А. Н. Варгин.

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ по ФИЗИКЕ

И ПОЧЕМУ ИХ НАДО РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

Часть 1. Механика Ньютона.

Москва 2009 год

А. Н. Варгин.

КВК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ,
И ПОЧЕМУ ИХ НАДО РЕШАТЬ.

Трепещу, низко кланяюсь и прошу слова.
Трепещу, ибо на вас не угодишь, кланяюсь, ибо получил хорошее воспитание, прошу слова, ибо должен что-то сказать.

Шекспир.

Предисловие.

Цель пособия помочь студентам, изучающим курс общей физики, научиться решать задачи. Часть задач доступна школьникам старших классов. Стоит сказать несколько слов по поводу второй фразы в названии пособия. Если вы хотите стать физиком или инженером не только занимающимся техническими расчетами, а и изобретателем, то умение решать задачи совершенно необходимо. Поясним это утверждение на примере физика. В чем суть работы физика? Решаешь одну задачу, а уже начинаешь думать над следующей проблемой. И так всю жизнь. Теорию знать необходимо. Но как бы вы не выучили теорию, этого недостаточно. Можно сделать и защитить диссертацию, если повезет с руководителем, у которого есть задача и который подскажет, как ее надо решать. И будете всю жизнь делать все по чьей-то подсказке или указаниям. Неужели вас это устраивает? Если нет, то решать задачи надо научиться в годы учебы, а не откладывать на потом. Потом может и не получится. Поэтому мы попытались предложить и разобрать задачи, которые на наш взгляд требуют размышления, а не подстановки известных величин в известные формулы. Насколько это удалось, судить вам.

О содержании пособия. Необходимые сведения из математики по темам, которые еще студенты не успели пройти по математике, но необходимые для решения задач, приведены в пособии. Теоретические вопросы по физике рассматриваются только те, которые недостаточно подробно или понятно для студентов рассмотрены в базовом учебнике, например, в курсе общей физики И.В. Савельева.

Первой части пособия преследует несколько целей. Первая – методическая и наиболее простая, научить студентов правильному подходу к решению задачи, ее оформлению, как например, рисования поясняющих условие задачи и ее решения рисунков, необходимости проверки правильности решения и некоторым другим. Вторая цель пособия преследует более сложную, но и наиболее важную задачу, научить студента думать самостоятельно.

Несколько слов о стиле изложения. Пособие написано в виде объяснения задач студентам на семинарских занятиях преподавателем, стоящим у доски.

И последнее замечание. По определению все студенты окончили школу, изучили школьную физику. Поэтому в задачах пособия, используются те понятия (на школьном уровне), которые еще не изучались по физике в институте.

Выражаю глубокую благодарность за большой труд прочтения рукописи и ценные замечания:
С. Г. Рубину, МИФИ,
Л. А. Кириченко, МФТИ.

Обращение к читателям.

Большая просьба, к прочитавшим или просмотревшим это пособие, сообщить об обнаруженных опечатках и о том, что вам показалось, не очень понятно изложено. Постараюсь оперативно исправить.

Для связи: anvargin@gmail.com

Содержание.

1. Системы координат. Скорость и ускорение в цилиндрической системе координат.

Системы координат. О движение тел можно говорить только относительно других тел. Поэтому, прежде всего, вводится система отсчета: система координат и часы. Обычно оговаривается, с какими телами жестко связана выбранная система координат. В большинстве разобранных задач система координат связана с Землей. Мы будем считать системы отсчета, связанные с ней инерциальными, кроме раздела, в котором будут разобраны силы инерции.

Решение практически любой задачи механики начинается с рисунка, а рисунок начинается с рисования координатных осей. Ответ задачи не зависит от выбора системы, но сложность и громоздкость решения определяется ее выбором. Поэтому в этом разделе будут даны некоторые советы по выбору системы координат.

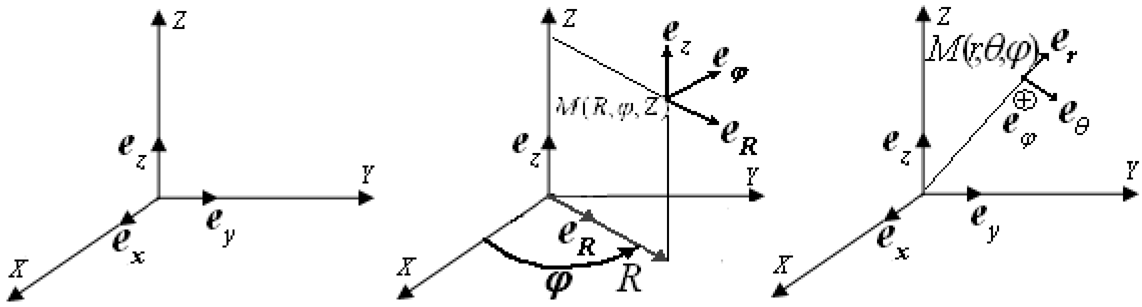
Если движение тела прямолинейное, то выбор очевиден. Вы выбираете ось x по направлению движения тела, а силы, действующие на тело, раскладываете на проекции по выбранным осям. Примером может служить всем известная задача движения тела по наклонной плоскости.

Если движение тела происходит в плоскости, а силы действуют в одном направлении, то целесообразней одну из осей направить по направлению силы. Примером может служить задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту.

В задачах с симметрией поля сил, например, поля точечного заряда или гравитационных сил, следует выбирать систему координат с той же симметрией. При плоском движении можно обойтись цилиндрической системой координат. При трехмерном движении в пространстве придется выбрать сферическую систему координат.

Мы фактически в разобранных задачах будем иметь дело только с движением в плоскости. Поэтому нам кажется целесообразным здесь вывести формулы для скорости и ускорения в цилиндрической системе координат, так как в некоторых учебниках нет их подробного вывода.

Мы будем использовать только ортогональные системы координат: декартову, цилиндрическую и сферическую. Ниже на рисунках показаны эти системы.



Нам понадобиться переходить из одного класса систем в другой. Приведем формулы, связывающие координаты в различных системах.

Декартова система координат. Все ниже рассматриваемые системы являются ортогональными (все оси координат взаимно перпендикулярны). Все системы приведены для трехмерного пространства. В декартовой системе оси обозначаются *X*, *Y*, *Z* и нумеруются 1, 2, 3 соответственно (так называемая правовинтовая система). Бесконечно малое перемещение по осям dx, dy, dz. Бесконечно малое расстояние между двумя точками и бесконечно малое перемещение соответственно равны:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$$

Скалярные произведения ортов равны:

$$\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x = 1 \quad \mathbf{e}_y\mathbf{e}_y = 1 \quad \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z = 1$$

остальные произведения равны нулю.

Векторные произведения ортов равны:

$$[\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_z \quad [\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z] = \mathbf{e}_x \quad [\mathbf{e}_z\mathbf{e}_x] = \mathbf{e}_y$$

остальные произведения равны нулю. Напомню, что при изменении порядка сомножителей, меняется знак произведения. Поэтому, чтобы избежать в дальнейшем ошибок (особенно в третьем семестре), следует всегда пользоваться правовинтовой системой. Именно для нее написаны три последних равенства.

Примечание. Вам математики объяснят вычисление векторного произведения двух векторов с помощью раскрытия определителя. При решении задач по физике проще пользоваться правилом перемножением многочленов:

$$[\boldsymbol{AB}] = (\boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z)(\boldsymbol{e}_x B_x + \boldsymbol{e}_y B_y + \boldsymbol{e}_z B_z)$$

Далее вы перемножаете правую часть по правилу перемножения обычных многочленов и при этом используете формулы векторного перемножения ортов. Этим способом пользоваться проще, так в задачах, как правило, будет не больше одного или двух слагаемых в каждой скобке.

Вы должны очень четко знать правила умножения ортов всех систем координат, а не только декартовой системы. Ниже будут приведены формулы для всех приведенных систем.

Цилиндрическая система координат. Вертикальная ось *Z* совпадает по направлению с аналогичной осью декартовой системы. Вторую координату-расстояние точки от оси *Z* всегда будем обозначать *R*. В отличие от постоянного орта $\boldsymbol{e}_z$, направление остальных двух ортов переменное. Орт $\boldsymbol{e}_R$ направлен от вертикальной оси по направлению радиуса *R*. Третья координата угол поворота этого радиуса φ (орт $\boldsymbol{e}_\varphi$), если смотреть сверху, против часовой стрелке (от оси *X*). Перемещения по осям: $\boldsymbol{e}_R dR$, $\boldsymbol{e}_\varphi R d\varphi$, $\boldsymbol{e}_z dz$, перемещение бесконечно малое между двумя точками

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_R dR + \boldsymbol{e}_\varphi R d\varphi + \boldsymbol{e}_z dz$$

Расстояние между ними

$$ds = \sqrt{dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Для скалярного произведения правила аналогичные. Произведение одинаковых ортов всегда равно единице, разных – нулю. Векторные произведения ортов:

$$[\boldsymbol{e}_R \boldsymbol{e}_\varphi] = \boldsymbol{e}_z \qquad [\boldsymbol{e}_\varphi \boldsymbol{e}_z] = \boldsymbol{e}_R \qquad [\boldsymbol{e}_z \boldsymbol{e}_R] = \boldsymbol{e}_\varphi$$

Связь декартовых координат с цилиндрическими координатами определятся по формулам:

$$x = R\cos\varphi y \qquad y = R\sin\varphi \qquad z = z$$

Обратные преобразования:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad tg\varphi = \frac{x}{y} \qquad z = z$$

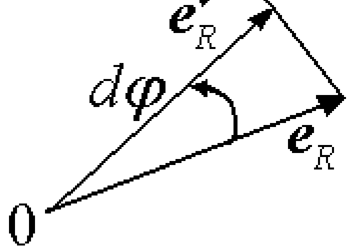
Сферическая система координат. Вертикальная ось *Z* совпадает по направлению с аналогичной осью декартовой системы. Первая координата расстояние точки от начала координат принято во всем мире обозначать *r*. Теперь представьте себе глобус (или, кто его не видел, арбуз). Вторая координата задается углом θ, который отсчитывается от положительного направления оси Z по меридиану (или по направлению движения ножа, когда режете арбуз). Третья координата такая же, как и в цилиндрической системе координат. Орт $\boldsymbol{e}_r$ направлен от начала координат по направлению радиуса $\boldsymbol{r}$. Второй орт $\boldsymbol{e}_\theta$ направлен по касательно к дуге в сторон направления угла θ. Третий орт $\boldsymbol{e}_\varphi$ направлен по углу *φ* (совпадает с цилиндрической системой). Остальные формулы выпишу без пояснений, так как смысл ясен из выше написанного.

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r dr + \boldsymbol{e}_\theta r d\theta + \boldsymbol{e}_\varphi r \sin\theta d\varphi$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2}$$

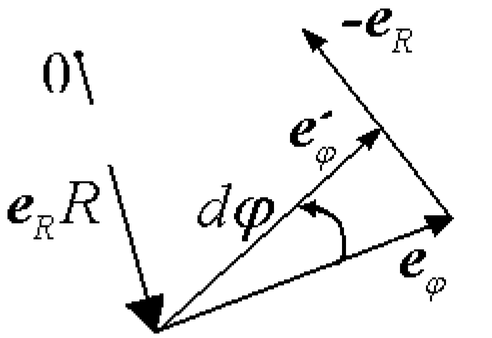
$$[\boldsymbol{e}_r \boldsymbol{e}_\theta] = \boldsymbol{e}_\varphi \qquad [\boldsymbol{e}_\theta \boldsymbol{e}_\varphi] = \boldsymbol{e}_r \qquad [\boldsymbol{e}_\varphi \boldsymbol{e}_r] = \boldsymbol{e}_\theta$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$



Правило дифференцирования ортов. На рисунке в плоскости перпендикулярной оси *Z* показаны орт $\boldsymbol{e}_R$ в начальный момент времени и положение этого орта через бесконечно малый интервал времени dt. Он обозначен как $\boldsymbol{e}'_R$. Как видно из рисунка за время dt орт $\boldsymbol{e}_R$ повернется на угол *dφ*. Приращение этого орта будет равно

$$d\boldsymbol{e}_R = \boldsymbol{e}_R^{/} - \boldsymbol{e}_R = \boldsymbol{e}_\varphi \cdot 1 \cdot d\varphi$$



А производная $\boldsymbol{e}_R$ по времени будет равна:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_R = \frac{d\boldsymbol{e}_R}{dt} = \boldsymbol{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \boldsymbol{e}_\varphi \dot{\varphi}$$

Совершенно аналогично выводится производная по времени от орта $\boldsymbol{e}_\varphi$. Она будет равна:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = \frac{d\boldsymbol{e}_\varphi}{dt} = -\boldsymbol{e}_R \frac{d\varphi}{dt} = -\boldsymbol{e}_R \dot{\varphi}$$

На втором рисунке вектор $\boldsymbol{R}$ с разрывом, чтобы уменьшить размер рисунка.

<u>Скорость.</u> Теперь можно приступить непосредственно к вычислению скорости. Используя выше приведенную формулу, получим:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{e}_R R)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{e}_R}{dt} R + \boldsymbol{e}_R \frac{dR}{dt} = \boldsymbol{e}_R \dot{R} + \boldsymbol{e}_\varphi R\dot{\varphi}$$

Модуль скорости будет равна:

$$v = \sqrt{\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2}$$

<u>Ускорение.</u> Чтобы найти ускорение надо полученное выражение еще раз продифференцировать по времени:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{e}_R \dot{R})}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{e}_\varphi R\dot{\varphi})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{e}_R}{dt}\dot{R} + \boldsymbol{e}_R \frac{d\dot{R}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{e}_\varphi}{dt} R\dot{\varphi} + \boldsymbol{e}_\varphi \dot{\varphi}\frac{dR}{dt} + \boldsymbol{e}_\varphi R\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$$

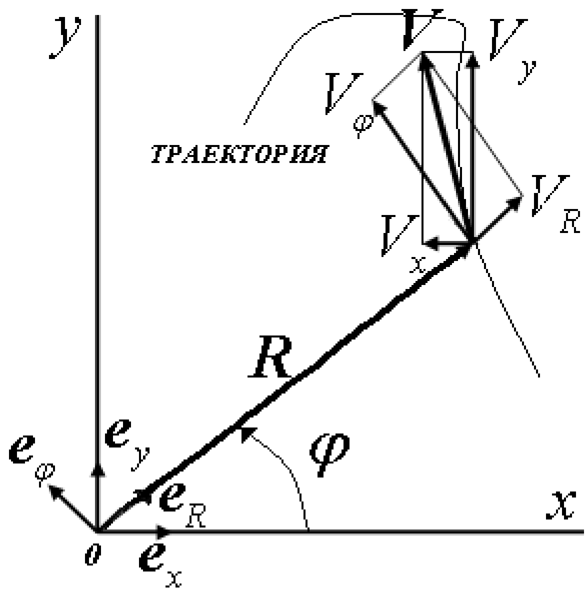
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi \dot{\varphi}\dot{R} + \boldsymbol{e}_R \ddot{R} - \boldsymbol{e}_R R\dot{\varphi}^2 + \boldsymbol{e}_\varphi \dot{\varphi}\dot{R} + \boldsymbol{e}_\varphi R\ddot{\varphi} = \boldsymbol{e}_R(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) + \boldsymbol{e}_\varphi(R\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{R})$$

До сих пор рассматривалось плоское движение (в плоскости перпендикулярной оси *Z*). Если движение происходит в трех измерениях, то к полученным формулам надо добавить скорость и ускорение по оси *Z*.

Выпишем для удобства использования окончательные формулы:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_R \dot{R} + \boldsymbol{e}_\varphi R\dot{\varphi} + \boldsymbol{e}_z \dot{z}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_R(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) + \boldsymbol{e}_\varphi(R\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{R}) + \boldsymbol{e}_z \ddot{z}$$



На приведенных рисунках показаны разложение векторов скорости и ускорения. Под ними дано краткое пояснение.

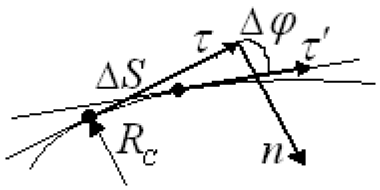
Рассмотрим плоское (в данном случае в плоскости *X, Y*) движение частицы (материальной точки). На первом рисунке показаны все орты, направленные по соответствующим осям в декартовой и полярной системах координат. На нем же поикано разложение скорости в обеих системах координат. Скорость всегда направлена по касательной к траектории по направлению движения частицы. Проекция V_R направлена по направлению вектора ***R***, проекция V_φ перпендикулярна ему. На данном рисунке обе проекции положительны. Проекция V_x отрицательна.

Скорость всегда направлена по касательной к траектории. Поэтому на графике мы можем в каждой точке кривой указать ее направление (если известно направление перемещения тела по траектории).

На втором рисунке показано разложение ускорения на проекции по координатным осям.

<u>Кривизна кривой. Нормальное и тангенциальное ускорения</u>.

Для гладкой кривой (не только плоской) для ее «изогнутости» вводится понятие ее кривизны, которая определяется как производная:



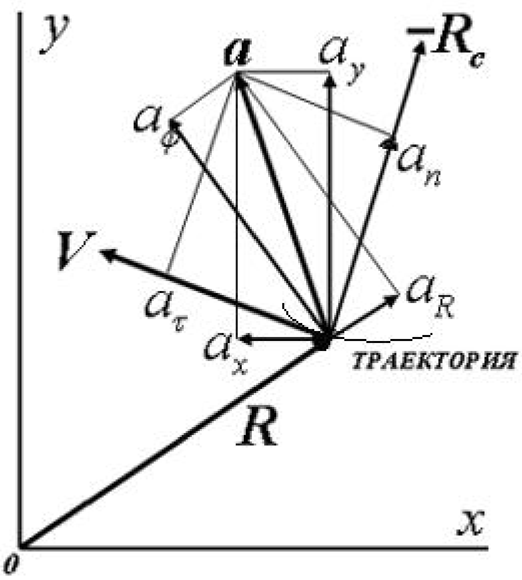
$$C=\frac{d\varphi}{dS}$$

В этой формуле dS бесконечно малое расстояние по траектории между точками на кривой, $d\varphi$ - бесконечно малый угол между касательными, проведенными через эти точки. Кривизна кривой геометрическое понятие.

Если в правой части числитель и знаменатель разделить на dt, то получим:

$$C=\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dS}{dt}}=\frac{\dot{\varphi}}{v} \qquad v=\frac{\dot{\varphi}}{C}=R_C\dot{\varphi}$$

То есть обратная величина кривизне кривой есть величина радиуса кривизны. Для окружности радиус кривизны есть радиус окружности.



Для нас в механике кривая – траектория движения материальной точки. Условились проводить единичный вектор $\boldsymbol{e}_\tau$ по направлению скорости точки. Таким образом, скорость можно записать в идее;

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_\tau v$$

Найдем ускорение, продифференцировав последнее равенство:

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{e}}_\tau v+\boldsymbol{e}_\tau\dot{v}=\boldsymbol{e}_n\dot{\varphi}v+\boldsymbol{e}_\tau\dot{v}=\boldsymbol{e}_n a_n+\boldsymbol{e}_\tau a_\tau$$

Первое слагаемое в правой части называется центростремительным ускорением, вторе – тангенциальным. Модуль центростремительного ускорения можно выразить (используя радиус кривизны) как:

$$a_n=\frac{v^2}{R_C}=R_C\dot{\varphi}^2=R_C\omega^2$$

Тангенциальное ускорение, равное производной по времени от модуля скорости направлено по направлению единичного вектора $\boldsymbol{e}_\tau$, если величина скорости возрастает, и наоборот, если скорость уменьшается. Различные проекции ускорения показаны на последнем рисунке. Таким образом, модуль ускорения при движении материальной точки в плоскости $0xy$ может быть выражен через различные проекции:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{a_R^2+a_\varphi^2}=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$$

Никогда не путайте радиус кривизны $\boldsymbol{R_c}$ с радиус-вектором ***R.*** Хорошо видно, что это совершенно разные вектора. Первый начинается в центре кривизны траектории в данной точке и заканчивается в точке нахождения частицы, второй начинается в начале координат и заканчивается в точке нахождения частицы. Обратите внимание, на рисунке показан отрезок вектора $\boldsymbol{R_c}$ (знак минус поставлен, чтобы подчеркнуть, что радиус кривизны имеет противоположное направление стрелки, показанной на рисунке). Орт ***n*** направлен к центу кривизны, то есть его направление противоположно $\boldsymbol{R_c}$. Орт $\boldsymbol{\tau}$ всегда по направлению совпадает с ***V***.

В частном случае при движении по окружности скорость и ускорение в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_\varphi R\dot{\varphi}$$

$$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{e}_R R\dot{\varphi}^2+\boldsymbol{e}_\varphi R\ddot{\varphi}$$

2. Движение тела, брошенного под углом к горизонту.

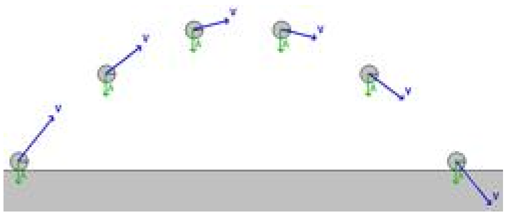
«Классическая» задача. Мы специально начали с хорошо известной задачи каждому школьнику. Вам не надо думать над самим решением и поэтому можете сосредоточиться над методикой решения. Эта задачи и

дальнейшие не будут формулироваться традиционно: это дано, это надо найти. Мы постараемся задачи формулировать как исследования. Поэтому начинать будем с размышлений: а что необходимо знать, чтобы можно было подробно описать движение тела. В этом разделе, по умолчанию, все тела можно будет считать материальными точками, если специально не оговорено противное. Напомним, что тело можно считать точечным, если в задаче можно пренебречь его размерами.

Чтобы однозначно описать движение, нам необходимо знать величину (модуль) начальной скорости и угол, под которым она направлена к горизонту. Будем пока предполагать, что сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Начнем решать. Только не надо сразу бросаться писать формулы! Прежде надо подумать. Представить мысленно движение тела. Не можете в уме, рисуйте на бумаге. Что приходит в голову? Сопротивления нет, следовательно, полная механическая энергия сохраняется. Предвидим ваше возмущение. Это первая неделя, мы только начали кинематику, а здесь говорят о законе сохранения! Мы еще не проходили!!! А вы окончили школу, аттестат получили? Для кого написано пособие? Загляните в предисловие, если его пропустили. Ясно? Продолжим.

Движение можно представить (или как принято говорить) как суперпозицию двух – по горизонтали и движение в вертикальном направлении. Сила действует на тело только в вертикальном движении, следовательно, по горизонтали тело будет двигаться с постоянной скоростью. В вертикальном направлении скорость тела будет уменьшаться. Когда израсходуется кинетическая «вертикальная» энергия, скорость тела станет равной нулю. Затем движение продолжится в обратном направлении, и при падении тела, его «вертикальная» кинетическая энергия станет равна начальной. Поэтому можно ожидать, что траектории движения тела до максимальной высоты подъема и поле него будут симметричными. Вот теперь пора сделать рисунок и нанести на него необходимые величины.



После того, как вы сделали рисунок, можно начинать писать формулы. Помните, что сделанный (правильный) рисунок – наполовину сделанная задача.

Напишем второй закон Ньютона или уравнение движения для нашей задачи:

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g}$$

Сократив на массу тела, получим задачу на кинематику. Напишем систему кинематических уравнений по координатным осям:

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

После первого интегрирования по времени с учетом начальных условий, получим:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \sin a - gt$$

В верхней точке вертикальная скорость равна нулю. Поэтому из второго уравнения можно найти время подъема:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Интегрируем еще раз по времени:

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin a - \frac{gt^2}{2}$$

Из второго уравнения можно найти максимальную высоту:

$$H = y(t_1) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Приравняв y нулю во втором уравнении $y(\tau) = 0$ можно найти полное время движения τ :

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Как видите, наше предположение о равенстве времен подъема и падения оправдались.

Подставив полное время движения в уравнение движения по горизонтали, находим расстояние, на котором тело упало от точки бросания:

$$S = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Из последней формулы видно, что максимальная дальность полета при заданной начальной скорости достигается при угле $\alpha = \pi / 4$.

Задача выполнена – движение тела описано. Мы из полученных формул можем определить скорость и координату тела в любой момент времени.

Найдем траекторию, по которой двигалось тело. Для этого надо исключить время из системы (2). Получим:

$$y = \frac{\sin a}{\cos\alpha} x - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Это уравнение параболы.

Что еще осталось неопределенным? Во-первых, путь пройденный телом. Во- вторых, радиус кривизны кривой. Путь, пройденный телом можно определить по формуле:

$$S = \int dS = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$

В данном случае лучше вычислять определенный интеграл от $x = 0$ до $x = x(\tau)$:

$$S = \int_0^{x(\tau)} \sqrt{1 + (tg\alpha - \frac{g}{v_0^2} x)^2} dx$$

Пока вы не умеете вычислять интегралы от функций квадратного трехчлена, проще всего пользоваться справочником по математике, в котором есть таблицы интегралов.

А теперь познакомимся с вычислением радиуса кривизны кривой, на примере параболы. Вы знаете формулу, связывающую скорость, центростремительное ускорение и радиус кривизны:

$$a_ц = \frac{v^2}{R_C}$$

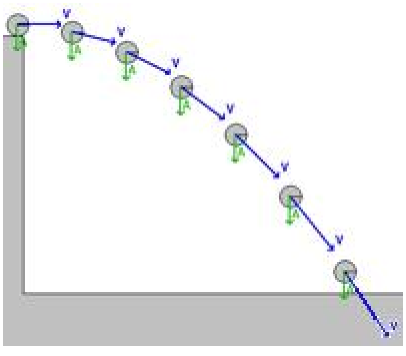
В верхней точке и в конечных точках радиус кривизны определяется совсем просто:

$$R_C = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} \quad \text{и} \quad R_C = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$$

В произвольной точке выражения получатся достаточно громоздкими.

Попробуем рассмотреть вспомогательную задачу, в которой выражения для скоростей будут проще. Для этого рассмотрим движение тела, брошенного с уступа высотой H в горизонтальном направлении. Фактически мы рассматриваем исходную задачу, но со второй половины , переобозначив $v_0 \cos\alpha$ на v_0.

Сделаем второй рисунок для вспомогательной задачи.



Уравнения, описывающее это движения будут иметь вид:

$$v_x = v_0$$

$$v_y = gt$$

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{gt^2}{2}$$

Уравнение траектории движения будет много проще:

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad \text{или} \quad y = kx^2, \text{ где } k = \frac{g}{2v_0^2}$$

В верхней точке радиус кривизны равен:

$$R_C = \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2k}$$

Определим радиус кривизны в произвольной точке $x = x_1$, $y = kx_1^2$. Если заданы координаты, можно определить момент времени, когда тело будет находиться в этой точке. Для уменьшения выкладок мы будем считать, что это время заданно. Модуль скорости в этой точке равна:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + g^2 t_1^2}$$

Производная в этой точке равна:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gtdt}{v_0 dt} = \frac{gt_1}{v_0}$$

Из геометрического смысла производной следует, что угол α определяется из соотношения:

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{gt_1}{v_0}$$

Находим центростремительное ускорение:

$$a_ц = g\cos\alpha = g\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t_1^2}}$$

Теперь можно определить радиус кривизны:

$$R = \frac{v_1^2}{a_ц} = \frac{(v_0^2 + g^2 t_1^2)^{\frac{3}{2}}}{gv_0}$$

После того, как сделаны громоздкие выкладки не мешает проверить их безошибочность. Положив в последней формуле время равным нулю, получим:

$$R = \frac{v_0^2}{g}$$

Ошибок нет, так как мы получили радиус кривизны в вершине параболы.

Преобразуем выражение так, чтобы в него не входили кинематические величины. В результате получим радиус кривизны для произвольной точки:

$$R = \frac{(1+4k^2 x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{2k}$$

Что необходимо запомнить для дальнейшего? Это выражение для радиуса кривизны в вершине параболы. На экзаменах всегда бывают дополнительные вопросы в виде задачек. Вот, например, одна из них. Тело соскальзывает без трения с некоторой высоты по гладкой наклонной поверхности, имеющей форму параболы. Найти силу давление телом на поверхность в нижней точке. Уравнение параболы задается. Скорость материальной точки находится из закона сохранения энергии. Если вы помните формулу кривизны параболы, то ответ пишется сразу:

$$F - mg \Rightarrow F = \frac{mv_0^2}{R} + mg = 2kmv_0^2 + mg$$

v_0 - скорость тела в нижней точке, F - сила, действующая на тело со стороны поверхности.

А можно ли решить эту задачу, если вы не знаете выражения (7)? Можно, но решение гораздо сложнее. Рассмотрим его.

Продифференцируем уравнение параболы дважды по времени:

$$\frac{dy}{dt} = 2kx\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = 2k(\frac{dx}{dt})^2 + 2kx\frac{d^2x}{dt^2}$$

В нижней точке второе слагаемое равно нулю, скорость тела можно найти из закона сохранения энергии (если считать заданной высоту, с которой начало соскальзывать тело). Следовательно:

$$F - mg = m\frac{d^2y}{dt^2} = 2km(\frac{dx}{dt})^2$$

Таким образом, получили формулу, которая была написана сразу.

Как нырнуть, а не переломать ноги. Можно ли прыгать с уступа высотой H, если до воды имеется твердая поверхность шириной S, через которую надо перепрыгнуть? Чтобы ответить на этот вопрос, надо решить модельную задачу, в которой надо рассчитать оптимальный угол, под которым должна быть направлена начальная скорость, чтобы тело упало как можно дальше от подножия уступа. Затем, зная H и S, рассчитать величину начальной скорости. Далее, надо попросить товарища засечь высоту, на которое поднимается ваш животик при вашем прыжке вверх. Из закона сохранения энергии вычислить свою возможную скорость. Если она окажется недостаточной (с запасом), то отказаться от этого аттракциона, чтобы не оказаться в хирургическом отделении. Мы ограничимся только расчетом оптимального угла.

В первой задаче было показано, что без уступа максимальная дальность достигается при угле равным $\pi/4$. Ясно, что при увеличении высоты уступа следует уменьшать начальный угол. При очень большой высоте уступа вертикальная проекция конечной скорости будет определяться выстой уступа и будет много больше горизонтальной проекции скорости. Угол β, показанный на рисунке, будет стремиться к нулю, при стремлении высоты уступа к бесконечности. Угол же α в предельном случае можно сделать равным нулю. Из движения тела по вертикали находим полное время движения (начало координат совмещено с положением тела в начальный момент):

$$y = v_0 t \sin a - \frac{gt^2}{2} \qquad -H = v_0 \tau \sin a - \frac{g\tau^2}{2} \qquad \tau^2 - 2v_0 \tau \sin a - 2H = 0$$

$$\tau = \frac{1}{g}(v_0 \sin a + \sqrt{v_0^2 \sin^2 a + 2gH})$$

Находим расстояние, пройденное по горизонтали за это время:

$$S = \frac{v_0^2 \sin a \cos\alpha + v_0 \cos\alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2 a + 2gH}}{g}$$

Далее идут простые, но громоздкие преобразование этой формулы, чтобы разрешить ее относительна искомого угла:

$$(Sg - v_0^2 \sin a \cos\alpha) = v_0 \cos\alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2 a + 2gH}$$

$$(Sg)^2 - 2Sgv_0^2 \sin a \cos\alpha = (v_0 \cos\alpha)^2 2gH$$

$$(Sg)^2 - 2Sgv_0^2 \frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 2gHv_0^2 \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

$$(Sg)^2(1+\tan^2\alpha) - 2Sgv_0^2 \tan\alpha - 2gHv_0^2 = 0$$

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{Sg}\tan\alpha - \frac{2Hv_0^2}{gS^2} + 1 = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{Sg} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{S^2 g^2} + \frac{2Hv_0^2}{gS^2} - 1}$$

По физическому смыслу выражение не должно быть отрицательным:

$$\frac{v_0^4}{S^2 g^2} + \frac{2Hv_0^2}{gS^2} - 1 \ge 0$$

$$\frac{v_0^4}{g^2}(1 + \frac{2gH}{v_0^2}) > S^2$$

Так как мы ищем оптимальный угол, то следует выбрать знак равенства, то есть максимально допустимое S:

$$S = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gH}{v_0^2}}$$

При таком выборе выражение под корнем равно нулю, а оптимальный угол будет равен:

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2gH}{v_0^2}}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0 + 2gH}}$$

Как следует, в предельных случаях он равен:

$$\tan\alpha = 1 \text{ при } H = 0$$
$$\tan\alpha = 0 \text{ при } H \to \infty$$

Максимальное расстояние, на котором упадет тело от основания уступа, было получено выше.

3. Движение тела в вязкой среде.

Интегрирование простейших дифференциальных уравнений. Приведем примеры двух уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = ax^2 + bx + c$$
$$\frac{dy}{dx} = ax + by$$

Во-первых, что значит решить дифференциальное уравнение? При решении алгебраических уравнений вы ищите числа – корни уравнения, которые его при их подстановки переводят уравнение в тождество (равенство). При решении дифференциального уравнения вы должны найти функции, которые переведут его в тождество. Вообще говоря, вы можете просто догадаться о виде функции. И если после ее подстановки в уравнение вы получаете тождество – вы можете быть уверены, что решение найдено, так как математики доказали единственность решения.

Начнем с первого уравнения. Разделим переменные так, чтобы игреки были только в левой части, а иксы – только в правой части равенства:

$dy = (ax^2 + bx + c)dx$

Теперь запишем интегралы от левой и правой части:

$$\int dy = \int (ax^2 + bx + d)dx$$

Вычисляем интегралы с точностью до произвольной постоянной:

$$y = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + Const$$

В какую часть добавить константу безразлично, просто принято дописывать ее в правую часть.
Если, например, дано дополнительное условие $y(x=0)=0$, которое в физике называют начальным условием, то можно определить постоянную интегрирования:

$$0 = \frac{a}{3}\bullet 0 + \frac{b}{2}\bullet 0 + c\bullet 0 + Const$$

Следовательно, в данном случае постоянная интегрирования равна нулю и решение уравнения равно:

$$y(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$$

Второй пример сложнее, так как не разделяются переменные. Это уравнение можно записать в несколько иной форме:

$$\frac{dy}{dx} + by = ax$$

Если занулить правую часть, то оставшееся уравнение, которое называется однородным, решить достаточно просто:

$$\frac{dy}{dx} + by = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -bdx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -b\int dx \Rightarrow \ln y = -bx + \ln C$$

Из-за дальнейших преобразований константу интегрирования удобнее написать через логарифм. Далее получаем искомую функцию в явном виде:

$$\ln\frac{y}{C} = -bx \Rightarrow y = Ce^{-bx}$$

Если подумать, то это решение можно было бы написать сразу, так как есть только одна нам известная функция, которая при дифференцировании переходит сама в себя – это экспонента.
Если найденную функцию подставить в исходное уравнение, которое нам надо решить, то левая часть будет равна нулю, а нам надо, чтобы получилось ax. Можно сообразить, что к найденной функции надо добавить линейную функцию вида:

$$y_2 = Ax + B$$

Тогда решение исходного неоднородного уравнения будет состоять из суммы двух функций:

$$y = Ce^{-bx} + Ax + B$$

Чтобы определить коэффициенты, подставим ее в исходное уравнение:

$$A + b(Ax + B) = ax \Rightarrow A + bB + bAx = ax$$

Чтобы получилось тождество необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$A = -bB$$

$$bA = a$$

Разрешая систему относительно неизвестных коэффициентов, находим:

$$A = \frac{a}{b}, \qquad B = -\frac{a}{b^2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{a}{b}x - \frac{a}{b^2}$$

Таким образом, решением исходного неоднородного уравнения является функция:

$$y(x) = Ce^{-bx} + y_2 \Rightarrow Ce^{-bx} + \frac{a}{b}x - \frac{a}{b^2}$$

Постоянная интегрирования C находится из дополнительных условий.

Движение тела при наличии только силы сопротивления. Начнем рассмотрение движения тела, на которое действует только сила сопротивления, пропорциональная скорости частицы. Начальная скорость тела v_0, Начало координат всего удобней совместить с телом в начальный момент времени. Так как движение одномерное, то достаточно одной оси x. Уравнение движения будет иметь вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kv_x$$

с начальными условиями:

$$v_x(0) = v_0$$

$$x(0) = 0$$

Уравнение движения надо записать не через производную от координаты, а через производную от скорости. Это позволит разделить переменные:

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m}dt$$

Решение этого уравнения было найдено в математическом введении:

$$v_x = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

С помощью первого начального условия определяется константа интегрирования. Она равна v_0. Таким образом, скорость тела уменьшается по экспоненте:

$$v_x = v_0e^{-\frac{k}{m}t}$$

Запишем последнее уравнение через производную от координаты, разделим переменные и получим выражение для второго интегрирования по времени:

$$\frac{dx}{dt} = v_0e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow dx = v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt \Rightarrow \int dx = v_0\int e^{-\frac{k}{m}t}dt$$

После интегрирования получим:

$$x = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + C$$

Используя второе начальное условие, определяем вторую константу интегрирования:

$$0 = -\frac{mv_0}{k} + C \Rightarrow C = \frac{mv_0}{k}$$

Таким образом, решение исходного уравнения движения имеет вид:

$$x(t) = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Путь, которое тело пройдет в среде до остановки, находится, если время устремить в бесконечность:

$$S = x_{\max} = \frac{mv_0}{k}$$

Следует обратить ваше внимание на то, что его можно найти гораздо проще, не находя зависимости скорости от времени:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x \Rightarrow dv_x = -\frac{k}{m}v_x dt \Rightarrow dv_x = -\frac{k}{m}dx \Rightarrow \int dv_x = -\int \frac{k}{m}dx \Rightarrow v_x = -\frac{k}{m}x + C$$

Константа согласно начальным условиям равна v_0. Поэтому имеем связь координаты со скоростью:

$$x(t) = \frac{m}{k}(v_0 - v_x)$$

Из последнего выражения находится путь (при этом $v_x(t_{кон}) = 0$). Заметим, что не один студент не нашел этого решения при дополнительном вопросе на экзамене. Все сначала определяли скорость.

Рассмотрим движение тела в поле тяжести Земли с учетом силы сопротивления. Пусть тело без начальной скорости падает с некоторой высоты. Выберем начало отсчета в точке нахождения тела в начальный момент времени.

Уравнение движения тела:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kv_x + mg$$

Начальные условия для рассматриваемого движения имеют вид:

$$x(0) = 0$$

$$v_x(0) = 0$$

Выразим производную через скорость:

$$\frac{dv_x}{dt} + kv_x = mg$$

Решение однородного уравнения мы знаем:

$$v_x(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Легко сообразить, что к этому решению надо добавить некоторую константу, величина которой определяется из равенства:

$$kA = mg \Rightarrow A = \frac{mg}{k}$$

Таким образом, решением уравнения будет являться сумма функций:

$$v_x(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

Из первого начального условия находим константу:

$$0 = C + \frac{mg}{k} \Rightarrow C = -\frac{mg}{k}$$

Находим зависимость скорости от времени:

$$v_x(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Из последнего выражения видно, что скорость при $t \to \infty$ стремиться к некоторой постоянной величине, равной

$$v_{\max} = \frac{mg}{k}$$

Физически это означает, что сила сопротивления стала равна силе тяжести. Далее тело падает с постоянной скоростью.

Отступление. Сделаем маленькое отступление от продолжения решения задачи. Эта формула получена из достаточно длинных вычислений. Это решение математика, знающего теорию дифференциальных уравнений. Он получит этот ответ, если не знает, какие буквы что обозначают. А как физик может найти решение, не делая всех выкладок, зная, что сила сопротивления пропорциональна скорости тела в вязкой среде?

Предположим, некоторый физик наблюдал падение маленького металлического шарика в сосуде с глицерином. Он обнаружил, что вначале шарик двигается ускоренно, а пройдя примерно десяток сантиметров равномерно. Ему захотелось аналитически описать движение шарика. Посмотрим его рассуждения, которые привели к правильному математическому описанию явления. Предполагается, что ему известно, что ускорение тела пропорционально, действующей на него силе. И он имеет понятие об элементарных функциях и их свойствах.

Он рассуждает примерно так. Движение замедлилось, когда тело набрал скорость. Можно предположить, сила должна быть пропорционально скорости (и конечно направлена против направления скорости).

Если тело движется с постоянной скоростью, то сила сопротивления должна быть равна силе тяжести. Следовательно, на участке, где шарик падает с постоянной скоростью:

$$mg = F = kv_{\max}$$

В самом начале падения, когда скорость шарика очень маленькой, можно считать, что силы сопротивления нет. Тогда его начальная скорость приближенно будет равна:

$$v_{нач} = gt$$

И так, надо найти формулу, которая бы давала при времени, стремящемся к нулю, скорость равную:

$$v_{нач} = gt = \frac{F}{m}t$$

А при времени, стремящемся к бесконечности, скорость равную:

$$v_{кон} = \frac{F}{k}$$

Чтобы получить искомую формулу физик воспользовался еще одной подсказкой. Он знал единственную функцию, которая при дифференцировании и при интегрировании «переходит в саму себя» - это экспонента (с точностью до постоянного множителя). Сила сопротивления в среде пропорциональна скорости (по сделанному предположению):

$$F_{сопр} \sim v$$

В тоже время сила пропорциональна ускорению, то есть производной от скорости:

$$F_{сопр} \sim \frac{dv}{dt}$$

Как же так? Одна и та же функция должна быть пропорциональной функции и производной от этой функции. Я догадался, воскликнул он радостно, эта функция должна быть экспонентой, только она, сколько не дифференцируй «переходит сама в себя». Причем в показателе обязательно должно стоять время. Но если показатель будет положительным, то она возрастать неограниченно. Это не годится. Значит показатель экспоненты отрицательный. Но тогда она будет стремиться к нулю при больших временах, а мне нужна константа. Следовательно, решает он, функция должна представлять сумму двух членов:

$$v \sim A + e^{-Bt}$$

При малых временах эта функция приближенно равна:

$$v \sim A + 1 - Bt$$

Можно немножко подправить исходную функцию, чтобы третий член получился положительным:

$$v \sim A - e^{-Bt}$$

Тогда при малых временах получим:

$$v \sim A - 1 + Bt$$

А нам нужен только третий член. Следовательно, первая константа равна единице, а функция должна иметь вид:

$$v \sim 1 - e^{-Bt}$$

При больших временах вне зависимости от величины второй константы получается единица. Следовательно, эту разность надо умножить на скорость установившегося движения:

$$v = v_{\max}(1 - e^{-Bt}) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-Bt})$$

Написав приближенное выражение для экспоненты при малых временах, получим:

$$v = \frac{mg}{k}(1 - 1 + Bt) = \frac{mg}{k} Bt$$

Чтобы в формуле осталось необходимое произведение gt, надо, чтобы вторая константа была равна:

$$B = \frac{k}{m}$$

Формула получена, она удовлетворяет оба придельных случая:

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Осталось вместо силы тяжести поставить произвольную постоянную силу.

После вывода формулы необходимо на опыте проверить полученный результат. И после подтверждения ознакомить мир со своим открытием. Не надо думать, что физик все это сообразил за время, которое вам понадобилось на чтение. Он даже тогда, когда ложился спать, в уме крутил свою задачу.

Может быть, вы знаете из научно-популярной литературы, что именно таким методом М.Планк получил формулу для излучения черного тела, которая породила квантовую физику, а ему принесла нобелевскую премию.

Для чего сделано отступление? Для того чтобы показать, что физика – это развитие мозгов. Не имеет значения, чем вы будете заниматься после окончания института. Мозги нужны везде!

Продолжение решения задачи. Продолжим решение задачи. Найдем зависимость координаты от времени в предположении, что скорость вплоть падения будет увеличиваться:

$$x(t) = \frac{mg}{k}\int (1 - e^{-\frac{k}{m}t})dt = \frac{mg}{k}(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}) + C$$

Из второго начального условия находим константу:

$$0 = \frac{m^2 g}{k^2} + C \Rightarrow C = -\frac{m^2 g}{k^2}$$

Подставив ее в предыдущее уравнение, получим:

$$x(t) = \frac{m^2 g}{k^2} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}$$

$$x(t) = \frac{m^2 g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \frac{mg}{k}t$$

Время падение находится из уравнения при $x(\tau) = H$:

$$H=\frac{m^2g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}\tau}-1)+\frac{mg}{k}\tau$$

Получили трансцендентное уравнение, которое надо решать численно.

Были достаточно большие вычисления. Можно допустить по невнимательности ошибку. Поэтому всегда советую при возможности (а она практически всегда есть) проверить ответ.

Если показатель экспоненты много меньше единицы, и сила сопротивления исчезающее мала, то экспоненту можно разложить в ряд, ограничившись первым приближением. Получим:

$$v_x(t)=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})=\frac{mg}{k}(1-1+\frac{k}{m}t)=gt$$

Как видите, получили, как и должно быть, зависимость при отсутствии силы сопротивления. Проверим решение таким же образом зависимость для координаты:

$$x(t)=\frac{m^2g}{k^2}(1-\frac{k}{m}t+\frac{k^2}{2m^2}t^2-1)-\frac{mg}{k}t=\frac{gt^2}{2}$$

В этом случае пришлось раскладывать до второго приближения. Опять получили правильный ответ.

Полезно знать, что экспонента раскладывается в ряд:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

При $x<1$ можно приближенно ограничиться несколькими слагаемыми, в зависимости от того, насколько хорошо выполняется неравенство.

В качестве второго примера рассмотрим движение тела, брошенного под углом к горизонту, но при наличии силы сопротивления. Напишем систему уравнений движения тела в векторном виде:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}_{сопр}+m\boldsymbol{g}$$

Спроектировав его на координатные оси, получим систему двух уравнений:

$$m\frac{dv_x}{dt}=-kv_x$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=-kv_y-mg$$

Первые интегралы обоих уравнений можно написать сразу, так как аналогичные уравнения были решены выше:

$$v_x=C_1e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_y=C_2e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$$

Определим константы интегрирования из начальных условий:

$$v_x=v_0e^{-\frac{k}{m}t}\cos\alpha$$

$$v_y=(v_0\sin\alpha+\frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$$

Перегруппируем члены во втором уравнении:

$$v_y=v_0e^{-\frac{kt}{m}}\sin\alpha-\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{kt}{m}}$$

Проверим, переходят ли полученные уравнения в систему уравнений при отсутствии силы сопротивления. Чтобы убедиться в этом достаточно в первое уравнение системы подставить $k=0$. При проверке второго в первое слагаемое также надо подставить $k=0$, во втором слагаемом надо разложить экспонент, ограничившись первым приближением, после чего оно перейдут в gt. Мы еще раз очень советуем делать такие проверки.

Из второго уравнения для движения по вертикали можно определить время подъема, приравняв скорость нулю:

$$e^{\frac{kt}{m}} = \frac{kv_0 \sin\alpha}{mg} + 1 \Rightarrow t_{под} = \frac{m}{k}\ln(1 + \frac{kv_0 \sin\alpha}{mg}) \qquad (15)$$

Интегрируя уравнения (13), находим координаты тела в зависимости от времени:

$$x = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \cos\alpha + C_3$$

$$y = -\frac{m}{k}(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + C_4$$

Константы можно найти из начальных условий $x(0) = y(0) = 0$. Если далее в окончательное уравнение подставить время подъема, получим максимальную высоту подъема тела. Сделайте это сами, пользы будет больше (для вас!). Однако решить задачу до конца в аналитике нельзя, так как в предыдущем примере вы видели, что для времени падения получается трансцендентное уравнение. Поэтому для определения расстояния до точки падения придется заниматься численными расчетами.

<u>Движение тела при больших скоростях</u>. Сила сопротивления при больших скоростях движения. При увеличении скорости движения тела в среде сила сопротивления меняет свой характер – зависимость от скорости перестает быть линейной. Мы рассмотрим пример для произвольного показателя степени скорости. Пусть тело имеет некоторую начальную скорость. Опишем движения тела, если на него действует только сила сопротивления. Уравнение движения и его первый интеграл в этом случае имеет вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x^n \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x^n} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow \int \frac{dv_x}{v_x^n} - \frac{k}{m}\int dt \Rightarrow -\frac{1}{(n+1)v_x^{n+1}} = -\frac{k}{m}t + C$$

Определяем константу из начального движения:

$$-\frac{1}{(n+1)v_0^{n+1}} = C$$

$$\frac{1}{(n+1)v_0^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)v(t)_x^{n+1}} = -\frac{k}{m}t$$

Время до остановки тела найти принципиально нельзя. Можно найти только интервал времени, за который скорость уменьшится до определенного предела. Почему так? В данном случае математика подсказывает нам о не корректности постановки задачи. Сила сопротивления не может быть такой до остановки тела. Она должна перейти в линейную зависимость при малых скоростях. Для более детального объяснения надо знать основы гидродинамики.

4. Движение тела в движущейся среде.

<u>Качественные вопросы</u>. Начнем рассмотрение с качественных вопросов. Между двумя пунктами, расположенными на берегу реки курсирует теплоход с постоянной скоростью относительно воды, скорость течения реки можно считать постоянной. Затем ниже городов построили плотину. Река превратилась в водохранилище, и скорость течения стало можно считать равной нулю. А теплоход как курсировал, так и продолжал по такому же расписанию (время движения туда и обратно было сохранено). Вопрос: как изменилась себестоимость рейса? Только не говорите, что вы изучаете физику, а этот вопрос по экономике. Во главе всего лежит физика! Даже в Африке. Если бы в доисторические времена гениальный дикарь не изучил бы механик и теплоту и не изобрел бы и построил установку для получения огня, используя трение, его соплеменники ели бы не поджаренное в хрустящей корочке, а противное сырое мясо.

Если не догадались, тогда перейдем к следующему вопросу. Два пловца, проживающих в разных местах решили устроить соревнование: кто быстрее плавает. Один жил на берегу озера, второй – на берегу реки.

Первый проплыл расстояние L за время τ, второй, чтобы скомпенсировать течение реки проплыл $L/2$ по течению реки и $L/2$ - против, причем за тоже время. Судейская коллегия, благодаря Интернету, наблюдала соревнование он-лайн. Кому была присуждена победа? И этот вопрос не про физкультуру, а про физику.

Запишем выражения для времен обеих пловцов и приравняем их:

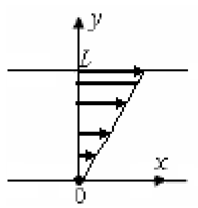
$$\tau = \frac{L}{V_1}, \quad \tau = \frac{L}{2(V_2+v_0)} + \frac{L}{2(V_2-v_0)} = \frac{LV_2}{V_2^2-v_0^2},$$

$$\frac{1}{V_1} = \frac{V_2}{V_2^2-v_0^2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2^2}{V_2^2-v_0^2} = \frac{1}{1-\frac{v_0^2}{V_2^2}} > 1$$

Таким образом, скорость пловца, который жил у реки больше. И ему судьи присудили победу. К счастью, один из судей прилично знал физику.

Теперь легко дать ответ на первый вопрос. После постройки плотины теплоход стал курсировать с несколько меньшей скоростью, и, следовательно, расход топлива сократился, так как уменьшилась сила сопротивления. Это снизило себестоимость рейса.

Видите, на некоторые задачи можно дать ответ, не решая их, а используя ранее решенные задачи. Так что всегда стоит немного подумать: а не было ли задачи, решение, которой может частично или полностью использовано.



<u>Переправы через реку</u>. Рассмотреть три разных метода переправы через реку шириной L, скорость течения которой растет по линейному закону $v(y) = \frac{v_0}{L}y$. Скорость лодки относительно воды равна V и постоянна во всех случаях при переправе. Рассмотрим три варианта переправы:

1. Вдоль берега по стоячей воде отплываем вверх по течению на такое расстояние, чтобы затем, направив лодку перпендикулярно реке, ее снесло в конечный пункт.
2. Выбираем постоянный угол между направлением лодки и осью y такой, чтобы лодка, описав дугу, пристала в конечный пункт.
3. Меняем (увеличиваем) во время переправы угол отклонения так, чтобы лодка двигалась по прямой, соединяющие пункты (по оси y).

Какой метод переправы наиболее экономичный (по затрате физических сил гребцом или расходу топлива)? Наиболее экономичным будет тот метод, который займет меньше всего времени, так как за все время переправы лодка относительно воды двигается с постоянной скоростью. Будем рассматривать в том порядке, который задан в условии задачи.

1. Рассчитаем, где пристанет лодка, если она направлена перпендикулярно реке. Уравнения для проекций скоростей лодки относительно берега будут иметь вид:

$$V_x = \frac{v_0}{L}y$$

$$V_y = V$$

Из второго уравнения находим зависимость $y(t)$ и, подставляя в первое, находим $x(t)$:

$$y(t) = Vt \Rightarrow V_x = \frac{v_0 V}{L}t \Rightarrow x(t) = \frac{v_0 V}{2L}t^2$$

Приравнивая $y(t)$ ширине реки, находим время переправы:

$$t_2 = \frac{L}{V}$$

А подставив его в $x(t)$, находим величину сноса лодки:

$$S = \frac{v_0 L}{2V}$$

Чтобы получить полное время переправы, надо к t_2 добавить время, которое потребуется для движения лодки вдоль берега вверх по реке, чтобы пристать в нужном пункте

$$t_1 = \frac{S}{V} = \frac{v_0 L}{2V^2}$$

Таким образом, полное время переправы первым способом рано:

$$\tau_1 = \frac{v_0 L}{2V^2} + \frac{L}{V} = \frac{L}{V}(1 + \frac{v_0}{2V})$$

Перейдем к рассмотрению второго способа переправы. Так как преобразования практически аналогичные, то их можно опустить:

$$V_x = \frac{v_0}{L} y(t) - V\sin\alpha$$

$$V_y = V\cos\alpha$$

$$y(t) = Vt\cos\alpha$$

$$L = V\tau_2\cos\alpha \Rightarrow \tau_2 = \frac{L}{V\cos\alpha}$$

$$x(t) = \frac{v_0 V t^2 \cos\alpha}{2L} - Vt\sin\alpha$$

$$x(\tau_2) = \frac{v_0 V\cos\alpha}{2L}(\frac{L}{V\cos\alpha})^2 - V\sin\alpha\frac{L}{V\cos\alpha} = \frac{v_0 L}{2V\cos\alpha} - \frac{L\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Из условия $x(\tau_2) = 0$ находим синус угла, под которым надо направить лодку, чтобы приплыть в нужный пункт:

$$\frac{v_0 L}{2V\cos\alpha} = \frac{L\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v_0}{2V}$$

Теперь можно найти полное время переправы вторым способом:

$$\tau_2 = \frac{L}{V\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{L}{V\sqrt{1-(\frac{v_0}{2V})^2}}$$

Перейдем к последнему варианту. В этом случае лодка имеет только одну проекцию скорости:

$$\frac{dy}{dt} = V\cos\alpha$$

При дополнительном условии:

$$V\sin\alpha = \frac{v_0}{L} y(t)$$

Исключим из этих уравнений тригонометрию и разделим переменные:

$$\frac{dy}{dt} = V\sqrt{1-(\frac{v_0}{VL})^2 y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-(\frac{v_0}{VL})^2 y^2}} = Vdt \Rightarrow \frac{\frac{VL}{v_0}dz}{\sqrt{1-z^2}} = Vdt$$

Интеграл от левой части является арксинусом (можете посмотреть в справочнике). Поэтому после интегрирования получим:

$$\frac{VL}{v_0}\arcsin z = Vt + C \Rightarrow \arcsin[\frac{v_0}{VL}y] = \frac{v_0}{L}t + C$$

Из начальных условий следует, что константа равна нулю. Полное время определяется из последнего выражения, если вместо y подставить L:

$$\tau_3 = \frac{L}{v_0}\arcsin(\frac{v_0}{V})$$

Осталось сравнить времена. Чтобы провести сравнение, приведем полученные времена в виде разложения в ряды по степеням $\frac{v_0}{2V}$, ограничившись тремя членами разложения (формулы разложения функций в ряды можно посмотреть в справочнике Градштейна и Рыжика «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений»):

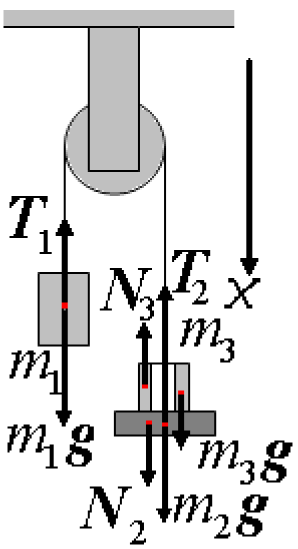
$$\tau_1 = \frac{v_0 L}{2V^2} + \frac{L}{V} = \frac{L}{V}(1 + \frac{v_0}{2V})$$

$$\tau_2 = \frac{L}{V}[1 + (\frac{v_0}{2V})^2 - \frac{3}{8}(\frac{v_0}{2V})^4]$$

$$\tau_3 = \frac{L}{v_0}[\frac{v_0}{V} + \frac{1}{6}(\frac{v_0}{V})^3 + \frac{3}{40}(\frac{v_0}{V})^5] = \frac{L}{V}[1 + \frac{2}{3}(\frac{v_0}{2V})^2 + \frac{3}{5}(\frac{v_0}{2V})^4]$$

Так как последним способом можно переправиться только при условии $\frac{v_0}{V} < 1$, то сравнение имеет смысл проводить только в интервале $0 < \frac{v_0}{V} < 1$. В этом интервале $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$. Однако первый способ хорош тем, что переправиться можно при любом скорости течения. Заметим, что при $v_0 = 0$ все времена совпадают, что является проверкой сделанных вычислений.

5. Движение грузиков, подвешенных на нитях, перекинутых через блоки.



В этом разделе будем считать: 1. Нити нерастяжимые и невесомые. 2. Блоки невесомые или отсутствие сил трения между блоком и нитью (что фактически для решения эквивалентно), если не оговорено противное.

__Задача 1__. Начнем с рассмотрения простой задачи движения грузиков подвешенных на нити, перекинутой через блок. Чаще всего в задачниках условие формулируется словами, реже приводится поясняющий рисунок. При решении задачи, прежде всего, обязательно надо сделать рисунок и расставить все силы, действующие на каждый грузик. На приведенном рисунке для наглядности для двух грузов силы разнесены, не приложены к центрам масс всех грузиков. Правильнее их все надо направить по шнуру, но тогда они сольются. Далее надо написать уравнения движения для каждого тела в векторном виде:

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1$$

$$m_2\boldsymbol{a}_2 = m_2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{T}_2$$

$$m_3 a_3 = m_3\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}_3$$

Затем следует эти уравнения написать в проекциях на ось *X*:

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + N_2 - T_2$$

$$m_3\ddot{x}_3 = m_3 g - N_3$$

Ускорения обозначены не буквой *a,* чтобы не писать два индекса. Неизвестных семь, уравнений всего три. Прежде, чем решать систему, надо найти еще четыре уравнения. Первое уравнение следует из третьего закона Ньютона:

$$N_2 = N_3 = N$$

Из невесомости шнура следует равенство:

$$T_1 = T_2 = T$$

Поясним это утверждение подробнее. Если рассматривать уравнение движения маленького элемент нити, то левая часть уравнения второго закона Ньютона будет тождественно равна нулю из-за нулевой массы элемента нити. Следовательно, правая часть с силами также равна нулю, то есть силы натяжения с обоих концов выделенного элемента одинаковы по величине, что эквивалентно сделанному утверждению. Следует подчеркнуть, что это верно при условии, что трение между нитью и блоком отсутствует. Во второй части пособия будет рассмотрена задача при наличии трения.

Перепишем систему уравнений движения с учетом полученных соотношений:

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T$$
$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + N - T$$
$$m_3\ddot{x}_3 = m_3 g - N$$

Число неизвестных сократилось, но их больше на два. Недостающие два уравнения можно получить из нерастяжимости нити и условия, что второе и третье тело двигаются с одинаковым ускорением:

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$$

Подробнее о написанном равенстве. Из нерастяжимости нити следует, что на какую высоту одно тело опустится, на такую же высоту второе тело поднимется за один и тот же промежуток времени. Следовательно, и абсолютные величины скоростей буду равными, но противоположными по направлению, точно такое же соотношения будет и для ускорений.

Приступим к нахождению ускорений тел. Сложим второе и третье уравнения и учтем (29):

$$(m_2 + m_3)\ddot{x}_2 = (m_2 + m_3)g - T$$

Вычтем из этого уравнения первое уравнение (38) и учтем (29):

$$(m_2 + m_3 + m_1)\ddot{x}_2 = (m_2 + m_3 - m_1)g$$

Таким образом, ускорения тел равны:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3}g$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3}g$$

Направление ускорений будет зависеть от соотношения масс. Для определенности будем считать, что два тела перевешивают первое тело. Обратите внимание, что все внутренние силы системы выпали из ответа.

Выражение для ускорения можно получить не очень научным методом, но много проще. Развернем систему тел по прямой линии. Тело 2 и 3 будем считать за одно тело. Тогда на эту систему будут действовать две противоположные силы: $m_1 g$ и $(m_2 + m_3)g$. Масса всей системы равна $m_1 + m_2 + m_3$. Разделив разность сил на массу системы, получим ее ускорение, которое совпадает с ранее найденным.

Сила, действующая на блок, равна удвоенной силе натяжения нити. Силу натяжения можно найти из первого уравнения системы:

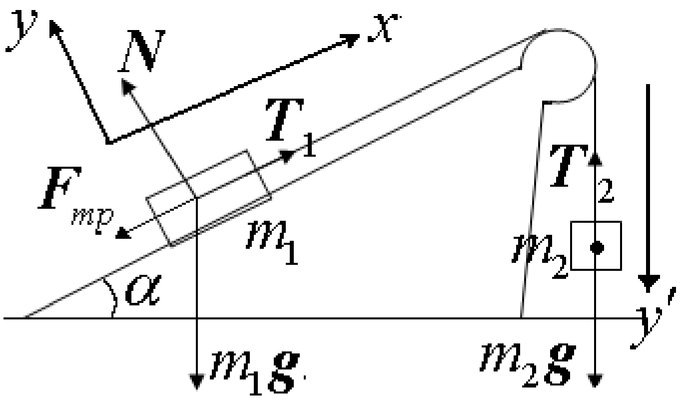
$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T \Rightarrow T = [m_1 - \frac{m_1(m_2 + m_3 - m_1)}{m_1 + m_2 + m_3}]g = \frac{2m_1^2}{m_1 + m_2 + m_3}g$$

$$F_{блок} = \frac{4m_1^2}{m_1 + m_2 + m_3}g$$

Сделаем проверку. Если $m_1 = m_2 + m_3$, то система будет покоиться, и сила $F_{блок}$ должна быть равна $F_{блок} = 2m_1 g$. Совпадает. Заметьте, что если $m_1 < m_2 + m_3$, то сила при движении будет меньше.

Определим силу взаимодействия между 2 и 3 телами, используя третье уравнения (28):

$$N = m_3 g - m_3\ddot{x}_3 = m_3\left(1 - \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right)g = \frac{2m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g$$



Интегрирование уравнений для нахождения скоростей движения перемещения тел при равноускоренном движении тел не представляет трудности, и мы на этом не будем останавливаться.

