
ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Когда в предыдущей главе мы обсуждали суждения [propositions], мы не пытались давать определения слову «суждение». И хотя это сло-

[1] См. Mind, vol. xxi, 1912, p. 522–531, and vol. xxiii, 1914, p. 240–247.

во не может быть формально определено, необходимо сказать кое-что по поводу его значения, для того чтобы избежать распространенной путаницы с «пропозициональными функциями», представляющими тему этой главы.

Мы имеем в виду под «суждением» главным образом такую словесную форму, которая выражает то, что может быть истинно или ложно. Я говорю «главным образом», потому что не хочу исключить другие, помимо вербальных, символы или даже просто мысли, если они имеют символический характер. Но я полагаю, что слово «суждение» должно быть ограничено тем, что может быть в некотором смысле названо «символами», и далее, такими символами, чтобы выражать истину и ложь. Таким образом, «два и два равно четырем» и «два и два равно пяти» будут суждениями; ими же будут «Сократ есть человек» и «Сократ не есть человек». Утверждение «Каковы бы ни были числа a и b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$» есть суждение; но сама по себе формула $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ им не является, так как она не утверждает ничего определенного до тех пор, пока нам не скажут, что a и b будут иметь все возможные значения или что a и b могут иметь такие-то и такие-то значения. Первое предполагается молчаливо, как правило, во всех математических формулах, которые, таким образом, становятся суждениями; но если таких предположений не сделано, они становятся «пропозициональными функциями».

«Пропозициональная функция» на самом деле есть выражение, содержащее одну или больше неопределенные конституенты, такое, что при приписывании им значений выражение становится суждением. Другими словами, это функция, чьи значения являются суждениями. Но это определение должно использоваться с осторожностью. Дескриптивная функция, например «самое трудное утверждение в математическом трактате А», не будет пропозициональной функцией, хотя дескриптивная функция будет иметь в качестве значений суждения. Но в этом случае суждения только описываются: в пропозициональной функции значения должны действительно *формулировать* суждения.

Легко дать примеры пропозициональных функций: «x есть человек» является пропозициональной функцией; пока x остается неопределенным, выражение является ни истинным, ни ложным, но как только переменной x приписано значение, выражение становится истинным или ложным суждением. Любое математическое уравнение является пропозициональной функцией. Пока переменные не имеют определенных значений, уравнение является просто выражением, которое может стать определенным и при этом стать истинным или ложным суждением. Если это уравнение с одной переменной, оно становится истинным суждением, когда переменная делается равной корню уравнения; в противоположном случае оно ложно. Но если оно представляет собой «тождество», оно будет истинным при любом значении переменной. Уравнение кривой на плоскости или поверхности в пространстве является пропозициональной функцией, истинной для значений координат, принадлежащих точкам на прямой или поверхности, и ложной для других значений. Выражения традиционной логики типа «Все А есть В» являются пропозициональными функциями: А и В должны быть определены как классы для того, чтобы такие выражения становились истинными или ложными.

Понятие «случая» или «примера» зависит от пропозициональных функций. Рассмотрим процесс, предполагающий то, что мы называли «обобщением», и давайте возьмем очень простой пример: «за молнией следует гром». Мы имеем некоторое число «примеров» этого, а именно, некоторое число предложений типа: «эта молния сопровождается этим громом». «Примерами» чего они являются? Они являются примерами пропозициональной функции: «Если x есть вспышка молнии, то за x следует гром». Процесс обобщения (со значимостью которого мы, к счастью, дела сейчас не имеем) состоит в переходе от таких примеров к *универсальной* истине пропозициональной функции. «Если x есть вспышка молнии, то за x следует гром». Далее будет обнаружено, что совершенно аналогичным образом пропозициональные функции участвуют всякий раз там, где идет разговор о примерах или случаях.

Мы не должны задавать вопрос (как и пытаться отвечать на него): «Что такое пропозициональная функция?» Пропозициональная функция сама по себе может считаться схемой, просто оболочкой, пустым вместилищем для значения, а не как нечто самостоятельно значащее. Мы уже имели дело с пропозициональными функциями, вообще говоря, в двух случаях: во-первых, при рассмотрении понятий «истинно во всех случаях» и «истинно в некоторых случаях»; во-вторых, в теории классов и отношений. Вторую из этих тем мы отложим до более поздней главы, а первая будет занимать нас сейчас.

Когда мы говорим, что нечто «всегда истинно» или «истинно в некоторых случаях», то ясно, что входящее сюда «нечто» не может быть суждением. Суждение является просто либо истинным, либо ложным, и все. Нет никаких примеров или случаев выражений «Сократ есть человек» или «Наполеон умер на острове Св. Елены». Эти выражения являются суждениями, и было бы бессмысленно говорить о них как о истинных во «всех случаях». Эта фраза приложима только к пропозициональным *функциям.* Рассмотрим, например, те вещи, которые часто используются в разговоре о причинности. (Мы не оцениваем их как истинные или ложные, а касаемся только их логической структуры.) Нам говорят, что А всякий раз сопровождается В. Но если есть примеры А, то А должно быть некоторой общей концепцией, относительно которой вполне значимо говорить «x_1 есть А», «x_2 есть А», «x_3 есть А» и т. д., где x_1, x_2, x_3 являются индивидами, не тождественными друг другу. Это применимо, например, к нашему случаю с молнией. Мы говорим, что молния (А) сопровождается громом (В). Но отдельные вспышки являются индивидами, не тождественными общему свойству быть молнией, а разделяющими это общее свойство. Единственный способ выражения общего свойства состоит в отождествлении общего свойства некоторого числа объектов с пропозициональной функцией, которая становится истинной, когда любой из этих объектов берется в качестве значения ее переменной. В этом случае все объекты являются «примерами» истины пропозициональной функции — потому что, хотя пропозициональная функция не может сама быть истинной или ложной, она является истинной в определенных случаях и ложной в других, если не случается так, что она «всегда истинна» или «всегда ложна». Когда, возвращаясь к нашему примеру, мы говорим, что A в каждом случае сопровождается B, мы имеем в виду, что каким бы ни был *x*, если *x* есть A, то он сопровождается B; то есть мы утверждаем, что определенная пропозициональная функция «всегда истинна».

Предложения, включающие такие слова, как «все», «каждый», «неопределенный» [«a»], «определенный» [«the»], «некоторый», требуют для своей интерпретации пропозициональных функций. Способ, которым пропозициональные функции входят сюда, может быть объяснен посредством двух вышеупомянутых слов, а именно «все» и «некоторый».

Есть две вещи, которые, по большому счету, можно сделать с пропозициональными функциями. Одна — это утверждать, что она истинна во всех случаях, а другая — утверждать, что она истинна, по крайней мере, в одном случае или в некоторых случаях (как мы будем говорить, предполагая, что при этом не имеется в виду обязательно множественность случаев). Все другие случаи использования пропозициональных функций могут быть сведены к этим двум. Когда мы говорим, что пропозициональная функция истинна во «всех случаях», или «всегда» (как мы будем говорить, не предполагая при этом временно́го смысла), это значит, что все ее значения истинны. Если «ϕx» функция и *a*-объект, подходящий для аргумента «ϕx», тогда «ϕa» должно быть истинно, независимо от того, как выбрано *a.* Например, «если *a* есть человек, то *a* смертен» будет истинно, независимо от того, является ли *a* человеком. На самом деле, каждое суждение такой формы истинно. Таким образом, пропозициональная функция «если *x* есть человек, *x* есть смертен» является «всегда истинной», или «истинной во всех случаях». Или, опять-таки, утверждение «не существует единорогов» есть такое же утверждение, как «пропозициональная функция “*x* не есть единорог” истинна во всех случаях». Утверждения предыдущей главы о суждениях, например, «*p* или *q*» влечет «*q* или *p*», являются на самом деле утверждениями о том, что определенные пропозициональные функции истинны во всех случаях. Мы не утверждаем, что упомянутый выше принцип истинен, например, только относительно того или другого *p* или *q*, а утверждаем, что он истинен о *любых p* или *q*, о которых это утверждение может быть сделано значимо. Условие того, что функция является *значимой* для данного аргумента, есть то же условие, что она будет иметь значения для этого аргумента, истинные или ложные. Изучение условий значимости принадлежит доктрине типов, о которой мы пока не будем говорить больше того, что было сказано в предыдущей главе.

Не только принципы дедукции, но также все примитивные суждения логики состоят из утверждений, что определенные пропозициональные функции всегда истинны. Если же это не так, то в суждение должно входить упоминание о каких-то конкретных вещах или концепциях — Сократе, красноте или востоке или западе, — и ясно, что не дело логики делать утверждения, которые касаются одного рода вещей, но не касаются другого. Частью определения логики (но и не полным определением) является то, что все ее суждения являются полностью общими, то есть они состоят из утверждений, что некоторая пропозициональная функция, не содержащая констант, является всегда истинной. В последней главе мы вернемся к обсуждению пропозициональных функций, не содержащих констант. А пока мы перейдем к другой вещи, которую можно сделать с пропозициональными функциями, а именно к утверждению, что функция «иногда истинна», то есть истинна, по крайней мере, в одном случае.

Когда мы говорим — «имеются люди», это значит, что пропозициональная функция «x есть человек» иногда истинна. Когда мы говорим — «некоторые люди есть греки», это значит, что пропозициональная функция «x есть человек и есть грек» иногда истинна. Когда мы говорим — «каннибалы все еще существуют в Африке», это значит, что пропозициональная функция «x есть каннибал в Африке сейчас» иногда истинна, то есть она истинна для некоторого значения переменной x. Сказать «имеется, по крайней мере, n индивидов в мире» значит сказать, что пропозициональная функция «α есть класс индивидов и есть член кардинального числа n» иногда истинна, или, как мы можем сказать, истинна для определенного значения переменной α. Эта форма выражения удобна, когда необходимо указать, какую из переменных мы берем как аргумент в нашей пропозициональной функции. Например, в упомянутой выше пропозициональной функции, которую можно сократить до «α есть класс из n индивидов», имеется две переменных, n и α. Аксиома бесконечности на языке пропозициональных функций такова: «Пропозициональная функция “если n есть индуктивное число, для некоторых значений α истинно, что α есть класс из n индивидов” истинна для всех возможных значений n». Здесь имеется субординатная функция «α есть класс n индивидов», о которой по отношению к α может быть сказано, что она *иногда* истинна; а утверждение, что это случается, если n есть индуктивное число, по отношению к n является *всегда* истинным.

Утверждение, что функция ϕx всегда истинна, есть отрицание утверждения, что не-ϕx иногда истинна, а утверждение, что ϕx иногда истинна, есть есть отрицание утверждения, что не-ϕx всегда истинна.

Таким образом, утверждение «все люди смертны» есть отрицание утверждения, что функция «x есть бессмертный человек» иногда истинна. И утверждение «имеются единороги» есть отрицание утверждения, что функция «x не есть единорог» всегда истинна[1]. Мы говорим, что ϕx «никогда не истинна» или «всегда ложна», если не-ϕx всегда истинна. Мы можем, если сделаем такой выбор, взять одно из пары понятий «всегда» и «иногда» в качестве примитивной идеи, а второе определить через первое и отрицание. Таким образом, если мы выберем «иногда» как примитивную идею, мы можем определить: «ϕx всегда истинна» значит «ложно, что не-ϕx иногда истинно»[2]. Но по причинам, связанным с теорией типов, кажется более правильным взять в качестве примитивных идей оба понятия и через них определить отрицание суждений, в которых они встречаются. То есть предполагая, что мы уже определили (или приняли как примитивную идею) отрицание суждений того типа, которому принадлежит x, мы определяем: отрицание утверждения «ϕx всегда» есть «не-ϕx иногда»; отрицание утверждения «ϕx иногда» есть «не-ϕx всегда». В подобной манере мы можем переопределить и другие истинностные функции в применении к суждениям с кажущимися переменными в терминах определений и примитивных идей для суждений без кажущихся переменных. Суждения, не содержащие кажущихся переменных, называются «элементарными суждениями». Отсюда, шаг за шагом, мы можем, используя наши методы, дойти до теории истинностных функций, которые применимы к суждениям с одной, с двумя, тремя и т. д. переменными, или любым числом до n, где n есть наперед заданное конечное число.

Формы, принятые в традиционной логике в качестве простых, на самом деле весьма далеки от таковых и включают утверждения о всех или некоторых значениях сложной пропозициональной функции. Рассмотрим для начала «Все S есть P». Примем, что S определяется пропозициональной функцией ϕx, а P — пропозициональной функцией ψx. Например, если S есть «люди», ϕx значит «x есть человек», если P есть «смертен», то ψx значит «имеется время, когда x умирает». Тогда «Все S есть P» значит: «“ϕx влечет ψx” всегда истинно». Следует заметить, что «Все S есть P» приложима не только к тем терминам, которые на самом деле есть S, но равным образом и к терминам, которые таковыми не являются. Предположим, что мы наткнулись на x, о котором мы не знаем, является ли он S или нет, и тем не менее «Все S есть P» говорит нам нечто об x, а именно, если x есть S, тогда x есть P. И это утверждение является истинным и тогда, когда x есть S, и когда это не так. Если бы утверждение не было истинным в обоих случаях, метод

[1] Этот метод дедукции приведен в *Principia Mathematica*, vol. i, *9.

[2] По лингвистическим причинам, во избежание предположений о множественности или единственности, часто удобнее употреблять «ϕx есть не всегда ложно», нежели «ϕx иногда истинна».

доказательства от противного не был бы верным, потому что сущность этого метода состоит в использовании импликации в тех случаях, где (как это оказывается впоследствии) гипотеза ложна. Можно изложить это обстоятельство по-другому. Для того чтобы понять «Все S есть P», нет необходимости перечислять, какие термины есть S при условии, что мы знаем, что значит быть S и что — быть P. Мы можем понять полностью, что именно утверждается в «Все S есть P», как бы мы мало ни знали о действительных примерах того и другого термина. Это показывает, что в утверждении «Все S есть P» существенными являются не термины, которые *действительно* есть S, а все термины, которые делают значимыми S, то есть все термины, которые есть S, вместе с терминами, которые не есть S, то есть все, что может рассматриваться как подходящий логический «тип». Что применимо к утверждениям с «все», применимо так же к утверждениям с «некоторый». «Имеются люди», например, означает, что «x есть человек» есть истинно для *некоторых* значений x. Здесь *все* значения x (то есть все значения, для которых «x есть человек» значимо, истинно оно или ложно) имеют отношение к делу, а не только те, которые на самом деле имеют отношение к людям. (Это становится ясно, если мы рассмотрим то, как мы могли бы доказать, что такое утверждение *ложно*.) Каждое утверждение о «все» и «некоторый», таким образом, включает не только аргументы, делающие определенную функцию истинной, а все аргументы, которые делают ее значимой, то есть все, для чего она вообще имеет значение, истинное или ложное.

Мы можем сейчас перейти к нашей интерпретации традиционных форм старомодной формальной логики. Мы предполагаем, что S есть те термины x, для которых ϕx есть истинна, а P — для которых ψx истинна. (Как мы увидим позднее, все классы могут быть получены из пропозициональных функций.) Тогда:

«Все S есть P» значит «“ϕx влечет ψx” всегда истинна».
«Некоторые S есть P» значит «“ϕx и ψx” иногда истинна».
«Ни один S не есть P» значит «“ϕx и не-ψx” иногда истинна».
«Некоторые S не есть P» значит «“ϕx и не-ψx” иногда истинна».

Следует заметить, что пропозициональные функции, о которых здесь идет речь, это не функции ϕx и ψx сами по себе, а истинностные функции от ϕx и ψx для одного и того же аргумента x. Самый легкий способ осознать это обстоятельство — это начать не с ϕx и ψx вообще, а с ϕa и ψa, где a — некоторая константа. Предположим, что мы рассматриваем «Все люди смертны»: мы начнем с «Если Сократ человек, то Сократ смертен», и затем заменяем переменной x все вхождения термина Сократ. Нужно помнить, что хотя x остается переменной, без определенного значения, все же она должна иметь одно и то же значение в «ϕx» и в «ψx», когда мы утверждаем, что «ϕx влечет ψx» всегда истинна. Это требует, чтобы мы начали с функции, чьи значения таковы, что «ϕa влечет ψa», а не с двух отдельных функций ϕx и ψx; потому что если мы начнем с отдельных функций, у нас нет гарантии, что x, оставаясь до некоторого времени неопределенным, впоследствии будет иметь одно и то же значение в обеих функциях.

Для краткости мы говорим «ϕx всегда влечет ψx», когда мы подразумеваем, что «ϕx всегда влечет ψx» всегда истинна. Суждения формы «ϕx всегда влечет ψx» называется «формальной импликацией»; это имя остается и для случая функции с несколькими переменными.

Определения выше показывают, как далеки от того, чтобы быть простыми, такие суждения, как «Все S есть P», с которых начинает традиционная логика. Типичным недостатком анализа в рамках традиционной логики является то, что она трактует «Все S есть P» как суждение формы «x есть P» — например, трактует «Все люди смертны» как суждение той же формы, что «Сократ смертен». Как мы только что видели, первое суждение имеет форму «ϕx всегда влечет ψx», в то время как вторая имеет форму «ψx». Упор на разделении этих двух форм, осуществленное Пеано и Фреге, было очень важным продвижением в символической логике.

Как будет видно, «Все S есть P» и «Ни один S не есть P» не отличаются на самом деле формой, за исключением подстановки не-ψx вместо ψx; то же относится к паре «Некоторые S есть P» и «Некоторые S не есть P». Следует заметить, что традиционные правила обращения являются ложными при предположении, которое технически является единственно приемлемым, что такие суждения, как «Все S есть P», не включают «существования» S, то есть не требуют, чтобы должны иметься термины, которые есть S. Определения выше ведут к результату, что если ϕx всегда ложна, то есть если не существует S, тогда «Все S есть P» и «Ни один S не есть P» будут оба истинными, независимо от того, каким может быть P. Потому что, согласно определению в последней главе, «ϕx влечет ψx» значит «не-ϕx или ψx», которое всегда истинно, если не-ϕx всегда истинна. Поначалу этот результат может заставить читателя возжелать других определений, но небольшая практика вскоре покажет, что эти другие определения были бы неудобными и, кроме того, скрывают нужные идеи. Суждение «ϕx всегда влечет ψx и ϕx иногда истинна» является существенно сложным, и было бы странным рассматривать его в качестве определения «Все S есть P», потому что при этом у нас не осталось бы выражений для «ϕx всегда влечет ψx», которое в сто раз нужнее, чем первое выражение. Но по нашему определению, «Все S есть P» не влечет «Некоторые S есть P», так как первое утверждение позволяет несуществование S, а второе нет; таким образом, обращение *per accidens* становится неверным, а некоторые модусы силлогизма оказываются ложными, например, Darapti: «Все M есть S, все M есть P, следовательно, некоторые S есть P», что ложно, если нет M.

Понятие существования имеет несколько форм, одна из которых будет занимать нас в следующей главе. Но фундаментальная форма происходит непосредственно от понятия «иногда истинно». Мы говорим, аргумент *a* «удовлетворяет» функцию *φx*, если *φa* истинна. Здесь имеется в виду тот же самый смысл, что и в случае корней уравнения, удовлетворяющих уравнению. Теперь, если *φx* иногда истинна, мы можем сказать, что имеются *x*'ы, для которых это истинно, или же мы можем сказать: «аргументы, удовлетворяющие *x*, *существуют»*. Это фундаментальное значение слова «существование». Другие значения или производны от этого, или же представляют путаницу в мышлении. Мы можем корректно сказать: «Люди существуют», имея в виду, что «*x* есть человек» иногда истинна. Но если мы сделаем псевдосиллогизм: «Люди существуют, Сократ человек, следовательно, Сократ существует», то мы скажем бессмыслицу. Дело в том, что Сократ не является, подобно «людям», просто неопределенным аргументом данной пропозициональной функции. Ошибка тут аналогична следующему аргументу: «Люди многочисленны, Сократ человек, следовательно, Сократ многочисленен». В этом случае ясно, что заключение бессмысленно, но в случае существования это не очевидно, по причинам, которые станут ясны в следующей главе. А пока просто отметим тот факт, что хотя правильно говорить «люди существуют», неправильно будет, а скорее, бессмысленно приписывать существование индивиду *x*, который оказывается человеком. Вообще, «термины, удовлетворяющие *φx*, существуют», означает «*φx* иногда истинна»; но «*a* существует» (где *a* есть термин, удовлетворяющий *φx*) есть простое сотрясение звука без всякого значения. Мы вскоре поймем, что осознание ошибочности этого простого заключения позволяет нам решить множество старых философских проблем относительно значения существования.

Другое множество понятий, из-за которых философия позволяет себе впадать в безнадежную путаницу по причине недостаточного разделения суждений и пропозициональных функций, это понятия «модальности»: *необходимо, возможно* и *невозможно.* (Иногда вместо *возможно* употребляется *контингентно* или *ассерторически*.) По традиционному взгляду, среди истинных суждений некоторые являются необходимыми, в то время как другие контингентными или ассерторическими; в то время как среди ложных суждений некоторые являются невозможными, а именно те, чьи противоречия являются необходимыми, другие просто не являются истинными. На самом деле, никогда не было ясно, что добавляется к понятию истины через понятие необходимости. В случае пропозициональных функций очевидно тройное различение. Если «*φx*» есть неопределенное значение некоторой пропозициональной функции, оно будет *необходимо*, если функция всегда истинна, *возможным*, если она иногда истинна, и *невозможным*, если она не является никогда истинной. Такого рода ситуация возникает, например, в отношении вероятности. Предположим, что шар *x* вынимается из ящика, который содержит некоторое количество шаров: если все шары в ящике белые, «x есть белый» необходимо; если некоторые шары являются белыми, это утверждение возможно, и если ни один шар не является белым, то оно невозможно. Здесь все, что *известно* о x — это то, что он удовлетворяет пропозициональной функции, а именно «x есть шар в ящике». Эта ситуация из теории вероятности часто встречается и в практической жизни, например, когда звонит человек и мы ничего не знаем об этом человеке, кроме того, что он доставит нам письмо от нашего друга. Во всех таких случаях с модальностями в дело вступают пропозициональные функции. Для сохранения ясности в размышлении во многих самых разных направлениях привычка строго разделять пропозициональные функции от суждений имеет огромную важность, и отказ делать это в прошлом приводило к неудачам в философии.

Глава XVI
ДЕСКРИПЦИИ

Мы имели дело в предыдущей главе со словами «все» и «некоторый»; в этой главе мы рассмотрим слово the в единственном числе, а в следующей главе — во множественном. Может показаться излишеством посвящать две главы одному слову, но для философствующего математика это слово имеет огромную важность: подобно Грамматику у Браунинга с энклитическим $\delta\epsilon$, я мог бы дать доктрину этого слова, «если бы был мертв от поясницы вниз», а не просто в тюрьме.

Мы уже имели случай упомянуть «дескриптивные функции», то есть выражения типа «отец x'а» или «синус x'а». Они должны быть определены через определение «дескрипции».

«Дескрипция» может быть двух видов, определенная и неопределенная (или неоднозначная). Неопределенная дескрипция есть фраза формы «такой-то и такой-то», и определенная дескрипция есть фраза формы («определенный) такой-то и такой-то» (в единственном числе). Начнем с первой.

«Кого вы встретили?» «Я встретил человека». «Это очень неопределенное описание». Мы, следовательно, не отклоняемся в определении от нашей терминологии. Наш вопрос таков: Что я действительно утверждаю, когда утверждаю «Я встретил человека»? Давайте предположим на время, что мое утверждение истинно, и что на самом деле я встретил Джонса. Ясно, что я не утверждаю «Я встретил Джонса». Я могу сказать: «Я встретил человека, но это был не Джонс»; в этом случае, хотя я лгу, я не противоречу себе, что было бы, если бы я, когда говорил, что встретил человека, на самом деле имел в виду, что я встретил Джонса. Ясно также, что лицо, к которому я обращаюсь, могло понять, что я говорю, даже если он иностранец и никогда не слыхал о Джонсе.

Но мы можем пойти дальше: не только Джонс, но и никакой реальный человек не входит в мое утверждение. Это становится ясным, когда утверждение ложно, так как нет больше никакой причины, по которой в утверждение должен был бы входить именно Джонс, а не кто-либо другой. В самом деле, утверждение должно остаться значимым, хотя оно возможно и не может быть истинным, даже если нет вообще людей. «Я встретил единорога» или «Я встретил морского змея» являются совершенно значимыми утверждениями, при условии, что мы знаем, что это могло бы быть такое — единорог и морской змей, то есть каково определение этих сказочных животных. Таким образом, только о концепциях мы можем сказать, что они входят в суждения. В случае «единорога», например, имеется только концепция: нет ничего в мире призраков, чего-нибудь нереального, которое может быть названо «единорог». Таким образом, так как значимо (хотя и ложно) сказать «Я встретил единорога», ясно, что это суждение, правильно проанализированное, не содержит конституенты «единорог», хотя оно содержит концепцию «единорог».

