

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный технический университет»

А.Н. Паршаков

ПРИНЦИПЫ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

Часть 1

Механика. Физика макросистем

Допущено Научно-методическим Советом
по физике Министерства образования
и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по техническим направлениям подготовки
и специальностям

Издательство
Пермского государственного технического университета
2008

УДК 53(076.5)

ББК 22.3 я73

П18

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *Г.Ф. Путин*

(Пермский государственный университет);

д-р физ.-мат. наук, профессор *В.Г. Козлов*

(Пермский государственный педагогический университет)

Паршаков, А.Н.

П18 Принципы и практика решения задач по общей физике: учеб. пособие / А.Н. Паршаков. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – Ч. 1: Механика. Физика макросистем. – 249 с.

ISBN 978-5-88151-957-5

Рассмотрены принципы и практика решения задач по курсу физики (механика, физика макросистем). Приводится анализ возможных путей решения с обоснованием оптимального варианта. Многие задачи сопровождаются обсуждением полученного решения и возможных путей его практического использования.

Предназначено для студентов всех специальностей технических вузов, преподавателей общей физики и для учащихся классов физико-математического профиля школ и лицеев.

УДК 53(076.5)

ББК 22.3 я73

Издано в рамках приоритетного национального проекта «Образование» по программе Пермского государственного технического университета «Создание инновационной системы формирования профессиональных компетенций кадров и центра инновационного развития региона на базе многопрофильного технического университета»

ISBN 978-5-88151-957-5

© ГОУ ВПО

«Пермский государственный
технический университет», 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
1. Общие принципы	5
1.1. Метод анализа размерностей	5
1.2. Дискретизация временных и пространственных моделей	11
2. Механика	19
2.1. Системы отсчета в кинематике	19
2.2. Основное уравнение динамики материальной точки и твердого тела	31
2.3. Законы сохранения в динамике	76
3. Колебания и волны	116
3.1. Методы исследования собственных колебаний	116
3.2. Период, частота и амплитуда собственных колебаний	128
3.3. Гармоническое движение	141
3.4. Волновое движение	152
4. Физика макросистем	173
4.1. Общие подходы	173
4.2. Основы молекулярно-кинетической теории	174
4.3. Уравнение состояния газа и процессы	192
4.4. Первое начало термодинамики	209
4.5. Второе начало термодинамики. Энтропия	228
Список литературы	248

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие занимает промежуточное положение между вузовским учебником по общей физике и сборником задач. В нем отражен многолетний опыт преподавания автором курса физики на кафедре общей физики Пермского государственного технического университета и в физико-математических классах лицея №1 при ПГТУ. При этом предполагается, что читатель уже знаком с основными законами физики.

Судить о степени понимания физических законов можно по умению сознательно их применять к решению конкретных задач. Высокая степень понимания физики определяется не только умением использовать при решении задач фундаментальные физические законы, но и методологические принципы физики (симметрии, относительности и др.), истинный смысл которых проявляется именно при решении задач. Кроме того, существует и обратная связь между практикой решения конкретных задач и более глубоким пониманием законов физики.

Целью настоящего пособия является, прежде всего, иллюстрация законов физики на примере решения отдельных задач. Рассмотрены самые разные задачи — от достаточно простых, требующих только начальных знаний, так и оригинальные задачи, связанные с практикой научно-исследовательской работы. С другой стороны, пособие должно помочь студентам ответить на вопрос, с чего начать решение задачи, какие именно физические законы и соотношения следует при этом использовать, а также показать, как следует применять законы физики при решении конкретных вопросов. Методы, применяемые при решении задач, присутствуют и в любом научном исследовании. Это, во-первых, обоснованная идеализация изучаемого явления, во-вторых, это анализ простых частных и предельных случаев, для которых ответ очевиден.

Пособие предназначено в основном для студентов технических вузов и будет полезным также преподавателям кафедр общей физики. Однако изложение построено так, что, опуская отдельные места, связанные с применением высшей математики, его можно использовать и в классах физико-математического профиля школ и лицеев.

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ

1.1. Метод анализа размерностей

Что мы обычно понимаем под решением какой-либо физической задачи? Необходимо, опираясь на физические законы, методологические принципы физики и определения физических величин, в рамках адекватной модели получить выражение в виде формулы, отражающее связь между искомой величиной и какими-либо данными задачи. Есть и более сложные задачи, в которых необходимо самостоятельно выбрать исходные данные. Но в любом варианте в основе решения лежат физические принципы.

Существует и другой подход к установлению связи между физическими величинами, в котором не заложены никакие физические законы и который основан на теории подобия и размерности.

Понятие размерности возникает в связи с построением систем единиц. В принципе для каждой физической величины можно установить свою единицу, никак не связанную с единицами других величин. Но тогда в уравнения, выражающие физические законы, вошло бы множество численных коэффициентов. Во избежание этого некоторые физические величины условно принимаются за основные. Так, например, в международной системе единиц (СИ) за основные приняты шесть величин: длина (L), масса (M), время (T), температура, сила электрического тока и сила света. Величины, не являющиеся основными, называются производными. Например, размерность силы равна размерности массы, умноженной на размерность ускорения: $[F] = [ma] = MLT^{-2}$. Размерность физической величины дает правило, позволяющее определить, как меняется единица производной физической величины при изменении масштаба основных величин.

Понятие размерности возникает в связи с требованием, чтобы в одной и той же системе единиц количественные соотношения между различными физическими величинами выражались одними и теми же формулами, независимо от того, как велики единицы основных

физических величин. На этом основан так называемый метод анализа размерностей. Суть его заключается в следующем.

Пусть какая-либо физическая величина y зависит от нескольких основных физических величин x , например, от длины L , массы M и времени T . Тогда требование независимости функциональной связи между y и x от выбора масштаба единиц основных физических величин может быть удовлетворено только тогда, когда размерность выражается формулой степенного вида:

$$[y] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma},$$

где α , β и γ – некоторые постоянные числа (доказательство этого утверждения можно найти, например, в работе [1]).

Если посмотреть на размерности физических величин, фактически встречающихся в физике, то можно заметить, что во всех случаях числа α , β и γ оказываются рациональными. Это не обязательно с точки зрения теории размерности, а является результатом соответствующих определений физических величин.

Другая теорема утверждает, что во всяком физическом законе типа $A = B$ размерности обеих частей равенства должны быть одинаковы (правило размерностей). В равенство типа $A = B$ могут входить в качестве множителей либо постоянные коэффициенты, либо безразмерные комбинации физических величин. Над размерными величинами правило размерности допускает выполнение только степенных математических операций. Все прочие математические операции ($\sin x$, e^x , $\ln x$ и т.д.) могут выполняться только над безразмерными величинами. Правило размерности очень полезно для проверки полученных формул. Если вычисления проводятся в какой-то одной системе единиц, то размерности обеих частей всех полученных равенств должны быть одинаковы.

Метод анализа размерностей сам по себе, т.е. без использования каких-либо физических допущений, не может привести к каким-то конкретным физическим выводам, поскольку в его основу не заложены никакие физические законы. Для того чтобы извлечь из этой

теории конкретные выводы, нужно установить, между какими физическими величинами существуют количественные связи. В этом смысле теория размерностей не может дать никаких указаний. Это можно сделать, опираясь на физические законы, интуицию и опыт.

Проиллюстрируем сказанное выше на определении зависимости периода колебаний математического маятника от его параметров и внешних условий. Период колебаний T может зависеть от длины нити l , массы m , ускорения свободного падения g , угловой амплитуды колебаний θ и коэффициента вязкости воздуха η . Пренебрегая вязкостью воздуха, в соответствии с методом анализа размерностей мы должны считать, что зависимость периода колебаний T от параметров l, m, θ и g должна иметь вид

$$T = C\varphi(\theta)l^{\alpha}m^{\beta}g^{\gamma},$$

где C – безразмерная постоянная; α, β и γ – показатели степени, которые нужно определить. Вид безразмерной функции $\varphi(\theta)$ из теории размерности установить нельзя. Запишем формулу размерности для периода:

$$[T] = [L]^{\alpha} [M]^{\beta} [LT^{-2}]^{\gamma}.$$

После упрощений получаем

$$[T] = [L]^{\alpha+\gamma} [M]^{\beta} [T]^{-2\gamma}.$$

Для согласования размерностей в обеих частях последнего равенства необходимо приравнять показатели степени при соответствующих величинах:

$$1 = -2\gamma,$$

$$0 = \alpha + \gamma,$$

$$0 = \beta.$$

Решение данной системы уравнений имеет вид

$$\alpha = 1/2, \beta = 0, \gamma = -1/2.$$

Таким образом, зависимость периода колебаний математического маятника от его параметров должна иметь вид

$$T = C\varphi(\theta)\sqrt{l/g}.$$

Значение постоянного множителя C не определяется из теории размерности. Точный анализ, основанный на законах Ньютона, дает для него значение, равное 2π . Значение $\varphi(\theta)$ при малых колебаниях приближенно равно единице.

При недостаточном числе основных физических величин (базисе) некоторые величины, имеющие различную физическую природу, обладают одинаковой размерностью. Обратимся, например, к понятию момента силы $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$. При анализе размерности момента силы $[M] = [r] \cdot [F] = L \cdot LMT^{-2}$ не делается различия между символами размерности длины L . И хотя величины \vec{r} и \vec{F} имеют разные направления, размерности этих величин представлены с применением одного и того же символа L .

Для уменьшения числа совпадений размерностей у неоднородных величин необходимо учитывать векторный характер физических величин, т.е. в тех случаях, когда необходимо подчеркнуть векторные свойства физических величин, размерность длины L должна быть «разложена» по трем взаимно перпендикулярным направлениям L_x, L_y и L_z . Эти основные величины можно назвать «векторными единицами длины». При использовании размерностей L_x, L_y и L_z многие формулы размерностей становятся информативнее. Например, в случае движения тела, брошенного горизонтально с некоторой высоты, тело обладает постоянной горизонтальной скоростью v_x и вертикальным ускорением свободного падения g . Обычно размерности величин v_x и g записывают соответственно в виде LT^{-1} и LT^{-2} . В случае использования «векторных единиц длины» размерность этих величин становится более информативной: $L_x T^{-1}$ и $L_y T^{-2}$.

Для иллюстрации данного подхода рассмотрим задачу об определении дальности полета пули S , выпущенной горизонтально с начальной скоростью v на высоте h от земли. При отсутствии сопротивления воздуха дальность полета S может зависеть от величин v , h и g . Представим искомую зависимость в виде

$$S = Cv^\alpha h^\beta g^\gamma,$$

где C – безразмерная постоянная. В соответствии со сказанным ранее размерности S , v , h и g будут следующими:

$$[S] = L_x, \quad [v] = L_x T^{-1}, \quad [h] = L_y, \quad [g] = L_y T^{-2}.$$

Запишем формулу размерности для дальности полета пули:

$$[S] = [v]^\alpha [h]^\beta [g]^\gamma.$$

После приравнивания соответствующих размерностей в обеих частях последнего равенства, находим значения коэффициентов α , β , γ :

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1/2, \quad \gamma = -1/2,$$

и тогда с точностью до постоянного множителя C выражение для дальности полета пули будет иметь вид

$$S = Cv \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Нетрудно убедиться, что без использования «векторных единиц длины» нам не удалось бы получить этот результат (для согласования размерностей получилась бы система из двух уравнений с тремя неизвестными).

Метод анализа размерности эффективно применять в сложных задачах, например в гидродинамике, где полная теоретическая трактовка весьма затруднительна.

В качестве примера рассмотрим задачу о сбросе воды через широкую плотину. Во время паводка высота уровня воды h над кромкой плотины выросла в 2 раза. Во сколько раз увеличится водосброс? Так как ширина плотины остается неизменной, то в качестве

меры водосброса можно взять массу воды, сбрасываемой через единицу ширины плотины за единицу времени, – μ ($[\mu] = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$). Эта величина может зависеть от высоты уровня воды h , ускорения свободного падения g и плотности воды ρ . В соответствии с методом анализа размерностей нетрудно получить:

$$\mu = C \rho^{\alpha} g^{\beta} h^{\gamma},$$

где C – некоторая константа, $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 3/2$.

Таким образом, водосброс оказывается пропорциональным высоте уровня воды над кромкой плотины в степени $3/2$ и увеличивается в $2\sqrt{2}$ раз. Этот результат можно понять и из чисто физических соображений. Увеличение уровня воды, во-первых, пропорционально увеличивает площадь сечения сброса. Во-вторых, в соответствии с формулой Торричелли ($v = \sqrt{2gh}$) возрастает и скорость истечения.

Рассмотренный пример наглядно показывает, насколько осторожно нужно подходить к выбору модели задачи и параметров, влияющих на ее поведение. Если мы искали бы не массу воды, сбрасываемой через единицу ширины плотины за единицу времени, а зависимость сбрасываемой массы за единицу времени от высоты превышения воды над плотинной h , то получили бы следующий результат:

$$\mu = C \rho g^{1/2} h^{5/2},$$

что не имеет никакого физического обоснования.

1.2. Дискретизация временных и пространственных моделей

Любая физическая задача начинается с выбора модели реальной ситуации. С одной стороны, выбранная модель не должна быть слишком сложной, что просто не позволит получить хотя бы какое-то решение. Самый наглядный пример: попытаться, используя законы механики, описать поведение молекул в газах. Бессмысленная попытка, если учесть гигантское число молекул! С другой стороны, принятая модель должна отражать в соответствии с поставленной задачей все характерные особенности рассматриваемого явления. Иногда этап выбора модели пропускается, так как по условию задачи уже указано, в рамках какой модели требуется получить решение.

На следующем этапе необходимо определиться с теми физическими законами или утверждениями, которые можно применить в данной задаче. Иногда эти законы можно сразу использовать в их первоначальном виде, если их область применения соответствует выбранной модели. Так, если какие-либо два заряда можно принять за точечные, например два электрона, то для расчета их взаимодействия можно применять закон Кулона, который и сформулирован для точечных зарядов. Если мы применим закон Кулона в его первоначальном виде к взаимодействию двух пластин плоского конденсатора, то получим просто неверный результат. Правда, это обнаружится только после решения задачи. Если же эти пластины не параллельны друг другу, то еще до решения задачи возникает проблема: а что же принять за расстояние между пластинами?

В связи с этим возникает вопрос: как применять известные законы физики, которые зачастую сформулированы для идеализированных объектов (точечные заряды, материальные точки и т.д.), к реальным объектам? Для этого реальную систему с непрерывным пространственным распределением (массы, заряда...) разбивают на бесконечно малые элементы, к которым и применяют известные законы. Затем проводится суммирование (интегрирование) по всем бесконечно малым элементам. Конечно, само разбиение на бесконечно малые эле-

менты можно проводить различными способами, но при этом необходимо помнить следующее. Во-первых, эти элементы в сумме должны заполнить рассматриваемую область без каких-либо разрывов. Во-вторых, при выборе их формы разумно учесть симметрию исходной задачи.

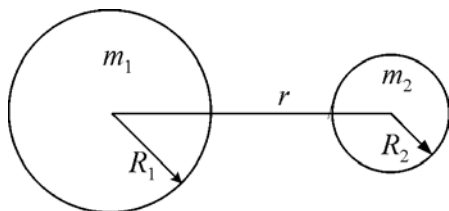


Рис. 1.1

Рассмотрим в качестве примера задачу о гравитационном взаимодействии двух шаров массами m_1 и m_2 , центры которых находятся на расстоянии r , превышающем сумму их радиусов (рис. 1.1). Но вначале решим более простую задачу о взаимодействии шарика массой m_1 и материальной точки массой m_2 .

С учетом симметрии задачи в качестве бесконечно малых элементов выберем тонкий шаровой слой радиусом $R \leq R_1$ (рис. 1.2). Разобьем шаровой слой на тонкие кольцевые слои радиусом a . Выделим на этом кольце бесконечно малый прямоугольный элемент площадью dS .

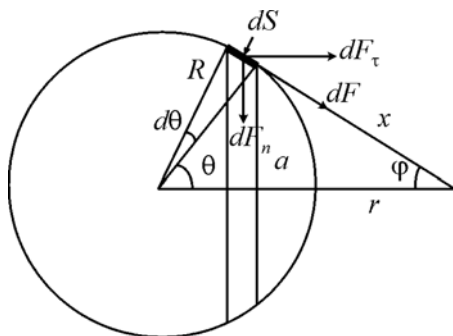


Рис. 1.2

Сила взаимодействия этого элемента и точечной массы m_2 имеет две составляющие: параллельную направлению от центра шара к точке m_2 — $d\vec{F}_\tau$ и перпендикулярную — $d\vec{F}_n$. В силу симметрии любому прямоугольному элементу dS на кольце найдется точно такой же диаметрально противоположный

элемент, формирующий такую же по модулю, но противоположно направленную силу $d\vec{F}_n$. Понятно, что векторная сумма всех сил $d\vec{F}_n$, взятая по тонкому кольцу, обратится в нуль, и останется только сумма

всех сил $d\vec{F}_\tau$. Обозначим ее как $dF_{\text{к.с}}$. Запишем для этой силы закон тяготения:

$$dF_{\text{к.с}} = G \frac{m_2 dm_{\text{к.с}}}{x^2} \cos \varphi,$$

где $dm_{\text{к.с}}$ – масса тонкого кольцевого слоя. Если вещество, заполняющее шарик, однородно, то эту массу можно представить в виде

$$dm_{\text{к.с}} = \frac{dm_{\text{ш.с}}}{4\pi R^2} dS_{\text{к.с}},$$

где $dm_{\text{ш.с}}$ – масса тонкого шарового слоя; $dS_{\text{к.с}}$ – площадь кольцевого слоя,

$$dS_{\text{к.с}} = 2\pi a R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta.$$

Таким образом, для силы взаимодействия кольцевого слоя и материальной точки m_2 получаем

$$dF_{\text{к.с}} = G \frac{m_2 dm_{\text{ш.с}}}{4\pi R^2 x^2} \frac{2\pi r^2 \sin \theta}{d\theta} \cos \varphi.$$

Осталось только проинтегрировать это выражение по всем кольцевым слоям, заполняющим тонкий шаровой слой (при этом переменная x пробегает значения от $r - R$ до $r + R$). Но у нас возникла проблема. В данном выражении появились три переменные: x , θ и φ , а в интеграле должна быть только одна переменная! Какую из них оставить – это дело вкуса и опыта. В данном случае удобно оставить переменную x , выразив через нее углы θ и φ . Из теоремы косинусов следует

$$\cos \varphi = \frac{r^2 + x^2 - R^2}{2rx} \quad \text{и} \quad x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta.$$

Дифференцируя последнее соотношение, находим

$$2x dx = 2Rr \sin \theta d\theta \rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{x dx}{Rr}.$$

Для силы $dF_{\text{к.с}}$ получаем

$$dF_{\text{к.с}} = G \frac{m_z dm_{\text{ш.с}}}{2x^2} \frac{r^2 + x^2 - R^2}{2rx} \frac{xdx}{Rr} = G \frac{m_z dm_{\text{ш.с}}}{r^2} \frac{r^2 + x^2 - R^2}{4x^2 R} dx.$$

Интегрируя это выражение по x в пределах от $r - R$ до $r + R$, получаем выражение для силы взаимодействия шарового слоя и точечной массы:

$$dF = G \frac{m_z dm_{\text{ш.с}}}{r^2}.$$

Мы получили очень интересный результат, который существенно упрощает дальнейшее решение задачи. Тонкий шаровой слой притягивает материальную точку, находящуюся за его пределами, так как если бы вся масса шарового слоя находилась в его центре. Это означает, что теперь не потребуется проводить интегрирование по всем шаровым слоям, из которых состоит шарик. И сила взаимодействия шарика массой m_1 и материальной точки массой m_2 будет равна силе взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2 . Отсюда следует, что и сила взаимодействия двух шариков равна силе взаимодействия двух материальных точек с массами, равными массам шариков, которые находятся в их центре. Этот же результат можно распространить и на силу кулоновского взаимодействия двух сферических зарядов, так как закон Кулона в точности похож на закон тяготения.