Задача 2. Рассмотрим еще одну задачу. Ее условие ясно из приведенного рисунка. Векторные уравнения движения для тел будут иметь вид:

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{mp}$$

$$m_2\boldsymbol{a} = m_2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_2$$

В проекциях на выбранные координатные оси:

$$m_1\ddot{x} = T_1 - m_1 g\sin\alpha - F_{mp}$$

$$m_1\ddot{y} = N - m_1 g\cos\alpha$$

$$m_2\ddot{y}' = m_2 g - T_2$$

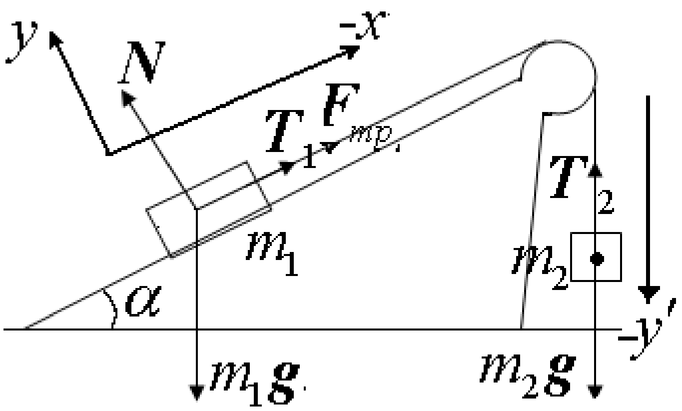
Мы предположили, что тело на наклонной плоскости движется вверх.

Так как $\ddot{y} = 0$, то $N = m_1 g\cos\alpha$. Находим силу трения: $F_{mp} = kN = km_1 g cos\alpha$. Из невесомости шнура следует равенство: $T_1 = T_2 = T$. Из нерастяжимости шнура следует соотношение: $\ddot{x} = \ddot{y}'$. Переписываем уравнения (32) с учетом полученных соотношений:

$$m_1\ddot{x} = T - km_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha$$

$$m_2\ddot{y}' = m_2 g - T$$

Складывая их и учитывая $\ddot{x} = \ddot{y}'$, находим ускорения тел:



$$\ddot{x} = \ddot{y}' = \frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + m_2} g$$

Это решение справедливо, если числитель дроби положителен:

$$\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + m_2} \geq 0$$

Если последнее неравенство меньше нуля надо решать другую задачу (см. рис). Напишем сразу уравнения движения в проекциях на вновь выбранные оси координат. Обратите внимание на то, что изменено направления:

$$m_1\ddot{x} = m_1 g\sin\alpha - T - km_1 g\cos\alpha$$

$$m_2\ddot{y}' = T - m_2 g$$

Складывая эти уравнения, находим ускорения тел:

$$\ddot{x} = \ddot{y}' = \frac{m_1\sin\alpha - (m_2 + km_1\cos\alpha)}{m_1 + m_2} g$$

Это решение справедливо, если правя часть больше нуля:

$$\ddot{x} = \ddot{y}' = \frac{m_1\sin\alpha - (m_2 + km_1\cos\alpha)}{m_1 + m_2} \geq 0$$

Из предыдущих формул можно найти соотношение между массами, при которых тела будут покоиться:

$$m_2 - m_1(\sin\alpha + k\cos\alpha) > 0 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} > \sin\alpha + k\cos\alpha$$

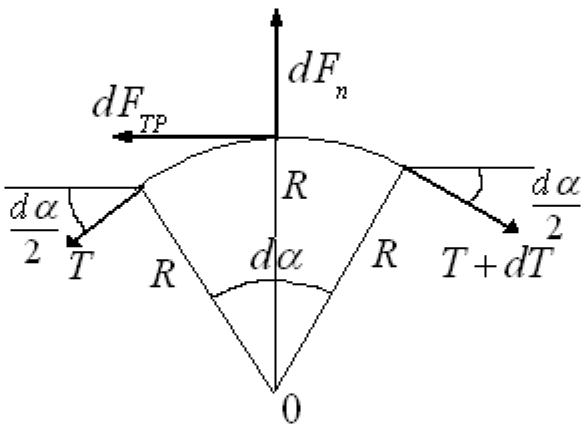
$$m_1\sin\alpha - km_1\cos\alpha - m_2 > 0 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} < \sin\alpha - k\cos\alpha$$

При выполнении первого неравенств тело на наклонной плоскости двигается вверх, при выполнении второго – вниз. Из этих двух неравенств следует, что при условии:

$$\sin\alpha - k\cos\alpha \le \frac{m_2}{m_1} \le \sin\alpha + k\cos\alpha$$

тела будут покоиться. Если трение нет, то тела будут покоиться только при единственном соотношении: $m_2 = m_1 \sin\alpha$

Задача 3. Более сложно рассмотреть эту задачу в предположении, что блок закреплен, и задан коэффициент трения скольжения между нитью и блоком. Каким бы вы способом не решали задачу, надо будет рассчитать либо момент сил трения или разность сил натяжения нитей из-за наличия трения.



На рисунке показан бесконечно малый элемент длиной:

$$dl = Rda$$

Не следует понимать, что этот элемент находится в верхней точке блока. Просто удобнее рисовать рисунок. Нить невесома, сил тяжести нет. Поэтому этот рисунок правильно отображает суть в пределах угла a от 0 до π. Так как сумма сил, действующая на элемент нити должна быть равна нулю (из-за его невесомости), то

$$dF_n = (T + dT)\frac{d\alpha}{2} - T\frac{d\alpha}{2} \simeq Td\alpha$$

Силы, действующие по направлению нити, также должны быть равны (по той же причине):

$$T + dT = dF_{mp} + T$$

Из двух последних уравнений, исключив силу трения, получим дифференциальное уравнение для силы натяжения. Проинтегрировав которое, получим отношение сил натяжения в вертикально расположенных участках нитей:

$$dT = kTd\alpha \Rightarrow \frac{dT}{T} = kd\alpha \Rightarrow \ln\frac{T_2}{T_1} = \pi k \Rightarrow T_2 = T_1 e^{\pi k}$$

Из последнего соотношения можно найти разность сил натяжения, но она будет выражена через одну, но пока нам неизвестную силу натяжения:

$$T_2 - T_1 = T_1(e^{\pi k} - 1)$$

Для сокращения выражений обозначим разность, стоящую в скобках γ. При отсутствии трения $\gamma = 0$.

Напишем уравнение для момента импульс системы теп. Это уравнение будет отличаться от уравнения, которое было объяснено в задаче для варианта при отсутствии трения дополнительным моментом сил трения:

$$(m_1 + m_2 + m_3)R^2\frac{d\omega_z}{dt} = (m_1 + m_2 - m_3)gR - \gamma T_1 R$$

Чтобы исключить неизвестную силу натяжения левой нити, напишем второй закон Ньютона для левого тела:

$$m_1 a_x = m_1 g - T_1'$$

При исключении T_1 надо быть очень внимательным, так как легко ошибиться в знак. В уравнении для момента импульса в моменте сил трения под T_1 понимается абсолютная величина силы натяжения левой нити. Во втором законе Ньютона T_1' проекция силы на ось x, действующей на левый грузик со стороны нити.

Угловое ускорение, умноженное на радиус, даст положительную проекцию a_x. Поэтому проще всего второй закон написать для абсолютных величин:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g \Rightarrow T_1 = m_1 a + m_1 g$$

Выразим из него T_1 и подставим в уравнение для момента импульса:

$$(m_1 + m_2 + m_3)R^2 \frac{d\omega_z}{dt} = (m_1 + m_2 - m_3)gR - \gamma(m_1 g + m_1 a_x)R$$

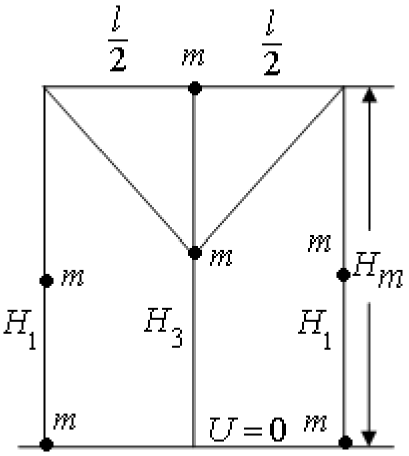
Заменив угловое ускорение на линейное, перегруппировав члены и заменив модуль ускорения на его проекцию, получим:

$$(m_1 + m_2 + m_3 + \gamma m_1)a_x = (m_1 + m_2 - m_3 - \gamma m_1)gR$$

Определив ускорение, можно найти из закона Ньютона найти натяжение левой нити. Вычислив ее, можно определить натяжение и правой нити. Движение равноускоренное силе трения не зависящей от относительной скорости нити и блока. Поэтому интегрирование не представляет труда.

6. Законы сохранения.

<u>Задача из задачника И.Е. Иродова</u>. При решении этой задачи целесообразней использовать закон сохранения энергии (см. рис.). В верхних угла находятся блоки, размерами которых можно пренебречь. Можете считать, что имеется два тонких параллельных стержня перпендикулярных плоскости рисунка. Геометрические размеры известны. В начальный момент времени средний шарик (прикрепленный за ушко) находится на горизонтальной линии, проведенной через стержни. Два других шарика находятся на максимальном расстоянии от стержней. Между геометрическими размерами имеется очевидное соотношение:



$$L = H_m + \frac{l}{2}$$

где L длина нити от среднего шарика до бокового шарика. Ноль потенциальной энергии выбран на линии положения боковых шариков. Массы всех шариков одинаковые. Найдем некоторые величины, характеризующие движение шариков.

Полная энергия системы в начальный момент времени равна ее потенциальной энергии:

$$U_1 = mgH_m$$

Потенциальная энергия в произвольный момент времени равна:

$$U = mg(H_3 + 2H_1)$$

Выразим ее через одну переменную H_3. Из нерастяжимости веревки и геометрии следует:

$$H_m - H_1 + \sqrt{\frac{l^2}{4} + (H_m - H_3)^2} = H_m + \frac{l}{2}$$

Упростив, получим:

$$\sqrt{\frac{l^2}{4} + (H_m - H_3)^2} = \frac{l}{2} + H_1 \Rightarrow (H_m - H_3)^2 = lH_1 + H_1^2$$

Разрешим уравнение относительно H_1:

$$H_1 = -\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + (H_m - H_3)^2}$$

Делаем на всякий случай проверку. Положив $H_3 = H_m$, мы получаем $H_1 = 0$, как и должно быть.

Теперь потенциальную энергию можно выразить как функцию одной переменной:

$$U = mg(H_3 + 2\sqrt{\frac{l^2}{4} + (H_m - H_3)^2} - l)$$

Для еще одной проверки найдем потенциальную энергию в начальный момент времени из общей формулы:

$$U_1 = mg(H_m + 2\sqrt{\frac{l^2}{4}} - l) = mgH_m$$

Видите, опять все правильно.

Давайте мысленно представим, как будут двигаться грузики. Вначале их скорости будут увеличиваться, затем система пройдет равновесное положение, и скорости грузиков начнут уменьшаться. В какой-то момент времени все скорости станут равны нулю. В этот момент потенциальная энергия станет равна первоначальной, так как силы трения и сопротивления в задаче не учитываются. Из сказанного следует, что есть еще одно значение H_3', при котором

$$U_2 = mgH_m$$

Приравниваем правые части (1) и (2) и получаем уравнение:

$$H_3' + 2\sqrt{\frac{l^2}{4} + (H_m - H_3')^2} - l = H_m,$$

из которого и находим H_3' - высоту среднего шарика в нижней точке:

$$[(H_m - H_3') + l]^2 = 4\frac{l^2}{4} + 4(H_m - H_3')^2 \Rightarrow (H_m - H_3')^2 + 2l(H_m - H_3') = 4(H_m - H_3')^2$$

$$H_m - H_3' + 2l = 4(H_m - H_3') \Rightarrow 2l = 3(H_m - H_3')$$

Таким образом, скорость шариков станет равным нулю, когда средний шарик опустится из верхнего положения на расстояние равное:

$$H_m - H_3' = \frac{2}{3}l$$

В этой задаче интересно то, что точка равновесия не находится на средине между верхней и нижней точками положения среднего шарика. Многие делают ошибку, предполагая это. Максимальные скорости шариков надо находить, используя закон сохранения полной энергии. Поэтому, прежде всего надо найти минимальную потенциальную энергию. Дифференцируя потенциальную энергию, получим:

$$\frac{dU}{dH_3} = mg(1 - \frac{2(H_m - H_3)}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + (H_m - H_3)^2}})$$

Приравняв это выражение нулю, находим положение системы при минимальной потенциальной энергии:

$$H_3'' = H_m - \frac{\sqrt{3}}{6}l$$

Подставляя H_3'', находим минимальную потенциальную энергию, а вычтя ее из начальной энергии, находим кинетическую энергию системы:

$$E_k = mgH_m - mg(H_3'' + 2\sqrt{\frac{l^2}{4} + (H_m - H_3'')^2} - l)$$

$$= mg(\frac{\sqrt{3}}{6}l - 2\sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{12}} + l) = mgl(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Осталось «поделить» эту энергию между грузиками. У нас есть связь между высотами шариков. Если его продифференцировать по времени, то можно получить связь между скоростями среднего и боковых шариков:

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{(H_m - H_3)\frac{dH_3}{dt}}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + (H_m - H_3)^2}}$$

Если в него подставить H_3'', то мы найдем связь между скоростями в искомом положении системы:

$$v_1 = v_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} l v_3}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{12}}} = \frac{1}{2} v_3$$

Находим кинетическую энергию системы, выраженную через скорость среднего шарика:

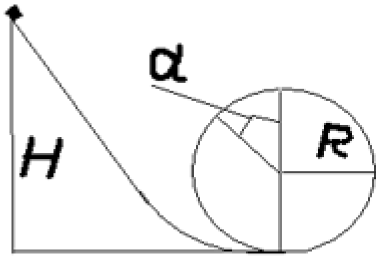
$$E_k = \frac{m}{2}(v_3^2 + 2v_1^2) = \frac{m}{2}(v_3^2 + \frac{v_3^2}{2}) = \frac{3}{4} m v_3^2$$

Приравняв (39) и (40), находим максимальную скорость среднего шарика:

$$v_{3,\max} = \sqrt{2gl\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$$

Таким образом, система будет совершать периодическое движение. Время периода здесь мы не будем находить. Вернемся к этой задаче при рассмотрении колебаний.

Мертвая петля. Эта задача, которая обязательно задается и в школе и в вузе. Ее решение известно. Но есть вопрос, который практически не рассматривается, может он считается очевидным. Но опыт показал, что показать это не могут даже некоторые студенты.



Условие задачи ясно из картинки. Нужно найти минимальную высоту, с которой должна соскальзывать без трения маленькая шайба, чтобы при ее движении по окружности не произошел отрыв.

Из закона сохранения энергии находим скорость шайбы в верхней точке траектории:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} + 2mgR = mgH$$

$$v_{\min}^2 = 2g(H - 2R)$$

Выражение для центростремительной силы в этой точке равно:

$$\frac{mv_{\min}^2}{R} = N + mg$$

Предельное допустимое значение скорости следует из этого уравнения при $N = 0$. Комбинируя его с предыдущим, находим минимальную высоту:

$$\frac{v_{\min}^2}{R} = g \Rightarrow 2g(H-2R) = gR \Rightarrow H = \frac{5}{2}R$$

А теперь вопрос, который вызывает затруднения. Почему тело не может оторваться после прохождения верхней точки? Можно найти ответ, если определить давление на стенку при угле α в пределах $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$:

$$N = \frac{mv^2(\alpha)}{R} - mg\cos\alpha$$

Скорость в нем находится из закона сохранения энергии:

$$N = 2mg(\frac{5}{2} - 2) + 2mg - 3mg\cos\alpha = 3mg(1 - \cos\alpha) \ge 0$$

Как видите, необходимое условие выполняется.

Как забросить шайбу на гладкую полусферу. На полусферу радиуса *R* надо с горизонтальной поверхности забросить маленькую шайбу так, чтобы она остановилась в верхней точке сферы. Столкновение шайбы со сферической поверхностью считать абсолютно упругим. То есть надо найти расстояние, например, от

вертикальной оси полусферы, величину начальной скорости шайбы и угол, под которым она направлена к горизонту.
Величина скорости легко находится из закона сохранения энергии:

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

Однако определение двух других величин «в лоб» вызывает трудность. Даже сразу не приходит в голову как подступиться к их поиску.

Но есть совсем простое решение этой задачи. Вспомните наши рассуждения о качественном описании движения тела, брошенного под углом к горизонту: «Поэтому можно ожидать, что траектории движения тела до максимальной высоты подъема и поле него будут симметричными. Вот теперь пора сделать рисунок и нанести на него необходимые величины», которое подтвердилось в дальнейших расчетах. Что из этого следует? А то, что изменив конечную скорость при падении на противоположное направление, мы получим движение тела в обратном направлении. Поэтому надо решить обратную задачу соскальзывания тела с полусферы.

Найдем выражение для скорости в зависимости от угла θ:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\theta)$$

Центростремительная сила равна:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

Тело оторвется от поверхности сферы, когда реакция опоры станет равной нулю:

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg\cos\theta_m$$

Заменяя скорость из (9), находим косинус угла, при котором происходит отрыв:

$$2mg(1-\cos\theta_m) = mg\cos\theta_m \Rightarrow \cos\theta_m = \frac{2}{3} \quad (10)$$

Далее надо рассмотреть движение тела, брошенного под углом к горизонту ($\cos\theta_m = \frac{2}{3}$) с высоты

$H = R\cos\theta_m = \frac{2}{3}R$ с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{Rg\cos\theta_m}$ и определить все необходимые параметры.

Приведем только уравнения, с которых надо начать решение этой задачи:

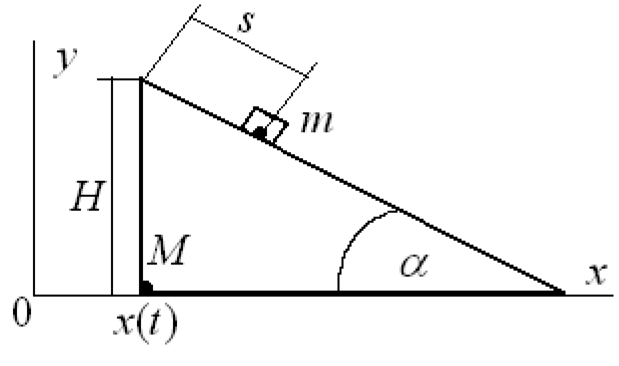
$$v_x = v_0\cos\theta_m$$

$$v_y = -v_0\sin\theta_m - gt$$

Все остальное сделаете сами в качестве закрепления разобранного материала.

<u>Движение шайбы по незакрепленному клину</u>. На покоящийся на гладкой горизонтальной поверхности клин массой M положили на самый верх маленькую шайбу массой m. Трения между всеми телами отсутствует. Чему будет равна скорость шайбы в самом низу клина? Геометрические величины известны.

Так как нет трения, то полная механическая энергия двух тел сохраняется. Выберем ноль потенциальной энергии в вершине клина. И для удобства вычислений будем считать, что масса клина сосредоточена в отмеченной точке на рисунке. Тогда уравнение закона сохранения энергии будет иметь вид:



$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - MgH - mgs\sin\alpha = -MgH$$

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - mgs\sin\alpha = 0$$

$$\frac{MV_x^2}{2}+\frac{m(v_x^2+v_x^2)}{2}=mgs\sin\alpha$$

В горизонтальном направлении нет внешних сил, действующих на систему. Следовательно, должна сохраняться проекция на это направление суммарного импульса системы:

$$MV_x+mv_x=0$$

Таким образом, мы имеем два уравнения с тремя неизвестными проекциями скоростей тел. Третье необходимое для решения уравнение можно получить из условия, что шайба все время движения скользит по поверхности клина. На приведенном рисунке показано относительное положение тел в некоторый произвольный момент времени. Координата клина в этот момент равна $x(t)$, координаты шайбы равны:

$$x_{ш}(t)=x(t)+s(t)\cos\alpha$$

$$y_{ш}=-s(t)\sin\alpha$$

Продифференцировав их по времени найдем уравнение связи между скоростями тел:

$$v_x=V_x+\dot{s}(t)\cos\alpha$$

$$v_y=-\dot{s}(t)\sin\alpha$$

Далее задачу можно решать разными методами. Можно, например, в законы сохранения подставить проекции скоростей шайбы и получить систему двух уравнений с двумя неизвестными V_x и $\dot{s}(t)$. Можно исключить V_x и получить систему относительно других неизвестных. Что приведет к более коротким вычислениям, догадаться сразу в любой задаче не удается. Лучший способ найти самое красивое решение очень прост. Решаете одним способом, потом другим, затем сравниваете, выбираете и хвастаетесь: «а у меня короче».

Попробуем подставить в законы сохранения проекции скоростей шайбы рр последних двух уравнений связи. Для закона сохранения энергии получаем уравнение:

$$\frac{MV_x^2}{2}+\frac{m(V_x+\dot{s}(t)\cos\alpha)^2}{2}+\frac{m\dot{s}^2\sin^2\alpha}{2}=mgs\sin\alpha$$

$$\frac{(M+m)V_x^2}{2}+mV_x\dot{s}(t)\cos\alpha+\frac{m\dot{s}^2\cos^2\alpha}{2}+\frac{m\dot{s}^2\sin^2\alpha}{2}=mgs\sin\alpha$$

$$\frac{(M+m)V_x^2}{2}+mV_x\dot{s}(t)\cos\alpha+\frac{m\dot{s}^2}{2}=mgs\sin\alpha$$

Для закона сохранения проекции импульса получаем второе уравнение:

$$MV_x+m(V_x+\dot{s}(t)\cos\alpha)=0$$

$$(M+m)V_x=-m\dot{s}\cos\alpha$$

Таким образом, получили систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{(M+m)V_x^2}{2}+mV_x\dot{s}(t)\cos\alpha+\frac{m\dot{s}^2}{2}=mgs\sin\alpha$$

$$(M+m)V_x=-m\dot{s}\cos\alpha$$

Разрешаем систему относительно скорости клина:

$$\frac{(M+m)V_x^2}{2}-(M+m)V_x^2+\frac{(M+m)^2V_x^2}{2m\cos^2\alpha}=mgs\sin\alpha$$

$$(\frac{M+m}{m\cos^2\alpha}-1)\frac{V_x^2}{2}=\frac{m}{M+m}gs(t)\sin\alpha$$

$$(\frac{M}{m\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}-1)\frac{V_x^2}{2}=(\frac{M}{m\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})\frac{V_x^2}{2}=\frac{m}{M+m}gs\sin\alpha$$

Из последнего выражения находим кинетическую энергию клина в произвольный момент времени:

$$\frac{MV_{x,кон}^2}{2}=\frac{mMgs(t)\sin\alpha\cos^2\alpha}{(M+m)(\sin^2\alpha+\frac{M}{m})}$$

Когда шайба будет в самом низу, скорость клина будет равна:

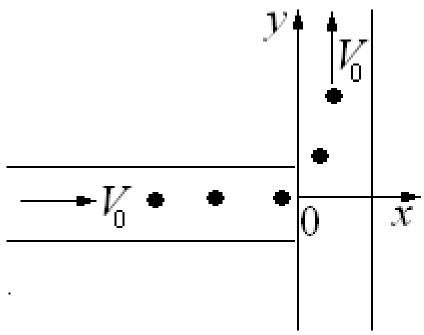
$$\frac{MV_{x,кон}^2}{2}=\frac{mMgH\cos^2\alpha}{(M+m)(\sin^2\alpha+\frac{M}{m})}$$

Кинетическую энергию шайбы можно определить из второй формулы закона сохранения, с которого мы начали решать задачу:

$$\frac{mv^2}{2}=mgs\sin\alpha-\frac{MV^2}{2}=mgs\sin\alpha-\frac{MV_x^{\ 2}}{2}$$

$$\frac{mv^2}{2}=mgH-\frac{mMgH\alpha\cos^2\alpha}{(M+m)(\sin^2\alpha+\frac{M}{m})}=mgH(1-\frac{M\alpha\cos^2\alpha}{(M+m)(\sin^2\alpha+\frac{M}{m})})$$

Транспортер. Имеются два транспортера, ленты которых двигаются с одинаковой скоростью. Каков должен быть коэффициент трения скольжения между лентой транспортера и деталью (будем ее считать маленькой шайбой), чтобы деталь, соскочив с одного транспортера, остановилась на средине ленты второго транспортера? Ширина ленты транспортера равна b. На какое расстояние переместится ленте второго транспортера за время движения шайбы относительно ее? На каком расстоянии остановится шайба от точки входа на ленту (считая его вдоль оси транспортера)? Скорость движения лент известна.



Перейдем в систему отсчета ленты второго транспортера. В этой системе шайба в начальный момент будет иметь две взаимно перпендикулярные скорости равные v_0. Поэтому шайба будет двигаться под углом $\pi/4$ к оси транспортера. До остановки она должна пройти путь равный:

$$S=\frac{\sqrt{2}d}{2}$$

В этой системе отсчета начальная энергия шайбы равна:

$$E_0=\frac{m}{2}\cdot 2v_0^2=mv_0^2$$

Приравнивая ее работе силы трения, находим искомый коэффициент трения:

$$mv_0^2=kmgS \qquad k=\frac{v_0^2}{gS}=\frac{v_0^2\sqrt{2}}{gd}$$

Для того чтобы ответить на второй вопрос, надо найти время движения шайбы. Движение равнозамедленное, поэтому можно обойтись без пояснений:

$$\tau=\sqrt{\frac{2S}{a}}=\sqrt{\frac{d\sqrt{2}}{kg}}=\sqrt{\frac{d\sqrt{2}gd}{gv_0^2\sqrt{2}}}=\frac{d}{v_0}$$

Умножив скорость транспортера на время движения шайбы, найдем на какое расстояние за это время сместится лента транспортера:

$$S_{tr}=v_0\tau=d$$

Шайба остановится на меньшем расстоянии, чем это, так как она двигалась с проскальзыванием. Это расстояние можно найти, используя формулу для равноускоренного движения:

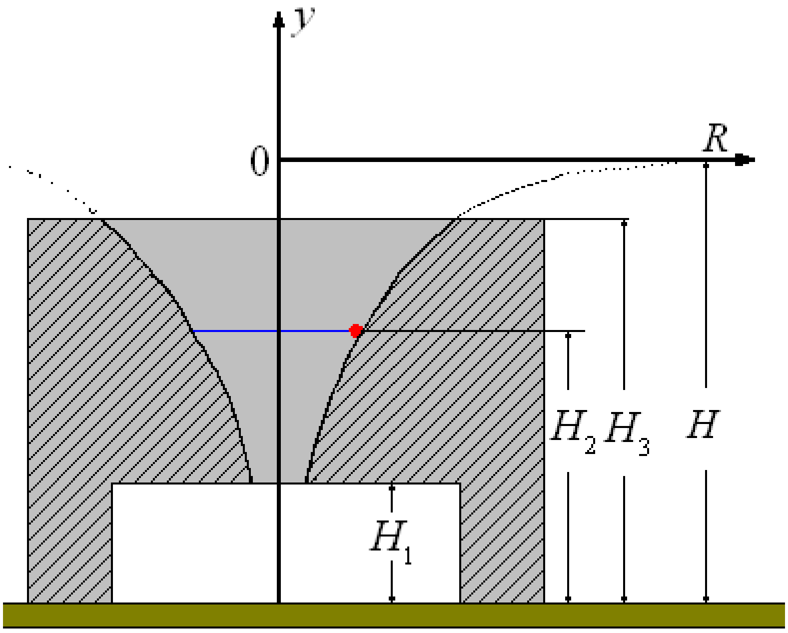
$$S_{\|ш}=a_{\|}\frac{\tau^2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}kg\frac{\tau^2}{2}=\frac{\sqrt{2}g}{4}\frac{v_0^2\sqrt{2}}{gd}(\frac{d}{v_0})^2=\frac{d}{2}$$

А если подумать, то и вычислять не надо, так как мы знаем это расстояние в системе ленты транспортера. Его проекция на ось транспортера равна:

$$S_y=S\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{d}{2}$$

Пока шайба в системе ленты сместилась на это расстояние, сама лента за это время сместилась в противоположном направлении на d. Смещение шайбы равно их разности:

$$S_{\|ш}=S_{tr}-S_y=\frac{d}{2}.$$



Хитрая воронка с «философским уклоном».

На рисунке в разрезе показана цилиндрическая втулка, внутренняя поверхность которой имеет профиль

$$y=-\frac{C}{R^2}$$

В ней по круговой орбите без трения скользит точечное тело (частица) на некоторой высоте H_2.

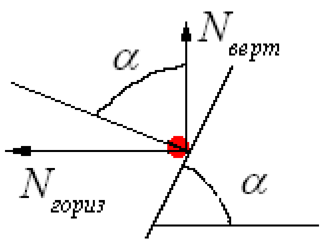
Как будет двигаться частица, если ему сообщить бесконечно малую вертикальную скорость?

Чтобы тело двигалось по круговой орбите необходимо выполнение двух равенств:

$$N_{верт}=mg$$

$$N_{гориз}=\frac{mv^2}{R}$$

Отношение левых частей равенств можно найти, используя геометрический смысл производной (пояснено на рисунке):



$$\tan\alpha=\frac{dy}{dR}=\frac{2C}{R^3}$$

Таким образом, мы получили условие, связывающее скорость частицы с радиусом ее орбиты:

$$v^2=\frac{2Cg}{R^2}$$

Полная энергия частицы, если ноль потенциальной энергии выбрать при $y=0$ равна:

$$E=\frac{mv^2}{2}+mgy=\frac{Cgm}{R^2}+mgy$$

Отношение C/R^2 можно выразить из уравнения кривой профиля воронки.

Таким образом, полная энергия частицы при любом радиусе траектории постоянна и равна:

$$E=-mgy+mgy=0$$

Из этого следует, что движение частицы будет неустойчивым и при малейшем изменении ее скорости она вылетит из втулки.

Найдем скорости вылета частицы из втулки, используя формулу:

$$v = \sqrt{\frac{2Cg}{R^2}} = \sqrt{-2gy}$$

Получим:

$$v_{1,3} = \sqrt{2g(H - H_{1,3})}$$

Задача решена, перейдем к «философскому уклону». Забудем о воронке, а будем считать, что энергия взаимодействия двух частиц зависит от расстояния обратно пропорционально кубу расстояния и отрицательна:

$$U = -\frac{C}{r^2}$$

Тогда между частицами действует сила притяжения равная:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\frac{2C}{r^3}$$

Предположим, что одна масса одной частицы много больше другой, и рассмотрим движение легкой частицы по круговой орбите вокруг тяжелой (которую можно считать неподвижной в этом приближении). Скорость движения по орбите связана с радиусом окружности соотношением:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{2C}{r^3}$$

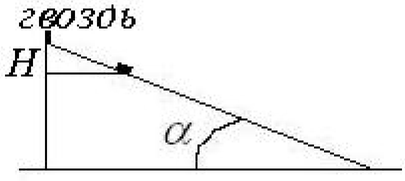
Используя его, найдем полную энергию частицы:

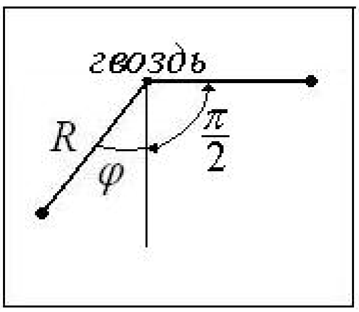
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{2C}{r^2} = -U \qquad E = \frac{mv^2}{2} + U = 0$$

Движение, как и рассмотренное в задаче выше, не будет устойчивым. Если понимать под одной частицей Солнце, а под другой Землю, то нас бы не существовало. Или Земля улетела бы в космос или бы упало на Солнце. Если под тяжелой частицей понимать протон, а под легкой электрон, то есть система является атомом водорода (в простейшей теории атома Н. Бора), такой атом не смог долго существовать. Электрон не смог бы упасть на ядро, так как его скорость ограничена, хотя теорией относительности А. Эйнштейна, но ему ничего не мешало распасться.

Так что, Создатель хорошо знал физику, когда создавал Мир, сделав фундаментальные силы взаимодействия (закон Всемирного тяготения и закон Кулона) пропорциональные обратному квадрату расстояния, а не его кубу.

Шайба-маятник на наклонной плоскости. На наклонной плоскости вбили гвоздь и прикрепили к нему нитью маленькую шайбу. Затем отвели на натянутой нити шайбу так, чтобы гвоздь и она были на одинаковой высоте. Масса шайбы, длина нити и коэффициент трения скольжения известны. На какой максимальный угол может отклониться нить, после прохождения шайбой нижней точки, в которой шайба остановиться и не начнет скользить снова в низ. Чему при этом должен быть равен угол наклонной плоскости?





Маятник остановится, когда работа силы трения будет равна приращению потенциальной энергии маятника:

$$-mgH = -kmgR(\frac{\pi}{2} + \varphi)\cos\alpha$$

Нулевой уровень потенциальной энергии был выбран в начальном положении мятника. Величину высоты, на которое тело опустилось, можно выразить через длину нити:

$$H = R\sin\alpha\cos\varphi$$

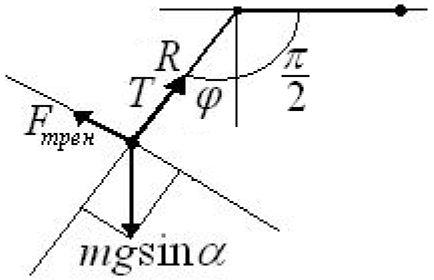
Подставив ее в предыдущее уравнение, получим соотношение для углов и коэффициента трения скольжения:

$$R\sin\alpha\cos\varphi = kR(\frac{\pi}{2} + \varphi)\cos\alpha$$

$$\tan\alpha\cos\varphi = k(\frac{\pi}{2}+\varphi)$$

После остановки маятника возможны два варианта: 1. Маятник будет и впредь покоится в этом положении, 2. Маятник начнет скользить вновь.

Нам нужен первый вариант. Сделаем еще один рисунок. Маятник, если он начнет двигаться, начнет смещаться по дуге окружности. Натяжение нити будет скомпенсирована проекцией «скатывающей» силы. По направлению движения будет действовать вторая проекция «скатывающей» силы. Против движения будет направлена сила трения. Сила трения покоя в предельном случае можно считать равной силе трения скольжения. Поэтому маятник будет покоиться при выполнении условия:



$$F_{трен.\max} = kmg\cos\alpha = mg\sin\alpha\sin\varphi$$
$$k\cos\alpha = \sin\alpha\sin\varphi$$
$$k = \tan\alpha\sin\varphi$$

Коэффициент трения и тангенс угла наклона плоскости мы можем исключить, воспользовавшись ранее найденным выражением:

$$\frac{\pi}{2}+\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Далее это уравнение следует решить численно любым методом. Мы этого делать здесь не будем, и предположим, что максимальный угол отклонения найден. Определим, каким должен быть при этом угле угол наклонной плоскости:

$$\tan\alpha = \frac{k}{\cos\varphi}(\frac{\pi}{2}+\varphi)$$

Из этого уравнения можно найти искомый угол α. Но обязательно при этом должно выполняться неравенство:

$$\tan\alpha > k$$

В противном случае маятник не начнет скользить из начального положения.

7. Столкновения двух тел и задачи, сводящиеся к ним.

<u>Закон сохранения импульса и движение системы центра масс</u>. Рассмотрим систему *N* тел. Написав для каждого тела можно уравнение движения, получим систему *N* связанных уравнений:

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \bullet\bullet\bullet + \boldsymbol{F}_{1N} + \boldsymbol{F}_{\ 1}$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}_N}{dt} = \boldsymbol{F}_{N1} + \boldsymbol{F}_{N2} + \bullet\bullet\bullet + \boldsymbol{F}_{N,N-1} + \boldsymbol{F}_{\ N}$$

О принятых обозначениях в уравнения системы. Силы с двумя индексами являются внутренними силами, то есть это силы взаимодействия между телами системы. Первый индекс это номер тела, на которое действует сила, второй индекс – со стороны какого тела действует сила. Силы с одним индексом являются внешними. Они действуют со стороны тел, не входящих в систему. В частности это силы возникают, если тело системы находится поле, которое мы считаем внешним. Например, гравитационные силы между Луной и Землей при рассмотрении системы этих двух тел являются внутренними, а силы, действующие на них возникающие из-за наличия гравитационного поля Солнца, являются внешними. Индекс у вешних сил – номер тела, на которой ока действует (эта сила – векторная сумма всех сил, приложенных к телу, если на тело действует несколько сил).

Сложим все уравнения, учтя при этом, что все силы, действующие между телами системы, при суммировании дадут нуль. Это следует из 3-го закона Ньютона: $\boldsymbol{F}_{nk} = -\boldsymbol{F}_{ki}$. Силы в системе уравнений с одним индексом $\boldsymbol{F}_n$ – внешние силы, то есть силы, возникающие при взаимодействии тел рассматриваемой системы тел с телами, не входящие в эту систему. Причем, например, под $\boldsymbol{F}_n$ надо понимать сумму всех внешних сил, действующих на тело n . В результате сложения получим:

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} + \cdots + \frac{d\boldsymbol{p}_N}{dt} = \boldsymbol{F}_1 + \cdots + \boldsymbol{F}_N,$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{F}_n$$

Таким образом, производная по времени от суммарного импульса всей системе равна сумме всех внешних сил. Если система замкнутая, то внешних сил нет. В таком случае производная равна нулю, а сам суммарный импульс всех тел или импульс системы является постоянной величиной. Это утверждение и носит название закона сохранения импульса. Векторное равенство можно написать в виде трех равенств (проекций на оси координат):

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_{n=1}^{N} F_{xn}, \quad \frac{dP_y}{dt} = \sum_{n=1}^{N} F_{yn}, \quad \frac{dP_z}{dt} = \sum_{n=1}^{N} F_{zn}$$

Если в каком либо равенстве отсутствуют силы или их сумма равна нулю, то будет сохраняться эта проекция импульса системы тел.

Система центра масс. При решении многих задач механики описание движения частиц целесообразно переходить в так называемую систему центра масс. Особенно упрощаются решения задач для замкнутых систем. Выше, было показано, что для таких систем имеет место закон сохранения суммарного импульса системы:

$$\boldsymbol{P} = \sum_n \boldsymbol{p}_n = \sum_n m_n \boldsymbol{v}_n = const.$$

Очевидно, что «лучшая» константа нуль. Проще ничего не придумаешь. Пусть выше приведенное равенство написано для лабораторной системы координат, то есть для той, в которой находимся и мы с вами. И в этой системе суммарный импульс не равен нулю. Найдем систему координат, которая каким-то образом будет двигаться относительно нас с постоянной скоростью $\boldsymbol{V}_c$, и в которой суммарный импульс станет равным нулю. Эта система и называется системой центра масс (С-система). Обозначим скорости частиц в ней $\boldsymbol{v}_{cn}$, для скоростей в лабораторной системе. Согласно преобразованиям Галилея имеем связь между ними:

$$\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_{cn} + \boldsymbol{V}_c$$

По определению импульс в С-системе равен:

$$\boldsymbol{P}_c = \sum_n \boldsymbol{p}_{cn}$$

Комбинируя, получим:

$$\boldsymbol{P}_c = \sum_n \boldsymbol{p}_{cn} = \sum_n m_n \boldsymbol{v}_n - \sum_n m_n \boldsymbol{V}_c$$

Приравняв полученное соотношение нулю, получим скорость С-системы:

$$\boldsymbol{V}_c = \frac{\sum_n m_n \boldsymbol{v}_n}{\sum_n m_n}$$

Скорости частиц в С – системе находятся из выражения:

$$\boldsymbol{v}_{cn} = \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{V}_c$$

Ниже мы будем рассматривать столкновения двух частиц. Поэтому выпишем необходимые формулы для этого частного случая:

$$\boldsymbol{V}_c = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boldsymbol{v}_{c1} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}_c = \boldsymbol{v}_1 - \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\boldsymbol{v}_{c2} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}_c = \boldsymbol{v}_2 - \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

Стоит обратить внимание, что последнее выражение можно было не выводить, а просто поменять индексы 1 на 2 и 2 на 1, так как задача симметрична по ним. Если скорости частиц умножить на соответствующие, то получим их импульсы в системе центра масс:

$$\boldsymbol{p}_{c1} = \frac{m_1 m_2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)}{m_1 + m_2} = \mu(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$$

$$\boldsymbol{p}_{c2} = \frac{m_1 m_2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)}{m_1 + m_2} = -\mu(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$$

Как и должно быть импульсы равны по модулю и противоположны по направлению, то есть суммарный импульс равен нулю. Величина μ называется приведенной массой двух частиц.

<u>Движение центра масс системы</u>. Если продифференцировать скорость центра масс по времени, получим:

$$\dot{\boldsymbol{V}}_c = \frac{\sum_n m_n \boldsymbol{a}_n}{\sum_n m_n} = \frac{\sum_n \boldsymbol{F}_n}{\sum_n m_n}$$

Замечания к полученному результату. В числителе стоят только внешние силы (внутренние при сложении дали нуль). Из последнего выражения следует, что при отсутствии внешних сил ускорение центра масс равно нулю или, иначе, скорость центра масс замкнутой системы сохраняется. Это утверждение полезно запомнить в виде:

$$M\boldsymbol{V}_c = const, \text{ где } M = \sum_n m_n$$

Только не называйте произведение массу всех тел системы на скорость центра масс импульсом системы!

Если сумма внешних сил не равна нулю, то уравнение движения для центра масс системы имеет такой же вид, как и второй закон Ньютона для тела:

$$M\boldsymbol{a}_c = \sum_n \boldsymbol{F}_n$$

Координата центра масс системы находится из выражения:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_n m_n \boldsymbol{r}_n}{\sum_n m_n}$$

Если последнее выражение продифференцировать по времени, то, естественно, мы получим скорость центра масс системы.

<u>Виды столкновений.</u>

Далее мы ограничимся рассмотрением столкновений двух частиц (то есть точечных масс или материальны точек, что все одно и то же). Однако полученные формулы могут быть использованы для описания взаимодействия макроскопических твердых тел. Ниже будут приведены примеры таких задач. Столкновения можно подразделить на типы:

1. Абсолютно упругое столкновение. При таком столкновении сохраняется не только суммарный импульс, но и суммарная кинетическая энергия частиц.
2. Абсолютно неупругое столкновение. Суммарный импульс сохраняется при любом столкновении. Механическая энергия не сохраняется. При таком столкновении частицы «слипаются» и продолжают двигаться как единое целое. Только не надо думать, что частицы стали представлять собой единое тело, термин применен для лучшего запоминания.

3. Реальное столкновение. Первый вид столкновения является некоторым приближением. При реальных столкновениях практически всегда механическая энергия изменяется. Причем она не всегда уменьшается, переходя в другие формы энергии. Бывают столкновения, при которых внутренняя энергия какой либо частицы переходит в кинетическую энергию движения частиц. Но с этим вы познакомитесь только в пятом семестре. Когда изменением энергии можно пренебречь, мы и имеем первый вид столкновения.

Центральное столкновение двух частиц.

Прежде всего, определимся, что понимается под названием центральное столкновение. Ниже под этим определением понимается такое столкновение, когда в С-системе частицы двигаются по одной прямой навстречу друг другу и после столкновения импульсы частиц направлены по той же прямой. В лабораторной системе частицы могут двигаться под углом, но так, чтобы они столкнулись. И второе важное замечание. Не надо под столкновением частиц понимать непосредственное их столкновение, за исключением случая, когда образуется одна частица из двух. Например, заряженные частицы одноименным зарядом, летящие навстречу, после сближения до определенного расстояния начинают разлетаться. При взаимодействиях на расстоянии под начальными и конечными скоростями следует понимать скорости на достаточно больших расстояниях, когда потенциальной энергией взаимодействия можно пренебречь.

Начнем с самого простого случая: абсолютно неупругого столкновения. В С-системе обе частицы с равными по модулю импульсами двигаются навстречу друг другу. После столкновения они «слипаются» и могут двигаться как единое целое, то есть с одной и той же скоростью. Но эта скорость в С-системе должна быть равна нулю, иначе суммарный импульс не сохраниться. До столкновения он был равен нулю по определению С-системы. Следовательно, в лабораторной системе отсчета образовавшаяся частица массой $m_\Sigma = m_1 + m_2$ будет двигаться со скоростью системы центра масс:

$$\boldsymbol{V}_c = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Найдем убыль суммарной кинетической энергии при таком столкновении:

$$-\Delta E = E_{нач} - E_{кон} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)V_c^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2} \bullet \frac{(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

После тривиальных алгебраических преобразований получим:

$$-\Delta E = \frac{\mu}{2}(v_1^2 + v_2^2 - 2\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2) = \frac{\mu}{2}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2$$

Таким образом, в системе полная кинетическая энергия уменьшается на величину пропорциональной приведенной массе частиц и квадрату их относительной скорости. Какую скорость в скобках писать на первом месте безразлично, так как выражение возводится в квадрат. В частном случае движения частиц по одной прямой в лабораторной системе в скобках будет стоять сумма модулей скоростей, если частицы двигаются навстречу, и их разность, если одна частица догоняет другую.

Абсолютно упругое столкновение. Воспользуемся формулами полученными выше. Для удобства выпишем формулы для импульсов частиц до столкновения:

$$\boldsymbol{p}_{c1} = \frac{m_1 m_2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)}{m_1 + m_2} = \mu(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2), \quad \boldsymbol{p}_{c2} = \frac{m_1 m_2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)}{m_1 + m_2} = -\mu(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2).$$

Начальные скорости до столкновения в лабораторной системе и массы частиц естественно заданы. Так как сохраняется суммарный импульс (равный нулю), то после столкновения импульсы будут равны по модулю и противоположны по направлению. А так как сохраняется и суммарная кинетическая энергия, то модули импульсов останутся такими же. Поясним это:

$$E_c = \frac{p_{c1}^2}{2m_1} + \frac{p_{c2}^2}{2m_2} = \frac{p_c^{\ 2}}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), \; E'_c = \frac{p'^2_c}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), \; E_c = E'_c \Rightarrow p_c^{\ 2} = p'^2_c \Rightarrow p_c = p'_c$$

Штрихом помечены величины после столкновения.
Следовательно, импульсы частиц после столкновения просто будут противоположны по знаку импульсам частиц до столкновения. Найдем скорость первой частицы после столкновения: в С-системе:

$$\boldsymbol{v}'_{c1} = -\frac{\boldsymbol{p}_{c1}}{m_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$$

Чтобы получить искомую скорость после столкновения в лабораторной, то есть в исходной системе отсчета, надо к последнему выражению добавить скорость центра масс:

$$\boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{v}'_{c1} + \boldsymbol{V}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)\boldsymbol{v}_1 + 2m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Чтобы получить скорость второй частицы, надо поменять индексы в (49):

$$\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}'_{c2} + \boldsymbol{V}_c = \frac{(m_2 - m_1)\boldsymbol{v}_2 + 2m_1\boldsymbol{v}_1}{m_1 + m_2}$$

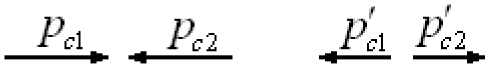
Всегда полезно посмотреть предельные случаи, ответ на которые вы знаете. Из школьного курса известно, что при столкновении первой частицы с покоящейся такой же по массе частицей, они обмениваются скоростями. Если при выводе не сделаны глупые ошибки, то из полученных формул должен следовать такой же ответ. Подставляя $m = m_1 = m_2$ и $\boldsymbol{v}_2 = 0$, получим: $\boldsymbol{v}_1 = 0$ и $\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_1$. Если 1 – груженый самосвал, 2 – раззява, то получим (при $m_1 \gg m_2$, $\boldsymbol{v}_1 \gg \boldsymbol{v}_2$): $\boldsymbol{v}'_1 \approx \boldsymbol{v}'_2 \approx \boldsymbol{v}_1$, что вполне согласуется со здравым смыслом.

Реальное столкновение. Закон сохранения полной энергии в системе центра масс:

$$E_c = \frac{p_{c1}^2}{2m_1} + \frac{p_{c2}^2}{2m_2} = \frac{{p_c}^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \qquad E'_c = \frac{p_c'^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + \Delta E$$

Из которого находим связь между модулями импульсов частиц до и после столкновения:

$$p_c'^2 = p_c^2 - 2\mu\Delta E$$



Если происходит потеря энергии, то естественно, что величина импульса уменьшается. Для лучшего понимания происходящего процесс показан на рисунке.

Соотношение между векторами импульсов частиц после столкновения имеет вид:

$$\boldsymbol{p}'_{c1} = -\boldsymbol{p}'_{c2} = -\boldsymbol{n}\sqrt{p_c^2 - 2\mu\Delta E}$$

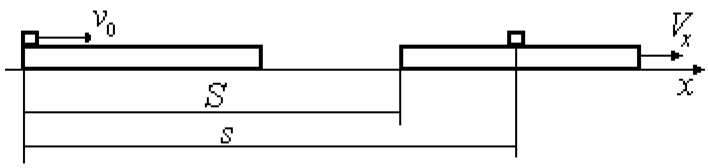
где **n** – единичный вектор, направленный по направлению скорости первой частицы в С-системе до столкновения. Нахождение скоростей частиц после столкновения аналогично их выводу для абсолютно упругого столкновения. Убыль энергии не зависит от системы отсчета.

Задача 1. Начнем с простенького дополнительного вопроса на экзамене. С известной высоты маленькая шайба соскальзывает на горизонтальный брусок известной длины. Между бруском и горизонтальной поверхностью трения нет, между бруском и шайбой – есть. Шайба останавливается на средине бруска. И так, известны две величины: H и L. Надо определить скорость системы, кода прекратится движение шайбы относительно бруска.

И этот вопрос вызывал трудность, как выяснилось, из-за того, что пытались куда-то «пристроить» условие, что шайба остановилась на его середине. Подвела школьная привычка – все заданные величины нужны для решения задачи. Надо отвыкать от этого. В реальных экспериментах надо фиксировать как можно больше параметров. Это не займет много времени. Затем при обсчете, лишние просто не будете использовать. А вот, если выяснится, что чего-то нахватает, то весь опыт придется повторять вновь.
Решение пишется сразу, так как эта задача, по сути, абсолютно неупругое столкновение:

$$V_x = \frac{mv_0}{m + M}$$

в котором v_0 - скорость шайбы, с которой она въехала на брусок, m - ее масса, M - масса бруска.



На рисунке изображено положение в момент, когда шайба въехала на брусок, и в момент, когда их скорости сравнялись. Расширим рассмотрение примера – определим расстояние S, на котором шайба перестала скользить по бруску.

Решим, используя законы Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kmg \qquad \dot{x} = v_0 - kgt$$

$$M\ddot{X} = kmg \qquad \dot{X} = k\frac{m}{M}gt$$

Из последней системы находим время, когда скорости тел сравняются:

$$v_0 - kg\tau = k\frac{m}{M}g\tau \Rightarrow \tau = \frac{v_0 M}{kg(m+M)}$$

Расстояние, которое пройдет брусок, равно:

$$X = k\frac{m}{2M}gt^2 \Rightarrow S = k\frac{m}{2M}g\tau^2 = \frac{mMv_0^2}{2kg(m+M)^2}$$

Коэффициент трения можно найти, используя условие, что шайба остановилась на средине бруска. Для этого найдем пройденный путь шайбы за время τ :

$$x = v_0 t - \frac{kg}{2}t^2 \Rightarrow s = \frac{v_0^2 M}{kg(m+M)} - \frac{v_0^2 M^2}{2kg(m+M)^2}$$

Приравняв разность пройденных путей $L/2$, находим коэффициент трения:

$$\frac{v_0^2 M}{kg(m+M)} - \frac{v_0^2 M^2}{2kg(m+M)^2} - \frac{mMv_0^2}{2kg(m+M)^2} = \frac{L}{2}$$

$$\frac{v_0^2 M}{kg(m+M)} - \frac{v_0^2 M}{2kg(m+M)} = \frac{v_0^2 M}{2kg(m+M)} = \frac{L}{2} \Rightarrow k = \frac{v_0^2 M}{g(m+M)L}$$

Находим требуемый ответ, подставляя полученный коэффициент трения:

$$S = \frac{mMv_0^2}{2g(m+M)^2}\frac{g(m+M)L}{v_0^2 M} \Rightarrow S = \frac{m}{2(m+M)}L$$

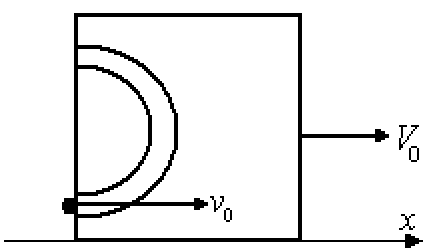
А теперь решим эту же задачу, используя законы сохранения. Начнем с определения коэффициента трения. Из равенства работы силы трения убыли полной энергии системы, следует:

$$kmg\frac{L}{2} = \frac{mMv_0^2}{2(m+m)} \Rightarrow k = \frac{Mv_0^2}{g(m+M)L}$$

Начинаете, как говориться, «чувствовать разницу»? Приравнивая работу силы трения, совершенную над бруском, полученную им кинетическую энергию, находим его путь:

$$kmgS = \frac{M}{2}V_x^2 \Rightarrow \frac{Mv_0^2 mgS}{g(m+M)L} = \frac{m^2 Mv_0^2}{2(m+M)^2} \Rightarrow S = \frac{mL}{2(m+M)}$$

Как видите, второе решение несравнимо проще первого. Совет: всегда подумайте, можно ли решить задачу, используя законы сохранения, или использовать их для нахождения промежуточных величин.



Задача 2. Маленькая шарик массы m с начальной скоростью v_0 влетает в отверстие канала движущегося со скоростью V_0 тела массы M. Скорость шарика достаточна, чтобы вылететь из канала. Отверстия каналов

находятся на расстоянии L. Трение отсутствует везде. Определить скорости тел после вылета шарика (см. рис.).

Решение задачи сводится к реальному столкновению двух тел. Убыль кинетической энергии в рассматриваемом случае равна:

$$\Delta E = mgL$$

В системе центра масс, движущейся со скоростью:

$$\boldsymbol{V}_c = \frac{m\boldsymbol{v}_0 + M\boldsymbol{V}_0}{m+M}$$

импульсы тел равны:

$$\boldsymbol{p}_c = \mu(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{V}_0) \qquad p_c = P_c = \mu(v_0 - V_0)$$
$$\boldsymbol{P}_c = -\mu(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{V}_0)$$

Квадраты импульсов обоих тел равны:

$$p_{cx}^2 = P_{cx}^2 = \mu^2(v_0 - V_0)^2$$

Находим скорости тел в лабораторной системе координат:

$$\boldsymbol{v}' = -\frac{\boldsymbol{n}}{m}\sqrt{\mu^2(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{V}_0)^2 - 2m\mu gL} + \frac{m\boldsymbol{v}_0 + M\boldsymbol{V}_0}{m+M}$$
$$\boldsymbol{V}' = \frac{\boldsymbol{n}}{M}\sqrt{\mu^2(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{V}_0)^2 - 2m\mu gL} + \frac{m\boldsymbol{v}_0 + M\boldsymbol{V}_0}{m+M}$$

Обязательно надо проверить ответ, сводя полученные формулы к известным задачам. Если убыль энергии положить равной нулю, то последние формулы переходят в выше полученные формулы для абсолютно упругого столкновения:

$$\boldsymbol{v}' = -\frac{1}{m}\mu(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{V}_0) + \frac{m\boldsymbol{v}_0 + M\boldsymbol{V}_0}{m+M}$$
$$\boldsymbol{V}' = \frac{1}{M}\mu(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{V}_0) + \frac{m\boldsymbol{v}_0 + M\boldsymbol{V}_0}{m+M}$$

Предположим, что шарик при вылете фактически не имел скорости, то есть $\boldsymbol{v}' = 0$, а начальная скорость тела M была равна нулю. Тогда будем иметь:

$$-\frac{\boldsymbol{n}}{m}\sqrt{\mu^2\boldsymbol{v}_0{}^2 - 2m\mu gL} + \frac{m\boldsymbol{v}_0}{m+M} = 0$$
$$\boldsymbol{V}' = \frac{\boldsymbol{n}}{M}\sqrt{\mu^2\boldsymbol{v}_0{}^2 - 2m\mu gL} + \frac{m\boldsymbol{v}_0}{m+M}$$

Из первого найдем скорость влета шарика:

$$\mu\boldsymbol{v}_0{}^2 - 2mgL = \frac{\mu m^2\boldsymbol{v}_0{}^2}{M^2} \Rightarrow \mu\boldsymbol{v}_0{}^2(1 - \frac{m^2}{M^2}) = 2mgL$$
$$\frac{(M-m)}{M}\boldsymbol{v}_0{}^2 = 2gL \Rightarrow \boldsymbol{v}_0{}^2 = \frac{2M}{M-m}gL$$

А теперь решим эту задачу, предположив сразу, что тело M покоилось

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgL + \frac{MV^2}{2}$$
$$mv_0 = MV$$

Исключая скорость V, находим v_0:

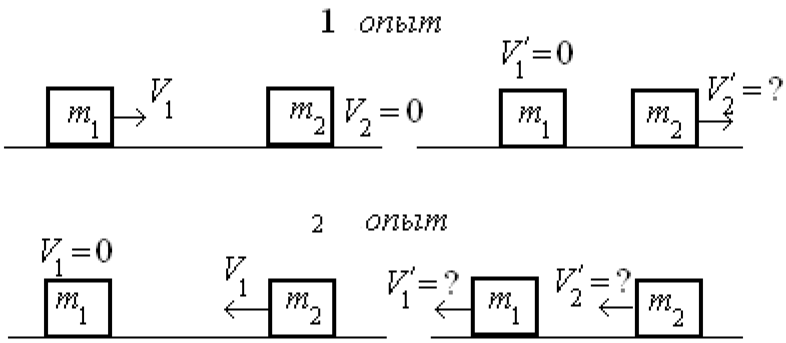
$$v_0^2 = 2gL + \frac{M}{m}(\frac{m}{M})^2 v_0^2 \Rightarrow (1 - \frac{m}{M})v_0^2 = 2gL$$

Таким образом, мы еще раз проверили решение. Если исключить v_0, то легко найти V. Сделайте это сами и сравните с тем, что получается из решения:

$$\boldsymbol{V}' = \frac{\boldsymbol{n}}{M}\sqrt{\mu^2 \boldsymbol{v}_0{}^2 - 2m\mu g L} + \frac{m\boldsymbol{v}_0}{m+M},$$

если в него подставить полученное v_0.

<u>Задача 3</u>. Еще одна задачка на столкновение двух тел. На рисунке показаны известные величины до столкновения (слева) после столкновения (справа) в первом и во втором опытах. Вопросительными знаками – величины, которые надо определить. Массы тел не равны!



Маленькое отступление. Физику дали задание вскипятить чайник. Начальные условия. Пустой чайник на плите. Его действия. Налил воду, поставил на плиту, включил, дождался кипения, выключил, доложил, что задача выполнена. Ту же задачу поставили математику, но с начальными условиями: чайник с водой на плите. Его действия: вылил воду, поставил на плиту, доложил, что задача решена, так как он свел ее к известной.

Но метод сведения задачи к известной заслуживает того, чтобы его разобрать, а анекдот – для лучшего его запоминания. Выше сформулированная задача решается проще всего именно этим методом.

Начнем решать. Скорость V_2' находится из закона сохранения импульса:

$$m_1 V_1 = m_2 V_2' \Rightarrow V_2' = \frac{m_1}{m_2} V_1$$

Далее перейдем в систему координат, движущуюся влево со скоростью V_1. В этой системе задача переходит в предыдущую, решение которой мы знаем. Осталось вернуться в исходную систему:

$$V_1' = -V_1$$

$$V_2' = \frac{m_1}{m_2} V_1 - V_1 = (\frac{m_1}{m_2} - 1) V_1$$

Ответы написаны в проекциях на ось, направленную слева направо. Обратите внимание, что при равенстве масс тел они переходят в формулы, описывающие абсолютно упругое столкновение, при котором происходит обмен скоростями.

Интересно определить соотношение масс тел, чтобы могло реализоваться такое движение. Это можно определить из закона сохранения энергии. Начальная кинетическая энергия при таком столкновении должна быть больше конечной. Напишем это условие:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} \geq \frac{m_2 V_2'^2}{2} \Rightarrow m_1 V_1^2 \geq m_2 (\frac{m_1}{m_2})^2 V_1^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow m_2 > m_1$$

Равенство отброшено по той причине, что массы тел по условии не равны.

Предыдущую задачу тоже было бы проще решать, перейдя систему, в которой тело M покоится.

<u>Умные шарики, не то, что некоторые эллипсы</u>. Есть демонстрация, которую показывают на лекциях при объяснении законов сохранения. На длинных одинаковых по длине нитях подвешены в один ряд пять одинаковых шариков из упругого материала. Шарики должны быть подвешены так, чтобы между ними не было зазора. Так как идеально точно, так чтобы центры шариков находились на одной прямой, сделать не удается, то каждый шарик подвешивается на двух нитях. Затем отводят один шарик и отпускают без толчка. На рисунке показано, как двигаются шарики после столкновения (во времени).

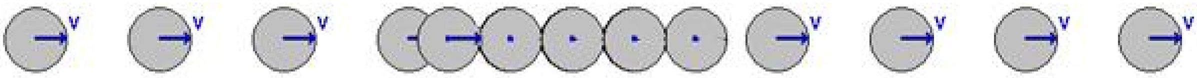
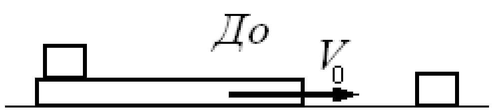
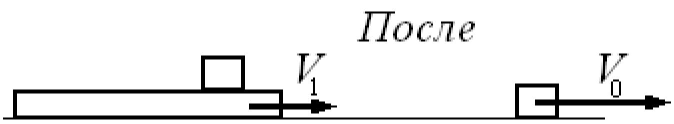


Рисунок представляет собой скриншот с окна программы «Живая физика». Между прочим, вы можете практически все задачи посмотреть «живьем» в ней. Ее можно скачать с сайта www.physics-vargin.net или с www.vargin.mephi.ru . Вернемся к рисунку. Четыре шарика без стрелки вектора скорости неподвижные, пятый слева показан в самый момент столкновения. Он затем останавливается, вновь получается четыре неподвижных шарика, а крайний справа начинает двигаться со скоростью налетевшего шарика.

Если отвести вместе два шарика, то после столкновения три останутся неподвижными, а два крайних справа начнут двигаться. Как видите, шарики умные, они знают и закон сохранения импульса (точнее, закон сохранения момента импульса), и закон сохранения энергии.

Двойной удар. По горизонтальной поверхности движется брусок лежащая на нем шайба. На пути бруска лежит кубик. Трения между бруском и кубиком с поверхностью нет. Между шайбой и бруском есть трение. Происходит абсолютно упругое столкновение. Массы всех трех тел равны и известны. С какой относительной скоростью будет двигаться кубик и брусок с остановившейся на нем шайбой? Начальная скорость бруска с покоящейся на нем шайбой известна (см. поясняющий рисунок).