Вопрос о «нереальности», с которым мы здесь сталкиваемся, является очень важным. Введенные в заблуждение грамматикой, огромное число логиков пытались решить этот вопрос неверным способом. Они полагали грамматическую форму надежным видом анализа, более надежным, чем она есть на самом деле. И они не знали, какое различие в грамматической форме является по-настоящему важным. «Я встретил Джонса» и «Я встретил человека» считались бы традиционно суждениями одной формы, но на самом деле они имеют совершенно разные формы: первое именует действительное лицо, а второе включает пропозициональную функцию и принимает следующий вид, когда делается точным: «Функция “Я встретил x, и x есть человек” иногда истинна». (Следует помнить, что мы приняли конвенцию использования «иногда», при котором не следует множественность.) Это суждение явно не имеет формы «Я встретил x», которое объясняет существование суждения «Я встретил единорога», вопреки тому факту, что нет такой вещи, как «единорог».

Из-за отсутствия аппарата пропозициональных функций многие логики пришли к заключению о том, что имеются нереальные объекты. Мейнонг[1], например, утверждал, что мы можем говорить о «золотых горах», «круглых квадратах» и т. д. Мы можем образовывать истинные суждения, субъектом которых они являются; отсюда, они имеют некоторый вид логического бытия, так как в противном случае суждения, в которые они входят, были бы бессмысленны. В таких теориях, с моей точки зрения, отсутствует чувство реальности, которое должно сохраняться даже в наиболее абстрактных исследованиях. Логика, я должен повторить, должна допускать единорогов не в большей степени, чем

[1] *Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie,* 1904.

зоология, потому что логика имеет дело с реальным миром в той же степени, что и зоология, хотя с его наиболее абстрактными и общими чертами. Сказать, что единороги имеют существование в геральдике, или литературе, или в воображении, — значит прибегнуть к жалкой и ничтожной увертке. То, что существует в геральдике, это не животное из плоти и крови. То, что существует, это картина или описание в словах. Подобным образом, утверждать, что Гамлет, например, существует в своем собственном мире, а именно в мире шекспировского воображения, в том же смысле, как, например, существовал Наполеон в обычном мире, это значит сознательно сказать нечто запутанное до такой степени, что оно едва ли заслуживает доверия. Имеется только один мир, «реальный» мир: шекспировское воображение есть его часть, и мысли, которые он имел при написании Гамлета, реальны. Так что в пьесе мы читаем его мысли. Но сущность вымысла состоит в том, что только мысли, чувства и т. д. у Шекспира и его читателей являются реальными, и что нет в дополнение к ним объективного Гамлета. Когда вы примете во внимание все чувства, возбуждаемые Наполеоном у писателей и историков, вы не имеете дело с реальным человеком, но в случае с Гамлетом это все, что имеется вообще. Если бы никто не думал о Гамлете, от него ничего не осталось бы; если бы никто не думал о Наполеоне, Наполеон все-таки остался бы. Чувство реальности жизненно важно в логике, и если кто-либо производит с ним фокусы, претендуя на то, что Гамлет имеет другой род существования, то он делает плохую услугу мышлению. Здравое чувство реальности весьма необходимо в формировании правильного анализа суждений о единорогах, золотых горах, круглых квадратах и других подобных псевдообъектах.

Повинуясь чувству реальности, мы будем настаивать на том, что в анализе суждений нельзя допускать ничего «нереального». Но если нет ничего нереального, как можно вообще допустить что-нибудь нереальное? Ответ состоит в том, что, имея дело с суждениями, мы имеем дело в первую очередь с символами, и если мы приписываем значение группе символов, которые не имеют значения, то мы впадаем в ошибку, связанную с допущением нереальностей. При этом имеется в виду единственный смысл, в котором это возможно, а именно допущение описываемых объектов. В суждении «Я встретил [a][1] единорога» все четыре слова образуют значимое суждение, и слово «единорог» само по себе значимо в таком же смысле, как слово «человек». Но два слова «[a] единорог» не образуют подчиненной группы, имеющей значение самой по себе. Таким образом, если мы ложно припишем значение этим двум словам, мы взвалим на себя бремя «единорога» и, тем самым, проблемы, как могут быть такие вещи в мире, где нет единоро-

[1] Неопределенный артикль «a» далее переводится словами «некоторый» или «неопределенный», заключенными в скобки. (*Примеч. перев.*)

гов. «Единорог» есть неопределенная дескрипция, которая ничего не описывает. Но это нечто нереальное описывается не неопределенной дескрипцией. Такое суждение как «x есть нереально» имеет значение только тогда, когда «x» есть дескрипция, определенная или неопределенная: суждение будет истинным, если «x» есть дескрипция, которая ничего не описывает. Но независимо от того, описывает дескрипция «x» что-либо или нет, она в любом случае не является конституентой суждения, в которое она входит, подобно «единорогу», она не является подчиненной группой, имеющей значение сама по себе. Все это следует из того факта, что когда «x» есть дескрипция, «x есть нереально» или «x не существует» не есть бессмыслица, а всегда значимо и иногда истинно.

Мы можем теперь перейти к определению значения суждений, содержащих неоднозначные [ambiguous] дескрипции. Предположим, что мы хотим сделать утверждение о «таком-то и таком-то (объекте)», где «такие-то и такие-то (объекты)» имеют определенное свойство ϕ, то есть те объекты ϕx, для которых пропозициональная функция ϕx является истинной. (Например, если мы рассмотрим «человек» как наш пример «такого-то и такого-то», ϕx будет «x есть человек».) А теперь сделаем утверждение о свойстве ψ «такого-то и такого-то», то есть утверждение о том, что «такой-то и такой-то» имеет такое свойство, которое имеет x, когда ψx истинна. (Например, в случае «Я встретил человека» ψx будет «Я встретил x».) Теперь суждение, что «такой-то и такой-то» имеет свойство ψ, не есть суждение формы «ψx». Если бы это было так, «такой-то и такой-то» было бы тождественно с x для удобно выбранного x, и хотя в некотором смысле это может быть истинно для некоторых случаев, это определенно не так для таких случаев, как «единорог». Именно факт, что такой-то и такой-то (объект) имеет свойство ψ, не имеет формы ψx, и делает возможным «нереальность» «такого-то и такого-то» (объекта) в определенном, четко определяемом смысле слова. Соответствующее определение таково:

Утверждение, что «объект, имеющий свойство ϕ, имеет свойство ψ», означает:

«Совместное утверждение ϕx и ψ не всегда ложно».

Если права логика, то это то же самое суждение, которое может быть выражено через «некоторые ϕ'ы есть ψ'ы»; но риторически здесь имеется разница, потому что в одном случае есть предположение единственности, а в другом — множественности. Это, однако, не очень важно. Важно то, что при правильном анализе суждение, содержащее вербально «такой-то и такой-то» (объект), оказывается на самом деле его не содержащим. Вот по этой причине такие суждения могут быть значимыми, когда нет таких вещей, как такой-то и такой-то объект.

Определение *существования*, в применении к неопределенным дескрипциям, следует из того, что было сказано в конце предшествующей главы. Мы говорим, что «люди существуют» или «человек существует», если пропозициональная функция «x есть человек» иногда истинна; более обще, «такой-то и такой-то (объект)» существует, если «x есть такой-то и такой-то (объект)» иногда истинна. Мы можем выразить это на другом языке. Суждение «Сократ есть человек», без сомнения, *эквивалентно* суждению «Сократ есть член рода человеческого», но это не то же самое суждение. *Есть* в «Сократ есть член рода человеческого» выражает отношение субъекта и предиката, а *есть* в «Сократ есть человек» выражает тождество. Позор человеческой расе за то, что она выбрала одно слово для двух совершенно разных идей, — позор, от которого избавляет символический логический язык. Тождество в «Сократ есть некоторый человек» есть тождество между поименованным объектом (принимая «Сократ» как имя, по поводу чего мы еще приведем некоторые уточнения позже) и объектом, описанным неопределенно. Неопределенно описанный объект будет «существовать» в том случае, если по крайней мере одно такое суждение является истинным, то есть имеется по крайней мере одно такое суждение формы «x есть такой-то и такой-то (объект)», где x есть имя. Характеристикой неопределенных (в отличие от определенных) дескрипций является то, что может быть любое число истинных суждений такой формы — Сократ есть человек, Платон есть человек и т. д. Таким образом, «человек существует» идет от Сократа, или Платона, или от кого-либо еще. С определенными дескрипциями, с другой стороны, соответствующая форма суждения, а именно «x есть такой-то и такой-то (объект)» (где «x» есть имя), может быть истинной самое большее для одного значения x. Это приводит нас к теме определенных дескрипций, определение которых аналогично определению неопределенных дескрипций, но несколько более запутанно.

Мы подходим сейчас к главной теме этой главы, а именно, к определению слова the[1] (в единственном числе). Одна очень важная вещь в определении «(некоторого) такого-то и такого-то» приложима и к определению «(определенного) такого-то и такого-то»; мы ищем определения суждения, в котором встречается эта фраза, а не определения самой фразы в изоляции. В случае «(неопределенного) такого-то и такого-то» это совершенно очевидно: никто не мог бы предположить, что «(некоторый) человек» был определенным объектом, который должен был бы определен самостоятельно. Сократ есть человек, Платон есть человек, Аристотель есть человек, но мы не можем вывести отсюда, что «(неопределенный) человек» значит то же, что «Аристотель», и одновременно, что и «Сократ», и одновременно «Платон», поскольку эти три имени имеют различные значения. Тем не менее, когда мы перенумеруем всех людей в мире, не останется никого, о ком мы можем ска-

[1] Определенный артикль «the» далее переводится словом «определенный», заключенным в скобки. (*Примеч. перев.*)

зать: «Это есть некоторый человек, и не просто человек, а это “(определенный) человек”, квинтэссенциальная сущность просто неопределенного человека, который не есть кто-либо в частности». Совершенно ясно, что все, что существует в мире, является вполне определенным: если это человек, это вполне определенный человек, а никто другой. Таким образом, невозможно найти в мире такую сущность как «(неопределенный) человек», в противоположность конкретному человеку. И соответственно, вполне естественно, что мы не определяем «(неопределенного) человека» самого по себе, а даем определение суждению, в которое он входит.

В случае «(определенного) такого-то и такого-то» это справедливо в той же степени, хотя с первого взгляда и менее ясно. Мы можем продемонстрировать наш тезис рассмотрением различия между именем и определенной дескрипцией. Возьмем суждение «Скотт есть автор *Веверлея*». Мы имеем здесь имя «Скотт» и дескрипцию «автор *Веверлея*», которая прилагается к тому же самому лицу. Различие между именем и другими символами может быть объяснено следующим образом:

Имя есть простой символ, чье значение есть нечто, что может быть только субъектом, то есть тем, что мы определили в главе XIII как «индивид» [particular]. А «простой» символ есть такой символ, который не имеет частей, являющихся символами. Таким образом, «Скотт» есть простой символ, потому что, хотя он имеет части (а именно отдельные буквы), эти части не являются символами. С другой стороны, «автор *Веверлея*» не является простым символом, потому что отдельные слова, из которых составлена фраза, являются символами. Если, как это может случиться, то, что кажется индивидом, на самом деле оказывается способным к дальнейшему разложению анализом, мы должны ограничить себя тем, что называется «относительными индивидами», которые будут терминами, неанализируемыми по ходу всего контекста и никогда не входящими в него в другой роли, нежели в роли субъекта. И в этом случае мы соответственно ограничимся «относительными именами». С точки зрения нашей настоящей проблемы, а именно определения дескрипций, проблема того, являются ли имена абсолютными или относительными, может игнорироваться, так как она относится к различным стадиям иерархии «типов», а мы должны применять нашу пару «Скотт» и «автор *Веверлея*» к одному и тому же объекту и тем самым не поднимаем проблему типов. Мы можем, следовательно, пока рассматривать имена как абсолютные, и ничто, что мы сейчас скажем, не зависит от этого предположения; зато мы сэкономим массу слов.

У нас есть две вещи, которые требуют сравнения: (1) имя, которое есть простой символ, прямо обозначающий индивид, являющийся его значением. Имя имеет это значение само по себе, независимо от значения других слов. (2) Дескрипция, которая состоит из нескольких слов, чье значение уже зафиксировано и из которых берется «значение» дескрипции.

Суждение, содержащее дескрипцию, не является тождественным с таким суждением, которое получается подстановкой имени, даже если имя именует тот же самый объект, который описывается дескрипцией. «Скотт есть автор *Веверлея*» явно отличается от суждения «Скотт есть Скотт»: первое суждение является фактом литературной истории, а второе — тривиальным трюизмом. Если мы подставим что-нибудь другое, нежели Скотт, на место «автора *Веверлея*», наше результирующее суждение станет ложным и явно не будет тем же самым суждением. Но, могут сказать, наше суждение существенно той же формы, что (скажем) «Скотт есть сэр Вальтер», в котором два имени прилагаются к одному и тому же объекту. Ответ на это таков: если «Скотт есть сэр Вальтер» на самом деле значит «лицо, именуемое “Скотт”, есть лицо, именуемое “сэр Вальтер”», тогда имена здесь используются как дескрипции: то есть индивиды, вместо того чтобы быть поименованными, описываются как лица, имеющие эти имена. Это способ, которым часто имена используются на практике, и в самой фразеологии никак не проявляется, используются ли они таким образом или же как имена. Когда имя используется прямо, просто для указания того, о чем мы говорим, оно не является частью утверждаемого *факта* или же ложности, если наше утверждение оказывается ложным: оно есть просто часть символизма, в котором мы выражаем наши мысли. С другой стороны, когда мы образовываем суждение о «лице, называемом “Скотт”», действительное имя «Скотт» входит в то, что мы утверждаем, а не просто в язык, используемый для формулировки утверждения. Наше суждение будет отличным от этого, если мы подставим «лицо, называемое “сэр Вальтер”». Но пока мы используем имена как *имена*, говорим ли мы «Скотт», или же «сэр Вальтер», является неважным, примерно так же, как неважно, говорим ли мы на английском или французском языке. Таким образом, пока имена используются *как* имена, «Скотт есть сэр Вальтер» есть то же самое тривиальное суждение, что и «Скотт есть Скотт». Это завершает доказательство того, что «Скотт есть автор *Веверлея*» не есть то же самое суждение, которое получается подстановкой имени вместо «автора *Веверлея*», независимо от того, какое имя подставляется.

Когда мы используем переменную и говорим о пропозициональной функции, скажем, ϕx, процесс применения общих утверждений об x к частным случаям будет состоять в подстановке имени вместо «x», предполагая, что ϕ есть функция с индивидами на аргументном месте. Предположим, например, что ϕx есть «всегда истинно». Пусть это будет, например, «закон тождества» $x = x$. Тогда мы можем подставлять вместо x любое имя, какое только выберем, и при этом получим истинное суждение. Предполагая на момент, что «Сократ», «Платон» или «Аристотель» являются именами (очень опрометчивое предположение), из закона тождества мы можем вывести, что Сократ есть Сократ, Платон есть Платон и Аристотель есть Аристотель.

Но мы сделаем ошибку, если попытаемся вывести, не используя других предпосылок, что автор *Веверлея* есть автор *Веверлея*. Это следует из только что полученного нами результата о том, что если мы подставляем имя вместо «автора *Веверлея*» в суждении, получаемое суждение будет отлично от исходного. То есть в нашем конкретном случае, если «x» есть имя, «$x = x$» не то же самое суждение, что «автор *Веверлея* есть автор *Веверлея*», независимо от того, каким именем может быть «x». Таким образом, из того факта, что все суждения формы «$x = x$» истинны, мы не можем вывести, без дополнительных посылок, что автор *Веверлея* есть автор *Веверлея*. На самом деле суждения формы «(определенный) такой-то и такой-то есть (определенный) такой-то и такой-то» не всегда истинны: необходимо, чтобы такой-то и такой-то (объект) *существовал* (термин, который будет объяснен вскоре). Ложно, что нынешний король Франции есть нынешний король Франции или что круглый квадрат есть круглый квадрат. Когда мы подставляем дескрипцию вместо имени, пропозициональные функции, которые были «всегда истинными», могут стать ложными, если дескрипции ничего не описывают. Тут нет никакой тайны, как только мы поймем (что было доказано ранее), что при подстановке дескрипции результат не является значением соответствующей пропозициональной функции.

Сейчас мы в состоянии определить суждения, в которые входят определенные дескрипции. Единственно, что отличает «(определенные) такие-то и такие-то» от «(неопределенных) таких-то и таких-то», это заключение о единственности. Мы не можем говорить о «(единственном) обитателе Лондона», потому что быть обитателем Лондона не является атрибутом единственности. Мы не можем говорить о «нынешнем короле Франции», потому что такого нет, но мы можем вполне говорить о «нынешнем короле Англии». Таким образом, суждения об «(определенных) таких-то и таких-то» всегда влекут соответствующие суждения о «(неопределенных) таких-то и таких-то», с добавлением о том, что существует не больше одного такого-то и такого-то. Такое суждение, как «Скотт есть автор *Веверлея*», не могло бы быть истинным, если бы Веверлей не был написан или если бы его написали несколько человек. Не могло бы быть истинно любое другое суждение, получающееся из пропозициональной функции с переменной x подстановкой «автора *Веверлея*» вместо «x». Мы можем сказать, что «автор *Веверлея*» означает «значение x, для которого "x написал *Веверлея*" истинно». Таким образом, суждение «автор *Веверлея* был шотландцем», например, включает:

(1) «x написал *Веверлея*» не всегда ложно;
(2) «если x и y написали *Веверлея*, x и y тождественны» всегда истинно;
(3) «если x написал *Веверлея*, x был шотландцем» всегда истинно.

Эти три суждения, переведенные на обыденный язык, утверждают:

(1) по крайней мере один человек написал *Веверлея*;
(2) самое большое один человек написал *Веверлея*;
(3) кто бы ни написал *Веверлея*, он был шотландцем.

Все три утверждения следуют из «автор *Веверлея* был шотландцем». Обратно, все три вместе (но не два из них) влекут, что автор *Веверлея* был шотландцем. Отсюда все три могут быть взяты как определение того, что означает суждение «автор *Веверлея* был шотландцем».

Мы можем кое в чем упростить эти три суждения. Первое и второе эквивалентны следующему: «Имеется термин *c* такой, что "*x* написал *Веверлея*" истинно, когда *x* есть *c*, и ложно, когда *x* не есть *c*». Другими словами, «имеется термин *c* такой, что "*x* написал *Веверлея*" всегда эквивалентно "*x* есть *c*"». (Два суждения «эквивалентны», когда они оба истинны или ложны.) Поначалу мы имеем здесь две функции от *x*, «*x* написал *Веверлея*» и «*x* есть *c*», и мы образуем функцию от *c* рассмотрением эквивалентности двух функций от *x* для всех значений *x*, затем мы переходим к утверждению о том, что результирующая функция от *c* является «иногда истинной», то есть что она истинна по крайней мере для одного значения *c.* (Ясно, что она не может быть истинна больше, чем для одного значения *c*.) Эти два условия вместе задают значение «автор *Веверлея* существует».

Мы можем сейчас определить «термин, удовлетворяющий функции *φx*, существует». Это есть общая форма, пример которой приведен выше. «Автор *Веверлея*» есть «термин, удовлетворяющий функции "*x* написал *Веверлея*"». И «(определенный) такой-то и такой-то» будет всегда включать указание на некоторую пропозициональную функцию, а именно на ту, которая определяет свойство, которое делает вещь такой-то и такой-то. Наше определение тогда таково: «Термин, удовлетворяющий функцию *φx*, существует» означает: «Имеется термин *c* такой, что *φx* всегда эквивалентна "*x* есть *c*"».

Для того чтобы определить «автор *Веверлея* был шотландцем», мы должны принять в расчет третье из наших суждений, а именно: «Кто бы ни написал *Веверлея*, он был шотландцем». Это можно сделать просто добавлением, что *c* есть шотландец. Таким образом, «автор *Веверлея* был шотландцем» есть:

«Имеется термин с такой, что (1) "*x* написал *Веверлея*" всегда эквивалентно "*x* есть *c*", (2) *c* есть шотландец».

И более обще — «Термин, удовлетворяющий *φx*, удовлетворяет *ψx*» определяется как значащий:

«Имеется термин *c* такой, что (1) *φx* есть всегда эквивалентно "*x* есть *c*", (2) *ψx* всегда истинно».

Это есть определение суждений, куда входят дескрипции.

Вполне возможно знать много относительно описываемого термина, то есть знать много суждений относительно «такого-то и такого-то», без реального знания, чем является такой-то и такой-то (объект), то есть без знания какого-либо суждения формы «*x* есть такой-то и такой-то (объект)», где «*x*» есть имя. В детективных историях суждения о «человеке, совершившем проступок», накапливаются так, чтобы в конце их было достаточно для демонстрации того, что *A* совершил преступление. Мы можем пойти немного дальше и сказать, что все знание, которое может быть выражено в словах (за исключением лишь нескольких слов типа «это» и «этот», чье значение варьируется в различных контекстах), не включает совсем имен, в строгом смысле слова, а то, что кажется именами, является одними лишь дескрипциями. Мы можем исследовать вопрос о том, существовал ли Гомер, что невозможно было бы сделать, если бы «Гомер» было именем. Суждение «(определенный) такой-то и такой-то (объект) существует» значимо, независимо от того, является оно истинным или ложным; но если *a* есть «такой-то и такой-то (объект)» (где «*a*» есть имя), слова «*a* существует» бессмысленны. Только в отношении дескрипций — определенных или неопределенных — может значимо утверждаться существование; потому что если «*a*» есть имя, оно *должно* именовать что-нибудь: то, что ничего не именует, не есть имя, и если его намеревались использовать как имя, это есть символ без значения, в то время как дескрипция, типа «нынешний король Франции», не становится незначащим только на том основании, что она ничего не описывает. Дело тут в том, что это *сложный* символ, значение которого выводится из составляющих его символов. И поэтому, когда мы спрашиваем, существовал ли Гомер, мы используем слово «Гомер» как сокращение для дескрипции: мы можем заменить его (скажем) на «автор *Илиады* и *Одиссеи*». Те же самые рассмотрения относятся почти ко всем случаям использования того, что с первого взгляда выглядит собственным именем.

Когда дескрипции входят в суждения, необходимо различать то, что может быть названо «первичными» и «вторичными» вхождениями. Общая идея разделения такова: дескрипция имеет «первичное» вхождение, когда суждение, в которое она входит, получается подстановкой дескрипции вместо «*x*» в некоторую пропозициональную функцию *φx*. Дескрипция имеет «вторичное» вхождение, когда результат подстановки дескрипции вместо *x* в *φx* дает только *часть* соответствующего суждения. На примере это видно яснее. Рассмотрим «нынешний король Франции лыс». Здесь «нынешний король Франции» имеет первичное вхождение, а суждение ложно. Каждое суждение, в которое первично входит ничего не описывающая дескрипция, является ложным. А теперь рассмотрим «нынешний король Франции не лыс». Это суждение является неопределенным. Если мы сначала возьмем «*x* есть лыс», а потом подставим «нынешний король Франции» вместо «*x*» и затем будем отрицать результат, вхождение «нынешнего короля Франции» будет вторичным, а наше суждение истинным, но если мы возьмем «*x* не есть лыс» и подставим «нынешний король Франции» вместо «*x*», тогда «нынешний король Франции» будет иметь первичное вхождение, а суждение будет ложным. Смешение первичного и вторичного вхождений является источником ошибок там, где встречаются дескрипции.

Дескрипции встречаются в математике, главным образом в форме дескриптивных функций, то есть «терминов, имеющих отношение *R* к *y*», или «*R* к *y*», по аналогии с «отцом *y*» и подобными фразами. Сказать, например, «отец *y*-ка богат» значит выразить следующую пропозициональную функцию от *c*: «*c* есть богат, и “*x* родил *y*” всегда эквивалентно “*x* есть *c*” является иногда истинной», то есть истинной по крайней мере для одного значения *c*. Ясно, что она не может быть истинной больше, чем для одного значения.

Теория дескрипций, кратко изложенная в этой главе, имеет огромную важность в логике и теории познания. Но для целей математики философская часть теории несущественна и поэтому была опущена в изложенном выше материале, который предназначен только в качестве математического реквизита.