Некоторые фундаментальные физические законы описывают развитие систем во времени. Обратимся, например, ко второму закону Ньютона, который запишем в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

В таком представлении этот закон утверждает, что скорость изменения импульса равна действующей на тело силе. Такое понимание второго закона Ньютона связывает локальные во времени характеристики. Если же этот закон переписать иначе:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt,$$

то возможна иная трактовка. Изменение импульса тела равно импульсу силы. Казалось бы, что никакой принципиальной разницы в этих трактовках нет, но с методической точки зрения вторая формулировка иногда оказывается более наглядной.

Рассмотрим с целью пояснения сказанного выше процесс изменения состояния какой-либо системы во времени. Состояние системы можно определить, задавая положение и скорость отдельных частиц этой системы в некоторый момент времени. Выберем какие-либо два состояния системы, разделенные бесконечно малым интервалом времени dt . Пусть, например, процесс изменения состояния фиксируется на киноплёнку. В этом случае выберем два произвольных соседних кадра. Так как интервал времени между ними маленький, то, естественно, и изменения состояния будут также небольшими. Подсчитаем импульсы всех частей системы на этих двух кадрах с учетом всех тех малых изменений, которые происходят в реальной системе (изменяться может не только положение и скорость частиц, но и их число!). Если теперь вычесть полные импульсы на двух соседних кадрах, то это и будет бесконечно малое изменение импульса всей системы $d\vec{p}$. Это изменение импульса, найденное из чисто кинематических соображений, должно быть связано с силами, действующими на систему, уравнением $d\vec{p} = \vec{F}dt$. Дальнейшие действия зависят от поставленного в задаче вопроса. Если требуется, например, определить какой-либо параметр системы в конечном состоянии, то задача сводится к интегрированию этого уравнения.

С целью демонстрации этого подхода определим скорость распространения упругих волн в полубесконечном стержне (скорость звука c). Пусть в начальный момент времени частицы стержня неподвижны и к его левому концу приложена постоянная сила F (рис. 1.3). Под дей-

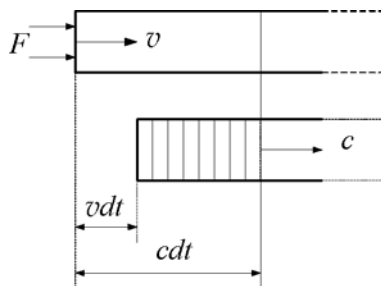


Рис. 1.3

ствием этой силы частицы стержня приходят в движение с некоторой скоростью v . За счет взаимодействия частиц между собой граница, разделяющая уже движущиеся частицы от еще неподвижных (фронт волны), перемещается вправо со скоростью звука $c \gg v$. За время dt фронт волны сжатия пройдет расстояние $c dt$, которое можно принять за первоначальную длину l области, подвергнутой деформации. Тогда абсолютная деформация Δl будет равна $v dt$, а относительная

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v dt}{c dt} = \frac{v}{c}. \quad (1)$$

Запишем теперь для области сжатия закон Гука:

$$\sigma = E \varepsilon,$$

где σ – механическое напряжение, равное F/S ; E – модуль Юнга материала стержня. С учетом соотношения (1) находим

$$F = \sigma S = \varepsilon E S = \frac{v}{c} E S.$$

Под действием этой силы частицы стержня на длине $c dt$ приходят в движение со скоростью v и получают импульс, $dp = dm v$. Полагая деформации малыми, можно пренебречь изменением плотности материала стержня ρ . В этом случае масса частиц, находившихся на длине $c dt$, $dm = \rho S c dt$, и тогда второй закон Ньютона $F dt = dp$ можно записать в виде

$$\frac{v}{c} E S dt = \rho S c dt.$$

Из этого соотношения находим скорость звука:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Попутно из закона Гука $\sigma = v E / c$ можно определить скорость движения частиц в области сжатия:

$$v = \frac{\sigma}{\sqrt{E \rho}},$$

откуда видно, что при достаточно малых напряжениях ($\sigma \ll E$) скорость частиц v много меньше скорости звука c .

В качестве следующего примера рассмотрим задачу о взаимодействии водяной струи с неподвижной стенкой. Струя воды с постоянной площадью сечения S ударяется со скоростью v по нормали к неподвижной тяжелой стенке (силой тяжести пренебрегаем). Найти силу давления струи на стенку.

Если пытаться найти эту силу из закона $F = ma$, то сразу возникают вопросы. Во-первых, что понимать под массой m ? Струя-то бесконечная! Во-вторых, о каком ускорении идет речь? Эти вопросы сразу снимаются, если воспользоваться соотношением $d\vec{p} = \vec{F}dt$.

Разобьем непрерывный процесс соударения воды со стенкой на бесконечно малые промежутки времени dt . Тогда под $d\vec{p}$ нужно понимать бесконечно малое изменение импульса струи за время dt . Пусть вода при ударе просто растекается по стенке, теряя свою скорость. В этом случае изменение импульса струи будет равно импульсу тех частиц, которые ударились о стенку за время dt :

$$d\vec{p} = dm\vec{v},$$

где dm – масса ударившихся частиц, $dm = \rho S v dt$ (ρ – плотность воды). Тогда второй закон Ньютона можно представить в виде

$$F dt = \rho S v^2 dt.$$

И для силы взаимодействия получаем

$$F = \rho S v^2.$$

Пусть теперь вода со скоростью v течет по трубе постоянного сечения S и ее быстро перекрывают жесткой заслонкой. Определить силу, действующую на заслонку при остановке воды.

Эта задача существенно отличается от рассмотренной выше. Если считать, как и ранее, воду несжимаемой, то никакая заслонка не выдержит силы удара, так как нельзя мгновенно остановить всю массу воды, находящуюся в длинной трубе. Это означает, что мы обязаны считать теперь воду сжимаемой и от заслонки против дви-

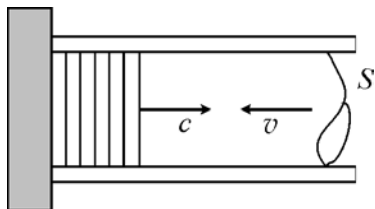


Рис. 1.4

жения струи побежит со скоростью звука c волна сжатия (рис. 1.4). Как и ранее под dp нужно понимать бесконечно малое изменение импульса тех частиц, которые успели остановиться за время dt :

$$dp = dm v ,$$

где dm – масса частиц, которые потеряли свою скорость при ударе о заслонку. Эта масса определяется не скоростью движения струи, а скоростью движения фронта волны сжатия – скоростью звука c :

$$dm = \rho S c dt .$$

Теперь второй закон Ньютона запишется в виде

$$F dt = \rho S v c dt .$$

Откуда

$$F = \rho S v c .$$

2. МЕХАНИКА

2.1. Системы отсчета в кинематике

Одним из основных понятий механики является понятие системы отсчета (СО). В рамках кинематики все системы отсчета – покоящиеся, движущиеся равномерно и прямолинейно или ускоренно, вращающиеся и т.д. – равноправны. Выбор той или иной СО, если она не задана заранее, определяется здравым смыслом и удобством. Удачный выбор СО существенно упрощает, а иногда делает просто устным решение многих физических задач. При неудачном (но привычном) выборе СО и недостаточной математической подготовке иногда в принципе не удастся довести решение задачи до конца.

При переходе из одной СО в другую многие физические величины, описывающие механическое движение тел, изменяются. Это касается, например, скорости и ускорения. При этом для скорости выполняется известный закон сложения:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0, \quad (1)$$

где \vec{v} – скорость какого-либо тела относительно условно неподвижной СО (чаще всего относительно Земли); \vec{v}' – скорость тела относительно движущейся поступательно СО; \vec{v}_0 – скорость подвижной СО относительно неподвижной. Аналогичное соотношение существует и для ускорений.

При одновременном движении двух и более тел важное значение имеет понятие относительной скорости \vec{v}_{12} :

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad (2)$$

где \vec{v}_1 и \vec{v}_2 – скорости первого и второго тела, измеренные в покоящейся или движущейся поступательно СО. Это соотношение напрямую вытекает из закона сложения скоростей (1). Из него следует, что $\vec{v}_{12} = -\vec{v}_{21}$, но $v_{12} = v_{21}$. Кроме того, относительная скорость только тогда равна нулю, когда равны векторы абсолютных скоростей. По своему физическому смыслу относительная скорость двух тел –

это скорость одного тела, которую видит наблюдатель, находящийся на другом теле. Введение относительной скорости позволяет, прежде всего, уменьшить число движущихся тел. Особенно эффективно это при движении двух тел. В этом случае в задаче остается только одно движущееся тело. Подчеркнем, что соотношение (2) выполняется только для движущихся поступательно систем отсчета (правда, как правило, это наиболее частый случай).

Для пояснения сказанного рассмотрим очень простую ситуацию. На вращающемся диске на разных расстояниях от центра сидят две мухи. Их относительная скорость \vec{v}_{12} , очевидно, равна нулю, так как расстояние между ними не изменяется. Но их абсолютные скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , измеренные относительно Земли, разные.

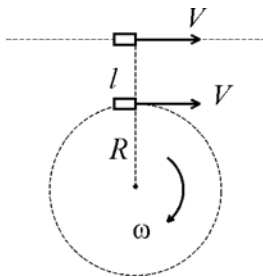


Рис. 2.1

Несколько более сложный пример. В океане движутся два корабля с одинаковыми по модулю скоростями V . Один из них движется прямолинейно, другой – по окружности радиуса R (рис. 2.1). В некоторый момент времени они оказались на самом малом расстоянии l . Чему равна в этот момент их относительная скорость?

Из соотношения (2) сразу следует «очевидный» ответ – она равна нулю. На самом деле это не так. Связано это с тем, что движущийся по окружности корабль находится фактически во вращающейся СО. В этом случае классический закон сложения скоростей (1), следствием которого и является выражение для относительной скорости (2), уже неприменим, так как он работает только для поступательно движущихся СО. Если одна из систем отсчета кроме поступательного движения со скоростью \vec{v}_0 совершает еще и вращательное движение с угловой скоростью ω , то переход от скоростей какой-либо точки A , измеренных в разных СО, описывается выражением

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (3)$$

Это выражение отличается от (1) наличием дополнительного слагаемого $[\vec{\omega} \vec{r}]$, где \vec{r} – радиус-вектор точки A относительно оси вращения.

Если выбрать корабль, движущийся по окружности, за вращающуюся СО, тогда скорость движущегося прямолинейно корабля относительно второго (это v' в выражении (3))

$$\vec{v}_{12} = \vec{V} - [\vec{\omega} \vec{r}]$$

(в нашем случае $\vec{v}_0 = 0$). Учитывая, что угловая скорость $\omega = V/R$ и в момент наибольшего сближения $r = l + R$, получаем

$$v_{12} = V - \frac{V}{R}(l + R) = -V \frac{l}{R} \neq 0.$$

Знак минус показывает, что относительно движущегося по окружности корабля корабль, движущийся прямолинейно, отстает от него. Проведя аналогичные рассуждения относительно движущегося прямолинейно корабля, получим естественно ожидаемый ответ:

$$v_{21} = V \frac{l}{R}.$$

Попытаемся теперь понять, почему относительная скорость этих кораблей не равна нулю. Для этого, прежде всего, нужно выяснить, а как вообще ее можно измерить. Пусть наблюдение за движущимся прямолинейно кораблем ведется с палубы второго корабля, на которой жестко установлена подзорная труба. Ее оптическая ось перпендикулярна продольной оси корабля и проходит через центр окружности, по которой движется корабль. Теперь легко представить, что «пойманный» в центр объектива до точки максимального сближения движущийся прямолинейно корабль начнет постепенно отставать. Это и означает, что относительная скорость кораблей в данном случае не равна нулю.

Кроме величин, которые изменяются при переходе из одной СО в другую, существуют и так называемые инвариантные величины. Это величины, значение которых не изменяется с точки зрения разных систем отсчета. Инвариантами в классической механике яв-

ляются расстояние между точками, интервал времени между какими-либо событиями, размеры предметов и др.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

2.1.1. Плот, лодка и деревня. Вниз по течению в направлении деревни плывет плот. Когда до деревни оставалось 15 км, от плота отошла лодка. Через 45 мин она достигла деревни и, повернув обратно, подошла к плоту, когда до деревни оставалось расстояние 9 км. Какова скорость течения?

Психологически мы вольно или невольно размещаем СО так, чтобы она соответствовала тексту задачи. В данном случае мы видим ситуацию относительно берега, и присутствуют два движущихся тела. Поэтому самое разумное здесь перейти в СО, связанную с плотом. В этой СО вода неподвижна и скорость лодки относительно плота одинакова во всех направлениях. Это означает, что время обратного движения лодки до плота также равно 45 мин. Таким образом, полное время движения лодки составляет 1,5 ч. За это время плот, двигаясь со скоростью течения, прошел путь 6 км. Значит, скорость течения равна 4 км/ч.

2.1.2. Грузовик и легковой автомобиль. По шоссе со скоростью 90 км/ч движется грузовик. Впереди него в том же направлении движется со скоростью 54 км/ч легковой автомобиль. Когда расстояние между автомобилями стало равным 50 м, водитель легкового автомобиля, пытаясь избежать столкновения, «нажал на газ» и стал двигаться с постоянным ускорением. Каково должно быть минимальное ускорение, при котором удастся избежать столкновения?

Описанная ситуация становится особенно простой, если ее рассматривать относительно водителя грузовика. Он видит, что на него надвигается со скоростью $v = 36$ км/ч легковой автомобиль и на расстоянии $S = 50$ м его скорость начинает падать до нуля с постоянным ускорением. Это ускорение легко определить по формуле для равноускоренного движения:

$$a = \frac{v^2}{2S} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Попробуйте решить эту задачу относительно Земли!

2.1.3. Мухи в треугольнике. В вершинах равностороннего треугольника со стороной a сидят три мухи. В некоторый момент они начинают одновременно двигаться с постоянной по модулю скоростью v , причем первая муха движется в направлении второй, вторая – на третью, третья – на первую. Через какое время они встретятся?

Так как скорость мух постоянна по модулю, то для определения времени достаточно найти их путь до встречи. А вот это уже является проблемой. При движении мух треугольник, который они образуют, оставаясь равносторонним, поворачивается вокруг центра и стягивается в точку встречи мух (рис. 2.2), а сами мухи движутся по довольно сложной траектории, форма которой нам неизвестна. Для определения вида траектории придется составить дифференциальные уравнения движения мух. Кроме того, определение длины траектории также не совсем просто.

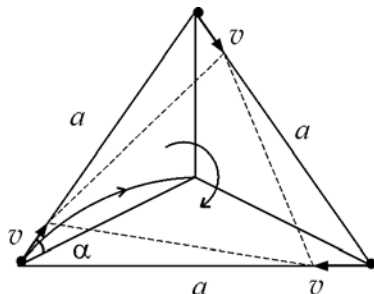


Рис. 2.2

Поэтому попробуем перейти в СО, связанную с вращающимся треугольником. В этом случае легко сообразить, что каждая муха движется уже прямолинейно и с постоянной скоростью $v \cos \alpha$ (рис. 2.2), а ее путь будет равен $a / 2 \cos \alpha$. Таким образом, время движения

$$\tau = \frac{a}{2v \cos \alpha} = \frac{2a}{3v}.$$

2.1.4. Минимальный снос лодки. Скорость лодки относительно воды в $n = 2$ раза меньше скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения необходимо направить нос лодки, чтобы ее снесло при переправе как можно меньше?

В принципе решение задачи не представляет особой трудности. Необходимо найти величину сноса S в зависимости от угла α , под которым должна лодка держать курс, и затем минимизировать это выражение по углу. Необходимо только помнить, что истинное движение лодки по отношению к берегу будет совершаться не под наме-

ченным углом α , а под углом β , который определяется законом сложения скоростей. Этот закон в данном случае целесообразно представить в виде

$$\vec{v}_{л.б} = \vec{v}_{л.в} + \vec{v}_{в.б}, \quad (1)$$

где $\vec{v}_{л.б}$ – скорость лодки относительно берега; $\vec{v}_{л.в}$ – скорость лодки относительно воды; $\vec{v}_{в.б}$ – скорость воды относительно берега. Такое представление закона сложения скоростей с конкретным указанием тел в виде индексов позволяет избежать многих ошибок и дает очень наглядное представление о характере движения тел.

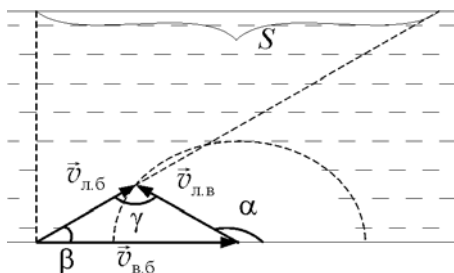


Рис. 2.3

Отобразим соотношение (1) на рис. 2.3. Из него сразу видно, что минимальный снос лодки S будет при максимальном угле β , при котором вектор $\vec{v}_{л.б}$ становится касательным к окружности с радиусом $v_{л.в}$. В этом случае угол между

векторами $\vec{v}_{л.в}$ и $\vec{v}_{л.б}$ равен $\pi/2$ и тогда находим

$$\sin \beta = \frac{v_{л.в}}{v_{в.б}} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, угол α , обеспечивающий минимальный снос лодки, определяется по формуле

$$\alpha = \arcsin(1/n) + \pi/2 = 120^\circ.$$

2.1.5. Бегущий от дождя человек. На человека, находящегося в открытом поле, надвигается со скоростью v полоса дождя шириной $2L$. Человек находится на расстоянии l напротив центра этой полосы. С какой минимальной скоростью должен двигаться человек, чтобы остаться сухим?