При упругом столкновении брусок и кубик «обменяются» скоростями, так как их массы равны. Лежащая на нем шайба на столкновение не повлияет. Но так как она в момент столкновения имела скорость бруска, то после столкновения она продолжит движение по остановившемуся с бруску со скоростью v_0. В системе центра масс бруска и шайбы они начинают «сближаться» с одинаковыми скоростями и из-за наличия трения в системе их центры масс они остановятся. В результате они будут двигаться относительно поверхности со скоростью их центра масс равной:

$$v_1 = \frac{mv_0}{2m} = \frac{v_0}{2}$$

Таким образом, искомая относительная скорость равна:

$$v_{отн} = v_0 - \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2}$$

Полезно рассмотреть в этой задаче, как выполняется закон сохранения полной энергии систему трех тел. В начальный момент энергия системы была равна:

$$E_0 = \frac{2mv_0^2}{2} = mv_0^2$$

Конечная кинетическая энергия системы, после окончания относительного движения шайбы по брусу, равна:

$$E' = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{2m}{2} \cdot \frac{v_0^2}{4} = \frac{3mv_0^2}{4}$$

При движении шайбы по брусу диссипация механической энергии равна:

$$\Delta E = \frac{\mu v_0^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot v_0^2 = \frac{mv_0^2}{4}$$

Таким образом, полная энергия сохраняется:

$$E_0 = E' + \Delta E$$

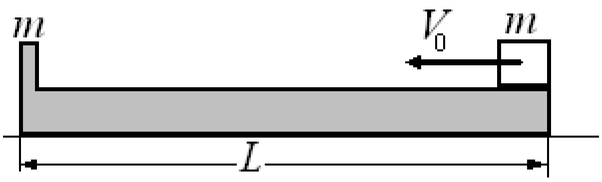
Легко проверить и сохранения импульса системы.

Задачи, которые надо решать в уме. Эти задачи приведены, чтобы вы могли проверить, как вы усвоили предыдущий материал.

1. Две разных по массе шайбы скреплены невесомой пружиной. Когда пружина была не деформирована, более тяжелой шайбе сообщили некоторую скорость по направлению к другой шайбе. Во втором опыте такую же скорость сообщили более легкой шайбе. Найти отношения минимальных расстояний между шайбами в процессе их движения. Все необходимые величины можете считать известными. Трения нет.

Ответ: отношение равно единице.

2. Брус покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Шайбе, лежащей на нем, сообщили скорость, направленную вдоль бруса. Между шайбой и брусом есть трение. На конце бруса имеется выступ, с которым шайба сталкивается. Улар считать абсолютно упругим. Известно, что шайба останавливается на конце (в том же месте, где ей сообщили скорость). Размерами шайбы и выступа пренебречь. Величины, показанные на рисунке, известны. Чему равен коэффициент трения скольжения?



Ответ пишется (чтобы не ошибиться) в таком виде:

$$2\cdot\frac{m}{2}(\frac{v_0}{2})^2 = 2kmg$$

8. Движение тел по криволинейной траектории.

Задача. Задан радиус-вектор частицы как функция времени:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x b\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y b\sin\varphi + \boldsymbol{e}_x b\varphi \qquad \varphi = \omega t, \qquad b = const, \qquad \omega = const$$

Угол φ отсчитывается от оси x к оси y (против направления часовой стрелке). Определить нормальные и тангенциальные ускорения частицы при значениях φ равным:

$$\varphi_1 = \pi/4, \quad \varphi_2 = \pi/2, \quad \varphi_3 = 3\pi/4, \quad \varphi_4 = \pi, \quad \varphi_5 = 3\pi/2 \quad \varphi_6 = 2\pi$$

Дифференцируя радиус-вектор частицы по времени, находим скорость частицы:

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{e}_x b\omega\sin\varphi + \boldsymbol{e}_y b\omega\cos\varphi + \boldsymbol{e}_x b\omega$$

Проще всего решать задачу, если перейти в систему координат, движущуюся со скорость $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_x b\omega$. В этой системе скорость частицы будет равна:

$$\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{e}_x b\omega\sin\varphi + \boldsymbol{e}_y b\omega\cos\varphi$$

а ее величина оказывается постоянной:

$$v' = \sqrt{(b\omega\sin\varphi)^2 + (b\omega\cos\varphi)^2} = b\omega$$

Радиус-вектор частицы в движущейся системе координат также оказывается постоянным по величине:

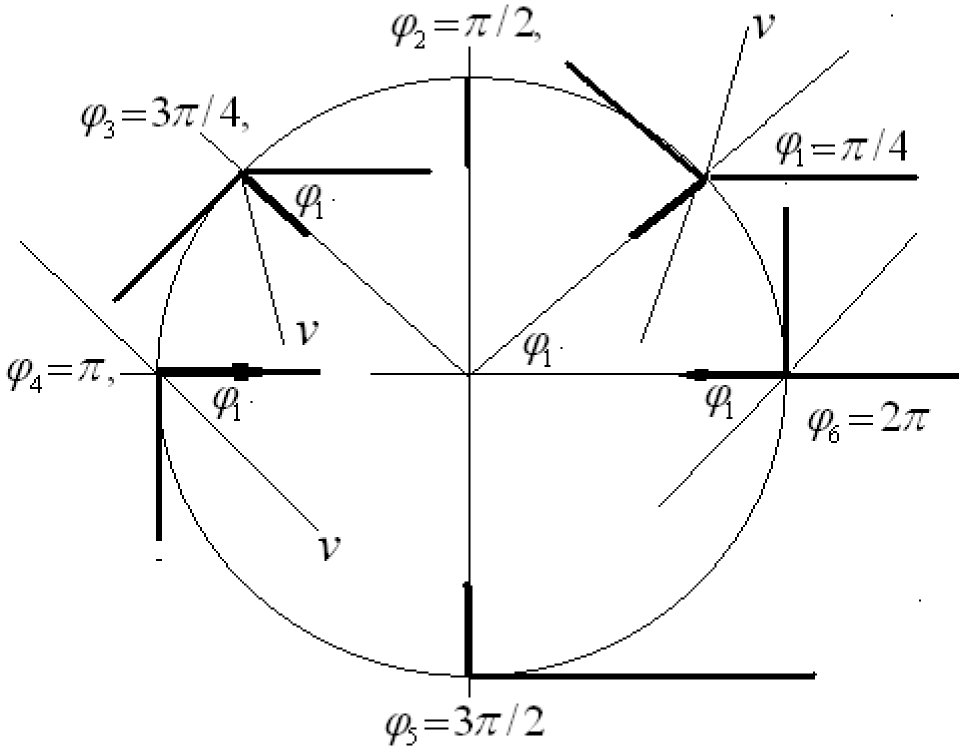
$$r' = \sqrt{(b\cos\varphi)^2 + (b\sin\varphi)^2} = b$$

Таким образом, в движущейся системе координат частица движется по окружности радиуса $R = b$ с постоянной по величине скоростью $v = b\omega$. Тангенциальное ускорение частицы в этой системе равно нулю, величина нормального ускорения постоянна (вектор нормального ускорения направлен к центру окружности):

$$a' = \frac{(b\omega)^2}{R} = b\omega^2$$

Мы сняли индекс n у ускорения, так как его величина является модулем полного ускорения в исходной системе координат. Вам известно из принципа Галилея, что ускорение частицы во всех инерциальных системах отсчета одинаково.

В исходной системе координат движение частицы представляет собой суперпозицию двух движений,



движения с равномерной скоростью по окружности, центр которой смещается по оси x с постоянной скоростью $\boldsymbol{V_C}=\boldsymbol{e}_x b\omega$. Образно это можно представить как движение точки, помеченной на поверхности цилиндра, катящегося без проскальзывания по горизонтальному потолку. Перейдем к определению требуемых в условии задачи ускорений. Для этого нарисуем окружность и пометим на ней точки соответствующих углов (см. рис.). Поясним рисунок. Точки с заданными значениями по условию углами находятся на окружностях, центры которых не совпадают. Но чтобы не делать шесть рисунков, мы их совместили в одну точку, так как вычисления от этого не изменятся. Шестью отрезками (два из них со стрелками), направленными к центру показаны векторы полного ускорения. Остальными отрезками показаны скорости поступательного движения центра окружности и скорости движения точки по окружности. Их векторная сумм равна скорости точки в неподвижной системе координат. Тонкими линиями в каждой точке показано направление этой суммарной скорости. Чтобы найти тангенциальное и нормальное ускорение частицы надо разложить ее полное ускорение на две проекции по направлению скорости и направление, перпендикулярное вектору скорости.

Начнем рассмотрение с угла $\varphi_5=3\pi/2$. В этом положении скорость точки равна сумме одинаковых по величине скоростей и направлена по оси x:

$$\boldsymbol{v}_5=\boldsymbol{e}_x b\omega+\boldsymbol{e}_x b\omega=2\boldsymbol{e}_x b\omega$$

В этой точке величина скорости частицы максимальна, тангенциальное ускорение равно нулю, Полное ускорение направлено по оси y и оно же является нормальным ускорением. Обратите внимание на то, что величина радиуса кривизны в этой точке равна:

$$R_C=\frac{v^2}{a_n}=\frac{(2b\omega)^2}{a'}=4R=4b$$

В точках, соответствующих углам $\varphi_4=\pi$ и $\varphi_6=2\pi$ скорости поступательного движения и движения по окружности взаимно перпендикулярны. Поэтому нормальные и тангенциальные ускорения равны по величине. Нормальное ускорение для угла $\varphi_4=\pi$ они равны:

$$a_n=a_\tau=\frac{\sqrt{2}}{2}a'=\frac{\sqrt{2}}{2}b\omega^2$$

В неподвижной системе координат в векторном виде они равны:

$$\boldsymbol{n}a_n = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)\frac{b\omega^2}{2}$$

$$\boldsymbol{\tau}a_\tau = (\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y)\frac{b\omega^2}{2}$$

При угле $\varphi_6 = 2\pi$ соответствующие ускорения будут равны:

$$\boldsymbol{n}a_n = (\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_x)\frac{b\omega^2}{2}$$

$$\boldsymbol{\tau}a_\tau = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)\frac{b\omega^2}{2}$$

При углах $\varphi_1 = \pi/4$ и $\varphi_3 = 3\pi/4$ величина нормального ускорения будет равна произведению модуля полного ускорения на синус угла равного $\delta = (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$:

$$a_n = b\omega^2 \sin\frac{\pi}{8}$$

А величина тангенциального ускорения в этой точке равна:

$$a_\tau = b\omega^2 \cos\frac{\pi}{8}$$

Для того, чтобы их выразить в векторном виде в неподвижной системе координат надо единичные векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ выразить через орты $\boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{e}_y$. Для угла $\varphi_1 = \pi/4$ единичные векторы равны:

$$\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_x \cos\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{e}_y \sin\frac{\pi}{8}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{e}_x \sin\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{e}_y \cos\frac{\pi}{8}$$

А соответствующие уравнения находятся как произведения:

$$\boldsymbol{n}a_n = (-\boldsymbol{e}_x \cos\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{e}_y \sin\frac{\pi}{8}) b\omega^2 \sin\frac{\pi}{8}$$

$$\boldsymbol{\tau}a_\tau = -(\boldsymbol{e}_x \sin\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{e}_y \cos\frac{\pi}{8}) b\omega^2 \cos\frac{\pi}{8}$$

Для угла $\varphi_3 = 3\pi/4$ единичные векторы равны:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x \cos\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{e}_y \sin\frac{\pi}{8}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{e}_x \sin\frac{\pi}{8} - \boldsymbol{e}_y \cos\frac{\pi}{8}$$

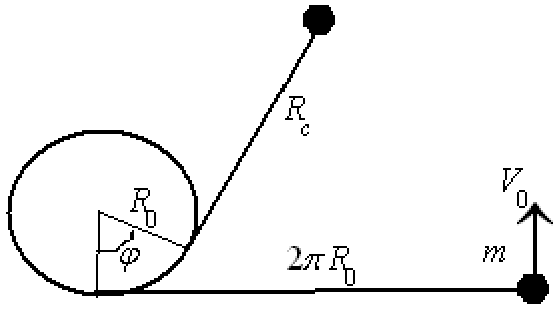
Находим последние два оставшихся ускорения:

$$\boldsymbol{n}a_n = (\boldsymbol{e}_x \cos\frac{\pi}{8} + \boldsymbol{e}_y \sin\frac{\pi}{8}) b\omega^2 \sin\frac{\pi}{8}$$

$$\boldsymbol{\tau}a_\tau = (\boldsymbol{e}_x \sin\frac{\pi}{8} - \boldsymbol{e}_y \cos\frac{\pi}{8}) b\omega^2 \cos\frac{\pi}{8}$$

В верхней точке при угле $\varphi_2 = \pi/2$ скорость частицы проходит через минимум, нормальное ускорение равно нулю, тангенциальное ускорение равно a' и направлено против оси y. Во всех точках достаточно просто определить радиус кривизны. Для этого найти в них модули скорости, возвести в квадрат, и разделить на найденные нормальные ускорения. В верхней точке понятие кривизны теряет смысл, так как в ней траектория терпит излом.

Наматывание нити на вертикальный цилиндр. Условие показано на рисунке. Это вид сверху. Длина невесомой нерастяжимой нити равно длине окружности цилиндра, на который наматывается нить. Трение между маленькой шайбой и горизонтальной поверхностью есть. Все геометрические размеры, массу шайбы, коэффициент трения и начальную скорость считать известными. Надо определить величины, характеризующие движения, и максимальную длину траектории (когда вся нить наматывается на вертикальный цилиндр).



Рассмотрим сначала эту задачу, пренебрегая трением. В этом случае скорость уменьшаться не будет, так как сила натяжения веревки перпендикулярна скорости (касательной к траектории в любой момент времени).

Рассмотрим «геометрию» движения. Длина нити будет уменьшаться по закону:

$$R_c = R_{c\max} - R_0\varphi \Rightarrow 2\pi R_0 - R_0\varphi$$

Бесконечно малое перемещение шайбы можно выразить также через угол поворота:

$$dS = R_c d\varphi = (2\pi R_0 - R_0\varphi)d\varphi$$

Интегрируя, находим длину траектории, если нить намотается вся:

$$S = R_{c\max}\varphi - \frac{R_0\varphi^2}{2}$$

$$S_{\max} = 4\pi^2 R_0 - \frac{R_0 4\pi^2}{2} = 4\pi^2 R_0 - 2\pi^2 R_0 = 2\pi^2 R_0 = \pi R_{c\max}$$

Время движения рано:

$$\tau_1 = \frac{\pi R_{c\max}}{v_0}$$

Все полученные соотношения верны и для задачи с трением, кроме последней формулы, при выводе которой использовано постоянство скорости.

В задаче с трением уменьшится время движения, которое находится из формулы равнозамедленного движения по траектории:

$$S = v_0 t - \frac{kt^2}{2} \Rightarrow S_{\max} = v_0\tau_2 - \frac{k\tau_2^2}{2} \Rightarrow \tau_2^2 - \frac{2v_0\tau_2}{k} + \frac{2\pi R_{c\max}}{k} = 0$$

$$\tau_2 = \frac{2v_0}{k} - \sqrt{(\frac{2v_0}{k})^2 - \frac{2\pi R_{c\max}}{k}} = \frac{2v_0}{k}(1 - \sqrt{1 - \frac{\pi k R_{c\max}}{2v_0^2 k}})$$

Перед корнем взят знак минус, так как при стремлении коэффициента трения к нулю должна получиться формула (28). Проверим это:

$$\tau_2 = \frac{2v_0}{k}(1 - 1 + \frac{\pi k R_{c\max}}{2v_0^2 k}) = \frac{\pi R_{c\max}}{v_0} = \tau_1$$

Как видите, нам пригодилось рассмотрение дополнительной задачи без трения.

Движение заряженной частицы в магнитном поле. В постоянном магнитном поле в некоторой точке известна скорость частицы. Определить, как будет двигаться частица, если известна ее масса и заряд.

Выберем систему координат так, чтобы вектор индукции магнитного поля был направлен по оси z.

Напишем уравнение второго закона Ньютона в векторном виде:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q[\boldsymbol{vB}]$$

Раскроем векторное произведение векторов в правой части и напишем уравнения в другом виде:

<u>*Движение заряженной частицы в магнитном поле*</u>. Частица массы m, имеющая заряд q начинает падать в поле тяжести Земли с некоторой высоты H. Какой величины должно быть магнитное поле (его индукция $\boldsymbol{B}$), чтобы частица прошла по касательной к поверхности земли?

Напишем уравнение движения в векторном виде:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{g} + q[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{dv_x}{dt} + \boldsymbol{e}_y\frac{dv_y}{dt} + \boldsymbol{e}_z\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m}[\boldsymbol{e}_x v_x + \boldsymbol{e}_y v_y + \boldsymbol{e}_z v_z, \boldsymbol{e}_z B]$$

Сделав простые преобразования, получим уравнение:

$$\boldsymbol{e}_x\frac{dv_x}{dt} + \boldsymbol{e}_y\frac{dv_y}{dt} + \boldsymbol{e}_z\frac{dv_z}{dt} = \frac{qB}{m}v_x[\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_z] + \frac{qB}{m}v_y[\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z] + \frac{qB}{m}v_z[\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z]$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{dv_x}{dt} + \boldsymbol{e}_y\frac{dv_y}{dt} + \boldsymbol{e}_z\frac{dv_z}{dt} = -\boldsymbol{e}_y\frac{qB}{m}v_x + \boldsymbol{e}_x\frac{qB}{m}v_y$$

Последнее уравнение можно написать в проекциях на координатные оси:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0$$

Из последнего уравнения системы следует, что скорость по оси z постоянна и равна проекции начальной скорости частицы на ось z:

$$v_z(t) = v_{0z}$$

Первые два уравнения системы являются связанными. Но вы не проходили по математике, как решаются системы дифференциальных уравнений. Ничего страшного. Подумаем и сообразим. Вы же не на математиков учитесь.

Давайте начнем издалека. Представьте себе, что вы вообще не знаете понятий интеграл и проинтегрировать. Но вы умеете дифференцировать функции. И вас есть уравнение, которое надо решить:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = const$$

Ясно, что искомая функция должна содержать член пропорциональный квадрату времени, чтобы при двойном дифференцировании получить константу. Но у вас есть еще два начальных условия. Поэтому нельзя в качестве решения взять:

$$x = \frac{F}{2m}t^2$$

Поэтому надо еще добавить два слагаемых, но таких, чтобы при двойном дифференцировании они давали бы ноль. Ответ очевиден. Искомая функция должна иметь вид:

$$x = \frac{F}{2m}t^2 + C_1 t + C_2$$

Константы интегрирования находятся из начальных условий. Вам ясно, что мы нашли решение для равноускоренного движения. Физический смысл первой константы начальная скорость частицы, второй – ее начальная координата. Вот и применим этот метод, если хотите «угадывания», к нашей задаче.

То, что производная одной функции пропорциональна второй функции, а ее производная пропорциональна первой функции, но со знаком минус должно навести на мысль, что решение должны быть тригонометрические функции синуса и косинуса аргумента ωt, причем коэффициент ω должен по размерности быть обратным времени. Вот из соображений и попробуем искать решение в виде:

$$v_x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Подставив его в первое уравнение системы, получим уравнение для v_y:

$$-\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t = \frac{qB}{m}v_y$$

Из него следует, что введенный ранее коэффициент равен:

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

А проекция скорости на ось y рана:

$$v_y = B\cos\omega t - A\sin\omega t$$

Для проверки необходимо подставить обе проекции скорости во второе уравнение системы и проверить, что оно обращается в тождество. Постоянные A и B определяются из начальных условий:

$$v(0)_x = A$$

$$v((0)_y = B$$

Таким образом, найдены все три проекции скорости, как функции времени;

$$v_x(t) = v_{0x}\cos\omega t + v_{0y}\sin\omega t$$

$$v_y(t) = v_{0y}\cos\omega t - v_{0x}\sin\omega t$$

$$v_z(t) = v_{0z}$$

Если возвести первых два уравнения в квадрат и сложить, то получим:

$$v_x{}^2(t) + v_y{}^2(t) = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_\perp^2$$

В последней формуле $v_\perp$ модуль скорости частицы перпендикулярной направлению магнитного поля. То есть начальную скорость частицы удобно разложить на две проекции, одну на проекцию вдоль направления магнитного поля $v_\parallel$, и перпендикулярную - $v_\perp$. Вдоль направления поля частица будет двигаться равномерно. Одновременно она будет вращаться по окружности (это мы сейчас получим), то есть ее траектория будет представлять сбой винтовую линию.

Чтобы показать, что в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, частица движется по окружности, надо выбрать систему координат. Наиболее простые преобразования получаются, если ее выбрать так, чтобы направление проекции $v_\perp$ совпадала с осью y. При таком выборе $v_{0y} = v_\perp$ и $v_{0x} = 0$, причем начало координат совместить с начальным положением частицы. В этом случае уравнения упростятся:

$$v_x(t) = v_\perp\sin\omega t$$

$$v_y(t) = v_\perp\cos\omega t$$

Проинтегрировав их по времени, получим с учетом начальных условий для координаты:

$$x = -\frac{v_\perp}{\omega}\cos\omega t$$

$$y = \frac{v_\perp}{\omega}\sin\omega t$$

Возведя в квадрат и сложив, получим радиус окружности:

$$R^2 = x^2 + y^2 = (\frac{v_\perp}{\omega})^2 \qquad R = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{mv_\perp}{qB}$$

Конечно, это можно было бы получить много проще. Зная, что частица двигается по окружности с постоянной по величине скоростью, можно написать выражение для центростремительного ускорении и приравнять его магнитной составляющей силы Лоренца, деленной на массу частицы:

$$\frac{v_\perp^2}{R}=\frac{qv_\perp B}{m}$$

Но тогда бы вы не познакомились с тем, как можно решить систему связанных дифференциальных уравнений. А самое главное то, что разобравшись с этой задачей, мы сможем решить следующую задачу.

Движение заряженной частицы в магнитном поле в поле тяжести Земли. Усложним задачу. Пусть неподвижная частица, имеющая массу m и заряд q, начинает падать в поле тяжести Земли с высоты H. Вектор индукции постоянного магнитного поля направлен параллельно плоскости земли. Какова должна быть его величина, чтобы частица не достигла поверхности земли? Где будет частица через достаточно большое время?

Выберем систему координат так, чтобы движение частицы происходило в плоскости xy при $z=0$, а вектор индукции магнитного поля направим по оси z. Ясно, что движение будет происходить в плоскости xy, так как нет сил, направленных по оси z. Тогда в проекциях в проекциях на координатные оси получим систему двух связанных уравнений:

$$\boldsymbol{e}_x\frac{dv_x}{dt}+\boldsymbol{e}_y\frac{dv_y}{dt}=-\boldsymbol{e}_y g+\frac{q}{m}[\boldsymbol{e}_x v_x+\boldsymbol{e}_y v_y,\boldsymbol{e}_z B]$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{dv_x}{dt}+\boldsymbol{e}_y\frac{dv_y}{dt}=-\boldsymbol{e}_y g+\frac{qB}{m}v_x[\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_z]+\frac{qB}{m}v_y[\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z]$$

$$\boldsymbol{e}_x\frac{dv_x}{dt}+\boldsymbol{e}_y\frac{dv_y}{dt}=-\boldsymbol{e}_y g-\boldsymbol{e}_y\frac{qB}{m}v_x+\boldsymbol{e}_x\frac{qB}{m}v_y$$

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{qB}{m}v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt}=-\frac{qB}{m}v_x-g$$

Начальные условия для определения констант интегрирования при выбранной системе координат следующие:

$$v_x=v_y=x=0,\qquad y=H$$

Полученная система уравнений отличается всего одним постоянным членом в правой части второго уравнения. Поэтому напрашивается в решение для v_x предыдущей задачи добавить некоторую константу:

$$v_x=A\cos\omega t+B\sin\omega t+C$$

А далее будем следовать проторенной дорожкой. Находим v_y, точнее сказать, списываем с предыдущей задачи:

$$v_y=B\cos\omega t-A\sin\omega t$$

Подставляя v_x и v_y во второе уравнение системы, получим:

$$-B\omega\sin\omega t-A\omega\cos\omega t=A\omega\cos\omega t+B\omega\sin\omega t+\omega C-g$$

Из последнего равенства следует, что добавленная константа равна:

$$C=\frac{g}{\omega}=\frac{mg}{qB}$$

В последней формуле B искомая величина индукции. Используем начальные условия для проекций скоростей:

$$v_x(0)=A+\frac{g}{\omega}=0\qquad A=-\frac{g}{\omega}$$

$$v_y(0)=B=0$$

Выпишем выражения для найденных проекций скоростей с учетом начальных условий:

$$v_x = \frac{mg}{qB} - \frac{mg}{qB}\cos\omega t$$

$$v_y = \frac{mg}{qB} A\sin\omega t$$

Проинтегрировав полученные уравнения по времени, получим:

$$x(t) = \frac{mg}{qB}t - \frac{m^2 g}{q^2 B^2}\sin\omega t + C_1$$

$$y(t) = \frac{m^2 g}{q^2 B^2}\cos\omega t + C_2$$

Константы интегрирования определяются из начальных условий для координат:

$$x(0) = C_1 = 0$$

$$y(0) = \frac{m^2 g}{q^2 B^2} + C_2 = H \qquad C_2 = H - \frac{m^2 g}{q^2 B^2}$$

Таким образом, движение частицы описывается уравнениями:

$$x(t) = \frac{mg}{qB}t - \frac{m^2 g}{q^2 B^2}\sin\omega t$$

$$y(t) = H - \frac{m^2 g}{q^2 B^2}(1 - \cos\omega t)$$

При достаточно больших временах $t \gg m / qB$ частица сместится по горизонтали на расстояние:

$$x(t) \simeq \frac{mg}{qB}t$$

Чтобы частица коснулась поверхности земли необходимо выполнение условия:

$$y(t) = H - \frac{m^2 g}{q^2 B^2}(1 - \cos\omega t) \geq 0 \qquad H - \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \geq 0$$

Из последнего неравенства находим необходимую величину магнитного поля:

$$B \geq \frac{m}{q}\sqrt{\frac{g}{H}}$$

Чтобы получить представление о траектории, напишем уравнения движения частицы в другом виде:

$$x(t) - \frac{mg}{qB}t = -\frac{m^2 g}{q^2 B^2}\sin\omega t$$

$$y(t) - H + \frac{m^2 g}{q^2 B^2} = \frac{m^2 g}{q^2 B^2}\cos\omega t)$$

Возведем их в квадрат и сложим:

$$(x - \frac{mg}{qB}t)^2 + (y - H + \frac{m^2 g}{q^2 B^2})^2 = (\frac{m^2 g}{q^2 B^2})^2$$

$$x'^2 + y'^2 = R^2$$

Таким образом, траектория движения представляет окружность радиуса $R = \frac{m^2 g}{q^2 B^2}$, центр которой смещается с постоянной скоростью $v = \frac{mg}{qB}$. Эта кривая называется циклоидой.

<u>Движение заряженной частицы в кулоновском поле</u>. Имеется неподвижная частица, вокруг которой по круговой орбите движется вторая частица. Заряды частиц разноименные и известны. Движущаяся частица теряет при движении за период небольшую долю энергии по сравнению с ее полной энергией. Потеря энергии пропорциональна квадрату ее скорости. По какому закону будет меняться во времени радиус ее орбиты?

Если потеря энергии мала, то мы можем считать, что в каждый момент времени выполняется соотношение:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{C}{r^2} \qquad v^2 = \frac{C}{mr}$$

Полная энергия частицы равна:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{mv^2}{2} - \frac{C}{r} = \frac{C}{2r} - \frac{C}{r} = -\frac{C}{2r}$$

Согласно условию задачи потерю энергии частицы можно записать в виде:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = -\alpha v^2 = -\frac{\alpha C}{mr}$$

$$\frac{dr}{rdt} = -\frac{\alpha}{m} \qquad \ln r = -\frac{\alpha}{m}t + const \qquad \ln\frac{r}{r_0} = -\frac{\alpha}{m}t$$

Окончательно получаем линейную зависимость:

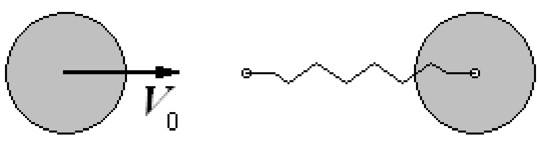
$$r = r_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t} \qquad\qquad r = r_0(1 - -\frac{\alpha}{m}t)$$

Экспоненциальная зависимость при больших временах (при показателе не малом) не верна, так решение получено при условии малости потери энергии за один оборот (то есть нельзя будет пользоваться соотношение, с которого было начато решение задачи).

9. Упругие силы.

<u>Модель перехода механической энергии во внутреннюю энергию (тепло).</u>

На гладкой поверхности лежат две одинаковых шайбы (на рис. вид сверху). Одной шайбе сообщили скорость. У второй шайбы есть «хитрая» невесомая пружинка. Она сжимается при столкновении шайбы и намертво прикрепляется к налетевшей шайбе. Рассмотрим, как будут двигаться две шайбы, ставшие упругой гантелью. С «макроскопической» точки зрения (без детализации того, что тело после столкновения состоит из двух шайб и пружинки) рассматривать столкновение, как абсолютно неупругое столкновение двух тел. Применить закон сохранения импульса и из него найти скорость центра масс гантели:



$$v = \frac{mv_0}{2m} = \frac{v_0}{2}$$

Вычесть из начальной энергии конечную кинетическую энергию:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{2m}{2}(\frac{v_0}{2})^2 = \frac{mv_0^2}{4}$$

И сказать, что кинетическая энергия системы тел, равная правой части предыдущего равенства, перешла во внутреннюю энергию тела, образовавшегося при абсолютно неупругом столкновении двух тел.

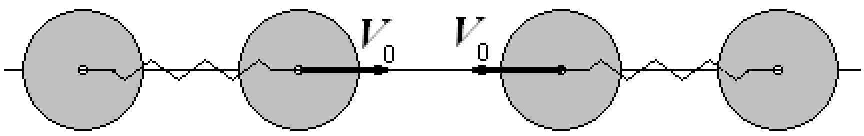
С «микроскопической» точки зрения мы можем объяснить, что убыль механической системы двух тел перешла в энергию колебаний. Мы даже сможем определить максимальное расстояние между шайбами гантели, приравняв убыль энергии потенциальной энергии растянутой пружины, если нам известны длина недеформированной пружины и ее коэффициент упругости:

$$\frac{mv_0^2}{4}=\frac{k(l-l_0)^2}{2}\Rightarrow l=l_0+v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Можно рассчитать максимальные скорости шайб гантели в системе координат, движущейся со скоростью их центра масс. Когда пружинка будет не деформирована, шайбы будут находиться на расстоянии l_0, и будут сближаться или удаляться с одинаковыми скоростями равными:

$$2\frac{mv_{\max}^2}{2}=\frac{mv_0^2}{4}\Rightarrow v_{\max}=\frac{v_0}{2}$$

Рассмотрим еще один пример с двумя упругими гантелями, показанными на рисунке. Для выявления сути происходящего достаточно рассмотреть столкновение двух гантелей в системе центра масс, в которой они двигаются навстречу друг другу с одинаковыми скоростями.



Предположим, что столкновение шайб гантели абсолютно упругое и происходит мгновенно. После столкновения скорости шайб останутся по величине неизменными, но изменят направления на противоположные. В каждой гантели обе шайбы будут сближаться со скоростями v_0. Центр же масс каждой гантели будет покоиться. Когда потенциальная энергия сжатой пружины станет равна кинетической энергии обеих шайб, последние остановятся. Минимальное расстояние между ними можно найти из закона сохранения энергии:

$$2\frac{mv_0^2}{2}=\frac{k(l_0-l_{\min})^2}{2}\Rightarrow l_{\min}=l_0-v_0\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

При расчете было сделано, что в сталкивающихся гантелях шайбы не колебались. Через время равное периоду колебаний шайбы вновь вернуться в состояние, в котором они были в момент столкновения. Пружина будет не деформирована, но обе шайбы гантели будут двигаться от их центра масс со скоростями v_0. Сталкивающиеся шайбы вновь обменяются скоростями, и гантели с недеформированными пружинами начнут удаляться друг от друга со скоростями v_0.

С «макроскопической» точки зрения произошло столкновение двух тел, а время равное периоду колебаний есть время столкновения. К этому вопросу мы вернемся ниже. Если колебания не являются незатухающими, то произойдет некоторая убыль механической энергии, и столкновение не будет абсолютно упругим.

Последний пример. Предположим, что сталкиваются два «клубка» из большого числа шариков, соединенных пружинками. Могут быть два варианта. Клубки после столкновения будут двигаться независимо. Причем часть энергии перейдет в энергию колебаний шариков. Столкновение будет не абсолютно упругим. Второй вариант – шарики клубков запутаются друг в друге. Столкновение будет абсолютно неупругим. Мы сможем подсчитать потерю механической энергии клубков, если считать клубки материальными точками, но не сможем конкретно подсчитать какую долю ее взял каждый клубок.

Так и при столкновении твердых тел, часть механической энергии переходит во внутреннюю энергию атомов или молекул, из которых состоят тела. Абсолютно упругих столкновений нет. Просто в некоторых учебных задачах пренебрегают потерей механической энергии. При расчете в реальных задачах, если можно ограничиться приближенным результатом также довольно часто делают приближение абсолютно упругого столкновения.

Убыль механической энергии происходит не только при столкновении тел, но при трении поверхностей, движущихся относительно друг друга двух тел. А какая собственно разница? При движении тела атомы его поверхностного слоя (представьте поверхностные атомы шариками на пружинках) взаимодействуют с поверхностными атомами другого тела. Тело несколько деформирует поверхность (и его соприкасающаяся поверхность тоже деформируется, абсолютно твердое тело идеализация) и энергия поверхностного слоя увеличивается. Поэтому при трении скольжения поверхности нагреваются. Можно из общих соображений предсказать, что убыль механической энергии должна быть пропорциональна относительного перемещения поверхностей тел.

И в заключение о времени столкновения упругих тел. В лаборатории по механике во многих вузах имеются лабораторные работы по изучению столкновению шариков. В работе в частности определяется зависимость времени столкновения как функция относительной скорости шаров в момент столкновения. Если вы из школьного курса знаете, что если вместо одной пружины поставит параллельно две, то эффективный коэффициент жесткости возрастет вдвое, то, не делая опыта, можете утверждать, что время столкновения будет уменьшаться при увеличении скорости столкновения. На первый взгляд, если вообще не думать, это кажется парадоксальным, так как при увеличении скорости растет величина упругой деформации. Но если подумать и вспомнить хорошо забытую формулу для периода колебаний шарика на пружине:

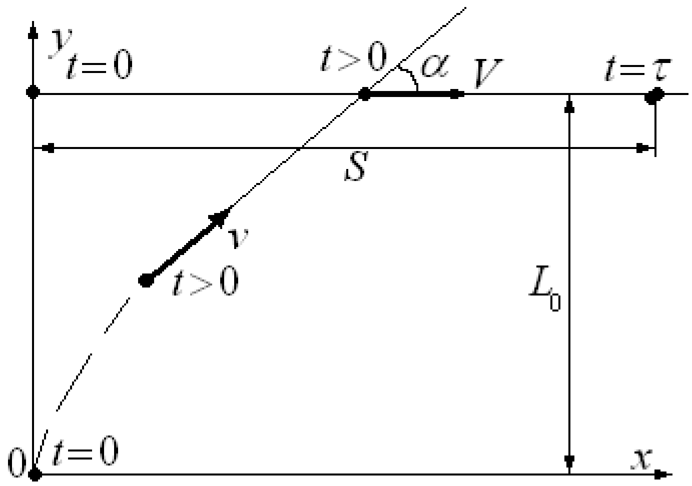
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{k}},$$

то можно сообразить, что при увеличении деформации увеличивается площадь соприкосновения шаров, то есть «включается» все большее число пружинок, что приводит к увеличению коэффициента жесткости. Время столкновения на языке колебаний равно половине периода. Вот поэтому время столкновения должно уменьшаться. Увеличивается только амплитуда, но период от амплитуды не зависит.

10. Движение самонаводящихся тел.

В этом разделе будут рассмотрены задачи движения двух тел, когда вектор скорости догоняющего тела (ракеты, торпеды) при движении все время направлен на второе тело, которое мы будем называть целью.

Торпедная атака. На рисунке показаны положения тел в начальный момент времени, в произвольный момент времени и в момент поражения тела. Скорости тел по величине будем считать постоянными. Найти точку, в которой произойдет столкновение тел. Напишем уравнения движения тел для произвольного момента времени:



$$x = \int_0^t v\cos\alpha\, dt = v\int_0^t \cos\alpha\, dt \qquad X = Vt$$

$$y = \int_0^t v\sin\alpha\, dt = v\int_0^t \sin\alpha\, dt \qquad Y = L_0$$

Левая система написана для движения торпеды, правая – для цели. В момент столкновения мы можем в систему для торпеды подставить искомые координаты точки столкновения, но нам неизвестны явный вид тригонометрических функций от времени. Поэтому правые части уравнений останутся в виде интегралов, изменятся только верхние пределы интегралов:

$$S = v\int_0^\tau \cos\alpha\, dt \qquad S = V\tau$$

$$L_0 = v\int_0^\tau \sin\alpha\, dt \qquad Y = L_0$$

Сложность состоит в том, что тригонометрические выражения являются функциями времени, которые нам неизвестны. Поэтому интегралы вычислить для произвольного момента времени нельзя. Мы только можем приравнять правые стороны уравнений верхней строчки систем:

$$v\int_0^\tau \cos\alpha dt = V\tau$$

Но мы пока не использовали условия самонаведения. Если перейти в систему ракеты, то наблюдатель на ней будет видеть приближение цели со скоростью:

$$V_{otn} = vt - V\cos\alpha$$

Расстояние между ними будет сокращаться по закону:

$$L_{otn} = L_0 - V_{otn}t = L_0 - v\tau + V\int_0^t \cos\alpha dt$$

В момент столкновения последнее уравнение перейдет в равенство:

$$L_0 = v\tau - V\int_0^t \cos\alpha dt$$

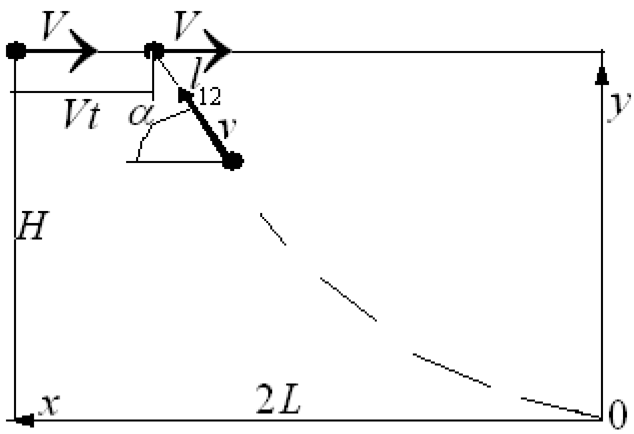
Теперь не представляет труда найти время столкновения. Выражая интеграл от косинуса из равенства расстояний, пройденных по x, получим:

$$L_0 = v\tau - V\int_0^t \cos\alpha dt L_0 = v\tau - \frac{V^2\tau}{v} \Rightarrow L_0 v = (v^2 - V^2)\tau$$

Определив время до столкновения, находим путь, пройденный целью:

$$\tau = \frac{vL_0}{v^2 - V^2} \qquad S = V\tau \qquad S = \frac{vVL_0}{v^2 - V^2}$$

Самонаводящаяся ракета и самолет. Вы обнаружили самолет на расстоянии $2L$, летящий на вас на высоте H со скоростью V. В тот же момент вы выпускаете самонаводящуюся ракету, которая должна поразить цель на расстоянии L от вас. Какова должна быть скорость ракеты?



Из поставленного задания следует, что столкновение должно произойти через время:

$$\tau = \frac{L}{V}$$

Напишем уравнения движения подобные предыдущей задачи и уравнение сближения тел:

$$x = v\int_0^t \cos\alpha dt$$

$$y = v\int_0^t \sin\alpha dt$$

$$l_{12} = \sqrt{4L^2 + H^2} - (v\tau + V\int_0^t \cos\alpha dt$$

В момент столкновения третье уравнение перейдет в равенство:

$$\sqrt{4L^2 + H^2} = v\tau + V\int_0^\tau \cos\alpha dt$$

а первое уравнение в равенство:

$$L = v\int_0^\tau \cos\alpha dt$$

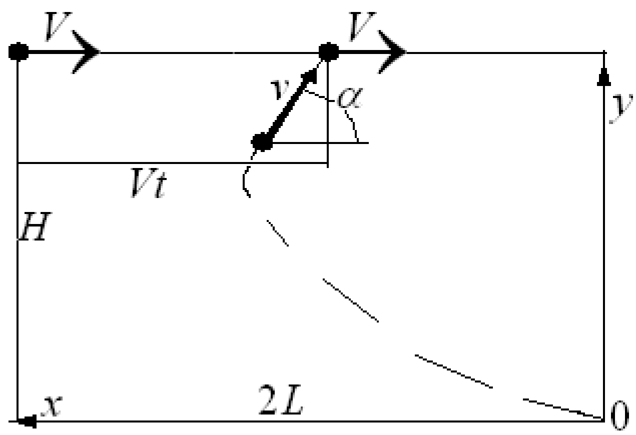
Исключая интеграл, получим уравнение для определения скорости ракеты:

$$\sqrt{4L^2+H^2}=v\tau+V\frac{L}{v}$$

Не будем торопиться находить скорость движения ракеты и найдем время до столкновения:

$$\tau=\frac{v\sqrt{4L^2+H^2}-VL}{v^2}\Rightarrow\frac{L}{V}=\frac{v\sqrt{4L^2+H^2}-VL}{v^2}$$

$$\frac{v}{V}L=\sqrt{4L^2+H^2}-\frac{v}{V}L\Rightarrow 2\frac{v}{V}L=\sqrt{4L^2+H^2}$$



$$\tau=\frac{\sqrt{4L^2+H^2}-\frac{V}{v}L}{v}$$

Проверим один предельный случай. Если высота равна нулю, то для встречи тел на средине расстояния их скорости должны быть равными. Если вычислить время по полученной формуле, то оно окажется, как и должно быть, равным:

$$\tau=\frac{L}{V}=\frac{L}{v}$$

Подставляя в формулу для времени L/V, находим искомую скорость ракеты:

$$\frac{v}{V}L=\sqrt{4L^2+H^2}-\frac{v}{V}L\Rightarrow 2\frac{v}{V}L=\sqrt{4L^2+H^2}$$

$$v=V\sqrt{1+\frac{H^2}{4L^2}}$$

которая, как и должно быть, равна скорости цели.

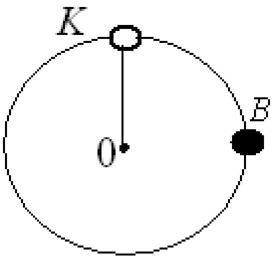
С решением этой задачи. Надо быть осторожным. Если цель до поражения прошла достаточно большое расстояние, уравнение для скорости сближения будет неверно. Пояснение этого утверждения показано на рисунке. В формуле для относительного расстояния надо поменять знак:

$$\sqrt{4L^2+H^2}=v\tau-V\int_0^\tau\cos\alpha dt$$

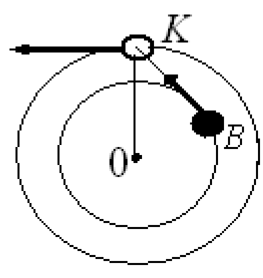
Следующая за ней формула останется неизменной:

$$L=v\int_0^\tau\cos\alpha dt$$

Решите для тренировки эту задачу при условии, что цель должна быть поражена, когда она пройдет над точкой пуска ракеты и удалится, двигаясь по прямой линии, еще на расстояние L.

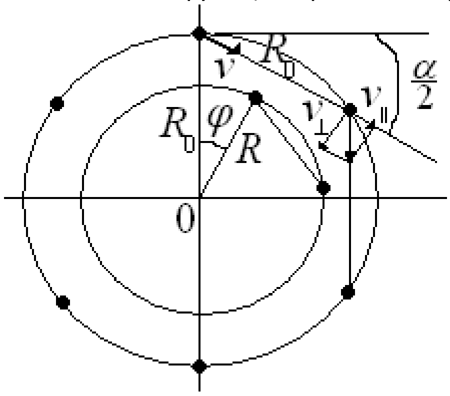


Волк и козел. Козел привязан за веревку. Волк хочет съесть козла (Козел не хочет этого). Начальное их положение показано на рисунке. Волк естественно всегда нацелен на Козла. Ответьте на вопросы: 1. При какой скорости волк догонит козла, если скорость Козла известна, 2. Как они будут двигаться через достаточно большое время, если скорость волка меньше скорости Козла, 3. Что значит достаточно большое время, по сравнению с чем?



Ясно, что волк догонит козла за конечное время при условии, что его скорость больше скорости козла. При скорости волка меньше скорости козла оба тела двигаются по окружностям, причем периоды совпадают. Положение волка находится проведение касательно. Эти траектории показаны на втором рисунке.

<u>Шесть дружных черепашек</u>. Шесть черепашек находятся на окружности радиуса R_0. Все они одновременно начинают ползти к своим ближайшим соседкам (по часовой стрелке) с постоянной скоростью v, причем вектор скорости направлен все время движения на соседку. Определить кинематические величины, как функции времени, характеризую движение верхней черепашки.



Прежде чем решать задачу представим общую картину движения черепашек. Имеется и будет сохраняться симметрия картины относительно оси z, проходящей через центр окружности, перпендикулярной плоскости рисунка и направленной от нас. Следовательно, все время движения черепашки будут находиться на окружности, радиус которой уменьшается. Из этого следует, что все проекции скоростей сохраняются по своей величине. Значит скорость относительного сближения пары черепашек, равна:

$$v_{сбл} = v - v_{\parallel} = v - v\sin\frac{\alpha}{2} = v - v\sin\frac{\pi}{6} = \frac{v}{2}$$

Мы можем определить время движения черепашек, разделив начальное расстояние на полученную скорость:

$$\tau = \frac{2R_0}{v}$$

Умножив время движения на постоянную скорость черепашки, находим ее путь или длину траектории:

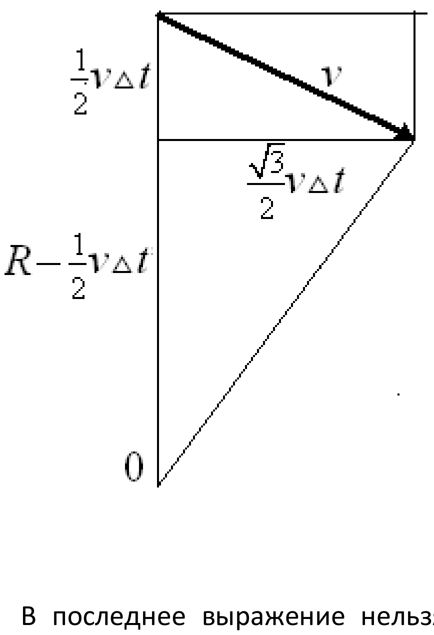
$$S = 2R_0$$

Движение верхней черепашки удобнее рассматривать в полярной системе координат R и φ. Зависимость $R(t)$ можно написать сразу:

$$R(t) = R_0 - v_{сбл}t = R_0 - \frac{vt}{2}$$

Можно определить v_φ:

$$v_\varphi^2 = v^2 - v_R^2 = v^2 - \dot{R}^2(t) = v^2 - \frac{v^2}{4} = \frac{3v^2}{4} \qquad v_\varphi = \frac{v\sqrt{3}}{2}$$



Таким образом, в полярной системе координат все проекции скоростей постоянны.

Зависимость угла попорота вектора $\boldsymbol{R}$ можно определить из геометрии (см. рис. размеры не соблюдены для наглядности):

$$\tan(\Delta\varphi) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}v\Delta t}{R - \frac{1}{2}v\Delta t}$$

Переходя к пределу, получим угловую скорость поворота:

$$\dot{\varphi} = \frac{v\sqrt{3}}{2R} = \frac{v\sqrt{3}}{2R_0 - vt}$$

Если это выражение проинтегрировать по времени и учесть нулевое начальное условие, то получим зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi = \sqrt{3}\ln\frac{2R_0}{2R_0 - vt}$$

В последнее выражение нельзя подставить найденное выше полное время движения. Оно получено в предположении, что все черепашки соберутся в центре. Но реальные черепашки имеют размер. Поэтому пока ползут их можно считать материальными точками до момента соприкосновения. С учетом их размера время будет несколько меньше и расходимости не будет.

Перейдем к определению ускорений. Используя общую формулу, получим:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_R v_R + \boldsymbol{e}_\varphi v_\varphi) = \boldsymbol{e}_\varphi \dot{\varphi} v_R - \boldsymbol{e}_R \dot{\varphi} v_\varphi$$

Мы можем написать равенство модулей ускорений в различных системах координат:

$$a_n^2 + a_\tau^2 = (\dot{\varphi} v_R)^2 + (\dot{\varphi} v_\varphi)^2$$

Так как все скорости по величине постоянны, то тангенциальное уравнение будет равно нулю. Поэтому мы можем в каждой точке траектории определить радиус кривизны:

$$a_n = \frac{v^2}{R_{кр}} = \dot{\varphi} v \qquad R_{кр} = \frac{v(2R_0 - vt)}{v\sqrt{3}} = \frac{2R_0 - vt}{\sqrt{3}}$$

Полное ускорение, с которым ползет черепашка равно нормальному ускорению:

$$a = a_n = \frac{v^2\sqrt{3}}{2R_0 - vt}$$

11. Задачи на экстремум.

Волк и козел. Волка находится в центре окружности. Козел может бежать по окружности, так как привязан веревкой к колу в центе окружности. Найти минимальное время, за которое волк сможет догнать козла. Вы можете сказать, что надо определить точку на окружности козла, в которую волк и козел прибегут одновременно. Но волк не понимает, что козел вынужден из-за веревки бежать по окружности. А козел не побежит в найденную точку на встречу к волку, а развернется и побежит в обратную сторону. Поэтому волк будет бежать так, чтобы расстояние между ними уменьшалось, как можно быстрее.

Перейдем во вращающуюся систему координат, в которой бегущий козел покоится. Кратчайшим расстояние между ним и волком будет радиус окружности. Если волка хочет бежать по радиусу, то он должен иметь ту же самую угловую скорость, что и козел:

$$\dot{\varphi}_{волк} = \dot{\varphi}_{козел} = \frac{V}{R_0}$$

В этой формуле V - скорость козла, которому недолго осталось жить, R_0 радиус окружности, по которой он бежит. Найдем радиальную скорость волка:

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \sqrt{v^2 - \frac{V^2}{R_0^2}R^2}$$

Разделив переменные, получим выражение для определения времени погони:

$$\tau = \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{v^2 - \frac{V^2}{R_0^2}R^2}}$$

Этот интеграл можно преобразовать заменой переменной. Покажем, как это делается:

$$\frac{dR}{\sqrt{v^2 - \frac{V^2}{R_0^2}R^2}} = \frac{dR}{v\sqrt{1 - \frac{V^2}{v^2R_0^2}R^2}} = \frac{\frac{vR_0}{V}dx}{v\sqrt{1-x^2}}$$

Было введена замена:

$$x = \frac{VR}{vR_0} \qquad dx = \frac{VdR}{vR_0}$$

Следовательно, надо вычислить интеграл:

$$\tau = \frac{R_0}{V}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Такой интеграл есть не только в любом справочнике, но в приложениях в большинстве задачников. Смотрим, выписываем ответ и переходим к начальным обозначениям:

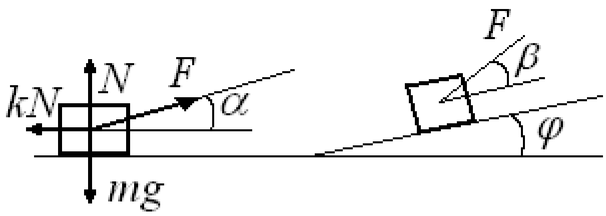
$$\tau = \frac{R_0}{V}\arcsin x = \frac{R_0}{V}\arcsin[\frac{VR}{vR_0}]_0^{R_0} = \frac{R_0}{V}\arcsin\frac{V}{v}$$

При скорости волка меньше скорости козла радиальная скорость обращается в ноль при равенстве нулю подкоренного выражения:

$$v^2 - \frac{V^2}{R_0^2}R^2 = 0$$

Из него и находится радиус окружности, по которой будет бегать волк. Расстояние будет кратчайшим между ними, на которое волк сможет приблизиться к козлу при заданной скорости.

<u>*Как надо везти санки с грузом, чтобы меньше устать*</u>. Человек везет санки (считать точечным телом) по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью. Он приспособился под таким α углом направить веревку, чтобы сила, с которой он тянет санки, была наименьшей (см. рис.). Затем начался подъем. Каким надо сделать угол в этом случае? Считать, что коэффициент трения остался таким же.



Так как санки двигаются с постоянной скоростью, то сумма проекций всех сил на горизонтальное и вертикальное направления должны быть равны нулю:

$$mg = N + F\sin\alpha$$

$$kN = F\cos\alpha$$

Исключив из этих уравнений реакцию опоры N, находим уравнение для силы, приложенной человеком:

$$F = \frac{kmg}{\cos\alpha + k\sin\alpha}$$

Взяв производную по углу и приравняв ее нулю, получим уравнение для оптимального угла, под которым надо тянуть веревку с минимальной силой:

$$0 = kmg\frac{\sin\alpha - k\cos\alpha}{(\cos\alpha + k\sin\alpha)^2} \qquad \sin\alpha - k\cos\alpha = 0 \qquad \tan\alpha = k$$

Так как этот угол известен, то из последней формулы можно определить коэффициент трения скольжения.

Аналогично рассматриваем движение санок на наклонной плоскости:

$$mg\cos\varphi = N + F\sin\beta$$

$$kN + mg\sin\varphi = F\cos\beta$$

Исключаем N:

$$\frac{F\cos\beta - mg\sin\varphi}{k} = mg\cos\varphi - F\sin\beta$$

Разрешаем относительно силы:

$$F(\cos\beta + k\sin\beta) = mg(k\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$F = \frac{mg(k\cos\varphi + \sin\varphi)}{(\cos\beta + k\sin\beta)}$$

Видно, что минимальная сила будет при равенстве:

$$\tan\beta = k = \tan\alpha \qquad \beta = \alpha$$

Однако сила, с которой придется тащить санки, возрастет. Их отношение равно:

$$\frac{F'}{F}=\frac{k(k\cos\varphi+\sin\varphi)(\cos\alpha+k\sin\alpha)}{(\cos\beta+k\sin\beta)}=k(k\cos\varphi+\sin\varphi)$$

12. Работа сил трения.

Мы уже рассматривал задачи, в которых между телами или между поверхностью, по которой движется тело, появлялись силы трения скольжения при перемещении тел относительно друг друга. В этом разделе мы рассмотрим подробно работу сил трения, так как сделанные выводы будут необходимы в следующей части пособия «Динамика твердого тела».

В учебниках (во всех которые нам известны) встречается два термина: сила трения покоя и сила трения скольжения. Оба термина с нашей точки зрения не совсем удачные. Почему – будет ясно из примеров, приведенных ниже. Мы не будем менять установившейся терминологии. Важна, в конце концов, не сама терминология, а что понимается под этими терминами.

Но начинать по нашему мнению надо не с конкретных сил трения и работы этих сил, а с фундаментальных понятий энергии и работы силы. В этой части мы рассматриваем произвольное движение тел, которые можно считать точечными, (то есть тел, для которых можно пренебречь их собственной кинетической энергии вращения и моментом импульса) или поступательного движения протяженных тел.

Начнем с 2-го закона Ньютона, фундамента всей нерелятивистской механики. Подчеркну, так как это важно для всего понимания последующего материала, что закон сформулирован для точечного тела или протяженного тела, движущегося поступательно. Напишем уравнение второго закона, умножим его скалярно на вектор бесконечно малого перемещения $d\boldsymbol{r}$ и преобразуем левую часть уравнения:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}$$

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}d\boldsymbol{r}=m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}d\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v}$$

$$m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$$

Заметим, мы имеем право умножать на $d\boldsymbol{r}$, так как все точки тела, движущегося поступательно тела, за бесконечно малый промежуток времени перемещаются на равное для всех точек тела бесконечно малое перемещение (бесконечно малое приращение их скоростей так же одинаково).

Левая часть уравнения с точки зрения математики является дифференциалом функции $\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2}$. Поэтому интегрирование не вызывает труда:

$$\int m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v}=m\int(v_x dv_x+v_y dv_y+v_z dv_z)=m\int v_x dv_x+m\int v_x dv_x+m\int v_x dv_x$$

$$\int m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v}=\frac{mv_x^2}{2}+\frac{mv_y^2}{2}+\frac{mv_z^2}{2}=\frac{mv^2}{2}$$

Правая часть представляет собой элементарную работу силы при бесконечно малом перемещении тела:

$$\delta dA=\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$$

Мы умышленно написали δA, а не dA, чтобы подчеркнуть, что элементарная работа не является дифференциалом некоторой функции. При интегрировании ее в некоторых пределах, ответ не может быть записан в виде разности значений некоторой функции, вычисленных в начальной и конечной точках. Величина интеграла будет зависеть от траектории движения тела. Поэтому правую часть придется оставить в виде интеграла.

Результат интегрирования обсуждаемого уравнения в некоторых пределах

$$\frac{m\boldsymbol{v}_2^2}{2}-\frac{m\boldsymbol{v}_1^2}{2}=\int_1^2\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$$

с математической точки зрения есть первый интеграл исходного уравнения. Стоящие в левой части члены назвали кинетической энергией тела, а их разность является приращением кинетической энергии тела на участке движения от начального места нахождения тела, которое промаркировано индексом один, до места нахождения тела в конечном положении (2). Пусть вас не смущают слово место положения тела, ведь все его точки при поступательном движении сместились на одинаковые расстояния и в одном направлении.

Правую часть, **представляющий интеграл от суммы всех тел, действующих на тело**, назвали работой сил, действующих на тело при его перемещении.

Обратите внимание, что нет никаких оговорок, что это справедливо для таких сил, а не справедливо для таких. Абсолютно безразлично, что эти силы действуют при непосредственном контакте или на расстоянии, безразлично, движутся или покоятся эти тела, действующие на наше тело. Нам нет дела до окружающих тел вообще. Важно только одно – каков вектор силы, действующий на тело, движение которого мы изучаем.

Абсолютно бессмысленно говорить о работе сил, действующих на покоящееся тело. У него нет ускорения, левая часть второго закона – тождественный нуль, правая тоже. Интегрировать нечего, от пустоты или математически нуля, умеют брать интегралы только математики (результат – произвольная константа).

При построении механики Ньютона второй закон на языке математики является аксиомой. Остальное выводится с его использованием. Даже закон сохранения механической энергии. Так принято делать при изложении общей физике для студентов. И мы следуем этим традициям.

Следует сделать некоторые пояснения относительно вычисления работы силы. Работа силы при бесконечно малом перемещении, как было получено выше, равна

$$\delta A = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{l}$$

Бесконечно малый вектор $d\boldsymbol{l}$ тождественен $d\boldsymbol{r}$, но первое обозначение более ясно подчеркивает, что интегрирование ведется по траектории движения тела, которая совсем не обязана быть прямой.

При движении тела из начальной точки до конечной точки, работа равна интегралу по траектории движения:

$$A_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} d\boldsymbol{l}$$

Может возникнуть законный вопрос: «Зачем нужна формула, если для ее вычислении сначала надо найти траекторию, для нахождения которой надо проинтегрировать уравнение движения. А если мы его проинтегрировали, то энергия вычисляется из найденной скорости». Для некоторых задач она действительно бесполезна. Но есть силы, которые называются консервативными, для которых работа не зависит от траектории. Согласно другому определению, эквивалентному предыдущему, силы называются консервативными, если работа этих сил по **любому** замкнутому контуру равна нулю. Силы трения не консервативны. Во-вторых, могут быть задачи с заданной траекторией. Самый простой пример – трамвай, который движется по рельсам (если нет аварии).

Еще раз необходимо подчеркнуть в определение работы входит перемещение тела, **но не перемещение точки приложения силы**. Если вы скажете, что работа равна произведению силы на перемещение точки приложения силы, это будет ошибкой. Что это так вас убедят два простеньких примера. Опыт показывает, что большинство людей гораздо лучше понимают суть объясняемого, если это делать на простеньких примерах, которые не вызывают никакого сомнения.

Представьте себе брусок такой длинный, что за время движения он переместился на расстояние меньшее его длины. К бруску приложена постоянная сила посредством прикрепленной нему нити. Нить «проложена» по всей длине бруска. В начале движения она была прижата к бруску в самом его начале, то есть к тому концу бруска, которым он наезжает на горизонтальную поверхность. Во время движение точку прижатия нити меняют, так что к концу движения она оказывается прижатой к другому концу бруска. Точка приложения силы переместилась в противоположном направлении по отношению к направлению движения. Мы надеемся, что никто не будет утверждать, что работа равна произведению приложенной силы на длину бруска и работа отрицательна.

Теперь можно переходить к рассмотрению примеров, в которых мы разберем работу сил трения при поступательном движении тел.

Представьте себе опыт настолько простой, что можно не делать рисунка. На стол положен брусок. На одну стенку бруска параллельно поверхности стола действует сила растянутой пружины, увеличивая растяжение пружины, мы можем увеличивать силу, действующую на тело. Если сила недостаточно велика (или брусок достаточно тяжел), то он будет покоиться. Но обязательное условия покоя точечного или протяженного тела является равенство нулю всех сил, действующих на него. Если брусок, не смотря, на приложенную силу покоится, это означает, что на него в противоположном направлении действует другая сила. Эту силу и назвали силой трения покоя. Если на брусок действует возрастающая сила, то синхронно растет и сила трения покоя. Но так будет происходить до определенного предела. Наступит момент, когда сила трения покоя перестанет возрастать и внешняя сила, приложенная к бруску, станет больше максимально возможной силы трения покоя. В результате брусок начнет двигаться. Предельное значение силы трения покоя зависит от материала, из которого изготовлены тела и качества обработки поверхностей. Сразу оговоримся, что эмпирически установленное соотношение между силой трения при относительном перемещении тел, справедливо, только если поверхности микроскопически ровные и можно пренебречь деформацией тел. Никаких зубчиков, насыпанного песочка между телами! Далее опыт показывает, что сила трения меду телами в определенном приделе можно считать независящей от относительной скорости тел. Эту силу трения мы будем называть силой трения скольжения. Соотношение между силой трения скольжения и нормальной составляющей силы, с которой тело действует на поверхность, имеет вид (хорошо известный из школьного курса):

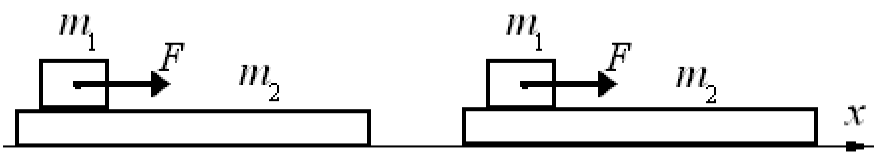
$$\boldsymbol{F}_{mp} = -\boldsymbol{e}_v F_{mp} = -\boldsymbol{e}_v kN$$

Мы выразили направление силы через единичный вектор $\boldsymbol{e}_v$, совпадающий с направлением скорости. Если масса тела равна m, тело движется по горизонтальной поверхности и больше никаких сил в вертикальном направлении на него не действует, то сила трения скольжения равна:

$$\boldsymbol{F}_{mp} = -\boldsymbol{e}_v F_{mp} = -\boldsymbol{e}_v kmg$$

Если мы считаем тело точечным, то принято все силы прикладывать к центру масс тела, нарисованного на поясняющем рисунке. Но сила трения не имеет определенной точки приложения. То, что мы называем силой трения, является, по сути, равнодействующей силой проинтегрированной по всей поверхности соприкосновения тел.

