Теормех 16 февраля 2024 Дед

IPSP Leipzig

Exam

TL;DR

1. У вас 3 часа.
2. (пишите на отдельных листках)
3. Не пишите красным
4. Дед с удовольствием даст вам баллы если поймет что вы делаете
5. 4 задания по математическим навыкам критичным для ТФ,и 3 задания - полный разбор заданной физической системы через координаты, Лагранжиан и решение полученных дифуров / приближенная картина в phase space
6. Бонусные задания отмечены *. Решайте их когда будет нефиг делать.
7. Всего есть 90 + 50 = 140 баллов, для зачета достаточно 30. Решить весь экзамен нереально, дед накидал вам 100+ возможностей и идей для того чтобы решить те куски, что вам нравятся.
8. Ничего не использовать, кроме своего же мозга. (+ дед подскажет если что)
9. Ключевая стратегия - не занимайтесь фигней и не пытайтесь решить вообще все. Соберите как можно больше баллов. Если чувствуете, что не видите решения сразу - бросайте и идите к букве дальше.

Бла-бла.Подпись что делал сам.

family name	given name	matriculation number

1				2				3				
*[a]	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	*[d]	(a)	(b)	*[c]	*[d]	(e)
4	1	3	4_{+1}	2	1	3	3	3	4	2	4	4_{+3}

4					5									6	
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(a)	*[b]	(c)	(d)	(e)	*[f]	*[g]	(h)	*[i]	*[a]	*[b]
2	4	2	1	4	2	2	3	3	4	4	6	4_{+1}	1	1	2

								7							
*[c]	(d)	(e)	(f)	(g)	*[h]	(i)	(j)	(a)	*[b]	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	*[h]
2	4	2	2	5	6	2	3	3	1	3	3	2	2_{+2}	5	5

total points

grade

Задача 1. Изолинии и градиенты

Мы рассматриваем волны на воде с высотой заданной как:

$$H(x, y, t) = A\,\frac{\sin\left(k\sqrt{x^2+y^2} - \omega t\right)}{x^2+y^2}$$

Source: Collection of water ripples in pluspng.com

Где (x,y) это положение на поверхности, а t - время

⋆ a) H это функция расстояния R от начала координат.Найти нижнюю и верхнюю границы для H(R,t) и набросатьрадиальный профиль H(R,t).

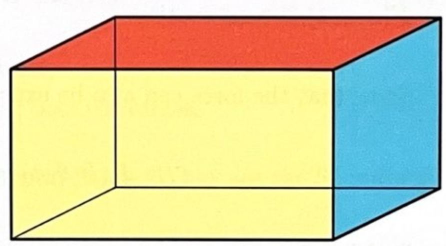
b) Определить градиент R.

c) Определить градиент H(x,y,t) для заданного времени t.Как это сделать проще всего используя результат b)?

d) Определить изолинии H(x,y,t) для заданного временит. Набросать их на рисунке, обозначить градиенты на нем. Как изолинии меняются во времени?

Задача 2. Паралеллепипед

Координаты вершин паралеллепипеда задаются векторами q_i, где i от 1 до 8



source: A2569875, Public domain, via Wikimedia Commons

$$\boldsymbol{q}_i \in \left\{ \begin{pmatrix} s_1\,a \\ s_2\,b \\ s_3\,c \end{pmatrix} \quad \text{with} \;\; s_1,\, s_2,\, s_3 \in \{\pm 1\} \right\}$$

a) Нарисуйте правостороннюю координатную системух-y-z, и обозначьте все на ней

b) Почему все диагонали пересекаются в начале координат?

c) Определить косинус угла между каждой парой диагоналей.

⋆ d) Какая связь между теми парами диагоналей, у которых одинаковый угол пересечения?

Задача 3. Линейные интегралы.

Задано силовое поле:

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \sin\alpha + x \cos\alpha \\ y \cos\alpha - x \sin\alpha \\ z \end{pmatrix}$$

где q=(x,y,z) это радиус-вектор в R^3

a) Рассчитайте работу силы от южного полюса до северного полюса единичной сферы вдоль пути, параметризуемого какq(t) = (0, 0, t) где -1 < t < 1 (путь 1)

b) Определить потенциал поля для всех значений альфа,когда поле консервативно.