Ответ вроде бы очевиден – его скорость должна быть не меньше скорости надвигающейся полосы дождя. Это было бы так, если

полоса дождя была бы бесконечной ширины. Но у нее есть край и человек останется сухим, если вектор его скорости относительно полосы дождя будет направлен на крайнюю точку полосы A . В силу закона сложения скоростей эта относительная скорость

$$\vec{v}_{ч.д} = \vec{v}_{ч.з} - \vec{v}_{д.з},$$

где $v_{ч.д}$ – скорость человека относительно полосы дождя; $v_{ч.з}$ – скорость человека относительно Земли, $v_{ч.з} = u$; $v_{д.з}$ – скорость дождя относительно Земли, $v_{д.з} = v$ (рис. 2.4). Легко сообразить, что условие минимальности скорости человека соответствует

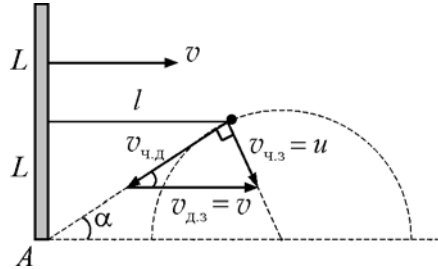


Рис. 2.4

максимальному углу α между векторами $v_{ч.д}$ и $v_{д.з}$. В этом случае угол между векторами $v_{ч.д}$ и $v_{ч.з}$ будет равен $\pi/2$ и максимальное значение угла α можно найти из условия

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{v_{ч.з}}{v_{д.з}} = \frac{u}{v}.$$

В то же время

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + l^2}}.$$

Таким образом, человек останется сухим, если его минимальная скорость

$$u = v \frac{L}{\sqrt{L^2 + l^2}},$$

а направление движения составляет угол 90° по отношению к направлению на край полосы дождя.

2.1.6. Лиса и заяц. По тропинке равномерно и прямолинейно бежит заяц со скоростью v . На расстоянии l от тропинки находится лиса. В тот момент, когда заяц оказался на перпендикуляре между лисой и тропинкой, лиса побежала за зайцем со скоростью $u > v$. Через какое время она догонит зайца?

Конечно, если лиса не очень сообразительна, то она примет ожидаемое, но не совсем оптимальное решение – двигаться так, чтобы вектор ее скорости был направлен все время на зайца. Если же она будет более сообразительна, то она «рассчитает» предполагаемую точку встречи и сразу побежит к ней по кратчайшему пути.

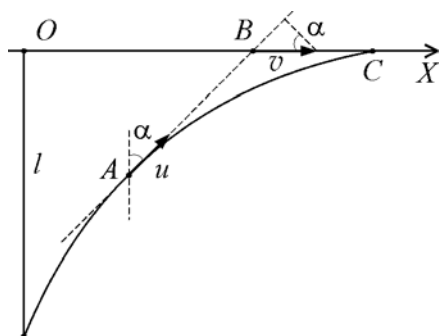


Рис. 2.5

Рассмотрим вначале первый вариант (рис. 2.5). Он не оптимален, так как траектория движения лисы в этом случае не прямолинейна. Пусть до точки встречи заяц пробежит расстояние $OC = v\tau$, где τ – искомое время встречи. Но точно такое же расстояние вдоль оси X должна пробежать и лиса с переменной скоростью $u_x = u \sin \alpha$.

Интегрируя эту скорость по времени движения и приравнявая пути вдоль оси X , получаем одно из условий встречи:

$$v\tau = u \int \sin \alpha(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Решить такое интегральное уравнение относительно τ не удастся, так как неизвестна зависимость угла α от времени. Конечно, можно приложить определенные усилия и найти эту зависимость и тем самым даже установить вид траектории лисы, но есть и более простой вариант. Представим, что между лисой и зайцем натянута нить, которая при их движении укорачивается, оставаясь все время натянутой. За бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ длина этой

нити уменьшается на $dl = u d\tau - v \sin \alpha d\tau$. Интегрируя это соотношение по времени движения, получим второе условие встречи:

$$u \tau - v \int \sin \alpha(\tau) d\tau = l. \quad (2)$$

Нам неизвестна зависимость $\alpha(\tau)$, но сейчас это не имеет никакого значения, так как в уравнения (1) и (2) входит одна и та же величина $\int \sin \alpha(\tau) d\tau$. Исключая ее из этих уравнений, находим искомое время встречи:

$$\tau_1 = \frac{lu}{u^2 - v^2}.$$

Рассмотрим теперь оптимальный вариант движения лисы. В этом случае вектор скорости лисы относительно зайца $\vec{v}_{л.з} = \vec{u} - \vec{v}$ должен смотреть все время на зайца (рис. 2.6). Это позволяет легко найти и время встречи:

$$\tau_2 = \frac{l}{v_{л.з}} = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

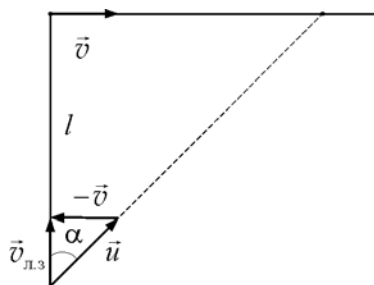


Рис. 2.6

Это время, очевидно, меньше τ_1 , так как

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}} \frac{u^2 - v^2}{lu} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2} < 1.$$

Заодно мы нашли и угол, под которым должна бежать лиса по отношению к первоначальному направлению на зайца:

$$\sin \alpha = \frac{v}{u}.$$

2.1.7. Мальчик на эскалаторе. По движущемуся эскалатору в направлении его движения бежит с некоторой скоростью мальчик и насчитывает $N_1 = 50$ ступенек. Если же он бежит со скоростью в 3 раза большей, то насчитывает уже $N_2 = 75$ ступенек. Сколько ступенек находится на неподвижном эскалаторе?

Понятно, что на неподвижном эскалаторе независимо от скорости мальчика всегда находится одинаковое число ступенек. Мальчик насчитывает разное число ступенек потому, что он их «считает»

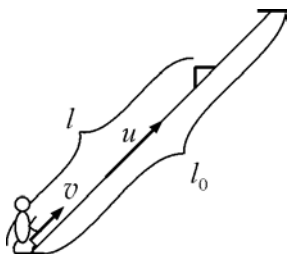


Рис. 2.7

ногами и чем быстрее он бежит, тем большее число ступенек насчитает. Пусть l_0 – расстояние от нижней до верхней площадки эскалатора, а l – расстояние от нижней площадки до последней ступеньки, на которую наступит мальчик перед тем, как коснется верхней площадки (рис. 2.7). Эти разные расстояния представляют собой путь мальчика, измеренный в разных СО – относительно Земли и движущейся ленты эскалатора.

Но в любом случае время движения мальчика от нижней до верхней площадки должно быть одинаковым. Воспользовавшись этим обстоятельством, нетрудно получить связь величин l и l_0 :

$$\frac{l_0}{v+u} = \frac{l}{v},$$

где v – скорость мальчика относительно ленты эскалатора; u – скорость самой ленты. Поделив последнее равенство на длину ступеньки, найдем соотношение, связывающее число ступенек на неподвижном эскалаторе N_0 и число ступенек N_1 , которое насчитает бегущий мальчик:

$$\frac{N_0}{v+u} = \frac{N_1}{v}.$$

Для скорости в 3 раза большей запишем аналогично:

$$\frac{N_0}{3v+u} = \frac{N_2}{3v}.$$

Разрешая полученную систему уравнений относительно N_0 , находим

$$N_0 = \frac{2N_1}{3N_1 - N_2} = 100.$$

2.1.8. Маятник Фуко. Маятник Фуко является очень наглядной иллюстрацией суточного вращения Земли. Он представляет собой гладкий тяжелый шар, подвешенный на длинной нерастяжимой нити. Известно, что плоскость его колебаний непрерывно поворачивается с некоторой угловой скоростью ω , зависящей от географической широты места установки маятника φ . Связано это с тем, что на самом деле относительно гелиоцентрической системы отсчета поворачивается не плоскость колебаний маятника, а вращается Земля вокруг собственной оси. Найти угловую скорость вращения плоскости колебаний маятника Фуко относительно Земли в зависимости от широты.

Понятно, что нам нужно найти угловую скорость вращения некоторого небольшого элемента поверхности Земли ΔS , находящегося в месте установки маятника на широте φ . Конечно, угловая скорость вращения любой точки Земли всегда $\omega_0 = 2\pi/T$, где

T – период вращения Земли, равный 24 ч, но это совсем не то, что нас интересует. Пусть элемент ΔS настолько мал, что его можно считать плоским и принадлежащим некоторой бесконечной плоскости. Тогда речь идет об определении угловой скорости вращения этой плоскости вокруг некоторой перпендикулярной ей оси. Для этого проведем касательную к данной точке Земли, которая пересечет ось вращения Земли в точке O' (рис. 2.8). От-

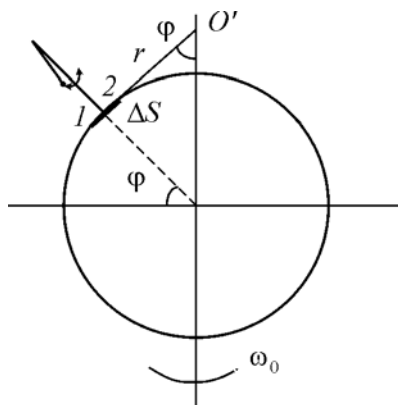


Рис. 2.8

носительно этой точки края элемента ΔS (точки 1 и 2) будут иметь разные линейные скорости v_1 и v_2 . Тогда интересующая нас угловая скорость

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{r_1 - r_2} = \frac{\Delta v}{\Delta r}. \quad (1)$$

Линейную скорость v можно выразить через широту данной точки:

$$v = \omega_0 r \sin \varphi .$$

Найдем ее изменение $\Delta v = \omega_0 \sin \varphi \Delta r$ и подставим в выражение (1). Тогда угловая скорость вращения плоскости колебаний маятника Фуко

$$\omega = \frac{\omega_0 \sin \varphi \Delta r}{\Delta r} = \omega_0 \sin \varphi .$$

Отсюда видно, что на полюсах время полного поворота плоскости колебаний маятника Фуко составит 24 ч, а на экваторе плоскость колебаний маятника Фуко вообще не поворачивается.

2.2. Основное уравнение динамики материальной точки и твердого тела

В рамках кинематики, когда идет речь лишь об описании движений и не рассматриваются причины, вызывающие эти движения, нет никакой принципиальной разницы между различными системами отсчета (СО). В этом смысле все СО равноправны. В динамике же обнаруживается принципиальное различие между разными СО и преимущества одних перед другими. Законы динамики в разных СО имеют различный вид и может быть так, что в произвольной СО эти законы даже для простых явлений будут выглядеть весьма сложно.

Наиболее часто выбирают так называемые инерциальные системы отсчета (ИСО), в которых ускорение материальной точки обусловлено только взаимодействием ее с другими телами. Важнейшей особенностью ИСО является то, что по отношению к ним пространство и время обладают определенными свойствами симметрии – время однородно, а пространство однородно и изотропно.

В ИСО основным уравнением динамики материальной точки является второй закон Ньютона:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

где \vec{F} – сумма всех сил, действующих на материальную точку и обусловленных взаимодействием с другими телами. Решение данного уравнения является основной задачей динамики. При этом возможны две противоположные задачи:

1. По силам, действующим на данное тело и так называемым начальным условиям (скорость \vec{v}_0 и положение \vec{r}_0 в начальный момент времени), определить закон движения $\vec{r}(t)$.

2. По зависимости от времени радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ определить силы, действующие на материальную точку.

В декартовых координатах уравнение (1) распадается на три дифференциальных уравнения:

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x, m \frac{dv_y}{dt} = F_y, m \frac{dv_z}{dt} = F_z,$$

где F_x, F_y, F_z – сумма проекций сил на оси X, Y, Z . Выбор направления осей X, Y, Z определяется характером конкретной задачи.

Очень часто уравнение (1) представляют в проекциях на касательную и нормаль к траектории в данном месте

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{R} = F_n, \quad (2)$$

где R – радиус кривизны траектории в данном месте; F_τ, F_n – проекции вектора \vec{F} на орты касательной $\vec{\tau}$ и нормали \vec{n} к траектории. Эти проекции называют еще тангенциальной и нормальной составляющими силы \vec{F} . Уравнениями (2) удобно пользоваться, когда заранее известна траектория материальной точки.

Между тем имеются задачи, решение которых необходимо получить в неинерциальной системе отсчета (НИСО). В этом случае наряду с силами, обусловленными взаимодействием тел, приходится вводить так называемые силы инерции, обусловленные свойствами НИСО. Для этих сил нельзя указать источник в виде определенного тела и поэтому силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона. Наиболее часто рассматривают три силы инерции: $\vec{F}_{\text{пост}}$ – сила инерции, обусловленная поступательным движением системы отсчета с ускорением \vec{a}_0 , $\vec{F}_{\text{пост}} = -m\vec{a}_0$; $\vec{F}_{\text{кор}}$ – кориолисова сила инерции, действующая на движущуюся со скоростью \vec{v}' материальную точку во вращающейся со скоростью ω системе отсчета, $\vec{F}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}]$; $\vec{F}_{\text{цб}}$ – центробежная сила инерции, зависящая от положения частицы, $\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{\rho}$; $\vec{\rho}$ – радиус-вектор частицы, перпендикулярный оси вращения и характеризующий положение частицы относительно оси вращения.

Есть задачи, когда масса интересующего нас тела изменяется в процессе движения за счет отделения или присоединения вещества. В этом случае применяют уравнение Мещерского

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \mu \vec{u}, \quad (3)$$

где \vec{u} – скорость движения присоединяемого (или отделяемого) вещества относительно рассматриваемого тела; μ – скорость изменения массы движущегося тела, $\mu = \frac{dm}{dt}$. Довольно часто реализуются два частных случая:

1. $\vec{u} = 0$, т.е. масса присоединяется или отделяется без скорости относительно движущегося тела. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

где $m(t)$ – масса тела в данный момент времени.

2. Если присоединяемая (или отделяемая) масса неподвижна в интересующей нас системе отсчета, т.е. $\vec{u} = -\vec{v}$, то уравнение (3) принимает вид

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} [m(t) \vec{v}].$$

Эквивалентной формой записи второго закона Ньютона является уравнение

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (4)$$

где \vec{p} – импульс частицы, $\vec{p} = m\vec{v}$.

Динамика движения твердого тела при плоском движении определяется уже двумя уравнениями:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}, \quad (5)$$

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z, \quad (6)$$

где \vec{F} – результирующая всех внешних сил; I_z, M_z – момент инерции и суммарный момент всех внешних сил относительно оси Z , проходящей через центр инерции тела; \vec{v}_c – скорость движения центра инерции тела; $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ – угловое ускорение твердого тела. Уравнение (6) часто называют основным законом динамики вращательного движения твердого тела.

Подобно тому, как второй закон Ньютона записывают через импульс, так и уравнение динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z , можно записать через момент импульса:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (7)$$

где L_z – момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг оси Z , $L_z = I_z \omega$. Уравнение (7) называют уравнением моментов.

В задачах, связанных с какими-либо ударами, когда время действия силы τ очень маленькое, но происходят конечные изменения состояния, удобно представлять уравнения динамики (5) и (6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F\tau &= \Delta p = \Delta(mv), \\ M_z\tau &= \Delta L_z = \Delta(I_z \omega), \end{aligned}$$

где Δp и ΔL_z – изменения импульса и момента импульса за малое время удара.

2.2.1. Шайба на ленте транспортера. Лента горизонтального транспортера движется со скоростью u . На ленту по касательной к ней влетает шайба, начальная скорость которой v перпендикулярна краю ленты (рис. 2.9). Найти максимальную ширину ленты, при которой шайба достигнет другого ее края, если коэффициент трения между шайбой и лентой равен μ .

Так как сила трения, действующая на шайбу, противоположна вектору скорости относительного движения шайбы и ленты, то траектория шайбы не будет прямолинейной. Поэтому с целью упрощения решения перейдем в СО, связанную с движущейся лентой. В этом случае лента не движется, а на нее под некоторым углом (уже не перпендикулярно) влетает шайба и ее движение будет происходить с постоянным ускорением (рис. 2.10). Запишем для шайбы второй закон Ньютона:

$$F_{\text{тр}} t = \Delta p .$$

Здесь $F_{\text{тр}} = \mu mg$; t – время движения до остановки;

Δp – изменение импульса шайбы, $\Delta p = m\sqrt{v^2 + u^2}$. Для определения времени движения рассмотрим проекцию движения на направление, перпендикулярное краю ленты. Это движение происходит со средней скоростью $v/2$ и при этом шайба проходит путь, равный l . Тогда

$$t = \frac{2l}{v} \text{ и получаем}$$

$$\mu mg \frac{2l}{v} = m\sqrt{v^2 + u^2} .$$

Откуда находим

$$l = \frac{v\sqrt{v^2 + u^2}}{2\mu g} .$$

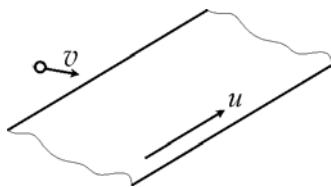


Рис. 2.9

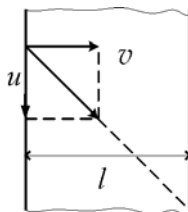


Рис. 2.10

2.2.2. Тело на осциллирующей наклонной плоскости. Определить установившуюся скорость тела, находящегося на наклонной плоскости, которая с большой частотой меняет одно направление своей скорости \vec{u} на противоположное (рис. 2.11). Коэффициент трения μ , угол наклона плоскости α , причем $\text{tg } \alpha < \mu$.