<u>*Задача 1*</u>. А теперь рассмотри два примера. На тело действует m_1 постоянная сила $\boldsymbol{F}$, величина которой меньше максимальной силы трения покоя, так что верхнее тело не перемещается по нижнему телу. Все величины, показанные на рисунке известны, коэффициент трения скольжения тоже. Для простоты выкладок будем считать, что трения между нижним телом и горизонтальной поверхностью отсутствует.



Рассматривая движение тел, оба тела можно было бы считать одним массой равной сумме масс обоих тел. Но наша задача разобраться с работой сил трения, в том числе, и с силой трения покоя. Поэтому мы будем рассматривать систему двух тел, которые взаимодействуют между собой.

Напишем уравнения движения для тел и проинтегрируем их до некоторого момента времени τ, считая, что в начальный момент времени тела покоились:

$$m_1 \frac{dv_{x1}}{dt} = F - F_{mp} \qquad S_1 = x_1(\tau) - x_1(0) = \frac{(F - F_{mp})\tau^2}{2m_1}$$

$$m_2 \frac{dv_{x2}}{dt} = F_{mp} \qquad S_2 = x_2(\tau) - x_2(0) = \frac{F_{mp}\tau^2}{2m_2}$$

Так как за время τ оба тела проходят один тот путь, то из правой системы можно найти связь между силами:

$$\frac{F - F_{mp}}{m_1} = \frac{F_{mp}}{m_2} \Rightarrow F_{mp} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$$

Это соотношение можно было получить из первой пары уравнений, не интегрируя их. Но приравняв ускорения, мы как бы переходим к единому телу. Это идеологически не очень хорошо для нашего рассмотрения.

На верхнее тело действует равнодействующая сила, направленная по оси x, равная:

$$F - F_{тр} = (1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2})F = \frac{m_1}{m_1 + m_2}F$$

Эта сила совершает работу, равную:

$$A_{12m_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}FS$$

На нижнее тело действует сила трения, направленная по оси x. Эта сила совершает работу, равную:

$$A_{12m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}FS$$

Сумма этих работ равна:

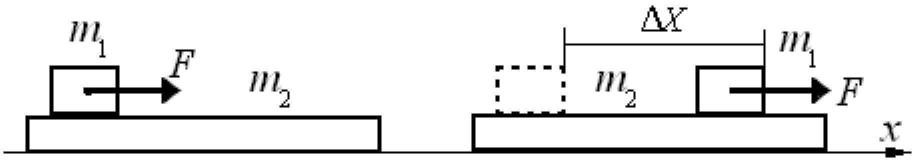
$$A_{12} = A_{12m_1} + A_{12m_2} = FS$$

Если бы мы объединили оба тело в одно, то на него бы действовала только внешняя сила и работа этой силы была равна работе, полученной строчкой выше.

Может возникнуть вопрос, а зачем столько вычислений, если ответ можно было написать сразу? Для дальнейшего изложения материала. Это раз. Во-вторых, теперь понятно, почему не хорош термин сила трения покоя для движущихся тел. Это во многих учебниках приводит к фразе: «Сила трения покоя работы не совершает». Да, ее суммарная работа для системы двух взаимно неподвижных тел равна нулю.

Но работа по определению – это работа конкретной силы, действующее на конкретное тело. Если система, движение которой мы изучаем, является только верхнее тело, то к нему приложены две силы: вешняя сила $\boldsymbol{F}$ и сила трения покоя. Наблюдатель, находящийся в верхнем кубике, понятия не имеет что под ним. Он измеряет в два момента времени энергию своего тела, зная внешнею силу и расстояние, на которое он сместился, вычисляет работу этой силы. И что же он обнаружит? Обнаружит, что приращение энергии меньше работы внешней силы. Если он знает немного физику, то сделает вывод, что какую-то силу он не учел. Он даже сумеет вычислить величину и направление этой силы из известных ему величин. Что из этого следует. А то, что сила трения покоя, приложенная к движущемуся телу работу совершает, как и все остальные силы. Если сила трения скольжения будет приложена неподвижному телу, то ее работа будет равна нулю.

<u>*Задача 2*</u>. Перейдем к рассмотрению движения тел, показанному на рисунке. В этой задаче, в отличие от предыдущей, нижнее тело под дей ствием силы трения между телами также начинает двигаться. Чтобы упростить выкладки выберем начало координат в точке на оси $\boldsymbol{x}$, совпадающей с положением верхнего тела (считая его точечным). Можно сразу написать уравнения движения, проинтегрированные по времени, так как от соответствующих уравнений для предыдущего примера они будут отличаться только выражением для силы трения и начальным условием:



$$v_{x1} = \frac{(F - km_1 g)\tau}{m_1} \qquad S_1 = x_1(\tau) = \frac{(F - km_1 g)\tau^2}{2m_1}$$

$$v_{x2} = \frac{km_1 g\tau}{m_2} \qquad S_2 = x_2(\tau) = \frac{km_1 g\tau^2}{2m_2}$$

Исключив время из двух уравнений для каждого тела, получим уравнения, связывающие скорости тел и пройденных ими расстояний:

$$\tau = \frac{m_1 v_{x1}}{(F - km_1 g)} \Rightarrow S_1 = x_1(\tau) = \frac{m_1 v_{x1}^2}{2(F - km_1 g)}$$

$$\tau = \frac{m_2 v_{x2}}{km_1 g} \Rightarrow S_2 = x_2(\tau) = \frac{km_1 g\tau^2}{2m_2} = \frac{m_2 v_{x2}^2}{2km_1 g}$$

Находим кинетические энергии тел:

$$\frac{m_1 v_{x1}^2}{2} = (F - km_1 g)S_1 = FS - km_1 gS$$

$$\frac{m_2 v_{x2}^2}{2} = km_1 gS_2$$

Кинетическая энергия системы двух тел равна сумме энергий тел:

$$E = E_1 + E_2 = FS - km_1 gS_1 + km_1 gS_2 = FS - km_1 g(S_1 - S_2) = FS - F_{mp}\Delta x$$

Таким образом, кинетическая энергия меньше работы внешней силы на величину, *численно равную произведению модуля силы трения скольжения, действующей между телами системы, на другую положительную величину - величину относительного перемещения этих тел (относительно друг друга). И хотя в разных инерциальных системах отсчета будут различаться и кинетические энергии, и перемещения тел, и работа внешней силы, суммарная работа сил трения скольжения двух трущихся друг о друга тел останется одной и той же, неизменной.*

Давайте подводить итоги.

1. Сила трения покоя не совершает работы, если она действует на неподвижное тело.
2. Сила трения покоя совершает работу, если тело движется. Ее работа вычисляется по той же формуле, как и для всех остальных сил. Другого, в принципе, быть не может. Мы же просто пользуемся определением понятия работы в физике. В этом случае термин сила трения покоя неудачен. Точнее было бы назвать ее силой трения относительного покоя (покоя тел относительно друг друга).
3. Убыль механической энергии численно равно произведению силы трения скольжения на величину относительного перемещения тел. На эту величину увеличивается внутренняя энергия тел (тепло). Последний член последней формулы не следует называть работой силы трения скольжения. Этот член относится не к конкретному телу, а ко всей системе тел. Мы не можем его поделить между трущимися телами. Механика Ньютона – механика макротел. А для расчета тепла, которое получило каждое тело, необходимо рассмотрение на микроскопическом уровне.

Придадим сделанному выводу математическую формулировку:

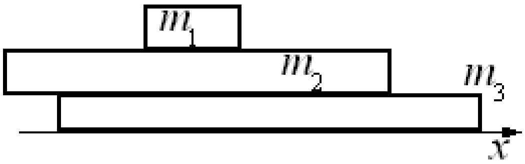
$$\Delta Q = kN_{\perp} dS_{12} \qquad\qquad Q_{12} = \int_1^2 kN_{\perp} dS_{12}$$

В этих формулах dS_{12} бесконечно малое относительное перемещение двух тел, вторая формула представляет собой интеграл по траектории движущегося тела. Если коэффициент трения скольжения и сила нормального давления постоянны, то формула упрощается:

$$Q_{12} = kN_{\perp} S_{12}$$

Величина S_{12} - путь, пройденный движущимся телом по не подвижному телу. Абсолютно безразлично, какое тело считать покоящимся. Третий вывод и эта формула будут необходимы при решении задач на плоское движение твердого тела.

4. В самом начале изложения этой темы было высказано, что принятые термины трения покоя и сила трения скольжения не очень удачны. Мы уже пояснили это для силы трения покоя. Почему неудачен термин сила трения скольжения? Рассматривая движение верхнего тела, показанное на нижней половине рисунка, никакого дискомфорта мы не почувствовали. А произошло это потому, что нижний брусок двигался. А если бы он покоился (был закреплен или трения покоя, действующая на него со стороны поверхности, могла бы уравновесить силу трения скольжения), то него действовала бы та же сила трения скольжения, причем точка приложении этой силы перемещалась по мере движения верхнего кубика. Вдумайтесь - сила есть, есть перемещение точки приложения силы, а работы этой силы нет. Если студента, безотносительно к задаче, спросить производят ли силы трения работу. То практически на сто процентов последует ответ: сила трения покоя работы не производит, а сила трения скольжения производит. Что сила трения покоя производит работу, было показано в первой задаче, что сила трения скольжения может не производить работы следует из примера, только что приведенного. Важно в обоих случаях не перемещение точки приложения силы, а перемещение тела, к которому она приложена. Поэтому в определениях сил следовало бы добавить слова: при относительном движении или относительном покое рассматриваемого тела.



Задача 3. Пример на тему третьего вывода. Предположим мы в какой-то момент времени знали взаимное положения тел, например у нас есть мгновенная фотография движения тел. Через некоторое время мы снова сделали фотографию. Имея две фотографии можно определить относительные перемещения каждой пары тел, и если поверхность имеет какие-либо маркеры, то и относительное перемещение нижнего тела относительно горизонтальной поверхностью. Предположим, что массы всех тел известны и известны все коэффициенты трения для каждой пары тел и коэффициент трения между нижним телом и поверхность, то, не зная ничего более, мы можем вычислить величину внутренней энергии (тепла), которую получила система за интервал времени между снимками:

$$Q = k_{12}m_1 g\left|x_2 - x_1\right| + k_{23}(m_1 + m_2)g\left|x_3 - x_2\right| + k_{3пов}(m_1 + m_2 + m_3)g\Delta S_3$$

Все обозначения общепринятые и можно не объяснять, ΔS_3 - пройденный путь нижним телом.

Задача 4. Предположим, что верхнее тело на нижней половине, первого приведенного выше рисунка в начальный момент находилось на самом конце нижнего тела, длина которого равна L. Так же будем считать, что трение с горизонтальной поверхностью нет. Внешняя показанная на рисунке сила F отсутствует. Найти начальную кинетическую энергию, которую надо сообщить верхнему точечному телу, чтобы оно упало с другого конца бруска.

Чтобы тело упало, необходимо, чтобы его скорость на конце бруска была на бесконечно малую величину больше скорости бруска в этот момент времени. Рассмотри предельный случай – равенство их скоростей. Используя закон сохранения импульса системы, находим эту скорость:

$$v = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \qquad E = \frac{m_1 + m_2}{2}\cdot\left(\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1^2 v_0^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}E_0$$

Закон сохранения полной энергии (не только механической, но внутренней!) будет иметь вид:

$$E_0 = E + Q \Rightarrow E_0 = E + km_1 gL$$

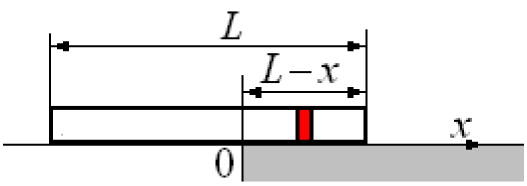
Осталось написать ответ:

$$E_0 = E + Q \Rightarrow E_0 = E + km_1 gL \Rightarrow E_0\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = km_1 gL$$

И окончательно:

$$E_0 \geq m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)kgL$$

Задача 5. Еще один пример для иллюстрации применение закона сохранения полной энергии. Брусок, показанный на рисунке, имел на гладкой поверхности (показана белым цветом) кинетическую энергию, равную E_0. Какую кинетическую энергию будет иметь брусок, когда он полностью окажется на поверхности с трением (показана серым цветом)?



Ясно, что мере движения сила трения будет меняться. Масса части бруска, находящейся на поверхности с трением, равна:

$$m' = \frac{m}{L}(L - x)$$

В этот момент сила трения равна:

$$F_{тр} = km'g = \frac{kmg}{L}(L - x)$$

Интегрируя по координате, находим увеличение внутренней энергии системы за счет трения:

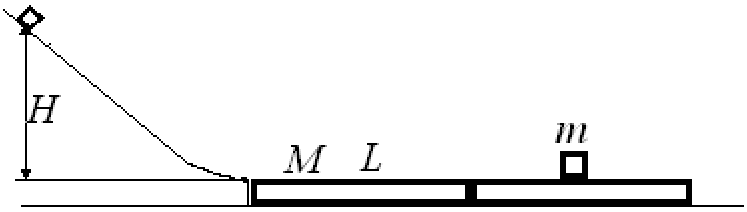
$$Q = \int_0^L \frac{kmg}{L}(L - x)dx = \frac{1}{2}kmgL$$

Формально ответ получился равным произведению силы трения на перемещение по поверхности с трением центра масс бруска. Но в нашей задаче брусок однородный и имеем форму параллелепипеда, то есть все Δm_i (закрашена красным цветом) одинаковы по величине, если они равной толщины. Для не однородного или не правильной формы тела это не так. И такого соответствия не будет.

Искомый же ответ задачи:

$$E = E_0 - \frac{1}{2}kmgL$$

<u>Задача 6</u>. И последний пример. С гладкой горки некоторой высоты (без трения) соскальзывает тело, плавно въезжает на брус и далее оба продолжают двигаться. Известны все величины, показанные на рисунке, и положение тел в некоторый момент времени (верхнее тело на средине). Коэффициенты трения скольжения между телами, брусом и горизонтальной плоскостью также известны. Известна скорость одного из тел. Надо определить скорость второго тела. Если вы поняли предыдущие, то тогда вам понятны уравнения:



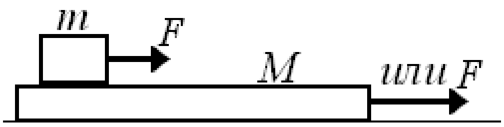
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}k_1 mgL + k_2(m+M)gL$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH$$

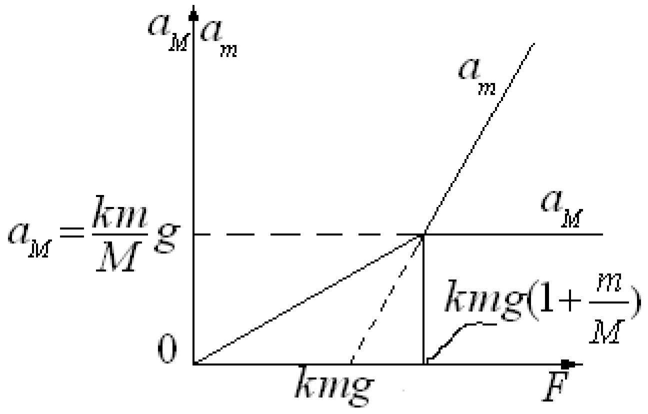
Решение тривиально. Из первого уравнения находите энергию того тела, скорость которого надо определить, и из энергии находите его скорость.

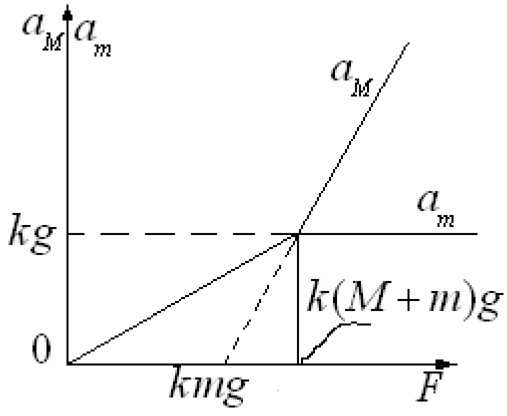
Методом интегрирования уравнений движения эту задачу решает только Чукча (никакого отношения к народности не имеет, просто «очень талантливый студент»). Но бывают случаи, когда и гениальные студенты решают ее как Чукча. Например, после пройденной темы законы Ньютона, до прохождения темы законы сохранения, препод (сокращение слов: ваш семинарист, ваш лектор и т.д.) устраивает самостоятельную работу и предупреждает: «Законами сохранения пользоваться нельзя, работу не засчитаю». Такое часто бывает, так как проверяется не вообще умение решать задачи, а усвоение конкретной темы. Это делается для вашего блага, чтобы не было «дырок» в понимании основного материала.

<u>Задача на построение графиков</u>. На гладкой горизонтальной поверхности лежит брус, а на нем покоится кубик. Поочередно на кубик или на брус начинает действовать увеличивающаяся сила параллельная поверхности. Между телами есть трение. Нарисовать графики ускорения тел в зависимости от величины приложенной силы (на одном рисунке для обоих тел). Проставить значения силы и ускорений для точек изменения характера движения тел. На первом рисунке с графиком показаны ускорения тел для случая, когда сила приложена к кубику. На участке от нуля до излома оба тела двигались с одинаковым ускорением. Кубик покоился относительно бруса. Затем началось проскальзывания кубика. С этого момента брус двигается с постоянным ускорением.



На втором рисунке показаны ускорения тел для случая, когда сила приложена к брусу. Эти задачи задаются на зачете или экзамене. Правильно нарисуете и, вполне возможно, что объяснять ничего не придется.





13. Движение тел в неинерциальных системах отсчета.

Из преобразования Галилея для скорости

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{v}'$$

видно, что ускорение в неподвижной системе координат (обозначения величин без штрихов), которую мы будем считать инерциальной, связано с ускорением в движущейся относительно нее (штрихованные) соотношением:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}'$$

Напишем уравнение движения (второй закон Ньютона) в движущейся системе:

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{a}_0 \qquad m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{in}$$

И если движущаяся система двигается с ускорением, то в ней возникают добавочные силы, называемые силами инерции $\boldsymbol{F}_{in}$. В отличие от «физических» сил, возникающих при взаимодействии тел, им нельзя указать тела, «порождающих» их. Может возникнуть вопрос. Зачем переходить в такую систему, в которой в уравнения движения появляются добавочные силы? Я приведу всего лишь один убедительный пример, что такой переход более чем оправдан. Предположим мы хотим рассчитать траекторию межконтинентальной ракеты. Если вы хотите провести расчет в инерциальной системе, то надо рассматривать это движение в системе связанной с Солнцем. Но тогда придется рассчитывать и движение Земли, то есть рассматривать движение двух взаимодействующих тел, одно из которых еще и вертится. Безусловно, проще считать Землю неподвижной, но ввести при этом силы инерции.

Начнем с самого простого случая. Система K' движется ускоренно, но движение поступательное. Тогда в ней возникает сила инерции равная:

$$\boldsymbol{F}_{in} = -m\boldsymbol{a}_0,$$

то есть направленная в противоположную сторону ее ускорению $\boldsymbol{a}_0$.

Мы ограничимся рассмотрением двумя видами движения системы K', которые нам необходимы для решения задач: 1. Система K' движется поступательно, 2. Система K' вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Для произвольного движения K' все выводы желающие могут посмотреть в первом томе Д.В. Сивухина.

Напомним правило дифференцирования произвольного вектора по времени:

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \boldsymbol{e}_A \dot{A} + [\boldsymbol{\omega A}],$$

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен плоскости, в которой поворачивается вектор $\boldsymbol{A}$ и направлен по правилу правого винта. Если величина вектора не меняется, а он только поворачивается, то в последнем выражении остается только второй член. Применим это выражение для дифференцирования по времени ортов вращающейся системы:

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_x}{dt}=[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{e}'_x] \qquad \frac{d\boldsymbol{e}'_y}{dt}=[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{e}'_y] \qquad \frac{d\boldsymbol{e}'_z}{dt}=[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{e}'_z]$$

Для того чтобы найти скорость в неподвижной системе координат, надо продифференцировать радиус-вектор в K' системе по времени с учетом того, что относительно неподвижного наблюдателя ее орты поворачиваются:

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_x v'_x+\boldsymbol{e}_y v'_y+\boldsymbol{e}_z v'_z)=(\boldsymbol{e}_x a'_x+\boldsymbol{e}_y a'_y+\boldsymbol{e}_z a'_z)+[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{v}']=\boldsymbol{a}'+[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{v}']$$

Теперь можно найти связь между ускорениями в этих системах (не забывая каждый раз дифференцировать орты, так как эти орты вращающейся системы координат):

$$\boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}'+[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}'])=\boldsymbol{a}'+[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}']+[\boldsymbol{\omega}\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}]=\boldsymbol{a}'+[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{v}']+[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{v}']+[\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}']]=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{2}[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{v}']+[\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}']]$$

Первые два члена после второго знака равенства находятся по формуле аналогичной выше для дифференцирования координаты:

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_x v'_x+\boldsymbol{e}_y v'_y+\boldsymbol{e}_z v'_z)=(\boldsymbol{e}_x a'_x+\boldsymbol{e}_y a'_y+\boldsymbol{e}_z a'_z)+[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{v}']=\boldsymbol{a}'+[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{v}']$$

Осталось написать уравнение движения (умножив предыдущее выражение на массу) во вращающейся системе. Но прежде преобразуем последнее слагаемое к более удобному виду

$$[\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{r}']]=[\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{R}']]=\omega^2 R'[\boldsymbol{e}_z[\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_R]]=\omega^2 R'[\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_\varphi]=-\omega^2 R'\boldsymbol{e}_R=-\omega^2\boldsymbol{R}'\,.$$

Заменяя произведение массы на ускорение в неподвижной системе на силу, окончательно получим:

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}+2m[\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\omega}]+m\omega^2\boldsymbol{R}'$$

Второе слагаемое называется силой Кориолиса, последнее центробежной силой:

$$\boldsymbol{F}_{кор}=2m[\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\omega}], \qquad \boldsymbol{F}_{цб}=m\omega^2\boldsymbol{R}'$$

Рассмотрим несколько ранее решенных задач, но с учетом вращения Земли.

Эпизод с экзамена. Препод: Напишите определение момента импульса частицы.

Чукча: $\boldsymbol{M}=m[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]$

Препод: Правильно. А если частица, относительно которой Вы вычисляете момент, двигается, то, как найти момент импульса другой частицы относительно движущейся?

Чукча: $\boldsymbol{M}_{12}=m_2[\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1]$

Препод: Молодец. Из двух точек, находящихся на горизонтальной поверхности на расстоянии S, одновременно бросили два точечных тела с одинаковыми скоростями v_0, под одинаковым углом к горизонту $\alpha=\pi/4$ навстречу друг другу. Найдите момент импульса одной частицы (точечного тела) относительно другой в момент времени, когда частицы будут находиться на высоте равной половине максимальной. Вы поняли условие?

Чукча: Условие понятно.

Препод начал спрашивать другого студента, а Чукча занялся вычислениями. Через некоторое время препод подошел посмотреть, что получилось. Но Чукча сказал, что он еще не готов, и у него кончилась бумага, так как требуются длинные вычисления. Не важно, чем кончился экзамен. А вот правильное решение имеет смысл привести.

В свободно падающей системе координат начальная относительная скорость частиц по модулю равна $2v_0\cos\alpha$. Но главное в том, что она направлена по прямой, соединяющей частицы. Следовательно, искомый момент импульса равен нулю. В последующие времена ситуация не изменится, так как по вертикали частицы будут двигаться синхронно. Бумага вообще не нужна, так как это можно сообразить в уме.

Несчастье в лифте. В движущемся с ускорением лифте из кармана выпал мобильник. Сколько времени будет падать телефон? Верх или вниз предпочтительней движение лифта для целостности мобильника? То есть надо найти какая относительная скорость меньше.

Если перейти в систему координат, связанную с лифтом, а начало оси y выбрать в точке начала падения телефона, то в этой системе второй закон Ньютона в проекции на ось y будет иметь вид:

$$yma_y = mg \pm ma$$

Знак плюс соответствует движению лифта вверх, знак минус – движению вниз. Времена падения соответственно будут равны (при высоте H, с которой его растяпа уронил):

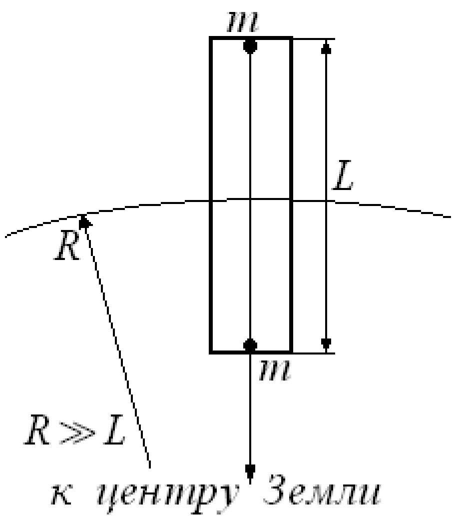
$$H = \frac{(g \pm a)\tau^2}{2} \;\Rightarrow\; \tau = \sqrt{\frac{2H}{g \pm a}}$$

Находим относительную скорость в момент удара мобильника о пол:

$$v(\tau) = (g \pm a)\tau = \sqrt{2H(g \pm a)}$$

Как видите, если ронять, так уж лучше, когда едешь вниз. Если трос лифта оборвется, то телефон можно успеть положить обратно в карман, хотя особого смысла в этом нет.

О невесомости на спутниках. Приливные силы. На круговой орбите в экваториальной плоскости летает массивный спутник, имеющий форму цилиндра. В нем находятся два космонавта, массой которых можно пренебречь по сравнению с массой спутника, которой можно считать однородным цилиндром. Чему будет равно натяжение невесомого шнура, если космонавты начнут уменьшать его длину? Размеры, проставленные на рисунке, считать известными.



Рассмотрим силы, действующие на космонавтов в системе координат, связанной со спутником. В системе координат, связанной со спутником, выберем начало координат на оси y в центре масс спутника (ось y совпадает по направлению с радиусом к центру масс). В этой системе на космонавта действуют две силы: притяжение к Земле и центробежная сила инерции. Их суммарная проекция на ось y равна:

$$F_y = m\omega^2(R + y) - G\frac{mM}{(R + y)^2}$$

В силу малости размера спутника по сравнению с расстоянием его от центра Земли второй член можно разложить по малому параметру y/R и ограничиться первым приближением. Учтя, что при $y = 0$ эти силы равны, получим:

$$F_y = m\omega^2 R + m\omega^2 y - G\frac{mM}{R^2} + 2G\frac{mM}{R^2}\frac{y}{R}$$

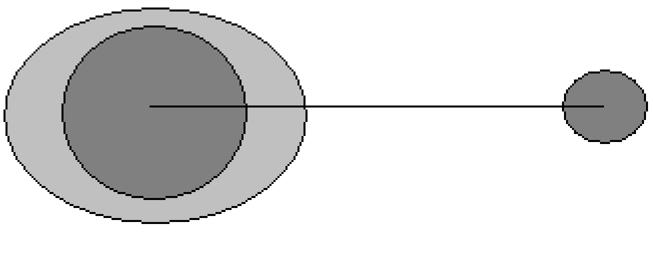
$$F_y = m\omega^2 y + 2G\frac{mM}{R^2}\frac{y}{R} = (m\omega^2 R - G\frac{mM}{R^2})\frac{y}{R} + 3G\frac{mM}{R^2}\frac{y}{R}$$

$$F_y = 3G\frac{mM}{R^2}\frac{y}{R}$$

Если космонавты начнут тянуть на себя шнур, чтобы начать медленно двигаться дуг к другу, то в начальный момент натяжение шнура будет равно:

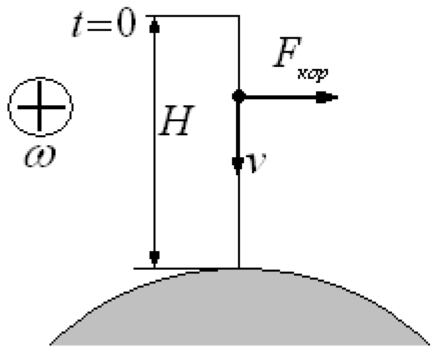
$$F_y = \frac{3}{2}G\frac{mM}{R^2}\frac{L}{R}$$

С такой же по величине каждый давит на свой «пол» (что для другого потолок). Так что, на больших космических спутниках абсолютной невесомости нет.



Аналогичные силы возникают при вращении Земли и Луны вокруг их центра масс. Эти силы вызывают приливы на участках океанов, которые находятся на прямой, проходящей через центры Земли и Луны. На рисунке схематично (масштаб не соблюден для его наглядности) зоны прилива и отлива. Некоторые делают часто ошибку, считая, что на поверхности самой близкой наблюдается прилив, а на самой дальней отлив. Эти силы задолго до запусков спутников получили название приливных сил.

Падение тела в поле тяжести Земли, с учетом ее вращения. Рассмотрим падения тела на экваторе. Будем считать известной высоту, на которой тело отпустили с воздушного шара, который находился неподвижным относительно поверхности земли. Задачу будем решать в системе связанной с вращающейся Землей. На падающее тело кроме силы тяжести будут действовать силы инерции. Если пренебречь непостоянством гравитационной силой по высоте и силой сопротивления, то надо пренебречь и центробежной силой инерции. Все эти силы направлены по вертикали. По горизонтали есть только сила Кориолиса. Ее величина такого же порядка величины, как и те поправки, которые мы не будем учитывать. По вертикали поправки малы по сравнению с силой тяжести и мы можем ими пренебречь для получения несколько приближенного решения. По горизонтали нет сил, по сравнению с которыми мы могли бы пренебречь силой Кориолиса. Поэтому, если мы хотим рассмотреть эффекты, обусловленные вращением Земли, мы должны ее учесть.



Уравнение движения по вертикали при сделанных пренебрежениях останется таким же, как и в решениях задач без учета вращения Земли:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}t$$

$$y = H - \frac{gt^2}{2}$$

Время падения будет равно:

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

По горизонтали уравнение движения будет иметь вид:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{кор}$$

$$ma_x = 2m\omega gt$$

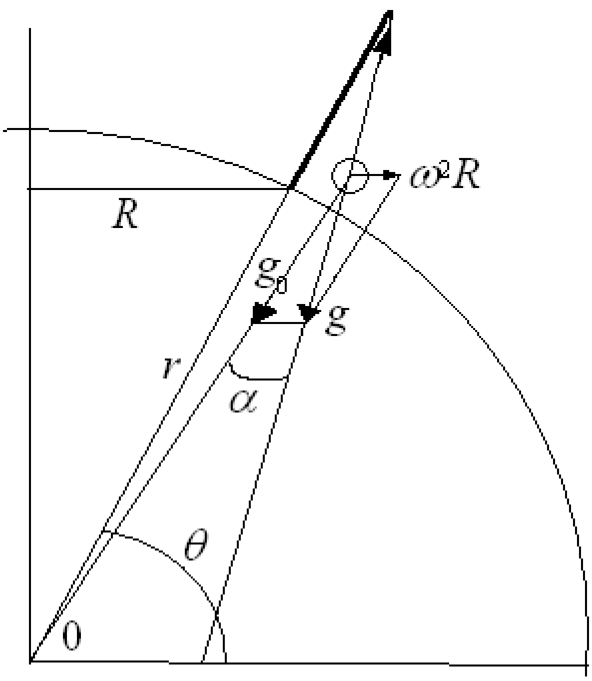
Интегрируя, находим скорость и перемещение тела по горизонтальному направлению:

$$v_x = \omega gt^2 \qquad x = \frac{1}{3}\omega gt^3$$

Таким образом, тело упадет в точку, которая будет смещена на восток от вертикали на расстояние равное:

$$\Delta S = \frac{1}{3}\omega g\frac{2H}{g}\sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{2}{3}\omega H\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

При высоте 100м. смещение около двух сантиметров. Как видите, что считая Землю инерциальной системой, мы делаем совсем небольшую ошибку. При высоте в километры нельзя будет пренебречь сопротивление воздуха.



Вес тела с учетом вращения Земли. Весом тела называют силу, с которой неподвижное тело растягивает нить, на которой оно подвешено, или давит на подставку, на которой оно лежит. На плюсах отсутствует центробежная сила инерции и на них вес тела равен:

$$P = mg_0 = G\frac{mM}{r^2} \qquad g_0 = G\frac{M}{r^2}$$

На экваторе вес тела минимален. Вычислим ускорение свободного падения для произвольной широты θ. На рисунке искажен масштаб величин. Грузик, подвешенный на нити, фактически находится в точке основания подставки, к которой привязан верхний конец нити. Поэтому при дальнейших вычислениях мы будем считать, что вектор $\boldsymbol{g}_0$ совпадает с линией радиуса Земли.

Из рисунка видно, что искомое ускорение является малой диагональю параллелограмма, построенного на векторах g_0 и $\omega^2 R$ с известным углом θ между этими сторонами треугольника. Следовательно, величина g вычисляется из теоремы Пифагора:

$$g^2 = (\omega^2 R\sin\theta)^2 + (g_0 - \omega^2 R\cos\theta)^2$$

Преобразуем это выражения, учитывая малость поправки:

$$g^2 = (\omega^2 R)^2 + g_0^2 - 2g_0\omega^2 R\cos\theta = g_0^2 + (\omega^2 r\cos\theta)^2 - 2g_0\omega^2 r\cos^2\theta$$

$$g^2 \simeq g_0^2(1 - 2\frac{\omega^2 r}{g_0}\cos^2\theta)$$

$$g \simeq g_0\sqrt{1 - 2\frac{\omega^2 r}{g_0}\cos^2\theta} \simeq g_0 - \omega^2 r\cos^2\theta$$

Таким образом, вес тела с учетом вращения Земли равен:

$$P = m(g_0 - \omega^2 r\cos^2\theta)$$

Ответ приближенный не только из-за отбрасывания малых членов, но и потому, что вычисления сделаны без учета того, что Земля насколько сплюснута, то есть экваториальный радиус больше полярного. Это искажение шарообразной формы также является следствием центробежных сил.

Замечания 1. Если при решении задачи вы переходите в другую систему координат, движущуюся относительно исходной (вне зависимости будет она инерциальной или нет) начальные условия также изменяются и не учет этого может повлечь ошибку в решении. Самый простой пример. Самолет летит горизонтально с постоянной скоростью, и с него сбрасывают бомбу. Если вы перейдете в систему, связанную с самолетом. Уравнение движения бомбы будут одинаковыми в обеих системах. Но в системе, связанной с землей, начальная скорость бомбы равна скорости самолета и ее траектория будет параболой. В систем, связанной с самолетом, ее начальная скорость будет равна нулю, и бомба будет двигаться по вертикальной прямой. Одинаковость закона движения совсем не означает одинаковость движения тела.

Второй пример. В вагоне, движущемся по горизонтальной поверхности, имеется маленький шарик, подвешенный на длинной невесомой нити. Шарику сообщили некоторую скорость. Шарик будет колебаться. Для талых колебаний вы знаете формулу для периода колебаний математического мятника. Он обратно пропорционален квадратному корню из ускорения свободного падения, в покоящемся вагоне. Период колебаний уменьшится, так как в формулу для периода при расчете в ускоренно движущемся вагоне надо вместо ускорения подставить эффективное $g_{эфф}$, равное $g_{эфф} = \sqrt{g^2 + a^2}$. Мы не будем подробнее разбирать здесь эту задачу, отложив ее до второй части пособия, специально посвященному механическим колебаниям.

Но если вы сформулируете вопрос задачи, не как найти период колебаний в ускоренно движущемся вагоне, а в другой формулировке (ниже), то она может оказаться некорректной и задачу без дополнительных условий нельзя будет решить. Например, такое условие. Шарик отвели так, что нить оставалась натянутой и составляла некоторый угол с вертикалью. Шарик отпустили, а вагон начал двигаться в тот же момент с ускорением a. Как будет двигаться шарик? Условие задачи не корректно, так как шарик можно отвести на такой угол, что он будет покоиться.

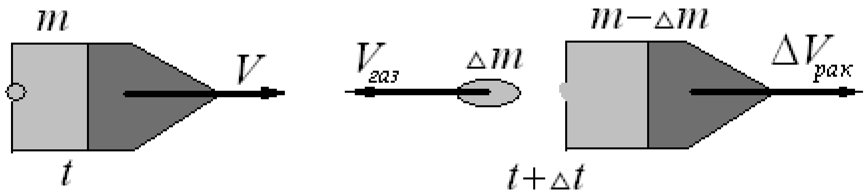
Замечания 2. В конце семинара преподы обычно задают домашние задание. И пришла блестящая мысль последовать этой «дурной» привычке. Посему не пропустите написанную задачу ниже.

***Задание 1*. В застрявшем лифте на подставке, прикрепленной к полу, качается маленький шарик на невесомом твердом стержне. В нижней точке шарик имеет такую кинетическую энергию, что максимальный угол отклонения равен $\pi/2$. Ремонтники упустили трос и лифт начал падать с ускорением g. В этот момент шарик находился в нижней точке. Сработало предохранительное устройство, и лифт резко остановился. В момент остановки шарик находился в верхней точке, стержень за время падения повернулся на угол 3π. Найти максимальную энергию шарика в остановившемся лифте и объяснить причину ее изменения.**

Ждем ваших решений, пишите. Решите правильно, опубликуем. Не забудьте сообщить от кого решение.

14. Движение тел с переменной массой.

На рисунке схематично показано движение ракеты в два очень близких момента времени. За этот промежуток времени из сопла ракеты была выброшена порция газа, образовавшаяся при сгорании топлива.



На правой половине рисунка показаны величины скоростей и их направления в системе координат, движущейся со скоростью, с которой ракета двигалась до выброса газа. Из закона сохранения импульса замкнутой системы двух тел (мы будем пока предполагать, что внешних сил нет) получаем соотношение:

$$\Delta m v_{газ} = (m - \Delta m) v_{рак} \qquad \Delta m (v_{газ} + v_{рак}) = m v_{рак}$$

Сумма абсолютных скоростей в левой части второго равенства является скорость истечения газа относительно сопла ракеты. Скорость ракеты в правой части по физическому смыслу является приращением скорости ракеты относительно системы координат, в которой рассматривается движение ракеты:

$$m \Delta v = v_{отн} \Delta m$$

Поделив обе части равенства на Δt и переходя к пределу, получим уравнение движения для тела с переменной массой:

$$m a_x = \mu v_{отн} + F_x$$

Мы добавили для общего случая внешнюю силу, которая в рассмотренной ниже задаче будет силой притяжения ракеты к Земле. Коэффициент $\mu = dm/dt$ мы будем считать постоянным, как в большинстве реальных конструкций. Первое слагаемое в правой части называют реактивной силой. А полученное уравнение получило название уравнения Мещерского. Стоит обратить внимание, что в уравнении масса – это масса, меняющаяся во времени. Ниже мы рассмотрим, по какому закону она убывает по времени.

Найдем величину скорости движения ракеты, предполагая, что внешних сил нет и скорость истечения газа постоянна:

$$m \frac{dv}{dt} = v_{отн} \frac{dm_{газ}}{dt}$$

Заменим массу газа на убыль массы ракеты:

$$\frac{dv}{v_{отн}} = -\frac{dm}{m}$$

Интегрируем:

$$\frac{v}{v_{отн}} = -\ln m + C$$

Если принять начальную скорость ракеты равной нулю, а ее массу обозначить m_0, то константа интегрирования будет равна $C = \ln m_0$. Учтя это, получим:

$$\frac{v}{v_{отн}} = \ln \frac{m_0}{m} \qquad m = m_0 e^{-\frac{v}{v_{отн}}}$$

Используя первую формулу можно грубо оценить массу необходимого топлива. Зная первую космическую скорость (около 8 км/с и относительную скорость истекающего газа, примерно, 2 км/с) отношение масс равно примерно 55. Во столько раз масса топлива превышает массу грузы выведенную на орбиту. Эта оценка занижена, так как мы не учитывали силу притяжения ракеты к земле при наборе высоты.

Движение ракеты в поле тяжести. Рассмотрим вертикальный старт ракеты в предположении, что сила тяжести постоянна (высота поема много меньше радиуса Земли) и коэффициент $\mu = const$. Уравнение Мещерского для рассматриваемой задачи будет иметь вид:

$$m\frac{dv_y}{dt}=\mu\, v_{отн}-mg$$

Выразим в нем массу в произвольный момент времени через начальную массу ракеты и ее убыль за время от начала движения:

$$(m-\mu\, t)\frac{dv_y}{dt}=\mu\, v_{отн}-(mg-\mu\, t)g$$

Разделим переменные в уравнении:

$$dv_y=\frac{\mu\, v_{отн}}{m-\mu\, t}dt-gdt$$

Проинтегрируем уравнение:

$$v_y=-v_{отн}\ln(m-\mu\, t)-gt+C$$

Определим константу интегрирования из начальных условий:

$$0=-v_{отн}\ln m_0+C \qquad C=v_{отн}\ln m_0$$

Таким образом, скорость ракеты растет равна:

$$v_y=v_{отн}\ln\frac{m_0}{m-\mu\, t}-gt$$

Для определения высоты подъема ракеты это уравнение надо еще раз проинтегрировать:

$$y=v_{отн}\int\ln\frac{m_0}{m-\mu\, t}dt-\frac{gt^2}{2}+C$$

Сведем интеграл к табличному виду, сделав подстановку $m-\mu\, t=z$ и $dt=-dz/\mu$:

$$\int\ln\frac{m_0}{m-\mu\, t}dt=-\frac{1}{\mu}\int\ln m_0 dz+\frac{1}{\mu}\int\ln zdz=-\frac{z\ln m_0}{\mu}+\frac{1}{\mu}\int\ln zdz$$

Интеграл в последнем равенстве есть в любом справочнике. Его надо списать. Затем использовать сделанную подстановку в обратном направлении: $z=m-\mu\, t$. Далее определить константу интегрирования из начальных условий $y(0)=0$. Подставить ее в полученное выражение и получить такой ответ:

$$y=v_{отн}t+\frac{v_{отн}m_0}{\mu}(1-\frac{\mu\, t}{m_0})\ln(1-\frac{\mu\, t}{m_0})-\frac{gt^2}{2}$$

Для малых высот ответ также приближенный, так как не было учтено сопротивления. Ошибка не очень велика, так как при малых скоростях оно невелико, при больших скоростях ракета поднимется достаточно высоко, и атмосфера будет разреженной.

А за окном пошел дождь, и родилась задача. Рассмотрим, как будет двигаться образовавшаяся капелька. При ее движении масса капельки не будет постоянной. Если в окружающей атмосфере водяной пар пересыщен, то будет происходить конденсация, и масса капли будет расти. Скорость увеличения массы капли можно считать пропорциональной поверхности капли-зародыша. В момент образования капля-зародыш покоится, но под действием силы тяжести начинает падать с ускорением g. Уравнение движения можно написать в виде:

$$\frac{d(mv_y)}{dt}=mg-F_{сопр}$$

Начало координат выбрано в точке образования капли, ось координат направлена по направлению к земле.

Приращение массы капли в зависимости от времени можно записать в виде:

$$\frac{dm}{dt}=\alpha S$$

В этой формуле α постоянный коэффициент, а S площадь поверхности капли. Там где образуются зародыши, пар пересыщен. Следовательно, коэффициент $\alpha>0$.

Силу сопротивления можно записать в виде:

$$F_{сопр} = \beta S v_y$$

S имеет тот же смысл, а коэффициент β также будем считать постоянным.

Таким образом, второй закон Ньютона для движения капли можно записать в виде:

$$\frac{d(mv_y)}{dt} = mg - \beta S v_y$$

В уравнении три неизвестных функции времени. Кроме этого уравнения есть уравнение, связывающее между собой массу и поверхность капли. Фактически мы должны решить систему двух дифференциальных уравнений при начальных условиях:

$$v(0) = 0 \quad S(0) = S_0 = 4\pi R_0^2 \quad m(0) = m_0 = \frac{4\pi}{3}\rho R_0^3$$

Попробуем свести систему к одному уравнению с двумя переменными. Так задано уравнение роста массы в зависимости от ее площади, которая пропорциональна радиусу капли и ее масса также пропорциональна радиусу, то можно найти, как меняется радиус капли в зависимости от времени:

$$\frac{d(\frac{4}{3}\pi\rho R^3)}{dt} = 4\pi\alpha R^2 \qquad \frac{\rho dR}{dt} = \alpha \qquad R = \frac{\alpha}{\rho}t + C$$

Учтя начальное условие, получим зависимость радиуса капли от времени (значит и ее массы):

$$R = R_0 + \frac{\alpha}{\rho}t$$

Если в уравнении движении выразить массу и поверхность через радиус капли, то получим:

$$\frac{d(\frac{4}{3}\pi\rho R^3 v_y)}{dt} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 g - \beta 4\pi R^2 v_y$$

$$\frac{d(R^3 v_y)}{dt} = R^3 g - \frac{3\beta}{\rho} R^2 v_y$$

К этому уравнению мы имеем производную радиуса по времени и зависимость радиуса от времени. Есть две возможности. Первая исключить время из этого уравнения или подставить в него радиус как функцию времени. Если пойти первым путем, то получим уравнение:

$$\frac{\alpha d(R^3 v_y)}{\rho dR} = R^3 g - \frac{3\beta}{\rho} R^2 v_y$$

$$\frac{d(R^3 v_y)}{dR} = \frac{\rho g}{\alpha} R^3 - \frac{3\beta}{\alpha} R^2 v_y$$

Если пренебречь при малых временах силой сопротивления, то уравнение без труда интегрируется:

$$R^3 v_y = \frac{\rho g}{4\alpha} R^4 + C$$

Находим константу интегрирования, и подставляя ее в решение, находим:

$$0 = \frac{\rho g}{4\alpha} R_0^4 + C$$

$$v_y = \frac{\rho g}{4\alpha} R - \frac{\rho g}{4\alpha}\frac{R_0^4}{R^3} = \frac{\rho g}{4\alpha}\left(R - \frac{R_0^4}{R^3}\right)$$

Подставляя зависимость радиуса от времени, находим скорость капли:

$$v_y = \frac{\rho g}{4\alpha}(R_0 + \frac{\alpha}{\rho}t - \frac{R_0^4}{(R_0 + \frac{\alpha}{\rho}t)^3})$$

При совсем малых временах, когда капля только начинает расти, ее скорость равна:

$$v_y = \frac{\rho g R_0}{4\alpha}(1 + \frac{\alpha}{\rho R_0}t - 1 + 3\frac{\alpha}{\rho R_0}t) = \frac{\rho g R_0}{4\alpha} \cdot \frac{4\alpha}{\rho R_0}t = gt$$

Это является проверкой правильности решения.

Перейдем к решению этой задаче с учетом силы сопротивления. Для удобства напишем еще раз уравнение движения, заменив в нем первый на сумму двух производных:

$$: \ R^3\frac{dv_y}{dR} + 3R^2 v_y = \frac{\rho g}{\alpha}R^3 - \frac{3\beta}{\alpha}R^2 v_y$$

Далее идут элементарные преобразования, которые ясны без пояснений:

$$\frac{dv_y}{dR} + \frac{v_y}{R}(3 + \frac{3\beta}{\alpha}) = \frac{\rho g}{\alpha}$$

$$\frac{dv_y}{dR} + A\frac{v_y}{R} = B$$

Так как

$$\frac{d(R^{A+1}v_y)}{dR} = R^{A+1}\frac{dv_y}{dR} + AR^A v_y$$

$$\frac{d(R^{A+1}v_y)}{R^{A+1}dR} = \frac{dv_y}{dR} + A\frac{v_y}{R}$$

То уравнение движения преобразуется к виду:

$$\frac{d(R^{A+1}v_y)}{R^{A+1}dR} = B \qquad \frac{d(R^{A+1}v_y)}{dR} = BR^{A+1}$$

Последнее уравнение элементарно интегрируется:

$$R^{A+1}v_y = \frac{B}{A}R^{A+2} + C$$

Из начального условия находим константу:

$$0 = \frac{B}{A}R_0^{A+2} + C$$

Таким образом, зависимость скорости частицы от ее радиуса имеет следующий вид:

$$v_y = \frac{B}{A}R - \frac{B}{A} \cdot \frac{R_0^{A+2}}{R^{A+1}} = \frac{B}{A}(R - \frac{R_0^{A+2}}{R^{A+1}})$$

Задача решена. Чтобы найти зависимость скорости от времени надо подставить в формулу, вычисленную ранее зависимость радиусу капли от времени, и заменить A и B через известные величины:

$$A = 3(1 + \frac{\beta}{\alpha}) \qquad B = \frac{\rho g}{\alpha}$$

Мы не будем выписывать громоздкую формулу после всех замен.

Но нам кажется, что стоит прояснить еще один (не пугайтесь, последний) вопрос. Вы знаете, что скорость тела, падающего в вязкой среде, замедляется и выходит на константу при равенстве силы сопротивления силе тяжести. Интересно посмотреть, при каких условиях в этой задаче скорость падения становиться постоянной.

Мы не будем искать решение при очень больших временах, а применим другой метод. Так как уравнение движения, написанное для произвольного момента времени, должно описывать при больших временах и движение с постоянной скоростью, то мы просто будем считать ее постоянной в исходном уравнении. При таком предположении оно перейдет в следующее уравнение:

$$v_y \frac{dm}{dt} = mg - \beta S v_y$$

$$\alpha S v_y = mg - \beta S v_y$$

$$\frac{4\pi R^3}{3} \rho g = (\alpha + \beta) 4\pi R^2 v_y$$

$$R\rho g = (\alpha + \beta) v_y$$

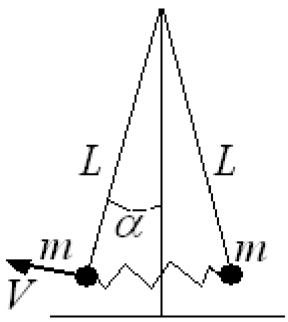
$$v_y = \frac{\rho g}{(\alpha + \beta)} (R_0 + \frac{\alpha}{\rho} t)$$

Вы видите, мы пришли к противоречию, положив скорость постоянной, получили из уравнения, что она линейно возрастает. Следовательно, можно сделать вывод, что при росте капли, она все время до ее падения на землю будет двигаться ускоренно. Скорость может стать постоянной только, если она попадет в зону, в которой будет равновесие между жидкой и паром ($\alpha = 0$).
Вот к чему привел начавшийся дождь за окном.

Квазистатика. На вертикальной стойке на невесомых стержнях подвешены два одинаковых шарика, в тонкой оболочке которых находится вода. Шарики скреплены пружиной, коэффициент жесткости которой известен. Длина недеформированной пружины l_0. В начальный момент шарики находились на расстоянии $l_{нач}$ (по прямой линии между ними). Шарики оказались бракованные с трещинками, и вода начала просачиваться через них и капать на пол. Предположим, что убыль воды в обоих шариках одинаковая и пропорциональна времени:

$$\frac{dm}{dt} = \mu = const$$

Через какое время расстояние между ними увеличится вдвое?



Эта задача не на уравнение Мещерского и даже не на динамику. Из-за медленности вытекания жидкости можно считать, что шарики в каждый момент времени покоятся и из условия равновесия находить расстояние между ними. Рассмотрим в произвольный момент времени условия равновесия левого шарика:

$$mg = T\cos\alpha$$

$$k(l_0 - l) = T\sin\alpha$$

Исключив ненужное натяжение стержня, находим уравнение, связывающее массу шарика с расстоянием между ними:

$$\frac{k(l_0 - l)}{mg} = \tan\alpha$$

Тангенс угла отклонения шарика от вертикали можно определить из геометрии:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{L^2 - \frac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4L^2 - l^2}}$$

Исключив его из уравнений, получим окончательное уравнение, связывающее массу шарика с расстоянием между ними:

$$\frac{k(l_0 - l)}{mg} = \frac{l}{\sqrt{4L^2 - l^2}}$$

$$mg = \frac{1}{l} k(l_0 - l)\sqrt{4L^2 - l^2}$$

В начальный момент масса шарика была равна m_0, и начальное расстояние определяется из формулы:

$$m_0 g = \frac{1}{l_{нач}} k(l_0 - l_{нач})\sqrt{4L^2 - l_{нач}{}^2}$$

По такой же формуле находим конечную массу шарика:

$$m_{кон} g = \frac{1}{l_{кон}} k(l_0 - l_{кон})\sqrt{4L^2 - l_{кон}{}^2}$$

Для вычисления конечной массы надо вместо конечной длины подставить удвоенную начальную длину. Затем находим разность масс и, поделив ее μ, находим время движения шариков:

$$\tau = \frac{m_0 - m_{кон}}{\mu}$$

В этой задаче главное не получить конкретный результат, а ознакомить вас с методом квзистатики, которым решается широкий круг задач не только в механике, но и в других разделах физики.

Задача разбиралась на семинаре. После объяснения последней формулы, один из студентов заявил, что может решить эту задачу проще. Ему было предоставлено слово. Вот что он изложил.

Эту задачу проще решить, если воспользоваться законом сохранения энергии. Если ноль потенциальной энергии выбрать на уровне начального положения шариков, то начальная энергия системы равна упругой энергии пружины:

$$U_0 = \frac{k(l_0 - l_{нач})^2}{2}$$

Чтобы вычислить энергию системы в конечном положении, надо найти высоту шариков в конечном состоянии:

$$H_0 = \sqrt{L^2 - \frac{l_{нач}^2}{4}} \qquad H_{кон} = \sqrt{L^2 - l_{нач}^2}$$

$$\Delta H = \sqrt{L^2 - \frac{l_{нач}^2}{4}} - \sqrt{L^2 - l_{нач}^2}$$

Находим конечную энергию системы:

$$U_{кон} = \frac{k(l_0 - 2l_{нач})^2}{2} + 2m_{кон} g \Delta H$$

Приравняв энергии, находим массу шарика. И здесь прозвенел звонок.

<u>Задание 2</u>. **Добавим к этому объяснению, что пол, на который выливается вода, можно считать находящимся на уровне первоначального положения шариков. Ответьте на вопрос: можно ли решать задачу предложенным способом? Ответ обязательно поясните, так как вероятность его угадать, равна одной второй.**

15. Закон тяготения Ньютона.

<u>Законы Кеплера</u>. И. Кеплер на основании астрономических наблюдений Т. Браго сформулировал законы движения планет вокруг Солнца:

1. Траектории, по которым движутся планеты, являются эллипсами. Солнце находится в одном из фокусов эллипса.
2. Радиус-вектор, проведенный из Солнца к планете, «отметает» за одно и то же время равные площади.
3. Отношение квадратов периодов к кубу их расстояний от Солнца имеет одно и то же значение для всех планет.

Планеты солнечной системы можно считать движущимися по круговым орбитам, и мы в дальнейшем будет считать, что орбита Земли окружность. Более правильно в третьем законе говорить, что отношение берется к кубу большой полуоси эллипса.

На основании этих законов можно получить закон тяготения Ньютона, но при этом надо считать, что второй и третий законы Ньютона уже известен. При равномерном движении по окружности на одинокую планету действует единственная сила – сила притяжения, которую мы будем считать неизвестной:

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{m}{R} \cdot \frac{(2\pi R)^2}{T^2} = 4\pi^2 \frac{m}{R^2} \cdot \frac{R^3}{T^2} = Const \cdot \frac{m}{R^2}$$

Точно такая же по величине сила действует на Солнца со стороны планеты. В силу равноправия, мы должны в формулу ввести массу Солнца (чтобы не обижать нашу Землю). Тогда в формуле останется только пока неизвестный постоянный коэффициент (не безразмерный!):

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

Его величина впервые была измерена Кавендишем.

Таким образом, из закона тяготения Ньютона можно вычислить массу Земли, применив его к телу, покоящегося на поверхности Земли, или свободно падающего на не большой высоте:

$$F = G\frac{M_{зем}m}{R^2_{зем}} = mg \qquad G\frac{M_{зем}}{R^2_{зем}} = g \qquad M_{зем} = \frac{gR^2_{зем}}{G}$$

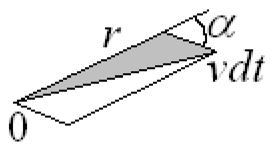
Затем можно вычислить массу Солнца и всех планет:

$$F_{центр} = F_{тягот} \Rightarrow \frac{M_{зем}V^2_{орбит}}{R_{зем-солнце}} = G\frac{M_{зем}M_{солнце}}{R^2_{зем-солнце}} \Rightarrow M_{солнце} = \frac{M_{зем}V^2_{орбит}R_{зем-солнце}}{G}$$

Выше неявно было сделано предположение, что закон притяжения, сформулированный из наблюдения движения планет, находящихся на расстояниях много больших их размеров (то есть для точечных масс), справедлив и для притяжения массивным шаром точеной массы при малом расстоянии между ними. Нам кажется, что это предположение нужно обосновать более строго. Поэтому сделаем небольшое теоретическое отступление, в котором познакомимся более подробно с понятием поля и его характеристиками.

Второй закон Кеплера является следствием закона сохранения импульса замкнутой системы Солнце-планета (то есть без учета взаимодействия планет друг с другом):

$$\boldsymbol{M} = m[\boldsymbol{rv}] = const$$



На рисунке залита серым цветом площадь отметаемая радиус векторлм за бесконечно малое время. Площадь этого треугольника равна половине площади параллелограмма:

$$S = \frac{1}{2}rvdt\sin\alpha$$

Производная по времени, представляющая собой отметаемую площадь в единицу времени, равна:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}rv\sin\alpha = \frac{1}{2}\left|[\boldsymbol{rv}]\right| = \frac{1}{2m}M = const$$

Из этого выражения и следует второй закон Кеплера.

<u>Гравитационное поле. Напряженность поля и потенциал</u>. Вспомним школьный курс физики, раздел электростатики. Основной закон электростатики – это закон Кулона о взаимодействии двух точечных зарядов в вакууме:

$$\boldsymbol{F}_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^* q_k}{r^3}\boldsymbol{r}$$

В этой формуле заряд q^* находится в начале координат, q_k - заряд, на который действует сила $\boldsymbol{F}_k$. Радиус-вектор проведен из начала координат в точку расположения заряда q_k. Если заряды одноименные (оба положительных, или оба отрицательных), то заряды отталкиваются, если разноименные, то притягиваются. Приведенная формула описывает оба случая. При гравитационном взаимодействии всегда действует сила притяжения (об анти материи на первом курсе говорить рано). Поэтому закон притяжения в векторном виде следует писать со знаком минус (если сохранять аналогию):

$$\boldsymbol{F}_k = -G\frac{m^* m_k}{r^3}\boldsymbol{r} \equiv -G\frac{Mm_k}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Вы также знакомы с понятием напряженности электрического поля, определяемого как

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^*}{r^3}\boldsymbol{r}$$

В этом определении заряд, создающий поле, положительный. Мы можем таким же образом ввести поле ускорений, если силу притяжения разделить на массу:

$$\boldsymbol{g} = -G\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Если два электрических заряда или точечных тела находятся на бесконечно большом расстоянии, то самое логичное считать, что их потенциальная энергия взаимодействия равна нулю. Чтобы найти энергию взаимодействия между ними на конечном расстоянии, то мы должны вычислить работу, которое свершает поле при их сближении из бесконечности в данную точку:

$$A_{\infty r} = \int_{\infty}^{r}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{l} = GMm\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r} = GMm\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = -G\frac{Mm}{r} \quad (d\boldsymbol{l} = -d\boldsymbol{r})$$

Используя известную вам формулу (из курса общей физики), связывающую работу консервативной силы с потенциальной энергией, находим энергию гравитационного взаимодействия:

$$-\Delta U = -(U_\infty - U(r)) = U(r) = A_{\infty r}$$

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

По аналогии с электростатикой можно ввести потенциал гравитационного поля:

$$\varphi_G(r) = \frac{U(r)}{m} = -G\frac{M}{r}$$

Сила и энергия взаимодействия описывают взаимодействие двух тел, тела, создающего поле, и тела, находящегося в этом поле. Поле ускорений и потенциал описывают поле созданного телом, вне зависимости от того находятся в этом поле другие тела или нет. Но зная, поле или его потенциал мы можем сразу сказать про силу, которая будет действовать или про потенциальную энергию тела, помещенного в это поле.

Познакомимся еще с одной физической величиной, называемой потоком вектора, характеризующего величину поля. Поток вектора $\boldsymbol{g}$ гравитационного поля через бесконечно малую площадку равен:

$$d\Phi = -\boldsymbol{g}d\boldsymbol{S}$$

Вектор $d\boldsymbol{S}$ есть произведение бесконечно малой площади на единичный вектор, перпендикулярный ей:

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$$

Если участок поверхности не замкнутая поверхность, то надо указывать о принятом направлении нормали к поверхности. Для замкнутых поверхностей условились, что всегда берется внешняя нормаль. Если в начало координат поместить точечное тело массой M, окружить его сферической поверхностью радиуса r, то суммарный поток вектора $\boldsymbol{g}$ через эту поверхность будет равен:

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{g}d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{g}\boldsymbol{n}dS = -\int_S G\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}dS = -\int_S G\frac{M}{r^2}dS = -G\frac{M}{r^2}4\pi r^2 = -4\pi GM$$

Если тело будет находиться внутри замкнутой поверхности, то величина потока через всю замкнутую поверхность не изменится. Если поместить не одно тело, а два тела M_1 и M_2, то величина суммарного потока будет равна:

$$\Phi = -4\pi GM_1 - 4\pi GM_2 = -4\pi G(M_1 + M_2) = -4\pi GM_\Sigma$$

При написании последней формулы был использован так называемый принцип суперпозиции. Чтобы было ясно, о чем пойдет речь, рассмотрим бытовой пример. Вы сидите у своей подруги в квартире и как-то с ней взаимодействуете, например, занимаетесь физикой. Поворачивается ключ во входной двери – это пришла домой ее мама. Ваше взаимодействие не нарушается – принцип суперпозиции имеет место, ваше взаимодействие нарушается, становиться другим – принцип суперпозиции не имеет места. До рассмотрения гравитации было очевидным, что величина силы деформированной пружины, действующей на тело, не зависит от того, действуют на это тела другие тела или нет. При гравитационном взаимодействии, при передаче его через поле, вообще говоря, не очевидно, что суммарное поле равно векторной сумме полей. Это фактически означает не взаимодействие полей друг с другом. Для ньютоновских полей гравитации принцип суперпозиции выполняется.

Вот теперь мы можем утверждать, что если имеется сферически симметричное распределение масс в некотором объеме, то на расстоянии r от него на точечное тело будет действовать такая же сила, как и при взаимодействии с точечным телом с массой равной все сферически распределенной массе в объеме.

Второй вывод, который моно сделать, заключается в том, что гравитационное поле внутри массивной сферически симметричной оболочки равно нулю.