Глава XVII
КЛАССЫ

В настоящей главе мы будем обсуждать слово «the» во множественном числе: обитатели Лондона, сыновья богатых людей и т. п. Другими словами, мы будем иметь дело с классами. Мы видели в главе II, что кардинальные числа определяются как классы классов, и в главе III, что число 1 определяется как класс всех единичных классов, то есть всего, что имеет точно один член, как можно было бы сказать, не впадай мы при этом в порочный круг. Конечно, когда 1 определено как класс всех единичных классов, «единичные классы» должны определяться так, чтобы не предполагать, что мы знаем, что имеется в виду под термином «один»; на самом деле они определяются способом, близким тому, который используется для дескрипций, а именно: класс *α* называется «единичным» классом, если пропозициональная функция «“*x* есть *α*” всегда эквивалентна “*x* есть *c*”» (рассматриваемая как функция от *c*) не всегда ложна, или, на обыденном языке, если имеется термин *c* такой, что *x* будет членом *α*, когда *x* есть *c*, и только в этом случае. Это дает нам определение единичного класса, если мы при этом знаем, что представляет собой класс вообще. До сих пор, имея дело с арифметикой, мы трактовали класс как примитивное понятие. По причинам, изложенным в главе XIII, если даже нет других причин, мы не можем принять «класс» как примитивную идею. Мы должны искать его определение на том же пути, что и определение дескрипций, то есть определение, которое приписывает значение суждениям, в которые символически или вербально входит то, что представляется классом. При этом определение приписывает значение таким образом, который при правильном анализе устраняет всяческое упоминание о классах. Мы сможем тогда говорить, что символы для классов являются просто конвенциями, не представляющими объекты, называемые «классами», и что классы, подобно дескрипциям, являются логическими фикциями, или (как мы говорим) «неполными символами».

Теория классов менее полна, чем теория дескрипций, и есть причины, по которым (мы приведем их кратко) предложенное определение класса не будет окончательно удовлетворительным. Тут потребуются некоторые тонкости, но причины, по которым предложенное определение можно считать приблизительно правильным, весьма убедительны.

Первая вещь, которую надо понять, состоит в том, почему классы не могут рассматриваться как окончательная составная часть мира. Трудно объяснить точно, что подразумевается этим утверждением, но одно его следствие позволяет уточнить его значение. Если мы имеем полный символический язык, с определениями для всего определяемого, неопределенные символы в этом языке будут представлять символически то, что называю «окончательными составляющими мира». Я утверждаю, что нет символов ни для класса вообще, ни для какого-либо класса в частности, которые были бы включены в этот аппарат неопределенных символов. С другой стороны, все индивидуальные вещи в мире должны иметь имена, которые будут фигурировать среди неопределенных символов. Мы могли бы постараться избегнуть этого заключения через использование дескрипций. Возьмем, например, «последнюю вещь, которую Цезарь увидел перед смертью». Это дескрипция некоторого индивида. Мы могли бы использовать ее (в совершенно допустимом смысле) как *определение* этого индивида. Но если «*a*» есть *имя* для того же самого индивида, суждение, в которое входит «*a*» (как мы видели в предыдущей главе), не является тождественным с суждением, образованным подстановкой вместо «*a*» дескрипции «последняя вещь, которую Цезарь видел перед смертью». Если наш язык не содержит имени «*a*» или некоторого другого имени для того же самого индивида, у нас не будет средств для выражения суждения, которое мы выразили с помощью «*a*», в противоположность тому, что мы выразили с помощью дескрипции. Таким образом, дескрипции не позволяют совершенному языку избавиться от имен для всех индивидов. В этом отношении, утверждаем мы, классы отличны от индивидов и не нуждаются в представлении неопределяемыми символами. Первое наше дело — дать обоснование этому взгляду.

Мы не можем рассматривать классы *чисто* экстенсионально в качестве просто кучи вещей или конгломерата. Если мы попытаемся сделать это, мы обнаружим, что невозможно понять, как могут существовать такие вещи, как нуль-класс, который вообще не имеет членов и не может считаться «кучей»; мы также обнаружим, что очень трудно понять, как это класс, имеющий только один член, не тождествен с ним. Я не имею в виду, что не существует таких вещей, как «кучи» вещей. Как математический логик, я не обязан иметь на этот счет определенного мнения. Все, что я утверждаю, заключается в том, что если есть такие вещи, как «кучи», мы не можем отождествить их с классами, составленными из таких конституент.

Мы подойдем гораздо ближе к удовлетворительной теории, если постараемся отождествить классы с пропозициональными функциями. Каждый класс, как объяснено в главе II, определяется некоторой пропозициональной функцией, которая истинна о членах этого класса и ложна для всего остального. Но если класс может быть определен одной пропозициональной функцией, он равным образом может быть определен другой, которая истинна, когда истинна первая, и ложна, когда ложна вторая. По этой причине класс не может быть отождествлен с одной пропозициональной функцией больше, чем с некоторой другой, — и при заданной пропозициональной функции всегда имеется много других, истинных, когда она истинна, и ложных, когда она ложна. Мы говорим, что две пропозициональные функции «формально эквивалентны», когда случается такая ситуация. Два *суждения* «эквивалентны», когда они оба истинны или оба ложны; две пропозициональные функции ϕx, ψx «формально эквивалентны», когда ϕx всегда эквивалентна ψx. Невозможность отождествления класса с функцией следует из того, что имеется много функций, эквивалентных одной заданной функции, а мы хотим, чтобы классы были такими, чтобы никакие два различных класса не имели бы одно и то же число членов. Следовательно, две формально эквивалентные функции должны определять один и тот же класс.

Когда мы решили, что классы не могут быть вещами того же сорта, что их члены, что они не могут быть просто кучами или совокупностями и что они не могут быть отождествлены с пропозициональными функциями, трудно понять, чем они могут быть, если они вообще являются нечто бо́льшим, чем символическими фикциями. И если мы найдем такой способ, который позволил бы трактовать их как символические фикции, мы усилим логическую безопасность нашей позиции, так как мы избегнем необходимости предполагать в одно и то же время существование классов и утверждать противоположный тезис о том, что классов не существует. Мы просто воздержимся от обоих предположений. Это есть пример бритвы Оккама, говорящей, что «сущности не должны приумножаться сверх необходимости». Но когда мы отказываемся утверждать, что существуют классы, мы не должны впадать в догматическую противоположность и говорить, что их не существует совсем. Мы просто должны быть агностиками в этом отношении: подобно Лапласу, мы можем сказать — «я не нуждаюсь в этой гипотезе».

Давайте сформулируем условия, которым символ должен удовлетворять для того, чтобы выполнять роль класса. Я полагаю, что следующие условия должны быть необходимыми и достаточными.

(1) Каждая пропозициональная функция должна определять класс, состоящий из тех аргументов, для которых функция истинна. Если дано некоторое суждение (истинное или ложное), скажем, о Сократе, мы можем представить, что Сократ заменен Платоном, Аристотелем, или гориллой, или человеком с Луны, или каким угодно индивидом в мире. В общем, некоторые из этих подстановок дадут истинные суждения, а некоторые ложные. Определяемый класс будет состоять из всех тех подстановок, которые дают истинные суждения. Конечно, мы еще должны решить, что означает «всех тех, которые» и т. д. Все, что мы пока имеем сейчас, — это то, что класс определяется пропозициональной функцией и что каждая пропозициональная функция определяет подходящий класс.

(2) Две формально эквивалентные пропозициональные функции должны определять один и тот же класс, и две функции, не являющиеся формально эквивалентными, должны определять различные классы. То есть класс определяется его членами, и нет двух различных классов, которые имели бы одни и те же члены. (Если класс определяется функцией ϕx, мы говорим, что a есть «член» класса, если ϕa истинна.)

(3) Мы должны найти некоторый способ определения не только классов, но и классов классов. Мы видели в главе II, что кардинальные числа должны определяться как классы классов. Обычная фраза элементарной математики «число сочетаний из n по m» представляет класс классов, а именно, класс всех классов из m терминов, которые могут быть выбраны из данного класса n терминов. Не имея некоторого символического метода обращения с классами классов, математическая логика рухнула бы.

(4) При всех обстоятельствах предположение о классе, являющемся или не являющемся членом самого себя, должно быть бессмысленным (не ложным). Это следует из противоречия, которое мы обсуждали в главе XIII.

(5) Наконец, и это есть условие наиболее трудное для выполнения, должно быть возможно образовывать суждения о *всех* классах, составленных из индивидов, или же о *всех* классах, составленных из объектов одного логического «типа». Если бы этого нельзя было сделать, многие случаи использования классов не прошли бы, например математическая индукция. В определении наследства данного термина нам должно быть позволено сказать, что член множества последующих элементов принадлежит всем наследственным классам, к которым принадлежит данный термин, а это требует того рода всеобщности, который обсуждается нами. Трудность, связанная с этим условием, заключается в

том, что невозможно говорить о *всех* пропозициональных функциях, которые могут иметь аргумент данного типа.

Мы будем, поначалу, игнорировать последнее условие и те проблемы, которое оно поднимает. Первые два условия могут быть рассмотрены вместе. Они устанавливают, что должен быть один класс, не больше и не меньше, для каждой группы формально эквивалентных пропозициональных функций: например, класс людей должен быть тем же самым, что класс бесперых двуногих, или рациональных животных, или Йеху, или класс с любой характеристикой, которая может быть выбрана для определения людей. Теперь, когда мы говорим, что две формально эквивалентные пропозициональные функции могут не быть идентичными, хотя они и определяют один и тот же класс, мы можем доказать истинность этого утверждения указанием на то, что утверждение может быть истинным для одной функции и ложным для другой; например, «Я верю, что все люди смертны» может быть истинным, в то время как «Я верю, что все рациональные животные смертны» может быть ложно, так как я могу верить, что Феникс является бессмертным разумным животным. Таким образом, мы приходим *к утверждениям о функциях* или (более точно) о *функциях от функций.*

Некоторые вещи, которые могут быть сказаны о функции, могут считаться утверждениями о классе, определенном функцией, в то время как для других вещей это неверно. Утверждение «все люди смертны» включает функцию «x есть смертен» и «x есть человек»; или при желании мы можем сказать, что оно включает классы *людей* и *смертных.* Мы можем интерпретировать утверждение любым из этих путей, потому что его истинностное значение не изменится, если мы подставим вместо «x есть человек» или «x есть смертен» любую формально эквивалентную функцию. Но, как мы только что видели, утверждение «Я верю, что все люди смертны» не может рассматриваться как утверждение о классе, определенном какой-либо функцией, потому что его истинностное значение может измениться от подстановки формально эквивалентной функции (которая оставляет неизменным класс). Мы назовем утверждение, включающее функцию ϕx, «экстенсиональной» функцией от функции ϕx, если она подобна функции «все люди смертны», то есть если его истинностное значение не изменяется от подстановки любой формально эквивалентной пропозициональной функции. А когда функция от функции не является экстенсиональной, мы назовем ее «интенсиональной», так что «я верю, что все люди смертны» является интенсиональной функцией от «x есть человек» и «x есть смертен». Таким образом, *экстенсиональные* функции от функции от x могут, для практических целей, рассматриваться как функции от класса, определенного через x, в то время как этого нельзя сказать про *интенсиональные* функции.

Следует заметить, что *специфические* функции от функций, которые рассматриваются в математической логике, являются экстенсиональными. Таким образом, две фундаментальные функции от функций таковы: «ϕx всегда истинна» и «ϕx иногда истинна». Каждая из них не изменяет своего истинностного значения, если вместо ϕx подставляется любая формально эквивалентная функция. На языке классов, если α есть класс, определяемый через ϕx, «ϕx есть всегда истинна» эквивалентна функции «все есть член класса α», и «x есть иногда истинна» эквивалентна функции «α имеет члены», или (лучше) «α имеет, по крайней мере, один член». Рассмотрим, например, условие, с которым мы имели дело в предыдущей главе, о существовании «термина, удовлетворяющего ϕx». Условие состоит в том, что имеется термин c, такой, что ϕx всегда эквивалентна функции «x есть c». Таким образом, она явно экстенсиональна. Оно эквивалентно утверждению, что класс, определенный функцией ϕx, есть единичный класс, то есть класс, имеющий один член; другими словами, класс, являющийся членом 1.

Если задана функция функции, которая может быть, а может и не быть экстенсиональной, мы можем всегда вывести из нее связанную с ней и определенно экстенсиональную функцию от той же самой функции следующим образом: пусть наша исходная функция от функции будет такой, что приписывает ϕx свойство f; тогда рассмотрим утверждение «имеется функция, имеющая свойство f и формально эквивалентная ϕx». Это экстенсиональная функция от ϕx; она истинна, когда истинно исходное утверждение, и формально эквивалентна исходной функции от ϕx, если эта исходная экстенсиональна. Но когда исходная функция интенсиональна, новая функция опять-таки истинна, когда истинна старая. Проанализируем, например, опять, «Я верю, что все люди смертны», рассматриваемую как функцию от «x есть человек». Производная экстенсиональная функция такова: «Имеется функция, формально эквивалентная “x есть человек” и такая, что я верю, что что бы ей ни удовлетворяло, является смертным». Это утверждение остается истинным, когда мы подставляем «x есть разумное животное» вместо «x есть человек», даже если я ложно верю в то, что Феникс разумен и бессмертен.

Мы даем имя «производной экстенсиональной функции» функции, сконструированной указанным выше образом, а именно функции: «Имеется функция, имеющая свойство f и формально эквивалентная ϕx», где исходной функцией была «функция ϕx имеет свойство f».

Мы можем считать, что производная экстенсиональная функция имеет в качестве аргументов класс, определенный функцией ϕx, и что она утверждает наличие свойства у этого класса. Например, мы можем определить:

Утверждать, что «класс, определенный функцией ϕx, имеет свойство f», значит утверждать, что ϕx удовлетворяет экстенсиональной функции, выведенной из f.

Это придает значение любому утверждению о классе, которое может быть значимо сделано о функции. Будет найдено, что технически это дает результаты, которые требуются для того, чтобы сделать теорию символически удовлетворительной[1].

Сказанного только что нами об определении класса достаточно, чтобы удовлетворить первые четыре из наших условий. Способ, которым гарантируется третье и четвертое условия, а именно возможность класса классов и невозможность для классов быть или не быть членом самого себя, является существенно техническим результатом; он объяснен в *Principia Mathematica* и его можно здесь принять без доказательства. Итак, можно считать, что, за исключением пятого условия, наша задача выполнена. Но это условие — наиболее важное и наиболее трудное — не выполняется ничем из того, что мы до сих пор сказали. Трудность связана с теорией типов, и надо кратко пояснить ее[2].

Мы видели в главе XIII, что имеется иерархия логических типов, и что подстановка объекта одного типа вместо объекта другого типа является ошибкой.

Сейчас нетрудно показать, что различные функции, которые могут иметь данный объект *a* как аргумент, не являются функциями одного типа. Давайте назовем их *a*-функциями. Мы можем взять в качестве первых из них те, которые не включают указания ни на какую совокупность функций: их мы назовем «предикативными *a*-функциями». Если мы сейчас перейдем к функциям, которые включают указание на всеобщность предикативных *a*-функций, мы совершим ошибку, если посчитаем их функциями того же типа, что и предикативные *a*-функции. Рассмотрим такое повседневное выражение, как «*a* есть типичный француз». Как мы определяем «типичного» француза? Мы можем определить его как обладающего всеми качествами, которыми обладает большинство французов. Но пока мы не определим «все качества» таким образом, чтобы при этом не было ссылки на некоторую всеобщность качеств, мы должны заметить, что большинство французов *не* являются типичными в вышеупомянутом смысле, и, следовательно, определение показывает, что не быть типичным — это существенно для типичного француза. Это не логическое противоречие, так как нет никакой причины для разделения качеств, включающих указание на всеобщность качеств и не включающих такового.

Всякий раз, когда мы делаем утверждения о «всех» или «некоторых» значениях, которые может значимо принимать переменная, мы порождаем новый объект, и этот новый объект не должен быть среди значений, которые наша предыдущая переменная должна была бы принять. Если бы это было так, то всеобщность значений, над которыми

---

[1] См.: *Principia Mathematica*, vol. 1, p. 75–84, *20.

[2] Читатель, заинтересованный в более полном обсуждении, должен проконсультироваться с *Principia Mathematica,* Introduction, chap. ii, и также *12.

пробегает переменная, была бы определима только в терминах самой себя, что включало бы порочный круг. Например, если я говорю «Наполеон имел все качества, которые сделали его великим полководцем», я должен определить «качества» таким образом, который не включал бы то, о чем я сейчас говорю, то есть «обладание всеми качествами великого полководца» не должно быть само качеством в предположенном смысле. Это довольно ясно и является принципом, который ведет к теории типов, с помощью которой избегаются парадоксы. При применении к *a*-функциям мы можем предположить, что «качества» должны означать «предикативные функции». Когда я говорю «Наполеон имел все качества и т. д.» я имею в виду «Наполеон удовлетворял всем предикативным функциям и т. д.». Это утверждение приписывает Наполеону свойства, но не предикативное свойство; таким образом, мы избегаем порочный круг. Но всякий раз, когда мы имеем «все функции, которые», эти функции должны быть ограничены одним типом, если мы хотим избежать порочного круга. Как показано примерами с Наполеоном и типичным французом, тип не определяется аргументом. Потребовалось бы гораздо больше времени для объяснения этой точки зрения, но и того, что было сказано, достаточно, чтобы сделать ясным, что функции, которые могут принимать такой аргумент, представляют бесконечный ряд типов. Мы могли бы, с помощью различных технических приемов, сконструировать переменную, которая пробегала бы через первые *n* из ряда типов, где *n* — конечно, но мы не можем сконструировать переменную, которая будет пробегать через все типы, а если бы мы смогли сделать это, самим этим фактом мы могли бы породить новый тип функции с одними и теми же аргументами, и при этом снова запустить этот процесс.

Мы называем предикативные *a*-функции *первым* типом *a*-функций; *a*-функции, включающие указание на всеобщность первого типа, мы назовем *вторым* типом, и т. д. Никакая переменная *a*-функции не может пробежать через все эти различные типы: она должна остановиться на некотором определенном типе.

Эти рассмотрения имеют отношение к нашему определению производной экстенсиональной функции. Мы говорили здесь о «функции, формально эквивалентной ϕx». Необходимо принять решение о типе нашей функции. Можно принять любое решение, но некоторые из них просто неизбежны. Пусть предполагаемая формально эквивалентная функция будет ψx. Тогда ψ появляется как переменная и должна быть некоторого определенного типа. Все, что мы необходимо знаем о типе ϕ, так это то, что она имеет аргументы заданного типа — то есть (скажем) *a*-функции. Но это, как мы видели, не определяет ее типа. Если бы мы были способны (как этого требует пятое условие) иметь дело со *всеми* классами, чьи члены одного и того же типа, что и *a*, мы должны быть способны определить все такие классы посредством функции некоторого одного типа. То есть должен быть некоторый тип *a*-функции, скажем, *n*-й, такой, что некоторая *a*-функция формально эквивалентна некоторой *a* функции *n*-го типа. Если это так, тогда любая экстенсиональная функция, объемлющая все *a*-функции *n*-го типа, будет включать любую *a*-функцию. Классы полезны как раз в основном как техническое средство конструирования предположения, которое ведет к этому результату. Предположение называется «аксиомой сводимости» и может быть сформулировано следующим образом:

«Имеется тип (скажем, τ) *a*-функции, такой, что если задана некоторая *a*-функция, она формально эквивалентна некоторой функции упомянутого типа».

Если предполагается эта аксиома, мы используем функции этого типа в определении нашей соответствующей экстенсиональной функции. Утверждения о всех *a*-классах (то есть всех классах, определенных через *a*-функции) могут быть сведены к утверждениям о всех *a*-функциях типа τ. Пока мы используем только экстенсиональные функции, в практических рассмотрениях мы избегаем невозможного понятия «всех *a*-функций». Одна конкретная область, где это жизненно важно, это математическая индукция.

Аксиома сводимости включает все, что по-настоящему существенно в теории классов. И, следовательно, разумно спросить, есть ли какие-либо причины полагать ее истинной.

Эта аксиома, подобно мультипликативной аксиоме и аксиоме бесконечности, необходима для определенных результатов, но не для чистого существования дедуктивного размышления. Теория дедукции, как это объяснено в главе XIV, и законы для суждений, включающие «все» и «некоторый», составляют самую ткань математического мышления: без них, или чего-либо в этом роде, мы не могли бы не только не получить некоторых результатов, но и могли бы не получить никаких результатов вообще. Мы не можем использовать их как гипотезы и выводить гипотетические следствия, поскольку они являются правилами дедукции и предпосылками. Они должны быть абсолютно истинны, или же то, что мы выводим из них, не будет следовать из посылок. С другой стороны, аксиома сводимости, подобно нашим двум предшествующим математическим аксиомам, могла бы быть вполне установлена в качестве гипотезы, вместо того чтобы предполагать ее действительно истинной. Мы можем выводить следствия из нее гипотетически; мы можем также выводить следствия из предположения ложности аксиомы. Она, следовательно, представляет конвенцию и не является необходимой. Имея в виду сложность теории типов и неопределенность всех ее, за исключением наиболее общих, принципов, невозможно до сих пор сказать, есть ли какой-либо способ избавиться от аксиомы сводимости вообще. Однако предполагая правильность изложенной выше теории, что мы можем сказать в пользу истинности или ложности аксиомы?

Аксиома, как можно видеть, является обобщением принципа Лейбница тождества неразличимого. Лейбниц предполагал в качестве логического принципа, что два различных субъекта могут различаться в отношении предикатов. Предикаты составляют только часть того, что называется «предикативными функциями», которые включают также отношения между терминами и различные свойства, которые не могут рассматриваться как предикаты. Таким образом, предположение Лейбница является более строгим и узким, нежели наше. (Но, конечно, не по *его* логике, так как она предполагает все суждения сводимыми к субъектно-предикатной форме). Но, насколько я могу понять, нет никаких причин верить в эту форму. Вполне допустимо с точки зрения абстрактной логической возможности, что две вещи будут иметь в точности одни и те же предикаты, в узком смысле слова «предикат», который используем мы. Как же выглядит аксиома, когда мы выходим за пределы этого узкого смысла? В действительном мире нет способов подвергнуть сомнению ее эмпирическую истинность в отношении индивидов, которая обязана пространственно-временно́й дифференциации: нет двух отличных друг от друга индивидов, имеющих точно одни и те же пространственные и временны́е отношения ко всем остальным индивидам. Но это, как часто бывает, является случайным фактом о мире, в котором мы находимся. Чистая логика и чистая математика (что есть одно и то же) имеет цель быть истинной, по терминологии Лейбница, во всех возможных мирах, а не только в этом сумбурном, наспех сделанном мире, в котором нас запер случай. Логик должен соблюдать некоторое достоинство, он не должен быть настолько «приземлен», чтобы выводить аргументы из вещей, которые он видит вокруг себя.

Рассматривая этот вопрос со строго логической точки зрения, я не вижу никаких причин верить в логическую необходимость аксиомы сводимости. А именно это подразумевается, когда говорится об истинности во всех возможных мирах. Допущение этой аксиомы в систему логики является, следовательно, дефектом, даже если аксиома эмпирически истинна. По этой причине теория классов не может считаться столь же завершенной, как теория дескрипций. Есть необходимость в дальнейшей работе над теорией типов, в надежде получения доктрины классов, не требующей столь сомнительного предположения. Но все-таки разумно считать изложенную в данной главе теорию правильной в основных ее чертах, то есть в ее сведении суждений, номинально говорящих о классах, к суждениям об определяющих их функциях. Избегание классов как сущностей посредством этого метода кажется вполне обоснованным в принципе, однако детали все еще требуют проработки. Именно поэтому мы принимаем теорию классов вопреки нашему желанию исключить, насколько это возможно, все то, что открыто серьезным сомнениям.

Теория классов, как она изложена выше, сводится к одной аксиоме и одному определению. Ради определенности мы повторим их. Аксиома такова:

Имеется тип τ такой, что если ϕ есть функция, имеющая данный объект a в качестве аргумента, тогда имеется функция ψ типа τ, которая формально эквивалентна ϕ.

Определение таково:

Если ϕ есть функция, которая имеет данный объект a в качестве аргумента, и τ есть тип, упомянутый в аксиоме выше, тогда сказать, что класс, определенный через ϕ, имеет свойство f, значит сказать, что имеется функция типа τ, формально эквивалентная ϕ и имеющая свойство f.