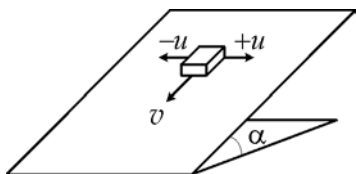


Рис. 2.11

Так как задано условие $\operatorname{tg} \alpha < \mu$, то при неподвижной плоскости тело не могло бы с нее соскользнуть (проекция силы тяжести на направление возможного соскальзывания тела недостаточна, чтобы преодолеть силу

трения скольжения). При наличии достаточно быстрых поперечных движений плоскости сила трения, противоположная вектору скорости тела, уже не параллельна направлению возможного соскальзывания тела (рис. 2.12), и вот теперь проекция силы тяжести уже может оказаться достаточной для соскальзывания тела. Аналогичная ситуация наблюдается при боковом заносе автомобиля, движущегося с заблокированными колесами (так называемый «юз» машины).

Проекция силы трения на направление возможного соскальзывания тела (см. рис. 2.12)

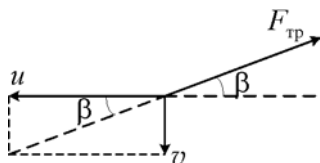


Рис. 2.12

$$(F_{\text{тр}})_v = \mu mg \cos \alpha \sin \beta = \mu mg \cos \alpha \frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}}.$$

Как только она станет равной проекции силы тяжести $mg \sin \alpha$, тут же начнется соскальзывание тела с почти постоянной скоростью:

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha \frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}}.$$

Из данного равенства легко найти и установившуюся скорость тела:

$$v = \frac{u \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

2.2.3. Торможение частиц. Частицы массой m попадают в область, где на них действует встречная тормозящая сила. Глубина проникновения частиц l зависит от их импульса p : $l = \alpha p$, где α – заданная постоянная. Найти зависимость модуля тормозящей силы от глубины проникновения частиц x .

Определение силы, действующей на частицу, по заданному характеру ее движения предполагает явное обращение ко второму закону Ньютона $F = ma$. Однако в данной задаче нам не известен характер движения частиц, а известно только начальное значение импульса p и его конечное значение, равное нулю. Поэтому разумно несколько видоизменить второй закон Ньютона так, чтобы в него входила информация о начальной и конечной точках движения. С этой целью помножим уравнение $F = ma$ на бесконечно малое перемещение dx и проинтегрируем по всему пути движения частиц:

$$\int ma \, dx = - \int_0^l F(x) dx ,$$

где $F(x)$ и есть искомая зависимость модуля силы торможения от координаты x . С учетом определения ускорения $a = \frac{dv}{dt}$ преобразуем левую часть последнего равенства:

$$\int ma \, dx = \int m \frac{dv}{dt} dx = \int d \left(\frac{mv^2}{2} \right) .$$

В итоге приходим к интегральному уравнению относительно $F(x)$:

$$\frac{p^2}{2m} = \int_0^l F(x) dx . \quad (1)$$

Так как по условию задачи начальный импульс частиц p пропорционален пути торможения l , то единственной возможной зависимостью $F(x)$ является линейная зависимость: $F(x) = Cx$, где C – некоторая константа. Подставляя предполагаемую зависимость $F(x) = Cx$ в уравнение (1), находим, что константа C должна удовлетворять условию

$$\frac{p^2}{2m} = C \frac{l^2}{2} .$$

Откуда находим

$$C = \frac{p^2}{ml^2} = \frac{1}{m\alpha^2}.$$

И окончательно

$$F(x) = \frac{x}{m\alpha^2}.$$

2.2.4. Тело возле вертикальной стенки. Небольшое тело скользит по гладкой горизонтальной поверхности вдоль вертикальной стенки (рис. 2.13, вид сверху). Закругленная часть вертикальной стенки представляет собой дугу с углом $\alpha = 60^\circ$. За счет трения о вертикальную стенку скорость тела упала в 2 раза при движении от точки 1 до точки 2. Найти коэффициент трения μ .

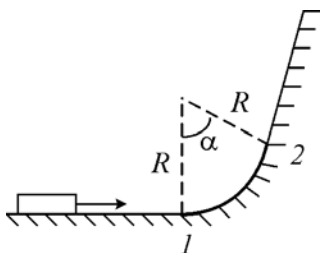


Рис. 2.13

На движение тела со стороны вертикальной стенки от точки 1 до точки 2 влияют две силы – сила трения $F_{\text{тр}}$ и сила нормального давления N . Траектория представляет собой окружность, поэтому есть смысл записать для тела второй закон Ньютона в проекциях на касательную и нормаль к стенке.

$$m \frac{dv}{dt} = -F_{\text{тр}}, \quad \frac{mv^2}{R} = N.$$

С учетом того, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, данная система уравнений сводится к одному уравнению:

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu \frac{mv^2}{R}. \quad (1)$$

Интегрируя данное уравнение, можно найти зависимость скорости тела от времени. Но так как нам необходима зависимость скорости тела от угла поворота, то следует переписать уравнение (1) так, что-

бы в него входило не время движения, а угол поворота. Сделаем это следующим образом:

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{Rd\alpha}{v}, \quad (2)$$

где $dl = Rd\alpha$ – бесконечно малая дуга поворота. Подставляя (2) в (1), приходим к уравнению

$$\frac{dv}{v} = -\mu d\alpha.$$

После интегрирования по углу и скорости с учетом данных задачи получаем

$$\mu = \frac{\ln 2}{\alpha} = 0,66.$$

2.2.5. Нить с трением. Через закрепленный блок перекинута нить, к концам которой прикреплены две чашечки массой M (рис. 2.14). Между нитью и блоком есть трение с коэффициентом трения μ . Груз какой минимальной массы m нужно положить на одну из чашек, чтобы вся система пришла в движение?

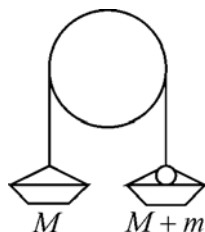


Рис. 2.14

Понятно, что движение начнется в том случае, если разность сил натяжения участков нити, не касающихся блока, будет равна силе трения скольжения нити о блок. Так как мы будем рассматривать самое начало скольжения, то разность сил натяжения нити T_1 и T_2 будет равна mg . Определить же силу трения скольжения не совсем просто. Дело в том, что сила трения различных участков нити, касающихся блока, плавно изменяется от точки к точке за счет изменения силы натяжения нити. Поэтому в подобных задачах поступают следующим образом.

Выделим произвольный малый элемент нити, касающийся блока (рис. 2.15). Это элемент виден из центра блока под углом $d\alpha$. На него действуют несколько сил – силы натяжения слева (T) и справа

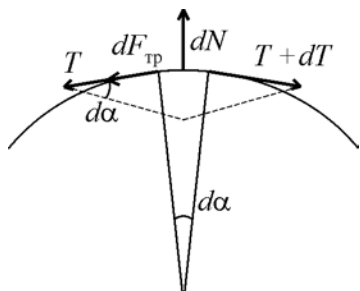


Рис. 2.15

$(T + dT)$, сила трения $dF_{\text{тр}}$ и сила реакции со стороны блока dN . Так как нить предполагается невесомой, то сумма всех этих сил (или их проекций на произвольное направление) должна быть равна нулю. Это сразу следует из второго закона Ньютона для данного элемента нити. В проекции на касательную к элементу имеем

$$dT = dF_{\text{тр}}. \quad (1)$$

Если же спроектировать силы на нормаль к блоку, то видно, что сила реакции dN должна быть уравновешена суммой проекций сил натяжения на это же направление. Принимая элемент нити за точку, легко увидеть, что

$$dN = T d\alpha. \quad (2)$$

Учитывая, что $dF_{\text{тр}} = \mu dN$, систему уравнений (1) и (2) можно свести к одному уравнению:

$$\frac{dT}{T} = \mu d\alpha.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\pi} d\alpha.$$

Откуда следует

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu \pi.$$

Учитывая, что $T_2 = (M + m)g$, а $T_1 = Mg$, приходим к соотношению

$$\ln \frac{M + m}{M} = \mu \pi.$$

После потенцирования находим

$$m = M(e^{\mu\pi} - 1).$$

Полученный ответ наглядно показывает, что большому натяжению каната, обмотанному вокруг какого-либо столба, можно противодействовать с другого конца даже небольшой силой. Это связано с тем, что сила трения возрастает с увеличением угла охвата каната по экспоненциальному закону (жалко, что такой способ преобразования силы является существенно необратимым, в отличие от таких механизмов, как рычаг, ворота и т. п.).

2.2.6. Погрузка песка в движущуюся тележку. По гладким горизонтальным рельсам катится со скоростью v_0 тележка массой m и длиной l (рис. 2.16). Из неподвижного бункера на нее начинает высыпаться песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ кг/с. Какая масса песка успеет насыпаться на тележку за время ее движения?

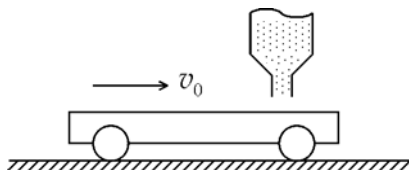


Рис. 2.16

Выберем в качестве системы отсчета землю. В данной системе отсчета присоединяемая масса песка не имеет горизонтальной скорости, но относительно тележки ее скорость равна скорости тележки со знаком минус. В этом случае движение тела с переменной массой принимает вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \left(\frac{dm}{dt} \right) \vec{v} = \vec{F},$$

или

$$\frac{d}{dt} [m(v) \vec{v}] = \vec{F}.$$

Так как мы пренебрегаем трением тележки о рельсы, то сумма всех внешних сил равна нулю. Тогда произведение полной массы

тележки с песком на ее скорость сохраняется неизменным во время движения.

$$mv = \text{const} . \quad (1)$$

Распишем соотношение (1) более подробно:

$$mv_0 = (m + \mu t) v(t) ,$$

где $v(t)$ – скорость тележки в произвольный момент времени.

Для того чтобы найти массу насыпавшегося песка, необходимо знать, за какое время тележка успеет пройти путь, равный своей длине. Так как движение тележки происходит с переменной скоростью

$$v(t) = \frac{mv_0}{m + \mu t} , \quad (2)$$

то время насыпания песка t_0 можно определить из условия

$$\int_0^{t_0} v(t) dt = l .$$

Подставляя сюда зависимость $v(t)$ и интегрируя, находим

$$t_0 = \frac{m}{\mu} \left[\exp \left(\frac{\mu l}{mv_0} \right) - 1 \right] .$$

Таким образом, за время движения тележки в нее насыплется масса песка

$$M = \mu t_0 = m \left[\exp \left(\frac{\mu l}{mv_0} \right) - 1 \right] .$$

2.2.7. Бусинка на вращающемся кольце. На гладкое проволочное кольцо радиусом R надета маленькая бусинка. Кольцо начинают медленно раскручивать до угловой скорости ω вокруг вертикальной оси, проходящей по диаметру кольца. Где остановится бусинка?

Рассмотрим движение бусинки в системе отсчета, связанной с вращающимся кольцом. Это неинерциальная система отсчета

и в ней на бусинку будут действовать три силы – сила тяжести mg , сила реакции со стороны кольца N и центробежная сила инерции $F_{цб}$. Понятно, что возможное движение бусинки вдоль кольца будет определяться проекцией всех этих сил F_τ на направление касательной к кольцу. На рис. 2.17 видно, что

$$F_\tau = F_{цб} \cos \theta - mg \sin \theta.$$

С учетом того, что $F_{цб} = m\omega^2 R \sin \theta$, перепишем предыдущее выражение:

$$F_\tau = m\omega^2 R \sin \theta \left[\cos \theta - \frac{g}{\omega^2 R} \right]. \quad (1)$$

Условию равновесия, т.е. положению, где остановится бусинка, соответствует $F_\tau = 0$. Из соотношения (1) видно, что это возможно при двух значениях угла θ_0 : $\sin \theta_0 = 0$ и $\cos \theta_0 = g/\omega^2 R$. Так где же остановится бусинка? Для этого нужно проанализировать устойчивость (или неустойчивость) найденных положений. Известно, что для устойчивости найденного положения равновесия необходимо, чтобы появившаяся сила δF_τ при небольшом отклонении от положения равновесия (в любую сторону) была направлена к положению равновесия. При малых отклонениях $d\theta$ от положения равновесия θ_0 возникающую силу δF_τ можно найти как дифференциал выражения (1):

$$\delta F_\tau = m\omega^2 R \left[\cos \theta_0 \left(\cos \theta_0 - \frac{g}{\omega^2 R} \right) - \sin^2 \theta_0 \right] d\theta.$$

В нижнем положении равновесия ($\theta_0 = 0$)

$$\delta F_\tau \sim \left(1 - \frac{g}{\omega^2 R} \right) d\theta.$$

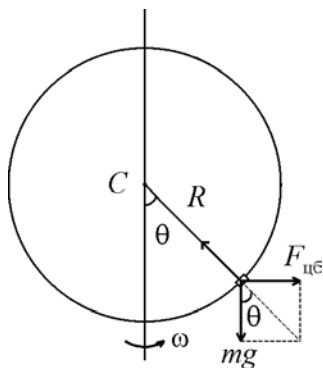


Рис. 2.17

Для устойчивости этого положения равновесия необходимо, чтобы знак δF_τ был противоположен знаку $d\theta$. Это произойдет, если $1 - g/\omega^2 R < 0$, т.е. при $\omega < \sqrt{g/R}$.

Для другого положения равновесия ($\cos\theta_0 = g/\omega^2 R$) знак δF_τ всегда противоположен знаку $d\theta$. Значит, это положение равновесия (если оно существует) всегда устойчиво.

Итак, до достижения угловой скоростью значения $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ бусинка будет оставаться внизу кольца. Как только угловая скорость превысит значение ω_0 нижнее положение равновесия становится неустойчивым и бусинка переходит в верхнее положение, определяемое условием $\cos\theta_0 = g/\omega^2 R$.

2.2.8. Бруски, соединенные пружинкой. На гладкой горизонтальной плоскости находятся два одинаковых бруска, соединенных недеформированной пружинкой жесткости k и длиной l . На один

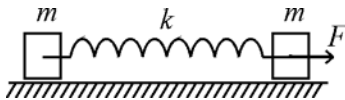


Рис. 2.18

из брусков начали действовать постоянная горизонтальная сила F (рис. 2.18). Найти максимальное и минимальное расстояние между брусками при их движении.

С точки зрения неподвижной системы отсчета на ускоренное движение брусков под действием постоянной силы F накладываются еще и колебания под действием силы упругости. Для упрощения анализа воспользуемся тем, что расстояние между телами не зависит от системы отсчета, и поэтому разумно перейти в неинерциальную систему отсчета, связанную с центром масс этой системы (точка C на рис. 2.19). В этой системе

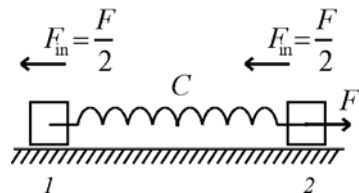


Рис. 2.19

отсчета кроме сил, обусловленных взаимодействием, появляется еще и сила инерции:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_c, \quad (1)$$

где a_c — ускорение неинерциальной

системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета, равное ускорению центра масс под действием постоянной силы F :

$$a_c = F/2m. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что сила инерции, действующая на каждое тело, $F_{\text{ин}} = F/2$. Таким образом, относительно неподвижной для нас точки C , которая находится посередине между брусками, на каждое тело кроме силы упругости действуют противоположно направленные силы, равные $F/2$. Это сразу позволяет сказать, что минимальное расстояние между брусками будет равно исходной длине пружины. А для определения максимального расстояния необходимо решить довольно простую задачу.

На тело, связанное со стенкой пружиной жесткости $2k$ (это жесткость пружины длиной $l/2$), подействовали постоянной силой $F/2$ (рис. 2.20). Каково максимальное удлинение пружины?



Рис. 2.20

Самая распространенная ошибка здесь заключается в том, что в точке остановки тела принимают равенство силы упругости и внешней силы. На самом деле при равенстве этих сил обращается в нуль ускорение, а скорость будет иметь максимальное значение. Для того чтобы тело остановилось, оно должно пройти еще точно такое же расстояние. Таким образом, максимальное удлинение половины исходной пружинки жесткостью $2k$ под действием силы $F/2$ будет равно $2 \frac{F/2}{2k} = \frac{F}{2k}$, полное удлинение всей пружины будет в 2 раза больше, а максимальное расстояние между брусками будет равно $l + F/k$.

2.2.9. Кольцевая цепочка с трением. Кольцевая цепочка массы m надета на горизонтальный диск радиусом R . Сила натяжения цепочки T , коэффициент трения между диском и цепочкой μ . При какой угловой скорости вращения диска цепочка спадет с него?

Во многих задачах всегда полезно представлять развитие ситуации во времени. Это позволит лучше понять характер возникающих сил и то, что происходит при их изменении. В данном случае мы ведь не сразу пришли к состоянию с конечной угловой скоростью. Вначале, еще до раскручивания диска, натянутая цепочка прижимается к диску и за счет трения способна удержаться на его периферии (стащить цепочку вниз пытается сила тяжести). При раскрутке диска появляется центробежная сила, которая ослабит давление цепочки на диск, и, естественно, при некоторой угловой скорости цепочка спадет с диска.

Рассмотрим теперь, что происходит вблизи какого-либо малого элемента цепочки длиной $dl = R d\alpha$ (рис. 2.21). В горизонтальной плоскости на данный элемент действуют две силы натяжения T ,

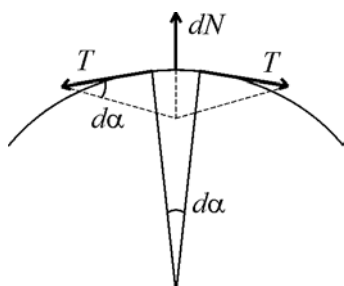


Рис. 2.21

сумма которых равна $T d\alpha$. Сила $T d\alpha$ уравновешена силой давления со стороны диска dN . По вертикали также действуют две силы – сила тяжести dmg и сила трения $dF_{\text{тр}} = \mu dN$. Условие спадания цепочки, очевидно, следующее:

$$\mu dN = dmg$$

или

$$\mu T d\alpha = dmg.$$

Вращение цепочки с угловой скоростью ω приведет к появлению центробежных сил, которые, очевидно, ослабят давление цепочки на диск. Тогда новая сила давления dN' будет меньше старой dN на величину $dF_{\text{цб}} = dm\omega^2 R$, т.е.

$$dN' = dN - dm\omega^2 R,$$

где $dN = T d\alpha$.