Формулу для суммарного потока можно записать в более удобном виде. Для сферически распределенной по объему массы ее можно выразить через интеграл от плотности:

$$M = \int_V \rho(r)dV = 4\pi \int_0^{r_k} r^2 \rho(r)dr$$

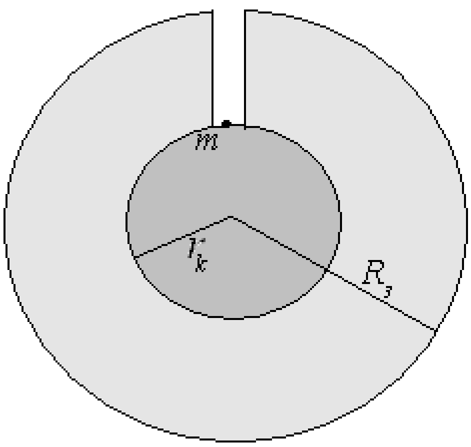
И при условии, что поверхность является сферой, окружающий объем от $r = 0$ до r_k, мы можем при помощи формулы для потока определить проекцию $\boldsymbol{g}$ на направление радиус-вектора:

$$\int_{S_k} \boldsymbol{g}d\boldsymbol{S} = -4\pi G \cdot 4\pi \int_0^{r_k} r^2 \rho(r)dr$$

$$g_r(r_k) \cdot 4\pi r_k^2 = -4\pi G \cdot 4\pi \int_0^{r_k} r^2 \rho(r)dr$$

$$g_r(r_k) = -\frac{4\pi G}{r_k^2} \int_0^{r_k} r^2 \rho(r)dr$$

Если последнее равенства умножить на массу, то мы получим проекцию силы тяготения, действующую на эту массу, находящуюся на расстоянии r_k от центра симметрии. В правой части интеграл берется до радиуса, на котором вычисляется $g_r(r_k)$. Формула и ее применение будет более понятно после рассмотрения приведенных ниже задач.



<u>*Ускорение свободного падения в глубокой шахте*</u>. Определить давление тела m на горизонтальную поверхность в глубокой шахте. Вращением Земли пренебречь. Землю считать однородным шаром.

Использую формулы, приведенные в предыдущем разделе, находим ускорение свободного падения $g_r(r_k)$ на расстоянии r_k от центра Земли:

$$g_r(r_k) = -\frac{4\pi G}{r_k^2} \int_0^{r_k} r^2 \rho dr = -\frac{4\pi G\rho}{r_k^2} \cdot \frac{r_k^3}{3} = -\frac{4\pi G\rho}{3} r_k$$

Сила давления на поверхность по величине будет равна:

$$F = mg_r = \frac{4\pi G\rho m}{3} r_k$$

Плотность можно выразить через массу и радиус Земли:

$$F = \frac{4\pi Gmr_k}{3} \cdot \frac{M_з}{\frac{4}{3}\pi R_з^3} = G\frac{mM}{R_з^2}\frac{r_k}{R_з}$$

Комбинация величин, стоящая перед отношением радиусов равна ускорению свободного падения на поверхности Земли:

$$F = \frac{r_k}{R_з} mg$$

В центре Земли тело будет находиться в невесомости. При решении было пренебреженно влиянием шахты на сферическое поле Земли.

Давление жидкости на дне глубокой шахты. Предположим, что шахта, из предыдущей задачи до самого верха затоплена водой. Чему будет равно давление в жидкости у самого дна, если считать ее несжимаемой?

Если мы выделим бесконечно тонкий слой жидкости на некоторой глубине, то на него будет действовать сила притяжения равная:

$$dF = \frac{r}{R_з} \rho_{ж} g \Delta S dr$$

Чтобы найти силу давления всего столба жидкости на дно шахты, это выражение надо проинтегрировать по высоте столба:

$$F = \int_{r_k}^{R_з} \frac{r}{R_з} \rho_{ж} g \Delta S dr = \frac{\rho_{ж} g \Delta S}{R_з} \int_{r_k}^{R_з} r dr = \frac{\rho_{ж} g \Delta S}{2R_з}(R_з^2 - r_k^2)$$

Давление будет равно отношению силы к площади:

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\rho_{ж} g}{2R_з}(R_з^2 - r_k^2)$$

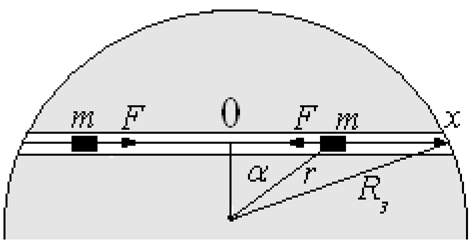
-78-

При малых глубинах полученная формула переходит в хорошо известное выражение:

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\rho_{ж} g}{2R_з}(R_з + r_k)(R_з - r_k) \approx \frac{\rho_{ж} g}{2R_з}(R_з + R_з)H = \rho_{ж} g H$$

Фантастический межконтинентальный транспорт. На рисунке показан туннель, прорытый по хорде земного шара. Предположим, что его вакуумировали, и вагон-капсула в нем может двигаться без трения. Найти время ее движения в один конец.

Начало координат выберем на середине пути. Вначале вагон движется ускоренно, в начале координат он имеет максимальную скорость, которую можно определить из закона сохранения энергии. Чем больше величина хорды, тем выше будет максимальная скорость.



Приращение кинетической энергии можно найти, вычислив работу силы тяготения от поверхности Земли до минимального расстояния в туннеле до центра Земли (то есть до выбранного начала координат). Величина силы, действующей на тело ниже поверхности Земли, была определена в задаче с шахтой. Используя полученное выражение, находим максимальную кинетическую энергию:

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{-x_{\max}}^{0} \frac{r}{R_з} mg \cos\alpha dx = \frac{mg}{R_з} \int_{-x_{\max}}^{0} x dx = \frac{mg}{2R_з} x_{\max}^2 = \frac{mg}{2R_з}(R_з^2 - r_{\min}^2)$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{g}{R_з}(R_з^2 - r_{\min}^2)}$$

Напишем уравнение движения тела. Удобнее его написать для произвольного положения тела, но после того, как оно пройдет начало координат:

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{R_з} mg \qquad \ddot{x} + \frac{g}{R_з} x = 0 \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Мы не будем решать последнее уравнение гармонических колебаний, а воспользуемся известной вам формулой для периода колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R_з}{g}}$$

Время движения в одном направлении будет в два раза меньше. Оценим приближенно его;

$$\tau = \frac{T}{2} \approx 44 \;\; мин.$$

Причем время движения не зависит от длины хорды.

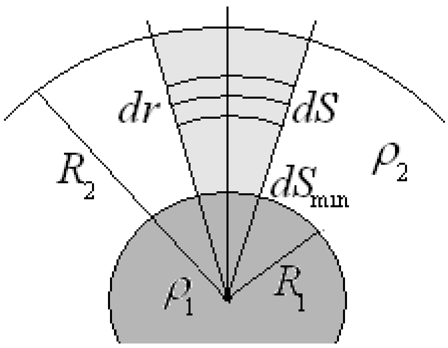
Проект фантастический, но некоторые идеи этой задачи вполне можно использовать на практике, например, при строительстве линий метро.

При разгоне поезда практически нельзя обеспечить ускорения более $1{,}5\, м/c^2$, так как большее ускорение не смогут обеспечить силы трения. Но такое ускорение можно создать, если туннель после станции пойдет не горизонтально, а с наклоном. Ускорение на наклонной плоскости без трения равно $g\sin\alpha$. Чтобы создать приведенное выше ускорения, угол α должен быть равен всего

$$g\sin\alpha = 1{,}5 \quad \sin\alpha = 0{,}15 \quad \alpha \approx 0{,}15 \approx 10^o$$

Затем следует горизонтальный участок, а перед станцией подъем на прежнюю глубину. Преимущество очевидно. Энергия тратится только на работу силы сопротивления и на работу сил трения в подшипниках осей колес. Увеличение кинетической энергии поезда и его торможение взяло на себя тяготение.

Давление на дне всепланетного океана. Предположим, что есть планета, имеющая твердое ядро радиусом R_1, покрытое слоем жидкости. Полный радиус планеты равен R_2. Определить давление жидкости у самого дна океана. Плотности ядра и жидкости известны.



На приведенном рисунке для ясности расчетов непропорционально увеличен телесный угол. Залитый серым цветом объем жидкости давит на площадку $dS_{\min}$.

На выделенный объем жидкости будут действовать силы давления со стороны верхнего и нижнего слоев жидкости и силы тяготения со стороны ядра и лежащих ниже слоев жидкости. Из условия равновесия выделенного объема находим соотношение между ними:

$$P(r+dr)dS + G\frac{M}{r^2}\rho_2 drdS + \frac{4}{3}G\frac{\rho_2(r^3-R_1^3)}{r^2}\rho_2 drdS = P(r)dS$$

$$dP = P(r+dr) - P(r) = -G\frac{M}{r^2}\rho_2 dr + \frac{4}{3}G\frac{\rho_2(r^3-R_1^3)}{r^2}\rho_2 dr$$

Интегрир4уем по радиусу:

$$P(r) = G\frac{M}{r}\rho_2 - \frac{4}{3}G\rho_2^2(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}) + const$$

Если на планете нет атмосферы, то давление на поверхности равно нулю. Из этого условия можно определить константу интегрирования:

$$0 = G\frac{M}{R_2}\rho_2 - \frac{4}{3}G\rho_2^2(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2}) + const$$

С учетом этого, находим зависимость давления в жидкости в зависимости от расстояния от центра планеты:

$$P(r) = G\frac{M}{r}\rho_2 - \frac{4}{3}G\rho_2^2(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}) - G\frac{M}{R_2}\rho_2 + \frac{4}{3}G\rho_2^2(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2})$$

$$P(r) = GM\rho_2(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}) + \frac{4}{3}G\rho_2^2(\frac{R_2^2 - r^2}{2} - R_1^3(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}))$$

Заметим, что в полученной формуле произвольный радиус не может быть меньше радиуса ядра. Давление в жидкости у границы раздела будет равно:

$$P(r) = GM\rho_2(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) + \frac{4}{3}G\rho_2^2(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - R_1^3(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}))$$

В предельном случае $R_1 \approx R_2 \approx R$ и $R_2 - R_1 = H$ получим хорошо известную формулу для давления в стакане;

$$P(r) = GM\rho_2\frac{H}{R^2} + \frac{4}{3}G\rho_2^2(\frac{2RH}{2} - R^3\frac{H}{R^2}) = G\frac{M}{R^2}\rho_2 H = \rho_2 gH$$

Найдем давление в несжимаемой жидкости, если вообще нет ядра, а вся планета состоит из однородной жидкости. В этом случае силу тяготения, приложенную к выделенному объему, можно найти, используя первую формулу задачи с шахтой:

$$\boldsymbol{e}_r g(r) = -\frac{4\pi G\rho}{3}r\boldsymbol{e}_r$$

Если это ускорение умножить массу бесконечно малого выделенного объема, то получим сиу тяготения, действующую на него. Далее можно написать условие равновесия и выполнить практически такие же вычисления, как в задаче с ядром:

$$P(r+dr)dS + \frac{4\pi G\rho}{3}r\rho drdS = P(r)dS$$

$$dP = -\frac{4\pi G\rho^2}{3}rdr \qquad P = -\frac{4\pi G\rho^2}{6}r^2 + const \qquad 0 = -\frac{2\pi G\rho^2}{3}R^2 + const$$

И окончательно получаем:

$$P(r) = \frac{2\pi G\rho^2}{3}(R^2 - r^2)$$

Максимальное давление в центре будет равно:

$$P(r) = \frac{2\pi G\rho^2}{3}R^2$$

<u>Что общего между размешиванием сахара в стакане с чаем и искажением сферичности вращающихся планет</u>. Если в стакане, в котором вы мешаете ложечкой, есть чаинки, то они собираются на дне стакана в его центре. Наблюдаемый эффект объясняется просто. На поверхности чая образуется воронка. Высота столба чая у стенок стакана выше, чем в его центре (на оси вращения). Поэтому гидростатическое давление на дне стакана несколько выше, чем в центре. Возникает радиальный поток чая от стенок к центру. Он и собирает чаинки в него. Но он достаточно слаб для того, чтобы чаинки всплывали.

Предположим, планета имеет маленькое твердое ядро, остальная часть планеты жидкость. Что получится, если планета начнет вращаться? На все малые объемы жидкости, кроме силы тяготения начнет действовать центробежная сила инерции (мы рассматриваем планету во вращающейся системе координат). Возникнет потоки, направленные по экваториальным радиусам от центра планеты и по полярным радиусам к центру планеты. В стационарном состоянии потоков не будет, если давление на ядро по полярному радиусу будет равно давлению по экваториальному радиусу. Это будет в том случае, если экваториальный радиус будет больше полярного, чтобы большая сила тяготения скомпенсировала центробежную силу. Ядро в это рассуждение было введено только для большего подобия явления с рассмотренным явлением со стаканом.

Прежде, чем переходить к вычислениям попробуем получить формулу из физики явления и применения размерности. Если мы хотим найти относительное сжатие планеты, то мы из физического смысла можем предположить. Первое – чем больше частота вращения, тем больше сжатие. Поэтому есть основания предположить, что ω должна стоять в числителе искомого выражения. Второе – чем сильнее тяготение, тем меньше влияние вращения, величину тяготения можно охарактеризовать g. И отправить его в знаменатель. Нам нужна еще величина размерности длины. Ничего другого, кроме радиуса планеты у нас нет. Из этих трех величин можно однозначно составить безразмерное отношение и тем самым получить относительное сжатие:

$$\frac{\Delta R}{R} \sim \frac{R\omega^2}{g}$$

А теперь приступим к вычислению и посмотрим, правильной оказалась интуиция.

Выше мы нашли давление в центре «жидкой» планеты. Осталось найти величину давления, обусловленную вращением планеты. Оно уменьшает гравитационное давление на величину равную:

$$dF = \frac{1}{2}\rho\omega^2 dSR_Э^2 \qquad P_\omega = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R_Э^2$$

Приравниваем экваториальное и полярное давления в центре планеты:

$$\frac{2\pi G\rho^2}{3}R_Э^2 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 R_Э^2 = \frac{2\pi G\rho^2}{3}R_П^2$$

Находим разность радиусов:

$$\frac{4\pi G\rho^2}{3}(R_Э^2 - R_П^2) = \rho\omega^2 R_Э^2$$

$$\frac{4\pi G\rho}{3}2R\Delta R \approx \omega^2 R^2$$

Относительное сжатие будет равно:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{3\omega^2}{8\pi G\rho} = \frac{R^3\omega^2}{2GM} = \frac{R\omega^2}{2g}$$

В последней формуле M - масса планеты, g - ускорение свободного падения на ее поверхности. Как видите, предположения оказались правильными.

Полученное соотношение $\frac{\Delta R}{R} \sim \frac{R\omega^2}{g}$ является оценкой по порядку величины, так как не учтено множество факторов сложного строения планеты: наличия ядра, слоя магмы, твердой оболочки, неоднородность плотности, сжимаемости вещества и т.д. Если по этой формуле вычислить отношение для Земли, и сравнить их с табличными данными (0,00336) то получим совпадение в первой значащей цифре (в тройке). Совпадение до безобразия хорошее.

Космические скорости. Минимальную скорость, с которой тело может враться вокруг Земли на низкой орбите, принято называть первой космической скоростью. Если для оценки радиус орбиты принять равным радиусу Земли, ее можно вычислить из соотношения:

$$\frac{mv_1^2}{R_з} = G\frac{Mm}{R_з^2} = mg \qquad v_1 = \sqrt{gR_з} \approx 8\, км/с$$

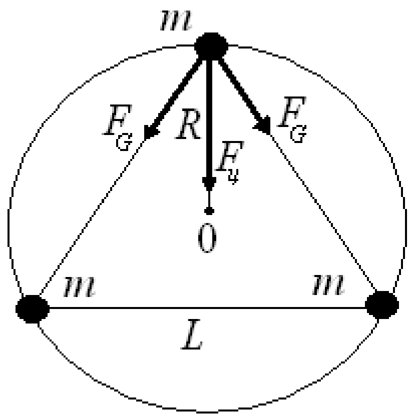
Второй космической скоростью называют ту необходимую скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно преодолело притяжение Земли. Для оценки ее величины, считают Землю изолированной системы, то есть не учитывают влияние ни Солнца, ни других планет. Находят ее из закона сохранения полной механической энергии тела, считая, что на бесконечно большом расстоянии тела от Земли его энергия становится равной нулю:

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{Mm}{R_з} = 0 \qquad v_1 = \sqrt{2gR_з} \approx 11\, км/с$$

В заключении найдем радиус орбиты в экваториальной плоскости Земли, на которой спутник зависает над одной точкой на экваторе:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \qquad \omega^2 R = g\frac{R_з^2}{R^2} \qquad R = (\frac{gR_з^2}{\omega^2})^{\frac{1}{3}} = (\frac{gR_з^2 T^2}{4\pi^2})^{\frac{1}{3}} \approx 36\cdot 10^3\ км$$

Движение системы из трех звезд. Три звезды находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной L. Как может двигаться эта система, если относительное расположение звезд не меняется? Какой физической величиной можно охарактеризовать это движение?



Относительное расположение трех звезд будет сохраняться, если система будет вращаться относительно оси, проходящий через центр треугольника и перпендикулярной его плоскости. Звезды будут двигаться по окружности радиуса равного:

$$R = \frac{L}{2\sin\frac{\pi}{6}}$$

При этом центростремительная сила должна быть равна удвоенной проекции силы тяготения между двумя звездами:

$$F_ц = \frac{mv^2}{R} = 2F_G\cos\frac{\pi}{6} = 2G\frac{m^2}{R^2}$$

Упростив и выразив радиус окружности через известную сторону треугольника, находим орбитальную скорость звезд:

$$v^2 = 2G\frac{m}{R}\cos\frac{\pi}{6} = 4G\frac{m}{L}\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} = 2G\frac{m}{L}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$v = \sqrt{2G\frac{m}{L}\sin\frac{\pi}{3}}$$

Вращательное движение системы удобнее все охарактеризовать периодом:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{\pi L}{\sin\frac{\pi}{6}\sqrt{2G\frac{m}{L}\sin\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\pi L}{\sqrt{2G\frac{m}{L}\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{2\pi L\sqrt{L}}{\sqrt{\sqrt{3}Gm}}$$

$$T = 2\pi L\sqrt{\frac{L}{\sqrt{3}Gm}}$$

Движение спутника. Из наблюдений известно, что радиус круговой орбиты спутника медленно по сравнению с периодом обращения уменьшается по известному линейному закону:

$$\frac{dr}{dt} = -C$$

Предположив, что это снижение обусловлено силой сопротивления разреженной атмосферы, модуль которой равна

$$F_{сопр} = kv^n$$

Определить константы k и n в этой формуле.

Убыль энергии в единицу времени можно записать, используя первое условие в виде:

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{dEdr}{drdt} = C\frac{dE}{dr} = F_{сопр}v = kv^{n+1}$$

В этой формуле E полная энергия спутника, которую можно выразить только через его потенциальную энергию:

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = \frac{mv^2}{r}\cdot\frac{r}{2} - G\frac{Mm}{r} = G\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{r}{2} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r}$$

Обратите внимание, что полная энергия спутника отрицательна. Дифференцируем по радиусу и подставляем в предыдущую формулу:

$$C\frac{GMm}{2r^2} = kv^{n+1}$$

Выражаем в правой части скорость через радиус, использую выражение для центростремительной силы:

$$C\frac{GMm}{2r^2} = k(\sqrt{G\frac{M}{r}})^{n+1} = k(\frac{GM}{r})^{\frac{n+1}{2}}$$

Последнее выражение будет справедливо для произвольного радиуса орбиты только при условии, что $n = 3$. Следовательно, имеем равенство:

$$C\frac{GMm}{2r^2} = k(\frac{GM}{r})^2 \qquad C\frac{m}{2} = kGM \qquad k = \frac{m}{2GM}C$$

Находим искомое выражение для модуля силы сопротивления:

$$F_{сопр} = \frac{Cm}{2GM}v^2$$

<u>Силы взаимодействия между телами, находящихся в жидкой среде</u>. Рассмотрим, как изменится сила взаимодействия между однородными шариками, если они находятся в жидкости с известной плотностью. Плотность шариков может быть как больше плотности жидкости, так и меньше ее.

Если поместить шарик в безграничную жидкую среду, плотность которого равна плотности жидкости, то физически ясно, что никакого поля тяготения он не создаст. Если на каком-то расстоянии от него поместить второй шарик любой плотности, то он будет покоиться.

Если же первый шарик имеет плотность больше плотности жидкости, то вокруг него возникнет поле тяготения, но оно будет пропорционально не его массе, а величине $(\rho_1 - \rho_0)V$. В этой формуле ρ_1 - плотность шарика, V - его объем, ρ_0 - плотность жидкости. На второй шарик будет действовать ньтоновская сила притяжения. Но если второй шарик имеет плотность равную плотности жидкости, то он останется в неподвижности. Почему? Сила тяготения будет уравновешена силами гидростатического давления. Тяжелый первый шарик, притягивая жидкость к себе, создал избыточное давление, оно тем больше, чем ближе к шарику. Но если второго второй шарика больше плотности жидкости, то сила тяготения станет больше сил гидростатического давления. Результирующая сила, действующая на второй шарик, будет равна:

$$\boldsymbol{F}_{21} = -G\frac{(\rho_1 - \rho_0)V_1(\rho_2 - \rho_0)V_2}{r^3}\boldsymbol{r}_{12}$$

Вектор $\boldsymbol{r}_{12}$ проведен из центра первого шарика в центр второго шарика.

Аналогично рассуждая можно показать, что на второй шарик будет действовать результирующая сила, которая будет второй шарик отталкивать от первого.

Таким образом, написанное выражение для равнодействующей силы справедливо для любых соотношений плотностей. Если $\rho_1, \rho_2 > \rho_0$ или обе плотности $\rho_1, \rho_2 < \rho_0$, то шарики будут притягиваться, если плотность одного больше, а плотность другого меньше плотности жидкости, то они будут отталкиваться.

<u>Движение в центральном поле сил</u>. Рассмотрим движение тела в гравитационном поле другого тела. Мы будем предполагать, что масса тела, создающего это поле несравнимо велика по сравнению с массой движущегося тела. В этом приближении можно считать, что центр масс системы двух тел практически совпадает с центром тяжелого тела. Кроме этого предположим, что тела находятся на расстоянии друг от друга много больших их размеров. Тогда мы сможем использовать закон всемирного тяготения Ньютона для точечных тел. Сделанные предположения с очень хорошей точностью выполняются для рассмотрения движения планет и других объектов (комет, астероидов) вокруг Солнца.

Вспомним полученную формулу для ускорения в цилиндрической системе координат:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_R(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) + \boldsymbol{e}_\varphi(R\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{R}) + \boldsymbol{e}_z\ddot{z}$$

Если принять, что движение происходит в плоскости $z = 0$, то получим в проекциях систему уравнений движения:

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=-G\frac{Mm}{r^2}$$

$$m(r\ddot{\varphi}+2\dot{\varphi}\dot{r})=0$$

Постановка физической задачи окончена. Осталась выполнить интегрирование системы уравнений. Мы этого делать не будем. На четвертом семестре (в МИФИ) эта задача будет решена в аналитической механике, первом курсе по теоретической физике. Решение по всем правилам для вас будет сложно, а «упрощенное» решение вредно. Труднее всего не учить, а переучивать. Мы остановимся только на качественном анализе движения.

Поле центральных сил является полем консервативных сил. Следовательно, должна сохраняться полная механическая энергия системы. Сила в каждой точке направлена против радиус-вектора. Следовательно, должен сохраняться момент импульса тела m относительно начала координат. Таким образом, мы можем написать два уравнения законов сохранения:

$$\frac{mv^2}{2}-G\frac{Mm}{r}=E_0$$

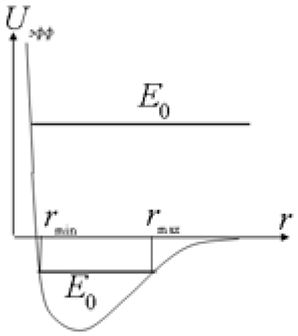
$$m[\boldsymbol{rv}]=\boldsymbol{M}_0$$

Второе уравнение приведем к скалярной форме:

$$m[\boldsymbol{e}_r r,(\boldsymbol{e}_r\dot{r}+\boldsymbol{e}_\varphi r\dot{\varphi})]=mr^2\dot{\varphi}[\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_\varphi]=mr^2\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z=M_0\boldsymbol{e}_z\Rightarrow mr^2\dot{\varphi}=M_0$$

В первом уравнении квадрат скорости представим как сумму квадратов $v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2$, и $\dot{\varphi}^2$ заменим из предыдущего равенства. В результате получим:

$$\frac{mv_r^2}{2}+\frac{M_0^2}{2mr^2}-G\frac{Mm}{r}=E_0$$



Разность двух последних члена в левой части равенства (64) можно рассматривать как эффективную потенциальную энергию для движения частицы по радиус-вектору. Качественно ее вид представлен на рисунке, на котором показаны два разных значения E_0. Значения минимального и максимального расстояний, на которые планета приближается к Солнцу, находятся из решения квадратного уравнения:

$$\frac{M_0^2}{2mr^2}-G\frac{Mm}{r}=E_0$$

При $E_0<0$ траектория движения в общем случае будет эллипсом. При $E_0\geq 0$ тело сможет преодолеть притяжение и уйти в мировое пространство. При нулевой энергии его скорость на бесконечно большом удалении будет стремиться к нулю. Мы рассмотрели движение по радиус-вектору, Сам радиус вектор будет поворачиваться с угловой скоростью:

$$\dot{\varphi}=\frac{M_0}{mr^2}$$

Из последнего выражения видно, что чем меньше расстояние, тем больше его угловая скорость. На этом мы закончим обсуждение движения.

Галилей был неправ. Если задать вопросы: 1.Предположим, что Земля не вращающийся шар, не имеющий атмосферы, нет других космических тел. На два тела разной массы находящихся на одинаковой высоте силы притяжения, которые будут действовать на них, равны или нет? 2. Ускорения тел, если они начнут падать, будут равны или нет? 3. Если эти тела начнут одновременно падать на землю, времена падения будут одинаковые или разные? Миллионы людей, окончивших школу, даже окончивших технические вузы с углубленной программой по физике, ответят на заданные вопросы – не равны, равны, одинаковые. И если задать четвертый вопрос, это хорошее приближение для расчета практических задач, или точный закон движения, то получаешь почти мгновенно ответ, что это точный закон. Три первых ответа являются правильными, третий – нет. Давайте разберемся в этом вопросе подробно.

Абсолютные величины сил притяжения и ускорения тел разной массы будут равны:

$$F_1 = G\frac{Mm_1}{r^2} \quad F_2 = G\frac{Mm_2}{r^2} \quad F_1 \neq F_2$$

$$a_1 = G\frac{M}{r^2} \quad a_2 = G\frac{M}{r^2} \quad a_1 = a_2$$

Очевидно, что временем падения тел надо считать время от начала падения до соприкосновения падающего тела с поверхностью земли. Поэтому будем считать падающие тела шарами одинакового радиуса, чтобы у обоих тел расстояния, которые они пролетят до столкновения, были одинаковыми.

Напишем полные энергии каждой пары тел (Земля+тело):

$$\frac{Mm_1 v_{1отн}^2}{2(M+m_1)} = G\frac{Mm_1}{r} \quad v_{1отн}^2 = 2G\frac{M+m_1}{r}$$

$$\frac{Mm_1 v_{1отн}^2}{2(M+m_1)} = G\frac{Mm_1}{r} \quad v_{2отн}^2 = 2G\frac{M+m_2}{r}$$

$$\frac{v_{1отн}^2}{v_{2отн}^2} = \frac{M+m_1}{M+m_2} = \frac{1+\frac{m_1}{M}}{1+\frac{m_2}{M}}$$

Из последнего выражения видно, скорости, набранными телами не равны, следовательно, ускорения, с которыми двигались тела, также не равны. Причем скорости и ускорения будут больше у более тяжелого тела. Следовательно, более тяжелое тело упадет на землю за меньшее время.

Но это еще не все. Мы изначально имели систему двух теп, движение которых и рассматривали. Если же брать тело с земли, и подняв его на некоторую высоту, дать ему падать, то ответ будет другим. Рассмотрим этот вариант:

$$\frac{(M-m)mv_{отн}^2}{2(M-m+m)} = G\frac{(M-m)m}{r} \quad v_{отн}^2 = 2G\frac{M}{r}$$

Вы видите, что в этом вариант скорость не зависит от массы поднятого тела. Следовательно, при поднятии тел разных масс поочередно, они упадут на землю за одинаковое время. Перечитайте условие. Там спрашивается про вариант одно временного падения тел. Поэтому следует рассмотреть его:

$$\frac{(M-m_1-m_2)m_1 v_{1отн}^2}{2[(M-m_1-m_2)+m_1]} = G\frac{(M-m_1-m_2)m_1}{r} \quad v_{1отн}^2 = G\frac{2(M-m_2)}{r}$$

$$\frac{(M-m_1-m_2)m_1 v_{2отн}^2}{2[(M-m_1-m_2)+m_2]} = G\frac{(M-m_1-m_2)m_1}{r} \quad v_{2отн}^2 = G\frac{2(M-m_1)}{r}$$

$$\frac{v_{1отн}^2}{v_{2отн}^2} = \frac{M-m_2}{M-m_1} = \frac{1-\frac{m_2}{M}}{1-\frac{m_1}{M}}$$

Мы опять получили для более тяжелого тела (например, первого тела) скорость большую, чем для легкого тела, то есть при совместном падении более тяжелое тело упадет быстрее.

Галилей утверждал, что тела падают синхронно, и если их связать легкой нитью, то она не будет натянута. Причем он считал это абсолютно точно законом. Как видите, он ошибался.

Почему же столько людей повторяют эту ошибку? Потому, что они не задумываются над вопросами, как им кажется, совершенно очевидными. Ведь ни в одном школьном учебнике, да и в учебниках по общей физике в разделе о законе тяготения Ньютона об этом в явном виде не говорится. За то формулу закона сохранения энергии при падении тела:

$$\frac{mv^2}{2} = mgH$$

из которой следует независимость скорости тела от его массы, вдолбили всем накрепко.

Я проверил последнее утверждение опытным путем. Летя в командировку в Новосибирск, вставил эту формулу в отделеньеце с целлулоидной пленкой в саквояже (куда обычно вставляют реквизиты владельца саквояжа при сдаче в багаж). По выражению лиц, читавших эту вставку, убедился, что эта формула знакома почти всем.

Безусловно, поправки учитывать даже при самых точных вычислениях не имеет смысла, так как они ничтожны. Задача приведена для того, что, во-первых, чтобы показать, что прежде чем отвечать, надо подумать, во-вторых, чтобы вы знали, что установил Галилей, не является абсолютно точным законом движения, а только очень хорошим приближением при решении практических задач.

Почему этого не сказано в учебниках, можно высказать только предположение, что их авторы при написании раздела о законе всемирного тяготения не подумали о том, что они же написали в предыдущих разделах.

16. Основные уравнения динамики твердого тела.

В этой части пособия будут рассмотрены задачи на движение твердого тела и движение нескольких тел при наличии взаимодействия межу ними.

Вспомним, как построен курс механики в общей физике. Вначале изучается динамика материальной точки. Затем делаются обобщения на системы материальных точек, взаимодействующих между собой. В этом разделе общей физики выводятся два уравнения.

Первое уравнение описывает движение центра масс системы;

$$m_0 \frac{d\boldsymbol{v}_c}{dt} = \boldsymbol{F}$$

В этом уравнении $m_0 = \sum_{n=1}^{N} m_n$, $\boldsymbol{F} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{F}_n$ - сумма всех внешних сил. Некоторые $\boldsymbol{F}_n$ могут быть равны нулю.

Вторым уравнением для системы точечных тел является уравнение для момента импульса системы тел:

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{N} \qquad \boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{i=N} [\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{p}_i] = \sum_{i=1}^{i=N} m_i [\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{v}_i] \qquad \boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{i=N} [\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{F}_i]$$

Радиус–векторы во всех формулах проведены к точечным телам системы из начала координат. Момент импульса вычисляется относительно выбранного начала координат.

Мы считаем не целесообразным, приводить вывод этих уравнений, он есть в любом учебнике по общей физике.

Твердое тело это система элементарных масс Δm_i, которые при движении не меняют положения относительно друг друга. Естественно, эти два уравнения, приведенные выше для системы точечных тел (материальных точек), справедливы и для твердого тела, являющейся более простой для изучения системой. Если на покоящиеся тело начнут действовать внешние силы, линии, действия которых все время движения тела проходят через центр масс, то твердое тело будет двигаться поступательно. Для описания такого движения достаточно уравнения движения центра масс. В большинстве рассмотренных ниже задач это не так, и для описания движения приходится использовать и уравнение для момента импульса.

Рассмотрим кинетическую энергию твердого тела. Разные точки тела в общем случае движутся по различным траекториям. Это сложное движение можно разложить на два простых для изучения, на перемещение равное перемещению центра масс системы и вращение вокруг центра масс. При этом угол поворота для всех точек тела будет одним и тем же. Именно поэтому и были введены понятия угловой скорости и углового ускорения.

Умножим скалярно обе части уравнения движения центра масс на бесконечно малое перемещение и проинтегрируем его по траектории:

$$m_0 \frac{d\boldsymbol{v}_c}{dt} \boldsymbol{d}r = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{F}_n \boldsymbol{d}r$$

$$\frac{m_0 \boldsymbol{v}_{c2}^2}{2} - \frac{m_0 \boldsymbol{v}_{c1}^2}{2} = \int_1^2 \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{F}_n \boldsymbol{d}\boldsymbol{r} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \boldsymbol{d}\boldsymbol{r} \qquad m_0 = \sum \Delta m_i$$

Если уравнение момента импульса умножить скалярно на бесконечно малый угол поворота тела и проинтегрировать, то получим:

$$\int_1^2 \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} d\boldsymbol{\varphi} = \int_1^2 \boldsymbol{N} d\boldsymbol{\varphi}$$

Почти во всех последующих задачах рассматривается плоское движение твердого тела. При плоском движении твердого тела его центр масс движется в некоторой плоскости, а ось вращения, проходящая через центр масс тела, будет все время движения перпендикулярна этой плоскости, то есть все точки твердого тела двигаются во взаимно параллельных плоскостях. Поэтому мы сейчас рассмотри только этот частный случай. Вычислим интеграл в левой части уравнения для момента импульса относительно оси, совпадающей с осью z:

$$\int_1^2 \frac{I_{cz} d\omega_z}{dt} d\varphi = \int_1^2 \frac{I_{cz} d\varphi}{dt} d\omega_z = \int_1^2 I_{cz}\omega_z d\omega_z = \int_1^2 \boldsymbol{N} d\boldsymbol{\varphi}$$

$$\frac{I_{cz}\omega_{z2}^2}{2} - \frac{I_{cz}\omega_{z1}^2}{2} = \int_1^2 \boldsymbol{N} d\boldsymbol{\varphi}$$

Выражение под интегралом для момента для одной силы (точнее, только ее проекции на орт $\boldsymbol{e}_\varphi$, так как другие проекции не вращают систему тел относительно оси z) преобразуем подробно:

$$\boldsymbol{N} d\boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{rF}] d\boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{e}_r \boldsymbol{e}_\varphi] \boldsymbol{e}_z r F_\varphi d\varphi = [\boldsymbol{e}_R \cos\alpha + \boldsymbol{e}_z \sin\alpha, \boldsymbol{e}_\varphi] \boldsymbol{e}_z r F_\varphi d\varphi = F_\varphi r \sin\alpha d\varphi = F_\varphi R d\varphi = F_\varphi \Delta S$$

Если сложить приращение кинетической энергии поступательного движения тела с приращением кинетической энергии вращения тела, то получим полное приращение кинетической энергии тела за время рассмотрения движения от начального положения до конечного:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{m_0 v_c^2(\tau)}{2} + \frac{I_{zz}\omega_z^2(\tau)}{2} - \frac{m_0 v_c^2(0)}{2} + \frac{I_{zz}\omega_z^2(0)}{2} = \int_1^2 \boldsymbol{F} d\boldsymbol{l} + \int_1^2 \boldsymbol{N} d\boldsymbol{\varphi} = A_{12}$$

Мы считаем, что правая часть может быть названа работой внешних сил, которую они совершили над телом. Первый член будем называть работой внешних сил, совершенных над телом при его поступательном движении, второй член – работой при вращении тела.

Следует обратить внимание на то, что при выводе последней формулы не было сделано оговорок о характере сил. В частности сила может быть приложена к точке твердого тела, которая в данный момент покоится, сила может менять точку приложения во время движения тела.

Может, есть и другая терминология. Важна не сама терминология, а что под ней понимается. При решении задач динамики твердого тела мы будем придерживаться терминологии, которая сформулирована в предыдущем абзаце.

17. Вычисление моментов инерции.

При рассмотрении вопросов теории в формулах пишутся суммы. При применении теории в конкретных вычислениях моментов инерции суммы заменяются на интегралы, особенно любимые в первом семестре. Вычисление момента инерции относительно произвольной оси z, которая может проходить как через тело, так и вне его, как вам известно, вычисляется по формуле:

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 \Rightarrow I_z = \int_V \rho R_i^2 dV$$

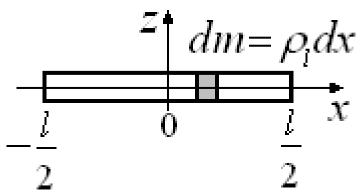
Если ось проходит через центр масс тела, то мы будем использовать двойной индекс I_{cz}, если же относительно этой оси вычисляется один из главных моментом инерции, то будем использовать следующее обозначение I_{zz}. Если не оговорено противное, мы будем вычислять моменты инерции для однородных тел. В этом случае плотность $\rho = m/V$ можно вынести из-под знака интеграла.

Вы уже знакомы с тем, что для упрощения вычислений часто используются некоторые абстракции (например, точечное тело или материальная точка, невесомая пружина и т.д.). Так и сейчас мы будем вычислять момент инерции бесконечно тонкого стержня, или бесконечно тонкого диска. Это приближение означает, что длина стержня много больше его диаметра, а толщина диска много меньше его радиуса.

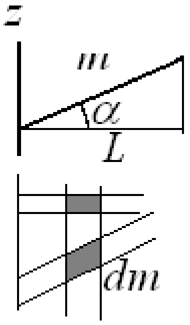
Конечно, при этом полученный результат не будет абсолютно точным. Вообще в физике нельзя при вычислениях учесть все, такая задача будет не разрешимой, да и вообще поставить задачу с учетом всего-всего невозможно.

Поэтому удобно оперировать с линейной массой для бесконечно тонкого стержня $\rho_l = m/l$, и массой, приходящейся на единицу площади для бесконечно тонкого диска $\rho_s = m/S$. Мы будем для определенности считать выбранную ось осью *Z.*

1. <u>*Бесконечно тонкий стержень*</u>. Ось *Z* проходит через середину стержня и перпендикулярна ему. Ось *X* направим по стержню. Советую сделать рисунок. Я сэкономлю время и объем. Пишем для этого случая интеграл:

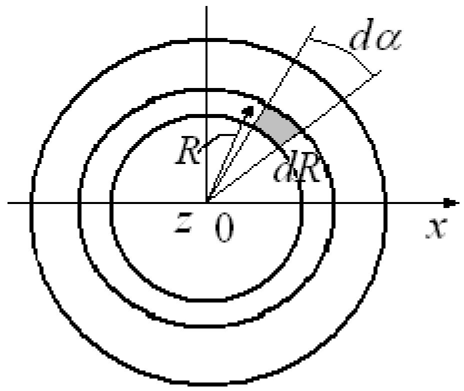


$$I_{zz} = \rho_l \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2\rho_l \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{2}{3}\rho_l [x^3]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{2\rho_l l^3}{24} = \frac{ml^2}{12}$$



Если стержень не перпендикулярен оси, а составляет некоторый угол, то правую часть последней формулы надо просто умножить квадрат синуса угла. Посмотрите на бесконечно малый элемент стержня. Если мы наклонный стержень «делаем» мысленно перпендикулярным, то распределение всех элементарных масс относительно оси не измениться. Такой стержень будет иметь длину L, его линейная плотность соответственно возрастет. Если считать известной последнюю формулу, то момент инерции будет равен:

$$I_z = \frac{mL^2}{3}$$



Важно подчеркнуть, что формула верна только при условии, что линейная плотность стержня одинакова.

2. <u>*Цилиндр*</u>. Ось *Z* совпадает с осью цилиндра. На рисунке показан вид сверху (ось Z, относительно которой вычисляется момент инерции, направлена перпендикулярно плоскости рисунка на нас). Вычисления делаем в цилиндрической системе координат. Вообще систему координат следует выбирать в соответствии с симметрией задачи. Вычисляем, так называемый тройной интеграл. В нашей практике все многомерные интегралы всегда можно будет представить в виде произведения нескольких «обычных» интегралов одной переменной:

$$I_{zz} = \rho \int_0^{R_0}\int_0^{H}\int_0^{2\pi} R^2 dR dz R d\varphi$$

$$I_{zz} = \rho \int_0^{R_0} R^3 dR \int_0^{H} dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi\rho R_0^4 H}{4} = \rho\pi R_0^2 H \frac{R_0^2}{2} = \frac{mR_0^2}{2}$$

R_0 - радиус цилиндра. Как видите, высота цилиндра выпала из окончательного ответа. Следовательно, эта формула применима и для бесконечно тонкого диска.

3. <u>*Шар*</u>. Вычисления делаем в сферической системе координат. Начало координат в центре шара.
Бесконечно малый объем в сферической системе координат равен:

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta d\varphi$$

Вычисляем момент инерции:

$$I_{zz} = \rho\int_V R^2 dV = \rho\int_V r^2\sin^2\theta\cdot dr\cdot rd\theta\cdot r\sin\theta d\varphi = \rho\int_0^{r_0} r^4 dr\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi$$

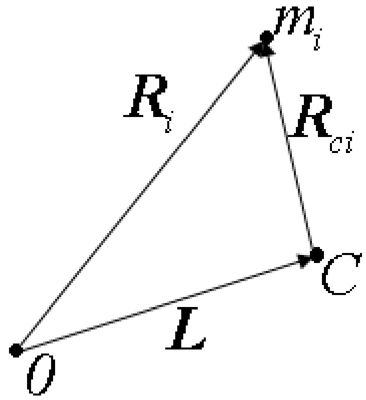
$$I_{zz} = \rho\cdot\frac{r_0^5}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi = \frac{4\pi r_0^3\rho}{3}\cdot\frac{2r_0^2}{5} = \frac{2}{5}mr_0^2$$

Подчеркну, R - расстояние от оси, r - модуль радиус-вектора, r_0 - радиус шара.

4. *__Бесконечно тонкий диск__*. Ось *Z* совпадает с одним из диаметров диска. Начало координат в центре диска:

$$I_{zz} = \rho_s\int_S R^2 dS = \rho_s\int_S r^2\sin^2\theta\cdot dr\cdot rd\theta = \rho_s\int_0^{r_0} r^3 dr\cdot 2\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta = \rho_s\frac{r_0^4}{4}\pi = \frac{mr_0^2}{4}$$

__Теорема Штейнера.__ Предположим мы умеем вычислить момент инерции некоторого тела относительно главной оси, проходящей через центр масс этого тела. А тело, в какой либо установке вращается не вокруг этой оси, а в параллельной ей, находящееся на расстоянии *L.* При помощи теоремы Штейнера Момент инерции относительно смещенной оси вычисляется в одну строчку. Но прежде докажем эту теорему.



На рисунке показана одна материальная точка твердого тела. Главная ось инерции перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через точку *C* – центр масс тела. Мы хотим вычислить момент инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через точку *0.* Направление оси *Z* совпадает с этими двумя осями. Напишем очевидное соотношение для трех векторов:

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}_{ci}$$

Возведем в квадрат обе части равенства и умножим его на массу выделенной точки. В результате получим:

$$m_i\boldsymbol{R}_i^2 = m_i L^2 + 2m_i\boldsymbol{R}_{ci}\boldsymbol{L} + m_i R_{ci}^2$$

Осталось просуммировать по всем точкам тела:

$$\sum_i m_i\boldsymbol{R}_i^2 = L^2\sum_i m_i + 2\boldsymbol{L}\sum_i m_i\boldsymbol{R}_{ci} + \sum_i m_i R_{ci}^2$$

Левая часть есть искомый момент инерции относительно смещенной оси, сумма в первом члене правой части есть масса всего тела, сумма во втором члене тождественно равна нулю (по определению центра масс, это пояснено ниже), третий член есть момент инерции относительно главной оси:

$$I_{0z} = mL^2 + I_{cz}$$

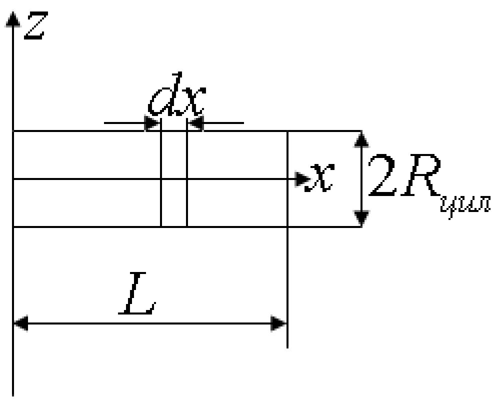
Последнее равенство и есть суть теоремы Штейнера.

Пояснение. Формула для определения центра масс тела имеет вид:

$$\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{e}_x x_c + \boldsymbol{e}_y y_c + \boldsymbol{e}_z z_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=N} m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=N} m_i} = \boldsymbol{e}_x\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=N} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=N} m_i} + \boldsymbol{e}_y\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=N} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=N} m_i} + \boldsymbol{e}_z\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=N} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=N} m_i}$$

Если начало координат выбрано в центре масс, то все суммы в числителях равны нулю. Из этого вытекает использованное выше зануление среднего члена в правой части:

$$0 = \boldsymbol{e}_x\sum_{i=1}^{i=N} m_i x_i + \boldsymbol{e}_y\sum_{i=1}^{i=N} m_i y_i = \sum_{i=1}^{i=N} m_i\boldsymbol{R}_i$$



__5. Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящий через его конец__. Этот момент инерции легко вычисляется без использования теоремы Штейнера, Но мы для иллюстрации воспользуемся ей:

$$I_{0z} = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

Эту формулу желательно запомнить, так как момент инерции стержня, закрепленного за конец, будет нужен во многих задачах.

6. Момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его конец. Этот пример также на применение теоремы Штейнера (см. рис.). Выделим на произвольном расстоянии x очень тонкий цилиндрик толщиной dx. Его момент инерции относительно оси параллельной оси Z, но проходящей через него, будет равен моменту тонкого диска, вычисленному в четвертом примере:

$$I_{zz}=\frac{mR^2}{4}\Rightarrow dI_{zz}=\frac{dmR^2}{4}=\frac{(\pi\rho R^2dx)R^2}{4}=\frac{\pi\rho R^4dx}{4}$$

Момент инерции этого бесконечно тонкого диска относительно оси задачи равен:

$$dI_{0z}=\frac{\pi\rho R^4dx}{4}+dmx^2=\frac{\pi\rho R^4dx}{4}+\pi\rho R^2x^2dx$$

Чтобы найти момент инерции цилиндра, надо последнее выражение проинтегрировать:

$$I_{0z}=\int_0^L\frac{\pi\rho R^4dx}{4}+\int_0^L\pi\rho R^2x^2dx=\frac{\pi\rho R^4L}{4}+\frac{\pi\rho R^2L^3}{3}$$

Заменив плотность через массу и объем цилиндра:

$$\rho=\frac{m}{\pi R^2L}.$$

получим окончательное выражение:

$$I_{0z}=\frac{\pi mR^4L}{4\pi R^2L}+\frac{\pi mR^2L^3}{3\pi R^2L}=\frac{mR^2}{4}+\frac{mL^2}{3}$$

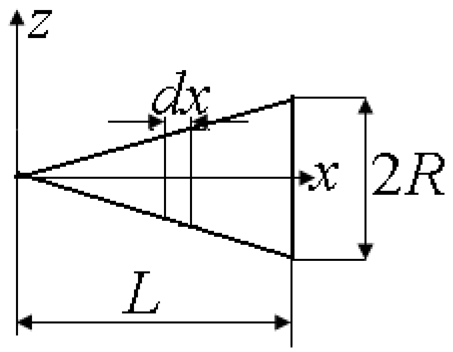
Получили суперпозицию моментов тонкого диска и стержня. Знать бы, можно было бы не вычислять, а написать сразу.

Не представляет труда написать формулу для момента инерции, если ось проходит не через конец цилиндра, а через его центр масс. Надо просто удвоить поученный выше момент инерции:

$$I_{zz}=\frac{mR^2}{2}+\frac{2mL^2}{3}=\frac{MR^2}{4}+\frac{ML^2}{3}=\frac{MR^2}{4}+\frac{ML_0^2}{12}$$

$$I_{zz}=\frac{MR^2}{4}+\frac{ML_0^2}{12}$$

В конечной формуле M - масса всего цилиндра (2-х его половинок), а L_0 - его полная длина.



6. Момент инерции конуса. Принципиальное отличие от предыдущего примера только в том, что массы бесконечно тонких дисков являются функцией x, так как растет их радиус. Для удобства вычислений будем считать, что начало систему координат совпадает с вершиной конуса. Тогда радиус диска будет равен:

$$\frac{y}{x}=\frac{R}{L}\Rightarrow y=\frac{R}{L}x$$

Напишем формулу для произвольного бесконечно тонкого диска:

$$dI_{0z}=\frac{\pi\rho y^4dx}{4}+\pi\rho y^2x^2dx=\frac{\pi\rho R^4x^4dx}{4L^4}+\frac{\pi\rho R^2x^4dx}{L^2}=\frac{\pi\rho R^2}{L^2}(1+\frac{R^2}{L^2})x^4dx$$

Интегрируя, получим:

$$I_{0z}=\frac{\pi\rho R^2}{L^2}(1+\frac{R^2}{L^2})\frac{L^5}{5}=\frac{\pi\rho R^2L^3}{5}(1+\frac{R^2}{L^2})$$

Осталось заменить плотность материала на объем и массу конуса. А что делать, если вы забыли объем конуса, а пользоваться справочником нельзя? Надо вычислять самим. Ведь вычисления объема даже проще, чем сделанные выше.

Объем произвольного бесконечно тонкого диска равен:

$$dV = \pi y^2 dx = \frac{\pi R^2}{L^2} x^2 dx$$

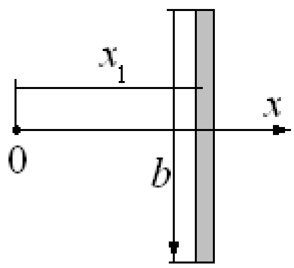
Проинтегрировав, находим объем конуса:

$$V = \frac{\pi R^2}{L^2}\int_0^L x^2 dx = \frac{\pi R^2}{L^2}\frac{L^3}{3} = \frac{\pi R^2 L}{3}$$

Теперь можно получить окончательно выражение для момента инерции конуса:

$$I_{0z} = \frac{\pi m R^2 L^3}{5V}(1+\frac{R^2}{L^2}) = \frac{3mL^2}{5}(1+\frac{R^2}{L^2}) = \frac{3}{5}m(L^2+R^2)$$

7. Момент инерции тонкой прямоугольной пластины относительно оси, проведенной через центр масс и перпендикулярной плоскости пластины. Вернемся к моменту инерции тонкого стержня относительно произвольной оси, но перпендикулярной ему. Его момент инерции относительно оси z (проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскости рисунка) равен:



$$I_{0z} = \frac{mb^2}{12} + mx_1^2$$

Заменив стержень на бесконечно узкую полоску, напишем ее момент инерции для произвольного x :

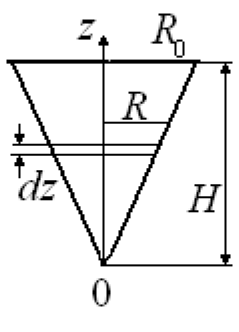
$$dI_{0z} = \frac{b^2 dm}{12} + x^2 dm \qquad dm = \rho_s b dx$$

Подставив dm и проинтегрировав от нуля до $a/2$, получим момент инерции половины пластины:

$$I_{0z} = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\rho_s b^3 dx}{12} + \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 \rho_s b dx = \frac{\rho_s b^3 a}{24} + \frac{\rho_s b a^3}{24} = \frac{\rho_s ab}{24}(a^2+b^2)$$

Заменив плотность на единицу площади всей пластины, предварительно умножив полученный результат на два, получим момент инерции прямоугольной пластины относительно оси, проходящей через центр масс:

$$I_{zz} = \frac{\rho_s ab}{12}(a^2+b^2) = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$



8. Момент инерции конуса относительно оси, совпадающей с осью конуса. Так как вычисления подобны, рассмотренным выше примерам, мы сразу начнем с интегрирования момента инерции:

$$I_{zz} = \int \frac{dmR^2}{2} = \int_0^H \frac{\pi\rho R^4 dz}{2} = \frac{\pi\rho R_0^4}{2H^4}\int_0^H z^4 dz = \frac{\pi\rho R_0^4 H}{10}$$

$$I_{zz} = \frac{\pi\rho R_0^4 H}{10}\frac{3}{\pi R_0^2 H} = \frac{3}{10}mR_0^2$$

9. Вычисление моментов инерции методом введения фиктивной отрицательной плотности. Чаще всего этот метод используется при наличии пустот в теле. Мы назвали его так для образности. Если момент тела без полости вы знаете и знаете момент инерции тела по форме полости, то вычисление момента тела с полостью потребует простой алгебры. Вы заливаете полость положительной веществом плотностью, которое имеете тело, и заливаете полость веществом с такой же по величине, но отрицательной плотностью. Фактически вы не сделали нечего. Но можно вычислить искомый момент как сумму моментов инерции тела без полости и момента инерции тела с отрицательной массой (естественно он будет отрицательным). Именно поэтому,

сначала во всех примерах были приведены моменты инерции через плотность, только потом она заменялась на массу. Ниже мы его проиллюстрируем на двух примерах: сферической оболочки и диска с квадратным отверстием.
Но вначале начнем с часто допускаемой ошибки студентами. Задаешь студенту вопрос (на экзамене или зачете): «Вы помните главный момент инерции однородной сферы?». Ответ: «Да». После этого задаешь второй вопрос: «Вычислите момент инерции сферической оболочки, если известны радиусы внутренней и внешней поверхностей и ее масса?». И в большинстве случаях получаешь моментальный ответ:

$$"I_0 = \frac{2}{5}mR_2^2 - \frac{2}{5}mR_1^2 = \frac{2}{5}m(R_2^2 - R_1^2)"$$

И радостный взгляд, что дали такой простой вопрос. Но ответ неправилен! Человек делает глупую ошибку. Ведь массы полного шара одна, масса шара, который вырезается совсем другая и не одна из них не является заданной массой оболочки. Хотя идея вычисления была здравая.

Вычисления столь просты, что можно не пояснять:

$$I_{zz} = \frac{8}{15}\pi\rho R_2^5 - \frac{8}{15}\pi\rho R_1^5 = \frac{8}{15}\pi\rho(R_2^5 - R_1^5) = \frac{2m(R_2^5 - R_1^5)}{5(R_2^3 - R_1^3)}$$

Последний пример. Представьте себе колесо в виде тонкого диска с четырьмя квадратными отверстиями, центры которых расположены на расстоянии R_1 от оси диска. Стороны отверстий равны a, радиус диска равен R_2, масса колеса известна. Вычислить момент инерции относительно оси перпендикулярной диску и проходящей через его центр.

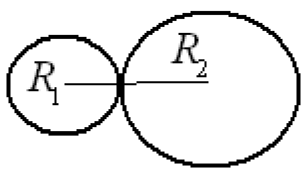
Вычисляем момент инерции по формуле:

$$I_{zz} = \frac{\pi\rho_s R_2^4}{2} - 4(\frac{\rho_s a^4}{6} + \rho_s a^2 R_1^2)$$

Полученный результат надо на массу колеса и разделить на его площадь. Сделаете это сами. А мы закончим эту тему, а то она из примеров по решению превратится в справочник по моментам инерции.

18. Вращение тела вокруг неподвижной оси.

Начнем с задачи для школьников. Имеются два обруча приваренные к тонкому стержню, который перпендикулярен плоскости рисунка Стержень проходит через точку касания двух обручей. Стержень закреплен в подшипниках (трение отсутствует). Вся конструкция вращается с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки. Обручи и стержень можно считать абсолютно тонкими. Известна линейная плотность материала, из которого изготовлены обручи. Найти кинетическую энергию системы.



Как некоторые школьники решают задачу? Вычисляют массы обручей:

$$m = 2\pi R_1 \qquad M = 2\pi R_2$$

Затем находят их кинетические энергии. Складывают их и получают ответ:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m\omega^2 R_1^2}{2} \qquad E_2 = \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{M\omega^2 R_2^2}{2}$$

$$E = \frac{\omega^2}{2}(mR_1^2 + MR_2^2)$$

Не будем выражать массы тел через плотность, так как уже сделана грубая ошибка. При повороте всей конструкции на один оборот, все точки обручей тоже совершают один оборот относительно своих центров. Если бы человек не поленился сделать лишний рисунок, например, когда конструкция повернется на четверть оборота, то он бы увидел, что точка, которая была на горизонтальном диаметре, оказалась на вертикальном диаметре, то есть тоже совершила четверть оборота. Но приучить делать рисунки, практически не выполнимая задача при обучении. Почему, не понимаю.

Но тогда к этому ответу надо добавить энергию вращения обручей вокруг своих центров:

$$E_{1вращ} = \frac{mv_{1вращ}^2}{2} = \frac{m\omega^2 R_1^2}{2} \qquad E_{2вращ} = \frac{Mv_{2вращ}^2}{2} = \frac{M\omega^2 R_2^2}{2}$$

Если кинетические энергии этого вращения добавить к неправильному ответу, то получим правильный ответ:

$$E = \frac{\omega^2}{2}(mR_1^2 + mR_1^2 + MR_2^2 + MR_2^2)\frac{\omega^2}{2}$$

Сложение одинаковых членов не сделано специально. Если внимательней посмотреть на формулу, то видно, что выражения:

$$I_{0z1} = mR_1^2 + mR_1^2 = I_{c1} + mR_1^2$$

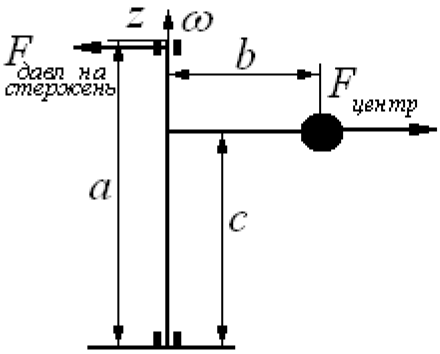
$$I_{0z2} = MR_2^2 + MR_1^2 = I_{c2} + MR_1^2$$

представляют собой моменты инерции относительно центра масс, плюс применение теоремы Штейнера. Школьники этих понятий могут не знать, студент должен находить энергию не этим кустарным способом, а использовать хорошо известную формулу:

$$E = \frac{I_{0z}\omega_z^2}{2}$$

и придти к полученному ответу. Ось z мы направили по направлению вектора угловой скорости.

<u>*Вспомогательная задача*</u>. Эта задача совсем простая, но она поможет проще решить следующую за ней задачу. Конструкция, показанная на рисунке, вращается с постоянной угловой скоростью. Нас будут интересовать технические аспекты задачи, каковы силы, действующие на подшипники, в которых закреплен невесомый вертикальный стержень, какова сила, пытающаяся оторвать стержень (также невесомый), крепящий массивный шарик, от вертикального стержня.



Начнем с определения последней величины – силы. Если перейти во вращающуюся систему координат, в которой шарик покоится, то в ней на него будет действовать центробежная сила инерции равная:

$$\boldsymbol{F}_{цб} = m\omega^2 b\boldsymbol{e}_R$$

Эта сила уравновешивается силой, действующей на горизонтальный стержень со стороны вертикального стержня. Эта и есть та сила, которую (с запасом для надежности!) должно выдержать соединение стержней (например, приваренных друг к другу).

Вычислим силы давления на подшипники, используя условие равновесия твердого тела – равенство нулю моментов сил вычисленных относительно произвольных точек. Вычислим момент силы (суммарный) относительно нижнего конца вертикального стержня:

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}_{цб}] + [\boldsymbol{e}_z a, \boldsymbol{F}_{верх}] = cF_{цб}[\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_R] + aF_{верхR}[\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_R] = 0$$

$$cF_{цб}[\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_R] = -aF_{верхR}[\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_R] \Rightarrow cF_{цб} = -aF_{верхR}$$

Следовательно, на верхний конец вертикального стержня действует сила, направленная к оси вращения,так как ее -тая проекция отрицательна, а на верхний подшипник действует сила, направленная от оси вращения и равная:

$$\boldsymbol{F}_{давл.верх} = \boldsymbol{e}_R \frac{c}{a} F_{цб} = \boldsymbol{e}_R \frac{mbc\omega^2}{a}$$

Аналогично вычисляется момент силы относительно верхнего конца вертикального стержня:

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}_{цб}] + [-\boldsymbol{e}_z a, \boldsymbol{F}_{нижн}] = (a-c)F_{цб}[-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_R] + aF_{нижнR}[-\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_R] = 0$$

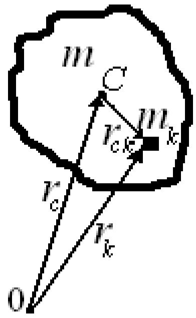
$$(a-c)F_{цб} = -aF_{нижнR} \Rightarrow F_{нижнR} = -\frac{(a-c)}{a}F_{цб}$$

$$\boldsymbol{F}_{давл.нижн} = \boldsymbol{e}_R \frac{mb(a-c)\omega^2}{a}$$

Полученный результат можно проверить, сложив все силы, действующие на стержень (их сумма должна быть равна нулю):

$$\boldsymbol{F}_{верх} + \boldsymbol{F}_{нижн} + \boldsymbol{F}_{цб} = -\boldsymbol{e}_R \frac{mbc\omega^2}{a} + (-\boldsymbol{e}_R \frac{mb(a-c)\omega^2}{a}) + \boldsymbol{e}_R mb\omega^2 = 0$$

Необходимо сделать отступление прежде, чем переходить к вычислению моментов импульсов. Надо уметь вычислять момент импульса вращающегося твердого тела относительно произвольной точки. Давайте выведем эту формулу. Ниже введенные величины пояснены рисунком. Вычисляем момент импульса:



$$\boldsymbol{M}_0 = \sum m_k[\boldsymbol{r}_k \boldsymbol{v}_k] = \sum m_k[\boldsymbol{r}_{ck} + \boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{v}_{ck} + \boldsymbol{v}_c]$$

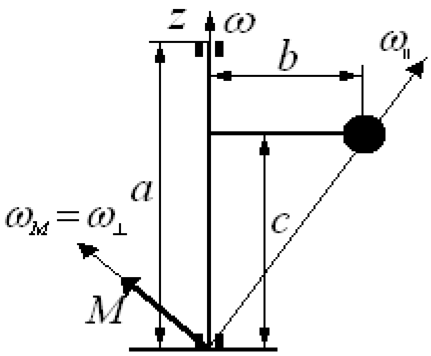
$$\boldsymbol{M}_0 = \sum m_k[\boldsymbol{r}_{ck} \boldsymbol{v}_{ck}] + \sum m_k[\boldsymbol{r}_{ck} \boldsymbol{v}_c] + \sum m_k[\boldsymbol{r}_c \boldsymbol{v}_{ck}] + \sum m_k[\boldsymbol{r}_c \boldsymbol{v}_c]$$

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{M}_c + [(\sum m_k \boldsymbol{r}_{ck})\boldsymbol{v}_c] + [\boldsymbol{r}_c(\sum m_k \boldsymbol{v}_{ck})] + m[\boldsymbol{r}_c \boldsymbol{v}_c]$$

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{M}_c + m[\boldsymbol{r}_c \boldsymbol{v}_c]$$

Сомножители в круглых скобках раны нулю, во втором члене сомножитель по определению центра масс тела, в третьем члене сомножитель представляет собой импульс системы в системе центра масс. Таким образом, момент импульса относительно произвольной точки равен сумме моментов: моменту импульса тела относительно центра масс моменту материальной точки, масса которой равна массе тела, относительно той же произвольной точки. Последнее выражение советую запомнить, так как мы довольно часто будем им пользоваться.