Глава XVIII
МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

Исторически математика и логика были совершенно различными дисциплинами. Математика была связана с наукой, а логика с греками. Но обе стали развитыми дисциплинами только в последнее время: логика стала более математической, а математика стала более логической. Как следствие этого, сейчас невозможно провести между двумя дисциплинами разделительную линию. На самом деле обе представляют собой нечто единое. Они отличаются так же, как мальчик и мужчина: логика есть юность математики, а математика есть зрелость логики. Этот взгляд возмущает логиков, проведших все время над изучением классических текстов и не способных понять ни кусочка символического размышления, и математиков, кто изучал технику, не заботясь о том, чтобы вникнуть в ее смысл или обоснование. Оба типа, к счастью, становятся все более редкими. Столь много современной математической работы делается на границе с логикой, столь много в современной логике стало символическим и формальным, что очень тесное соотношение логики и математики стало ясно каждому студенту. Доказательство их тождества, конечно, дело деталей: начиная с посылок, которые по всеобщему согласию принадлежат логике, и прибывая к результатам, явно принадлежащим математике, мы обнаруживаем, что нет такой точки, через которую можно было бы провести резкую линию, слева от которой логика, а справа — математика. Если есть еще такие люди, которые не допускают тождества математики и логики, мы оспорим их точку зрения, попросив указать, в какой точке, в ряду определений и дедукций в *Principia Mathematica*, с их точки зрения кончается логика и начинается математика. И тогда будет ясно, что ответ должен быть совершенно произвольным.

В ранних главах этой книги, начиная с натуральных чисел, мы сначала определили «кардинальное число» и показали, как обобщить концепцию числа, а затем проанализировали концепции, входящие в определения, пока не обнаружили, что имеем дело с основаниями логики. В синтетической дедуктивной трактовке эти основания появляются первыми, и натуральные числа появляются только после долгого пути. Такая трактовка, хотя она формально более правильна, чем принятая нами, более трудна для читателя, потому что окончательные логические концепции и суждения, с которых она начинается, являются более абстрактными и незнакомыми по сравнению с натуральными числами. Они, кроме того, представляют передовой фронт знания, за которым царит неизвестность, и власть знания здесь не совсем еще крепка.

Принято говорить, что математика это наука о «количестве». «Количество» — это расплывчатое слово, но ради упрощения аргумента мы можем заменить его словом «число». Утверждение, что математика есть наука о числе, будет неверным по двояким основаниям. С одной стороны, имеются такие разделы математики, которые совсем не имеют дел с числами, — например, вся геометрия, которая не использует координат или измерений: проективная или дескриптивная геометрия до тех пор, пока не вводятся координаты, не имеет дела с числом или даже количеством в смысле *больше* или *меньше*. С другой стороны, через определение кардинальных чисел, через теорию индукции и наследственных отношений, через общую теорию рядов и через определения арифметических операций становится возможным обобщить многое, что доказывалось только в связи с числами. В результате то, что ранее считалось уделом только Арифметики, разделилось на несколько областей, из которых ни одна не связана специально с числами. Большая часть элементарных свойств чисел имеет дело с одно-однозначными отношениями и подобием между классов. Сложение имеет дело с конструированием взаимно исключающих классов, подобных множеству классов, о которых неизвестно, являются ли они взаимно исключающими. Умножение сливается с теорией «выборок», то есть с определенного рода одно-многозначных отношений. Конечность сливается с общим исследованием наследственных отношений, которое дает полную теорию математической индукции. Ординальные свойства различных видов числовых рядов и элементы теории непрерывных функций и их пределов могут быть обобщены таким образом, чтобы в них не было существенного обращения к числам. Принципом всего формального мышления является стремление к самому широкому обобщению, что гарантирует самое широкое применение процессов дедукции. И обобщая мышление в арифметике, мы, таким образом, следуем рецепту, который уже повсеместно принят в математике. И такого рода обобщением мы на самом деле создаем множество новых дедуктивных систем, в которых традиционная арифметика растворяется и расширяется. Но на вопрос о том, принадлежит ли любая из этих новых дедуктивных систем, например теория выборок, арифметике или логике, ответ совершенно произволен и не может быть решен на рациональных основаниях.

Перед нами тогда стоит вопрос: что это за предмет, в отношении которого безразлично, назвать ли его математикой или логикой? Есть ли какой-нибудь способ его определения?

Некоторые характеристики этого предмета ясны. Начать с того, что в этом предмете мы не имеем дело с конкретными свойствами и вещами: мы трактуем формально то, что может быть сказано о *любой* вещи или о *любом* свойстве. Мы готовы сказать, что один и один есть два, но не то, что Сократ и Платон есть два, потому что как чистые логики или математики мы никогда не слыхивали о Сократе и Платоне. Мир, в котором не было бы таких индивидов, все еще был бы миром, в котором один и один давало бы два. Как чистым математикам или логикам нам не дано помнить о частностях, потому что если мы это сделаем, мы введем нечто к делу не относящееся и не формальное. Мы можем прояснить ситуацию для случая с силлогизмами. Традиционная логика говорит: «Все люди смертны, Сократ человек, следовательно, Сократ смертен». Ясно, что мы имеем при этом в виду не то, что посылки и заключение являются истинными, а то, что из посылок следует заключение; даже традиционная логика говорит, что реальная истинность посылок является делом несущественным. Таким образом, первое, что нужно изменить в силлогизме, это изложить его в такой форме: «Если все люди смертны и Сократ есть человек, тогда Сократ есть смертен». И тут мы видим, что цель аргумента состоит в убеждении в его правильности за счет формы, а не за счет конкретных терминов, которые в него входят. Если бы мы опустили из наших посылок «Сократ есть человек», мы имели бы неформальный аргумент, допустимый только по той причине, что Сократ на самом деле есть человек. В этом случае мы не имели бы обобщенного аргумента. Но когда, как это имеет место выше, аргумент является *формальным*, ничто не зависит от терминов, которые в него входят. Таким образом, мы можем подставить α вместо *людей*, β вместо *смертен* и x вместо Сократ, где α и β есть любые классы, а x — индивид. Тогда мы получаем утверждение: «Какие бы возможные значения ни принимали x, α и β, если все α есть β и x есть α, тогда x есть β»; другими словами, «пропозициональная функция, если все α есть β и x есть α, тогда x есть β — всегда истинна». Здесь мы наконец прибыли к логическому суждению — такому, которое только *подразумевалось* традиционным суждением о Сократе, людях и смертных.

Ясно, что если мы стремимся к формальным утверждениям, тогда мы всегда будем получать в окончательном виде утверждения, подобные утверждению выше, в котором не упоминаются действительные вещи или свойства. Это происходит за счет простого желания не тратить время на доказательство частных случаев, когда можно доказать общий случай. Было бы странно пройти через долгую аргументацию о Сократе, а затем полностью повторить ее для Платона. Если наш аргумент справедлив, скажем, для всех людей, мы будем доказывать его, употребляя «x», предполагая «x есть человек». С таким предположением аргумент сохранит свою значимость, даже если x не есть человек. А затем мы обнаруживаем, что наш аргумент верен, если взамен предположения о том, что x есть человек, мы предположим, что x есть обезьяна, гусь или премьер-министр. Мы не будем, следовательно, тратить нашего времени, используя посылку «x есть человек», а возьмем «x есть α», где α есть некоторый класс индивидов, или «ϕx», где ϕ есть некоторая пропозициональная функция некоторого заданного типа. Таким образом, отсутствие всякого упоминания о частных вещах или свойствах в логике или чистой математике есть необходимый результат такого факта, что подобные исследования являются, как мы говорим, чисто «формальными».

На этом этапе мы сталкиваемся с проблемой, установить которую проще, чем решить. Проблема такова: «Что является конституентами логического суждения?» Я не знаю ответа, но постараюсь объяснить, как возникает сама проблема.

Возьмем, скажем, суждение «Сократ был до Аристотеля». Кажется ясным, что тут мы имеем дело с отношением двух терминов и что конституентами суждения (как и соответствующего факта) являются просто два термина и отношение, а именно Сократ, Аристотель и *до* (я игнорирую тот факт, что Сократ и Аристотель не являются простыми, а также то, что кажущиеся имена являются на самом деле укороченными дескрипциями). Ни один из этих фактов не имеет прямого отношения к делу. Мы можем представить себе общую форму таких суждений через «$x\ R\ y$», которое может читаться как «x имеет отношение R к y». Эта общая форма может входить в логические суждения, но ее частные примеры не могут. Следует ли нам заключить, что общая форма сама является конституентой такого логического суждения?

Если дано суждение, такое как «Сократ был до Аристотеля», тут имеются конституенты и определенная форма. Но форма сама не есть новая конституента; если бы она была таковой, мы нуждались бы в новой форме, которая бы включала ее и другие конституенты. Мы можем, на самом деле, превратить *все* конституенты суждения в переменные и в то же время оставить форму неизменной. Это как раз то, что мы делаем, когда используем такие схемы, как «$x\ R\ y$», которые стоят для любого определенного класса суждений, а именно тех, в которых утверждаются отношения между двумя терминами. Мы можем перейти к общим утверждениям, таким как «$x\ R\ y$ иногда истинно», то есть имеются случаи, где есть дуальные отношения. Это утверждение будет принадлежать логике (математике) в том смысле, в котором мы используем это слово. Но в этом утверждении мы не упоминаем никаких частных вещей или отношений, которые даже не могут входить в суждения чистой логики. Тогда единственными возможными конституентами логических суждений являются чистые формы.

Я не хочу определенно утверждать, что чистые формы, например «*x R y*», действительно входят в суждения такого рода, которые мы рассматриваем. Анализ подобных суждений является делом трудным, с массой конфликтующих между собой мнений. Мы не можем останавливаться на этом вопросе подробно, но можем принять в качестве первого приближения взгляд на формы, которые входят в логические суждения в качестве их конституент. И мы можем объяснить (хотя не определяя формально), что мы подразумеваем под «формой» суждения:

«Формой» суждения является то, что остается неизменным, когда каждая конституента суждения заменяется другой.

Таким образом, «Сократ был раньше, чем Аристотель» имеет ту же форму, что «Наполеон более велик, чем Веллингтон», хотя все конституенты этих двух суждений отличны друг от друга.

Мы можем принять в качестве необходимой (хотя не достаточной) характеристики математических или логических суждений то, что они могут быть получены из суждений, не содержащих переменных (то есть таких слов, как *все*, *некоторый*, the — *определенный*, a — *неопределенный*), превращением каждой конституенты в переменную при условии, что результат будет всегда истинным или иногда истинным, или что он будет всегда истинным в отношении некоторых переменных, или иногда истинным в отношении других переменных, или любым вариантом этих форм. Другой способ установления того же самого результата — это сказать, что логика (или математика) имеет дело только с *формами*, и только с той стороной их, что они всегда или иногда истинны — со всеми перестановками «всегда» и «иногда», которые только могут встречаться.

В каждом языке имеется несколько слов, чья единственная функция состоит в указании формы. Эти слова, вообще говоря, являются наиболее употребительными в языках с наименьшим количеством флексий. Возьмем «Сократ есть человек». Здесь «есть» не является конституентой суждения, а служит для указания субъектно-предикатной формы. Подобным же образом, в «Сократ был раньше, чем Аристотель» «был» и «чем» просто указывают на форму; суждение — это то же самое, что «Сократ предшествует Аристотелю», в котором эти слова исчезают и форма указывается по-другому. Форма, как правило, *может* указываться другими способами, нежели с помощью специальных слов: это можно сделать с помощью порядка слов. Но не стоит преувеличивать роль таких способов. Например, трудно видеть, как мы могли бы удобно выразить молекулярные формы суждений (то есть то, что мы называем «истинностными функциями») без некоторых слов вообще. Мы видели в главе XIV, что для этой цели достаточно одного слова или символа, выражающего *несовместимость*. Но без этого слова мы могли бы иметь большие проблемы. Это, однако, не очень важно для наших настоящих целей. Что для нас важно, так это понять, что форма может быть связана с общим суждением, хотя в последнем может не быть ни слова, ни символа для обозначения формы. Если мы хотим говорить о самой форме, мы должны иметь для нее слово, но если, как в математике, мы хотим говорить о всех суждениях, имеющих эту форму, слово для формы оказывается не необходимым; вероятно, с теоретической точки зрения оно вообще не является необходимым.

Предполагая — а я думаю, что мы можем сделать это, — что формы суждений *могут* быть представлены как формы суждений, в которых они выражены без специальных для этих целей слов, мы должны прибыть к такому языку, в котором все формальное принадлежит синтаксису, а не словарю. В таком языке мы могли бы выразить *все* суждения математики, даже если мы не знаем ни одного слова этого языка. Язык математической логики, если его можно усовершенствовать, мог бы быть таким языком. Мы могли бы иметь символы для переменных, таких как «x» и «R» и «y», расположенных в различном порядке, и способ их упорядочивания указал бы, что нечто сказанное должно быть истинным в отношении всех или некоторых значений переменных. Мы не нуждаемся в том, чтобы знать вообще какие-либо слова, потому что они нужны только для того, чтобы придать значения переменным, что является делом прикладного математика, но не чистого логика или чистого математика. Особенностью суждения в пропозициональной логике является то, что если задан подходящий язык, то это суждение может утверждаться в таком языке человеком, который знает синтаксис, не зная ни одного слова из словаря.

Но ведь имеются слова, которые выражают форму, такие как «есть» или «чем». И в каждом символизме, до сих пор изобретенном для математической логики, имеются символы, имеющие постоянное формальное значение. Мы можем взять в качестве примера символ несовместимости, использующийся для построения истинностных функций. Такие слова и символы могут входить в логику. Тогда встает вопрос: как мы должны определить их?

Такие слова или символы выражают то, что называется «логическими константами». Логические константы могут быть определены точно так же, как мы определили формы; в сущности они являются одной и той же вещью. Фундаментальной логической константой будет то, что является наиболее общим для большого числа суждений, каждое из которых получается из другого путем подстановки одного термина вместо другого. Например, «Наполеон есть более велик, чем Веллингтон» получается подстановкой «Наполеон» вместо «Сократ», «Веллингтон» вместо «Аристотель» и «более велик» вместо «был раньше» в суждение «Сократ был раньше, чем Аристотель». Некоторые суждения могут быть получены таким способом из прототипа «Сократ был раньше Аристотеля», а некоторые не могут быть получены таким путем; те, что могут, имеют форму «*x R y*», то есть они выражают дуальные отношения. Мы не можем получить из указанного выше прототипа подстановкой одного термина вместо другого таких суждений, как «Сократ есть человек» или «Афиняне дали цикуту Сократу», потому что первое является суждением субъектно-предикатной формы, а второе выражает трехместное отношение. Если мы должны вообще иметь слова в нашем логическом языке, то ими должны быть «логические константы», и они всегда будут либо тем, что является самым общим в группе суждений, получаемых подстановкой терминов указанным выше образом, либо будут выводиться из них. А то, что является наиболее общим, мы называем «формой».

В этом смысле все «константы», которые встречаются в чистой математике, являются логическими константами. Число 1, например, есть производное от суждений следующей формы: «Имеется термин c такой, что ϕx истинно тогда и только тогда, когда x есть c». Это функция от ϕ, и из нее получается множество различных суждений при различных значениях ϕ. Мы можем (опуская кое-какие промежуточные шаги, не относящиеся прямо к нашей цели) взять вышеупомянутую функцию от ϕ как означающую «класс, определенный через ϕ, есть единичный класс», или «класс, определенный через ϕ, есть член 1» (1 есть класс классов). На этом пути суждения, в которые входит 1, приобретают значение, производное от определенной константной логической формы. То же самое может быть обнаружено в случае всех математических констант, все из них являются логическими константами или символическими сокращениями, полное использование которых в собственном контексте определяется посредством логических констант.

Но хотя все логические (или математические) суждения могут быть выражены полностью в терминах логических констант вместе с переменными, обратное утверждение, что все суждения, которые могут быть таким образом выражены, являются логическими, неверно. Мы нашли до сих пор необходимый, но не достаточный критерий математических суждений. Мы достаточно определили характер примитивных *идей* в таких терминах, в которых могут быть *определены* все идеи математики, но не примитивные *суждения*, из которых все суждения математики могут быть *дедуцированы.* Это более трудное дело, относительно которого мы еще не знаем полного ответа.

Мы можем взять аксиому бесконечности как пример суждения, которое, хотя оно может быть уточнено в логических терминах, не может утверждаться логикой как истинное. Все суждения логики характеризуются тем, что выражается термином «аналитическое», или же тем, что их противоречие само противоречиво. Эта формулировка, однако, неудовлетворительна. Закон противоречия есть лишь одно из логических суждений и не имеет перед остальными никакого преимущества, и доказательство того, что противоречие некоторому суждению само противоречиво, требует других принципов дедукции, помимо закона противоречия. Тем не менее характеристика логических суждений, которую мы ищем и чувствуем, что она должна быть определена именно таким образом, состоит в дедуцируемости из закона противоречия. Эта характеристика, которую мы пока назовем *тавтологичностью*, явно не относится к утверждению, что число индивидов во вселенной есть *n*, каким бы числом ни было *n.* Если отбросить типы, то было бы возможно доказать логически, что существуют классы из *n* терминов, где *n* есть любое конечное целое число, или даже что есть классы из $\aleph_0$ терминов. Но благодаря типам такие доказательства, как мы видели в главе XIII, ложны. Мы вынуждены довериться эмпирическим наблюдениям в определении того, имеется ли в мире *n* индивидов. Среди «возможных» миров, в лейбницевском смысле, будут миры, в которых будет один, два, три... индивидов. Нет даже никакой логической необходимости в том, чтобы существовал хотя бы один индивид[1] — действительно, почему такой мир должен вообще существовать. Онтологическое доказательство существования Бога, если оно правильно, должно установить логическую необходимость в, по крайней мере, одном индивиде. Но общепризнано, что оно является неверным и на самом деле опирается на ошибочный взгляд на существование, то есть в нем упускается из виду, что существование может быть приписано только тому, что описывается, а не тому, что поименовано, так что бессмысленно аргументировать от «это есть (определенный) такой-то и такой-то» и «(определенный) такой-то и такой-то существует» к «это существует». Если мы отвергнем онтологический аргумент, мы должны прийти к заключению, что существование мира случайно, то есть оно не является логически необходимым. Если это так, ни один принцип логики не может утверждать «существование», за исключением лишь в качестве гипотезы. То есть ни один из них не может иметь форму «пропозициональная функция такая-то и такая-то иногда истинна». Суждения этой формы, когда они встречаются в логике, могут быть гипотезами или их следствиями, но не полностью утверждаемыми суждениями. Полностью обоснованные суждения логики говорят, что некоторая пропозициональная функция *всегда* истинна. Например, всегда истинно, что если p влечет q и q влечет r, тогда p влечет r, или что если все α'ы есть β и x есть α, то x есть β. Такие суждения могут встречаться в логике, и их истинность не зависит от существования вселенной. Мы можем даже сказать, что если бы не было вселенной, то все равно *все* общие суждения были бы *истинными*, потому что отрицание общего суждения (как мы видели в главе XV) есть суждение, утверждающее существование, и должно быть всегда ложным в случае, если вселенная не существует.

[1] Примитивные суждения в *Principia Mathematica* таковы, чтобы был возможен вывод о существовании по крайней мере одного индивида. Но сейчас я рассматриваю это как дефект логической чистоты.

Логические суждения таковы, что могут быть названы известными *априори*, без изучения действительного мира. Мы знаем из эмпирических исследований, что Сократ есть человек, но мы знаем правильность силлогизма в абстрактной форме (когда он представлен в терминах переменных) без необходимости в апелляции к опыту. Эта характеристика не самих логических суждений, но тех способов, которыми мы их познаем. Это имеет отношение, однако, к вопросу об их природе, так как есть некоторые виды суждений, о которых трудно предположить, что мы знаем их без опыта.

Ясно, что определение «логики» или «математики» следует искать в новом определении старого понятия «аналитических» суждений. Хотя мы больше не можем быть удовлетворены определением логических суждений как следующих из закона противоречия, мы можем и должны еще допустить, что они представляют собой класс суждений, полностью отличный от тех, которые мы знаем эмпирически. Все они имеют характеристику, которую мы некоторое время назад назвали «тавтологичностью». Она, скомбинированная с фактом, что они могут быть полностью выражены в терминах переменных и логических констант (логическая константа есть нечто, что остается постоянным в суждении, даже тогда, когда все его конституенты изменены), даст определение логики или чистой математики. На настоящий момент я не знаю, как определить «тавтологию»[1]. Было бы легко предложить определение, которое могло бы показаться на время удовлетворительным, но ни одно из них я не могу назвать удовлетворительным, вопреки чувству, что хорошо знаком с тем, что я хочу определить. На этом этапе мы достигли границ познания в нашем обратном путешествии в логические основания математики.

Мы сейчас подошли к концу нашего краткого введения в математическую философию. Невозможно адекватно передать идеи, которые здесь обсуждались, пока мы воздерживаемся от употребления логических символов. Так как обычный язык не имеет слов, которые естественно выражают то, что мы хотели бы выразить, необходимо, если мы все-таки используем обыденный язык, совершить насилие над словами для придания им необычных значений. Читатель может быть уверен, что обязательно совершит ошибку, приписав обычные значения словам и, таким образом, придя к неверным понятиям в отношении того, что он намеревался сказать. Больше того, обыденная грамматика и синтаксис невероятно вводят в заблуждение. Рассмотрим, например, случай с числами: «10 людей» имеет ту же форму, что «белые люди», так что можно подумать, что 10 является прилагательным к «людям». Или же опять-таки случай, где входят пропозициональные функции, в частности, в связи с существованием и дескрипциями. Поскольку

[1] Важность «тавтологии» для определения математики была указана мне моим бывшим учеником Людвигом Витгенштейном, работавшим над этой проблемой. Я не знаю, решил ли он ее, и не знаю даже, жив он или мертв.

язык вводит в заблуждение и, кроме того, при применении к логике является расплывчатым и неточным (впрочем, он никогда и не предназначался для логики), для точной и исчерпывающей трактовки нашего предмета абсолютно необходим логический символизм. Те читатели, следовательно, кто приобрел сноровку в овладении принципами математики, не отступит перед трудом, который следует потратить на овладение символами, — трудом, который на самом деле гораздо легче, чем можно подумать. Как это видно из нашего поспешного обзора, предмет наш содержит неисчислимое количество нерешенных проблем, и предстоит сделать еще очень много. И если кто-либо приступит к серьезному изучению математической логики после прочтения этой маленькой книжки, она выполнит ту цель, ради которой была написана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В. О. Куайн

РАССЕЛОВСКАЯ ТЕОРИЯ ТИПОВ*

§ 34. КОНСТРУКТИВНАЯ ЧАСТЬ

Мы очертили теорию множеств — в предыдущих главах — без установления экзистенциальных предположений, кроме 7.10 и 13.1, которые дали нам конечные классы. Кроме них, делались предположения ad hoc, присутствующие в использующих их теоремах.

В оставшихся главах я опишу и сравню различные системы экзистенциальных предположений, которые фигурируют в литературе по теории множеств. Я смешаю исторический подход с логическим, упирая на взаимосвязи структур рассматриваемых систем и на эффективность отклонений.

Различия между системами велики. Некоторые из систем, которые будут рассматриваться, несовместимы даже с 7.10 и 13.1, вопреки тому факту, что те оставляют всю онтологию бесконечных классов нетронутой. В конце я примирю системы с 7.10 и 13.1, модифицировав системы и сохранив их хорошие стороны.

В этой главе я опишу одну из пионерских работ, *теорию типов* Рассела 1908 г. Эта система возникла из пробных предположений 1903 г. Рассела с помощью идеи Пуанкаре[1]. Пуанкаре попытался рассматривать парадокс Рассела скорее как результат тонкой ошибки, нежели крушение непреодолимых принципов. Он приписал его тому, что назвал порочным кругом. Определяющая характеристика парадоксального класса y есть $(x)\ (x \in y \,.\!\equiv.\, x \notin x)$, и парадокс получается, как мы знаем, за счет того, что y позволяется брать в качестве значения квантифицированной переменной x. Недопустимо, полагал он, включать класс y или любые другие классы, чье определение могло бы предполагать y, в область квантификации, которая используется в спе-

* W. V. O. Quine. *Set Theory and Its Logic.* Cambridge: The Belnap Press of Harvard University Press, p. 241–258. Belnap Press of Harvard University Press

Перевод осуществлен В. В. Целищевым с текста, приведенного в сборнике статей *Essays on Bertrand Russell*, ed. by E. D. Klemke. University of Illinois Press, 1970, p. 382–387.

[1] Russell B. 1903. Appendix B; Poincaré, 1906, p. 307. Как указывает Пуанкаре, его идея была высказана уже Ришаром (1905).