В итоге условие соскальзывания цепочки примет вид

$$\mu(T d\alpha - dm\omega^2 R) = dmg. \quad (1)$$

Представляя массу бесконечно малого элемента цепочки dm в виде

$$dm = \frac{m}{2\pi} d\alpha, \text{ перепишем уравнение (1):}$$

$$\mu \left(T d\alpha - \frac{m}{2\pi} d\alpha \omega^2 R \right) = \frac{m}{2\pi} d\alpha g.$$

Откуда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{2\pi\mu T - mg}{\mu mg}}.$$

Понятно, что полученный ответ справедлив в том случае, если исходная сила натяжения не меньше $mg/2\pi\mu$.

2.2.10. Ящик с песком. На горизонтальной плоскости находится ящик с песком массы M . Коэффициент трения о плоскость μ . Под углом α к вертикали в ящик влетает со скоростью v пуля массы m и почти мгновенно застревает в песке. Через какое время после попадания пули в ящик он остановится (если вообще сдвинется с места)?

На первый взгляд задача кажется очень простой. Вначале применим закон сохранения импульса и находим начальную скорость ящика. Затем, зная ускорение ящика, обусловленное силой трения (оно равно μg), находим, за какое время скорость ящика упадет до нуля. Этот «очевидный» план здесь не сработает. Дело в том, что мы не имеем права применять закон сохранения импульса к процессу соударения пули и ящика. Ведь главное условие применимости данного закона заключается в изолированности рассматриваемой системы тел. А она как раз и не является изолированной – есть сила трения ящика о плоскость. И, как ни парадоксально, чем меньше время застревания пули в песке τ , тем больше влияние силы трения на процесс разгона ящика. Это связано с тем, что при уменьшении времени застревания пули возрастает сила давления ящика на поверхность, что соответственно ведет к росту силы трения в интервале времени τ (для того чтобы остановить пулю за меньшее время, нужна большая сила).

В связи с изложенным запишем вначале второй закон Ньютона для пули. В процессе застревания на пулю со стороны песка (и соответственно на ящик) будут действовать две силы – горизонтальная F_x

и вертикальная F_y (рис. 2.22). Эти силы подчиняются уравнениям:

$$\begin{aligned}\tau F_x &= \Delta p_x = mv \sin \alpha, \\ \tau F_y &= \Delta p_y = mv \cos \alpha.\end{aligned}\quad (1)$$

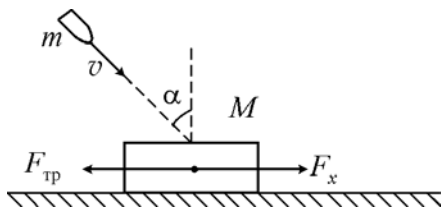


Рис. 2.22

На приобретенную ящиком скорость u влияют две противоположно направленные силы F_x

и $F_{\text{тр}}$, так что полная горизонтальная сила, действующая на ящик,

$$F = F_x - F_{\text{тр}},$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N$, N – сила давления ящика на поверхность,

$$N = Mg + F_y = Mg + \frac{mv \cos \alpha}{\tau}.$$

Пренебрегая слагаемым Mg по сравнению со вторым слагаемым $\sim 1/\tau$, запишем для ящика в интервале времени τ второй закон Ньютона:

$$\frac{mv \sin \alpha}{\tau} - \mu \frac{mv \cos \alpha}{\tau} = (M + m) \frac{u}{\tau}$$

(при этом мы явно опирались на соотношения (1)). Откуда легко найти скорость, приобретенную ящиком в процессе застревания пули:

$$u = \frac{mv(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{M + m}.$$

При дальнейшем торможении ящика под действием силы трения, обеспечивающей ускорение μg , он остановится за время

$$t = \frac{u}{\mu g} = \frac{mv(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{M + m}.$$

Из полученного ответа следует, что если $\operatorname{tg} \alpha < \mu$, то ящик вообще не сдвинется с места.

2.2.11. Рыбак в лодке. Существует классическая задача о перемещении лодки при движении по ней рыбака. На носу лодки массой M и длиной l находится рыбак массой m . На сколько переместится лодка относительно воды, если рыбак перейдет на корму?

Обычно данную задачу решают, пренебрегая сопротивлением воды. Мы же учтем наличие силы сопротивления воды, полагая ее пропорциональной скорости лодки $F_{\text{сопр}} = -rV$, где r – коэффициент сопротивления.

Рассмотрим вначале ситуацию при отсутствии силы сопротивления воды. Пусть рыбак движется по лодке с некоторой постоянной скоростью v относительно воды. Так как система рыбак–лодка является замкнутой, то в силу закона сохранения импульса векторная сумма импульсов рыбака и лодки в любой момент времени должна быть равна нулю. Это означает, что всегда выполняется равенство

$$mv = MV_0, \quad (1)$$

где V_0 – скорость лодки, равная ее пути l_0 , деленному на время движения t_0 . Скорость же рыбака равна его пути $l - l_0$, деленному на t_0 . Из (1) получаем

$$\frac{m(l - l_0)}{t_0} = M \frac{l_0}{t_0}.$$

Откуда находим, что перемещение лодки к моменту окончания движения рыбака

$$l_0 = \frac{ml}{m + M}. \quad (2)$$

При остановке рыбака опять же в силу закона сохранения импульса обратится в нуль и скорость лодки, т.е. значение l_0 и будет равно полному перемещению лодки.

«Включим» теперь сопротивление воды. В этом случае равенство (1) будет выполняться только в момент начала движения рыбака и значение V_0 дает только стартовую скорость лодки (на ее значение сила сопротивления воды не успеет оказать влияние). Дальнейшее движение лодки при наличии силы сопротивления подчиняется второму закону Ньютона:

$$M \frac{dV}{dt} = -rV.$$

Интегрируя это уравнение с учетом начальной скорости V_0 , получим закон изменения скорости лодки:

$$V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{M} r\right). \quad (3)$$

Перемещение лодки l'_0 до того момента, когда рыбак дойдет до другого ее конца,

$$l'_0 = \int_0^{t_0} V(t) dt, \quad (4)$$

где t_0 – время движения рыбака, равное $(l - l'_0)/v$.

Подставляя закон изменения скорости лодки (3) в выражение (4), получаем

$$l'_0 = \frac{MV_0}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t_0 r}{M}\right) \right],$$

или с учетом равенства (1)

$$l'_0 = \frac{mv}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t_0 r}{M}\right) \right]. \quad (5)$$

Полученное уравнение является трансцендентным относительно l'_0 (его значение входит также и в показатель экспоненты). Но при малых значениях коэффициента сопротивления r уравнение (5) легко решить относительно l'_0 . С учетом равенства $\exp(x) \approx 1 - x$ получаем

$$l'_0 = \frac{mv}{r} \frac{t_0 r}{M} = \frac{mv}{M} \frac{l - l'_0}{v} = \frac{m}{M} (l - l'_0).$$

Откуда

$$l'_0 = \frac{ml}{m + M},$$

т.е. в точности совпадает с выражением (2), и перемещение лодки до того момента, когда рыбак дойдет до другого ее конца, оказывается таким же, как и без сопротивления воды.

Применим теперь закон сохранения импульса к моменту окончания движения рыбака, т.е. к его неупругому столкновению с кормой лодки:

$$-mv + MV = (m + M)V'_0,$$

где V – скорость лодки к моменту окончания движения рыбака, определяемая выражением (3) при $t = t_0$; V'_0 – начальная скорость обратного движения лодки с рыбаком. Откуда находим

$$V'_0 = \frac{|-mv + MV|}{m + M} = \frac{\left| -mv + MV_0 \exp\left(-\frac{t_0 r}{M}\right) \right|}{m + M} = \frac{mv}{m + M} \left[1 - \exp\left(-\frac{t_0 r}{M}\right) \right]. \quad (6)$$

Заметим, что при $r = 0$ эта скорость обращается в нуль, т.е. при отсутствии сопротивления воды лодка не начнет обратного движения.

Найдем теперь обратное перемещение лодки $l_{\text{обр}}$ при $r \neq 0$:

$$l_{\text{обр}} = \int_0^{t_{\text{обр}}} V' dt = \int_0^{t_{\text{обр}}} V'_0 \exp\left(-\frac{tr}{M + m}\right) dt,$$

где $t_{\text{обр}}$ – время обратного движения лодки до остановки. Теоретически это время равно бесконечности, но реально оно составляет конечную (хотя и большую) величину. После интегрирования получаем

$$l_{\text{обр}} = \frac{V'_0(M + m)}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{M + m} t_{\text{обр}}\right) \right].$$

С учетом соотношений (5) и (6) обратное перемещение лодки

$$l_{\text{обр}} = l'_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{r}{M + m} t_{\text{обр}} \right) \right]. \quad (7)$$

Так как время обратного движения достаточно большое, то при $r \neq 0$ значение $l_{\text{обр}} \rightarrow l'_0$. Следовательно, полное перемещение лодки (туда и обратно) при наличии сопротивления воды оказывается равным нулю!

После решения задачи всегда полезно исследовать поведение полученного решения в некоторых предельных частных случаях. В нашем варианте необходимо посмотреть, что происходит с выражением (7) при $r \rightarrow 0$. Если мы сразу положили бы $t_{\text{обр}} = \infty$, то возникает неопределенность в показателе экспоненты в выражении (7). Сейчас же очевидно, что при $r \rightarrow 0$ обратное перемещение также стремится к нулю, а полное перемещение лодки оказывается тем же, что и при отсутствии сопротивления воды.

Если бы нас не интересовала детальная картина движения лодки, то определить ее полное перемещение можно очень просто из второго закона Ньютона: $\int F_{\text{сопр}} dt = \Delta p_{\text{сист}}$, где $F_{\text{сопр}}$ – единственная внешняя горизонтальная сила, приложенная к системе рыбак–лодка, $F_{\text{сопр}} = -rV$; $\Delta p_{\text{сист}}$ – изменение импульса этой системы за все время движения. Понятно, что в итоге изменение импульса всей системы должно обратиться в нуль, а это означает, что

$$\int rV(t) dt = 0.$$

Если вспомнить, что интеграл от скорости это и есть перемещение, то видно, что полное перемещение лодки при $r \neq 0$ должно быть равно нулю.

2.2.12. Встающая кобра. С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v ? Масса кобры m , ее длина l .

Подобные задачи представляют определенные трудности, так как в движение приходят не все части системы. Тут обычно посту-

пают следующим образом. Рассматривают некоторое произвольное состояние системы и определяют, какие произошли изменения за бесконечно малый интервал времени dt . Затем применяют второй закон Ньютона в виде $Fdt = dp$. Так и поступим.

Пусть в некоторый момент времени длина поднявшейся части кобры равна x (рис. 2.23). В этот момент на кобру действуют две противоположно направленные силы – сила тяжести mg и сила реакции опоры F (она равна силе давления кобры на землю). За бесконечно малый интервал времени dt в движение дополнительно пришла часть кобры длиной $dx = v dt$. Таким образом, изменение импульса за время dt составит $dp = \gamma dxv = \gamma v^2 dt$, где γ – линейная плотность массы, равная m/l . Тогда второй закон Ньютона для встающей кобры можно записать в виде

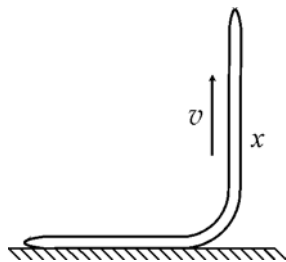


Рис. 2.23

$$(F - mg)dt = \frac{m}{l} v^2 dt.$$

Откуда находим

$$F = mg + \frac{mv^2}{l}.$$

2.2.13. Падающая цепочка. Однородная цепочка длиной l и массой m подвешена на нити так, что другим концом она касается стола. Нить пережигают. Найти зависимость силы давления цепочки на стол от длины еще не упавшей ее части. Считать удар звеньев о стол неупругим.

Поступим здесь аналогично предыдущей задаче с той лишь разницей, что теперь скорость движения не остается постоянной (происходит свободное падение звеньев с ускорением g). Пусть x – длина

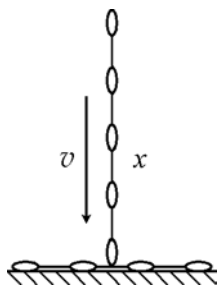


Рис. 2.24

падающей части цепочки (рис. 2.24). Тогда за время dt изменение импульса составит

$$dp = \gamma(x - dx)(v + dv) - \gamma xv,$$

где γ – линейная плотность массы, равная m/l ; dx – уменьшение длины движущейся со скоростью v части цепочки; dv – изменение скорости падения за время dt . Пренебрегая величинам второго порядка малости и учитывая, что $dx = v dt$,

запишем второй закон Ньютона:

$$(\gamma lg - F)dt = -\gamma v^2 dt + \gamma x dv, \quad (1)$$

где F – искомая сила давления цепочки о стол. Так как происходит свободное падение звеньев цепочки, то $v = \sqrt{2g(l - x)}$, а $dv = g dt$.

Таким образом, соотношение (1) примет вид

$$(\gamma lg - F)dt = -\gamma 2g(l - x)dt + \gamma x g dt.$$

Откуда находим

$$F = 3\gamma g(l - x) = 3\frac{mg}{l}(l - x).$$

2.2.14. Цепочка, выскальзывающая из трубы. Однородная цепочка длины l находится в гладкой горизонтальной трубе так, что часть ее длины h свободно свешивается, касаясь своим концом поверхности стола (рис. 2.25). С какой скоростью она будет двигаться в момент полного выскальзывания из трубы?

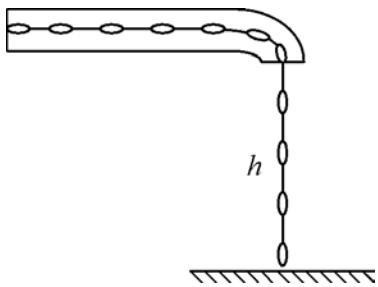


Рис. 2.25

Пусть x – длина находящейся в трубе в произвольный момент времени части цепочки, имеющей скорость v . При движении цепочки на нее действуют две силы – сила тяжести γgh (γ – линейная плотность мас-

сы) и сила давления со стороны стола F . Силы, приложенные со стороны гладкой трубы, можно не учитывать, так как они не могут изменить скорость цепочки. Сейчас нас не интересует сила давления цепочки на стол, но она все равно существует. Эту силу можно учесть следующим образом. Она должна «съесть» импульс упавших со скоростью v за время dt звеньев цепочки, а ее произведение на время dt должно быть равным γdxv , где dx – уменьшение длины движущейся части цепочки. Таким образом, второй закон Ньютона для цепочки будет выглядеть как:

$$(\gamma gh - F)dt = \gamma(h + x)(v + dv) - \gamma dxv - \gamma(h + x)v.$$

После небольших преобразований, с учетом сказанного ранее о силе давления, получаем

$$ghdt = (h + x)dv.$$

Проведя замену $dt = -dx/v$ (значение dx отрицательно), приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$$-gh \frac{dx}{v} = (h + x)dv.$$

Интегрируя это уравнение по скорости от нуля до v и по x от нуля до $l - h$, получаем

$$v = \sqrt{2gh \ln \frac{l}{h}}.$$

Перейдем теперь к задачам, связанным с вращательным движением твердого тела.

2.2.15. Стержень на нитях. Горизонтально расположенный тонкий однородный стержень массой m подвешен за концы на двух вертикальных нитях. Найти силу натяжения одной из нитей сразу после пережигания другой нити.

До пережигания одной из нитей две одинаковые силы натяжения были уравновешены силой тяжести mg . После пережигания осталась сила тяжести, приложенная в середине стержня C , и сила

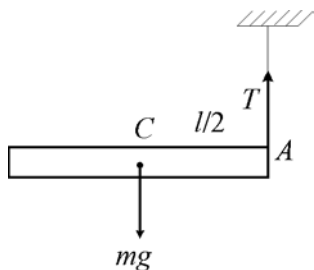


Рис. 2.26

натяжения оставшейся нити T . Теперь эти силы не уравновешены, так как начинается вращение стержня с некоторым угловым ускорением. Условие «найти силу натяжения сразу после пережигания нити» означает, что точка приложения силы T (точка A на рис. 2.26) не успела никуда сместиться, и она является мгновенной осью вращения (выберем ее направление из чертежа). Движение центра масс стержня определяется вторым законом Ньютона:

$$mg - T = ma_c. \quad (1)$$

Вращательное же движение стержня относительно точки A определяется основным законом динамики вращательного движения твердого тела:

$$M = I\varepsilon, \quad (2)$$

где M – сумма моментов всех внешних сил; I – момент инерции стержня относительно точки A ; ε – угловое ускорение стержня. Так как мы выбрали ось вращения, направленную из чертежа, то уравнение (2) запишется в виде

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{3} ml^2 \varepsilon$$

(при этом мы воспользовались теоремой Штейнера).

Система уравнений (1) и (2) является недостаточной для определения силы натяжения T (уравнений два, а неизвестных три – T, a_c и ε). При решении задач о движении несвободного твердого тела используют еще одно дополнительное условие, определяющее ограничение движения имеющимися связями. В нашем случае можно записать кинематическую связь между линейным и угловым ускорениями:

$$\varepsilon = \frac{a_c}{l/2}. \quad (3)$$

Совместное решение уравнений (1)–(3) дает

$$T = \frac{mg}{4}.$$

2.2.16. Фехтование палками. Каким местом при фехтовании палками нужно ударять их друг о друга, чтобы не почувствовать отдачи? Принять палки за однородные тонкие стержни.

Данная задача является типичной реальной задачей, в которой некоторое условие, заданное в качественной форме, необходимо представить в виде какого-либо явного математического или физического соотношения. При ударе палкой отдача ощущается по движению конца палки, находящегося в руке. Понятно, что отдачи не будет, если мгновенная ось вращения при нанесении удара по какой-либо точке палки будет находиться на конце палки, находящемся в руке. Таким образом, формализованная постановка задачи будет следующей. Найти точку приложения силы F к свободному стержню длиной l , такую, что при движении стержня мгновенная ось вращения проходила бы через его конец (точка O , рис. 2.27).

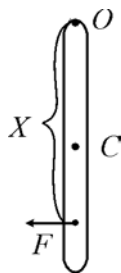


Рис. 2.27

Динамика движения центра масс стержня определяется уравнением

$$F = ma_c,$$

а его вращательное движение относительно точки O – уравнением

$$Fx = \frac{1}{3}ml^2\varepsilon.$$

В связи со сказанным ранее (точка O должна являться осью вращения) запишем связь ускорений:

$$a_c = \varepsilon l / 2.$$

Из решения данной системы уравнений следует, что удар нужно нанести на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от руки.