Вычислим момент импульса шарика относительно нижнего конца вертикального стержня:



$$\boldsymbol{M} = m[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}] = m[c\boldsymbol{e}_z + b\boldsymbol{e}_R, \boldsymbol{e}_\varphi b\omega] = mbc\omega[\boldsymbol{e}_z \boldsymbol{e}_\varphi] + mb^2\omega[\boldsymbol{e}_R \boldsymbol{e}_\varphi]$$

$$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{e}_R mbc\omega + \boldsymbol{e}_z mb^2\omega$$

Момент импульса будет направлен перпендикулярно радиус-вектору, проведенному из нижнего конца вертикального стержня к шарику, а его модуль будет равен:

$$M = mb\omega\sqrt{b^2+c^2} = m(b^2+c^2)\frac{b\omega}{\sqrt{b^2+c^2}} = I_M \omega_M$$

В последнем члене формулы I_M - момент инерции шарика относительно оси, совпадающей с вектором момента импульса, а ω_M - проекция угловой скорости на эту же ось.

Как видите, был более простой метод вычисления момента импульса. Разложить вектор угловой скорости на две взаимно перпендикулярных проекции, как показано на рисунке. Сразу написать формулу:

$$\boldsymbol{M} = I_M \boldsymbol{\omega}_M = I_M \boldsymbol{\omega}_\perp$$

И сказать, что это момент импульса (суммарный) шарика, так как момент импульса на ось $\boldsymbol{\omega}_{||}$ равен нулю. Лишние вычисления сделаны для того, чтобы показать, что следует сначала подумать, а не сразу писать выученные общие формулы.

Конец вектора момента импульса движется по окружности радиуса

$$R_M = M\frac{a-c}{\sqrt{b^2+c^2}} = mb(a-c)\omega$$

Найдем производную по времени момента импульса:

$$dM = R_M d\varphi = mb(a-c)\omega d\varphi$$

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{e}_\varphi mb(a-c)\omega^2$$

Во вращающейся системе координат (лабораторной системе) момент сипы, действующий на конструкцию равен вычисленной выше производной:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{e}_\varphi mb(a-c)\omega^2$$

Момент внешних сил действующих на конструкцию относительно нижнего конца стержня равен моменту силы давления со стороны подшипника на ось.
Силу мы вычисли, плечо известно. Находим:

$$\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{e}_{\varphi} F_{верх} a = -\boldsymbol{e}_{\varphi} \frac{mb(a-c)\omega^2}{a} a = -\boldsymbol{e}_{\varphi} mb(a-c)\omega^2$$

Последние две формулы отличаются знаком. Так и должно быть. Оба вектора в законе механики для твердого тела имеют одно направление:

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

Это расхождение получаются из-за того, что орт $\boldsymbol{e}_{\varphi}$ имеет противоположные направления по правую и левую части рисунка относительно вертикального стержня. Важно, что $d\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ совпадают по направлению, они оба перпендикулярны плоскости рисунка и направлены на нас. Последние вычисления являются не только примером вычисления момента импульса, но и проверкой решения.

Посмотрим эту задачу, если точечный шарик заменить на шар диаметром d. К чему приводило сделанное приближение? Шарик при повороте конструкции на некоторый угол тоже поворачивается на такой же угол. Следовательно, мы пренебрегаем моментом импульса шарика и его кинетической энергией вращения относительно оси, проходящей через центр шарика.

Учесть это не представляет труда, надо к вычисленному моменту импульса добавить слагаемое равное:

$$\boldsymbol{M}_{шар} = \frac{2}{5} m R_{шар}^2 \boldsymbol{\omega}$$

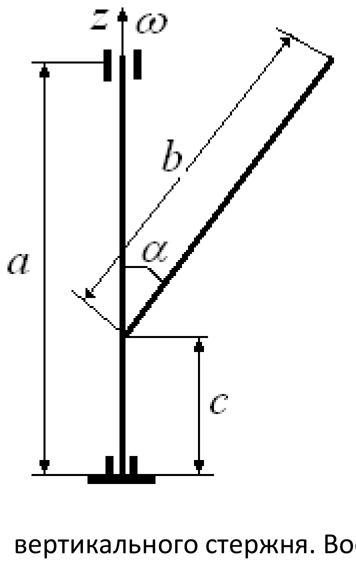
Кинетическая энергия системы с точечным шариком равна:

$$E = \frac{mb^2\omega^2}{2}$$

Для конструкции с шаром надо добавить слагаемое:

$$E_{шар} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R_{шар}^2 \omega^2 = \frac{1}{5} m R_{шар}^2 \omega^2$$

<u>Вращающаяся конструкция двух стержней</u>. Жесткая конструкция из двух тонких стержней вращается с постоянной угловой скоростью ω, направленной по оси z. Все геометрические размеры, показанные на рисунке известны. Масс вертикального стержня равна m_1, масса второго - m_2. Определим физические величины, характеризующие вращение стержней: момента импульса относительно нижней точки вертикального стержня и проекцию момента импульса на ось вращения.



Начнем вычисления с проекции на ось, затем вычислим момент импульса относительно точки и из общей формулы определим проекцию. Это позволит проверить вычисления. Находим момент инерции относительно оси вращения:

$$I_z = \frac{m_2 b^2 \sin^2\alpha}{3}$$

Можно вычислить кинетическую энергию и проекцию момента импульса на ось z системы стержней:

$$E = \frac{I_z \omega_z^2}{2} = \frac{1}{6} m_2 b^2 \omega_z^2 \sin^2\alpha \qquad M_z = I_z \omega_z = \frac{1}{6} m_2 b^2 \omega_z \sin^2\alpha$$

Вычислим момент импульса системы относительно нижнего конца (точки) вертикального стержня. Вообще в физике моментом некоторой физической величины называют векторное произведение радиуса $\boldsymbol{r}$, проведенного из точки, относительно которой вычисляется момент, на эту физическую величину (в механике вычисляются моменты векторных величин, в разделе электричество и магнетизм они могут быть произведением скалярной величины на $\boldsymbol{r}$). В динамике точечных тел физической величиной является импульс точечного тела. При вычислении момента импульса для твердого тела приходится брать интеграл:

$$\boldsymbol{M} = \int dm[\boldsymbol{rv}] = \int_V \rho[\boldsymbol{rv}]dV$$

Выберем начало координат в точке соединения стержней. Тогда интеграл для нашего случая будет иметь вид:

$$\boldsymbol{M}_{0'} = \int_0^b \frac{m_2}{b} dl[(c+z)\boldsymbol{e}_z + R\boldsymbol{e}_R, \boldsymbol{e}_\varphi R\omega]$$

Преобразуем интеграл так, чтобы он в явном виде был функцией одной переменной R:

$$\boldsymbol{M}_{0'} = \frac{m_2}{b} \int_0^{b\sin\alpha} \frac{dR}{\sin\alpha}[(c+\frac{R}{\tan\alpha})\boldsymbol{e}_z + R\boldsymbol{e}_R, \boldsymbol{e}_\varphi R\omega] = \frac{m_2\omega}{b\sin\alpha} \int_0^{b\sin\alpha} -\boldsymbol{e}_R(c+\frac{R}{\tan\alpha})RdR + \boldsymbol{e}_z R^2 dR$$

Мы вычисляем момент импульса в некоторый момент времени, поэтому орты можно вынести из-под знака интеграла. Проинтегрировав и подставив пределы интегрирования, получим:

$$\boldsymbol{M}_{0'} = \frac{m_2\omega}{b\sin\alpha}\{-\boldsymbol{e}_R(\frac{cb^2\sin^2\alpha}{2} + \frac{b^3\sin^3\alpha}{3\tan\alpha}) + \boldsymbol{e}_z\frac{b^3\sin^3\alpha}{3}\}$$

Упростим полученное выражение:

$$\boldsymbol{M}_{0'} = m_2 b\omega\sin\alpha\{-\boldsymbol{e}_R(\frac{c}{2} + \frac{b\cos\alpha}{3}) + \boldsymbol{e}_z\frac{b\sin\alpha}{3}\}$$

Проекции на взаимно перпендикулярные оси равны:

$$M_{0'z} = \frac{m_2 b^2\omega^2}{3}\sin^2\alpha \qquad M_{0'R} = -m_2 b\omega\sin\alpha(\frac{c}{2} + \frac{b\cos\alpha}{3})$$

Конец вектора момента будет двигаться по окружности радиуса

$$R_M = M_{0'}\sin\beta$$

Модуль момента импульса вычисляется по формуле:

$$M_{0'} = \omega\, m_2 b\sin\alpha\sqrt{(\frac{c}{2} + \frac{b\cos\alpha}{3})^2 + (\frac{b\sin\alpha}{3})^2}$$

Тангенс угла β равен:

$$\tan\beta = \frac{\frac{c}{2} + \frac{b\cos\alpha}{3}}{\frac{b\sin\alpha}{3}} = \frac{3c}{2b\sin\alpha} + \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

Если вычислить момент импульса относительно выбранного начала координат (мы просто занулим c). То соответствующие выражения станут много проще:

$$\boldsymbol{M}_0 = \omega\, m_2 b\sin\alpha\{-\boldsymbol{e}_R(\frac{b\cos\alpha}{3}) + \boldsymbol{e}_z\frac{b\sin\alpha}{3}\}$$

$$M_0 = \omega\, m_2 b\sin\alpha\sqrt{(\frac{b\cos\alpha}{3})^2 + (\frac{b\sin\alpha}{3})^2} = \omega\cdot\frac{m_2 b^2\sin\alpha}{3}$$

$$\tan\beta = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

Перепишем первую формулу в виде двух отдельных членов:

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{e}_z M_{0z} - \boldsymbol{e}_R M_{0R} = \boldsymbol{e}_z\frac{m_2 b^2\sin^2\alpha}{3}\omega - \boldsymbol{e}_R\frac{m_2 b^2\sin\alpha\cos\alpha}{3}\omega$$

Из нее следует равенство:

$$M_{0z}=I_z\omega=\frac{m_2b^2\sin^2\alpha}{3}\omega$$

Мы получили результат, подтверждающий правильность расчетов. Результат можно проверить еще одним способом. Момент импульса направлен под углом $\frac{\pi}{2}-\alpha$, то есть он перпендикулярен стержню (из третьей формулы). Проекция угловой скорости на направление момента равно

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\omega\sin\alpha$$

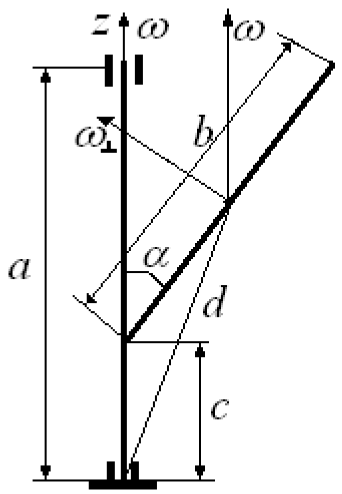
Если переписать втору формулу в виде:

$$M_0=\omega\cdot\frac{m_2b^2\sin\alpha}{3}=\frac{m_2b^2}{3}\cdot\omega\ \sin\alpha\ ,$$

Мы опять получаем подтверждение правильности вычислений.

Почти в каждой задаче делается проверка вычислений. Вам надоело это? Даже, если надоело, проверки будут делаться и дальше. Почему? Потому, что мы хотим, чтобы ваша зарплата, если вы пойдете в науку, была достойной зарплатой (в науке). Вы можете удивиться, почему существует связь каких-то проверок учебных задач с зарплатой. Связь, как говориться, железная. Вырабатывается привычка проверять полученные результаты. Будете получать научные результаты. От ошибок застрахованы только абсолютно твердые бездельники. Свои ошибки лучше находить самому, а не чтобы их находили вашим собратья по науке. Раз найдут, два найдут и перестанут читать ваши статьи, перестанут ссылаться на ваши публикации. Ваш индекс цитирования станет равным нулю, а зарплата станет минимальной. Или вообще не предложат подать заявление об уходе. Понятно?

Все сделанные вычисления делал математик, а не физик. Показали ему (математику) формулы. Он и посчитал, ни о чем не задумываясь, даже не понимая, что они описывают. Физик будет делать эту задачу по-другому. Он применит тот же прием, который был использован в предыдущей задаче с шаром.



Вычислим момент импульса относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс наклонного стержня (см. рис). Разложим заданную скорость на две проекции. На рисунке показана только перпендикулярная составляющая стержню. Вторая проекция, совпадающая со стержнем нам не нужна, так как момент импульса относительно ее равен нулю. Таким образом, момент импульса наклонного стержня равен:

$$M_{cb}=\frac{m_2b^2}{12}\omega_\perp=\frac{m_2b^2\omega}{12}\sin\alpha$$

Чтобы получить момент импульс системы, надо еще вычислить момент материальной точки массой m_2, вращающейся по окружности радиуса $\frac{b}{2}\sin\alpha$, относительно нижнего конца вертикального стержня. Этот момент импульса будет перпендикулярен линии d, а его модуль будет равен:

$$M_{m_2}=\frac{m_2bd\omega}{2}\sin\alpha$$

Осталось найти проекции суммы этих двух моментов на ось z и перпендикулярную ей, чтобы сравнить с полученным выше результатом. Начнем с проекции на ось z:

$$M_{0'z}=M_{cb}\sin\alpha+M_{m_2}\cos(\omega,\omega_\perp)$$

$$M_{0'z}=\frac{m_2b^2\omega}{12}\sin^2\alpha+\frac{m_2bd\omega}{2}\sin\alpha\cdot\frac{b\sin\alpha}{2d}=\frac{m_2b^2\omega}{12}\sin^2\alpha+\frac{m_2b^2\omega}{4}\sin^2\alpha=\frac{m_2b^2\omega}{3}\sin^2\alpha$$

Вычисления совпадают.

Вычисляем проекцию на направление $\boldsymbol{R}$:

$$M_{0'R}=-M_{cb}\cos\alpha-M_{m_2}\sin(\omega,\omega_\perp)$$

$$M_{0'R} = -\frac{m_2 b^2 \omega}{12}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{m_2 b d\omega}{2}\sin\alpha\frac{c+\frac{b}{2}\cos\alpha}{d}$$

$$M_{0'R} = -\frac{m_2 b^2 \omega}{12}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{m_2 b^2\omega}{4}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{m_2 bc\omega}{2}\sin\alpha$$

$$M_{0'R} = -\frac{m_2 b^2 \omega}{3}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{m_2 bc\omega}{2}\sin\alpha$$

$$M_{0'R} = -m_2 b\omega\sin\alpha(\frac{c}{2}+\frac{b}{3}\cos\alpha)$$

И эти вычисления совпали.

Во втором методе не потребовалось вычисления ни одного интеграла. Всего-то надо было знать момент инерции стержня, ну и конечно определение, что называется моментом импульса.

Рассчитывать силы давления на подшипники не будем. Ничего нового по физике мы не узнаем, и заниматься громоздкими формулами не имеет смысла. Следует сделать, только одно замечание. В предыдущей задаче силы давления на подшипники были вычислены только при вращении конструкции с шариком. Но если рассматривать такую конструкцию, стоящую на горизонтальной поверхности, то на подшипники будут действовать статические силы, так как конструкция не симметрична относительно оси вращения.

Определяются эти силы проще, если приравнять моменты нулю, взятые относительно концов вертикального стержня. Они будут равны по величине друг другу и направлены в противоположные стороны, так как других внешних сил в горизонтальном направлении нет. Сила, действующая на верхний подшипник, будет направлена от оси и равна по величине:

$$F_{давл.стат} = \frac{m_2 g b}{a}\sin\alpha$$

Кроме этих сил будет действовать вертикальная сила равная $m_2 g$. Понятно, что эти силы надо добавить к динамическим силам давления при расчете конструкции.

Пожалуй, стоит остановиться на расчете центробежных сил инерции действующих на протяженные тела. Вам известно, практически со школы, центробежная сила инерции, действующая на материальную точку:

$$\boldsymbol{F}_{цб} = m\omega^2\boldsymbol{R}$$

Для протяженного тела центробежная сила инерции вычисляется через интеграл по объему тела:

$$\boldsymbol{F}_{цб} = \int dm\omega^2\boldsymbol{R} = \int_V \rho\omega^2\boldsymbol{R}dV$$

Для примера рассмотрим тонкий стержень перпендикулярный оси вращения. Один конец стержня находится на оси. Но стержень неоднородный. От оси до L_1 его линейная плотность равна ρ_{l1}, а от L_1 до L_2 - ρ_{l2}. Поэтому будет сумма двух интегралов:

$$\boldsymbol{F}_{цб} = \boldsymbol{e}_R\rho_{l1}\omega^2\int_0^{L_1} RdR + \boldsymbol{e}_R\rho_{l2}\omega^2\int_{L_1}^{L_2+L_1} RdR$$

$$\boldsymbol{F}_{цб} = \boldsymbol{e}_R\rho_{l1}\omega^2\frac{L_1^2}{2} + \boldsymbol{e}_R\rho_{l2}\omega^2\frac{(L_2+L_1)^2-L_1^2}{2} = \boldsymbol{e}_R\frac{m_1 L_1\omega^2}{2} + \boldsymbol{e}_R m_2(L_1+\frac{L_2}{2})\omega^2$$

Из структуры формулы видно, что есть две центробежные силы, приложенные к центрам масс стержней, которые можно заменить на соответствующие материальные точки. Но оба стержня однородные тела!

Для простоты выкладок будем считать, что их длины равны, а массы равны m и $2m$ соответственно. Тогда полученная формула примет вид:

$$\boldsymbol{F}_{цб} = \boldsymbol{e}_R m\omega^2(\frac{L}{2}+2L+L) = \boldsymbol{e}_R\frac{7mL\omega^2}{2}$$

$$\boldsymbol{F}_{цб} = \boldsymbol{e}_R m\omega^2 (\frac{L}{2} + 2L + L) = \boldsymbol{e}_R \frac{7mL\omega^2}{2} = \boldsymbol{e}_R 3m \cdot \frac{7L}{6}$$

До центра масс единого тела расстояние равно:

$$L_c = L + \frac{L}{3} = \frac{4L}{3}$$

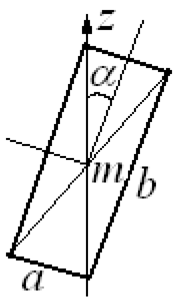
Таким образом, нельзя для любого неоднородного тела находить центробежную силу инерции как произведение массы тела, расстояния до его центра масс от оси вращения и на квадрат угловой скорости.

Момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс под некоторым углом к оси цилиндра. Если применить метод расчета с использованием момента импульса и считать известными, ранее вычисленными моментами инерции цилиндра относительно его главных осей инерции, то можно написать ответ сразу:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\parallel} + \boldsymbol{M}_{\perp} = \boldsymbol{e}_{\parallel} \frac{mR^2}{2} \omega \cos\alpha + \boldsymbol{e}_{\perp} (\frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{12}) \sin\alpha$$

$$I_c = \frac{1}{\omega} \sqrt{\boldsymbol{M}_{\parallel}^2 + \boldsymbol{M}_{\perp}^2}$$

Тонкая прямоугольная пластина. Положение оси, относительно которой вычисляется момент инерции, показан на рисунке.



Вычислим моменты импульсов относительно двух взаимно перпендикулярных осей:

$$M_a = \frac{ma^2}{12} \omega_a \qquad\qquad M_b = \frac{mb^2}{12} \omega_a$$

Находим модуль момента импульса относительно оси z:

$$M_z = \frac{m\omega}{12} (a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha)$$

Следовательно, искомый момент инерции равен:

$$I_z = \frac{m}{12} (a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha)$$

Последние две задачи по предыдущей теме, но мы посчитали, что их целесообразнее рассмотреть после того, мы разберем задачи с моментом импульса.

Эта задача приведена не только, чтобы познакомить вас с таким методом вычисления моментов инерции, но и для того, чтобы убедить вас, что надо думать, проявлять сообразительность, искать и находить не стандартные методы решения задач. Этому надо учиться с ученических лет. Научитесь – будете физиком, делавшим открытия. Не научитесь – будете всю жизнь ставить эксперименты или считать по указанию других. Тех, которые научились.

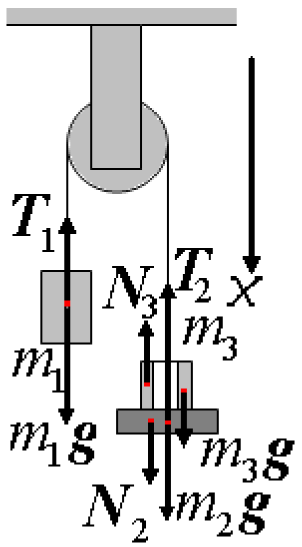
Задача с вращающимся блоком. После того, как разобрана эта тема, целесообразно вернуться к задаче, которая была уже разобрана пособия, от туда же скопирован и приведенный рисунок. Для системы тел, изображенных на нем надо найти их ускорения. Задача была решена с использование второго закона Ньютона. Есть более короткое решение.

Напишем уравнение для момента импульса системы трех точечных тел относительно оси блока в предположении, что сумма масс правых тел больше массы первого тела:

$$\frac{dM_z}{dt} = N_z \Rightarrow \frac{d(m_1 + m_2 + m_3)vR}{dt} = (m_2 + m_3)gR - m_1 gR$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)R^2 \frac{d\omega_z}{dt} = (m_2 + m_3 - m_1)gR$$

Ось z перпендикулярна плоскости рисунка, совпадает с осью блока и направлена от нас. Обсудим второе



уравнение. Множитель, стоящий перед угловым ускорением является моментом инерции системы тел относительно оси блока. Правая часть представляет собой суммарный момент внешних сил, действующий на систему. Силы натяжения нитей являются внутренними силами системы и в уравнение входить не должны.

Ответ получен. Угловое ускорение известно из второго уравнения. Умножаете его на радиус блока – получаете проекцию ускорения правых тел:

$$a_x = R\beta_z = R\frac{d\omega_z}{dt}$$

Почувствовали разницу?

В предыдущей задаче по условию нить скользила по блоку без трения, а сам блок покоился. Решим эту задачу в другом предположении. Пусть нить не проскальзывает относительно блока, а блок, имеющий момент инерции I_z, может вращаться без трения вокруг своей оси. Если сказать по научному, то момент сил трения в подшипнике равен нулю. Как изменится второе уравнение для момента импульса? Надо просто добавить в него момент инерции блока:

$$\{(m_1 + m_2 + m_3)R^2 + I_z\}\frac{d\omega_z}{dt} = (m_2 + m_3 - m_1)gR$$

Конечно, можно независимо рассматривать движение грузиков с использованием законов Ньютона и вращение блока моментами сил натяжения нитей. Но зачем становиться Чукчей?

Натяжение нитей в этом случае будет разным. А как определить их? Ведь в это уравнение они не входят. А кто вам мешает написать уравнение движения отдельно для составного тела из двух масс:

$$(m_2 + m_3)a_x = (m_2 + m_2)g - T_2$$

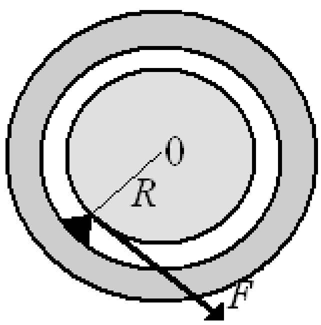
В этом уравнении все известно, кроме силы натяжения. Ускорение не представляет труда получить из предыдущего уравнения (аналогично предыдущему случаю). Аналогично находится т натяжение второй нити.

19. Работа сил трения при вращении тел.

Во всех задачах, за исключением последней, трение отсутствовало. Это было сделано умышленно. В следующей теме будем рассматривать плоское движение тел. И без ясного понимания влияния сил трения на движение тел, работы этих сил могут возникнуть ошибочные представления.

Мы, как обычно, начнем рассмотрение с разбора примеров, а не с теории. Нам кажется, что такой подход проще для освоения материала и более интересен. А то, что интересно любой человек делает с большим желанием. Такая наша маленькая хитрость. Конечно, после разбора нескольких примеров будут сформулированы общие теоретические выводы.

На рисунке показан цилиндр, который может вращаться вокруг закрепленной оси. Трения в подшипниках, крепящих ось, нет. Другими словами, момент сил трения за счет взаимодействия оси с подшипниками равен нулю. Цилиндр расположен в обойме, их оси совпадают. Остальные детали установки на рисунке не показаны. Радиус, момент инерции цилиндра и коэффициент трении скольжения известны. Ось z совпадает с осью цилиндра и направлена на нас.



В некоторый момент времени (примем этот момент времени за начальный) обойма начинает вращаться с постоянной угловой скоростью против часовой стрелки, то есть в положительном направлении отсчета угла φ, принятом в цилиндрической системе координат. Сила прижатия выступа к цилиндру такова, что имеет место проскальзывание.

Наблюдатель (физик 1), находящийся в цилиндре обнаружит вращение, так как его система стала не инерциальной, так как появились центробежные силы инерции. Он сумеет определить, как меняется угловая скорость вращения цилиндра. Сможет вычислить кинетическую энергию цилиндр в любой момент времени. Обнаружит, что она возрастет линейно по времени. Он знает уравнение для момента импульса:

$$\frac{Id\omega_z}{dt} = N_z$$

Из него следует, что при линейном возрастании угловой скорости, момент сил, действующий на цилиндр постоянен. Он не может определить направление сил, создающих момент, но может уверенно сказать, что проекция всех сил на направление единичного орта $\boldsymbol{e}_\varphi$ (который направлен по касательной к цилиндру в направлении его вращения) численно равна:

$$F_\varphi = \frac{N_z}{R}$$

Физик 1 может вычислить приращение кинетической энергии вращения из уравнения для момента импульса:

$$\frac{Id\omega_z}{dt} d\varphi = F_\varphi R d\varphi \Rightarrow \frac{I\omega_z^2}{2} = F_\varphi R\varphi = F_\varphi S$$

Вычисленное значение энергии совпадет со значением, определенным из опыта. Правую часть он назовет работой неизвестной по природе ему силы, которая была совершена при перемещении точки, находящейся на поверхности цилиндра, на расстояние S по дуге окружности радиуса R.

Но это не все, что обнаружит физий 1. Он еще почувствует, что ему становится жарко. И он сделает вывод, что внешние тела не только привели к возрастанию механической энергии, но и передали цилиндру некоторое количества тепла Q. Но о механизме передачи тепла он ничего сказать не сможет (мы все время предполагали, физик 1 ничего не видит вне цилиндра). Следует оговориться, что рассмотрение верно пока угловая скорость цилиндра меньше угловой скорости обоймы.

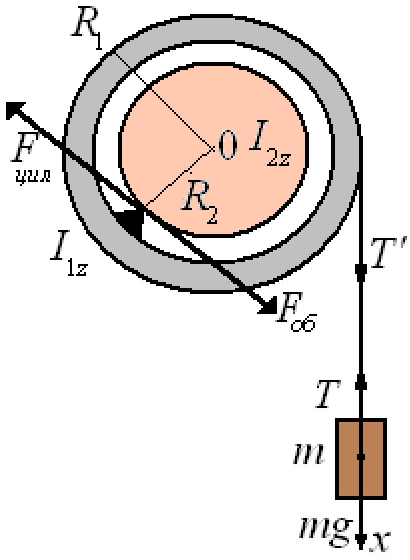
Если этот опыт повторить на другой день, увеличив только угловую скорость обоймы, то это никак не скажется на характеристиках движения цилиндра, но физик 1 обнаружит, что поток тепла увеличился.

А теперь рассмотрим объяснение физика 2, для которого цилиндр часть (деталь) его установки. Он согласится с расчетами физика 1 кинетической энергии вращения цилиндра. Уточнит, что сила для физика 1 – это сила трения скольжения, что на цилиндр еще действовала сила давления выступа, направленная к оси цилиндра. Эта сила никак не влияла вращение цилиндра, но без нее не было бы силы трения. Он также может объяснить причину появление тепла, и почему оно возрастало при увеличении постоянной скорости вращения обоймы во втором опыте. Зная устройство своей установки, он даже может вычислить его величину.

Его установка имела самое примитивное устройство. На внешнюю поверхность обоймы наматывалась невесомая длинная нить, к концу которой подвешивался грузик. Его масса подбиралась из условия равенства моментов сил трения и силы тяжести:

$$F_{тр}R = mgR_{обоймы}$$

Векторная сумма этих моментов равна нулю. Поэтому обойма, раскрученная до любой угловой скорости (при отсутствии момента трения на ось обоймы, что предположим, чтобы не вводить еще одно тепло), будет продолжать вращаться с этой постоянной угловой скоростью, и грузик будет также опускаться с постоянной скоростью. Следовательно, кинетическая энергия обоймы и грузика во время опыта меняться не будут. Но грузик опускается и происходит уменьшение его потенциальной энергии. Но просто испариться энергия не имеет права. Поэтому количество тепла Q будет равно убыли потенциальной энергия грузика. Достаточно измерить высоту, на которую за время проведения опыта опустился грузик, чтобы найти количество тепла:



$$Q = mg\Delta H - E_{цил}$$

На этом примере вы познакомились с важнейшим законом всей физики от механики Ньютона до физики элементарных частиц – законом сохранения полной (обычно последнее слово не произносят, но подразумевают), а не только механической энергии, о котором идет речь в учебниках по механике. Там под полной энергией понимается (без оговорок, чтобы не повторять часто одно и те же слово «механическая») кинетическая плюс потенциальная энергии.

Отправим обоих физиков отдыхать, а сами решим подробно эту задачу. Прежде всего, четко сформулируем условия и предположения, сделанные при решении задачи. Угловая скорость обоймы ω_{1z} остается постоянной в интервале $0 \le t \le \tau$. Начальная угловая скорость цилиндра $\omega_{2z} = 0$. Все время τ соблюдается неравенство $\omega_{1z} > \omega_{2z}$. Радиусы и моменты инерции ясны из рисунка. Коэффициент трения известен и не зависит от относительной скорости тел. Сила давления выступом обоймы на цилиндр постоянна. Из последних двух условий следует постоянство силы трения скольжения. Масса грузика известна. Ось z совпадает с осью цилиндра (и обоймы) и направлена от нас.

Из уравнения для момента импульса обоймы:

$$I_{1z}\frac{d\omega_{1z}}{dt} = mgR_1 - F_{mp}R_2$$

следует, что в правой части моменты сил равны по модулю, так как левая часть уравнения равна нулю из-за постоянства угловой скорости. Следовательно, можно вычислить силу трения скольжения:

$$F_{mp} = \frac{R_1}{R_2}mg$$

За время τ грузик опустится на высоту равную:

$$\Delta H = \Delta x = v\tau = \omega_{1z}R_1\tau$$

Приращение потенциальной энергии грузика за время τ равно:

$$\Delta U = U(\tau) - U(0) = -mg\Delta H = -mg\omega_{1z}R_1\tau$$

Обойма за это время повернется на угол равный:

$$\varphi_1 = \omega_{1z}\tau$$

Перейдем к описанию вращения цилиндра. Для него уравнение для момента импульса имеет вид:

$$I_{2z}\frac{d\omega_{2z}}{dt} = F_{mp}R_2 = mgR_1$$

За время τ его угловая скорость возрастет до величины равной:

$$\omega_{2z} = \frac{mgR_1}{I_{2z}}\tau$$

А сам он повернется на угол равный:

$$\varphi_2 = \frac{mgR_1}{2I_{2z}}\tau^2$$

Его кинетическая энергия будет равна:

$$E_{ц} = \frac{I_{2z}\omega_{2z}^2}{2} = \frac{(mgR_1)^2}{2I_{2z}}\tau^2$$

Напишем закон сохранение полной энергии:

$$\frac{I_{1z}\omega_{1z}^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{I_{1z}\omega_{1z}^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{I_{2z}\omega_{2z}^2}{2} - mg\omega_{1z}R_1\tau + Q$$

Находим диссипацию механической энергии (Убыль механической энергии за счет перехода ее в другие виды энергии):

$$Q = mg\omega_{1z}R_1\tau - \frac{(mgR_1)^2}{2I_{2z}}\tau^2$$

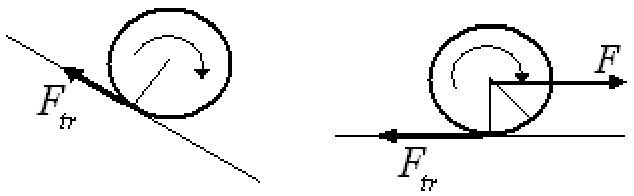
Выразим правую часть через углы поворота тел и силу трения скольжения:

$$Q = mgR_1(\omega_{1z}\tau - \frac{mgR_1}{2I_{2z}}\tau^2) = F_{mp}R_2(\varphi_1 - \varphi_2) = F_{mp}\Delta S$$

Мы получили такой же результат, который был получен в первой части пособия для поступательного движения тел в разделе «Работа сил трения». Убыль механической энергии численно равно произведению силы трения скольжения на величину относительного перемещения тел.

20. Плоское движение твердого тела.

Качение тел по горизонтальной и наклонной плоскостям. Напомним связь меду линейными и угловыми величинами. При качении цилиндра по наклонной плоскости или по горизонтальной при перемещении его оси на бесконечно малое расстояние dS он поворачивается вокруг своей оси на бесконечно малый угол равный:



$$d\varphi = \frac{dS}{R}$$

Если это равенство поделить на dt, мы получим связь между угловой скоростью и скоростью центра масс:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dS}{dtR} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v}{R}$$

При дифференцировании последнего выражения получим связь между ускорениями:

$$\beta = \ddot{\varphi} = \frac{a}{R}$$

Поэтому при качении уравнения движения для поступательного движения и вращения тела являются связанными. Если есть проскальзывание, эти уравнения становятся независимыми до того момента времени когда прекратится проскальзывание.

Теперь рассмотрим энергетический аспект задачи на примере движения цилиндра без проскальзывания по горизонтальной поверхности, если сила, приложенная к центру масс постоянна (см. правый рис. Выше). Будем считать, что ось x направлена по направлению перемещения оси цилиндра, а ось z перпендикулярна плоскости рисунка и направлена от нас. Система уравнений движения будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = F - F_{tr}$$

$$I_{zz}\ddot{\varphi} = F_{tr}R$$

Момент импульса вычисляется относительно любой неподвижной точки, находящийся на линии движения оси цилиндра, то есть в инерциальной системе отсчета. Воспользовавшись равенством связью углового ускорения с линейным ускорением, перепишем второе уравнение системы:

$$m\ddot{x} = F - F_{tr}$$

$$\frac{I_{zz}}{R^2}\ddot{x} = F_{tr}$$

Исключив неизвестную силу трения, получим уравнение для ускорения центра масс:

$$(m + \frac{I_{zz}}{R^2})\ddot{x} = F$$

Интегрирование уравнения равноускоренного движения вы уже знаете. Поэтому без лишних пояснений

$$S = \frac{F\tau^2}{2(m + \frac{I_{zz}}{R^2})}$$

выпишем ответ для пройденного пути за время τ :

Найдем силу трения. Для этого подставим в первое уравнение системы (4) подставим найденное ускорение (5):

$$m\frac{F}{m + \frac{I_{zz}}{R^2}} = F - F_{tr} \Rightarrow F_{tr} = F(1 - \frac{m}{m + \frac{I_{zz}}{R^2}}) = F(1 - \frac{1}{1 + \frac{I_{zz}}{mR^2}})$$

Для цилиндра она будет равна:

$$F_{tr} = F(1-\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}F$$

Но трение покоя не может быть больше kmg . Поэтом движущая сила F ограничена величиной:

$$F_{tr} \le kmg \Rightarrow F \le 3kmg$$

Если это неравенство не удовлетворяется, то движение без проскальзывания быть не может. К сожалению, во многих учебниках об этом умалчивается.

Найдем работу силы F при перемещении цилиндра за время τ :

$$A_{12} = FS = \frac{F^2\tau^2}{2(m+\frac{I_{zz}}{R^2})} = \frac{F^2\tau^2}{3m}$$

Вычислим конечную кинетическую энергию цилиндра:

$$E_2 = E_{пост} + E_{вращ} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{I_{zz}\omega_z^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_x^2}{4} = \frac{3}{4}mv_x^2$$

При выводе использовано равенство (2). Выразим скорость через время, интегрируя (5) один раз по времени:

$$v_x = \frac{2F\tau}{3m}$$

Таким образом, энергия цилиндра равна:

$$E_2 = \frac{F^2\tau^2}{3m}$$

Сравнивая последнее выражение с работой A_{12}, можно сделать вывод, что сила трения работы не совершает. Точнее сила трения свершает отрицательную работу в поступательном движении. И такую же, но положительную работу она совершает во вращательном движении. Можно сказать, что сила трения осуществляет перекачку энергии с поступательной степени свободы во вращательную степень свободы. Найдем конечную вращательную энергию цилиндра:

$$E_{вращ} = \frac{I_{zz}\omega_z^2}{2} = \frac{mv^2}{4} = \frac{m}{4}\frac{4F^2\tau^2}{9m^2} = \frac{F^2\tau^2}{9m}$$

Сравним ее с величиной работы силы трения:

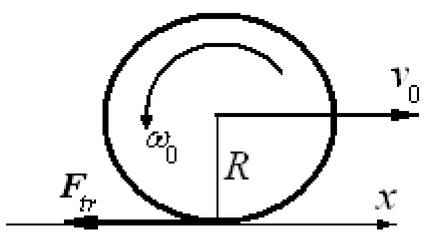
$$A_{tr} = F_{tr}S = \frac{FS}{3} = \frac{F^2\tau^2}{2(m+\frac{I_{zz}}{R^2})} = \frac{F^2\tau^2}{9m}$$

Как видите, они совпадают, подтверждая сказанное чуть выше.

Причем, это не является особенностью прямолинейного движения цилиндра по горизонтальной поверхности. Так, например, кинетическую энергию скатившегося цилиндра с некоторой горки высотой H можно приравнять потенциальной энергии цилиндра в начальный момент времени:

$$E = E_{пост} + E_{вращ} = mgH$$

Качение обруча по горизонтально поверхности. Рассмотрим пример движения тонкого обруча по горизонтальной поверхности с начальными условиями, показанными на рисунке. Масса, радиус обруча и коэффициент трения скольжения известны. Рассмотреть возможные варианты при различном соотношении начальных скоростей (поступательной и угловой). Уравнения движения поступательного и вращательного при силе трения скольжения будут иметь вид:



$$m\frac{dv_x}{dt} = -kmg$$

$$I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} = -kmgR$$

Уравнения независимы. Проинтегрируем эти уравнения и учтем начальные условия:

$$v_x = v_0 - kgt$$
$$R\omega_z = R\omega_0 - kgt$$

Полученное решение справедливо пока обруч движется с проскальзыванием. Из уравнений видно, что поступательная и угловая скорости уменьшаются по одинаковым линейным законам.
Найдем времена, когда найденные скорости обратятся в ноль:

$$\tau_{пост} = \frac{v_0}{kg}$$

$$\tau_{вращ} = \frac{R\omega_0}{k}$$

Первый возможный вариант соотношения:

$$R\omega_0 = v_0$$

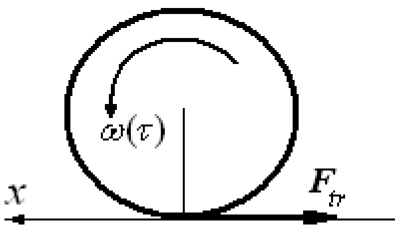
В этом случае $\tau_{пост} = \tau_{вращ} = \tau$, всякое движение обруча прекратится на расстоянии равном:

$$x(t) = v_0 t - \frac{kgt^2}{2} \Rightarrow S = x(\tau) = \frac{v_0^2}{kg} - \frac{v_0^2}{2kg} = \frac{v_0^2}{2kg}$$

Второй вариант:

$$R\omega_0 > v_0$$

В этом случае $\tau_{пост} < \tau_{вращ}$, и поступательная скорость обратится в нуль на том же расстоянии S , но обруч будет вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью:



$$\omega_z(\tau) = \omega_0 - \frac{kg\tau}{R} = \omega_0 - \frac{v_0}{R}$$

Далее надо решать новую задачу, с начальными условиями: $\omega(0) = v(0) = 0$. Но чтобы решать задачу, прежде надо ответить на вопрос: «Если положить раскрученный обруч на горизонтальную поверхность с трением, то он сразу покатится без проскальзывания или вначале будет проскальзывание»? В большинстве учебниках об этом умалчивается. Попробуем ответить. Если предположить, что обруч начнет сразу катиться без проскальзывания, то это фактически означает, что он мгновенно набрал кинетическую энергию поступательного движения, пройдя нулевое расстояние. Но это в свою очередь требует возникновения бесконечно большой силы, в направлении оси x , но она физически ограничена величиной kmg .

Если это не сообразить и начать решать задачу в предположении, что проскальзывания нет, то уравнения для такого движения будут иметь вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_{tr}$$

$$mR^2\frac{d\omega_z}{dt} = -RF_{tr}$$

Исключив силу трения, получим уравнение:

$$\frac{dv_x}{dt} = R\frac{d\omega_z}{dt}$$

Интегрируя и используя начальные условия, он получит:

$$v_x = R\omega_z + C \Rightarrow 0 = R\omega_z(\tau) + C \Rightarrow C = -R\omega_z(\tau)$$

Таким образом, поступательная скорость равна:

$$v(t)_x = -R(\omega_z(\tau) - \omega(t)_z) \Rightarrow v(t)_x < 0$$

Результат явно противоречит здравому смыслу.

Правильные уравнения движения:

$$m\frac{dv_x}{dt} = kmg$$

$$I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} = -kmgR$$

Интегрируем и учитываем начальные условия:

$$v_x(t) = kgt$$

$$R\omega(t)_z = R\omega(\tau)_z - kgt$$

Уравнения справедливы до того момента времени, когда наступит равенство $v_x(\tau_0) = R\omega(\tau_0)_z$, то есть прекратится проскальзывание. Определим τ_0, приравняв правые части уравнений:

$$kg\tau_0 = R\omega(\tau)_z - kg\tau_0 \Rightarrow \tau_0 = \frac{R\omega(\tau)_z}{2kg}$$

Это произойдет на расстоянии S_0, которое можно вычислить, проинтегрировав первое уравнение последней системы и подставив τ_0:

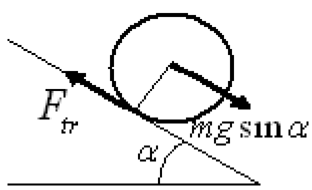
$$S_0 = \frac{R\omega(\tau)_z}{8kg}$$

Далее обруч будет катиться без проскальзывания с поступательной скоростью равной:

$$v_x(\tau_0) = kg\tau_0 = \frac{R\omega(\tau)_z}{2}$$

Последний вариант - $v_0 > R\omega_0$ приведет к тому, что через некоторое время наступит равенство $R\omega(\tau^*)_z = v_x(\tau^*)$. Затем обруч будет катиться с постоянной скоростью без проскальзывания. Расстояние, на котором кончится проскальзывание, и величина скорости в этот момент рассчитываются аналогично, и мы не будем этого делать.

Несколько замечаний к задаче о скатывании цилиндра по наклонной плоскости. Эта задача разными методами решена в учебнике И.В. Савельева. Не будем повторяться. Напомню, что там просто постулируется, что положенный на наклонную плоскость цилиндр начинает скатываться без проскальзывания. Но ничего не говориться об условиях, при которых возможно такое движение. А на этом стоит остановиться.



В самом начале этой темы мы получили соотношение между силой, приложенной к центру масс и силой трения при качении цилиндра без проскальзывания:

$$F_{tr} = \frac{1}{3}F$$

В нашем случае сила трения равна:

$$F_{tr} = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$$

К этому же результату приходит и И.В. Савельев, решая задачу. Максимальная сила трения (сила трения скольжения) равна:

$$F_{tr\max} = kmg\cos\alpha$$

Поэтому сила трения должна быть меньше максимальной силы. Из этого следует неравенство:

$$\frac{1}{3}mg\sin\alpha \le kmg\cos\alpha \Rightarrow k \ge \frac{1}{3}tg\alpha$$

В противном случае цилиндр начнет двигаться с проскальзыванием. В среднем коэффициент трения скольжения равен около $0,2$. Для угла 60^o получаем:

$$k > 0,4$$

Для большинства материалов коэффициент трения меньше этой величины. В задачниках, как правило, задается угол не больше 45^o. Такой коэффициент трения можно обеспечить, то есть задачи имеют смысл.

Давайте рассмотрим решение задачи в случае, когда положенный на наклонную плоскость цилиндр вначале движется с проскальзыванием. Заданы следующие величины: угол между наклонной и горизонтальной поверхностями, коэффициент трения скольжения. Надо определить кинетическую энергию цилиндра, когда цилиндр будет на расстоянии S от начального положения. Радиус цилиндра известен.

Уравнения движения при проскальзывании будут иметь вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha$$

$$I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} = Rkmg\cos\alpha$$

Упростив, проинтегрировав и учтя начальные условия, получим:

$$v_x = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)t$$

$$R\omega_z = (2kg\cos\alpha)t$$

Оба уравнения представляют собой математически уравнения прямых с разными угловыми коэффициентами. Их отношение равно:

$$\gamma = \frac{1}{2}(\frac{\tan\alpha}{k} - 1)$$

Но такое движение с проскальзыванием возможно (см. выше) при условии $3k < \tan\alpha$. Поэтому

$$3 < 2\gamma + 1 = \frac{\tan\alpha}{k} \Rightarrow \gamma > 1$$

Из этого следует вывод, что проскальзывание будет все время, скорость центра масс растет быстрее $R\omega_z$. Поэтому сила трения будет оставаться такой же, как и в начальный момент времени.

Найдем энергию поступательного движения. Сначала определяем время движения по заданному пути:

$$S = x(\tau) = \frac{g(\sin\alpha - k\cos\alpha)\tau^2}{2} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2S}{g(\sin\alpha - k\cos\alpha)}}$$

Затем находим конечную скорость и конечную энергию поступательного движения:

$$v_x(\tau) = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)\tau = \sqrt{2Sg(\sin\alpha - k\cos\alpha)}$$

$$E_{пост} = \frac{mv_x^2}{2} = mgS(\sin\alpha - k\cos\alpha)$$

Перейдем к вычислению энергии вращения. Находим угол поворота цилиндра за время τ:

$$\varphi(\tau) = \frac{(kg\cos\alpha)\tau^2}{R} = \frac{2Sk\cos\alpha}{R(\sin\alpha - k\cos\alpha)}$$

Вам известно, что постоянный момент силы умножить на угол поворота, то получим работу. Приравнивая ее кинетической энергии, находим последнюю:

$$E_{вращ} = kmgR\cos\alpha \cdot \frac{2Sk\cos\alpha}{R(\sin\alpha - k\cos\alpha)} = \frac{2Sk^2mg\cos^2\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha}$$

Таким образом, полная кинетическая энергия равна:

$$E_2 = mgS(\sin\alpha - k\cos\alpha) + \frac{2Sk^2 mg\cos^2\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha} = mgS\frac{(\sin\alpha - k\cos\alpha)^2 + 2k^2\cos^2\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha}$$

При отсутствии трения, как и должно быть, получаем:

$$E_2 = mgS\sin\alpha = mgH$$

Мы нашли энергию при помощи интегрирования уравнений движения. Давайте найдем ее, используя закон сохранения полной энергии.

Для того, чтобы решить задачу с помощью закона сохранения энергии, необходимо вычислить относительное перемещение очень малой поверхности диска по поверхности бруска L:

$$L = \varphi(\tau)R - S = \frac{2Sk\cos\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha} - S = \frac{\sin\alpha + k\cos\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha}S$$

Находим долю механической энергии, перешедшую во внутреннюю энергию тел:

$$Q = kmgS\cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha + k\cos\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha}$$

Теперь можно найти кинетическую энергию цилиндра:

$$E_2 = mgH - Q = mgS\sin\alpha - kmgS \cdot \frac{\sin\alpha + k\cos\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha}$$

Если выполнить алгебраические преобразования, то получим точно такое же выражение, которое было получено ранее с использованием уравнений динамики. Можете поверить, так как они были сделаны, чтобы убедится в отсутствии ошибок в вычислениях. Если вы хотите найти по отдельности поступательную и вращательную энергии, то первая равна:

$$E_{пост} = mgS(\sin\alpha - k\cos\alpha)$$

Вращательная энергия находится как разность:

$$E_{вращ} = E_2 - E_{пост}$$

Некоторые идеологические замечания. Закончим этот раздел несколькими примерами не столько, чтобы рассмотреть математическую сторону решения, сколько разобраться с его идеологией и используемой при решении терминологии.

Задача для школьников, при ответе на которую делается масса ошибок. Танк едет вверх по наклонной плоскости с постоянной скоростью. Какие силы действуют на танк? Один из вариантов ответов. Параллельно поверхности на танк действуют три силы. Вверх - сила тяги, вниз – составляющая силы тяжести и сила трения. Векторная сумма их равна нулю, если скорость танка постоянна. Не возражая, задаешь второй вопрос. Предположим, что танк въехал на участок горки, на котором коэффициент трения уменьшился, а двигатель танка работает в том же режиме. На вопрос как изменится скорость танка, почти на сто процентов получаешь ответ, что она возрастет. После уточнения того, что он считает, что скорость танка будет возрастать с уменьшением коэффициента трения, задается «убийственный» вопрос. Поверхность абсолютно гладкая. Какова будет скорость? Здесь все начинают понимать, что их злой препод завалил. Мы уверены, что студентам, дочитавших это пособие до сего места, излишне объяснять, что на танк, движущийся вверх, действуют две силы: сила тяжести и реакция опоры (со стороны поверхности). Их векторная сумма должна быть рана нулю. Для каждой силы (в инерциальной системе отсчета) можно указать тело или силовое поле, ответственные за ее возникновение. Далее в этой задаче надо разложить силы на проекции по двум осям. Удобнее всего одну направить параллельно поверхности, другую – перпендикулярно. Проекция реакции опоры на параллельную ось называют силой трения, в данном примере – силой трения покоя.

При движения танка с постоянной скорость по горизонтальной поверхности, обе силы, действующие на него, направлены по вертикали, их проекции равны нулю и никаких сил трения в этом случае быть не может. Но это верно только при постоянной скорости танка.

Рассмотрим пример, который необходим, для следующей за ним задачи. На горной речке установили турбину. Соединили ее вал с генератором тока, протянули провода в деревню, подключили электромотор, на вал которого закрепили диск. При включении мотора диск начинал вращаться. Почему? Мы занимаемся физикой, и ответ требуется физический. Он прост. Диск начал вращаться, потому что со стороны вала на него начал действовать момент силы. Однако некоторые преподы (не студенты, их мнение, как правило, совпадает с мнением препода, иначе можно уйти с экзамена не получив его автографа) придерживаются другого мнения. Какого? Диск вращается, потому что светит Солнце. Именно оно вызвало таяние ледника. Шутка? К сожалению, нет.

Автомобиль – это модно.

Задачка 1. На наклонной плоскости (угол наклона к горизонту известен) одновременно начали двигаться два совершенно одинаковых автомобиля. Причем оба водителя выжимали все возможное из своих машин. Но водители были люди осторожные и не допускали проскальзывание колес, чтобы не потерять управление машинами на узкой дороге Начальное расстояние между ними было равно S. Масса автомобиля и коэффициент трения скольжения известны. Где они встретятся? Считать, что все колеса, ведущие и нагрузка на них одинаковая.

Максимальная сила со стороны поверхности наклонной плоскости, которая может быть приложена к автомобилю – это предельная трения покоя равная:

$$F_{\max} = kN$$

Пропустив совсем тривиальные выкладки, напишем сразу выражение для относительной скорости сближения автомобилей:

$$v_{otn} = (g\sin\alpha + kg\cos\alpha)t + (kg\cos\alpha - g\sin\alpha)t = 2kgt\cos\alpha$$

Находим время движения до встречи, используя формулу для пути для равноускоренного движения:

$$S = kg\tau^2\cos\alpha$$

$$\tau = \sqrt{\frac{S}{kg\cos\alpha}}$$

Далее понятно, что найти пути, пройденные каждым автомобилем, не представляет труда. Этой арифметикой здесь нет смысла заниматься, слишком она тривиальна.

Задача 2. Автомобиль трогается с места и начинает двигаться равноускоренно (для простоты выкладок). Пройдя некоторый известный путь S, он набрал скорость $v(\tau)$. Мы можем утверждать, что приращение энергии автомобиля произошло, потому что на него действовала постоянная (так как движение равноускоренное) сила, которая совершила работу равную:

$$\frac{mv(\tau)^2}{2} = A_{12} \qquad A_{12} = FS$$

Ее величина вычисляется из этих уравнений. В предположении, что колеса не проскальзывали, эта сила трения покоя (очень неудачная принятая терминология). А вот с этим многие не согласны. Их доводы. Автомобиль это не твердое тело, у него есть вращающиеся колеса, двигатель и т.д. Аналогичное, второму закона Ньютона для материальной точки, уравнение для движения центра масс под воздействием внешней силы для системы произвольно движущихся тел применимо. Такие же уравнения, в которых будет только вместо энергии автомобиля стоять энергия поступательного движения системы тел, писать и так объяснять можно. Можно в одном месте дать определение работы силы, как произведение силы на перемещение тела, не делая оговорок, что есть силы, к которым это не применимо. А как только появляется работа силы трения покоя, сразу начинать возражать. Почему нельзя автомобиль считать системой тел, состоящей из кузова, колес, двигателя бензина, водителя т.д. и рассматривать ее движение как единого тела, двигающегося поступательно?

Для каждой материальной точки, если система тел состоит из точечных тел, или для каждой элементарной массы твердого тела можно радиус-вектор, проведенный из начала неподвижной системы координат к точечному телу или к элементарной массе разложить на сумму двух векторов, от начала координат до центра масс от центра масс до точки системы. Продифференцировав сумму по времени, мы получим векторную сумму скоростей – скорости центра масс и скорости некоторой точки относительно центра масс. Если при движении тела известны в каждый момент векторная сумма всех внешних сил, то скалярное произведение вектора суммарной силы на бесконечно малое перемещение центра масс можно условно назвать работой по перемещению материальной точки, равной масс всего твердого тела. Проинтегрировав по траектории, мы получим приращение кинетической энергии материальной точки, якобы расположенной в центре масс, и равной массе всего тела. Чтобы не говорить столь длинного определения в каждой задаче каждый раз, будем в дальнейшем обходиться более короткими выражениями: работа по перемещению центра масс и кинетическая энергия центра масс. Причем скорость центра масс (то есть материальной точки равной и тд. и тд., последний раз), стоящая в выражении для кинетической энергии будет и поступательной скоростью всех точек твердого тела. Скорость точи твердого тела относительно неподвижной системы координат будет являться векторной суммой этой поступательной скорости и скорости точки относительно центра масс. Поэтому кинетическая энергия центра (без тд. и тд.) является по существу поступательной всех точек (элементарных масс) твердого тела, то есть поступательной кинетической энергией всего тела. Конечно, эта энергия не полная кинетическая энергия всего твердого тела. Если мы имеем дело с автомобилем, то строго говоря, он не является твердым телом. Эта довольно сложная система тел. Но для многих практических задач мы можем использовать понятия, определенные выше. Мы можем выделить и достаточно просто вычислить, зная внешние силы кинетическую энергию центра масс, а значит и скорость поступательного движения всех его точек, то есть поступательную кинетическую энергию всего автомобиля. Именно эта энергия позволит оценить последствия столкновения автомобилей или его столкновения со стенкой.

Если мы хотим разобраться не только в движении автомобиля, как единого «твердого тела» (правильнее системы тел), но и с движением колес (одних из тел системы), тогда придется затрагивать и процессы внутри этой системы.

Выше написанный закон сохранения относится ко всей системе. Угловая скорость колеса (при отсутствии проскальзывания) связана с поступательной скоростью автомобиля соотношением:

$$\omega(\tau) = \frac{v(\tau)}{R}$$

Конечная энергия вращения четырех колес равна:

$$E_{вр} = \frac{I_z\omega_z^2(\tau)}{2} = \frac{I_z v_z^2(\tau)}{2R^2} = \frac{I_z FS}{2mR^2}$$

В этой формуле под моментом инерции следует понимать не момент инерции одного колеса, а суммарный, то есть учетверенный момент инерции одного колеса. Так удобнее, если мы хотим найти полную вращательную энергию колес относительно их осей. И мы ее можем вычислить, так как сила нам известна из закона сохранения энергии для автомобиля. Мы можем утверждать, что кроме момента силы трения, на ось колеса действовал момент сил (его причину возникновения, оставаясь в рамках механики Ньютона, мы объяснить, не можем). Но этот момент мы также можем вычислить из уравнения:

$$\frac{I_z\omega_z^2(\tau)}{2} = \frac{I_z FS}{2mR^2} = (N_z - FR)\varphi(\tau)$$

Несколько пояснений: ось z совпадает с осью колеса, N_z - момент сил неизвестной природы, FR - момент силы трения покоя, $\varphi(\tau)$ - угол, на который повернулось колесо за время τ. Вычислим неизвестный момент сип:

$$N_z = \frac{I_z FS}{2mR^2\varphi(\tau)} + FR$$

В этих формулах m масса всего автомобиля, в том числе и масс четырех его колес.

Произведение $N_z\varphi(\tau)$ численно равно убыли внутренней энергии системы:

$$N_z\varphi(\tau) = \frac{I_z FS}{2mR^2} + FR\varphi(\tau)$$

Первое слагаемое это кинетическая энергия вращения четырех колес автомобиля, второй член это кинетическая энергия поступательного движения всего автомобиля, включая его колеса. Конечно, физически вся энергия получена за счет убыли некой внутренней энергии системы-автомобиля. Но это никак не мешает нам писать формулу, с которой мы начали эту задачу и говорить, что кинетическая энергия поступательного движения автомобиля, как единого тела равна работе силы трения покоя. Если бы не было силы трения, то сколько бы не сожгли бензина, автомобиль бы не стронулся с мета. Именно сила трения между ним и землей разгоняет автомобиль. Нам казалось целесообразней разделить вопросы: почему автомобиль движется и откуда берется энергия. Нам кажется, что такое разделение упрощает решение задач.

Практически также можно рассмотреть торможение автомобиля (все современные иномарки имеют устройство антиблокировки колес это связано с тем, что сила трения покоя несколько больше силы трения скольжения покрышек об асфальт). Можно найти «внутренний» момент сил, действующий на колесо, и приращение внутренней энергии системы. Она переходит в нагрев двух тормозных дисков.

Замечание. Как не надо разгонять автомобиль. В один из дней водитель очень торопился. Он газанул так, что крутящий момент на колеса со стороны двигателя увеличился в два раза. Но автомобиль, двигаясь равноускоренно, за то же время прошел такой же путь, что и в предыдущей задаче. Объясним кажущийся парадокс и поясним, на что пошла дополнительная энергия двигателя.

Если автомобиль в этот раз двигался равноускоренно такое же время и прошел такой же путь, то следовательно, он двигался с тем же ускорение. Но если ускорения одинаковые, то из этого следует, что действующая сила со стороны поверхности были в обоих случаях также одинаковые. Следовательно, к концу пути автомобиль набрал ту же самую кинетическую энергию.

Давайте найдем конечную угловую скорость колес из уравнения для момента импульса:

$$\frac{I_z d\omega}{dt} = 2N - RF$$

В правой части все величины не зависят от времени, поэтому угловая скорость колес линейно увеличивается как функция времени. В конце пути она будет равна:

$$I_z \omega(\tau) = (2N - RF)\tau$$

В обеих формулах момент инерции это суммарный момент всех четырех колес.
Если же найти угловую скорость в первой задаче, то она окажется равной:

$$I_z \omega_1(\tau) = (N - RF)\tau$$

Найдя их отношение, можно скорость во второй задаче выразить через первую:

$$\frac{\omega(\tau)}{\omega_1(\tau)} = \frac{2N - RF}{N - RF} \qquad \omega(\tau) = \frac{2N - RF}{N - RF}\omega_1(\tau)$$

Из последнего выражения видно, что во второй задаче угловая скорость больше угловой скорости, необходимой качению колес без проскальзывания. Следовательно, во второй задаче на автомобиль действовала сила трения скольжения. В первом случае разгон был оптимален с точки зрений и скорости разгона и минимума расхода горючего. Во втором случае вся лишняя энергия двигателя частично перешла в излишнюю кинетическую энергию вращения колес, и частично в тепло при трении с проскальзыванием.

Обязательно прочтите следующую задачу!

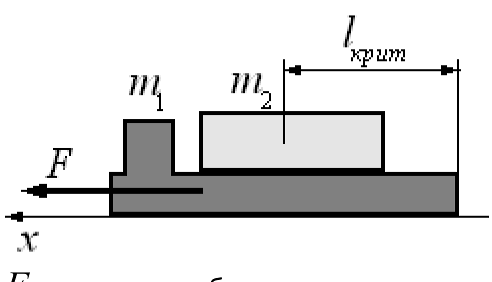
Движение нагруженного грузовика. Рассмотрим движение грузового автомобиля массы m_1, в кузове которого лежит груз m_2. Максимальное ускорение, с которым может двигаться нагруженный грузовик равно:

$$a_{1x} = \frac{F_{\max}}{m_1 + m_2} = k_1 g$$

В этой формуле k_1 коэффициент трения скольжения между колесами грузовика и дорогой. Предположено, что груз покоится относительно грузовика. Если груз не закреплен, а его удерживает трении, то груз относительно дороги не может двигаться с ускорением, чем:

$$a_{2x} = k_2 g$$

Если коэффициент трения между поверхностью кузова и грузом k_2 не меньше k_1, то нет необходимости крепить груз дополнительно. Но если это не так, то при ускорении грузовика больше a_{2x}, то груз начнет скользить относительно кузова. Мы рассмотрим последний вариант, промоделировав задачу движение системы двух тел, изображенных на рисунке.