цификации самого y. Он назвал подозрительную процедуру *непредикативной*[2]. Мы не должны предполагать y в определении y.

Определение, в самом чистом виде, есть то, что получается, когда вводится новое обозначение как сокращение для старого. Никаких вопросов о допустимости не может возникнуть в связи с определением, пока механическая процедура обеспечивает однозначный перевод новых обозначений в термины старых. Пуанкаре критиковал не само определение некоторого специального символа как сокращения для $\{x : x \notin x\}$, но скорее предположение о существовании такого класса; предположение о существовании класса y, выполняющего условие $(x)(x \in y \,.\equiv.\, x \notin x)$. Нам лучше говорить не о непредикативном определении, а о непредикативной спецификации классов и, что является гвоздем вопроса, о непредикативных предположениях существования класса.

А что же порочный круг? Круг в аргументации соблазняет свою жертву к неосознанному допущению тезиса в качестве предпосылки для доказательства этого же тезиса. Круг в определении вводит определяемое в определение, предотвращая, таким образом, сведение к примитивным обозначениям. Но непредикативная спецификация классов не является ни одной из этих вещей. Вряд ли ее следует рассматривать как подозрительную процедуру, разве что она подозрительна, как и все, что связано с парадоксами.

Поэтому нам не следует считать классы буквально создаваемыми через спецификацию — т. е. появляющимися один за другим — и увеличивающимися в числе по ходу времени. Пуанкаре не предлагал временного варианта теории классов. Доктрина классов состоит скорее в том, что они имеются с самого начала. Поскольку это так, нет очевидной ошибки в непредикативной спецификации. Вполне разумно выделить желаемый класс посредством некоторых его характеристик, если даже мы имеем шанс квантифицировать его впоследствии вместе с остальными вещами в мире. Непредикативная спецификация, на взгляд, ничем не более порочна, чем выделение индивидуума как наиболее типичного йельца на основании среднего статистического йельца, включая его самого.

---

[2] Слово вошло в обиход странным образом. В 1906 г. Рассел говорил об условии членства как предикативном, что для той или иной теории множеств означает просто, что имеется класс, соответствующий условию членства. Пуанкаре следовал этой терминологии; но так уж случилось, что условие членства, которое он хотел провозгласить предикативным в этом смысле, было таким, что не включало квазикруга, против которого он возражал. Поэтому термин известен в последнем смысле, став независимым от первоначального. Затем Рассел придал термину более технический смысл, но весьма близкий к уже известному (как мы увидим далее в этой части). Во всех этих смыслах термин строго должен отличаться от слова «предикат», которое я продолжаю использовать в смысле, объясненном ранее в § 1.

Так что запрет Рассела и Пуанкаре не нужно трактовать как обнаружение некоторой скрытой (но однажды выявленной) ошибки, являющейся причиной парадоксов. Скорее, это одно из различных предложений по ограничению закона свертывания [comprehension].

$$(\exists y)\ (x)\ (x \in y \,.\! \equiv \mathrm{F}x)$$

для того, чтобы прорежить универсум классов до достижения непротиворечивости.

Все-таки это предложение менее произвольно, чем некоторые альтернативы, в том, что оно реализует конструктивистскую метафору: она ограничивает классы тем, что *могло бы* быть порождено за бесконечный период от неспецифицированного начала через использование для каждого класса условия членства, упоминающего только уже существующие классы. Если оставить метафору в стороне, отличительной особенностью такой теории множеств является то, что ее универсум допускает (трансфинитное) упорядочение, такое, что каждый класс, специфицированный вообще условием членства, специфицирован таким условием, в котором значения всех переменных ограничены вещами, упорядоченными ранее.

Подходя к теории Рассела 1908 г.[3], оставим пока понятие класса, потому что его теория начинается с других терминов.

Для Рассела универсум состоит из индивидов в некотором смысле, их атрибутов и отношений, атрибутов и отношений этих атрибутов и отношений и т. д. Его собственный термин для атрибутов и отношений — «*пропозициональная функция*». Он использует ϕ, ψ, … как переменные для них. Для того чтобы сказать, что x имеет атрибут ϕ, что x имеет отношение ψ к y, используются обозначения ϕx и $\psi(x, y)$. Для *абстракции* пропозициональных функций из предложений он использует просто переменную со шляпкой в аргументном месте. Так, атрибут «любви к y» и «быть любимым x’ом» есть соответственно класс — «$\hat{x}$ любит $\hat{y}$» и «x любит y», аналогичные класс-абстракту: $\{x : x$ любит $y\}$ и $\{y : x$ любит $y\}$. Отношение любви и ему обратное, а именно $\{\langle x, y\rangle : x$ любит $y\}$ и $\{\langle y, x\rangle : x$ любит $y\}$ появляются как «$\hat{x}$ любит $\hat{y}$» и «$\hat{y}$ любит $\hat{x}$»; направление отношения определяется алфавитным порядком[4].

Когда такие абстракты случаются в более длинных контекстах, иногда становится неясно, строить ли переменную со шляпкой для более короткого или для более длинного предложения, особенно когда в тексте есть несколько абстрактов. Рассел обошел это трудность практически главным образом за счет модифицированного и превос-

[3] Я упоминаю статью 1908 года, поскольку она была первой публикацией. Для более обычного и удобного ознакомления с материалом следует смотреть первые разделы *Principia Mathematica*.

[4] Whitehead A. N. and Russell B. *Principia Mathematica*, vol. 1, p. 250.

ходящего другие способы обозначения для классов и отношений — подобного в существенных чертах тому, который мы использовали в ранних главах, — которое он ввел контекстуальным определением и следовал ему во всей разработке. Но в изложении его основной теории позвольте мне обратиться к его основным обозначениям, обходя их недостатки.

Он классифицировал его индивиды и пропозициональные функции на так называемые *порядки* следующим образом. Индивиды были порядка 0. Определенные неспецифицированные пропозициональные функции от индивидов были порядка 1; но не все. Что до остального, то порядок пропозициональной функции определялся рассмотрением абстрактивного выражения, именовавшего функцию. Этот порядок брался как наименьшее целое число, превышавшее порядок всех связанных переменных в нем, то есть всех переменных со шляпкой и всех квантифицированных переменных. Под порядком переменной подразумевался порядок ее значений; и существенным для плана Рассела было то, что каждая переменная была ограничена если не явным индексом, то значением единственного порядка. Таким образом, Рассел отделил пропозициональную функцию от фигурирующего в ней значения связанной переменной; первая всегда по порядку слишком высока, чтобы быть значением таких переменных.

В приведенном выше описании есть характерный «обмен любезностями» между знаком и объектом: пропозициональная функция получает свой порядок от абстрактивного выражения, а порядок переменной есть порядок ее значений. Изложение облегчено тем, что слову «порядок» здесь позволено иметь двойной смысл: приписывание порядка всем сразу обозначениям и параллельно — их объектам. Идеально порядок каждой переменной, по замыслу, должен показываться индексом при переменной; порядок каждого абстрактивного выражения тогда вычисляется, как было указано выше; и это переносится на пропозициональную функцию, которая, тем самым, получает имя. Собственное расселовское выражение просто затемняет различие между абстрактивным выражением (или даже открытым предложением) и пропозициональной функцией (или атрибутом или отношением); но это есть особенность, которую я не копирую и сочту в будущем предосудительной.

Экстенсиональность есть то, что отделяет классы от атрибутов, и Рассел занят здесь определенно атрибутами, а не классами. Атрибуты могут быть различных порядков и, значит, быть различными, и все же вещи, которые их имеют, могут быть одними и теми же. Например, атрибут $(\phi)\ (\phi\hat{x} \equiv \phi y)$ с ϕ порядка 1 есть атрибут одного только y, и только его, — и опять-таки атрибут $(\chi)\ (\chi\hat{x} \equiv \chi y)$ с χ порядка 2 есть атрибут y, и только его одного; тем не менее их порядки соответственно 2 и 3.

Отношения, в смысле, в котором расселовские пропозициональные функции могут быть атрибутами или отношениями, есть так называемые *интенсиональные* отношения; они похожи на атрибуты, а не есть просто классы упорядоченных пар, упорядоченных троек и т. д., то есть они различаются, даже если соотносимые вещи являются теми же. Они могут считаться атрибутами упорядоченных пар, троек и т. д. (Но Рассел не дает их дальнейшего анализа.)

Кроме пропозициональных функций с одной переменной, или атрибутов, и пропозициональных функций с многими переменными, или отношений, Рассел признавал также пропозициональные функции без переменных, или суждения [proposition]; его теория порядков прилагается к суждениям так же, как и пропозициональным функциям с одной или более переменной. Но я не вижу смысла рассматривать этот, имеющий чисто исторический интерес, вопрос.

Многие атрибуты были для Рассела выше на два порядка (и более), чем вещи, которые ими обладали. Например, это видно в случае $(\phi)\ (\phi\hat{x} \equiv \phi y)$. Другой пример — это $(\exists\phi)\ (\psi\phi\ .\ \phi\hat{x})$, атрибут обладания атрибутом, имеющим атрибут ψ. Некоторые атрибуты, с другой стороны, были точно следующего порядка (на 1 выше), чем имеющие их вещи. Примером мог служить $(x)\ (\phi\hat{x} \equiv \psi y)$, атрибут равнообъемности с ψ. Такие атрибуты Рассел назвал *предикативными.* Связь между этим техническим использованием слова и использованием его у Пуанкаре состоит в том, что класс-абстракт $(x : Fx)$ специфицирует свой класс скорее предикативно, нежели непредикативно, в смысле Пуанкаре, тогда и только тогда, когда соответствующий атрибут-абстракт $(F\hat{x})$ именует предикативный атрибут. Таким образом, Рассел, допуская атрибуты, не являющиеся предикативными в его смысле, все же не чурался заповеди Пуанкаре, поскольку ни один атрибут, кроме как предикативный, не определяет у него класса.

Рассел, конечно, распространил термин «предикативный» и на другие пропозициональные функции, нежели атрибуты. Он называл диадическое отношение предикативным, если его порядок превышал точно на единицу порядок соотносимых вещей. Соответственно, для триадических отношений и т. п.

Расселовский критерий порядка пропозициональной функции явно предполагает, что каждая переменная должна быть ограничена одним порядком. В действительности он пошел дальше: каждая переменная для атрибутов пробегала над областью только тех атрибутов, которые сами были фиксированного порядка, и чьи *аргументы* — вещи, имеющие атрибуты, — тоже некоторых фиксированных порядков. Подобным же образом каждая переменная для отношений должна была пробегать только над отношениями одного порядка, а отношения должны были допускать аргументы только некоторого фиксированного порядка на первом аргументном месте, аргументы точно фиксированного некоторого порядка — на втором аргументном месте и так далее. Полное формальное представление теории потребовало бы, вероятно, численных индексов для переменных пропозициональной функции, чтобы указать порядок пропозициональных функций и численных индексов для указания порядка допустимых аргументов для этих пропозициональных функций; а в случае отношений индексы должны бы быть сложными с указанием порядка первых аргументов, вторых и так далее до подходящего числа.

Рассел требовал, чтобы порядок пропозициональной функции превышал порядок каждого из ее аргументов. Когда пропозициональная функция задана с самого начала выражением абстракции, это ограничение уже присутствует в том, о чем уже было сказано, а именно, что порядок превышает порядок переменной со шляпкой. Но все еще требуется дополнительное ограничение, когда пропозициональная функция просто фигурирует как значение переменной. В таких случаях ограничение учитывается индексами (верхними и нижними индексами) так, чтобы верхний индекс переменной превышал ее нижний индекс. Но по этому поводу Рассел не входил в детали.

Формы обозначений ϕx, $\phi(x, y)$ и т. д., выражающие приписывание атрибутов, принимаются как значимые, только если порядок или порядки аргументов подходят соответствующим пропозициональным функциям. В терминах индексов это означает, что верхний индекс аргумента или верхние индексы нескольких аргументов должны подходить к нижнему индексу пропозициональной функции.

Но на практике Рассел опускал индексы, руководствуясь конвенцией о так называемой *систематической неоднозначности* [ambiguity]. Конвенция состоит в том, что индексы воображаются проставленными любым удобным образом, удовлетворяющим вышеупомянутое грамматическое ограничение.

Случалось такое, что Рассел хотел включить в его формулу некоторую информацию о порядке переменных, кроме минимально требуемой для грамматической правильности. Не заботясь об абсолютном порядке, он хотел иногда указать, что порядок пропозициональной функции должен быть следующим за порядком ее аргумента. Не восстанавливая для этой цели всей системы индексов, он вводит восклицательный знак после некоторых вхождений переменной для пропозициональной функции, чтобы указать, что переменная пробегает над предикативными пропозициональными функциями того или иного порядка. Обозначение иллюстрируется в начале следующего параграфа.

При представлении формальной системы теории множеств весьма удобно предположить фиксированной стандартную логику истинностных функций и кванторов как подструктуру, требующую добавления только специальных аксиом, чтобы получить определенную теорию множеств. В настоящем случае мы не можем принять такую линию полностью из-за того, что имеется множество сортов переменных. Различение индексов есть уже отклонение от стандартной логики с ее единственным сортом переменных. Однако это отклонение может быть в основном локализовано в законах типа $(x)\ Fx \supset Fy$ и $Fy\ (\exists x)\ Fx$, которые обеспечивают изменение переменных. Здесь мы вводим ограничение, чтобы переменные в роли «y» были того же сорта, что переменные в роли «x», т. е. чтобы они несли одни и те же индексы[5].

Когда индексы проставлены, они фиксируют порядок таких пропозициональных функций, которые задаются переменными. Косвенно они фиксируют также порядок пропозициональных функций, именованных выражениями абстракции, потому что, как мы уже сказали, порядок должен превышать порядок связанной переменной. Но это условие покрывает только выражения абстракции, в которых все переменные связаны кванторами или шляпками. Чтобы иметь возможность сказать в общем случае, какое выражение допустимо для подстановки в закон $(x)\ Fx \supset Fy$ вместо переменной с данным индексом, мы должны также приписать порядок выражениям абстракции со свободными переменными. Легко видно, что нужно и дальнейшее ограничение — порядок выражения абстракции должен быть не меньше порядка свободных переменных (в то же время превышая порядок связанных); этого достаточно для предохранения нас от других ограничений на последующую подстановку свободных переменных. Рассел молчал по этому поводу, но его практика была верной.

Кроме и сверх переменных (с их индексами или восклицательными знаками и логическими обозначениями квантификации) и истинностных функций, специальными расселовскими обозначениями были обозначения атрибуции (ϕx, $\phi(x, y)$ и т. д.) и использование шляпок для абстракции пропозициональных функций. Кроме и сверх общих логических законов для истинностных функций и кванторов (ограниченных, как указано выше) специальным принципом теории Рассела был закон *конкретизации* (ср. 2.1).

$$\text{(i) } (F\hat{x})y \equiv Fy,\ (\mathrm{F}\hat{x}\,\hat{y})(z, w) \equiv \mathrm{F}zw \text{ и т. д.}$$

И опять надо отметить ради справедливости, что Рассел не был особо разговорчив по этим вопросам.

Давайте рассмотрим, как парадокс Рассела избегается в его теории. Там, где ψ есть пропозициональная функция $\sim\hat{\phi}\hat{\phi}$ (атрибут не быть атрибутом самого себя), мы имеем, по конкретизации, что $(\chi)\ (\psi\chi \equiv \chi\chi)$, и отсюда, в частности, что $\psi\psi \equiv \sim\psi\psi$. Но ограничения Рассела дважды обрубают эту процедуру. Начнем с того, что сочетание $\phi\phi$ — неправильно грамматически, так как порядок пропозициональной функции должен превышать порядок аргумента. И даже если бы это не мешало,

[5] Многосортная логика будет рассмотрена в § 37 дальше. Под общим заголовком об отклонениях от стандартной логики можно было бы упомянуть также *9 *Principia* из-за общей странности такого подхода к теории квантификации. Но *9 фигурирует только в качестве возможности по отношению к более классической трактовке *10; больше того, этот пункт привязан к порядкам суждений, на чем я здесь не буду останавливаться.

определение ψ как $\sim\hat{\phi}\hat{\phi}$ должно дать ψ более высокого порядка, чем ее связанная переменная ϕ, и отсюда нельзя брать χ в качестве ψ в шаге, который ведет к $\psi\psi \equiv \sim\psi\psi$.

§ 35. КЛАССЫ И АКСИОМА СВОДИМОСТИ

Мы рады найти такую теорию, которая слишком слаба для появления парадоксов. Однако она слишком слаба и для некоторых заключений в классической математике, от которых мы едва ли готовы отказаться. Это относится, например, к доказательству, что каждый ограниченный класс действительных чисел имеет наименьшую границу.

Предположим, что действительные числа развиты в теории Рассела точно так же, как в главе VI, но с атрибутами вместо классов и атрибуцией атрибутов вместо членства классов. В соответствии с § 18 и § 19 наименьшая граница ограниченного класса z действительных чисел есть $\cup z$, или $\{x : (\exists y)(x \in y \in z)\}$. Поэтому мы должны ожидать, что наименьшая граница ограниченного атрибута ϕ действительных чисел в системе Рассела есть атрибут $(\exists\psi)(\phi\psi \cdot \psi\hat{x})$. Трудность состоит в том, что при доктрине Рассела наименьшая граница $(\exists\psi)(\phi\psi \cdot \psi\hat{x})$ имеет более высокий порядок, чем действительные числа ψ, подпадающие под атрибут ϕ, чья наименьшая граница ищется.

Наименьшие границы нужны во всех разделах классического анализа, в основе которых лежит непрерывность. Но наименьшие границы бесполезны, если не допустить их в качестве дальнейших значений тех же самых переменных, которые пробегают над числами, чьи пределы ищутся. Наименьшая граница более высокого порядка не квалифицируется как значение такой переменной и поэтому не достигает своей цели. Рассел встретил эту трудность, предложив *аксиому сводимости*:

Каждая пропозициональная функция ϕ равнообъемна с некоторой предикативной функцией, т. е.:

$$(\exists\psi)(x)\ (\psi!x \equiv \phi x),\ (\exists\psi)(x)(y)(\psi!(x, y) \equiv \phi(x, y))$$

и т. д. Может не случиться, а может и случиться так, что для заданной пропозициональной функции имеется абстрактивное выражение, обозначающее равнообъемную пропозициональную функцию (т. е. истинную для тех же самых вещей) и удовлетворяющее требованию предикативности, а именно, не показывающее связанных переменных бóльшего порядка, чем все переменные со шляпкой. Но если даже мы не обнаруживаем в действительности такого выражения, все-таки существует невыраженная такая предикативная пропозициональная функция; в этом и состоит вклад аксиомы сводимости.

Применительно к $(\exists\psi)(\phi\psi \cdot \psi\hat{x})$ аксиома заверяет нас, что мы можем без ущерба построить ϕ и ψ пробегающими над областью предикативных атрибутов. Другими словами, мы можем построить ϕ и ψ пробегающими над областью атрибутов соответственно $n + 2$ и $n + 1$

порядка, где n — порядок переменной x. Для каждого ограниченного атрибута ϕ порядка $n + 2$, действительных чисел ψ порядка $n + 1$ есть гарантия существования наименьшей границы $(\exists\psi)(\phi!\psi \,.\, \psi!\hat{x})$. Больше того, по аксиоме сводимости, имеется предикативная χ, равнообъемная с этой $(\exists\psi)(\phi!\psi \,.\, \psi!\hat{x})$. Будучи предикативной, χ будет иметь порядок на один выше, чем переменная со шляпкой на аргументном месте, — отсюда порядок $n + 1$. Поэтому мы имеем требуемый закон: любой ограниченный атрибут действительных чисел данного порядка $n + 1$ имеет наименьшую границу, которая имеет тот же порядок $n + 1$.

Но уплачиваемая при этом цена состоит в отказе от конструкционистской метафоры, упомянутой в § 34, и в том, что неохотно допускается парадигма наиболее типичного йельца. Потому что аксиома сводимости потчует нас неспецифицированными атрибутами, неспецифицированными, за исключением квантификации над атрибутами столь же высокого порядка, как и сам неспецифицированный атрибут. Следовательно, мы поплатились тем, что содержалось в конструкционной метафоре — защите от парадоксов. Тем не менее старые доказательства парадоксов продолжают оставаться эффективно блокированными. В частности, так обстоит дело с парадоксом Рассела.

Часть *Principia Mathematica* Уайтхеда и Рассела (грубо говоря, первые двести страниц), составляющая основание труда, резко контрастирует с основной частью труда. Пропозициональные функции появляются в первой части; далее работа развертывается в терминах классов и экстенсиональных отношений [in extension]. Разговоры о классах и экстенсиональных отношениях основываются на разговорах о пропозициональных функциях, посредством контекстуальных определений, следующим образом: как подготовительный шаг, понятие членства объясняется просто как альтернативное обозначение для атрибуции предикативного атрибута:

(i) $x \in \phi$ для $\phi!x$

Пока классов нет. Но затем класс-абстракция определяется в контексте так[6]:

(ii) $G\,\{x\colon Fx\}$ для $(\exists\phi)\,((x)\,(\phi!x \equiv Fx)\,.\,G\phi)$

и квантификация над классами определена так[7]:

[6] Конструкцию, существенно подобную по действию (i) и (ii), можно найти уже у Фреге, 1893, с. 52.

[7] Эта «α» у Рассела является квантифицируемой переменной для классов, и ее не следует путать со схематическим использованием знака «α», к которому мы привыкли в главах I–X. Читатели моей «Математической логики» знают еще и о третьем использовании знака «α» — как синтаксической переменной для переменных. Использование знака в смысле Рассела будет ограничено этим параграфом.

(iii) $(\alpha)G\alpha$ для $(\exists\phi)\ G\{x : \phi!x\}$

$(\exists\alpha)\ G\alpha$ для $(\exists\phi)\ G\{x : \phi!x\}$

Действие всего этого таково: классы есть те же самые предикативные атрибуты, за исключением того, что когда мы говорим о последних как о классах, мы отказываемся от различения равнообъемных атрибутов. Отказ от такого различения виден в (ii). Потому что сказать, что «G» истинно в классе $\{x : Fx\}$ есть, по (ii), то же самое, что сказать, что это истинно о *некотором* предикативном атрибуте ϕ — не важно, каком именно, — таком, что $(x)\ (\phi!x \equiv Fx)$. На этом пути Рассел обеспечивает доказательство закона экстенсиональности:

(iv) $(x)\ (x \in \alpha\ .\equiv .\ x \in \beta)\ .\ \alpha \in \kappa\ .\supset .\ \beta \in \kappa$

для классов, не предполагая соответствующего закона для атрибутов, даже предикативных атрибутов. Как уже было замечено, именно этот закон отличает классы от атрибутов.

Разговор об экзистенсиональных отношениях обеспечивается определениями типа (i)–(iii)

(v) $x\ \phi y$ для $\phi!(x, y)$

(vi) $G\{xy : Fxy)$ для $(\exists\phi)\ ((x)(y)(\phi!(x, y) \equiv Fxy)\ .\ G\phi)$

(vii) $(R)GR$ для $(\phi)G\{xy : \phi!(x, y)\}$

$(\exists R)GR$ для $(\exists\phi)G\{xy : \phi!(x, y)\}$

Выражения (ii) и (vi) неудовлетворительно неоднозначны в том, что неизвестно, какой объем придавать G в конкретном приложении этих определений. Рассел добавил конвенцию на этот счет.

Доктрина порядков становится более простой, если мы обратимся к индивидам, предикативным атрибутам индивидов, предикативным атрибутам таких атрибутов и т. д., потому что порядки этих вещей есть соответственно 0, 1, 2, ... Сходные вещи случаются для классов, поскольку они есть такие же атрибуты, если убрать различие между равнообъемными атрибутами. В этой связи Рассел предпочитает слово «тип» вместо слова «порядок»; так, индивид есть *типа* 0, и классы, чьи члены типа n, есть сами типа $n + 1$. Диадические экстенсиональные отношения вводятся двумерными типами; тип отношения фиксируется только при указании типа вещей, находящихся в отношении. Двумерность этих типов приводит к потрясающему размножению. Тип отношения вещи типа m и вещи типа n может быть назван (m, n). Тип класса таких отношений — $((m, n))$. Тип отношения классов к таким классам — $(((m, n)), ((m, n)))$[8]. Порядки, конечно, были еще хуже.

[8] То же у Карнапа в *Logical Syntax*, p. 85.