2.2.17. Падающий стержень. Однородный стержень, падая в горизонтальном положении с некоторой высоты, упруго ударяется одним концом о край массивной плиты. В момент удара его скорость равна v . Найти скорость центра стержня C сразу после удара.

На рис. 2.28, *а* отображена ситуация за мгновение до удара, когда все точки стержня имели одинаковую скорость. После упругого удара (по его определению) ударившийся конец приобретает

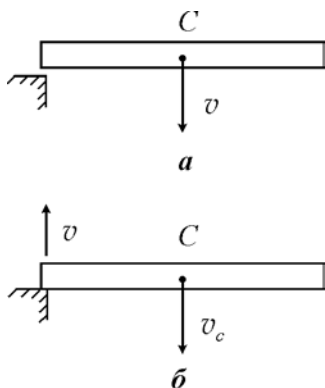


Рис. 2.28

скорость, равную по модулю и противоположную по направлению его же скорости до удара. В каком же направлении (вверх или вниз) будет двигаться центр инерции стержня, предугадать трудно, так как возникает вращательное движение стержня. Поэтому выберем некоторое произвольное направление вектора v_c (пусть, например, сверху вниз, рис. 2.28, *б*) и запишем второй закон Ньютона для центра масс стержня C , при этом нужно помнить, что удар по стержню был нанесен снизу вверх (это направление задает

нам направление проектирования скоростей):

$$F\tau = m\Delta v = m[-v_c - (-v)], \quad (1)$$

где F – сила удара длительностью малое время τ (силой тяжести в момент удара можно пренебречь).

После удара возникает вращательное движение стержня, но где находится ось вращения, нам неизвестно. Поэтому запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр инерции стержня:

$$F \frac{l}{2} \tau = I_c \Delta \omega, \quad (2)$$

где I_c – момент инерции стержня относительно центра инерции, равный $\frac{ml^2}{12}$, а $\Delta \omega$ представляет изменение угловой скорости

стержня за время удара. Так как до удара стержень не вращался, то $\Delta\omega$ равно просто его приобретенной угловой скорости ω . Опираясь на связь линейной и угловой скорости, нетрудно показать, что стержень получает угловую скорость, равную $\frac{v+v_c}{l/2}$. Для этого предположим, что ось вращения находится на расстоянии x от левого конца стержня. Тогда угловая скорость $\omega = v/x$. С другой стороны, эта же угловая скорость должна быть $\omega = \frac{v_c}{l/2 - x}$. Из этих уравнений, исключая величину x , легко найти угловую скорость. Таким образом, уравнение (2) запишется в виде

$$F \frac{l}{2} \tau = \frac{1}{12} m l^2 \frac{v+v_c}{l/2}. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1) и (3) относительно v_c , получаем

$$v_c = \frac{v}{2}.$$

Так как знак ответа положителен, то центр инерции стержня C после удара должен двигаться вниз, как отображено на рис. 2.28, б. Легко проверить, что если вектор v_c изначально направить вверх, то при выбранном направлении проектирования снизу вверх знак ответа будет отрицательным.

2.2.18. Падающий диск. Однородный диск радиусом R , вращаясь вокруг своей оси с угловой скоростью ω , падает в вертикальном положении на горизонтальную поверхность и отскакивает под углом θ к вертикали, уже не вращаясь (рис. 2.29). Найти скорость диска сразу после удара.

При ударе на диск действуют две силы (если пренебречь силой тяжести) – сила нормального давления со стороны поверхности (она обеспечивает отскок) и сила трения F , касательная к поверхности. О силе трения ничего не сказано в условии,

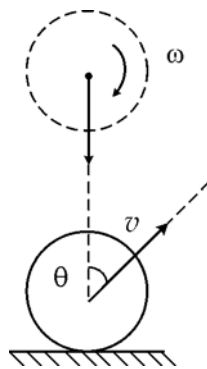


Рис. 2.29

но тогда что же прекратит вращение диска? Пусть время контакта диска с поверхностью равно τ . Тогда второй закон Ньютона в проекции на горизонтальное направление будет иметь вид

$$F\tau = mv\sin\theta.$$

Кроме того, сила трения должна уменьшить угловую скорость диска от ω до нуля, а это означает, что выполняется соотношение

$$FR\tau = \frac{1}{2}mR^2\omega,$$

где $\frac{1}{2}mR^2$ – момент инерции диска, относительно его центра. Из этих уравнений находим

$$v = \frac{R\omega}{2\sin\theta}.$$

2.2.19. Катушка с нитками. На горизонтальной шероховатой поверхности лежит катушка ниток массой m . Ее момент инерции относительно собственной оси I , внешний радиус R , радиус намотанного слоя ниток r . Катушку без скольжения начали тянуть за нить с постоянной силой F , направленной под углом α к горизонту (рис. 2.30). Найти ускорение центра катушки.

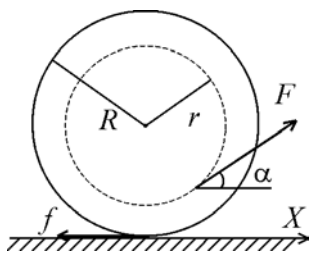


Рис. 2.30

Заметим, что слова «движение без скольжения» всегда означают, что существует сила трения f . Мы не знаем, в каком направлении будет двигаться катушка, это можно выяснить только после окончательного решения задачи. Поэтому будем искать проекцию ускорения на ось X (ее знак и даст направление движения катушки). Если направить ось вращения катушки Z за чертеж, то уравнения динамики катушки будут иметь вид

$$\begin{aligned} F\cos\alpha - f &= ma_x, \\ fR - Fr &= I\varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как движение происходит без скольжения, значит, есть кинематическая связь линейного и углового ускорений

$$a_x = \varepsilon R. \quad (2)$$

Из системы уравнений (1), (2) следует

$$a_x = \frac{F \left(\cos \alpha - \frac{r}{R} \right)}{m + \frac{I}{R^2}}.$$

Отсюда видно, что катушка покатится вправо ($a_x > 0$), если $\cos \alpha > r/R$, и влево, если $\cos \alpha < r/R$.

2.2.20. Катящееся кольцо. Тонкое кольцо радиусом R и массой m раскрутили до угловой скорости ω_0 и осторожно поставили в вертикальном положении на горизонтальную поверхность (рис. 2.31). Как будет двигаться кольцо, если коэффициент трения кольца и плоскости равен μ ?

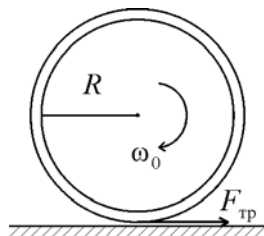


Рис. 2.31

За счет силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu mg$ кольцо начнет разгоняться до некоторой скорости v^* , а его угловая скорость будет уменьшаться от ω_0 до ω^* . Как только выполнится условие отсутствия проскальзывания, скорость самой нижней точки кольца обратится в нуль. После этого кольцо будет двигаться равномерно с постоянной угловой скоростью $\omega^* = v^* / R$. Запишем для кольца уравнения динамики:

$$\mu mg = ma,$$

$$\mu mgR = mR^2 \varepsilon.$$

Линейное ускорение кольца можно найти как $a = \frac{v^*}{t^*}$, а угловое – как $\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega^*}{t^*}$, где t^* – время окончания проскальзывания.

Подставляя выражения для ускорений в уравнения динамики, получаем

$$\mu mg = m \frac{v^*}{t^*}, \quad (1)$$

$$\mu mg R = m R^2 \frac{\omega_0 - \omega^*}{t^*}. \quad (2)$$

Из уравнения (1) находим $v^* = \mu g t^*$ и с учетом связи величин ω^* и v^* при отсутствии проскальзывания получаем $\omega^* = \mu g t^* / R$. Тогда из уравнения (2) можно определить время окончания проскальзывания кольца:

$$t^* = \frac{\omega_0 R}{2\mu g}, \quad (3)$$

а значения линейной и угловой скорости на момент окончания проскальзывания будут следующими:

$$v^* = \mu g t^* = \frac{\omega_0 R}{2},$$

$$\omega^* = \frac{v^*}{R} = \frac{\omega_0}{2}.$$

На рис. 2.32, *а*, *б* отображен характер изменения соответственно линейной и угловой скорости кольца со временем, где t^* определяется выражением (3).

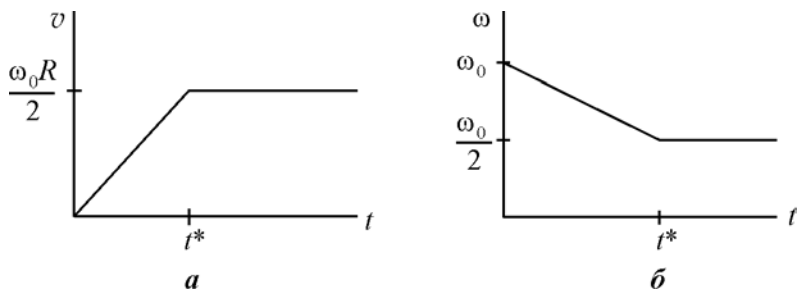


Рис. 2.32

2.2.21. Кольцо в углу. Тонкое кольцо радиусом R раскрутили до угловой скорости ω и вертикально поставили в угол (рис. 2.33). Сколько оборотов кольцо сделает до остановки, если коэффициент трения между стенками угла и кольцом равен μ ?

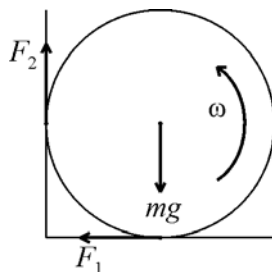


Рис. 2.33

В данной задаче нет поступательного движения, поэтому запишем для кольца только основной закон динамики вращательного движения:

$$(F_1 + F_2)R = mR^2\varepsilon, \quad (1)$$

где F_1, F_2 – силы трения кольца о соприкасающиеся поверхности. Так как ось кольца неподвижна, то должны быть выполнены соотношения:

$$F_2 = \mu F_1, \quad (2)$$

$$F_1 = \mu(mg - F_2). \quad (3)$$

Самая типичная ошибка при расчете силы трения F_1 заключается в том, что забывают про силу трения F_2 . Из уравнений (2) и (3) находим силы трения по отдельности:

$$F_1 = \frac{\mu mg}{1 + \mu^2}, \quad F_2 = \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} mg.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), находим угловое ускорение кольца:

$$\varepsilon = \frac{\mu(1 + \mu)g}{(1 + \mu^2)R}.$$

Число оборотов до остановки N определяется как отношение полного угла поворота, равного $\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}$, к углу 2π :

$$N = \frac{\omega_0^2 (1 + \mu^2)R}{4\pi\mu(1 + \mu)g}.$$

2.2.22. Вращающаяся монета на столе. На шероховатый стол плоской стороной положили раскрученную до угловой скорости ω монету радиусом R . Коэффициент трения монеты о стол μ . Через какое время монета остановится?

Запишем для монеты основной закон динамики вращательного движения:

$$M_{\text{тр}} = I\varepsilon. \quad (1)$$

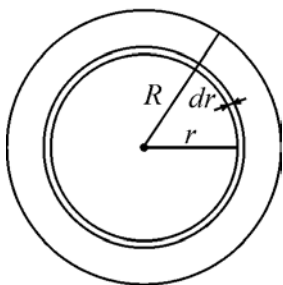


Рис. 2.34

Так как трение происходит по всей поверхности монеты, то для расчета момента силы трения $M_{\text{тр}}$ разобьем монету на тонкие кольцевые слои радиусом r и толщиной dr (рис. 2.34). Момент силы трения, действующей на тонкий кольцевой слой,

$$dM_{\text{тр}} = r\mu dm g, \quad (2)$$

где dm – масса тонкого кольцевого слоя,

$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$. Подставляя значение dm в (2) и интегрируя по радиусу от нуля до R , получаем

$$M_{\text{тр}} = \int_0^R r\mu g \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2\mu mg R}{3}.$$

Таким образом, уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{2\mu mg R}{3} = \frac{1}{2} m R^2 \varepsilon.$$

Находим отсюда угловое ускорение монеты и тогда время до остановки

$$t = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{3\omega R}{4\mu g}.$$

2.2.23. Муравей и соломинка. Муравей пытается утащить к муравейнику соломинку массой m и длиной l . Какой наименьшей горизонтальной силой f , приложенной к концу и перпендикулярной соломинке, он может сдвинуть ее с места? Коэффициент трения соломинки о горизонтальную поверхность μ .

Если бы сила была приложена к центру масс соломинки, то ее наименьшее значение, при котором начнется движение соломинки, было бы очевидно $f = \mu mg$. При заданном в условии способе приложения силы к соломинке начнется как поступательное движение центра масс, так и ее вращение вокруг некоторой точки O . Пусть ее расстояние от края соломинки равно x (рис. 2.35). На соломинку по всей ее длине будут действовать кроме силы f еще две противоположно направленные силы трения $f_{\text{тр}1}$ и $f_{\text{тр}2}$ (их разное направление связано с тем, что сила трения скольжения противоположна скорости движения).

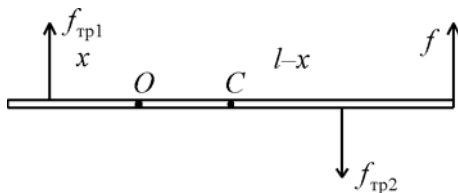


Рис. 2.35

Так как муравью необходимо только сдвинуть соломинку с места, то можно принять линейное и угловое ускорения равными нулю. В этом случае второй закон Ньютона дает

$$f + \gamma x \mu g - \gamma (l - x) \mu g = 0, \quad (1)$$

где γ – линейная плотность массы соломинки. Найдём моменты всех сил, действующих на соломинку. Момент силы f относительно точки O равен $f(l - x)$. Рассчитаем теперь момент силы трения $f_{\text{тр}1}$. Так как сила трения «размазана» по всей длине соломинки, то разобьём ее на бесконечно малые элементы длиной $d\xi$ и находящиеся

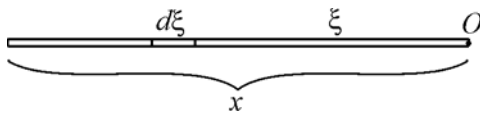


Рис. 2.36

от точки O на расстоянии ξ (рис. 2.36). Тогда полный момент силы трения $f_{\text{тр1}}$ будет равен интегралу:

$$M_{\text{тр1}} = \int_0^x \gamma \mu g \xi \, d\xi = \gamma \mu g \frac{x^2}{2}.$$

Аналогично находится и момент силы трения $f_{\text{тр2}}$:

$$M_{\text{тр2}} = \gamma \mu g \frac{(l-x)^2}{2}.$$

Так как угловое ускорение мы приняли равным нулю, то сумма моментов всех сил, приложенных к соломинке, должна быть равна нулю:

$$f(l-x) - \gamma \mu g \frac{x^2}{2} - \gamma \mu g \frac{(l-x)^2}{2} = 0. \quad (2)$$

Решение системы уравнений (1) и (2) позволит найти как положение центра вращения соломинки (величина x), так и искомую минимальную силу f . Для ее решения сделаем следующее. Умножим уравнение (1) на l , а уравнение (2) на 2 и вычтем их:

$$lf - 2f(l-x) + 2\gamma x^2 \mu g = 0. \quad (3)$$

Найдем из уравнения (1) x и подставим его в (3). Тогда приходим к уравнению

$$\frac{f^2}{\gamma \mu g} = 2\gamma \mu g \left(\frac{l}{2} - \frac{f}{2\gamma \mu g} \right)^2.$$

После извлечения корня получаем

$$f = \mu mg(\sqrt{2} - 1).$$

Видно, что эта сила меньше, чем сила, необходимая для поступательного движения соломинки, почти в 2 раза. Вращение же соломинки возникает вокруг точки, находящейся на расстоянии $l/\sqrt{2}$ от точки приложения силы f .

2.2.24. Тяжелая плита на двух катках. На два невесомых катка, имеющих разные радиусы, положили тяжелую плиту (рис. 2.37). Она образует угол α с горизонтом. Найти ускорение этой плиты при отсутствии проскальзывания.

При отсутствии силы трения задача свелась бы просто к скольжению тела по гладкой наклонной плоскости, и ускорение плиты было бы равным $g \sin \alpha$. Отсутствие

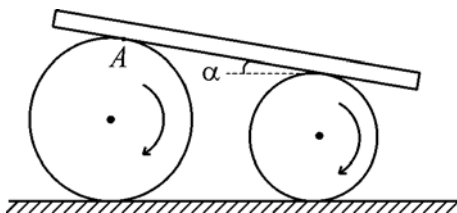


Рис. 2.37

проскальзывания кардинально меняет ситуацию. Теперь за счет вращения катков (их увлекает за собой плита) движение плиты происходит по двум направлениям. Одно движение происходит под углом α к горизонту, другое – горизонтальное.

Рассмотрим движение некоторой точки плиты A , касающейся одного из катков. Так как эта точка принадлежит одновременно и катку, то ее скорость V складывается из векторов скорости поступательного движения катка v и скорости его вращательного движения, которая при отсутствии проскальзывания также равна v (рис. 2.38). Такая же ситуация наблюдается и для второго катка. Это означает, что любая точка плиты движется под углом $\alpha/2$ к горизонту и туда же направлено ускорение плиты.

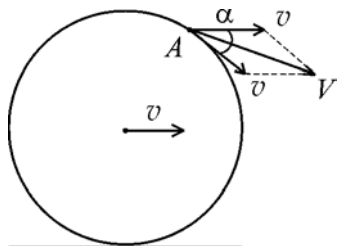


Рис. 2.38

Рассмотрим теперь силы, действующие на плиту. К ней приложена сила тяжести mg , сила нормального давления со стороны катков N и сила трения покоя F между катками и плитой (рис. 2.39). Так как движение плиты поступательное, то все эти силы можно совместить в одну точку, например в точку касания плиты и одного из катков. Отобразим на рисунке

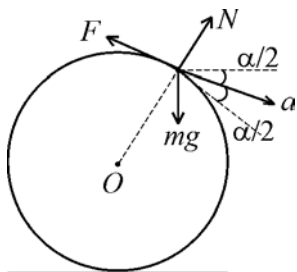


Рис. 2.39

также направление вектора ускорения плиты \vec{a} . Запишем теперь второй закон Ньютона для плиты в проекции на направление ее движения:

$$ma = N \sin \frac{\alpha}{2} + mg \sin \frac{\alpha}{2} - F \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

В это уравнение входят две неизвестные нам силы N и F . Обычно для исключения неизвестных сил поступают следующим образом: либо используют другое направление проектирования, либо выбирают такое направление, в которое не входят неизвестные силы. Здесь такой вариант не проходит, так как у нас две неизвестные силы. Это означает, что для определения ускорения плиты недостаточно рассматривать только ее движение. Поэтому обратимся

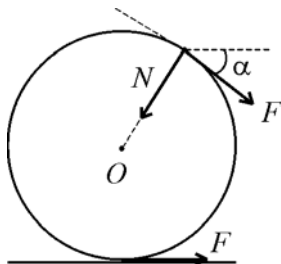


Рис. 2.40

теперь к динамике движения катка. Рассмотрим только те силы, которые могут повлиять на его ускорение. Это сила давления со стороны плиты N , сила трения со стороны плиты F и сила трения со стороны нижней поверхности (рис. 2.40). Так как мы полагаем массу катка равной нулю, то соответственно и момент инерции также равен нулю. Тогда из основного закона динамики вращательно-

го движения, записанного для центра катка, вытекает, что сумма моментов всех сил относительно центра катков равна нулю. Отсюда следует, что обе силы трения должны быть одинаковыми (момент силы N равен нулю).