⋆ c) Показать что поле также может быть выражено как

$$\boldsymbol{F}(R, \theta, \phi) = \frac{f\,R}{L}\,\hat{\boldsymbol{r}}(\theta, \phi - \alpha)$$

где $\boldsymbol{q} = R\,\hat{\boldsymbol{r}}(\theta, \phi)$ в сферических координатах

⋆ d) Рассмотрим путь где R=R0 = const, а фи может бытьвыражен как функция тета, т.е.
of θ, i.e., $\phi(t) = \phi(\theta(t))$. Показать что работа

$$W = -\int_{t_I}^{t_F} \mathrm{d}t\, \dot{\boldsymbol{q}}(t) \cdot \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{q}(t)\big)$$

тогда может быть выражена как интеграл по углу тета

$$W = f(\alpha) \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}\theta\ \sin(2\theta) + g(\alpha) \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}\theta\ \frac{\mathrm{d}\phi(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\ \sin^2\theta$$

и определить границы интегрирования c1, c2 и функции f(альфа) и g(альфа) в этом выражении

e) Определить работу поля от южного полюса и до северногона единичной сфере вдоль траекторий где:

ii. ϕ =constant

iii. $\phi(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Намек: имейте в виду результат d для простых расчетов

Как выглядят траектории 1-3?

Задача 4. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + \gamma\, x(t) = A\,\Omega\ \cos(\Omega\, t) \tag{4.1}$$

x(t) это положение в 1D.

Действительные параметры γ, A, and Ω принимают постоянные положительные значения

a) Мы задаем положение x в дюймах и время в часах.Какие тогда единицы в СИ у всех трех параметров?

b) Проверьте что ДУ имеет частное решение вида

$$x_s(t) = K\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + c.c.$$

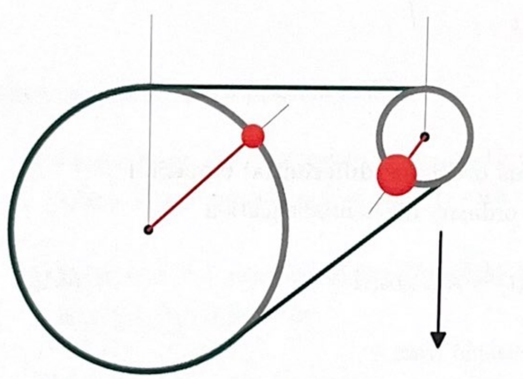
где c.c. обозначает комплексно-сопряженное число первого слагаемого. Как действ. константы K и фи зависят от трех параметров системы?

c) Определить общее решение однородного уравнения (с правой частью равной нулю).

d) Достаточно ли начального положения чтобы полностью предсказать эволюцию системы?

e) Задайте итоговое уравнение x(t) при начальных условияхx(t0) = x0.

Задача 5. Массы на колесах.



Задана система из двух колес с осями закрепленными на стене, так что колеса вращаются вокруг них.На каждом колесе нанизаны массы m1, m2.Радиусы R1, R2. Углы отклонения масс от вертикали - тета1, тета2.Ограничения на движение: не проскальзывающая общая веревка вокруг колес.Гравитация вертикально вниз.

a) Сделать набросок и все обозначить

⋆ b) Обосновать что из-за веревки всегда $\dot\theta_1(t) = \rho\,\dot\theta_2(t)$, и в результате будет

$$\theta_1 = \rho\,\theta_2(t) - \alpha$$

Какой смысл альфа в этом уравнении,и как ро определяется через параметры системы?

Почему имеет смысл говорить что $0 < \rho \leq 1$?

c) Показать что всю кинетическую энергию системы можно выразить как

$$T = k_T\,\dot\theta_1^2$$

где константа k_T определяется параметрами системы. Определить ее.

d) Определить потенциальную энергию системы и использоватьрезультат b) чтобы выразить тета2 через тета1. Тогда у нас будетфункция Лагранжа которая зависит только от

e) Определить уравнение для тета1 и выбрать шкалы единиц, чтобыв безразмерной форме оно выглядело так

$$\ddot\theta_1 = \sin\theta_1 + \mu\,\sin\left(\frac{\theta_1}{\rho} - \varphi\right)$$

Какая шкала времени тут выбрана?