Рассел сам обходится без индексов, прибегая к систематической неоднозначности, или, как он называл ее, *типичной* неоднозначности, но это только в целях изложения, имея при этом в виду настоящую систему, где восстанавливаются все индексы. Потому что когда индексы сложны, как, например, это требуется для отношений, стратегия, по которой они остаются неявными, оказывается слишком гибкой. Уайтхед и Рассел нашли, что для избежания парадокса Бурали-Форти они должны восстанавливать тип индекса в аргументе[9].

Мы видели, что расселовский конструктивистский подход коренится в действительных числах, и что, принимая свою аксиому сводимости, он отходит от конструктивизма. Мы должны заметить далее, не задевая пока вопрос о том, — хорошо ли отходить от конструктивизма, — что это извращенный путь отхода. Потому что аксиома сводимости влечет ненужность тех самых различений, о которых в ней идет речь. Аргумент состоит в следующем.

Если система Рассела с аксиомой сводимости свободна от противоречий, тогда мы можем быть уверены, что противоречие не появится, если мы просто отвергнем все порядки, кроме предикативных. Мы можем провозгласить, что порядок каждого атрибута является следующим за порядком вещей, которым атрибуты приписываются; все это соответственно для интенсиональных отношений [relation-in-intension]. Если указано, что атрибут порядка $n + k$ есть атрибут порядка n, тогда мы можем просто принять обозначение, указывающее на равнообъемный атрибут порядка $n + 1$ путем систематической переинтерпретации обозначений Рассела; все это соответственно для интенсиональных отношений. Потому что аксиома сводимости Рассела говорит нам, что равнообъемный атрибут или экстенсиональное отношение желаемого порядка, а именно предикативный, всегда существует. Если аксиому предвидели, то лучший путь состоял в том, чтобы избавиться от необходимости в ней, говоря с самого начала о простых *типах* атрибутов и интенсиональных отношениях, а не о порядках в некотором отличном от них смысле. Для порядков имеется оправдание, только если придерживаться слабой конструктивной теории и отказаться от аксиомы сводимости[10].

Читая Рассела, можно почувствовать, почему Рассел проглядел это. Дело в том, что он не сумел усмотреть различие между «пропозициональными функциями» как атрибутами, или интенсиональными отношениями, и «пропозициональными функциями» как выражениями, а именно предикатами или открытыми предложениями. Как выражения, пропозициональные функции различаются в порядках, если

9 Whitehead A. N. and Russell B. *Principia Mathematica*, vol. 3, p. 75.

10 Этот аргумент развернут подробно на с. 5–8 моей диссертации (Гарвард, 1932) и в статье «Об аксиоме сводимости». Кое-что есть об этом у Гильберта и Аккермана, изд. 1928 г., с. 114.

порядок основывается на индексах связанных переменных выражения. Не различая твердо формулы и объекты, он не думал о маневре, по которому выражения высокого порядка указывали бы всякий раз атрибуты низкого порядка, или интенсиональные отношения.

Рассел имел также независимый мотив для сохранения лишних порядков. Он думал, что эти различения помогут против класса парадоксов, не рассмотренных на предыдущих страницах, так называемых *семантических* парадоксов. Парадокс Греллинга[11] возникает из того, что предикат может быть истинен о самом себе (подобно «короткой», которое является коротким словом и т. д.). Мы получаем парадокс, спрашивая о том, является ли «не истинно о себе» истинным о себе. Другой такой парадокс пришел от древности как парадокс Эпименида, или парадокс лжеца. Его традиционные формы могут бесконечно варьироваться, но существенная логика его может быть изложена, вероятно, так:

«дает ложность, когда присоединяется к закавычиванию самого себя»
дает ложность, когда присоединяется к закавычиванию самого себя.

Это говорит нам, как образовать определенное предложение, и говорит нам далее, что оно ложно, но предложение, которое говорит нам, как образовать его, есть оно само, поэтому оно истинно, если, и только если, оно ложно. Третий семантический парадокс, приписываемый Дж. Берри, опирается на рассуждение о том, что имеется только конечное число английских букв, отсюда конечное число натуральных чисел, каждое из которых специфицировано меньшим числом букв, чем 24, и отсюда наименьшее натуральное число не специфицировано числом букв меньшим, чем 24 буквы. Но я уже специфицировал его 23 буквами (это относится к английскому тексту. — *Примеч. перев.*). В литературе описаны и другие семантические парадоксы[12].

Мнение, что порядки Рассела имеют отношение к таким парадоксам, не таково, чтобы я мог говорить о его правдоподобии, если утверждать различие между атрибутами и открытыми предложениями, которые он спутал с пропозициональными функциями. В любом случае кажется ясным, что вина за семантические парадоксы должна быть возложена на специальные концепции, не относящиеся прямо к теории классов или пропозициональных функций: на обозначение [denotation] (или «истинно о») в случае парадокса Греллинга, ложность (и отсюда истинность) в случае Эпименида и на специфицируемость в случае Берри. Эти три виновные понятия важны, и семантические парадоксы создают такой же кризис в отношении этих понятий, какой создал парадокс Рассела в отношении понятия членства класса. По-

[11] В работе Grelling and Nelson. Парадокс неправильно приписывался Вейлю.

[12] См.: Whitehead A. N. and Russell B. *Principia Mathematica*, vol. 2, p. 60–65.

нятие обозначения, истины и специфицируемости должны быть подвергнуты интуитивно непредвиденному ограничению в свете этих парадоксов точно так же, как существование классов должно быть подвергнуто ограничению в свете парадокса Рассела и других парадоксов. Но семантические парадоксы не касаются теории классов. Эта точка зрения была высказана Пеано еще до появления теории Рассела, и усилена Рамсеем в его критике теории Рассела[13].

Теория Рассела, с ее дискриминацией порядков пропозициональных функций, чьи аргументы одного порядка, стала известна как «разветвленная [ramified] теория типов», и позиция Рамсея состоит в том, что теория должна быть сведена к простой (или, как сострил Шеффер, к «рамсифицированной») теории типов. Он, однако, не сделал свою позицию такой сильной, как мог бы. Разделяя расселовский недостаток — не различая ясно атрибут и выражение, он упустил по-настоящему решающий момент: что аксиома сводимости гарантирует ненужность разветвленной теории типов.

Нужно вспомнить, что простая теория типов, основанная на последнем рассмотрении или не менее решительном способе Рамсея, уже была явной рабочей теорией Уайтхеда и Рассела в *Principia Mathematica.* Как только под рукой оказались расселовские контекстуальные определения классов и экстенсиональных отношений, разветвленная структура исчезает из поля зрения; все мыслится далее в типах, в простом смысле, классов и экстенсиональных отношений[14]. Таким образом, то, на чем настаивали Рамсей и я несколько страниц назад, есть отказ от плохо задуманного основания.

Возможно отказаться не только от исходного разветвления порядков атрибутов и интенсиональных отношений, но и от самих атрибутов и интенсиональных отношений. Можно просто взять расселовские классы и экстенсиональные отношения как отправную точку, что является простой теорией типов, которая уже была в *Principia.* Пока сохраняются разветвления порядков, так что два равнообъемных атрибута различаются по порядку, имеется необходимость различения равнообъемных атрибутов, и отсюда необходимость называть их атрибутами, а не классами; но причина, по которой следует начинать с атрибутов взамен классов, — исчезает, если мы отказываемся от разветвления.

Рассел имел философские предпочтения в пользу атрибутов и чувствовал, что, контекстуально определяя классы на основании теории атрибутов, он объясняет туманное в терминах более ясного. Но это его чувство объясняется тем, что у него отсутствует различение пропозициональных функций как предикатов, или выражений, и пропозицио-

[13] Peano, 1960, p. 157; Ramsey, p. 20–29. Рамсей цитирует пассаж из Пеано.

[14] «Если мы предположим существование классов, аксиома сводимости станет ненужной» (Whitehead and Russell, vol. 1, p. 58).

нальных функций как атрибутов. Не сумев сделать этого различения, он легко мог посчитать, что понятие атрибута яснее, чем понятие класса, который представлен предикатом. Но как раз атрибут менее ясен[15].

В Гильберте и Аккермане (1938, 1949) и еще кое-где мы находим обозначения, напоминающие старую расселовскую теорию пропозициональных функций. Для классов и отношений употребляются F, G и т. д. с опущенными индексами, и взамен $x \in \alpha$ и xRy находим $F(x)$ и $G(x, y)$, напоминающие расселовские ϕx и $\psi(x, y)$. Но сходство это только запутывает. Значения F и G — это больше не пропозициональные функции, но скорее классы и экстенсиональные отношения с единственным критерием: равнообъемные классы тождественны.

Подобные обозначения неудачны и в том, что отвлекают внимание от главного отличия логики от теории множеств. Они склоняют нас к тому, чтобы рассматривать теорию классов и отношений как просто продолжение кванторной теории, в которой схематические буквы для предикатов теперь уже подпадают под действие кванторов, а также попадают на такие места, которые до сих пор сохранялись за x, y и т. д. (таким образом, (F), $(\exists G)$, $H(F, G)$ и т. д.). Предположения о существовании, как бы они ни были велики, становятся странно незаметными, они оказываются просто следствиями обычного старого правила подстановки вместо предикатной буквы в кванторной теории, поскольку мы уже приписали этим буквам статус истинных квантифицируемых переменных. Любая схема аксиомы объемности, скажем, формы

$$(\exists F)(x)(Fx \equiv \dots x \dots)$$

следует просто подстановкой из

$$(G)(\exists F)(x)(Fx \equiv Gx),$$

которое в свою очередь следует из $(x)(Gx \equiv Gx)$[16].

Такая ассимиляция теории множеств в логике видна также из терминологии Гильберта и Аккермана и их последователей для фрагментов теории, в которой типы исчезают после некоторого конечного числа. Такая теория называется предикатным исчислением (Чёрч: функ-

[15] См.: Введение, выше. Я подробнее говорил об этой теме в статье «Уайтхед и подъем современной логики», см. также: Word & Object. P. 118–123, 209. Churn. I.M.L., p. 346–356.

[16] Эта аргументация, которую я привел в статье «Об универсалиях», ускользнула от Гильберта и Аккермана. Они тоже приняли аксиомы свертывания (1938, с. 125). Они упомянули, что могли бы взамен оставить примитивное понятие абстракции (а это и был путь Рассела), но они не говорили, что могли бы отказаться от обоих способов. В 1949 г. (с. 135) автор обозрения принял правило так называемого определения, что все еще равносильно примитивному обозначению абстракции.

циональные исчисления) *n*-порядка (не путать с порядком в смысле Рассела), где *n* — есть наивысший тип. Таким образом, теория индивидов, их классов и отношений есть предикатное исчисление второго порядка и кажется просто теорией кванторов с предикатными буквами, подпадающими под кванторы. Собственно кванторная теория называется предикатным исчислением первого порядка.

Эта тенденция достойна сожаления. Стирая важное различие между логикой и «теорией типов» (имеется в виду теория множеств с типами), *она* еще и поощряет преувеличение в туманном различии между теорией типов и «теорией множеств» (имеется в виду теория множеств без типов) — как будто первая не делает сразу таких же предположений о множествах, как вторая. И вместе с некоторым приглушением предположений о существовании в теории типов эта тенденция поощряет мнение, что сама кванторная теория, с ее *F* и *G*, уже есть теория о классах или атрибутах и отношениях. При этом стирается важнейшее различие между схематическими буквами и квантифицированными переменными.

Стиль обозначений, который я осуждаю, является расселовским, а уж потом Гильберта и Аккермана. Он ассоциируется с неразличением пропозициональной функции как открытого предложения и как атрибута. Некоторые следствия этих ошибок обсуждались на предыдущих страницах, и стиль обозначений является отголоском этих следствий.

Говоря о смягчении различия между схематическими буквами и квантифицированными переменными, вспомним о виртуальной теории, где я использовал буквы α и *R* для имитации переменных для классов и отношений. Но эта мимикрия не заглушает предположений о существовании. Это есть имитация этих предположений, и она нескрываема.

К. Гёдель

РАССЕЛОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА*

Математическая логика, которая есть ничто иное, как точная и полная формулировка формальной логики, имеет два совершенно различных аспекта. С одной стороны, это раздел Математики, трактующий классы, отношения, комбинации символов и т. д. вместо чисел, функций, геометрических фигур и т. д. С другой стороны, это наука, предшествующая всем остальным, которая содержит идеи и принципы, лежащие в основании всех наук. Именно во втором смысле Математическая Логика была впервые замыслена Лейбницем в его *Characteristica Universalis*, центральной частью которой она должна бы и быть. Но только почти два века спустя после его смерти его идея логического исчисления, по-настоящему достаточного для того вида размышления, которым пользуются в точных науках, была осуществлена (по крайней мере, в некоторой форме, даже если не в той, которую имел в виду Лейбниц) Фреге и Пеано[1]. Фреге был главным обра-

---

* Эта статья впервые была опубликована в книге *The Philosophy of Bertrand Russell* in the Library of Living Philosophers, ed. by P. A. Schilpp, La Salle. Illinois. Open Court, 1942. Автор хотел бы заметить (1), что со времени первой публикации этой статьи в ряде проблем, обсуждающихся в ней, был достигнут прогресс, и поэтому данные в статье формулировки могли бы быть кое-где улучшены, и (2), что термин «конструктивистский» в этой статье использовался в строго номиналистическом виде конструктивизма, какой имеет место, например, в расселовской «не-класс-теории». Его значение, следовательно, весьма отлично от того, которое используется в текущих дискуссиях по основаниям математики, то есть от «интуиционистски допустимого» и «конструктивного» в смысле школы Гильберта. Обе эти школы основывали свои конструкции на математической интуиции, избегание которой было как раз принципиальной целью расселовского конструктивизма (см. по поводу первой альтернативы последнее предложение в сноске 23 ниже). В конструктивизме Рассела, с его точки зрения, может быть получена система конечных порядков в разветвленной иерархии без аксиомы бесконечности для индивидов. Объяснение термина «конструктивный», данное в сноске 22, следует заменить только что сделанными замечаниями.

Перевод осуществлен В. В. Целищевым с текста, приведенного в сборнике статей *Bertrand Russell*, ed. by D. F. Pears. Anchor Books, 1972, p. 192–226.

[1] Фреге, без сомнения, имеет здесь приоритет, так как его первая публикация по этому поводу, которая содержит все самое существенное, появилась на 10 лет раньше работ Пеано.

зом заинтересован в анализе мысли и использовал свое исчисление в первую очередь для выведения арифметики из чистой логики. Пеано, с другой стороны, больше интересовался ее применением внутри математики и создал элегантный и гибкий символизм, который позволял выражать даже наиболее сложные математические теоремы в совершенно точной, и часто очень точной манере, единственной формулой.

Именно в русле идей Фреге и Пеано началась работа Рассела. Фреге, из-за его запутанного анализа доказательств, не продвинулся дальше наиболее элементарных свойств числового ряда, в то время как Пеано накопил огромную коллекцию математических теорем, выраженных в новом символизме, но без доказательств. И только в *Principia Mathematica* новый метод выведения большей части математики из весьма малого числа логических концепций и аксиом был использован по-настоящему. В дополнение к этому новая наука была обогащена новым инструментом, абстрактной теорией отношений. Исчисление отношений было развито до этого Пирсом и Шредером, но только с определенными ограничениями и слишком близкой аналогией с алгеброй чисел. В *Principia* с этой абстрактной реляционной точки зрения рассматривались не только теория множеств Кантора, но и обычная арифметика и теория измерений.

Достойно сожаления, что это первое всеобъемлющее и тщательное представление математической логики и выведение из нее Математики столь сильно грешит отсутствием формальной точности в основаниях (*1–*21 *Principia*), что является в этом отношении значительным шагом назад по сравнению с Фреге. Среди упущенного в первую очередь — это точная формулировка синтаксиса формализма. Синтаксические рассмотрения опущены даже в тех случаях, где они необходимы для убедительности доказательств, в частности, в связи с «неполными символами». Эти символы вводятся не точными определениями, а правилами, описывающими то, как предложения, их содержащие, должны переводиться в предложения, их не содержащие. Для того чтобы быть уверенным в том, однако, что этот перевод возможен и однозначно определен (для какого рода выражений) и что (в какой степени) правила вывода применимы также к новому виду выражений, необходимо иметь обзор всех возможных выражений, и это может быть сделано только синтаксическими рассмотрениями. Дело становится особенно сомнительным для правила подстановки и замены определяемого символа его определением. Если это последнее правило применимо к выражениям, содержащим другие определенные символы, оно требует, чтобы порядок элиминации этих символов был безразличным. Это, однако, отнюдь не всегда имеет место (так, $\phi!\hat{u} = \hat{u}[\phi!u]$ является контрпримером). В *Principia* такая элиминация осуществляется всегда подстановкой в теоремы, согласно определениям, так что, главным образом, правило подстановки и подлежит доказательству.

Я не хочу, однако, входить в дальнейшие детали ни по поводу формулизма, ни по поводу математического содержания *Principia*[2], и посвящу дальнейшую часть этого очерка работе Рассела по анализу концепций и аксиом, лежащих в основании Математической Логики. В этой области Рассел произвел огромное число интересных идей, некоторые из которых наиболее ясно представлены (или содержатся только там) в его ранних работах. Я, следовательно, буду часто ссылаться на эти ранние работы, хотя их содержание может частично расходиться с нынешней точкой зрения Рассела.

Что поражает и удивляет — так это отчетливо выраженная реалистическая позиция Рассела в этой области, что проявляется во многих пассажах его произведений: «логика имеет дело с реальным миром точно так же, как зоология, хотя с его более абстрактными и общими чертами», — говорит он, например, в его «Введении в математическую философию» (издание 1920 г., с. 169). Верно, однако, и то, что эта позиция становилась все менее решительной по ходу времени[3] и что она всегда была сильнее в теории, нежели на практике. Когда он начинал заниматься конкретными проблемами, объекты, подлежащие анализу (например, классы или суждения), вскоре, по большей части, обращались в «логические фикции». Хотя это, вероятно, вовсе не означает (по тому смыслу, в котором Рассел использует этот термин), что эти вещи не существуют, но только то, что мы не имеем прямого их восприятия.

Аналогия между математикой и естественной наукой используется Расселом также и в другом отношении (в одном из его более ранних произведений). Он сравнивает аксиомы логики и математики с законами природы, а логическую очевидность — с чувственным восприятием, так что аксиомы вовсе не должны быть необходимо очевидными, а их оправдание лежит (точно так же, как и в физике) в том факте, что они делают возможным дедуцирование этих самых «чувственных восприятий». Это вовсе не исключает, что они имеют некоторую внутреннюю правдоподобность, сродни той, которая имеется в физике. Я думаю, что (при условии, что «очевидность» понимается в достаточно строгом смысле) этот взгляд был подтвержден в существенной степени дальнейшим развитием, и следует ожидать, что еще больше будет подтвержден в будущем. Как оказалось (при предположении, что современная математика непротиворечива), решение определенных арифметических проблем требует предположений, существенно выходящих за пределы арифметики, то есть области элементарной неоспоримой очевидности, которую наиболее подходяще можно сравнить с чувственным восприятием. Больше того, весьма вероятно, что для решения определенных вопросов абстрактной теории множеств и даже

---

[2] См. в этом отношении статью Куайна в томе «Библиотеки живущих философов», посвященного Уайтхеду.

[3] Приведенная выше цитата была опущена в более поздних изданиях «Введения...».

близких к ней вопросов теории реальных чисел будут необходимы новые идеи, основанные на до сих пор неизвестных идеях. Вероятно также, что кажущиеся непреодолимыми трудности, возникающие при решении некоторых других математических проблем в течение многих лет, обязаны тому факту, что необходимые аксиомы не были найдены. Конечно, при таких условиях математика потеряет добрую часть своей «абсолютной определенности»; но под влиянием современного критицизма оснований это уже в значительной степени случилось. Имеется некоторое сходство между этой концепцией Рассела и «дополнением данных математической интуиции» у Гильберта такими аксиомами, как, например, закон исключенного третьего, который, согласно Гильберту, не дан в интуиции. Граница между данными и предположениями, однако, должна проводиться различным образом, в зависимости от того, следуем ли мы Расселу или Гильберту.

Интересным примером расселовского анализа фундаментальных логических концепций является его трактовка определенного артикля «the». Проблема здесь такова: что так называемые дескриптивные фразы (то есть фразы такие, как, например, «[the] автор *Веверлея*» или «[the] король Англии») обозначают или означают[4], и каково значение предложений, в которых такие фразы встречаются? Кажущийся ясным ответ, что «автор *Веверлея*» означает Вальтера Скотта, ведет к неожиданным трудностям. Потому что, если мы допустим кажущуюся очевидной аксиому, согласно которой значение сложного выражения, содержащего конституенты, сами имеющие значение, зависит только от значения этих конституент (но не от манеры, в которой это значение выражено), тогда следует, что предложение «Скотт есть автор *Веверлея*» означает ту же самую вещь, что «Скотт есть Скотт». А это ведет почти неизбежно к заключению о том, что все истинные предложения имеют одно и то же значение (как, впрочем, и ложные)[5]. Фреге действительно вывел такое заключение, и он понимал его почти в метафизическом смысле, напоминающем в чем-то доктрину «Единого» элеатов. «Истина» — в соответствии со взглядами Фреге — анализируется им как имя для общего означения всех истинных суждений.

Согласно Расселу предложениям во внешнем мире соответствуют факты. Однако он избегает термина «означает» [signify] или «обозна-

---

[4] Я использую термин «signify» (переводится в зависимости от контекста русскими терминами «означает» и «значит». — *Примеч. перев.*), потому что он соответствует немецкому слову «bedeuten», которое Фреге, первым исследовавший этот вопрос, использовал в этой связи.

[5] Единственные дальнейшие предположения, которые были бы нужны для получения строгого доказательства, таковы: 1) что «$\phi(a)$» и суждение «a есть объект, который имеет свойство ϕ и тождествен с a», означают одно и то же, и 2) что каждое суждение «говорит о чем-то», то есть может быть приведено к форме $\phi(a)$. Далее, нужно было бы использовать тот факт, что для любых двух объектов a и b имеется истинное суждение формы $\phi(a, b)$, как, например, $a \neq b$ или $a = a \,.\, b = b$.

чает» [denote] и вместо них использует «указывает» [indicate] (в ранних статьях он использует слова «выражает» [express] или «является символом для»), потому что он полагает, что отношение между предложением и фактом совершенно отлично от того, которое имеет место между именем и именуемой вещью. Далее, он использует «обозначает» (вместо «означает») для отношения между именами и вещами, так что «обозначает» и «указывает» вместе соответствуют фрегевскому «bedeuten». Поэтому, в соответствии с расселовской терминологией и взглядами, истинные суждения «указывают» на факты, и, соответственно, ложные суждения не указывают ничего[6]. Отсюда, фрегевская теория должна бы быть приложима в некотором смысле к ложным суждениям, так как все они указывают одну и ту же вещь, а именно ничего. Но различные истинные суждения могут указывать много различных вещей. Следовательно, этот взгляд относительно суждений приводит к необходимости либо опустить вышеупомянутый принцип об означении (то есть в расселовской терминологии соответствующий обозначению и указанию), либо отрицать, что дескриптивные фразы обозначают описываемый объект. Рассел выбрал последнее[7], приняв взгляд, что дескриптивная фраза не обозначает ничего вообще, а значима только в контексте; например, предложение «автор *Веверлея* есть шотландец» определяется как значащее: «Имеется точно одно существо, которое написало *Веверлея*, и кто бы ни написал *Веверлея*, он является шотландцем». Это означает, что предложение, включающее фразу «автор *Веверлея*», не утверждает (строго говоря) ничего о Скотте (поскольку не содержит конституенты, обозначающей Скотта), но представляет собой косвенный путь утверждения чего-либо о концепциях, входящих в дескриптивную фразу. Рассел приводит два главных аргумента в пользу этого взгляда, а именно, (1) что дескриптивная фраза может быть значимо использована, даже если описываемый объект не существует (например, в предложении «Нынешний король Франции не существует»). (2) Можно вполне понять предложение, содержащее дескриптивную фразу, без знакомства с описываемым объектом, в то время как невозможно его

[6] Следует отличать указание [Bedeutung] предложения от того, что Фреге назвал его смыслом [Sinn], которое концептуально соответствует объективно существующему факту (или «истине»). От теории Рассела можно было бы ожидать возможного факта (или, скорее, возможности факта), который существовал бы также в случае ложных суждений. Но Рассел, как он говорил, никогда не мог поверить, что такие «курьезно призрачные» вещи существуют реально. В-третьих, имеется также психологический коррелят факта, называемый «означением» [signification] и понимаемый в качестве соответствия вере в поздней книге Рассела «Исследование смысла и истины». «Предложение», в противоположность «суждению», используется для обозначения прямой комбинации символов.