Так же, как и в предыдущих задачах с автомобилем, мы можем вычислить путь пройденный центром масс, его скорость за некоторое время от начала движения. Можно вычислить кинетическую энергию поступательного движения центра масс, приравняв ее работе силы F, которую мы будем считать постоянной:

$$V_c = \frac{F}{m_1 + m_2}\tau$$

$$S_c = \frac{F}{2(m_1 + m_2)}\tau^2$$

$$\frac{(m_1 + m_2)V_c^2}{2} = FS_c$$

Но в этой задаче все вычисленные величины не относятся к движению самого грузовика. Они характеризуют движение точки центра масс. В предыдущих задачах было сделано очевидное предположение, но которое не оговаривалось. Предполагалось, что из автомобилей ничего не вываливалось, а если и происходило изменение положения точки центра масс на сантиметры из-за того что водитель изменил позу, то этим всегда можно пренебречь при пути разгона автомобиля в десятки метров. В этой задаче перемещение центра относительно грузовика имеет принципиальное значение. В данной задаче они практически бесполезны.

Рассмотрим движение каждого тела. Найдем ускорение, скорость и кинетическую энергию грузовика при условии, что груз скользит относительно грузовика:

$$a_{1x} = \frac{F}{m_1} - k\frac{m_2}{m_1}g$$

$$v_{1x} = (\frac{F}{m_1} - k\frac{m_2}{m_1}g)\tau$$

$$S_1 = (\frac{F}{m_1} - k\frac{m_2}{m_1}g)\frac{\tau^2}{2}$$

Найдем аналогичные величины для груза:

$$a_{2x} = kg$$

$$v_{2x} = kg\tau$$

$$S_2 = \frac{kg\tau^2}{2}$$

Если из пути автомобиля вычесть путь, пройденный грузом, то мы узнаем, на какое расстояние переместился груз относительно кузова автомобиля:

$$S_1 - S_2 = (\frac{F}{m_1} - k\frac{m_2}{m_1}g)\frac{\tau^2}{2} - \frac{kg\tau^2}{2} = (\frac{F}{m_1} - kg(1 + \frac{m_2}{m_1}))\frac{\tau^2}{2}$$

Если эта разность превысит $l_{крит}$, показанное на рисунке, то груз рухнет на землю. А Чукче, который провел 6 лет в институте (один курс повторно по «болезни») только для того, чтобы не забрали в армию, и не закрепил груз, подумав, куда он денется такой тяжелый, пришлось продать двухкомнатную и переехать в однокомнатную квартиру, чтобы оплатить разбитый груз. К физике надо относиться с любовью, если не хотите попадать в похожие ситуации.

Найдем кинетическую энергию обоих тел:

$$E_1 = \frac{m_1}{2}(\frac{F}{m_1} - k\frac{m_2}{m_1}g)^2\tau^2 = m_1 S_1(\frac{F}{m_1} - k\frac{m_2}{m_1}g) = FS_1 - km_2 g S_1$$

$$E_2 = \frac{m_2}{2}(kg\tau)^2 = km_2 g S_2$$

Суммарная кинетическая энергия системы тел равна:

$$E = E_1 + E_2 = FS_1 - km_2 g(S_1 - S_2)$$

Если второй член, по физическому смыслу являющийся величиной энергии, перешедшей в тепло из-за наличия трения, то мы получим выражение закона сохранения полной энергии:

$$E + Q = A$$

То есть работа всех внешних сил над системой равна возрастанию ее механической энергии плюс увеличение внутренней энергии системы.

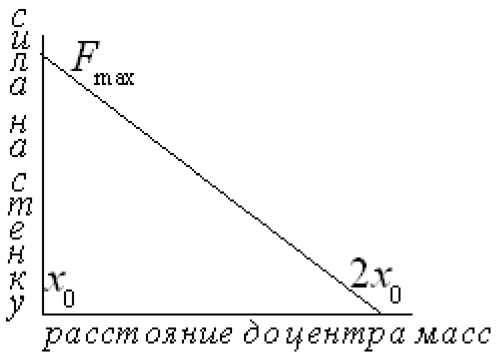
По вычисленным выше скоростям автомобиля и груза можно, воспользовавшись определением скорости центра масс, вычислить ее и убедиться, что она совпадает с той, которая была вычислена из движения центра масс в самом начале задачи.

Так что есть класс задач, где рассмотрение движения центра масс существенно упрощает их решение, но есть и задачи, в которых рассмотрение движения центра масс практически бесполезно. Но очень во многих задачах использование результатов движения центра масс, как дополнительных данных, может упростить их решение.

Вы, наверное, видели, как перевозят легковые машины на специальных прицепах, на которых машины располагаются на рамной конструкции в два этажа. Обратите внимание на их крепление.

А что было в «ящике»? Физик 1 изготовил прибор, который по форме был параллелепипед, один из размеров его был много больше двух других. Параллелепипед был сделан из тонких стенок, в стенках стояли элементы, которые позволяли фиксировать величину давление, оказываемое положенным телом в него. Внутренние поверхности стенок были гладкими. Так что при движении тела внутри трение можно было пренебречь.

К нему в гости пришел физик 2 и спросил первого физика, может ли он отгадать, что положит в ящик (когда первый не будет видеть). Физик 1 согласился это сделать. Второй положил, а первый стал наблюдать.



Некоторое время на дно ящика действовали две одинаковые практически точечные силы, присеем одна из них, была рядом с вертикальной стенкой, но давление на стенку не было. Точка действия второй силы находилась достаточно далеко от стенки и линия, соединяющая две точки действия сил, была перпендикулярна вертикальной стенке. Но это длилось недолго. Появилась сила давления на стеку, тоже точечная и тока действия силы была почти рядом с полом ящика. И в тоже же момент точка приложения «дальней» силы начала перемещаться по перпендикуляру от стенки. В результате эксперимента были поучены графики, показанные на рисунке. Физик 1 был осторожным и попросил своего коллегу повторить опыт, ног положить свое нечто, развернув на 180°. Все произошло абсолютно также, если не считать, что время от начала действия сил на пол до действия силы на вертикальную стенку было несколько другим.

После этого физик 1 сказал, что он может высказать предположение, что было положено в ящик и что там происходило. Послушайте его объяснения.

В ящик были положены два тела, которые можно считать точечными, так как точки приложения силы от тела, положенного рядом со стенкой были почти рядом с ребром параллелепипеда. Эти тела имеют одинаковую массу m. Ее я определил из измеренной силы давления на пол ящика. Вначале между этими телами сила взаимодействия была равна нулю. В некоторый момент, который примем за начальный, возникла сила отталкивания между телами, уменьшающаяся по линейному закону. Когда расстояние между телами удвоилось, то сила взаимодействия стала рана нулю. За это время центр масс системы сместился на $x_0/2$. Я рассчитал скорость цента масс системы, в тот момент, когда прекратилось давление на стенку. Она равна:

$$\frac{2mv_c^2}{2} = (\frac{1}{2}F_{\max})\frac{x_0}{2} = \frac{F_{\max}x_0}{4} \Rightarrow v_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F_{\max}x_0}{m}}$$

Так как на систему, после этого момента времени, силы не действуют (силы тяжести уравновешенны силами со стороны поверхности пола), то центр масс системы далее будет двигаться с этой скоростью. Из зависимости расстояний между телами мы можем сказать, что в последующем движении тела то сближаются на минимальное расстояние $x_0/2$, то удаляются $3x_0/2$.

На ближнее к стенке тело действует такая же сила, которая изображена на графике. Но оно покоится. Следовательно, на него действует сила такая же сила со стороны дальнего тела. Из этого вытекает, что дальнее тело движется под действием силы, изображенной на графике, но на оси абсцисс (расстояние) надо в начальной точке поставить x_0, в конечной точке $2x_0$. Тогда практически также можно определить скорость дальнего тела в момент, когда на стенку перестала действовать сила:

$$\frac{mv_2^2}{2} = (\frac{1}{2}F_{\max})x_0 = \frac{F_{\max}x_0}{4} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{F_{\max}x_0}{m}}$$

Если перейти в систему центра масс, то в ней в момент отрыва первого тела от стенки оба тела удаляются от центра масс с одинаковыми по величине скоростями равными:

$$v_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F_{\max}x_0}{m}}$$

Из измерений движения точек приложения сил к точкам поверхности пола ящика определяется максимальное и минимальное расстояния тел друг от друга. Оно оказались равным $3x_0$ и x_0. В этом интервале сила линейна, при $l < 2x_0$ происходит отталкивание, при $l > 2x_0$ - притяжение. На расстоянии $2x_0$ сила взаимодействия равна нулю. Можно подобрать формулу для такой зависимости:

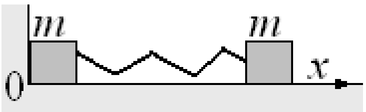
$$F(l) = \frac{F_{\max}}{x_0}(l - 2x_0)$$

Таким образом, в прибор-ящик была положена упругая гантель. И в заключение физик 1 сказал, что ему непонятно, почему тела гантели некоторое время не взаимодействовали, причем время задержки было разное.

Физик 2 извлек гантель из ящика, Он сказал, что все описано верно, формула найдена правильно, не взаимодействовали он потому, что были скреплены нити. Я сыпал дорожку из горючего порошка, поджигал, огонь подходил под нить и ее пережигал, очевидно, что дорожки в двух опытах были не совсем одинаковыми. Между прочим, наблюдая рассеяние α частиц. Резерфорд догадался об устройстве атома.

Как происходят колебания во времени, в этой части пособия объяснено не будет. Этому вопросу будет посвящен специальная часть «Механические колебания».

А теперь отбросим лирику о физиках и рассьртрим начало движение гантели, прижатой к стенке. Условие задачи покаано на рисунке. В начальный момент времени пружину гантели сжали до размера вдвое меньшего не деформированной длины пружины. Левоый кубик был прижат к стенке, правый отпустил без толчка. Праый кубик начинает двигатьс под действием уменьшающейся по величине силы. Точно такая же сила будет действовать на левый кубик. Так как он будет покоиться до того момента времени, когда длина прудина начнет становиться больше ее не деформированной длины.



Сила давления левого кубика на стенку будет уменьшаться по линейному закону. Точно такая же по величине будет внешняя сила, приложенная к гантели и направленная по оси x. В начальном положении координата центра масс была равна $x_c = l_0/4$, а сила давления на стенку при этом была равна $F = kl_0/2$. Сила давления обратилась в ноль, когда координата центра масс гантели стала равна $x_c = l_0/2$. Из этих условий найдем выражение для силы, действующей со стороны стенки на гантель:

$$F_x = k(l_0 - 2x_c)$$

На стр. интеграл призведения силы, действующей на центр масс системы, на его перемещение был назван работой по перемещению центра. Найдем эту работу:

$$A_{12} = \int_1^2 F_x dx_c = \int_{\frac{l_0}{4}}^{\frac{l_0}{2}} k(l_0 - 2x_c)dx_c = kl_0(\frac{l_0}{2} - \frac{l_0}{4}) - kl_0(\frac{l_0}{4} - \frac{l_0}{16})$$

$$A_{12} = kl_0^2(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}) = \frac{1}{16}kl_0^2$$

Следовательно, то, что на стр. было названо кинетической энергией центра мысс, будет равно:

$$\frac{2mv_c^2}{2} = \frac{1}{16}kl_0^2 \qquad v_c^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{kl_0^2}{m}$$

Найдя скорость центра масс, можно умножив ее на два найти скорость правого шарика.

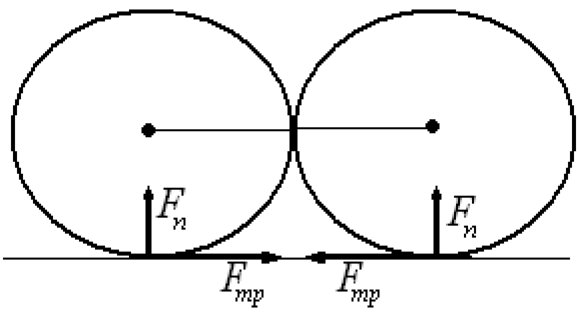
Найдем из закона сохраненя полной энергии скорость правого кубика в момент, когда пружина не деформирована:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{k}{2}\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 \qquad v^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{kl_0^2}{m}$$

Отношение скоростей, как и должно быть, равно двум.

Конечно в этой конкретной задаче второй путь прпоще. Но это потому, что мы ясно предсавлем процессы, происходящие в системе. Во многих задачах мы этого не знаем. Но как видите и без знания, что происходит в системе, но при условии, что мы заем веншние силы в любой момент времени или в любой точке траектории движения центра масс системы, мы можем определить его скорость. Если известна сила, действующая со стороны поверхности на движущийся автомобиль, то можем вычслить и скорость автомобиляф и его постпательную кинетическую энернию. При столкновении автомобиля с припятствием этого вполне достаточно, чтобы последствия для передка вашего автомобиля. Для этого совершенно не надо знать не относительной скорости вращения его копес, коленчаього вала и поступательного движения поршней. Между прчим, гаишника при наезде интересует именно скорость центра масс автомобиля.

Два «бодающиеся» цилиндра. На горизонтальную поверхность положили вплотную два одинаковых цилиндра, вращающихся в противоположных направлениях (см. рис.). Силы тяжести, приложенные к центру цилиндра, на рисунке не показаны. Силы трения, приложенные со стороны поверхности по величине равны:



$$F_{mp}=kF_n=kmg$$

Сил трения между цилиндрами не возникает, если линейные скорости поверхностей цилиндров в точке касания одинаковы.

Угловые скорости будут убывать по линей ному закону:

$$\omega(t)=\omega(0)-\frac{kmgRt}{I_{zz}}$$

Каждый цилиндр за некоторое время повернется на угол равный:

$$\varphi(t)=\frac{kmgRt^2}{2I_{zz}}$$

Из первого уравнения можно определить время до прекращения вращения цилиндров:

$$\omega(0)-\frac{kmgRt}{I_{zz}}=0\Rightarrow\tau=\frac{I_{zz}\omega(0)}{kmgR}$$

Определив время, можно вычислить полный угол поворота цилиндра:

$$\varphi(\tau)=\frac{kmgR\tau^2}{2I_{zz}}=\frac{I_{zz}\omega^2(0)}{2kmgR}$$

Для проверки решения можно полный угол поворота умножить на момент силы трения, чтобы сравнить работу этой силы с начальной кинетической энергией цилиндра:

$$A_{12}=kmgR\varphi(\tau)=\frac{I_{zz}\omega^2(0)}{2}$$

Как видите, сошлось.

Но эта задача приведена только для вашей раскачки, ради следующей задачи. Представьте себе, что вам на экзамене задали вопрос, на который надо качественный ответ. Задача по ситуации и телам аналогична. Но только левый цилиндр вращается, а правый нет. Причем масса вращающегося цилиндра больше массы неподвижного. Размеры их одинаковы и коэффициент трения скольжения между ними и цилиндров с поверхностью тоже одинаков. И вас просят сказать, будут ли цилиндры смещаться по поверхности и, если да, то, в каком направлении. При этом добавляют, что можно обойтись ответом для малых времен. Почти все отвечают (точнее ляпают, даже не делая попытку посчитать), что цилиндры будут смещаться вправо (мы пользуемся рисунком к предыдущей задаче). Могу вас огорчить, ответ не правильный.

Давайте разберем эту задачу. Что будет происходить? У левого цилиндра угловая скорость будет уменьшаться. Правый начнет вращаться, но в начальные времена его угловая скорость будет меньше. Между цилиндрами есть трение. Но сила трения скольжения, приложенная к левому цилиндру, будет направлена вверх, а такая же по величине сила трения, приложенная к правому цилиндру, будет направлена вниз. Горизонтальные силы трения между цилиндрами и поверхностью, следовательно, будут разные. Сила трения, приложенная к левому цилиндру, будет равна:

$$F_{тр.лев} = kF_{п.лев} = k(m_{лев}g - kF_{взаим})$$

Сила трения, приложенная к правому цилиндру, будет равна:

$$F_{тр.пр} = kF_{п.пр} = k(m_{пр}g + kF_{взаим})$$

Разность этих сил будет силой, которая и определит направление движения цилиндров вдоль поверхности. Если $F_{тр.пр} > F_{тр.лев}$, то цилиндры начнут смещаться влево, если $F_{тр.пр} < F_{тр.лев}$, то они будут смещаться вправо. И будут вращаться на месте при условии:

$$k(m_{лев}g - kF_{взаим}) = k(m_{пр}g + kF_{взаим})$$

Таким образом, левый цилиндр может быть большей массы на величину равную:

$$m_{лев} - m_{пр} = \frac{2kF_{взаим}}{g}$$

и все равно не сможет сдвинуть более легкий цилиндр.

Из того, что уже получили, следует мораль. Если на зачете или экзамене вам задали вопрос, который вам кажется совсем простым, не торопитесь отвечать, подумайте, может он и не так прост. Есть еще одна мораль в этой задаче, к физике отношения не имеющая, не суетись, сохраняй олимпийское спокойствие, иначе на тебя наедет и более слабый.

Продолжим задачу. Все понятно, но ведь сила давления цилиндров друга не известна. Как ее найти? Чтобы упростить формулы и алгебраические преобразования, будем считать, что массы цилиндров одинаковые. В этом случае цилиндры будут двигаться влево с некоторым одинаковым ускорением и равному ускорению их центра масс. В этом же направлении направим ось x. Уравнения движения цилиндров будут иметь вид:

$$ma_{xлев} = F_{взаим} - k(mg - kF_{взаим})$$

$$ma_{xпр} = k(mg + kF_{взаим}) - F_{взаим}$$

Так как равны левые части, то мы получаем равенство, из которого можно найти искомую силу:

$$F_{взаим} = kmg$$

Найдем в заключение задачи ускорение центра масс системы:

$$2ma_{cx} = k(mg + kF_{взаим}) - k(mg - kF_{взаим}) = 2k^2F_{взаим}$$

$$a_{cx} = k^3g$$

В этой теме рассматривались примеры с качением тел. Перейдем к примерам столкновения тел.

Движение упругой гантели в поле тяжести. Две точечных шайбы соединены невесомой пружиной. Ее недеформированная длина известна. Верхней шайбе сообщили вертикальную скорость v_0, направленную вертикально вниз. Чему будет рано максимальное давление на горизонтальную поверхность? Известна, что максимальная высота подъема верхней шайбы равна утроенной длине недеформированной пружины.

Максимальное давление будет в момент остановки верхней шайбы, которое можно найти из уравнения:

$$F_{\max} = mg + k(l_0 - l_{\min})$$

Сомножитель в круглых скобках можно найти из закона сохранения полной механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl_0 = \frac{k}{2}(l_0 - l_{\min})^2 + mgl_{\min}$$

$$\frac{k}{2}(l_0 - l_{\min})^2 - mg(l_0 - l_{\min}) - \frac{mv_0^2}{2} = 0$$

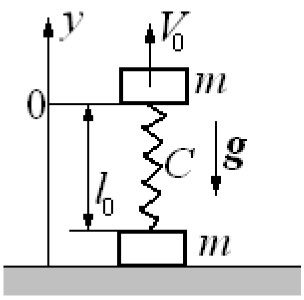
$$l_0 - l_{\min} = \frac{mg}{k} + \sqrt{(\frac{mg}{k})^2 + \frac{mv_0^2}{k}}$$

Таким образом, искомая сила давления равна:

$$F_{\max} = mg + mg + k\sqrt{(\frac{mg}{k})^2 + \frac{mv_0^2}{k}}$$

$$F_{\max} = mg(2 + \sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{mg^2}})$$

И задача была бы решена, если бы был известен коэффициент жесткости пружины. Его придется искать из рассмотрения движения шайбы в последующее время.



После остановки верхняя шайба начнет двигаться вверх. Когда она вернется в начальное положение, то ее скорость (из закона сохранения) будет равна по величине начальной скорости, но она будет направлена вверх. На представленном рисунке показана гантель в этот момент времени. Это будет начальным моментом времени для задачи по рассмотрению движения шайбы вверх.

До того момента, когда нижняя шайба оторвется от поверхности к системе приложены две внешние силы: сила тяжести и реакция опоры. В начальный момент реакция опоры равна mg, так как в начальный момент пружина не деформирована. Когда упругая сила пружины станет равной mg, нижняя шайба перестанет давить на поверхность и реакция опоры станет равной нулю. Это произойдет, когда верхняя шайба гантели будет иметь координату, определяемую из уравнения:

$$mg = ky_1 \qquad y_1 = \frac{mg}{k}$$

Центр масс гантели в этот момент будет иметь координату равную:

$$y_{C1} = \frac{y_1 + l_0}{2} = \frac{mg}{2k} + \frac{l_0}{2}$$

Скорость центра масс системы в начальный момент времени равен:

$$V_C(y_{C0}) = \frac{mv_0}{2m} = \frac{v_0}{2}$$

Найдем скорость центра масс в момент отрыва нижней шайбы из формулы, связывающей приращение кинетической энергии с работой всех сил, действующих на центр масс системы:

$$\frac{2mvV_C(y_{C1})^2}{2} - \frac{2mV_C(y_{C0})^2}{2} = A_{тяж} + A_{давл}$$

Сила тяжести постоянная, сила реакции поверхности меняется по линейному закону. Следовательно:

$$\frac{2mvV_C(y_{C1})^2}{2} - \frac{2mV_C(y_{C0})^2}{2} = -2mg(y_{C1} - y_{C0}) + \frac{mg}{2}(y_{C1} - y_{C0})$$

$$V(y_{C1})^2 = V_C(y_{C0})^2 - \frac{3g}{2}(y_{C1} - y_{C0}) = V_C(y_{C0})^2 - \frac{3g}{2}(\frac{mg}{2k} + \frac{l_0}{2} - (-\frac{l_0}{2}))$$

$$V_C(y_{C1})^2 = V_C(y_{C0})^2 - \frac{3g}{2}(\frac{mg}{2k} + l_0)$$

Далее на центр масс системы будет действовать только сила тяжести. Высоту подъема можно определить из закона сохранения полной механической энергии центра масс:

$$\frac{2mV_C(y_{C1})^2}{2} = 2mg\Delta y$$

$$\Delta y = \frac{V_C(y_{C1})^2}{2g}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2g}\{(V_C(y_{C0})^2 - \frac{3g}{2}(\frac{mg}{2k} + l_0)\}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2g}\{\frac{v_0^2}{4} - \frac{3g}{2}(\frac{mg}{2k} + l_0)\} = \frac{v_0^2}{8g} - \frac{3}{4}(\frac{mg}{2k} + l_0)$$

Таким образом, максимальная высота, на которую поднимется центр масс системы от поверхности земли, будет равна сумме: 1. Высота положения центра масс до начала движения - $l_0/2$, 2. От начального положения до момента отрыва нижней шайбы - $(mg/2k) + l_0$ и 3. От момента отрыва до остановки - Δy. Следовательно, высота подъема центра масс от горизонтальной поверхности равна:

$$H = \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{2k} + l_0 + \frac{v_0^2}{8g} - \frac{3}{4}(\frac{mg}{2k} + l_0)$$

$$H = \frac{v_0^2}{8g} + \frac{mg}{8k} - \frac{l_0}{4}$$

По условию задачи найденная высот равна $3l_0$. Приравнивая, неизвестное отношение:

$$\frac{mg}{k} = 18l_0 - \frac{v_0^2}{g}$$

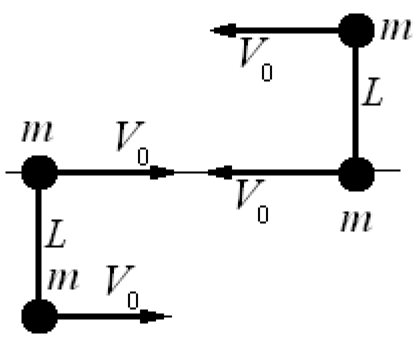
Подставим найденное отношение в формулу для максимальной силы:

$$F_{\max} = mg(2 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{18l_0g - v_0^2}}) = mg(2 + \sqrt{\frac{18l_0g}{18l_0g - v_0^2}})$$

21. Столкновение тел.

Столкновение гантели с шариком и гантелями между собой.

Начнем со школьной задачки и с ее решения школьниками. Стакивается две гантели. Столкновение абсолютно упругое. Все, показанные на рисунке величины, известны. Как будут двигаться тела через достаточно большое время? Шарики считать точечными телами.



Как решают школьники в подавляющем большинстве? Далее я привожу решение, которое делают большинство школьников.

Из закона сохранения импульса для сталкивающихся шариков и характера столкновения следует, что шарики обменяются скоростями. Так как на верхние шарики столкновение не влияет, то их скорости не изменяться. Следовательно, поступательное движение гантелей прекратится, и они будут вращаться с угловыми скоростями:

$$\omega = \frac{2v_0}{L}$$

Через время, равное периоду движения по половине окружности равное

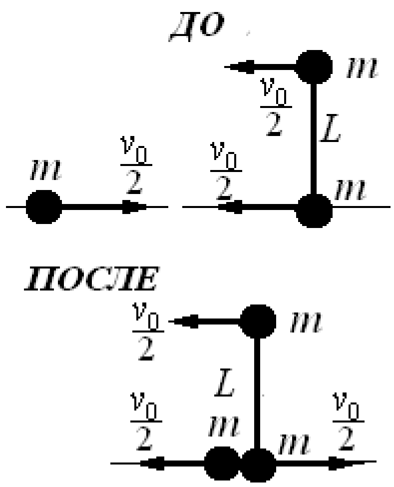
$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi L}{2v_0}$$

произойдет второе столкновение, в результате которого сталкивающиеся шарики снова обменяются скоростями. После этого гантели будут удаляться с первоначальными скоростями друг от друга, причем каждая будет двигаться в первоначальном направлении.

Движение описано абсолютно правильно. А «идеология» ошибочна.

«Идеологическая» ошибка в задаче состоит в том, что применяется закон сохранения импульса для сталкивающихся шариков, а не для системы тел. Как надо правильно объяснять полученное решение?

Система замкнутая, так как никаких внешних сил на гантели не действуют. Столкновение абсолютно упругое. Следовательно, должны сохраняться полная механическая энергия, импульс и момент импульса системы относительно любой точки. Правильно найденное решение обязательно должно удовлетворять всем трем законам сохранения. Если один из них вы не используете при решении, то рекомендую проверить его выполнение для проверки правильности решения. Вообще говоря, можно при достаточном навыке угадать решение интуитивно. И если все законы выполняются, то оно угадано правильно. Иного решение быть не может, так как использование законов механики при решении задачи дают единственный ответ.



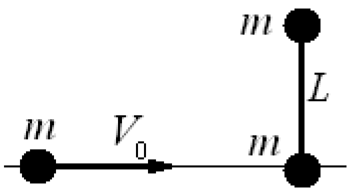
Рассматриваете момент импульса системы относительно точки столкновения. До столкновения он был равен:

$$M_0 = 2 \cdot (mv_0 L) = 2mv_0 L$$

После столкновения он должен быть таким же. Физические условия для гантелей совершенно одинаковы. Следовательно, оба шарика обязаны двигаться после столкновения с одинаковыми скоростями. Это приводит к тому, что их скорости не изменятся. Момент импульса системы перед столкновением относительно точки, в которой расположен самый нижний шарик, равен:

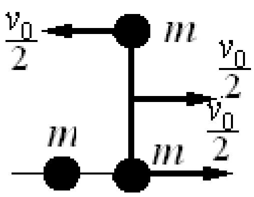
$$M_{нижн} = 2mv_0 L + mv_0 L - mv_0 L = 2mv_0 L$$

Что произойдет после столкновения. Самый верхний шарик, как показано выше, сохранит свою скорость. Сталкивающие шарики поменяют направление скоростей на противоположные, обязательно равные, чтобы не давать вклада в момент импульса. И они должны по величине остаться неизменными, чтобы сохранилась энергия системы. Равенство импульса системы нулю до и после столкновения является подтверждением правильности решения.



Рассмотрим задачу столкновения шарика с гантелью. Понятней всего будет решение, если перейти в систему отсчета, в которой гантель и шарик сближаются с одинаковыми скоростями.

Чтобы не писать много формул, приведен рисунок с указанием скоростей тел в этой системе до и после столкновения. Глядя на него, можно легко проверить выполнение всех законов сохранения.



В лабораторной систем налетающий шарик после столкновения будет покоиться. Средняя точка стержня гантели, ее центр масс, будет двигаться со скоростью $\boldsymbol{v}_0 / 2$, и шарики гантели будут вращаться вокруг центра масс гантели с такой же скоростью (последний рис).

Проверим сохранение законов сохранения в лабораторной системе координат. Хотя этого можно и не делать. Если законы выполняются в одной инерциальной системе, то они будут выполняться в любой другой инерциальной системе. Закон сохранения энергии:

$$E_1 = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$E_2 = E_{пост} + E_{вращ} = \frac{2m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{2}$$

Закон сохранения импульса:

$$\boldsymbol{p}_1 = m\boldsymbol{v}_0 \qquad \boldsymbol{p}_2 = 2m\frac{\boldsymbol{v}_0}{2} = m\boldsymbol{v}_0$$

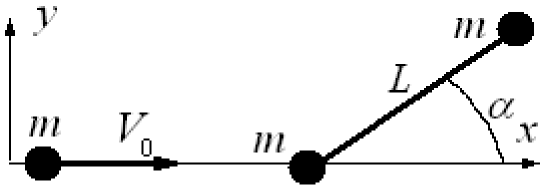
Закон сохранения момента импульса относительно центра гантели:

$$M_1 = \frac{m\boldsymbol{v}_0 L}{2} \qquad M_2 = 2m\frac{\boldsymbol{v}_0}{2}\frac{L}{2} = \frac{m\boldsymbol{v}_0 L}{2}$$

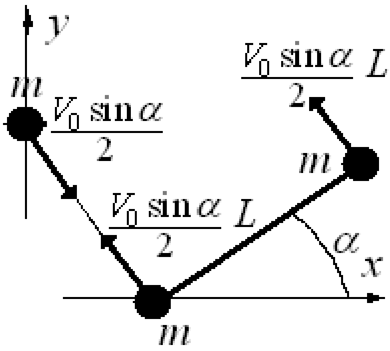
Момент импульса относительно нижнего шарика до столкновения равен нулю. Находим его после столкновения:

$$M = 2 \cdot \frac{m v_0}{2}\frac{L}{2} - 2m\frac{v_0}{2}\frac{L}{2} = 0$$

Задача решена и решение проверено.



Последняя задачка на точечные шарики, но хитрее. Задача требует аккуратного решения, поэтому будем действовать по всем правилам, сделаем рисунок, введем оси координат и будем работать с проекциями, а не обходиться модулями физических величин.



Разложим скорость шарика на перпендикулярную гантели и направленную по стержню гантели:

$$v_{\perp} = v_0 \sin\alpha$$

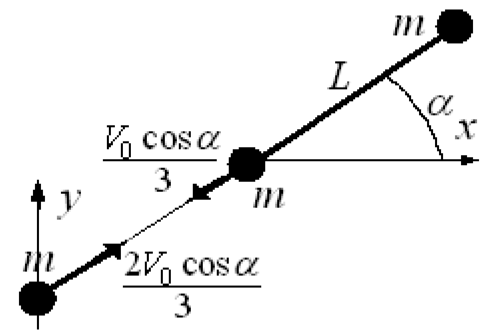
$$v_{\parallel} = v_0 \cos\alpha$$

Если перейти в систему координат, которая будет двигаться перпендикулярно оси гантели со скоростью $v_{\perp}/2$ (см. второй рисунок), то налетающий и нижний шарик гантели будут сближаться с одинаковыми по величине скоростями:

$$v'_{\perp} = \frac{1}{2} v_0 \sin\alpha$$

Этим приемом мы свели столкновение перпендикулярное оси гантели к предыдущей решенной задаче.

Теперь перейдем к движению тел по направлению оси гантели. Для этого перейдем еще раз в новую систему отсчета, в которой скорость сближения шарика равна



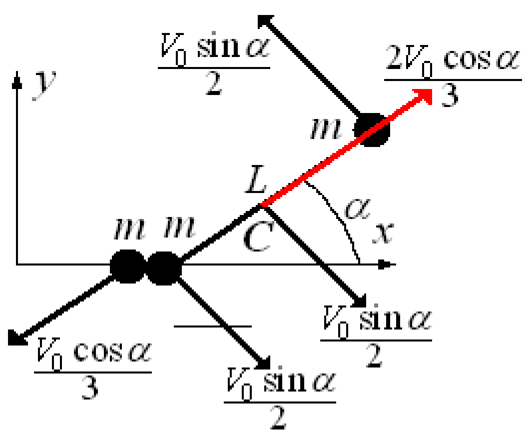
$$v''_{\parallel} = \frac{2}{3} v_0 \cos\alpha \text{ ,}$$

А скорость гантели равна

$$v''_{\parallel гант} = \frac{1}{3} v_0 \cos\alpha$$

В этой системе импульс системы равен нулю, то есть для продольного столкновения она является системой центра масс (см. третий рисунок). Заметим, что второй рисунок при втором переходе в новую систему координат не изменится (картинка будет двигаться по направлению стержня).

Что будет после столкновения? Смотрим на второй рисунок и получаем ответы. У шарика скорость, оставаясь по величине такой же, изменит направление на противоположное. Со сталкивающимся шариком гантели произойдет то же самое. В результате гантель будет вращаться вокруг неподвижной точки ее центра масс. В лабораторной системе отсчета шарик остановится, а центр масс вращающейся гантели будет удаляться от шарика со скоростью равной



$$v_{\perp c} = \frac{1}{2} v_0 \sin\alpha$$

По направлению перпендикулярном стержня гантели, показанного на втором рисунке. Мы рассмотрели «перпендикулярную часть» столкновения.

Из третьего рисунка следует, что скорости тел изменяться только по направлению (в системе центра масс импульсы при абсолютно упругом столкновении только меняют знак). В лабораторной системе шарик будет двигаться со скоростью:

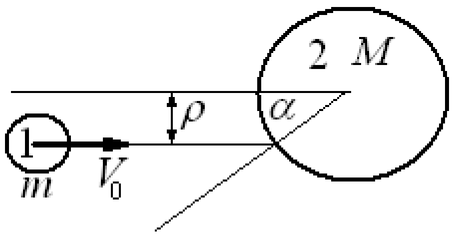
$$v_{\|шар}=\frac{2}{3}v_0\cos\alpha-\frac{1}{3}v_0\cos\alpha=\frac{1}{3}v_0\cos\alpha\,,$$

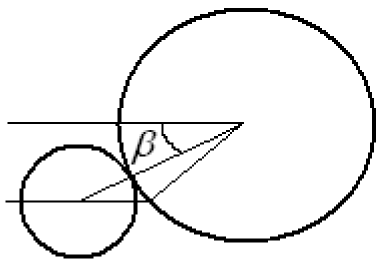
Удаляясь от точки столкновения, скорость удаления гантели будет равна:

$$v_{\|гант}=\frac{1}{3}v_0\cos\alpha+\frac{1}{3}v_0\cos\alpha=\frac{2}{3}v_0\cos\alpha$$

На последнем рисунке показаны все скорости сразу после столкновении в лабораторной системе отсчета. Выполнение законов сохранения, можете проверить сами. Закон сохранения импульса проверен в уме.

<u>*Прицельный параметр*</u>. В предыдущих задачах все шарики считались точечными. С энергетической стороны это приближение, означает, что мы не учитываем энергию вращения шарика относительно его центра. И для многих реальных задач это достаточно хорошее приближение. Однако для геометрии движения после столкновения такое приближение для реальных задач скорее исключение. В большинстве случаев удар не является центральным, а имеется некоторый прицельный параметр ρ (см. рис.). Из него ясно, что шарик после столкновения будет двигаться под некоторым углом к своему первоначальному положению, даже если налетающий шарик считать точечным. Если его нельзя считать точечным, то связь прицельного параметра с углом рассеяния шарика усложняется (см. второй рис.).





Начнем рассмотрение, с предельного случая. Будем считать, что масса шара M столь велика, что он остается неподвижным. Все школьники знают, что при центральном ударе, $\rho=0$, налетающий шарик отскакивает с противоположно направленной, но равной по величине скоростью. На вопрос: почему? К сожалению, получаешь ответ: из закона сохранения импульса. Комментарии, думаем, лишние.

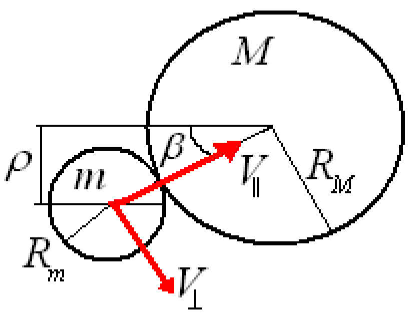
Воспользуемся готовыми формулами, выведенными ранее в пособия при рассмотрении столкновений двух тел:

$$\boldsymbol{v}'_m=\frac{(m-M)\boldsymbol{v}_0}{m+M}=-\frac{(1-\frac{m}{M})\boldsymbol{v}_0}{1+\frac{m}{M}}\approx-\boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{v}'_M=\frac{2m\boldsymbol{v}_0}{m+M}=\frac{2\frac{m}{M}\boldsymbol{v}_0}{\frac{m}{M}+1}\approx\frac{2\frac{m}{M}\boldsymbol{v}_0}{1}=2\frac{m}{M}\boldsymbol{v}_0\approx 0$$

В первой формуле мы пренебрегли отношением масс по сравнению с единицей, во второй это отношение занулили. Обратите внимание импульс, полученный тяжелым шаром совсем не мал, он того же порядка, что и налетающего шарика.

Рассмотрим энергии тел. У налетающего шарика она не изменилась. Покоящийся шар приобрел энергию равную:



$$E'_M=\frac{M}{2}(2\frac{m}{M}\boldsymbol{v}_0)^2=4\frac{m}{M}\cdot\frac{m\boldsymbol{v}_0^2}{2}=4\frac{m}{M}E'_m\approx 0$$

Таким образом, задача обычно делается в одном приближении по отношению масс для всех физических величин. С точки зрения математики не полагается сохранять в решении различные физические величины в разных приближениях.

Рассмотрим эту задачу для не центрального столкновения. В момент удара разложим скорость, как показано на третьем рисунке. После столкновения $\boldsymbol{v}_\|$ изменит направление на противоположное, $\boldsymbol{v}_\perp$

сохранится. Будем считать, что ось x направлена по направлению движения налетающего шарика, а ось y с верха в низ рисунка. Вычислим проекции скорости шарика после столкновения:

$$v_x = \boldsymbol{v}_\perp \sin\beta - \boldsymbol{v}_\parallel \cos\beta = \boldsymbol{v}_0 \sin^2\beta - \boldsymbol{v}_0 \cos^2\beta$$

$$v_y = \boldsymbol{v}_\perp \cos\beta + \boldsymbol{v}_\parallel \sin\beta = \boldsymbol{v}_0 \sin\beta\cos\beta + \boldsymbol{v}_0 \sin\beta\cos\beta = 2\boldsymbol{v}_0 \sin\beta\cos\beta$$

Проверим вычисления:

$$v_x^2 + v_y^2 = \boldsymbol{v}_0^2(\sin^4\beta - 2\sin^2\beta\cos^2\beta + \cos^4\beta) + 4\boldsymbol{v}_0^2 \sin^2\beta\cos^2\beta = \boldsymbol{v}_0^2$$

Все в порядке.

Проанализируем полученные формулы. Представим этот анализ в виде таблички:

$\beta = 0 \qquad v_x = -\boldsymbol{v}_0 \qquad v_y = 0$

$0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$ шарик рассеивается в заднюю полусферу

$\beta = \dfrac{\pi}{4} \qquad v_x = 0 \qquad v_y = \boldsymbol{v}_0$

$\dfrac{\pi}{4} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ шарик рассеивается в переднюю полусферу

$\beta = \dfrac{\pi}{2} \qquad v_x = \boldsymbol{v}_0 \qquad v_y = 0$

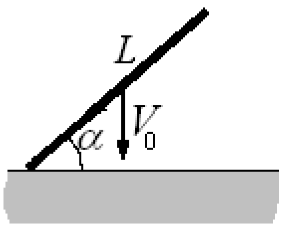
В последнем варианте шарик вскользь коснется неподвижного шара. Угол, отсчитываемый от направления прямой, по которой шарик двигается до столкновения, и прямой, по которой он двигается после столкновения, называется углом рассеяния. В первом варианте он равен π, в последнем - нулю. Формула для его расчета в зависимости от угла β приведена ниже:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\beta - \cos^2\beta}$$

Угол β можно выразить через прицельный параметр и радиусы шариков:

$$\sin\beta = \frac{\rho}{R_m + R_M}$$

22. Решение задач на столкновение тел с помощью законов Ньютона.

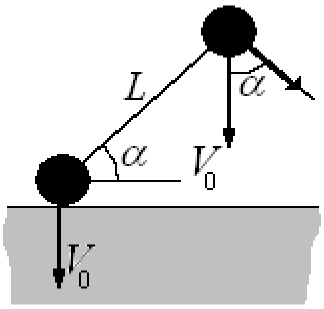


<u>«Откуда выросли ноги» у этой темы</u>. Захотелось в пособие поместить задачу о столкновении стержня со стенкой. Условие задачи показано на первом рисунке. Тонкий стержень массы m, двигается поступательно со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ по горизонтальной поверхности без трения (на рис. показан вид сверху). Столкновение абсолютно упругое. Угол α известен. Определить, как будет двигаться стержень после столкновения.

А как ее решать непонятно. Есть одно уравнение закона сохранения кинетической энергии. Ясно, что должна остаться проекция суммарного импульса на горизонтальное направление равной нулю. Ясно, что после столкновения стержень будет вращаться относительно центра масс, а центр масс будет двигаться вверх с постоянной скоростью. Нам известно из закона сохранения энергии полная энергия стержня:

$$\frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = mv_0^2$$

А как определить каждое слагаемое по отдельности? Ведь больше уравнений в голову не приходит. *Самый простой способ, но абсолютно не конструктивный, отказаться от размещения задачи*. Но этот путь Чукчи. Никто не узнает, но совесть нам не позволяет пойти по этому пути.



Первое, что приходит в голову, так это упростить задачу. Скачала решить аналогичную задачу для жесткой точечной гантели (второй рис.).

Для верхнего шарика должен сохраниться момент импульса, взятый относительно сталкивающегося шарика в тот момент времени, когда он на мгновение остановиться. Это вытекает из отсутствия момента сил, действующих на него, относительно этой точки.

Величина этого момента импульса равна:

$$M = Lmv_0 \cos\alpha$$

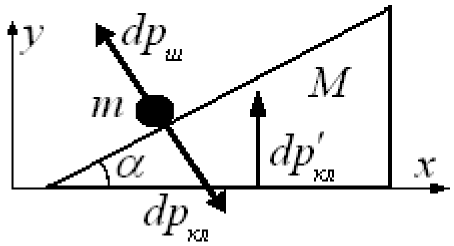
Но из этого не следует, что у верхнего шарика не появиться проекции скорости вдоль оси гантели. И опять число неизвестных больше числа уравнений.

Следовательно, надо найти метод решения задач, в которых при использовании законов сохранения уравнений меньше числа неизвестных. Ниже приведена задача, поясняющая принцип, как решаются такие задачи. Она не относится к столкновению стержней или гантели, а приведена из методических соображений. Разобравшись в ней, будет понятней решение задачи о столкновении гантели.

Столкновение маленького шарика с поверхностью клина. С покоящимся на гладкой горизонтальной поверхности клином абсолютно упруго сталкивается маленький шарик. Скорость шарика в момент удара равна v_0 и направлена перпендикулярно поверхности клина. Определить скорости тел после столкновения.

Запишем второй закон Ньютона в виде;

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt$$



На рисунке показаны бесконечно малые приращения, полученные телами за время столкновения. Разложим эти приращения импульсов на вертикальные и горизонтальные проекции напишем уравнения, связывающие их:

$$dp_ш \sin\alpha = dp_{кл.гор}$$

$$dp_ш \cos\alpha = dp_{кл.верт} = 0$$

При написании равенства был использован третий закон Ньютона. Так как клин в вертикальном направлении импульса не приобретает, то правая часть второго уравнения равна нулю. Переданный вертикальный импульс шарика уравновесится импульсом со стороны поверхности, на которой лежит клин. Из этих уравнений следует связь между начальными скоростями перед столкновением с их скоростями после столкновения. Первое соотношение есть просто закон сохранения импульса системы на горизонтальное направление:

$$mv_x + MV_x = mv_0 \sin\alpha$$

Из второго соотношения мы получаем недостающее уравнение к законам сохранения:

$$mv_y - mv_0 \cos\alpha = 0$$

И у нас есть уравнение сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{MV_x^2}{2}$$

Таким образом, имеем три уравнения с тремя неизвестными. Задача по физике решена, осталась элементарная математика. Решать можно по-разному. Например, из первых двух уравнений системы найти квадраты скоростей шарика после столкновения и подставить их в третье уравнение:

$$v_x^2 = \frac{1}{m^2}(mv_0 \sin\alpha - MV_x)^2$$

$$v_y^2 = v_0^2 \cos^2\alpha$$

$$v_0^2 = \frac{1}{m^2}(mv_0 \sin\alpha - MV_x)^2 + v_0^2 \cos^2\alpha + \frac{MV_x^2}{m}$$

$$v_0^2 = \frac{1}{m^2}(mv_0 \sin\alpha - MV_x)^2 + v_0^2 \cos^2\alpha + \frac{MV_x^2}{m}$$

$$v_0^2\sin^2\alpha = v_0^2\sin^2\alpha - \frac{2M}{m}v_0\sin\alpha V_x + \frac{M^2V_x^2}{m^2} + \frac{MV_x^2}{m}$$

$$V_x = \frac{2v_0\sin\alpha}{1+\frac{M}{m}}$$

Определяем горизонтальную скорость шарика:

$$mv_x = mv_0\sin\alpha - MV_x = mv_0\sin\alpha - \frac{2v_0M\sin\alpha}{1+\frac{M}{m}}$$

$$v_x = v_0\sin\alpha - MV_x = v_0\sin\alpha - \frac{2v_0M\sin\alpha}{m+M} = v_0\sin\alpha(1-\frac{2M}{m+M})$$

$$v_x = -\frac{M-m}{m+M}v_0\sin\alpha$$

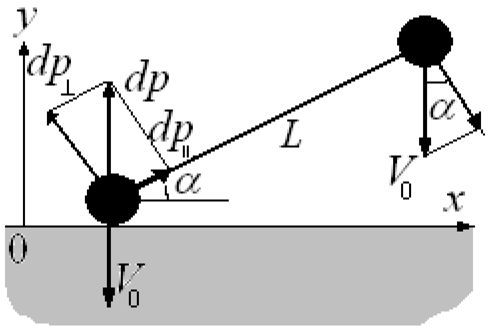
Выпишем все найденные скорости тел:

$$V_x = \frac{2v_0\sin\alpha}{1+\frac{M}{m}} \qquad v_x = -\frac{M-m}{m+M}v_0\sin\alpha \qquad v_y = v_0\cos\alpha$$

В предельном случае $M \to \infty$: $V_x = 0$, $v_x = -v_0\sin\alpha$, $v_y = v_0\cos\alpha$. То есть шарик отскочит с той же по величине скоростью, но противоположно направленной, а клин будет покоиться.

Если скорость шарика с будет не перпендикулярна поверхности (гладкой), то эту скорость надо разложить на проекции. Для нормальной проекции задача только что решена. А тангенциальную проекцию надо просто добавить к полученной скорости шарика. Мы не будем этим заниматься (задача посильна и для Чукчи), а перейдем к задаче столкновения гантелей.

<u>*Упругое столкновение гантели со стенкой*</u>. Столкновение абсолютно упругое, поверхность гладкая. Величины, показанные на рисунке, известны. Надо найти скорости шариков после столкновения или угловую скорость вращения гантели вокруг центра масс и его скорость.



Импульс нижний шарик за счет взаимодействия с поверхностью получит за время столкновения приращение равное $d\boldsymbol{p}$. Разложим его на две проекции, как показано на рисунке, на $dp_\parallel$ и $dp_\perp$. Приращение $dp_\perp$ второй шарик не влияет. Поэтому его изменение происходит только из-за взаимодействия с поверхностью. Поэтому мы получаем уравнение:

$$mv_\perp - mv_0\cos\alpha = 0$$

Находим из него скорость нижнего шарика после столкновения перпендикулярную оси гантели:

$$v_\perp = v_0\cos\alpha$$

Скорость перпендикулярную оси гантели верхнего шарика находится из закона сохранения момента импульса. Для верхнего шарика должен сохраниться момент импульса, взятый относительно сталкивающегося шарика в тот момент времени, когда он на мгновение остановиться. Это вытекает из отсутствия момента сил, действующих на него, относительно этой точки.

Величина этого момента импульса равна:

$$M = Lmv_0\cos\alpha$$

Таким образом, его $v_\perp$ остается равной:

$$v_\perp = v_0\cos\alpha$$

Следовательно, гантель начнет вращаться по часовой стрелке после столкновения с угловой скоростью равной:

$$\omega = \frac{2v_0 \cos\alpha}{L}$$

Мы можем определить вращательную энергию гантели в системе центра масс:

$$E_{вр} = \frac{I_0\omega_2^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2mL^2}{4}\left(\frac{2v_0\cos\alpha}{L}\right)^2 = mv_0^2\cos^2\alpha$$

Из закона сохранения энергии находим энергию движения центра масс:

$$mv_0^2 - mv_0^2\cos^2\alpha = mv_0^2\sin^2\alpha$$

Из последнего уравнения находим скорость центра масс:

$$\frac{2mv_c^2}{2} = mv_0^2\sin^2\alpha$$

$$v_c = v_0\sin\alpha$$

Искомые величины найдены.

Дополнение е задаче. Оценим величину угла, при котором верхний шарик не столкнется с поверхностью. Так как этот угол не будет большим, то косину этого угла будем считать равным единице, а синус угла заменим на значение угла. В этом приближении угловая скорость и скорость центра масс будут иметь вид:

$$\omega = \frac{2v_0}{L} \qquad v_c = v_0\alpha$$

Найдем время, за которое гантель примет вертикальное положение:

$$\alpha + \frac{\pi}{2} = \varphi(\tau) = \omega\tau = \frac{2v_0}{L}\tau \qquad \tau = \frac{L(\alpha + \frac{\pi}{2})}{2v_0}$$

За это время центр масс окажется на расстоянии H от поверхности стенки:

$$H = \frac{L}{2}\alpha + v_0\alpha\tau = \frac{L}{2}\alpha + \alpha\frac{L(\alpha+\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{L}{2}\alpha\left(1+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

Если $H > L/2$, то шарик не столкнется со стенкой, если меньше, то столкнется. Оценим предельный угол:

$$\frac{L}{2}\alpha\left(1+\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{L}{2}$$

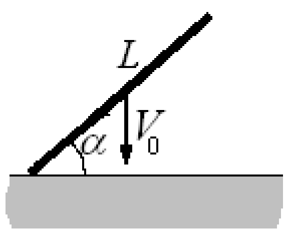
$$\alpha\left(1+\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = 1 \qquad \alpha^2 + \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = -\left(\frac{\pi}{2}+1\right) + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2 + 1} \approx 0{,}2 \approx 11^o$$

Если угол таков, что второй шарик тоже столкнется со стенкой, то гантель перестанет вращаться, а ее центр масс будет удаляться от стенки с начальной скоростью v_0.

Можно переходить к решению задачи столкновения стержня.

__Упругое столкновение стержня со стенкой__. Все выводы относительно проекций скоростей шариков перпендикулярных соединяющему их стержню останутся без изменения. Следовательно, стержень будет вращаться с той же угловой скоростью, что и шарики. Кинетическая энергия вращения стержня будет равна:



$$E_{вр} = \frac{I_c\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{mL^2}{12}\cdot\left(\frac{2v_0\cos\alpha}{L}\right)^2 = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{6}$$

Скорость центра масс определится из закона сохранения энергии:

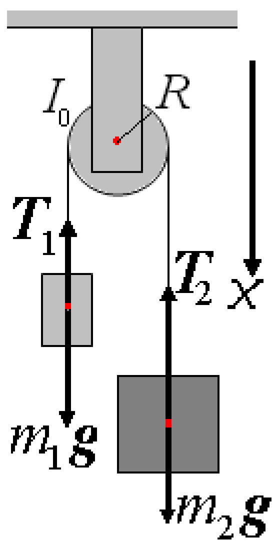
$$\frac{mv_0^2}{2}-\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{6}=\frac{mv_c^2}{2} \qquad v_0^2(1-\frac{\cos^2\alpha}{3})=v_c^2$$

$$v_c=v_0\sqrt{\frac{2+\sin^2\alpha}{3}}$$

Эта тема поучительна тем, что метод решения более простой вспомогательной задачи, может помочь решить задачу, решение которой вам не ясна. На дипломе или уже при работе после окончания вуза ваш научный руководитель может дать научную задачу, решение которой вообще не известно. Вам она тоже может показаться не по силам. Не падайте духом и не опускайте рук. Упростите задачу, решите ее. Затем начинайте постепенно раз за разом отказываться от сделанных упрощающих предположений. И таки путем вы придете к решению поставленной перед вами задачи.

23. Метод виртуальных перемещений в задачах движения нескольких тел.

Теорию и строгое обоснование этого метода можно найти в учебниках по Теоретической механике. Здесь будет только показано его применение к одномерному движению связанных между собой нескольких тел. Все эти задачи можно решить стандартными методами, рассмотренных в учебниках Общей физике и решения их вам хорошо известно. Однако предлагаемый метод в несколько раз сокращает вычисления, при его применении уменьшается вероятность сделать ошибку. Именно поэтому и возникло желание показать его вам – студентам, которые еще не добрались до теоретической механике, либо этот предмет вообще отсутствует в программах вашей специальности.



Начнем с задачи, показанной на рисунке, решение которой практически можно написать сразу. Массы тел, момент инерции блока и его радиус известны. В предположении, что нить невесома, она не проскальзывает по блоку, у которого трения в оси нет, ускорение правого тела равно:

$$\boldsymbol{a}=\frac{m_2-m_1}{\frac{I}{R^2}+m_2+m_1}\boldsymbol{g}$$

Приступим к пояснению метода. В большинстве задач по этой тематике бывают очень небольшая разновидность тел. Во-первых, «кубики», движущиеся поступательно либо по плоскости, либо на нитях. Во-вторых, блоки либо закреплены, либо подвешенные на нити. В-третьих, цилиндры, катящиеся по плоскости.

Уравнения движения бывают двух типов: второй закон Ньютона для поступательного движения «кубиков» и уравнение для момента импульса вращающегося блока или цилиндра относительно оси. Напишем эти уравнения для трех тел системы, показанной на рисунке:

$$m_1 a_{x'1}=T_1-m_1 g$$
$$I_0\beta=N$$
$$m_2 a_{x2}=m_2 g-T_1$$

Для первого уравнения выбрано направление, обратное оси x. Мы как бы развернули движение всех тел в одном направлении.

Далее начнется формализм, но который не противоречит математике. Перенесем правые части уравнений в левые и сложим и умножив каждое на бесконечно малое, как его принято называть, виртуальное перемещение и сложим все уравнения:

$$[m_1 a_{x'1}-(T_1-m_1 gx)]\delta s_1+[I_0\beta-N]\delta s_2+[m_2 a_{x2}-(T_2-m_2 g)]\delta s_3=0$$

Под виртуальными перемещениями в этой формул следует понимать либо поступательные перемещения кубиков, либо угол поворота блока.

Если обозначить виртуальное перемещение тела m_2, ускорение которого мы ищем, δX, то все остальные виртуальные перемещения можно выразить через него (мы считаем, что нити нерастяжимые, и это является ограничением этого метода) с точностью до постоянных коэффициентов, который определяются геометрией системы:

$$\delta s_k = \alpha_k \delta X$$

Из постоянства коэффициентов следует связь ускорений:

$$\ddot{s}_k = \alpha_k \ddot{X}$$

Найдем коэффициенты α_k :

$$m_1 \quad \delta s_1 = \delta x_1' = \delta X \quad \alpha_1 = 1$$

$$I_0 \quad \delta s_{бл} = \delta\varphi = \frac{\delta X}{R} \quad \alpha_{бл} = \frac{1}{R}$$

$$m_2 \quad \delta s_2 = \delta x_2 = \delta X \quad \alpha_2 = 1$$

Выразим ускорения линейные или угловые тел системы через ускорение $\ddot{X}$:

$$\ddot{s}_1 = a_{x'1} = \alpha_1 \ddot{X} = \ddot{X}$$

$$\ddot{s}_2 = \beta = \alpha_2 \ddot{X} = \frac{1}{R}\ddot{X}$$

$$\ddot{s}_2 = a_x = \alpha_2 \ddot{X} = \ddot{X}$$

Подставим найденные δs_k и $\ddot{s}_k$ в формулу суммы уравнений движения:

$$[m_1\ddot{X} - (T_1 - m_1 gx)]\delta X + [I_0 \frac{1}{R}\ddot{X} - N]\frac{\delta X}{R} + [m_2\ddot{X} - (T_2 - m_2 g)]\delta X = 0$$

Внутренние силы натяжения нитей входят попарно с разными знаками и их можно удалить из уравнения:

$$[m_1\ddot{X} - (-m_1 gx)]\delta X + [I_0 \frac{1}{R}\ddot{X}\,]\frac{\delta X}{R} + [m_2\ddot{X} - (m_2 g)]\delta X = 0$$

Сократим на виртуальное перемещение и перегруппируем члены:

$$m_1\ddot{X} + I_0 \frac{1}{R^2}\ddot{X} + m_2\ddot{X} = m_2 g - m_1 gx$$

Из этого выражения и следует ответ, с которого мы и начали.

Подставим в предпоследнее уравнение коэффициенты α_k :

$$[m_1\alpha_1\ddot{X} - (-m_1 gx)]\alpha_1\delta X + [I_0\alpha_{бл}\ddot{X}\,]\alpha_{бл}\delta X + [m_2\alpha_2\ddot{X} - (m_2 g)]\alpha_2\delta X = 0$$

Тогда из этого выражения можно получить общую формулу для определения $\ddot{X}$:

m_k	δs_k	α_k	α_k^2	F_k
m_1	$\delta s_1 = \delta X$	1	1	$m_1 g$
I_0	$\delta s_2 = \frac{1}{R}\delta X$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R^2}$	0
m_2	$\delta s_3 = \delta X$	1	1	$m_2 g$

$$\ddot{X} = \frac{m_2 g\alpha_2 - m_1 g\alpha_1}{m_1\alpha_1^2 + I_0\alpha_{бл}^2 + m_1\alpha_1^2}$$

$$\ddot{X} = \frac{\sum \alpha_k F_k}{\sum \alpha_k^2 m_k}$$

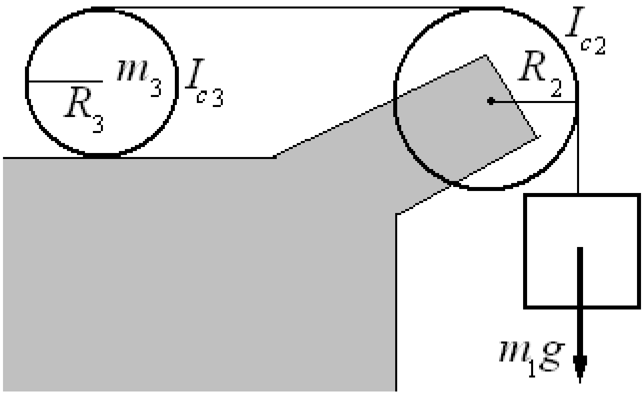
Чтобы вы не делали ошибок, следует еще раз четко пояснить смысл величин, входящих в нее, и ограничения, при которых ее можно применять. Силы F_k - это силы, совершающие работу над телами системы и приводящие к изменению ее кинетической энергии. Силы внутренние, действующие со стороны связей (натяжение нитей) в эту формулу не входят. Каждый отрезок нити действует на два тела равными силами, но противоположными по направлению. При перемещении тел работа этих сил на все тела будет равна нулю.

Силы трения качения без проскальзывания также учитывать не надо. Их суммарная работа в поступательно и вращательном движении тела рана нулю. Под m_k следует понимать либо массу тела, либо его момент инерции. Если тело вращается и одновременно движется поступательно, то удобней записывать два слагаемых с m и с I. Коэффициенты α_k находятся из геометрических соотношений конкретно для каждой задачи. Необходимые условия применимости. Нити должны быть нерастяжимыми, в противном случае α_k не будут постоянными, а при получении формулы было заложено их постоянство. По этой же причине тела не могут быть соединены пружинками. Формула не применима, если качение с проскальзыванием. В этом случае поворот тела никак геометрически не связан с его поступательным движением центра масс.

И в заключение краткого теоретического введения практический совет. Решение оформляется в виде таблички и на ее основании пишется ответ. Для рассмотренной задачи табличка имеет вид, показанный на рисунке.

Приведем несколько задач, решение которых будет найдено эти методом.

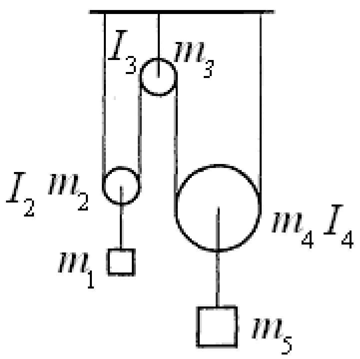
<u>*Качение цилиндра*</u>. Найти ускорение тела, висящего на нити. Блок вращается без трения. Нить по блоку не проскальзывает, невесома, нерастяжима. Цилиндр катится без проскальзывания. Массы, моменты инерции, радиусы известны. Все виртуальные перемещения тел рассматриваем по отношению перемещения опускающегося тела. Они занесены в таблицу. Там же приведены и необходимые коэффициенты для написания ответа:



m_k	δs_k	α_k	α_k^2	F_k
m_1	$\delta s_1 = \delta X$	1	1	$m_1 g$
I_2	$\delta s_2 = \frac{1}{R_2}\delta X$	$\frac{1}{R_2}$	$\frac{1}{R_2^2}$	0
I_3	$\delta s_3 = \frac{1}{2R_3}\delta X$	$\frac{1}{2R_3}$	$\frac{1}{4R_3^2}$	0
m_3	$\delta s_3 = \frac{1}{2}\delta X$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{m_1}{m_1 + \frac{I_2}{R_2^2} + \frac{I_3}{4R_3^2} + \frac{m_3}{4}}\boldsymbol{g}$$

<u>*Система блоков с грузами 1*</u>. Все величины, показанные на рисунке и радиусы блоков известны. Моменты инерции приведены относительно осей блоков. Проскальзывания нити отсутствует. Найти ускорение тела m_1



В качестве основного перемещения выбираем перемещение первого груза. Рисуем таблицу и заносим в неё перемещения остальных тел. Перемещение двух правых тел будет таким же, как и перемещение двух левых тел из-за не растяжимости нити и их симметрии. Если два левых дела опустятся на какое-то расстояние, то длина всей левой нити увеличится на удвоенное это расстояние. Поэтому в коэффициенте для этого тела появиться множитель двойка. Приведем таблицу, хотя ответ можно сообразить в уме.