Как константы μ и φ определяются параметрами системы?

⋆ f) Показать что при $\mu < \rho$ у уравнения движения одна устойчивая и одна неустойчивая неподвижная точка (fixed point) в каждый период sin(тета1)

Тогда фазовое пространство системы очень похоже на таковое у математического маятника. А в чем разница?

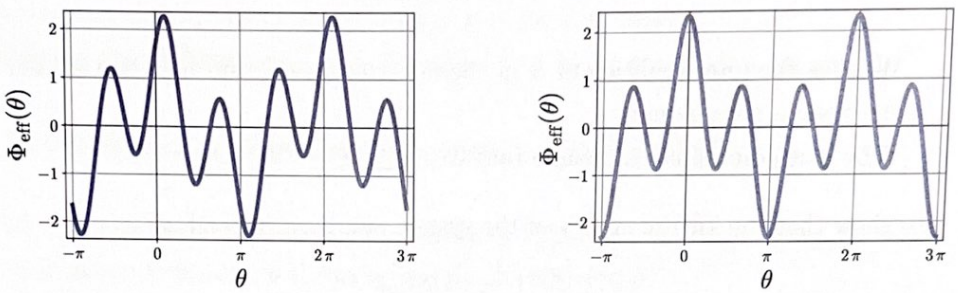
⋆ g) Теперь рассмотрим случай $\rho = 1/3$, $\mu = 10$, and $\varphi = 0$. Использовать тригонометрию для sin(3тета) чтобы показать

$$\ddot\theta_1 = a\,\sin\theta\,\left(\cos^2\theta - b\right)$$

где $0 < b < 1$. Определить константы а и b.

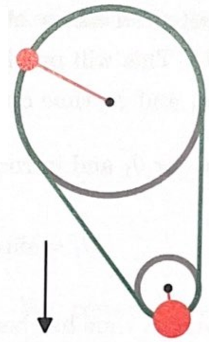
Определить неподвижные точки системы, и какие будут стабильные, а какие нестабильные.

h) Ниже показан эффективный потенциал для $\rho = 1/3$ and $\mu = 4.$ Для φ мы взяли числа $0°$ and $60°$ соответственно. В чем различие потенциалов? Нарисуйте фазовое пространство для обоих случаев.



Как вы понимаете какой случай относится к $\varphi = 0°$?

⋆ i) Что изменится в этой задаче еслиповернуть систему так,что большое колесо будетнад малым?



Задача 6. Тор (бублик)

Рассмотрим движение материальной точки без трения на поверхности тора. В декартовой 3-мерной системе его форма описывается окружностью в (x,z) плоскости, вращающейся вокруг оси z. Обозначим радиус окружности как R, и поместим центр ее в положение

ее центр в положение $D\,\hat{\boldsymbol{x}}.$ Действует гравитация $\boldsymbol{g} = -g\,\hat{\boldsymbol{z}}$
.

⋆ a) Почему нужно $D > R$?

⋆ b) Зададим положение в (x,y) плоскости полярными координатами с ортом $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ and $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \partial_\phi \hat{\boldsymbol{\rho}}.$ Вместе с $\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}$ они образуют правосторонний ортонормированный базис для цилиндрических координат.

Также, зададим сферические координаты на основе орта $\hat{\boldsymbol{r}}(\theta,\phi) = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi) + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{z}}$.

i. Показать что $\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} = \partial_\phi \hat{\boldsymbol{\rho}}$

ii. Определить как производная $\partial_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ может быть выражена как линейная комбинация ортов $\hat{\boldsymbol{r}}$ and $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

⋆ c) Показать что положение $\hat{q}$ на торе можно всегда задать как

$$\boldsymbol{q} = D\,\hat{\boldsymbol{\rho}}(\phi) + R\,\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta,\phi)$$

Почему важно что не только ϕ но и θ принимает значения в интервале $(0,\,2\pi)$?

d) Определить скорость $\dot{q}$ и показать что кинетическая энергия принимает вид

$$T = C\,\left(\dot{\theta}^2 + (\Delta + \sin\theta)^2\,\dot{\phi}^2\right)$$

Какая размерность C в этом выражении?Как C и Дельта зависят от параметров системы R, D, m и g?

e) Определить потенциальную энергию частицы и функцию Лагранжа системы.

f) Показать что фи это циклическая (игнорируемая) переменная и определить связанный с ней закон сохранения, определив величину K.

g) Определить уравнение движения для тета, используя K чтобы исключить ϕ из уравнения. Ввести нужные шкалы, чтобы показать что безразмерная вторая производная по времени θ принимает вид

$$\ddot{\theta} = \sin\theta + \frac{\kappa\,\cos\theta}{(1+\rho\,\sin\theta)^3}$$

Какая шкала времени была принята тут?