[7] Он не делал точного утверждения о первом взгляде, но, похоже, он справедлив для логической системы *Principia*, хотя, вероятно, более или менее без последствий.

понять, не будучи знакомым с объектом, о котором нечто утверждается. Тот факт, что Рассел не рассматривал весь вопрос об интерпретации дескрипций как вопрос простой лингвистической конвенции, но рассматривал скорее как правильный или неправильный способ позиции, является другим примером его реалистической трактовки, что верно в предположении, что его интерес отнюдь не ограничивался простым психологическим исследованием действительного процесса мышления. Что касается вопроса в логическом смысле, я не могу отделаться от впечатления, что проблема, поднятая загадочным заключением Фреге, была лишь обойдена расселовской теорией дескрипций, и что имеется нечто такое в этой связи, что еще понято не полностью.

Есть один чисто формальный аспект, в котором можно отдать предпочтение расселовской теории дескрипций. Определяя значение предложений с дескриптивными фразами вышеуказанным образом, он избегает в своей логической системе любых аксиом о частице «the», то есть аналитичность теорем о «the» становится явной; может быть показано, что они следуют из точных определений значения предложений, включающих «the». Фреге, в противоположность этому, должен был предположить аксиому о «the», которая, конечно, также была аналитической, но только в том неявном смысле, что она следует из значения неопределенных терминов. Тщательное рассмотрение, однако, показывает, что это преимущество теории Рассела над теорией Фреге существует только до тех пор, пока определения интерпретируются как простые типографские сокращения, не вводящие имен для объектов, описываемых определениями, — особенность, свойственная как Расселу, так и Фреге.

Я перехожу сейчас к наиболее важным исследованиям Рассела в области анализа концепций формальной логики, а именно тем, которые касаются логических парадоксов и их решений. Анализируя парадоксы, к которым вела теория множества Кантора, он освободил их от всех математических деталей, таким образом, открыв тот удивительный факт, что наши логические интуиции (то есть интуиции, касающиеся таких понятий, как истина, концепция, бытие, класс и т. д.) являются самопротиворечивыми. Затем он исследовал, где и как эти здравые предположения логики должны быть подправлены, и пришел к заключению о том, что ошибочная аксиома состоит в предположении, что для каждой пропозициональной функции существует класс объектов, ей удовлетворяющий, или что каждая пропозициональная функция существует «как отдельная сущность»[8], под которой подра-

[8] В первой статье Рассела по этому предмету *On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types* // Proc. London Math. Soc., series 2, vol. 4, 1906, p. 29. Если кто-либо хочет подвести такие парадоксы, как «лжец», под эту точку зрения, в этом случае универсальные (и экзистенциальные) суждения должны рассматриваться как включающие класс объектов, на которые они указывают.

зумевается нечто отдельное от аргумента (идея тут заключается в том, что пропозициональные функции абстрагируются от предложений, которые даны до того), а также нечто отличное от комбинации символов, выражающих пропозициональную функцию. Это тогда есть то, что мы называем понятием или концепцией, определенной функцией[9]. Существования этой концепции уже достаточно для парадоксов в их «интенсиональной» форме, где концепция «неприложимости к самому себе» находит место в расселовском парадоксальном классе.

Отвергая существование класса или концепции вообще, остается определить, при каких дальнейших гипотезах (касательно пропозициональной функции) эти сущности все-таки существуют. Рассел указал (loc. cit.) два возможных направления, в рамках которых можно искать такие критерии и которые названы им соответственно зигзаг-теорией и теорией ограничения размера, и которые могли бы, вероятно, быть названы с большим обозначением интенсиональной и экстенсиональной теориями. Во второй теории существование класса зависит от объема пропозициональной функции (требование состоит в том, чтобы он не был слишком велик), а в первой теории оно зависит от содержания или значения функции (требование состоит в некоторого рода «простоте», точная формулировка которого будет проблемой).

Наиболее характерная особенность второй теории (по сравнению с первой) состоит в несуществовании универсального класса или (в интенсиональной интерпретации) понятия «чего-либо» в неограниченном смысле. Аксиоматическая теория множеств, развитая позднее Цермело и другими, может рассматриваться как разработка этой идеи, насколько это касается классов[10]. В частности, фраза «не слишком велик» может быть специфицирована (как показал Дж. фон Нейман), как значащая «не эквивалентен универсуму всех вещей», или, если быть более точным, пропозициональная функция определяет класс, тогда и только тогда, когда не существует отношения (в интенсиональном случае пропозициональной функции с двумя переменными), которое соотносит в одно-однозначной манере каждый объект с объектом, удовлетворяющим пропозициональную функцию, и обратно. Этот критерий не появляется, однако, в качестве ос-

[9] «Пропозициональная функция» (без фразы «как отдельная сущность») может быть понята как значащая суждение, в котором одна или несколько конституент обозначены как аргументы. Можно считать, что пара, состоящая из суждения и аргумента, могла бы для всех целей играть роль «пропозициональной функции как отдельной сущности», но при этом нужно заметить, что эта пара (как одна сущность) есть опять множество или концепция и, следовательно, не существует.

[10] С интенсиональными парадоксами можно иметь дело, например, в простой теории типов или разветвленной иерархии типов, которые не включают никаких нежелательных ограничений, если их применять только к концепциям, но не классам.

нования теории, а является следствием аксиом, и может быть при обращении заменен на две аксиомы (аксиома замещения и аксиома выбора).

Второй из предложенных Расселом подходов, а именно зигзаг-теория, тоже был недавно реализован в виде логической системы, которая разделяет некоторые существенные особенности этого подхода. Это система Куайна. Вполне вероятно, что в этом направлении откроются и другие интересные возможности.

Собственно работа самого Рассела в решении парадоксов не пошла в русле указанных двух направлений, им же и указанных, но была основана на более радикальной идее «теории неклассов», согласно которой классы или концепции никогда не существуют в качестве реальных объектов, и предложения, содержащие эти термины, значимы только в такой степени, в какой они могут быть интерпретированы как *façon de parler* — в манере разговора о других вещах. Так как в *Principia* и других работах, однако, он сформулировал определенные принципы, открытые в ходе развития его теории как общие логические принципы, без упоминания более их зависимости от не-класс-теории, я имею намерение рассмотреть сначала эти принципы.

Я имею в виду, в частности, принцип порочного круга, который запрещает определенного рода «круговую» процедуру, которая и ответственна за парадоксы. Ошибочность, связанная с парадоксами, проистекает из того, что порочный круг определяет (или неявно предполагается при этом) всеобщности, чье существование должно влечь существование определенных новых элементов той же самой всеобщности, а именно элементов, определимых только в терминах полной всеобщности. Это ведет к формулировке принципа, который говорит, что «всеобщность не может содержать членов, определенных в терминах только этой всеобщности, или членов, включающих или предполагающих эту всеобщность» (принцип порочного круга). Для того чтобы сделать этот принцип применимым к интенсиональным парадоксам, нужно предположить еще один принцип, а именно, что «каждая пропозициональная функция предполагает всеобщность своих значений» и, следовательно, также всеобщность своих возможных аргументов. (В противном случае концепция «неприменимости к себе» не должна предполагать всеобщности (так как она не включает квантификацию)[11], и порочный круг не предотвратил бы его применения к самому себе.) Соответствующий принцип порочного круга для пропозициональных функций, который говорит, что ничто, что определено в терминах пропозициональной функции, не может быть возможным аргументом этой функции, является тогда следствием. Ло-

[11] Кванторы есть два символа $(\exists x)$ и (x), означающие соответственно «существует объект x» и «для всех объектов x». Всеобщность объектов x, на которые они указывают, называется их областью.

гическая система, к которой приходят на основании этих принципов, есть теория порядков в форме, принятой, например, в первом издании *Principia*, в соответствии с которой пропозициональная функция, которая либо содержит квантификацию, указывающую на пропозициональные функции порядка n, либо может осмысленно утверждаться о пропозициональных функциях порядка n, сама есть, по крайней мере, порядка $n + 1$, и область значений пропозициональных функций, так же как и область квантификации, должна быть всегда ограничена определенным порядком.

Во втором издании *Principia*, во Введении (с. xi и xii) установлено, что «в ограниченном смысле» также и функции более высокого порядка, чем сам предикат (следовательно, также и функции, определенные в терминах предиката, например, как $\kappa \in \kappa$ в p), могут появляться как аргументы предикатов функций; и в Приложении *B* такие вещи случаются постоянно. Это означает, что принцип порочного круга для пропозициональных функций постоянно не соблюдается. Это изменение связано с новой аксиомой, что функции могут входить в суждения только «через их значения», то есть экстенсионально, следствием чего является то, что любая пропозициональная функция может брать в качестве аргумента любую функцию подходящего типа, чей объем является определенным (при этом неважно, какой порядок кванторов используется в определении этого объема). Нет сомнения, что против этих вещей возразить нечего, даже с конструктивистской точки зрения, при условии, что кванторы всегда ограничены определенными порядками. Парадоксы избегаются простой теорией типов[12], которая в *Principia* соединена с теорией порядков (что в результате дает «разветвленную иерархию»), но которая полностью от нее независима и не имеет ничего общего с принципом порочного круга.

Что касается собственно принципа порочного круга, как он сформулирован выше, следует сначала заметить, что фразам «определяемый только в терминах», «включающий» и «предполагающий» соответствуют на самом деле три различных принципа, из которых второй и третий более правдоподобны, чем первый. Но он-то как раз и пред-

[12] Под простой теорией типов я понимаю доктрину, которая говорит, что объекты мысли (или, в другой интерпретации, символические выражения) разделены на типы, а именно индивиды, свойства индивидов, отношения между индивидами, свойства таких отношений и т. д. (с подобной же иерархией для объемов), а предложения формы «a имеет свойство ϕ», «b имеет отношение R к c» и т. д. бессмысленны, если a, b, c и R по типам не подходят друг к другу. Смешанные типы (такие как классы, содержащие индивиды и классы в качестве своих элементов) и, следовательно, также трансфинитные типы (такие как классы всех классов конечного типа) исключаются. Этой теории простых типов достаточно также для избегания эпистемологических парадоксов, как показывает их тщательный анализ.

ставляет интерес, потому что только он делает невозможными непредикативные определения[13] и, следовательно, разрушает выведение математики из логики, произведенное Дедекиндом и Фреге, а кроме того, добрую часть самой современной математики. Можно показать, что формализм классической математики не удовлетворяет принципу порочного круга в первой его фразе, так как аксиомы влекут существование действительных чисел, определимых в этом формализме только с обращением ко всем действительным числам. Так как классическая математика может быть построена на основании *Principia* (включающую аксиому сводимости), отсюда следует, что даже *Principia* (в первом издании) не удовлетворяет принципу порочного круга в первой форме, если «определяемый» означает «определяемый внутри системы», и нет до сих пор известных методов определения вне системы (или вне систем классической математики), за исключением таких, которые включают еще более охватывающие всеобщности, нежели те, которые входят в систему.

Я хотел бы рассматривать это как доказательство того, что скорее ложен принцип порочного круга, нежели ложна классическая математика, и это предположение правдоподобно само по себе. Во-первых, можно, на вполне здравых основаниях, отрицать, что ссылка на всеобщность необходимо влечет ссылку на отдельные ее элементы, или, другими словами, что «все» означает то же самое, что бесконечная логическая конъюнкция. Можно, например, следовать предложению Лэнгфорда и Карнапа интерпретировать «все» как означающее аналитичность, или необходимость, или доказуемость [demonstrability]. Есть трудности в таком предположении, но нет сомнения в том, что на этом пути круговой характер непредикативных определений исчезает.

Во-вторых, даже если «все» означает бесконечную конъюнкцию, то кажется, что принцип порочного круга в его первой форме применяется только в том случае, если сущности, о которых идет речь, сконструированы нами самими. В этом случае ясно должно существовать определение (а именно описание конструкции), которое не обращается к всеобщности, к которой определяемый объект принадлежит, потому что конструкция вещи определенно не может быть основана на всеобщности вещей, которую предстоит конструировать и к которой вещь сама принадлежит. Если, однако, речь идет об объектах, которые существуют независимо от наших конструкций, нет ничего хоть в малейшей степе-

[13] Это определения объекта α ссылкой на всеобщность, к которой само α принадлежит (и, вероятно, такие вещи, определимые только в терминах α). Например, если определить класс α как пересечение всех классов, удовлетворяющих определенному условию ϕ, и тогда заключить, что α есть подмножество также таких классов *u*, которые определены в терминах α (при условии, что они удовлетворяют ϕ).

ни абсурдного в существовании всеобщностей, содержащих члены, которые могут быть описаны (или однозначно охарактеризованы)[14] только ссылкой на эту всеобщность. Такое состояние дел не противоречило бы даже второй форме принципа порочного круга, так как никто не может сказать, что объект, описываемый со ссылкой на всеобщность, «включает» эту всеобщность, хотя само описание может включать. Это не противоречило бы и третьей форме, если «предполагает» означает «предполагает для существования», но не «для познаваемости».

Поэтому представляется, что принцип порочного круга в его первой форме приложим только при принятии конструктивистской (или номиналистической) точки зрения[15] по отношению к объектам математики и логики, в частности, по отношению к суждениям, классам и понятиям, например, если понимать под понятием символ вместе с правилом преобразования предложений, содержащих символ, в такие предложения, которые его не содержат, так что отдельный объект, обозначаемый символом, оказывается просто фикцией[16].

Классы и концепции могут, однако, рассматриваться также и как реальные объекты, а именно, классы — как «множественности вещей» или как структуры, состоящие из множественности вещей, а концепции — как свойства и отношения вещей, существующих независимо от наших определений и конструкций.

Мне кажется, что предположения о таких объектах столь же допустимы, как и предположения о физических телах, и имеется столь же много причин верить в их существование. Они в том же самом смысле необходимы для получения удовлетворительной системы математики, как физические тела необходимы для получения удовлетворительной теории наших чувственных восприятий, и в обоих случаях невозможно интерпретировать суждения, которые делаются о таких сущностях, как суждения о «данных», то есть, в последнем случае, как о чувственных восприятиях. Рассел сам заключает последнюю главу его книги *Meaning and Truth*, хотя и с некоторым «колебанием», утверждением о том, что существуют универсалии, но кажется, он хочет ограничить это утверждение концепциями чувственного восприятия,

---

[14] Объект a описывается пропозициональной функцией $\phi(x)$, если $\phi(x)$ истинна для $x = a$ и ни для какого другого объекта.

[15] Я буду использовать далее «конструктивизм» как общий термин, включающий обе точки зрения, а также те тенденции, которые включены в «некласс» теорию Рассела.

[16] Можно было бы подумать, что такая концепция понятия невозможна, потому что предложения, в которые осуществляется перевод, также должны содержать понятия, и при этом получался бы бесконечный регресс. Это, однако, не предотвращает возможности утверждения указанной выше точки зрения для все более абстрактных понятий, таких как второго и более высоких типов, или на самом деле для всех понятий, за исключением примитивных терминов, которые могли бы встречаться в очень малом количестве.

которые не помогают логикам. Я буду в дальнейшем использовать термин «концепция» исключительно в этом объективном смысле. Одно формальное различие между двумя концепциями понятий состояло бы в том, что два любых различных определения формы $\alpha(x) = \phi(x)$ по предположению определяют два различных понятия а в конструктивистском смысле. (В частности, это был бы случай номиналистической интерпретации термина «понятие», предложенной выше, так как два таких определения дают различные правила преобразования суждений, содержащих α.) Для концепций, наоборот, это ни в коей степени не справедливо, так как одна и та же вещь может быть описана различными путями. Может быть даже так, что аксиома экстенсиональности[17], или нечто близкое с ней, справедливы для концепций. Различие может быть продемонстрировано следующим определением числа два: «Два есть понятие, под которое подпадают пары и ничего больше». Имеется определенно больше, чем одно понятие в конструктивистском смысле, удовлетворяющее этому условию, но могла бы быть одна общая «форма» или «природа» для всех пар.

Так как принцип порочного круга в его первой форме все-таки приложим к сконструированным сущностям, непредикативные определения и всеобщность всех понятий или классов или суждений являются недопустимыми в конструктивистской логике. Непредикативное определение требует конструировать понятие через комбинацию множества понятий, к которому само вновь образующееся понятие принадлежит. Отсюда, если предпринять попытку перевода предложения, содержащего символ для такого непредикативного определенного понятия, окажется, что результат опять содержит символ для того же самого понятия. Это по крайней мере так, если «все» означает бесконечную конъюнкцию, но идея Карнапа и Лэнгфорда (упомянутая ранее) не поможет тут, потому что «доказуемость», введенная в манере, совместимой с конструктивистской установкой по отношению к понятиям, даст нам разбиение на иерархию порядков, которые предотвратят получение желаемых результатов[18]. Как показал Хвистек, при определенных условиях, допустимых внутри конструктивистской логики, возможно даже вывести действительное противоречие из неограниченного допущения непредикативных определений. Более точно, он показал, что система простых типов становится противоречивой, если к ней добавить «аксиому интенсиональности», которая

[17] То есть, что нет двух различных свойств, принадлежащих точно одной вещи, что в некотором смысле есть аналог лейбницевского принципа тождества неразличимых, утверждающего, что нет двух различных вещей, имеющих точно те же самые свойства.

[18] Тем не менее эта схема интересна потому, что она опять показывает конструктивность понятий, которые могут осмысленно утверждаться о понятиях произвольно высокого порядка.

(грубо говоря) утверждает, что различные определения принадлежат различным понятиям. Эта аксиома, однако, как только что было указано, может предполагаться справедливой для понятий в конструктивистском смысле.

При разговоре о концепциях вопрос меняется полностью. Так как концепции, по предположению, существуют объективно, нет возражений против разговора о всех них, ни против описания некоторых из них через ссылку на все концепции (по крайней мере, все данного типа). Но, могут спросить, не является ли этот взгляд опровержимым и для концепций, потому что он ведет к «абсурду», что будут существовать свойства ϕ такие, что $\phi(a)$ заключается в определенном положении дел, включающим все свойства (само ϕ и свойства, определенные в терминах ϕ), что будет означать, что принцип порочного круга не будет справедлив даже в его второй форме для концепций и суждений? Нет сомнений, что всеобщность всех свойств (или всех свойств данного типа) ведет-таки к ситуациям подобного рода, но я не думаю, что они содержат какую-либо абсурдность[19]. Правда, что такие свойства ϕ (или такие суждения $\phi(a)$) должны содержать сами себя в качестве конституент своего содержания или их значения, и это происходит весьма разнообразно из-за свойств, определенных в терминах ϕ, но это только приводит к невозможности сконструировать их значение (то есть объяснить его как утверждение о чувственных восприятиях или некоторых других концептуальных сущностях), что не является возражением для того, кто придерживается реалистической точки зрения. Не является самопротиворечивым и то, что собственная часть должна быть идентичной (а не просто равной) целому, как это видно в случае структур в абстрактном смысле. Структура ряда целых чисел, например, содержит себя как собственную часть, и легко убедиться, что существуют также структуры, содержащие бесконечно много различных частей, каждая из которых содержит целую структуру как часть. В добавление к этому существуют, даже в сфере действия конструктивистской логики, определенные приближения к этой саморефлективности непредикативных свойств, а именно суждения, которые содержат как часть их значения не самих себя, а их собственную формальную доказуемость. Формальная доказуемость суждения влечет (если верны аксиомы и правила вывода) это суждение и во многих случаях эквивалентно ему. Более того,

---

[19] Формальная система, соответствующая этому взгляду, должна иметь вместо аксиомы сводимости правило подстановки для описываемых функций, например, в «Основаниях математики» Гильберта – Бернайса, т. 1 (1934), с. 90, применимое к переменным любого типа, вместе с определенными аксиомами интенсиональности, требуемыми концепцией свойства, которая, однако, была бы слабее, чем у Хвистека. Следует заметить, что этот взгляд не необходимо влечет существование концепций, которые не могут быть выражены в этой системе, если скомбинировать этот взгляд с решением парадоксов в направлении, указанном на с. 34.

несомненно существуют предложения, отсылающие к всеобщности предложений, к которой они принадлежат, как, например, предложение: «Каждое предложение (данного языка) содержит по крайней мере одно слово для отношений».

Конечно, этот взгляд на непредикативные свойства заставляет искать другое решение для парадоксов, в соответствии с которым ложность (то есть соответствующие ошибочные аксиомы) не заключается в предположении определенной саморефлективности примитивных терминов, а заключается в других предположениях. Такое решение может быть найдено, по крайней мере на нынешнее состояние, в простой теории типов, и в будущем, вероятно, в развитии идей, набросанных выше. Конечно, все это относится только к концепциям. Что касается понятий в конструктивистском смысле, нет сомнения, что здесь парадоксы обязаны порочному кругу. Неудивительно, что парадоксы должны иметь разные решения для разных интерпретаций терминов.

Что касается классов, понимаемых как множественности или всеобщности, то, как мне кажется, подобным же образом, они не создаются, но просто описываются их определениями, и, следовательно, принцип порочного круга в первой его форме тут неприложим. Я даже думаю, что существуют интерпретации термина «класс» (а именно как некоторого рода структур), к которым неприложима и вторая форма[20]. Но для развития всей современной математики можно даже предположить, что принцип прилагается во второй форме, которая для классов, понимаемых как простые множественности, в самом деле есть очень правдоподобное предположение. Она тогда ведет к чему-то очень похожему на аксиоматическую систему Цермело для теории множеств, то есть множества расщепляются на «уровни» таким образом, что только множества меньших уровней могут быть элементами множеств более высоких уровней (то есть $x \in y$ всегда ложно, если x принадлежит более высокому уровню, чем y). Нет никаких причин для классов в этом смысле исключать смешение уровней в одном множестве и трансфинитные уровни. Место аксиомы сводимости занимает аксиома классов (цермеловская Aussonderungsaxiom), которая говорит, что для каждого уровня существует для произвольной пропозициональной функции $\phi(x)$ множество тех x этого уровня, для которых $\phi(x)$ истинна, и это как будто следует из концепции классов как множественностей.

Рассел выдвинул два довода против экстенсионального рассмотрения классов, а именно (1) нуль-класс, который не может быть совокуп-

[20] Идеи, развиваемые в этом направлении, содержатся в следующих статьях: D. Mirimanoff. *Les antinomies de Russell et Buraliforte et le problème fondamental de la théorie des ensembles* // L'Enseignement mathématique, vol. 19 (1917), p. 37–52; *Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies Cantoriennes* // L'Enseignement mathématique, vol. 19 (1917), p. 209–17 et vol. 21 (1920), p. 29–52. Ср., в частности, vol. 19, p. 212.

ностью, и (2) единичные классы, которые должны быть тождественны с единственными их элементами. Но, как мне кажется, эти аргументы могут, если они вообще верны, самое большее доказать, что нуль-класс и единичные классы (отличные от их единственного элемента) являются фикциями (введенными для упрощения исчисления, подобно введению точек на бесконечности в геометрии), а не то, что все классы являются фикциями.

Но парадоксы сподвигнули Рассела на устойчивую тенденцию строить логику, насколько это возможно, без предположения об объективном существовании таких сущностей, как классы и концепции. Это привело к формулировке вышеупомянутой «не-класс-теории», в соответствии с которой классы и концепции должны быть введены как *façon de parler.* Но и позднее суждения (в частности, включающие квантификацию) были включены в эту схему, которая и является не чем иным, как логическим следствием этой точки зрения, поскольку, например, универсальные суждения, как объективно существующие сущности, очевидно, принадлежат к той же самой категории идеальных объектов, как классы и концепции, и ведут к тем же самым видам парадоксов, если допущены без ограничений.

Что касается классов, то эта программа действительно выполнена, то есть правила для перевода предложений, содержащих имена классов или термин «класс», в такие предложения, которые их не содержат, были установлены точно, и основания теории, то есть область тех предложений, в которые надо осуществить перевод, ясны, так что от классов можно избавиться (в рамках системы *Principia*), но только если предположить существование концепций всякий раз там, где собираются сконструировать класс. Когда же дело касается концепций и интерпретации предложений с ними или их синонимами, ситуация никоим образом не ясна. Во-первых, некоторые из них (примитивные предикаты и отношения, такие как «красный» и «холоднее») должны, кажется, рассматриваться как реальные объекты[21]; остальные (в частности, согласно второму изданию *Principia*) все понятия типа более высокого, чем первый, и, следовательно, все интересные логические понятия рассматриваются как нечто сконструированное (то есть как нечто не принадлежащее мировому «инвентарю»); но ни базисная область суждений, в терминах которой, наконец, все может быть интерпретировано, ни метод интерпретации не являются такими ясными, как в случае классов (см. ниже).