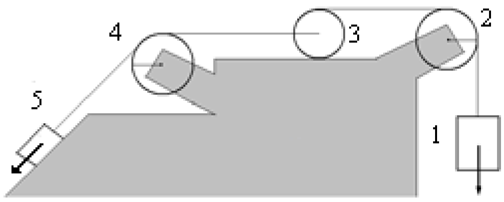
После заполнения таблицы не составляет труда написать ответ:

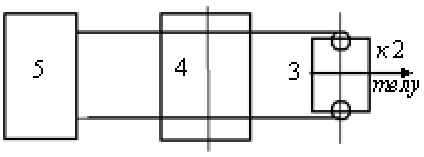
m_k	δs_k	α_k	α_k^2	F_k
m_1	$\delta s_1 = \delta X$	1	1	$m_1 g$
I_2	$\delta s_2 = \frac{1}{R_2}\delta X$	$\frac{1}{R_2}$	$\frac{1}{R_2^2}$	0
m_2	$\delta s_2 = \delta X$	1	1	$m_2 g$
I_3	$\delta s_3 = \frac{2}{R_3}\delta X$	$\frac{2}{R_3}$	$\frac{4}{R_3^2}$	0
I_4	$\delta s_4 = \frac{1}{R_4}\delta X$	$\frac{1}{R_4}$	$\frac{1}{R_4^2}$	0
m_4	$\delta s_4 = \delta X$	1	1	$-m_4 g$
m_5	$\delta s_5 = \delta X$	1	1	$-m_5 g$

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{(m_1 + m_2) - (m_4 + m_5)}{m_1 + m_2 + \frac{I_2}{R_2^2} + \frac{4I_3}{R_3^2} + m_4 + \frac{I_4}{R_4^2} + m_5}\boldsymbol{g}$$

Конечно, рассмотренный метод во много раз проще и короче стандартного, при использовании которого придется решать систему из семи уравнений движения плюс еще более дополнительных уравнений для сил и геометрических соотношений. Вероятность допустит глупую ошибку при преобразованиях также во много раз меньше. Но если это зачетная задача, то вас вправе попросить написать все уравнения и решить их, либо объяснить этот метод. И даже после вашего объяснения возможны два варианта. Первый вами восхитятся, как вы интересуетесь и любите физику. Но есть и второй вариант. Вас не поймут. И может дело кончится, как в сказке дедушки Крылова: «Ты виноват уж тем, что хочется мне кушать, сказал и в темный лес ягненка поволок».

<u>Система блоков с грузами 2</u>. Чтобы обойтись небольшим рисунком на нем проставлены только номера тел и показаны силы, определяющие ускорение системы тел. Для всех тел известны массы, необходимые момента инерции и радиусы. У катящегося без проскальзывания цилиндра на торцах имеются устройства для крепления параллельных нитей, которые своими концами прикреплены к пятому телу. Вид сверху показан на втором рисунке. За основное перемещение принимаем перемещение первого тела и заполняем таблицу и на основании ее пишем ответ:





$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{m_1 - \frac{1}{2}m_5(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + \frac{I_2}{R_2^2} + \frac{I_3}{4R_3^2} + \frac{m_3}{4} + \frac{I_4}{4R_4^2} + \frac{m_5}{4}}\boldsymbol{g}$$

m_k	δs_k	α_k	α_k^2	F_k
m_1	$\delta s_1 = \delta X$	1	1	$m_1 g$
I_2	$\delta s_2 = \frac{1}{R_2}\delta X$	$\frac{1}{R_2}$	$\frac{1}{R_2^2}$	0
I_3	$\delta s_3 = \frac{1}{2R_3}\delta X$	$\frac{1}{2R_3}$	$\frac{1}{4R_3^2}$	0
m_3	$\delta s_3 = \frac{1}{2}\delta X$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
I_4	$\delta s_4 = \frac{1}{2R_4}$	$\frac{1}{2R_4}$	$\frac{1}{4R_4^2}$	0
m_5	$\delta s_2 = \frac{1}{2}\delta X$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-m_5(\sin\alpha + k\cos\alpha)g$

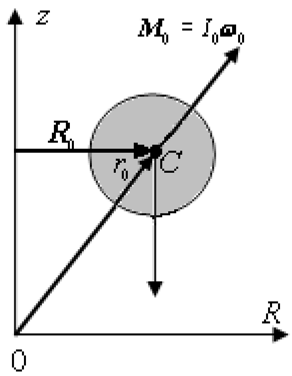
Если будет перевешивать пятое тело, то не забудьте, поменяв знак перед всей формулой, поменять знак у силы трения. Числитель будет равен:

$$m_1 \frac{1}{2} m_5(\sin\alpha - k\cos\alpha) - m_1$$

Знаменатель не изменится. И $\boldsymbol{g}$ конечно останется.

24. Движение твердого тела с изменением ориентации в пространстве момента импульса.

Прецессия гироскопа. Мы не будем рассматривать общий случай движения тела, при котором изменяется ориентация оси вращения в пространстве, а ограничимся частными примерами движений, понимание которых будет необходимо в разделах физики, которые будут изучаться в последующих семестрах.



Прежде всего, рассмотрим прецессию вращающегося гироскопа, закрепленного в одной точке, в поле тяжести Земли. Гироскоп это тело с симметричным распределением массы, что-то похожее на детский волчок. Нижняя точка главной оси инерции, вокруг которой его раскручивают как можно с большей угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$, закрепляется в шарнире, причем трение в нем должно быть как можно меньше. Мы при рассмотрении сделаем предположение, что оно вообще отсутствует. Тогда собственный момент импульса гироскопа $I_0\boldsymbol{\omega}_0$ относительно его главной оси будет сохраняться. На рисунке показано положение гироскопа в момент времени, когда его центр масс *C* находился в плоскости рисунка. Относительно начала координат на гироскоп действует момент силы тяжести $F = mg$. Направление силы показано вертикальной стрелочкой, направленной вниз. Модуль момента силы тяжести:

$$N = mgr_0 \sin\alpha = mgR_0$$

Угол α отсчитывать от оси *Z*. Направлен этот момент перпендикулярно плоскости рисунка от нас. За бесконечно малое время dt вектора собственного момента импульса гироскопа получит бесконечно малое приращение $dM_0 = mgr_0 \sin\alpha dt$, которое будет направлено по направлению момента силы. Приращение импульса можно записать в виде $M_0 \sin\alpha d\varphi$, в котором $d\varphi$ бесконечно малый угол поворота вокруг оси *Z.* Таким образом, можно написать равенство:

$$M_0 \sin\alpha d\varphi = mgr_0 \sin\alpha dt \qquad M_0 d\varphi = mgr_0 dt$$

Поделив обе части на dt и M_0, получим угловую скорость поворота оси гироскопа вокруг оси *Z,* которая будет образующей поверхности конуса:

$$\Omega = \frac{mgr_0}{M_0} = \frac{mgr_0}{I_0\omega_0}$$

Эта угловая скорость называется скоростью прецессии (но не процессии!) гироскопа. Вы видите, что она не зависит от угла гироскопа. Можно закрепить верхний конец оси гироскопа на потолке, от этого результат не изменится.

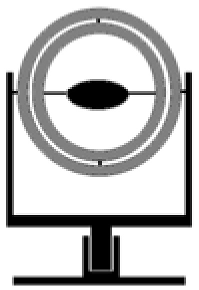
Однако есть одна тонкость, которая не заметна при таком выводе. Все будет происходить так, как описано выше при одном условии, что в начальный момент времени, энергия гироскоп с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$, вы не просто отпускаете ось, но и придаете ей соответствующую скорость прецессии. Если вы ее просто отпускаете такого «гладенького движения» не получится. Почему? По очень простой причине. Если трение отсутствует, нет неконсервативных сил и полная механическая энергия должна сохраняться. Она складывается в начальный момент времени, пока ось неподвижна, из собственной энергии вращения гироскопа $\frac{I_0\omega_0^2}{2}$ и потенциальной энергии в поле тяжести земли $mgr_0 \cos\alpha$. При движении появляется кинетическая энергия поступательного движения центра масс $\frac{m}{2}\Omega^2 R_0^2$. Следовательно, какая-то энергия должна уменьшиться. Уменьшается потенциальная энергия, поэтому ось гироскопа начинает не только прецессировать, но и отклоняться вниз. Поэтому конец вектора собственного момента импульса будет двигаться не по окружности, а описывать некоторую волнистую линию. Вычисление размаха колебаний по углу α не входит в программу первого семестра.

Стоит подчеркнуть, что все выше написанное сделано в предположении, что собственный момент импульса гироскопа много больше момента импульса прецессии:

$$I_0\omega_0 \gg mR_0\Omega$$

Это ограничение будет иметь место и при рассмотрении следующих примеров.

Движение гироскопа в карданном подвесе. На рисунке показан один из вариантов конструкции карданного подвеса. Важно, чтобы ось гироскопа (изображен внутри второй круговой оправы) могла принять любое направление в пространстве. Внешнее кольцо может вращаться вокруг горизонтальной оси. Внутреннее кольцо может вращаться вокруг вертикальной оси (в положении, показанном на рисунке). Если повернуть обе кольцевых оправы на угол $\pi/2$, ось гироскопа примет вертикальное положение. Поворачивая кольцевые оправы, мы можем в двух взаимных направлениях наклонить ось на произвольный угол. А произвольность направления наклона оси обеспечивает возможность вращение всей конструкции нижний вертикальный подшипник. Центр масс гироскопа должен находиться на пересечении всех осей. Собственный момент импульса, каким либо способом раскрученного гироскопа, имеющего произвольно направленную ось вращения, в инерциальной системе будет сохраняться.



Отвлечемся от всей конструкции и рассмотрим следующую ситуацию. Предположим гироскоп находиться в положении, показанном на рисунке, и вращается так, что его собственный момент импульса направлен слева направо. Если мы начнем поворачивать внешнее кольцо по часовой стрелке, то на гироскоп начнет действовать момент силы прикладываемой нами для изменения момента собственного импульса, причем направление момента силы будет перпендикулярно плоскости рисунка и направлено от нас. Ось гироскопа начнет поворачиваться вместе с внутренним кольцом, причем конец момента импульса будет удаляться от нас. Когда ось гироскопа примет перпендикулярное положение относительно плоскости рисунка, момент сил станет практически равным нулю. В последующие время ось гироскопа будет совпадать с направлением угловой скорости принудительного вращения. Приращение момента импульса при вращении его оси можно представить как произведение $dM = Md\varphi$, где $d\varphi$ бесконечно малый угол поворота оси гироскопа. Так как производная от момента импульса равна моменту сил, то $M\dot{\varphi} = N$. Запишем это соотношение в векторном виде:

$$[\boldsymbol{M\omega}] = \boldsymbol{N}$$

Последнее будет понятней, если рассмотрите все вектора, входящие в положении гироскопа на рисунке. Момент импульса по горизонтали слева направо, угловая скорость вертикальна и направлена снизу вверх, момент сил от нас.

Из рассмотренного поведения гироскопа сразу вытекает его применение. Как вы знаете Земля не инерциальная система, главное, из-за ее вращения вокруг своей оси. Но это дает возможность использовать гироскоп в карданном подвесе как компас, так как его ось принимает положение параллельное оси Земли.

25. Статика.

Краткое напоминание теории. Для того, чтобы точечное тело (материальная точка) покоилось необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма всех действующих на него сил, была равна нулю. Этому определению эквивалентно равенство нулю проекций на три взаимно перпендикулярные оси координат.

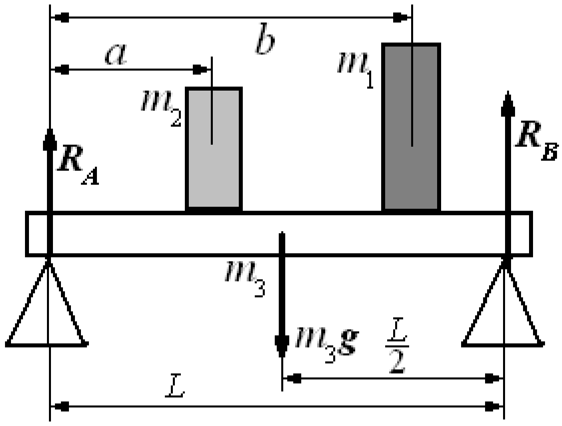
Для твердого тела одного этого условия недостаточно. Необходимо добавить условие равенства нулю суммарного момента сил относительно *произвольной* точки. Практически удобнее проверить равенство нулю суммарных моментов относительно трех осей, что является эквивалентным предыдущему условию. Это легко проверить, а проверив равенство нулю момента сил относительно двух-трех точек нет уверенности, что есть точка, относительно которой он не равен нулю.

И в заключение этого введения, практический совет: при решении большинства задач проще находить искомые величины не из условия для сил, а условия для моментов сил. Для иллюстрации последнего мы начнем с такой задачи.

Задача о хорошей девочке и плохом мальчике. Познакомились мальчик с девочкой и присели поговорить на скамеечку. Схематично это показано на рисунке. Геометрические размеры известны, m_1 - масса мальчика, m_2 - масса девочки, m_3 - масса однородной доски лавочки. Надо определить реакции опор.

Берем момент всех сил относительно точки левой опоры и приравниваем его нулю:

$$N_A = m_1gb + m_2ga + m_3g\frac{L}{2} - R_BL = 0$$



Таким образом, реакция правой опоры равна:

$$R_B = (m_1\frac{b}{L} + m_2\frac{a}{L} + \frac{1}{2}m_3)g$$

Аналогичным методом находим реакцию левой опоры:

$$N_B = m_1g(L-b) + m_2g(L-a) + m_3g\frac{L}{2} - R_AL = 0$$

$$R_A = (m_1\frac{L-b}{L} + m_2\frac{L-a}{L} + \frac{1}{2}m_3)g$$

Для проверки вычислений находим векторную сумму внешних сил, действующих на доску лавочки:

$$m_3g - R_A - R_B = m_3g - (m_1\frac{L-b}{L} + m_2\frac{L-a}{L} + \frac{1}{2}m_3)g - R_B$$

$$= m_3g - (\frac{1}{2}m_3 + \frac{1}{2}m_3)g - (m_1\frac{L-b}{L} + m_2\frac{L-a}{L} + m_1\frac{b}{L} + m_2\frac{a}{L})g = 0$$

Все правильно, можно продолжать дальше.

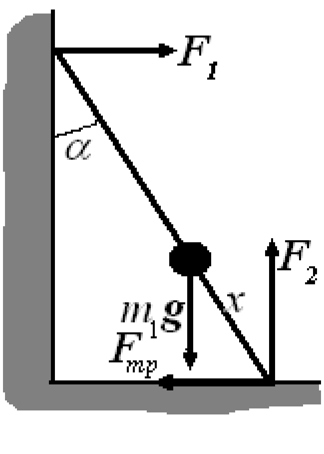
Кто прав? Говорили они на скамеечке конечно о физике. В частности о такой задаче. Двое держат однородную доску за самые ее концы. Доска горизонтальна. Затем один отпускает свой конец, и доска начинает падать. Как измениться нагрузка на руки того, кто держит доску в самый начальный момент времени?

Мнение мальчика: «Я отпустил – тебе станет тяжелее, так как теперь ты держишь одна всю доску».
Мнение девочки: «Доска была неподвижна, а после того как ее отпустили, она начала падать и мне будет легче, так как не нужно удерживать ее в горизонтальном направлении».

Кто же из них прав?

Поговорили они, и девочка пригласила мальчика к себе в гости. Пока она была на кухне, мальчик спустил связку ключей на ниточки до земли (девочка жила на втором этаже), и ниточку положил в карман. Мальчик учился на втором курсе в техническом вузе и уже прошел раздел механики. Попили они чайку и расстались.

Как мальчик попал в больницу. Через несколько дней мальчик нашел лестницу достаточной длины. Вечерком приставил к нижнему краю окна так, чтобы ее было не видно из окна, влез на нее на метр вверх, убедился, что все нормально, и полез к окну. Когда он долез практически до самого верха, лестница начала скользить. Девочка услышала грохот и вскрик за окном. Выглянула. Но она была хорошей девочкой. Поэтому вызвала не милицию, скорую. Мальчик, пока его везли в беспамятстве, повторял все время: «хорошо, что пополам». Когда он пришел в сознание, его спросили, почему он повторял эту фразу. Он ответил, если бы кинетическая энергия была не М, V в квадрате пополам, то я бы был покойником, упав с такой высоты. Кончилось благополучно, но забегая вперед, скажем, что ему пришлось брать академический отпуск.



Если бы мальчик был хорошим (и умным), то он занимался физикой, не а бы сдать, а изучал бы ее так, чтобы с помощью теории свободно решать задачи. Как бы поступил бы умный мальчик. Прежде всего, он разобрался с такой задачей.

Предположив, что лестница, имеющая длину L, невесома, он поместил на нее тело массой m_1 на расстоянии x и исследовал, как зависит устойчивость лестницы от расстояния x. Взяв момент сил относительно точки соприкосновения лестницы с горизонтальной поверхностью, приравняв его нулю, нашел величину реакции стенки на верхний конец лестницы (в предположении отсутствия трения между стенкой и лестницей она будет перпендикулярна поверхности стенки):

$$F_1L\cos\alpha - m_1gx\sin\alpha = 0$$

$$F_1 = \frac{m_1gx\cos\alpha}{L\sin\alpha}$$

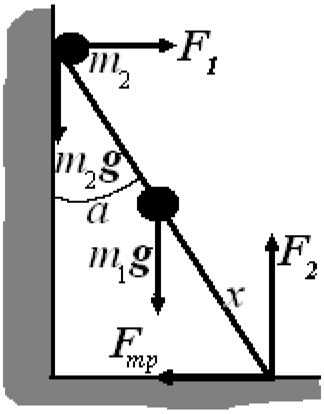
Эта сила при неподвижности лестницы должна уравновешиваться силой трения покоя $\boldsymbol{F}_{тр}$. Но сила трения покоя ограничена по величине:

$$F_{тр} \le kF_2 = km_1 g$$

Следовательно, должно выполняться неравенство:

$$\frac{m_1 g x \sin\alpha}{L\cos\alpha} \le km_1 g \Rightarrow \frac{x}{L}\tan\alpha \le k \Rightarrow x \le \frac{kL}{\tan\alpha}$$

Из последнего неравенства следует (при заданных величинах в правой части), что при больших x это неравенство может перестать выполняться, и лестница начнет падать. И хороший мальчик сделает вывод, что надо решить следующую задачу.



Лестница однородна, ее сила тяжести приложена к средней точке лестницы. На верхний конец лестницы помещено точечное тело массой равной массе человека. И определить из нее, будет ли лестница устойчива при всех известных параметрах.

Условие равенства момента сил, относительно нижней точки лестницы будет иметь вид:

$$F_1 L\cos\alpha - m_1 g\frac{L}{2}\sin\alpha - m_2 g L\sin\alpha = 0$$

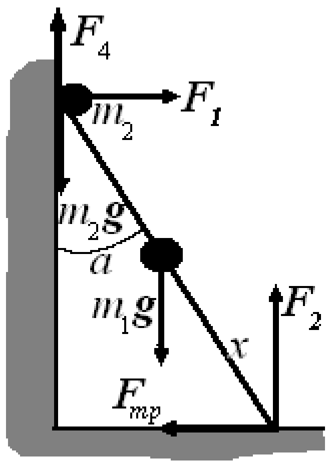
Находим из него реакцию стенки:

$$F_1 = (\frac{1}{2}m_1 + m_2)g\tan\alpha$$

Находим величину силы трения и неравенство, которому она должна удовлетворять:

$$F_{тр} = k(m_1 + m_2)g \ge (\frac{1}{2}m_1 + m_2)g\tan\alpha$$

Из этого неравенства, предположив, что масса человека втрое больше массы лестницы, находим неравенство, связывающее коэффициент трения скольжения с допустимым углом:



$$\tan\alpha \le k\frac{m_1 + m_2}{\frac{1}{2}m_1 + m_2} = k\frac{1 + \frac{m_2}{m_1}}{\frac{1}{2} + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{8}{7}k$$

При большем отношении массы человека к массе лестницы, числовой коэффициент в правой части будет стремиться к единице. Для лестницы без человека это неравенство равно:

$$\tan\alpha \le 2k$$

Это ограничение для тангенса допустимого угла в два раза мягче. Поэтому грубой ошибкой плохого мальчика был вывод, что лестница не начнет скользить, если она не скользит, когда он на нее влез совсем не высоко.

Если высота до окна и длина лестницы не позволяют ее установить под необходимым углом, то можно на верхний конец лестницы, прибить резиновую прокладку, как это сделано на нижнем конце лестницы, и снова рассчитать ее устойчивость при наличии силы трения между верхним концом лестницы и стеной дома. И умный мальчик это сообразил и решил эту задачу.

В этом случае при начале проскальзывания появится сила трение скольжения (все время рассматривается предельный случай, в тот момент, когда начинается скольжение, иначе нельзя писать выражения для силы трения скольжения). На рисунке она обозначена $\boldsymbol{F}_4$. В предыдущих задачах и в этой задаче мы считаем коэффициент трения известным, так как умный мальчик догадался его вычислить из найденного предельного угла из опыта, наблюдая начало скольжения пустой лестницы. При наличии трения в верхнее точке в уравнение для момента сил относительно нижней точки появится еще одно слагаемое:

$$F_1 L\cos\alpha + F_4 L\sin\alpha - m_1 g\frac{L}{2}\sin\alpha - m_2 g L\sin\alpha = 0$$

$$F_4 = kF_1$$

$$F_1 L\cos\alpha + kF_1 L\sin\alpha = m_1 g\frac{L}{2}\sin\alpha + m_2 gL\sin\alpha$$

Из последнего равенства находим F_1:

$$F_1 = \frac{\frac{m_1}{2}\sin\alpha + m_2\sin\alpha}{\cos\alpha + k\sin\alpha}g$$

Чтобы лестница не скользила, должно выполняться неравенство:

$$F_{тр} = k\{(m_1+m_2)g - kF_1\} > F_1$$

$$k(m_1+m_2)g > (1+k^2)F_1$$

Подставив полученное выше значение для силы F_1, получим (далее простые но длинные преобразования):

$$k(m_1+m_2) > (1+k^2)\frac{\frac{m_1}{2}\sin\alpha + m_2\sin\alpha}{\cos\alpha + k\sin\alpha}$$

$$\frac{k(m_1+m_2)}{(1+k^2)} > \frac{\frac{m_1}{2}+m_2}{\frac{1}{\tan\alpha}+k}$$

$$\frac{1}{\tan\alpha}+k > \frac{(1+k^2)(m_2+\frac{m_1}{2})}{k(m_1+m_2)}$$

$$\tan\alpha < k - \frac{(1+k^2)(m_2+\frac{m_1}{2})}{k(m_1+m_2)}$$

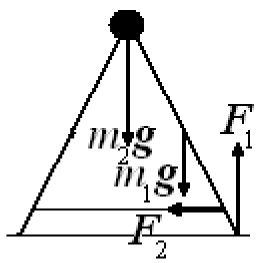
$$\frac{1}{\tan\alpha} > \frac{(1+k^2)(m_2+\frac{m_1}{2})}{k(m_1+m_2)} - k = \frac{(1+k^2)(m_2+\frac{m_1}{2}) - k^2(m_1+m_2)}{k(m_1+m_2)}$$

$$\tan\alpha < \frac{k(m_1+m_2)}{(m_2+\frac{m_1}{2}) - \frac{km_1}{2}}$$

Выпишем рядом формулу, полученную для задаче без трения о стену:

$$\tan\alpha \le \frac{k(m_1+m_2)}{\frac{1}{2}m_1+m_2}$$

Видно, что знаменатель для формулы с трением меньше, следовательно, предельный угол несколько возрос. Если и при таком угле лестница слишком длинна и начинает быть видна из окна, то есть еще два варианта.



Если лестница ваша, то ее можно укоротить. Если лестница не ваша, то укорачивать нельзя. Тогда надо выпросить еще одну лестницу, скрепить два верхних конца, нижние связать веревкой, чтобы они не разъезжались. Умный мальчик сообразит рассчитать натяжение, которое должна выдержать веревка.

Напишем выражения для момента сил относительно верхней точки лестниц, в ней же находится и человек, и приравняем его нулю:

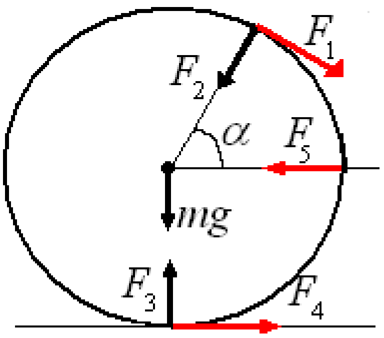
$$F_1 L\sin\alpha - F_2\cos\alpha = 0$$

Находим силу натяжения F_2:

$$F_2=\frac{L\sin\alpha}{L'\cos\alpha}F_1=\frac{L}{L'}\frac{\sqrt{1-\frac{H^2}{L^2}}}{\frac{H}{L}}(m_1+\frac{m_2}{2})g=\frac{L\sqrt{L^2-H^2}}{L'H}(m_1+\frac{m_2}{2})g$$

В этих формулах: H - высота до окна, которая была измерена ниткой плохим мальчиком, L = длина лестницы, L' - расстояние до места привязки скрепляющей веревки. Силой трения при расчете пренебреженно, так как в реальных конструкциях всегда делают запас по прочности. И если веревка может выдержать это натяжение можно лезть, не рискуя оказаться в больнице.

Равновесие трех цилиндров. У плохого мальчика в больнице было много свободного времени, и он решил взяться за физику. Ему принесли учебники, тетрадку и ручки. Чтобы проверить понимание теории он решил задачу. И начал с того, что решил задачу на статику. Его заинтересовало, может ли конструкция из трех одинаковых цилиндров находится в равновесии, если на два вплотную положенных цилиндра осторожно положить третий. Коэффициент трения скольжения между поверхностями цилиндров и горизонтальной поверхностью он принял одинаковыми. Он сделал рисунок, нарисовал все силы, действующие на один из нижних цилиндров.



Черным цветом нарисованы «очевидные» силы: F_2 - сила, с которой давит верхний цилиндр. Она равна:

$$F_2=\frac{mg}{2}\sin\alpha$$

α - угол равностороннего треугольника, вершины которого находятся на осях трех цилиндров, $\alpha=\pi/3$. Сила F_3 реакция со стороны поверхности, ее величину надо найти. Сила mg понятна без объяснений.

Силы, нарисованные красным цветом, получены из следующих рассуждений. Мы ищем условия покоя цилиндра. Следовательно, чтобы покоился его центр масс, векторная сумма всех сил по горизонтали должна быть рана нулю. Это можно обеспечить только сила трения покоя между цилиндром и поверхностью. Поэтому должна существовать сила F_4. Но цилиндр не дожжен и вращаться. Следовательно, момент сил относительно его оси должен быть равен нулю. Это равенство можно обеспечить силой трения покоя между рассматриваемым цилиндром и верхним цилиндром. Силы трения между нижними цилиндрами быть не может из-за симметрии конструкции из трех цилиндров. Сила F_5 - давление со стороны нижнего цилиндра ведена «на всякий случай». Если она окажется равной нулю, ничего «страшного не произойдет. Хуже, если она не равна нулю, а мы будем решать задачу без нее. Теперь можно приступить к вычислениям.

Из условия равенства нулю момента сил относительно оси цилиндра следует равенство сил трения;

$$F_1=F_4$$

Сумма проекций всех сил на вертикальное направление должна быть равна нулю:

$$F_2\sin\alpha+mg+F_1\cos\alpha-F_3=0$$

Сумма проекций всех сил на вертикальное направление также должна быть равна нулю:

$$F_4+F_1\sin\alpha-F_2\cos\alpha-F_5=0$$

Подставив известную силу F_2 и воспользовавшись равенством, полученным из момента сил, получим систему двух уравнений:

$$\frac{mg}{2}\sin^2\alpha+mg+F_4\cos\alpha-F_3=0$$

$$F_4+F_4\sin\alpha-\frac{mg}{2}\sin\alpha\cos\alpha-F_5=0$$

Наша предосторожность оказалась излишней. Мы можем положить силу F_5 равной нулю. Найти из второго уравнения силу F_4, а затем из первого уравнения силу F_3. Сила F_4 будет равна:

$$F_1 = F_4 = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)}mg$$

Находим силу F_3:

$$F_3 = \frac{mg}{2}\sin^2\alpha + mg + \frac{mg\sin\alpha\cos^2\alpha}{2(1+\sin\alpha)} = (\sin^2\alpha + 1 + \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{2(1+\sin\alpha)})mg$$

Найденные значения сил трения должны быть меньше соответствующих значений сил трения скольжения:

$$F_1 = F_4 \le kF_2$$

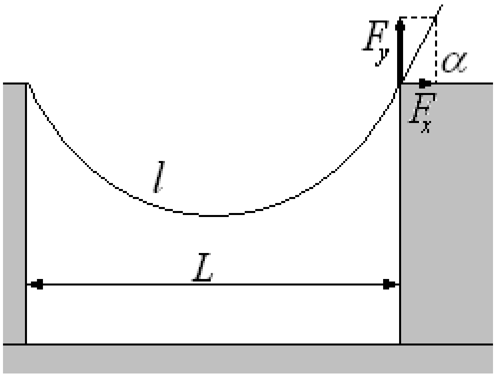
$$F_1 = F_4 \le kF_3$$

Из этих неравенств находим необходимый коэффициент трения для устойчивости конструкции из трех цилиндров:

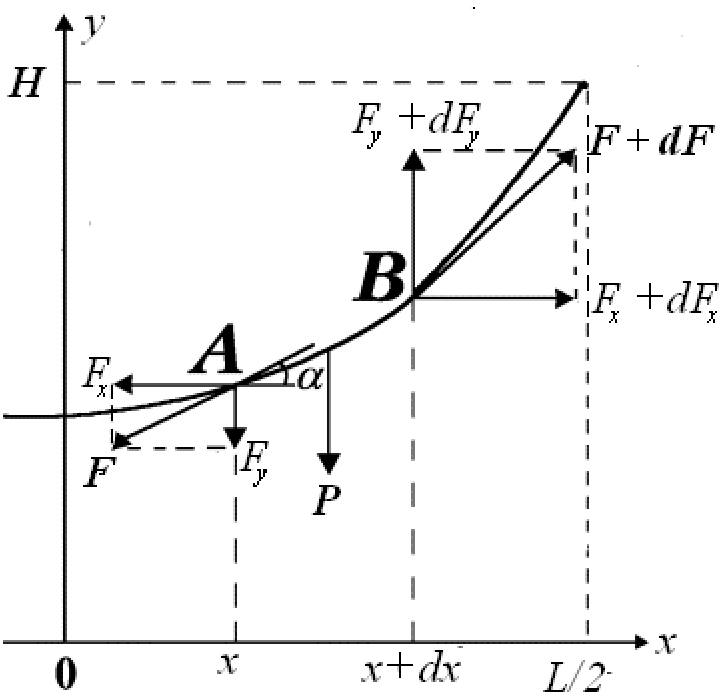
$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)} < k\frac{1}{2}\sin\alpha \qquad \frac{\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)} < k \qquad k > \frac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0,27$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)} < k(\sin^2\alpha + 1 + \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{2(1+\sin\alpha)})$$

Выражение в скобках заведомо больше половины синуса в предыдущем неравенстве, и последнее полученное ограничение будет много слабее. Так что реальные цилиндры могут находиться в равновесии, так как такой коэффициент трения скольжения можно обеспечить. Однако никаким коэффициентом трения нельзя добиться равновесия, если коэффициент трения между цилиндрами будет равен нулю. В этом случае (при большом коэффициенте трения между цилиндрами и поверхностью) цилиндры будут раскатываться без проскальзывания.



<u>*Цепная линия*</u>. Между двумя опорами натянута однородный шнур, имеющий линейную плотность ρ. Длина шнура равно l. Между опорами расстояние равно L, которое меньше длины шнура. Считать, что концы шнура прикреплены к опорам на одной высоте H. Найти натяжение шнура в местах его прикрепления.



Вертикальная проекция силы натяжения шнура нам практически известна. Она равна половине массы шнура, умноженной на ускорение свободного падения. Чтобы вычислить силу натяжения надо найти либо горизонтальную проекцию силы натяжения, либо знать аналитическое выражение формы линии шнура $y = f(x)$. Тогда вычислив от нее производную в точке крепления шнура, можно найти тангенс угла α.

На приведенном ниже рисунке показана правая половина шнура. И очень утрировано показан бесконечно малый элемент шнура dl, концевые точки которого помечены буквами A и B.

Кроме сил натяжения, действующих на концы элемента шнура, показана сила тяжести P, которая равна ρgdl. Так как элемент покоится, то должны быть равны нулю суммы проекций всех сил, действующих на него:

$$F_x(x+dx)+F_x(x)=0$$

Из этого уравнения следует, что горизонтальная проекция силы натяжения по всему шнуру постоянна:

$$dF_x=0 \quad F_x=const$$

Но как вычислить ее величину пока непонятно. Следовательно, придется искать форму кривой.

Для вертикальной проекции силы натяжения получаем уравнение:

$$dF_y=\rho gdl$$

Производную в точке A, равную тангенсу угла наклона можно выразить через проекции сил натяжения:

$$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha=\frac{F_x}{F_y}$$

Продифференцировав последнее уравнение второй раз, и учитывая, что $F_x=const$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{F_x}\frac{dF_y}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{F_x}\frac{\rho gdl}{dx}=\frac{\rho g}{F_x}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}=\frac{\rho g}{F_x}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение, описывающее аналитически форму кривой шнура;

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\rho g}{F_x}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

Порядок уравнения можно понизить, если первую производную обозначить функцией $z(x)$ и упростить, введя обозначение $b=\rho g/F_x$:

$$\frac{dz}{dx}=b\sqrt{1+z^2}$$

Разделим переменные в уравнении и запишем его в виде интегралов:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=b\int dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, есть в приложениях любого задачника. Списываем ответ:

$$\ln(z+\sqrt{1+z^2})=bx+C_1$$

Находим уравнение для первой производной:

$$z+\sqrt{1+z^2}=e^{bx+C_1} \quad 1+z^2=e^{2(bx+C_1)}-2ze^{bx+C_1}+z^2 \quad 2ze^{bx+C_1}=e^{2(bx+C_1)}-1 \quad z=\frac{e^{bx+C_1}-e^{-(bx+C_1)}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=sh(bx+C_1)$$

Для дальнейшего рассмотрения проще всего выбрать начало координат в середине шнура, в его низшей точкой провисания. Тогда в этой точке производная должна быть равна нулю (минимум функции). Это будет выполняться, если константа интегрирования равна нулю. Следовательно, нам надо проинтегрировать второй раз уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=sh(bx)$$

Интегрируя, находим форму провисания шнура:

$$y(x)=\frac{1}{b}ch(bx)+C_2$$

Вторую константу находим из условия равенства нулю функции в нижней точке:

$$0 = \frac{1}{b} + C_2$$

Таким образом, форма линии провисшего шнура имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{b}[ch(bx) - 1]$$

Мы получили семейство зависимостей, которые получили название цепных линий. Наша задача из этого семейства выбрать ту, которая описывает наш конкретный шнур. Для этого осталось определить величину b, в которое входит пока неизвестная горизонтальная проекция силы натяжения шнура.

Вычислим производную в точке прикреплении шнура и приравняем ее отношению F_y / F_x:

$$sh(\frac{bL}{2}) = sh(\frac{\rho gL}{2F_x}) = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\rho gl}{2F_x}$$

Для определения числового значения горизонтальной проекции силы натяжения шнура в точке закрепления получили трансцендентное уравнение:

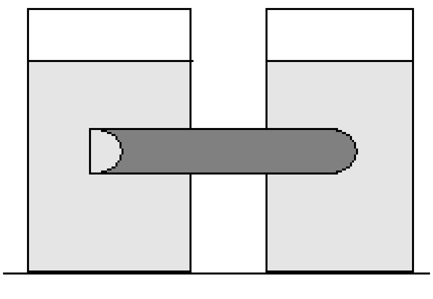
$$sh(\frac{\rho gL}{2F_x}) = \frac{\rho gl}{2F_x}$$

Физическая задача решена. Далее вы пишите программу и вычисляете на компьютере, как истинные физики-теоретики, либо берете калькулятор и начинаете по рабоче-крестьянси подбирать ответ.

26. Гидростатика.

Вся теория к этому разделу состоит из известного тысячелетия закона Архимеда и формулы известной с седьмого класса: пэ равняется ро-же- аш. Так что, придумать интересное практически невозможно. Поэтому начнем со случая на экзамене одного известного математика (фамилию забыл). Девочка сдавала экзамен, списала ответы на все вопросы. В голове у нее своего ничего за семестр по математике не накопилось. Профессор посмотрел экзаменационный лист, увидел, что написано все правильно и задал дополнительный вопрос на какое-то доказательство, на который ей нечего было сказать. Девочка возьми и выдай: «профессор, это же очевидно». Профессор задумался минут на пятнадцать, нашел не стандартный, а простой метод, подошел к ней и сказал: «это действительно очевидно». И поставил отлично. А вот теперь вопрос к вам.

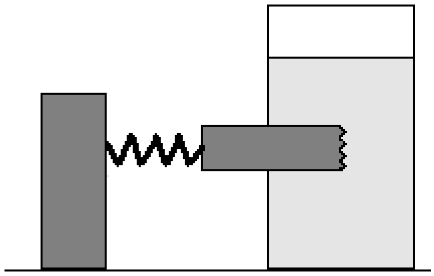
Имеются два прямоугольных сосуда, в боковой поверхностях которых сделаны два отверстия. В отверстия вставлен круглый стержень, который может перемещаться без трения. Считать, что жидкость в зазор между стержнем и отверстием сосуда не вытекает. Один конец стержня выпуклая полусфера, второй конец вогнутая полусфера. В каком направлении будет перемещаться стержень, если его не удерживать?



Самое нерациональное, не думая начинать вычислять горизонтальные силы, действующие на стержень за счет давления жидкости. Вас же не просят вычислить величину сил. Не надо искать дополнительных приключений. Препод хочет проверить ваше понимание физики, а не умение вычислять интегралы по поверхностям разной формы. Это будут в свое время делать математики. Зачем опережать события.

А вот, если подумать, то интегралов вычислять вообще не придется. Предположим, что мы объединили два сосуда в один, а стержень положили на горизонтальную подставку в этом сосуде. И он, что будет двигаться? Любой скажет, что тела любой формы не начинают самопроизвольно перемещаться. А что с точки зрения сил в этом опыте изменилось по сравнению с двумя сосудами? Ничего. Следовательно, ответ на заданный вопрос можно получить без всяких вычислений. Стержень будет покоиться. И добавить, что задача тривиальна.

Сила давления жидкости на элемент поверхности. Конструкция ясна из рисунка. Стержень в поперечном сечении квадрат со стороной d. Торцевая поверхность стержня такая же, как у молоточка для отбивания мяса для приготовления отбивных. Длина недеформированной пружины l_0. Коэффициент упругости пружины равен k. Плотность жидкости ρ. Уровень жидкости выше оси стержня на величину H. Найти энергию сжатой пружины в равновесном состоянии.



Из рассмотрения предыдущего вопроса вы должны были понять, что форма поверхности не имеет значения. Поэтому результирующую горизонтальную силу давления со стороны жидкости можно вычислять, считая поверхность плоской. Так как давление изменяется по линейному закону от нижней границы сечения стержня $p = \rho g(H + \frac{d}{2})$ до давления $p = \rho g(H - \frac{d}{2})$ на верхней границе сечения, то горизонтальная проекция силы, действующий на стержень со стороны жидкости, будет равна:

$$F_{жидк} = \rho gHd^2$$

При равновесном положении стержня эта сила уравновешивается упругой силой со стороны пружины:

$$k(l_0 - l) = \rho gHd^2$$

В этой формуле единственная неизвестная величина – длина пружины в равновесном положении стержня. Найдем ее:

$$l = l_0 - \frac{\rho gHd^2}{k}$$

По хорошо известной формуле находим энергию сжатой пружины:

$$U = \frac{1}{2}k(\frac{\rho gHd^2}{k})^2 = \frac{1}{2k}(\rho gHd^2)^2$$

Интересно посмотреть, как изменилась потенциальная энергия жидкости в поле тяжести земли. Вдвинем стержень в сосуд так, чтобы пружина была не деформирована. Объем вдвинутого стержня будет равен:

$$V = ld^2 = \frac{\rho gHd^4}{k}$$

Этот объем жидкости создавал слой в соседе толщиной ΔH выше уровня жидкости при выдвинутой части стержня. Если площадь сечения сосуда равна S, то его толщина равна:

$$\Delta H = \frac{V}{S}$$

Масса этого объема воды равна:

$$\Delta m = \rho V = \frac{\rho^2 gHd^4}{k}$$

Потенциальная энергия этого слоя, при выборе ее нуля на уровне оси стержня равна:

$$U_ж = \Delta mg(H + \frac{\Delta H}{2})$$

При выдвижении стержня этот объем воды увеличит объем слоя жидкости в сосуде между плоскостями по нижней и верхней поверхностям стержня. При выбранном нулевом уровне потенциальной энергии энергия этого слоя будет равна нулю. Таким образом, уменьшение потенциальной энергии всей жидкости будет равна:

$$U_ж = \frac{\rho^2 g^2 Hd^4}{k}(H + \frac{\Delta H}{2})$$

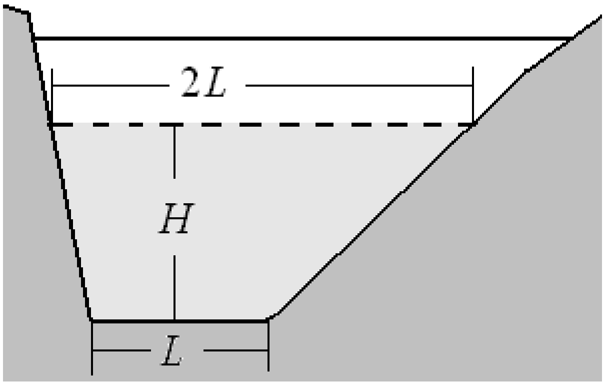
Если из этой энергии вычесть энергию сжатой пружины, то мы получим убыль механической энергии:

$$-\Delta E=\frac{\rho^2 g^2 H^2 d^4}{k}+\frac{\rho^2 g^2 H d^4 \Delta H}{2k}-\frac{\rho^2 g^2 H^2 d^4}{2k}=\frac{\rho^2 g^2 H^2 d^4}{2k}+\frac{\rho^2 g^2 H d^4 \Delta H}{2k}$$

Даже, если пренебречь вторым членом из-за малости $\Delta H / H$, то энергия пружины вдвое меньше убыли потенциальной энергии воды. Куда «пропала» механическая энергия? Конечно, полная энергия сохранилась. Это довольно легко объяснить. Если стержень отпустить из первоначального положения, когда пружина была не деформирована, то он не остановиться в равновесном положении, и будет далее сжимать пружину, двигаясь замедленно. После остановки он начнет вдвигаться в сосуд. Возникнут колебания, которые затухнут из-за не идеальности жидкости. Жидкость в процессе затухания будет нагреваться. Таким образом, «потерянная» механическая энергия перейдет во внутреннюю энергию жидкости и контактирующих с ней тел.

Эти расчеты были приведены, чтобы показать, что законом сохранения энергии пользоваться во многих случаях проще, чем уравнениями динамики, но это можно делать только тогда, когда вы полностью уверенны, что в вашей задаче механическая энергия сохраняется.

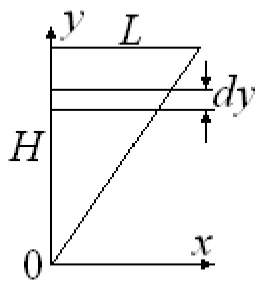
Между прочим, при мешании ложечкой в стакане чая, он нагревается. Когда я учился, у нас была лаба. Вертушка, закрепленная на валу электромотора, мешала воду в калориметре. По приборам можно было вычислить мощность, потребляемую мотором, а термометром определить нагрев воды. И провести сравнение.



Сила, действующая на плотину. Определить суммарную силу давления воды на плотину. Пунктиром показан уровень воды за плотиной.

Проще поверхность плотины представить в виде суммы двух фигур; прямоугольника со сторонами L и H, и оставшегося прямоугольного треугольника. Давление на прямоугольную часть плотины равно:

$$F_1=\rho g\frac{H}{2}\cdot LH=\frac{1}{2}\rho g LH^2$$



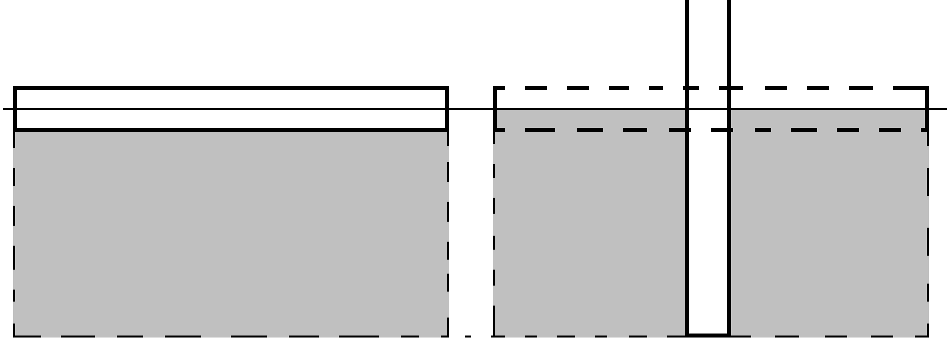
Давление на треугольную часть находится интегрированием выражения, вывод которого ясен из рисунка:

$$F_2=\int_0^H \rho g(H-y)x\,dy=\rho g\int_0^H (H-y)\frac{L}{H}y\,dy$$

$$F_2=\rho gL\int_0^H y\,dy-\frac{\rho gL}{H}\int_0^H y^2dy=\rho gL(\frac{H^2}{2}-\frac{H^2}{3})=\frac{\rho gLH^2}{6}$$

Таким образом, суммарная сила равна:

$$F=\frac{1}{2}\rho gLH^2+\frac{1}{6}\rho gLH^2=\frac{2}{3}\rho gLH^2$$



Как плавают тела различной формы. Имеется квадратная пластина, толщина которой d много меньше стороны квадрата a. Всем из опыта известно, что пластина будет плавать так, как изображено на левой половине рисунка. На правой половине рисунка показано положение пластины, в котором, если ее не поддерживать, больше нескольких секунд она не удержится. Ситуация здесь такая же, как и при попытке поставить стул на две задних ножки. Если вы и сумеете его так поставить, то он почти сразу либо встанет на все четыре ножки, либо упадет на спинку. Вам известно два положения равновесия. Одно положение неустойчивое, в котором потенциальная энергия максимальна, и устойчивое с минимумом потенциальной энергии. На обеих половинках рисунка пунктирной линией выделен объем жидкости, у которого при изменении положения пластины изменяется потенциальная энергия в поле тяжести земли. Плотность пластины, изображенной на рисунке, такова, что выше поверхности жидкости находится половина объема пластины. Поэтому потенциальная энергия пластины в обоих положениях одинакова.

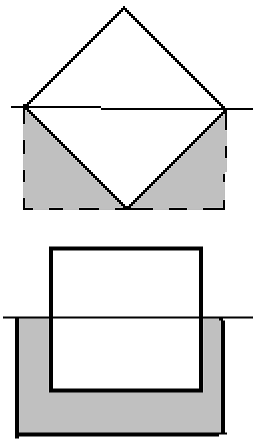
Если нулевой уровень энергии выбрать на глубине $a/2$, то энергия жидкости будет равна соответственно:

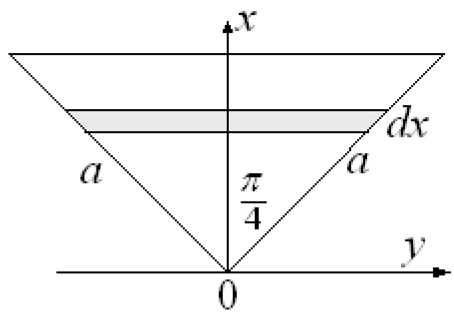
$$U_{лев} = \rho_{ж} g V \cdot \frac{a-d}{4} = \rho_{ж} g V \frac{a}{4}(1 - \frac{d}{a})$$

$$U_{прав} = \rho_{ж} g V \frac{a}{4}$$

Таким образом, $U_{лев} < U_{прав}$. Поэтому на левой половине рисунка пластина находится в устойчивом положении равновесия, а на правой – в неустойчивом.

Еще один пример на эту тему. Как будет плавать длинный однородный брус, поперечное сечение которого квадрат. Для варианта, показанного на верхней половине рисунка, для вычисления потенциальной энергии жидкости надо вычислить центр тяжести прямоугольного равнобедренного треугольника, катеты которого равны стороне квадрата сечения бруса равного a. Два треугольника мы мысленно соединили в один.



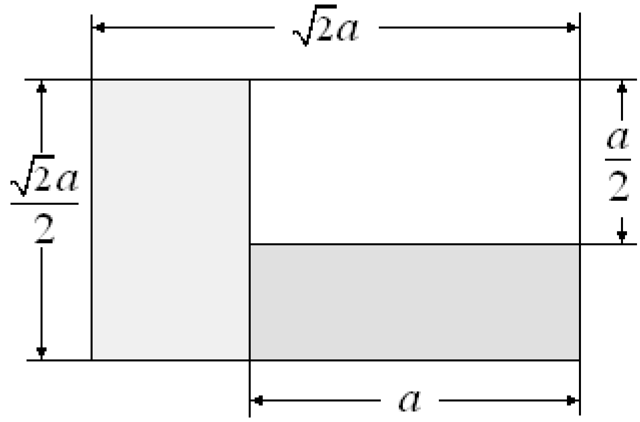


Давайте вспомним определение центра масс точечных тел:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Для рассматриваемого случая эта формула трансформируется в отношение интегралов (на правом рисунке треугольник, занятый жидкостью, для удобства повернут на 180^0):

$$x_C = \frac{2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \rho x \cdot y dx}{2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \rho \cdot y dx} = \frac{2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \rho x^2 dx}{2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \rho x dx} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^3}{\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2} = \frac{\sqrt{2}a}{3}$$



Таким образом, центр тяжести жидкости лежит на высоте от нижней поверхности жидкости на высоте

$$\frac{\sqrt{2}a}{6}.$$

На нижнем рисунке плавающего бруса объем жидкости можно представить в сечении двумя прямоугольниками.

Левый прямоугольник имеет площадь равную:

$$S_1 = \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}a^2}{2}$$

Его центр масс находится на высоте:

$$x_{C1}=\frac{\sqrt{2}a}{4}$$

Правый прямоугольник имеет площадь равную:

$$S_2=\frac{(\sqrt{2}-1)a^2}{2}$$

Его центр масс находится на высоте:

$$x_{C2}=\frac{(\sqrt{2}-1)a}{4}$$

Находим высоту центра масс составной фигуры из двух прямоугольников:

$$x_C=\frac{m_1H_1+m_2H_2}{m_1+m_2}=\frac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2}$$

$$x_C=\frac{\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}a^2}{2}\frac{\sqrt{2}a}{4}+\frac{(\sqrt{2}-1)a^2}{2}\frac{(\sqrt{2}-1)a}{4}}{\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}a^2}{2}+\frac{(\sqrt{2}-1)a^2}{2}}=\frac{a}{4}$$

Полученные высоты центров масс очень близки. Но для плавания тела, показанного на верхнем рисунке, все же потенциальная энергия жидкости будет несколько меньше. Следовательно, для тела это положение равновесия будет устойчивым.

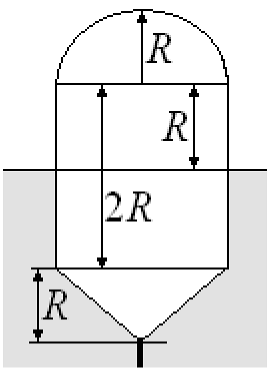
Для обоих тел предполагалось, что их плотность такова, что их центр масс находился в плоскости поверхности жидкости. Определим плотность тел, если плотность жидкости равна $\rho_{ж}$. Проще всего ее определить из условия равновесия плавающего бруса, показанного на нижнем рисунке:

$$\rho_m g a^2 L=\rho_{ж} g L a\frac{a}{2} \qquad \rho_m=\frac{1}{2}\rho_{ж}$$

Можно было воспользоваться законом Архимеда:

$$\rho_m gV=(\rho_{ж}-\rho_m)gV$$

<u>Расчет массы грузила к поплавку</u>. На рисунке показано сечение поплавка. Какой массы m_2 надо



прикрепить на невесомой леске грузило из свинца плотностью $\rho_{гр}$, чтобы поплавок плавал, как показано на рисунке. Масса поплавка m_1. Его размеры показаны на рисунке. Плотность воды ρ_0.

Напишем условие равновесия поплавка:

$$m_1 g+F_{гр}=F_{ж}$$

В этой формуле $F_{гр}$ - сила, с которой грузило тянет на дно поплавок, $F_{ж}$ - сила давления жидкости на коническую поверхность поплавка. Силу натяжение нити можно выразить, используя закон Архимеда для грузила:

$$F_{гр}=(\rho_{гр}-\rho_0)gV_{гр}=(\rho_{гр}-\rho_0)g\frac{m_2}{\rho_{гр}}$$

Для определения силы давления жидкости можно воспользоваться следующим приемом. Представим, что от поплавка осталась только коническая часть, имеющая плотность жидкости. Очевидно, что это мысленное тело ничем не отличается от такого же объема жидкости, и она, конечно, будет находиться в равновесии. Из этого вытекает равенство:

$$\rho_0 gV_k+\pi R^2\rho_0 gR=F_{ж}$$

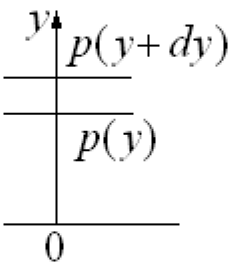
Выражая объем конуса через заданный радиус, находим силу давления жидкости на поплавок:

$$F_{ж} = \pi R^3 \rho_0 g + \frac{1}{3}\pi R^3 \rho_0 g = \frac{4}{3}\pi\rho_0 g R^3$$

Находим массу грузила:

$$m_2 = (\frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3 - m_1)(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{гр}})^{-1}$$

<u>*Есть ли потолок у воздушного шара*</u>. Мы не будем рассчитывать максимально возможную высоту подъема реального воздушного шара, а ограничимся моделью, чтобы только понять физику явления. Пустая оболочка воздушного шара, гондола и все остальное (кроме массы гелия, которым заполняют оболочку) имеют массу m. Объем газа полностью заполненной оболочки равен V. Когда оболочку полностью заполнили гелием, натяжение торса, которым был привязан шар стадо равно $2mg$. В этот момент прекратили подачу гелия и отвязали шар. Какой может быть предельная высота подъема шара при следующих предположениях: атмосфера по всей высоте имеет постоянную температуру, на уровне земли атмосферное давление равно p_0, архимедову силу учитывать только для гелия.



Для решения задачи надо знать закон изменения давления атмосферы от высоты. Вообще говоря, это известно из школьного курса, но лучше некоторые формулы вывести здесь. Пользы будет больше.

Начнем с вывода барометрической формулы – зависимости давления газа в изотермической атмосфере в зависимости от высоты. Выделим слой газа высотой dy в столбе сечением ΔS и напишем для него условие равновесия:

$$p(y+dy)\Delta S + \rho(y) g \Delta S dy = p(y)\Delta S$$
$$dp = p(y+dy) - p(y) = -\rho(y) g dy$$

Из уравнения состояния для идеального газа выразим плотность газа через давление:

$$pV = \frac{m}{M}RT \qquad p = \frac{m}{V}\cdot\frac{RT}{M} = \rho\frac{RT}{M} \qquad \rho = \frac{Mp}{RT}$$

Подставив плотность в предыдущее уравнение, и разделяя переменные, получим дифференциальное уравнение для определения зависимости давления от высоты:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dy$$

Проинтегрировав, получим:

$$\ln p = -\frac{Mg}{RT}y + C \qquad p = e^{-\frac{Mgy}{RT}} e^C$$

Определяя неизвестную экспоненту из начальных условий, окончательно получим давление и плотность воздуха в зависимости от высоты:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}y}$$

Рассмотрим подробнее шар перед тем, как его отвязали. Масса всего шара равна m, на него действует сила тяжести mg и натяжение троса, согласно условию, $2mg$. Можно используя закон Архимеда, написать уравнение равновесия и из него определить массу закаченного гелия:

$$(\rho_0 - \rho_{He0})Vg = 3mg \;\Rightarrow\; m_{He0} = \rho_{He0}V = \rho_0 Vg - 3mg$$

Сразу рассмотрим приземление шара. Чтобы он находился в равновесии без привязи тросом, должно выполняться аналогичное равенство:

$$(\rho_0 - \rho_{He0})V_k g = mg$$

Следовательно, конечный объем шара будет в три раза первоначального, гелия останется также в три раза меньше. Поэтому полет шара обойдется потерей гелия равной:

$$\Delta m_{He} = m_{He0} - \frac{1}{3} m_{He0} = \frac{2}{3}(\rho_0 V g - 3mg)$$

Прежде чем рассматривать задачу далее, вспомним уравнение состояния идеального газа и некоторые соотношения из нег вытекающие:

$$pV = \frac{m}{M} RT \qquad p = \frac{m}{VM} R \qquad p = \frac{\rho}{M} RT$$

При постоянной температуре параметры газа связаны уравнениями:

$$p(y)V(y) = p_0 V_0 \qquad \frac{p(y)}{\rho(y)} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

Перейдем к рассмотрению движения шара. По мере увеличения высоты плотность атмосферы начинает уменьшаться. Это приводит к уменьшению подъемной силы. При равенстве

$$(\rho(y') - \rho_{He0}) V_k g = mg$$

подъем прекращается. Но давление в шаре при закрытых клапанах осталось атмосферным, в то время как наружное давление упало. Оболочки делают из материала, который не растягивается. Поэтому можно часть гелия через нижний клапан выпустить, плотность гелия упадет, разность в левой части равенства увеличится, и шар начнет подниматься. Предельная высота подъема определяется из уравнения:

$$(\rho(H) - \rho_{He}(H)) V g = mg$$

$$\rho(H) - \rho_{He}(H) = \frac{m}{V}$$

Выразим в последнем выражения плотности через атмосферное давление на предельной высоте H :

$$\rho(H) - \rho_{He}(H) = \frac{p(H) M_{возд}}{RT} - \frac{p(H) M_{гел}}{RT} = \frac{p(H) M_{возд}}{RT}\left(1 - \frac{M_{гел}}{M_{возд}}\right)$$

$$\frac{p_0 M_{возд}}{RT}\left(1 - \frac{M_{гел}}{M_{возд}}\right) e^{-\frac{MgH}{RT}} = \frac{m}{V}$$

Осталось разрешить уравнение относительно искомой высоты:

$$e^{\frac{MgH}{RT}} = \frac{p_0 V M_{возд}}{mRT}\left(1 - \frac{M_{гел}}{M_{возд}}\right)$$

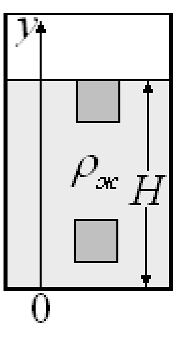
$$H = \frac{RT}{M_{возд} g} \ln \frac{p_0 V M_{возд}}{mRT}\left(1 - \frac{M_{гел}}{M_{возд}}\right)$$

Сделаем оценку найденной высоты при следующих значениях величин:

$R = 8{,}3$, $T = 300$, $M_{возд} = 30 \cdot 10^{-3}$, $g = 10$, $p_0 = 10^5$, $V = 10^3$, $m = 500$, $M_{гел} / M_{возд} = 4/30$,

все значения приведены в СИ, так что результат получится в метрах. Считаем без калькулятора, получаем: $H = (10 - 20) км$. Считать точнее нет смысла, некоторые сделанные приближения слишком грубы. Например, постоянство температуры атмосферы по высоте. Вы хорошо представляете, что на высоте 10 км нет тридцатиградусной жары.

__Силы, действующие на тело при его движении в жидкости__.



На рисунке показан цилиндрический сосуд, площадь сечения которого равна S, и кубик, ребро которого равна l. Плотности кубика и жидкости известны. Кубик один, на рисунке показаны его различные положения.

Рассмотрим вначале перемещения кубика из положения, когда верхняя грань кубика совпадала с поверхностью жидкости, в конечном положении она находится на некоторой глубине от поверхности жидкости.

Найдем приращение потенциальной энергии системы при перемещении кубика из начального положения в конечное положение.

Начнем с кубика:

$$\Delta U_m = \rho_m g l^3 [y - (H - \frac{l}{2})]$$

y - координата центра масс кубика.

Вся жидкость, кроме объема, который займет кубик в конечном положении, не изменит положения. Поэтом можно считать, что кубик поменялся местами с таким же по объему кубиком жидкости. Поэтому потенциальная энергия жидкости увеличится на величину равную:

$$\Delta U_{ж} = \rho_{ж} g l^3 (H - \frac{l}{2} - y)$$

Приращение потенциальной энергии системы будет равно;

$$\Delta U = U(y) - U_0 = (\rho_m - \rho_{ж}) g l^3 [y - (H - \frac{l}{2})]$$

Таким образом, потенциальная энергия системы определяется только глубиной погружения центра масс кубика. Если продифференцировать эту энергию, то можно получить хорошо известную силу Архимеда:

$$F_y = -(\rho_m - \rho_{ж}) g l^3$$

Если плотность кубика будет больше плотности жидкости, то сила будет направлена против оси y, и кубик будет тонуть, при обратном неравенстве кубик будет всплывать.

Можно ли найти скорость погружения кубика в зависимости от координаты из закона сохранения энергии, если считать жидкость идеальной, то есть при отсутствии силы сопротивления? Нет, это будет грубой ошибкой, которую может делать только Чукча. Если вы читали первую часть пособия, то знаете, что это имя студента, так прекрасно знающего физику, что профессор приглашает его сдавать экзамен несколько раз в сессию, чтобы получить удовольствие, слушая его ответы.

Этот пример разобран для того, чтобы вы ясно понимали, что при перемещении кубика он обменивается местами с кубиком жидкости. Поэтому уменьшение потенциальной энергии системы идет не только на увеличение кинетической энергии тонущего кубика, но жидкости.

Если тело было хорошо обтекаемым по форме телом, а не кубиком, и его скорость была такой, чтобы при обтекании тела жидкостью, ее течение было ламинарным, то закон сохранения можно было бы написать в виде:

$$\frac{m_к \dot{y}^2}{2} + \frac{k m_{ж} \dot{y}^2}{2} - (\rho_m - \rho_{ж}) g l^3 y = 0$$

Продифференцировав его по времени и сократив на проекцию скорости, получим уравнение движения для тела:

$$m_к \ddot{y} = (\rho_m - \rho_{ж}) g l^3 - k m_{ж} \ddot{y}$$

Таким образом, при движении тела в жидкости появляется сила сопротивления даже в идеальной жидкости, которая по величине пропорциональна ускорению тела. Произведение $k m_{ж}$ называется присоединенной массой. Определение величины k является задачей совсем не для общей физики.

В каком-то задачнике была задача по определению движения шарика в глицерине. Причем рассматривался процесс установления равномерного движения шарика, а не только его движение с постоянной скоростью. Автор задачи использовал известную силу Стокса для учета силы сопротивления. Сила Стокса вычислена для равномерного прямолинейного движения шарика. Он же ее применял и для движения шарика при движении с ускорением. Это не корректно. И автор проигнорировал понятие приведенной массы.

Можно ли в каком-то приближении решать задачи ускоренного движения тела в жидкости. Пока никто не предложил лучшего, как подставлять во второй закон Ньютона не массу тела, а сумму масс тела и жидкости, вытесненную им (считать коэффициент $k = 1$). В таком приближении при движении шарика плотностью равной плотности жидкости надо подставлять во второй закон Ньютона удвоенную массу шарика.

А. Н. Варгин. 29.08.09.