Запишем теперь второй закон Ньютона для катка, полагая его массу равной нулю:

$$F \cos \alpha + F - N \sin \alpha = 0.$$

Используя простые тригонометрические преобразования, это уравнение можно свести к следующему:

$$F \cos \frac{\alpha}{2} = N \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Если совместить уравнения (1) и (2), то видно, что ускорение плиты

$$a = g \sin \frac{\alpha}{2}.$$

2.2.25. Конический маятник. Тонкий однородный стержень длиной l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку его подвеса (рис. 2.41). Найти угол полураствора конической поверхности, которую описывает стержень.

Если перейти в систему отсчета, вращающуюся со стержнем, то вместо задачи динамики мы приходим к задаче статики. В этой системе отсчета на стержень действуют три силы – сила тяжести mg , сила реакции опоры N и центробежная сила инерции $F_{цб}$. Так как стержень покоится в данной системе отсчета,

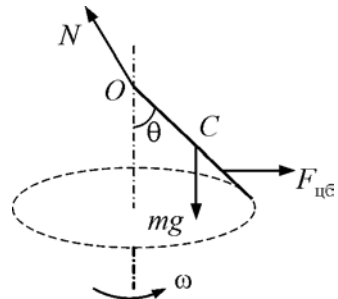


Рис. 2.41

то результирующий момент сил относительно точки O (как и любой другой точки) равен нулю. Относительно точки O момент создают только сила тяжести и центробежная сила инерции. Момент силы тяжести равен $(mgl \sin \theta)/2$. Сложнее дело обстоит с моментом центробежной силы инерции. Для его расчета разобьем стержень на малые элементы длиной dx , находящиеся на расстоянии x от точки O . Тогда элементарный момент силы инерции

$$dM_{цб} = dm\omega^2 \cdot x \sin \theta \cdot x \cos \theta = \frac{m}{l} \omega^2 \sin \theta \cos \theta x^2 dx.$$

Интегрируя это выражение по всей длине стержня, получаем

$$M_{цб} = \frac{m\omega^2 l^2}{3} \sin \theta \cos \theta.$$

В выбранной системе отсчета моменты силы тяжести и центробежной силы инерции должны быть равны. Из этого следует

$$\frac{1}{2} mgl \sin \theta = \frac{m\omega^2 l^2}{3} \sin \theta \cos \theta.$$

Отсюда находим

$$\cos \theta = \frac{3g}{2\omega^2 l}.$$

Если же угловая скорость вращения стержня достаточно мала ($\omega^2 < 3g/2l$), то угол отклонения стержня будет равен нулю.

2.2.26. Падающая спица. Однородная спица длиной l , стоящая на гладкой горизонтальной поверхности, начинает падать из вертикального положения. Определить скорость верхнего конца спицы перед ударом его о поверхность.

Динамика движения спицы определяется уравнениями:

$$F = m \frac{dv_c}{dt} \quad (1)$$

$$M_c = I_c \frac{d\omega}{dt}, \quad (2)$$

где F – сумма всех внешних сил; v_c – скорость центра инерции, ω – угловая скорость вращения спицы; M_c – сумма моментов всех внешних сил относительно центра инерции; $I_c = ml^2/12$ – момент инерции спицы. Так как спица опирается на гладкую поверхность, то нет силы трения, и на спицу действуют только вертикально направленные силы – сила тяжести и сила реакции опоры. Это означает, что центр инерции спицы (ее середина) движется вертикально вниз, а сама спица приобретает вращение вокруг центра инерции. Распишем систему уравнений (1), (2) более подробно, но второе уравнение с целью упрощения решения запишем относительно точки опоры спицы (рис. 2.42), применяя теорему Штейнера:

$$mg - N = m \frac{dv_c}{dt}, \quad (3)$$

$$mg \frac{l}{2} \cos \theta = \frac{1}{3} ml^2 \frac{d\omega}{dt}. \quad (4)$$

Так как в итоге нам будет нужна только угловая скорость вращения спицы (через нее мы найдем и линейную скорость), то видно, что уравнение (3) при данной постановке задачи оказывается излишним. Таким образом, задача сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения (4) относительно угловой скорости. Выразим dt через $d\theta$:

$dt = d\theta / \omega$. Тогда уравнение (4) сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{g}{2} \cos \theta d\theta = \frac{l}{3} \omega d\omega.$$

Интегрируя его по углу от нуля до $\pi/2$ и по угловой скорости от нуля до ω , получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Скорость же верхнего конца спицы перед ударом о поверхность будет

$$v = \omega l = \sqrt{3gl}.$$

Интегрирование уравнений динамики позволяет найти не только конечное значение угловой скорости, но и ее зависимость от угла наклона спицы. Если же нас интересует только конечный результат (как в данной задаче), то гораздо проще воспользоваться законом сохранения энергии (нет трения):

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} mv_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \quad (5)$$

Здесь первое слагаемое в правой части определяет кинетическую энергию поступательного движения центра инерции, второе – кинетическую энергию вращения спицы вокруг центра инерции. Так как

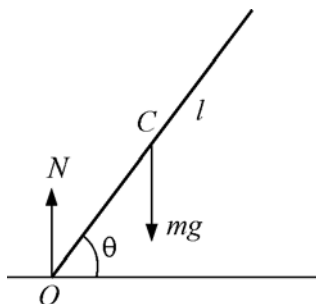


Рис. 2.42

один конец спицы все время опирается о поверхность, то значения v_c и ω связаны соотношением

$$v_c = \omega \frac{l}{2}. \quad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) легко найти угловую скорость вращения спицы и скорость верхнего конца спицы перед ударом о поверхность.

2.2.27. Шайба на нити. Вертикальный цилиндр радиусом R укреплен на гладкой горизонтальной поверхности. На цилиндр плотно намотана нить, на свободном конце которой на расстоянии l_0 от точки

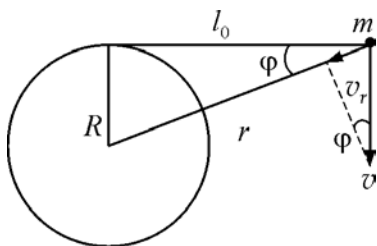


Рис. 2.43

касания цилиндра находится небольшая шайба массой m (рис. 2.43, вид сверху). Шайбе толчком сообщили горизонтальную скорость v , перпендикулярную нити. Через какое время нить разорвется, если сила натяжения, при которой наступает разрыв,

$$F_m > mv^2 / l_0 ?$$

Сила натяжения нити сообщает шайбе нормальное ускорение:

$$F = m \frac{v^2}{l}. \quad (1)$$

Для определения ее зависимости от времени необходимо знать, как со временем изменяется скорость шайбы v и длина свободной части нити l . Так как скорость шайбы все время перпендикулярна нити, то сила натяжения не совершает работы. Это означает, что кинетическая энергия шайбы и соответственно ее скорость не изменяются. Осталось только найти закон изменения длины свободной части нити $l(t)$. В данном случае проще найти закон изменения расстояния шайбы от центра цилиндра $r(t)$. Для этого спроектируем вектор скорости шайбы на направление радиуса $v_r = v \sin \phi = vR/r$.

С другой стороны, радиальная составляющая скорости по определению $v_r = dr/dt$. Из этих уравнений получаем

$$-\frac{dr}{dt} = v \frac{R}{r}$$

(знак минус означает, что радиус уменьшается). Проинтегрируем это равенство:

$$\frac{r^2}{2} = -vRt + \text{const}.$$

Значение const легко найти из начального условия. При $t = 0$ значение $r = \sqrt{l_0^2 + R^2}$. Откуда получаем закон изменения радиуса $r(t)$:

$$r^2 = -2vRt + l_0^2 + R^2.$$

Соответственно закон изменения со временем длины свободной части нити будет иметь вид

$$l(t) = \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{l_0^2 - 2vRt}.$$

Подставляя $l(t)$ в формулу (1), получаем

$$F = \frac{mv^2}{\sqrt{l_0^2 - 2vRt}}.$$

Откуда легко найти и время τ , через которое сила F станет равной силе разрыва F_m :

$$\tau = \frac{l_0^2}{2vR} - \frac{m^2 v^3}{2RF_m^2}.$$

Из приведенного ответа, кстати, видно для чего в постановке задачи заложено условие $F_m > mv^2/l_0$. Если это условие будет нарушено, то нить порвется сразу же после сообщения толчка шайбе.

2.2.28. Контакт двух вращающихся дисков. Два диска одинакового радиуса вращаются в одном направлении с одинаковой угловой скоростью ω_0 (рис. 2.44). Их приводят в контакт, и затем сис-

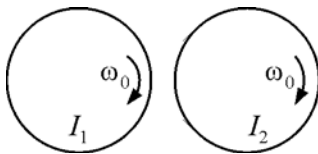


Рис. 2.44

тема через некоторое время приходит в новое установившееся состояние движения. Моменты инерции дисков относительно их осей вращения равны I_1 и I_2 , трения в осях нет. Найти изменение момента импульса системы и ее кинетической энергии.

Попробуем прежде всего понять, что же приведет систему в установившееся состояние с противоположным направлением угловых скоростей? Причина может быть только одна – это сила трения в месте контакта дисков. И хотя силы трения скольжения, приложенные к каждому диску, имеют противоположное направление, суммарный момент этих сил относительно осей вращения дисков не равен нулю и направлен из чертежа. Это означает, что момент импульса этой системы не сохраняется. Для определения его изменения воспользуемся уравнением моментов

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Так как момент силы трения скольжения является постоянным, то это уравнение переходит в следующее:

$$M_z \Delta t = \Delta L_z.$$

Если ось Z направить за чертеж, то для каждого диска будем иметь уравнение

$$-M_z \Delta t = \Delta L_1 = I_1 (\omega - \omega_0),$$

$$-M_z \Delta t = \Delta L_2 = I_2 (-\omega - \omega_0).$$

Из этих уравнений легко находим угловую скорость установившегося вращения дисков:

$$\omega = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \omega_0.$$

По определению изменение момента импульса системы должно быть

$$\Delta L_z = (I_1\omega - I_2\omega) - (I_1\omega_0 + I_2\omega_0).$$

Подставляя сюда значение ω , получаем

$$\Delta L_z = -\frac{4I_1I_2}{I_1 + I_2}\omega_0.$$

Аналогично находим и изменение энергии системы:

$$\Delta E = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_0^2 = -\frac{2I_1I_2}{I_1 + I_2}\omega_0^2.$$

Знак минус в обоих ответах говорит об уменьшении, как момента импульса системы, так и ее энергии за счет наличия трения.

2.3. Законы сохранения в динамике

Динамика поведения любой системы частиц определяется уравнениями движения. Зная законы действующих на частицы сил и состояние системы в некоторый момент времени, можно с помощью уравнений движения определить состояние системы в любой другой момент времени. Такое детальное рассмотрение поведения системы с помощью уравнений движения иногда бывает настолько технически затруднительным, что довести решение до конца практически невозможно. В тех же случаях, когда неизвестны законы действующих сил, такой подход в принципе неосуществим.

Однако в физике существуют некоторые фундаментальные принципы, являющиеся следствием законов Ньютона и общих свойств симметрии пространства и времени (однородности и изотропности), которые позволяют иначе подойти к решению задач динамики. Как уже отмечалось, при движении системы частиц ее состояние изменяется со временем. Однако опыт показывает, что существуют величины, которые обладают свойствами сохранения во времени. Среди этих сохраняющихся величин наибольшее значение имеют энергия, импульс и момент импульса. Кроме того, эти величины обладают свойством аддитивности. Их значение для системы, состоящей из частей, взаимодействие между которыми пренебрежимо мало, равно сумме значений для каждой из частей системы в отдельности.

Практическая значимость законов сохранения энергии, импульса и момента импульса обусловлена рядом причин. Во-первых, эти законы не зависят ни от характера движения частиц, ни от характера действующих сил. Это позволяет применять законы сохранения даже тогда, когда силы вообще не известны. Во-вторых, даже в тех случаях, когда силы известны и задача может быть решена с помощью уравнений движения, привлечение законов сохранения позволяет получить решение наиболее простым и изящным способом. Поэтому при решении задач динамики обычно поступают следующим образом. Вначале применяют соответствующие законы сохранения при условии возможности их реализации. И если выяснится, что этих

законов недостаточно, или нет возможности их применения, переходят к решению с помощью уравнений движения.

Напомним кратко вышеупомянутые законы сохранения.

Закон сохранения импульса: полный импульс замкнутой системы частиц не изменяется со временем.

Закон сохранения механической энергии: полная механическая энергия замкнутой системы частиц, в которой нет диссипативных сил, сохраняется в процессе движения.

Закон сохранения момента импульса: момент импульса любой системы частиц, в которой суммарный момент внешних сил равен нулю, сохраняется со временем.

Во многих задачах большое практическое значение имеет так называемая *теорема об изменении кинетической энергии*: изменение кинетической энергии системы равно работе, которую совершают все силы, действующие на все частицы системы.

2.3.1. Три заряда в треугольнике. Три небольших заряженных шарика массой m и зарядом q соединены шелковыми нитями, которые образуют равносторонний треугольник со стороной l (рис. 2.45). Одну из нитей пережгли. Найти ускорение среднего шарика сразу после этого. Силой тяжести пренебречь.

До пережигания нижней нити каждый шарик находился в равновесии и сумма сил, действующих на него, была равна нулю. Это означает, что каждая кулоновская сила отталкивания была равна по модулю силе натяжения нити: $F_k = T$, где $F_k = kq^2/l^2$,

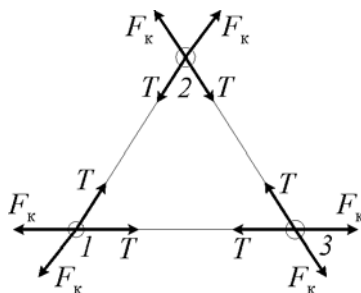


Рис. 2.45

$k = 1/4\pi\epsilon_0$, ϵ_0 – электрическая постоянная. После пережигания нижней нити (между шариками 1 и 3) исчезает одна из сил натяжения. Это приводит к движению шариков и соответственно к изменению сил, действующих на шарик. Зададим теперь небольшие перемещения каждому шарiku (рис. 2.46). Кулоновские силы при небольшом

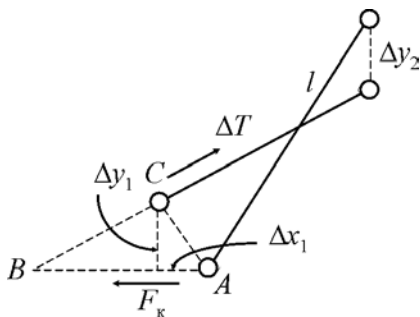


Рис. 2.46

перемещении шариков не успевают измениться, так как они определяются расстоянием между зарядами. А вот сила натяжения нити, связывающей шарики 1 и 2, изменится и станет $T' = T + \Delta T$ (иначе не понятно, за счет чего начнется движение шариков!). На рисунке отображены только те силы, которые влияют на перемещение шарика 1.

Для определения ускорения шарика 2 необходимо знать изменение силы натяжения ΔT . Так как мы не знаем независимого способа расчета силы натяжения (в отличие от кулоновской силы), то воспользуемся тем, что сразу вытекает из общих свойств второго закона Ньютона. Из него следует, что если на тело действует несколько сил, то отношение ускорений, сообщаемых телу под действием каждой силы, равно отношению самих сил. При небольших перемещениях за малое время отношение ускорений под действием каждой силы равно отношению отдельных перемещений. В нашем случае это означает, что отношение кулоновской силы F_k к изменению силы натяжения ΔT равно отношению виртуальных перемещений шарика 1 AB и BC (см. рис. 2.46):

$$\frac{F_k}{\Delta T} = \frac{AB}{BC} = \frac{\Delta x_1 + \Delta y_1 \operatorname{tg} 30^\circ}{\Delta y_1 / \cos 30^\circ} \quad (1)$$

(при выводе этой формулы мы полагали, что угол между прямыми 1–2 и 1–3 практически не изменился и равен $\approx 60^\circ$, а треугольник ABC почти прямоугольный).