Вся эта схема не-класс-теории представляет огромный интерес как один из немногих примеров детально реализованной тенденции в эли-

---

[21] В Приложении C к *Principia* сделан набросок способа, которым они могли бы быть сконструированы посредством определенных отношений подобия среди атомарных суждений, так чтобы эти последние остались единственными реальными объектами.

минировании предположения о существовании объектов, находящихся за пределами «данных», и заменить их конструкциями на основании этих данных[22]. Результат в этом случае был существенно отрицательным, то есть классы и концепции, введенные таким образом, не имеют всех свойств, требуемых для их использования в математике, пока не введены специальные аксиомы о данных (например, аксиома сводимости), которая, в сущности, уже означает существование в качестве данных тех видов объектов, которые предполагается конструировать, или сделаны предположения, что можно образовать суждения бесконечной (и даже несчетной) длины, то есть оперировать с истинностными функциями бесконечного количества аргументов, независимо от того, можно или нет их сконструировать. Но что такое есть подобная истинностная функция, как не специальный ее вид бесконечного объема (или структуры), и даже более сложный, чем класс, снабженный к тому же гипотетическим значением, которое может понять только бесконечный ум? Все это есть только подтверждение взгляда, защищавшегося выше, о том, что логика и математика (как и физика) построены на аксиомах с реальным содержанием, от которого нельзя «отделаться».

Что можно получить на основании конструктивистского подхода, так это теорию порядков; только теперь (и это есть сильная сторона теории) включенные ограничения не кажутся *ad hoc* гипотезами во избежание парадоксов, а являются неизбежными следствиями тезиса о том, что классы, концепции и квантифицируемые предложения не существуют как реальные объекты. Это не выглядит так, как если бы вселенная была разделена на порядки, а потом было запрещено говорить о всех порядках; наоборот, возможно говорить о всех существующих вещах, только среди них нет классов и концепций, и если они введены как *façon de parler*, то оказывается, что само это расширение символизма вызывает возможность введения их в более обширном виде, и так далее, неопределенно далеко. Для того чтобы осуществить эту схему, нужно, однако, предположить арифметику (или нечто эквивалентное), которая докажет, что даже эта ограниченная логика не может быть построена на ничем.

В первом издании *Principia*, где это был вопрос действительного построения логики и математики, конструктивистский подход был по большей части отброшен, так как аксиома сводимости для типов более высоких, чем первый, вместе с аксиомой бесконечности, делают совершенно необходимым, чтобы существовали примитивные предикаты произвольно высоких типов. От конструктивистского подхода остается только: (1) введение класса как удобной манеры речи; (2) определение $\sim$, $\vee$ и т. д. в применении к предложениям, содержащим кванторы, которое, кстати, показало свою плодотворность в доказательстве

[22] «Данные» понимаются здесь в относительном смысле, то есть в нашем случае как логика без предположения о существовании.

непротиворечивости арифметики; (3) пошаговое конструирование функций порядка более высокого, чем 1, которое, однако, становится излишним из-за аксиомы сводимости; (4) интерпретация определений как простых типографских сокращений, которые делают каждый символ по определению неполным символом (не именующий объект, описанный определением). Но это последнее, по большей части, иллюзия из-за аксиомы сводимости, потому что всегда существуют реальные объекты в форме примитивных предикатов, или комбинации таковых, соответствующих каждому определенному символу. Наконец, теория дескрипций Рассела также есть нечто такое, что принадлежит конструктивистскому порядку идей.

Во втором издании *Principia* (или, чтобы быть более точным, во введении к нему) конструктивистский подход возобновлен. Аксиома сводимости отброшена, и точно устанавливается, что все примитивные предикаты принадлежат наинизшему типу и что единственная цель переменных (и, очевидно, также констант) высших порядков и типов состоит в том, чтобы сделать возможными утверждения о более сложных истинностных функциях от атомарных суждений[23], что равносильно тому, что высшие типы и порядки есть только удобная манера речи. Это утверждение в то же самое время информирует нас, из какого рода суждений составлено основание теории, а именно из истинностных функций от атомарных суждений.

Это, однако, не вызывает трудности только в том случае, когда число индивидов и предикатов конечно. В противном случае (который и представляет основной интерес для целей выведения математики) Рамсей (цит. выше) обратил внимание на нашу неспособность образовывать суждения бесконечной длины как на «просто случайную», которая должна игнорироваться логиками. Это, конечно, решает, точнее, отсекает трудности. Но следует заметить, что если игнорировать в этом отношении различие конечного и бесконечного, существует более простая и в то же время далеко идущая интерпретация теории множеств (и, следовательно, математики). А именно, в случае конечного числа индивидов, как заметил Рассел, суждения о классах, которые могут быть интерпретированы как суждения об их элементах, становятся буквально истинными, так как «$x \in m$» эквивалентно «$x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots x = a_к$», где a_i есть элементы m, и «существует класс такой, что...» эквивалентно «существуют индивиды x_1, x_2, ... x_n, такие, что...»[24], при условии, что n есть число индивидов в мире и что мы на время отрицаем нуль-класс, который следует оговаривать специальным предложением. Конечно, итерацией этой процедуры мы можем

[23] То есть суждения формы $S(a)$, $R(a, b)$ и т. д., где S, R являются примитивными предикатами и a и b — индивидами.

[24] x_i могут, конечно, как всегда, быть полностью или частично тождественными друг другу.

получить класс классов и т. д., так что полученная логическая система будет подобна теории простых типов, за исключением того, что возможно смешение типов. Аксиоматическая теория типов кажется тогда экстраполяцией этой схемы для случая бесконечного числа индивидов или бесконечной итерации процесса образования множеств.

Точка зрения Рамсея, конечно, представляет собой все что угодно, кроме конструктивистской точки зрения, если не предположить конструкции бесконечного ума. Рассел во втором издании *Principia* взял менее метафизический курс, ограничив себя такими истинностными функциями, которые могут быть действительно сконструированы. На этом пути опять мы приходим к теории порядков, которая, однако, проявляется в новом свете, а именно как метод конструирования все более и более усложняющихся истинностных функций от атомарных суждений. Но это процедура, как представляется, предполагает в той или иной форме арифметику (см. следующий абзац).

Что касается вопроса, как далеко можно продвинуться в построении математики на этой основе (без каких-либо предположений о данных, — то есть о примитивных предикатах и индивидах — за исключением, насколько это необходимо, аксиомы бесконечности), ясно, что теория действительных чисел в ее настоящей форме не может быть получена[25]. Что касается теории целых чисел, во втором издании *Principia* утверждается, что она может быть получена. Трудность, которую надо преодолеть, состоит в том, что в определении целых чисел как «тех кардинальных чисел, которые принадлежат каждому классу, содержащему 0 и содержащему $x + 1$, если он содержит x», фраза «каждый класс» должна делать ссылку на данный порядок. Поэтому получаются целые числа различных порядков, и полная индукция может быть приложима к целым числам порядка n только для свойств порядка n; в то же время часто случается, что понятие целого числа само входит в свойство, к которому прилагается индукция. Это понятие, однако, порядка $n + 1$ для целых чисел порядка n. В приложении *B* ко второму изданию *Principia* предлагается доказательство, что целые числа любого порядка, большего 5, являются теми же самыми, что числа порядка 5, что, конечно, утрясает все трудности. Доказательство, как оно там приведено, однако, не является убедительным. В доказательстве основной леммы *89.16, которая говорит, что каждое подмножество α (произвольно высокого порядка)[26] индуктивного класса

[25] По поводу вопроса, как далеко может быть построена теория действительных чисел, предполагающая целые числа, см.: Hermann Weyl. *Das Kontinuum*, 1932.

[26] Что переменная намеренно предназначена быть неопределенного порядка, видно из дальнейшего применения *89.17 и из замечания к *89.17. Главное ее применение заключается в строке (2) доказательства *89.24, где нужна рассматриваемая лемма для того, чтобы α'ы были произвольно высоких порядков.

β порядка 3 есть само индуктивный класс порядка 3, и индукция применяется к свойству β, включающему α (а именно $\alpha - \beta \neq \Lambda$), которое, однако, должно читаться $\alpha - \beta \sim \varepsilon \text{ Induct}_\alpha$, потому что (3) очевидно ложно. Это свойство, однако, порядка > 3, если α порядка > 3. Поэтому вопрос, может ли (или до какой степени) теория целых чисел получена на основании разветвленной иерархии, должен рассматриваться на настоящее время как нерешенный. Следует заметить, однако, что даже в том случае, если бы был возможен положительный ответ на этот вопрос, это бы не имело особой ценности для вопроса о том, следует ли арифметика из логики, если пропозициональные функции порядка *n* определены как (во втором издании *Principia*) определенные конечные (хотя произвольно сложные) комбинации (кванторов, пропозициональных связок и т. д.), потому что тогда должно быть предположено понятие конечности. Этот факт затемняется тем обстоятельством, что такие сложные понятия как «пропозициональная функция порядка *n*» берутся в неанализируемой форме как примитивные термины формализма, и получают определение только в обыденном языке. В ответ, вероятно, может быть сказано, что в *Principia* понятие пропозициональной функции порядка *n* не является примитивным, не определяется в терминах понятия конечной комбинации, но, скорее, кванторы, указывающие на пропозициональные функции порядка (все, что требуется), определяются как бесконечные конъюнкции и дизъюнкции. Но тогда должно спросить: почему не определить целые числа через бесконечную дизъюнкцию: $x = 0 \vee x = 0 + 1 \vee x = 0 + 1 + 1 \vee \ldots$ до бесконечности, не впадая при этом во все трудности, связанные с понятием индуктивности? Все это возражение неприменимо, если понимать под пропозициональной функцией порядка *n* функцию, «получаемую из таких истинностных функций от атомарных суждений, которые не предполагают в своем определении всеобщностей, за исключением пропозициональных функций порядка < *n* и индивидов»; это понятие, однако, лишено точности.

Теория порядков оказывается более плодотворной, если ее рассматривать с чисто математической точки зрения, независимо от философского вопроса, допустимы ли непредикативные определения. Если рассматривать ее таким образом, то есть как теорию, построенную в рамках обычной математики, где допустимы непредикативные определения, нет никаких возражений против ее распространения на произвольно высокие трансфинитные порядки. Даже если отвергнуть непредикативные определения, не должно быть возражений, я полагаю, против распространения ее на такие трансфинитные ординальные числа, которые могут быть сконструированы в рамках конечных порядков. Теория сама по себе, кажется, требует такого расширения, так как оно ведет автоматически к рассмотрению функций, чьи определения ссылаются на все функции конечных порядков, и это были бы функции порядка ω. При допущении трансфинитных порядков может быть доказана аксиома сводимости. Это, однако, не способствует первоначальной цели теории, потому что ординальное число α такое, что каждая пропозициональная функция экстенсионально эквивалентна функции порядка α, столь велико, что оно предполагает непредикативные всеобщности. Тем не менее на этом пути может быть сделано столь много, что все непредикативности сводятся к одному специальному виду, а именно к существованию определенного большого ординального числа (или вполне упорядоченных множеств) и значимости рекурсивного способа рассуждения для них. В частности, существование вполне-упорядоченного множества порядка ω_1 уже недостаточно для теории действительных чисел. В дополнение эта трансфинитная теорема о сводимости позволяет доказательство непротиворечивости аксиомы выбора, канторовской континуум-гипотезы и даже обобщенной континуум-гипотезы (которая говорит, что не существует кардинального числа между мощностью некоторого произвольного множества и мощностью множества его подмножеств) с аксиомами теории множеств, как и с *Principia.*

Я сейчас займусь более детально теорией простых типов, которая появляется в *Principia* в комбинации с теорией порядков; первая, однако (как замечено выше), совершенно независима от последней, так как смешанные типы, очевидно, никоим образом не противоречат принципу порочного круга. Соответственно, Рассел основывал простую теорию типов совсем на других соображениях. Ведущее соображение (в дополнение к «согласию со здравым смыслом») очень похоже на соображение Фреге, который в его системе уже предполагал теорию простых типов для функций, но не смог избежать парадоксов потому, что он оперировал с классами (или, скорее, с экстенсиональными функциями) без всяких ограничений. Суть его состоит в том, что пропозициональная функция (благодаря переменной, которая в нее входит) есть нечто неоднозначное (или, как говорит Фреге, нечто незавершенное, нуждающееся в дополнении) и, следовательно, может входить в значимое суждение только таким образом, чтобы эта неоднозначность элиминировалась (например, подстановкой константы для переменной, или же квантификацией). Следствия этого таковы, что функция не может заменить индивид в суждении, потому что последнее не имеет неоднозначности, которую надо устранять, и что функции с различными видами аргументов (то есть различными неоднозначностями) не могут заменять друг друга. А это и есть сущность теории типов. Принимая более номиналистическую точку зрения (какая предположена во втором издании *Principia* и в «Исследовании смысла и истины»), можно было бы заменить «суждение» на «предложение» в такого рода рассмотрениях (с соответствующими дополнительными изменениями). Но в обоих случаях этот аргумент явно принадлежит к семейству идей «не-класс-теории», так как в ней понятия (или пропозициональные функции) рассматриваются как нечто, сконструированное из суждений или предположений при условии того, что одной или нескольким их конституентам позволяется оставаться неопределенными. Пропозициональные функции в этом смысле есть, так сказать, «фрагменты» суждений, которые сами по себе не имеют смысла, а имеют смысл только в той мере, в какой они используются для формирования суждений путем комбинирования их, что возможно, только если они «подходят» друг другу, то есть если они подходящих типов. Но следует заметить, что теория простых типов (в противоположность принципу порочного круга) не может в строгом смысле следовать из конструктивистской точки зрения, потому что можно сконструировать понятия и классы другим образом, как, например, указано ранее, где возможно смешение типов. Если, с одной стороны, рассматривать концепции как реальные объекты, теория простых типов не очень-то правдоподобна, так как то, что можно было бы ожидать в качестве концепции (такой, например, как «транзитивность» или число два), будет чем-то, находящимся за пределами всех ее различных «реализаций» на различных уровнях и, следовательно, не существующим, согласно теории типов. Тем не менее есть какого-то рода истина в этой идее реализации одной и той же концепции на различных уровнях, и можно было бы, следовательно, ожидать, что теория простых типов окажется полезной или необходимой, по крайней мере, в качестве отправного пункта для более удовлетворительной системы, — путь, который уже использовал Куайн. Расселовская «типовая неоднозначность» есть шаг в этом направлении. Так как, однако, она только лишь добавляет упрощающие символические конвенции к теории типов, она де факто не выходит за пределы этой теории.

Нужно отметить, что теория типов дает новую идею для решения парадоксов, особенно приспособленную к их интенсиональной форме. Она заключается в том, что вина за парадоксы возлагается не на аксиому, по которой каждая пропозициональная функция определяет концепцию или класс, но на предположение, что каждая концепция дает значимое суждение, если оно утверждается для любого произвольного объекта или объектов в качестве аргументов. Явное возражение, что каждая концепция может быть расширена на все аргументы, через определение другой концепции, которая дает ложное суждение, когда исходная концепция является бессмысленной, может легко быть парировано указанием на то, что концепция «осмысленно приложима» не обязательно должна быть всегда осмысленно приложимой.

Теория простых типов (в ее реалистической интерпретации) может быть рассмотрена как реализация этой схемы, основанной, однако, на следующем дополнительном предположении относительно осмысленности: «Всякий раз, когда объект *x* может заменить другой объект *y* в одном осмысленном суждении, он может делать это в каждом осмысленном суждении»[27]. Это, конечно, имеет следствие, что объекты

[27] Рассел формулировал несколько отличный принцип, но с тем же действием, см. *Principia*, vol. 1, p. 95.

разделены на взаимно исключающие области значимости и каждая область состоит из тех объектов, которые могут заменять друг друга, и что каждая концепция значима только для аргументов, принадлежащих к одной из этих областей, то есть для бесконечно малой части всех объектов. Вышеупомянутый принцип подозрителен, однако, потому что полагание его делает формулировку в качестве осмысленного суждения невозможной[28], потому что x и y должны быть ограничены определенными областями значимости, которые могут быть теми же самыми, а могут быть и различными, и в обоих случаях утверждения не выражают принцип или даже его часть. Другое его следствие состоит в том, что тот факт, что объект x есть (или нет) данного типа, также не может быть выражен осмысленным суждением.

Представляется невозможным, чтобы идея ограниченных областей значимости могла бы быть осуществлена без вышеупомянутого ограничительного принципа. Может даже оказаться, что возможно предположить, что каждая концепция значима повсюду, кроме определенных «сингулярных точек» или «предельных точек», так что парадоксы будут аналогичны чему-то вроде деления на нуль. Такая система была бы более удовлетворительной в следующем отношении: наши логические интуиции оставались бы тогда правильными с точностью до определенных маленьких поправок, то есть они могли бы тогда рассматриваться как дающие существенно правильную, но только кое в чем расплывчатую картину действительного состояния дел. К несчастью, эти попытки до сих пор не привели к успеху[29], с другой стороны, никто не доказал невозможности этой схемы, вопреки теоремам Клини и Россера о строгой противоречивости.

В заключение я хочу сказать несколько слов по вопросу о том, можно ли рассматривать (и в каком смысле) аксиомы *Principia* как аналитические. Что касается самой проблемы, то нужно заметить, что аналитичность может пониматься в двух смыслах. Во-первых, она может иметь чисто формальный смысл, что термины могут быть определены (либо эксплицитно, либо через правила элиминации их из содержащих их предложений) таким образом, что аксиомы и теоремы становятся специальными случаями закона тождества и опровергаемые суждения становятся отрицаниями этого закона. В этом смысле даже теория целых чисел, как может быть показано, не является аналитической, при условии, что от правил элиминации надо потребовать, чтобы они

[28] Это возражение неприложимо к символической интерпретации теории типов, потому что здесь не имеется объектов, а есть лишь символы различных типов.

[29] Формальная система подобного толка представлена у Чёрча (см.: *A Set of Postulates for the Foundation of Logic* // Annals of Mathematics, vol. 33 (1932), p. 346 and vol. 34 (1933), p. 839), где, однако, лежащая в основе идея выражена вводящим в заблуждение утверждением, что происходит отказ от закона исключенного третьего. Как бы то ни было, система, как показано, является противоречивой.

позволяли действительно проводить элиминацию в каждом случае в конечное число шагов[30]. Опуская это условие за счет допущения, например, предложений бесконечной (и несчетной) длины как непосредственных шагов процесса редукции, все аксиомы *Principia* (включая аксиомы выбора, бесконечности и сводимости) могут, как доказано, считаться аналитическими для определенных интерпретаций (за счет рассмотрений, подобных тем, которые указывались)[31]. Но это наблюдение имеет сомнительную ценность, потому что вся математика должна быть применима к предложениям бесконечной длины для того, чтобы доказать эту аналитичность. Например, аксиома выбора может быть доказана в качестве аналитической только в том случае, если она предполагается истинной.

Во втором смысле суждение называется аналитическим, если оно справедливо «благодаря значению концепций, которые входят в него», где это значение может быть, вероятно, неопределимым (то есть сводимым к чему-то более фундаментальному)[32]. Все аксиомы *Principia* в первом издании (за исключением аксиомы бесконечности) как будто аналитичны в этом смысле для определенных интерпретаций примитивных терминов, а именно, если термин «предикативная функция» заменяется либо «классом» (в экстенсиональном смысле), или отказом от аксиомы выбора «концепций», так как ничто не может выразить лучше значение термина «класс», чем аксиома классов и аксиома выбора, и так как, с другой стороны, значение термина «концепция» влечет, что каждая пропозициональная функция определяет концепцию[33]. Трудность состоит только в том, что мы не воспринимаем кон-

[30] Потому что это бы повлекло существование разрешающей процедуры для всех арифметических суждений.

[31] См. также F. P. Ramsey, loc. cit., сноска 21, где, однако, не может быть получена аксиома бесконечности, потому что она интерпретирована так, что указывает на индивиды в мире.

[32] Два значения термина *аналитический* могли бы быть, вероятно, различаться как тавтологический и аналитический.

[33] Этот взгляд не противоречит мнению, защищавшемуся выше, что математика основана на аксиомах с реальным содержанием, потому что само существование концепции, например, «класса» уже составляет такую аксиому; если, например, «класс» и «∈» определяются как «концепции, удовлетворяющие аксиомам», то невозможно доказать их существование. «Концепция», вероятно, могла бы быть определена в терминах «суждения» (хотя я не думаю, что это было бы естественной процедурой); но тогда должны быть предположены определенные аксиомы о суждениях, обоснованные только ссылкой на неопределенное значение этого термина. Следует заметить, что этот взгляд об аналитичности опять делает возможным, чтобы каждое математическое суждение могло бы быть, вероятно, сведено к специальному случаю $a = a$, а именно, если сведение осуществляется не благодаря определению терминов, а благодаря их значению, которое никогда не может быть полностью выражено множеством формальных правил.

цепции «концепции» и «класса» с достаточной отчетливостью, как это показывается парадоксами. Имея в виду эту ситуацию, Рассел взял курс на рассмотрение и классов, и концепций (за исключением логически неинтересных примитивных предикатов) как несуществующих и на замену их нашими собственными конструкциями. Нельзя отрицать, что эта процедура ведет к интересным результатам, которые важны и для тех, кто придерживается противоположной точки зрения. В целом, однако, результат состоит в том, что остаются только фрагменты Математической Логики, если не ввести снова запрещаемые объекты в форме бесконечных суждений, или такими аксиомами, как аксиома сводимости, которая (в случае бесконечного числа индивидов) определенно ложна, если не предположить, либо существование классов, либо же бесконечно многих *qualitates occultae.* Это, как мне кажется, есть указание на то, что нужно взять более консервативный курс, такой, который бы состоял в том, чтобы сделать значение терминов «класс» и «концепция» яснее, и построить непротиворечивую теорию классов и концепций как объективно существующих сущностей. Это курс, который принят действительным развитием Математической Логики и которому сам Рассел способствовал в более конструктивистской части своей работы. Главными среди попыток в этом направлении (некоторые из них упоминались в этом очерке) являются простая теория типов, а это есть система первого издания *Principia* и аксиоматическая теория множеств, обе из которых были успешны, по крайней мере, в том, что они позволили выведение в их рамках современной математики, в то же самое время избегая всех известных парадоксов. Многие симптомы, однако, показывают совершенно ясно, что примитивные концепции нуждаются в дальнейшем уточнении.

Кажется разумным подозревать, что как раз это неполное понимание оснований ответственно за тот факт, что Математическая Логика так и не вышла на рубеж тех больших ожиданий, которые связывали с ней Пеано и другие (в соответствии с целью Лейбница), и которые надеялись, что она облегчит труд в теоретической математике в такой же мере, в какой десятичная система чисел облегчила числовые расчеты. Но как можно ожидать решения проблем простым анализом концепций, если нашего анализа даже недостаточно для установления аксиом? Но нет нужды терять надежду. Лейбниц не говорил в своих работах о *characteristica universalis* как об утопическом проекте; для того чтобы мы поверили его словам, он довел до значительного уровня свое исчисление мышления, но не торопился с публикацией до тех пор, пока семена не упадут на благодатную почву. Он пошел столь далеко, что оценил время, которое было бы необходимо для того, чтобы его исчисление было развито немногими избранными учеными до такого уровня, «что человечество приобретет новый вид инструмента, увеличивающего власть разума намного больше, чем любой оптический инструмент увеличил мощь зрения». Время, которое он дал на это, было 5 лет, и он заявил, что его метод не более труден для изучения, чем математика или философия в его время. Более того, он постоянно повторял, что даже в рудиментарном состоянии, которое было свойственно его теории, она внесла вклад в его математическое открытие; а это, как и следовало ожидать, даже Пуанкаре должен признать как достаточное доказательство плодотворности теории.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ

Научное издание

Бертран Рассел

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЛОСОФИИ

Заказывающий редактор *В. В. Иткин*
Серийное оформление *В. В. Иткин*
Менеджер проекта *Т. С. Калинина*
Корректоры *Л. А. Федотова, Т. П. Панова*
Обложка *В. А. Кривобоков*
Компьютерная верстка *Е. А. Виберг*

Соответствует гигиеническим требованиям к книжным изданиям
(*сан.-эпид. закл. № 54.НС.05.953.П.013186.12.05 от 26.12.05*)

Подписано в печать 25.06.07. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Варнок.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 16,8. Тираж 1500 экз. Заказ № 1027.

Сибирское университетское издательство
630058, Новосибирск, ул. Русская, 39

Типография «Принтинг»
630071, Новосибирск, ул. Станционная, 60/1