Как величина κ зависит от параметров системы?

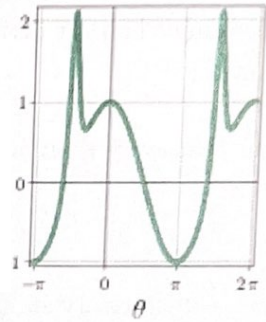
⋆ h) Показать что неподвижные точки системы можно получить как решение уравнения

$$1 + \rho\,\sin\theta = -\left(\frac{\kappa}{\tan\theta}\right)^{1/3}$$

Нарисовать графики обоих сторон уравнения и показать что для тора с маленькой "дыркой" (т.е. R близкое к D) и малых значений k, вторая стабильная неподвижная точка возникает на верхней внутренней стороне тора.Какой физический смысл этой стабильной точки?

i) Определить эффективный потенциал движения.

j) График справа показывает потенциал для значений $\kappa = 0.01$ and $\rho = 0.95$. Нарисуйте фазовое пространство для этого случая где четко покажите heteroclinic (которые соединяют две нестабильные точки)и homoclinic (начинается на нестабильной и возвращается к ней) траектории.



Задача 7. Совместное плавание

Рассмотрим двух пловцов которые двигаются по окружности так, что положения задаются углами θ_i with $i = 1$ and 2, соответственно. У них есть предпочтительные скорости Ω_i и тенденция находится близко друг к другу. Тогда, их движение можно описать дифференциальным уравнением

$$\ddot{\theta}_i = -\gamma \left(\dot{\theta}_i - \Omega_i\right) - \frac{2k}{f_i} \sin \frac{\theta_i - \theta_{3-i}}{2}$$

Тут θ_{3-i} это короткая нотация для положения второго пловца: $3 - i$ принимает значения 2 and 1 for $i = 1$ для 2, соответственно.

a) Чтобы понять первое слагаемое в ускорении, рассмотрим случай $k = 0$.

Сделать график скорости $\dot{\theta}_1(t)$ и положения $\theta_1(t)$, и описать как на них влияют величины γ and Ω_1.

⋆ b) Какая причина включить синус чтобы моделировать желание пловцов быть рядом? Какой вывод отсюда можно сделать о знаках k, f1 и f2?

c) Рассмотрим положение ψ между пловцами (аналог центра масс в задаче Кеплера):

$$\psi = f_1\, \theta_1 + f_2\, \theta_2$$

Определить $\ddot{\phi}$, показать что $\dot{\psi}$ падает экспоненциально к постоянному значению, как в случае одиночного пловца разобранного в a). Определить релаксацию и асимптотическую скорость движения этого углового "центра масс".

d) Мы обозначим расстояние между пловцами как $\phi = (\theta_2 - \theta_1)/2$. Показать что уравнение для ϕ сводится к дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{\phi} + a\,\dot{\phi} + \sin\phi = c \tag{7.1}$$

Как константы a, c зависят от параметров системы: γ, Ω_i, k and f_i.

e) Какое расстояние ϕ_∞ в итоге установится между пловцами? При каких условиях ϕ_∞ маленькое?

f) Определить неподвижные точки диффура (7.1).Описать их стабильность/нестабильность.

А при каких условиях их не будет? Как тогда будет выглядеть движение двух пловцов?

g) Предположим $a = 0$ in Eq. (7.1). Определить потенциал который описывает движение в этом случае, и нарисовать фазовое пространство для случая когда система имеет неподвижные точки.

⋆ h) 1. Как фазовое пространство в g) выглядит когда в системе нет неподвижных точек?

2. Как фазовое пространство в g) меняется в случае если a принимает малое положительное значение?