Так как рассматриваемая система шариков изолированная, то выполняется закон сохранения импульса, который для вертикального направления будет иметь вид

$$mv_2 = 2mv_1, \quad (2)$$

где v_2 – скорость перемещения шарика 2; v_1 – вертикальная составляющая скорости шарика 1. Из (2) следует связь вертикальных перемещений шариков 1 и 2 $\Delta y_2 = 2\Delta y_1$. Кроме того, что сохраняется импульс всей системы, сохраняется и длина нити, связывающей шарики 1 и 2. Отсюда нетрудно получить связь горизонтальной Δx_1 и вертикальной Δy_1 проекций перемещения шарика 1:

$$\left(\frac{l}{2} + \Delta x_1\right)^2 + \left(l\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\Delta y_1\right)^2 = l^2.$$

Пренебрегая величинам второго порядка малости, получаем

$$\Delta x_1 = 3\sqrt{3}\Delta y_1. \quad (3)$$

Из уравнений (1) и (3) следует

$$\frac{F_k}{\Delta T} = 5. \quad (4)$$

Таким образом, вертикальная проекция силы F_y , действующей на шарик 2, с учетом соотношения (4) определяется по формуле

$$F_y = 2\Delta T \cos 30^\circ = \frac{F_k \sqrt{3}}{5}.$$

Тогда из второго закона Ньютона находим ускорение шарика

$$a = \frac{F_k \sqrt{3}}{5m} = \frac{q^2 \sqrt{3}}{20\pi\epsilon_0 m l^2}.$$

Существует и другой путь решения данной задачи, не требующий столь детального анализа характера движения шариков и основывающийся только на втором и третьем законе Ньютона. Для этого рассмотрим все силы, действующие на шарики 1 и 2 после пережигания нити (рис. 2.47). Запишем для шарика 1 второй закон Ньютона, спроектированный на направление нити, соединяющей шарики 1 и 2:

$$-T' + F_k + F_k \cos 60^\circ = ma_{1l}, \quad (5)$$

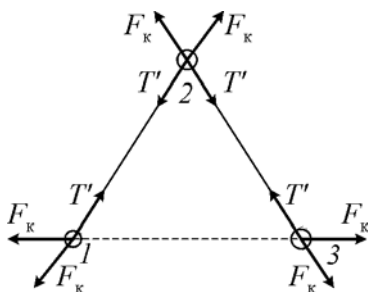


Рис. 2.47

где a_{1l} – проекция ускорения шарика 1 на направление нити между шариками 1 и 2. Этот же закон для шарика 2 будет иметь вид

$$-F_K - F_K \cos 60^\circ + T' + T' \cos 60^\circ = ma_{2l}, \quad (6)$$

где a_{2l} – проекция ускорения шарика 2 на то же направление и равная

$$a_{2l} = a \cos 30^\circ. \quad (7)$$

В силу нерастяжимости нити $a_{1l} = a_{2l}$. Исключая из системы уравнений (5)–(7) неизвестную силу натяжения T' , получаем для ускорения шарика 2 прежний ответ.

2.3.2. Жук в аквариуме. На гладком полу стоит аквариум, заполненный водой плотностью ρ_0 , объем воды V_0 . Оказавшийся на дне аквариума жук объемом V и плотностью ρ через некоторое время начи-

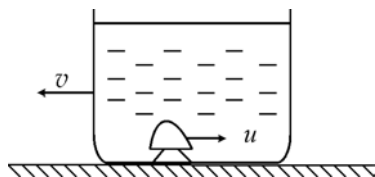


Рис. 2.48

нает ползти по дну со скоростью u относительно его (рис. 2.48). С какой скоростью станет двигаться аквариум по полу? Массой сосуда пренебечь, уровень воды все время остается горизонтальным.

Это довольно простая задача на применение закона сохранения импульса (система является замкнутой). Пусть при движении жука вправо со скоростью u сосуд движется влево со скоростью v . Тогда несколько поспешное применение закона сохранения импульса дает

$$m(u - v) = Mv, \quad (1)$$

где m – масса жука; M – масса воды в аквариуме (при этом мы учли, что скорость жука относительно пола равна $u - v$).

Соотношение (1) является не совсем точным, так как мы не учли движение воды, вытесняемой жуком при его перемещении (он ведь движется не в пустоте!). Более внимательный анализ показывает, что кроме движения вправо жука со скоростью $u - v$ относительно пола и перемещения влево воды объема $V_0 - V$ со скоростью v происходит еще дополнительное перемещение влево воды объема V со скоростью $u + v$. Тогда правильный закон сохранения импульса дает:

$$\rho V(u - v) = \rho_0(V_0 - V)v + \rho_0 V(u + v).$$

Откуда находим

$$v = \frac{(\rho - \rho_0)Vu}{\rho V + \rho_0 V_0}.$$

2.3.4. Бусинка между телами. На оси без трения могут двигаться два тела массами M_1 и M_2 . Между ними находится бусинка массой m (рис. 2.49). Бусинке щелчком придают скорость v . Найти скорость первого и второго тела к моменту, когда бусинка после очередного упругого соударения с одним из тел не сможет догнать другое тело. Считать массу бусинки много меньше масс каждого из тел.

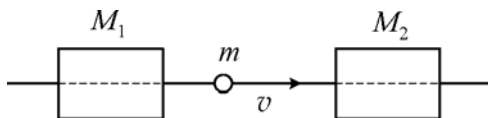


Рис. 2.49

Так как масса бусинки много меньше масс тел, то совершенно все равно, на какое из тел бусинка будет двигаться вначале. После каждого удара тела получают небольшие приращения скорости противоположного направления, их скорость возрастает, а скорость бусинки будет уменьшаться. И в итоге скорость бусинки станет равной скорости одного из этих тел. Пусть это будет второе тело. Запишем для данного момента закон сохранения импульса:

$$mv = -M_1 v_1 + M_2 v_2 + m v_2. \quad (1)$$

Так как удары упругие, то в данной ситуации можно применить и закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}M_1v_1^2 + \frac{1}{2}M_2v_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2, \quad (2)$$

где v_1 и v_2 – скорости тел в тот момент, когда бусинка не сможет догнать второе тело. После несложных, но достаточно утомительных алгебраических преобразований из уравнений (1) и (2) с учетом условия $m \ll M_1, M_2$ можно найти скорость первого тела:

$$v_1 = v \sqrt{\frac{mM_2}{M_1(M_1 + M_2)}}. \quad (3)$$

Легко сообразить, что для определения скорости второго тела нужно только в выражении (3) поменять местами индексы 1 и 2:

$$v_2 = v \sqrt{\frac{mM_1}{M_2(M_1 + M_2)}}.$$

Но есть и более изящный и физический подход к решению данной задачи. Так как после очередного удара импульс каждого тела немного возрастает, то значения импульсов тел к n -му удару можно представить в виде конечного ряда с убывающими слагаемыми:

$$p_1 = \Delta p_1^{(1)} + \Delta p_1^{(2)} + \dots + \Delta p_1^{(n)},$$

$$p_2 = \Delta p_2^{(1)} + \Delta p_2^{(2)} + \dots + \Delta p_2^{(n)},$$

где $\Delta p_1^{(i)}$ и $\Delta p_2^{(i)}$ – изменения импульсов тел после i -го удара.

Мы не знаем закона убывания слагаемых $\Delta p_1^{(i)}$ и $\Delta p_2^{(i)}$, но очевидно следующее. Если вначале бусинка движется на первое тело, то $\Delta p_1^{(1)} > \Delta p_2^{(1)}$, $\Delta p_1^{(2)} > \Delta p_2^{(2)}$ и т.д. Отсюда следует, что $p_1 > p_2$. Если же бусинка движется вначале на второе тело, то $\Delta p_1^{(1)} < \Delta p_2^{(1)}$, $\Delta p_1^{(2)} < \Delta p_2^{(2)}$ и т.д. Это в свою очередь означает, что $p_1 < p_2$. Так как все слагаемые $\Delta p_1^{(i)}$ и $\Delta p_2^{(i)}$ малы, то из независимости конечной скорости тел от первоначального направления движения бусинки однозначно следует, что тела в итоге получают одинаковые импульсы,

т.е. $M_1 v_1 = M_2 v_2$. Подставляя найденное отсюда значение v_2 в закон сохранения энергии (2) и пренебрегая слагаемым $m v_2^2 / 2$, сразу получаем выражение (3).

2.3.5. Синтез дейтерия и трития. Для проведения реакции синтеза дейтерия и трития ($\text{H}^2 + \text{H}^3 \rightarrow \text{He}^4 + n$) ускоренные до энергии $E = 2$ МэВ ядра дейтерия направляют на тритиевую мишень. Вылетающие перпендикулярно направлению пучка дейтронов нейтроны регистрируются детектором. Найти их энергию, если в реакции выделяется энергия $\Delta E = 14$ МэВ.

В этой задаче более отчетливо, чем в предыдущих, проявляется векторный характер закона сохранения импульса. В проекциях на ось X (направление скорости падающих дейтронов) и ось Y (направление вылета регистрируемых нейтронов) закон сохранения импульса будет иметь вид

$$m_1 v_1 = m_2 v_{2X}, \quad 0 = m_3 v_3 - m_2 v_{2Y}$$

(на рис. 2.50 и далее индекс 1 означает дейтерий, 2 – гелий, 3 – нейтрон).

Запишем теперь закон сохранения энергии в этой реакции:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} - \Delta E.$$

С учетом того, что $v_2^2 = v_{2X}^2 + v_{2Y}^2$, получаем

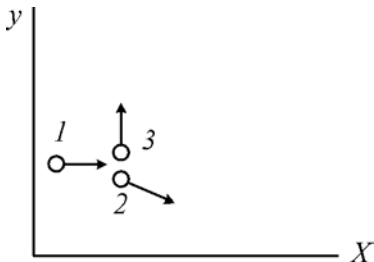


Рис. 2.50

$$\frac{m_3 v_3^2}{2} \left(1 + \frac{m_3}{m_2} \right) = \Delta E + \frac{m_1 v_1^2}{2} \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right).$$

Подставляя сюда значения $\frac{m_1 v_1^2}{2} = E$, $\frac{m_3}{m_2} = \frac{1}{4}$, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$, находим энергию регистрируемых нейтронов:

$$E_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{4}{5} \left(\Delta E + \frac{E}{2} \right) = 12 \text{ МэВ}.$$

2.3.6. Столкновение частиц. Тяжелая частица массой m_1 сталкивается с покоящейся легкой частицей массой m_2 . На какой максимальный угол может отклониться тяжелая частица в результате упругого удара?

Во многих задачах на столкновения или распад частиц при переходе в систему отсчета, связанную с центром инерции системы (будем называть ее в дальнейшем Ц-система), решение упрощается настолько, что имеет смысл сначала перевести все данные задачи в эту систему отсчета, получить результат, а потом вернуться в исходную систему отсчета. Поэтому перейдем в Ц-систему. В этой системе отсчета обе частицы сближаются со скоростями (рис. 2.51):

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \vec{v}_1 - \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \quad \vec{u}_2 = -\frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2},$$

где \vec{v}_c – скорость движения центра инерции этой системы частиц.

В Ц-системе полный импульс частиц равен нулю как до, так и после столкновения ($m_1 \vec{u}_1 = -m_2 \vec{u}_2$). Легко догадаться, что оба закона сохранения (импульса и энергии) будут выполнены, если после удара скорости частиц сохранят свое значение. При этом их векторы будут повернуты относительно их прежних направлений на некоторый угол α (см. рис. 2.51) и опять будут направлены противоположно друг другу (угол α зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения в процессе столкновения). Это означает, что

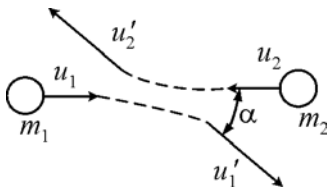


Рис. 2.51

$$u_1' = u_1, \quad u_2' = u_2, \quad m_1 \vec{u}_1' = -m_2 \vec{u}_2'.$$

Здесь знаком штрих отмечены скорости частиц после удара. Необходимо только помнить, что угол α – это не угол отклонения налетающей частицы в неподвижной системе отсчета.

Для определения угла отклонения θ в неподвижной системе отсчета найдем скорость первой частицы в данной системе отсчета после удара:

$$\vec{v}_1' = \vec{u}_1' + \vec{v}_c.$$

Отобразим это векторное равенство на рис. 2.52. Вектор скорости \vec{u}_1' может иметь любое направление, как вдоль вектора \vec{v}_c , совпадающим с \vec{v}_1 (легкое касание частиц), так и противоположно ему (лобовой удар). Возможные положения конца вектора \vec{u}_1' находятся на окружности радиусом u_1' (см. рис. 2.52). Понятно, что максимальное отклонение налетающей частицы (т.е. максимальное значение угла θ) будет выполнено, если вектор \vec{v}_1' является касательным к окружности, т.е. треугольник скоростей становится прямоугольным. Отсюда находим угол максимального отклонения θ_{\max} :

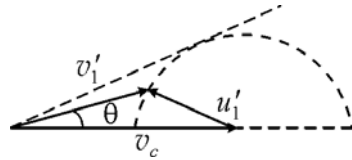


Рис. 2.52

$$\sin \theta_{\max} = \frac{u_1}{v_c} = \left(\frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2} \right) / \left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_2}{m_1}.$$

2.3.7. Распад частицы. Частица массой m и импульсом p распадается на две одинаковые частицы. Каков максимальный угол разлета α вторичных частиц, если при распаде выделяется энергия E ? Считать, что энергия распада перешла в кинетическую энергию разлетающихся частиц.

Наиболее просто этот процесс выглядит в Ц-системе: здесь распадающаяся частица покоится, а частицы распада разлетаются в противоположные стороны с одинаковыми по модулю импульсами $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}$. Так как исходная частица распадается на две одинако-

вые частицы массой $m/2$, то каждой из них достается и одинаковая энергия $E/2$. Поэтому импульс каждой частицы в Ц-системе

$$\tilde{p} = \sqrt{\frac{mE}{2}}.$$

Найдем теперь импульсы возникших частиц в неподвижной системе отсчета. Следуя закону преобразования скоростей при переходе от неподвижной системы отсчета к Ц-системе, запишем:

$$\vec{p}_1 = \frac{m}{2} \vec{v}_1 = \frac{m}{2} (\vec{v}_c + \vec{v}_1) = \frac{\vec{p}}{2} + \vec{\tilde{p}}_1, \quad (1)$$

$$\vec{p}_2 = \frac{m}{2} \vec{v}_2 = \frac{m}{2} (\vec{v}_c + \vec{v}_2) = \frac{\vec{p}}{2} + \vec{\tilde{p}}_2. \quad (2)$$

Здесь знаком « \sim » помечены величины, относящиеся к Ц-системе. Согласно закону сохранения импульса $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$, так как $\vec{\tilde{p}}_1 = -\vec{\tilde{p}}_2$.

Отобразим с помощью формул (1) и (2) векторную диаграмму импульсов, полагая вначале, что $\tilde{p} < p/2$ (рис. 2.53).

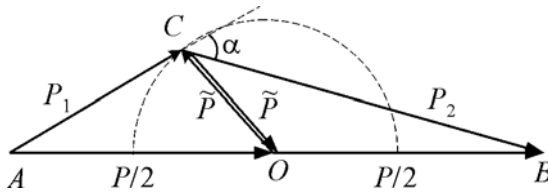


Рис. 2.53

Отложим сначала отрезок AB , равный импульсу \vec{p} . Затем из его середины (точка

O) нарисуем окружность радиусом $\tilde{p} < p/2$. В соответствии с формулами (1) и (2) эта окружность и есть геометрическое место точек всех возможных положений конца вектора \vec{p}_1 и начала вектора \vec{p}_2 (точка C). Понятно, что максимальный угол разлета вторичных частиц α (угол между векторами \vec{p}_1 и \vec{p}_2) будет в том случае, если точка C находится над точкой O (рис. 2.54). Запишем теперь теорему косинусов:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos\beta = 2p_1^2(1 - \cos\beta).$$

На рис. 2.54 видно, что

$$p_1^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \tilde{p}^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{mE}{2}.$$

Таким образом,

$$p^2 = 2 \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{mE}{2} \right] (1 - \cos \beta).$$

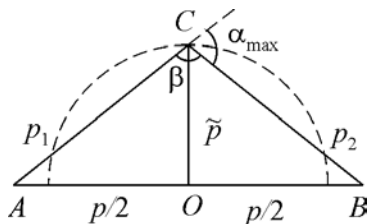


Рис. 2.54

Откуда легко найти $\cos \beta$, и так как $\cos \alpha_{\max} = -\cos \beta$, то

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{p^2 - 2mE}{p^2 + 2mE}. \quad (3)$$

Совершенно аналогично будет выглядеть векторная диаграмма импульсов и при $\tilde{p} > p/2$ (рис. 2.55), только теперь диаметр окружности больше, чем p . Как и ранее, максимальным угол разлета будет в том случае, когда точка C находится над точкой O и его значение определяется той же формулой (3).

Проведем теперь анализ полученного решения на некоторых частных случаях, для которых ответ очевиден и может быть получен сразу независимо от общего решения.

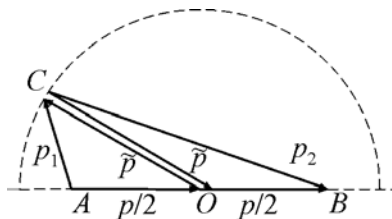


Рис. 2.55

Если энергия распада равна нулю, то произошло просто разделение исходной частицы без изменения направления движения вторичных частиц. В этом случае, очевидно, угол разлета частиц должен быть равен нулю. Именно это и следует из ответа. Если же энергия распада много больше кинетической энергии распадающейся частицы ($E \gg p^2/2m$), то можно пренебречь исходным импульсом p и считать, что распадается неподвижная частица. В этом случае частицы распада разлетаются в противоположные стороны, что также следует из ответа. Третий вариант не самый очевидный. Пусть энергия рас-

пада $E = p^2 / 2m$. Так как эту энергию уносят с собой разлетающиеся частицы, то должно выполняться равенство

$$E = E_1 + E_2 \rightarrow \frac{p^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}.$$

После сокращения на $2m$ получаем

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2. \quad (4)$$

Кроме того, в силу закона сохранения импульса

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (5)$$

Так как соотношения (4) и (5) могут быть выполнены одновременно только для прямоугольного треугольника импульсов, то угол разлета вторичных частиц должен быть равен $\pi/2$. Это также следует из общего ответа.

2.3.8. Соударение гладких шаров. Шар, двигавшийся поступательно, испытал упругое соударение с точно таким же, но покоившимся шаром. При соударении угол между прямой, проходящей через центры шаров, и направлением первоначального движения налетающего шара оказался равным $\alpha = 45^\circ$. Считая шары гладкими, найти долю η кинетической энергии налетающего шара, которая перешла в потенциальную энергию в момент их наибольшей деформации.

Данная задача полезна тем, что позволяет глубже вникнуть в механизм энергетических превращений при упругих столкновениях тел. Рассмотрим для простоты вначале задачу о столкновении двух одинаковых упругих стержней, а затем вернемся к исходной задаче. Пусть на неподвижный стержень налетает со скоростью v точно такой же стержень (рис. 2.56, а).

При столкновении вблизи контакта возникает зона деформации, граница которой распространяется вдоль каждого стержня со скоростью звука c (рис. 2.56, б). Это приводит к тому, что разные участки стержней будут иметь разные скорости. Из закона сохранения импульса следует, что скорость частиц стержней в зоне

деформации должна быть равна $v/2$, скорости же недеформированных участков стержней остаются прежними.

Первый этап процесса столкновения заканчивается в тот момент, когда оба стержня окажутся сжатыми и их скорости станут равными $v/2$ (рис. 2.56, б). В этот момент исходная кинетическая энергия первого стержня частично превращается в потенциальную энергию упругой деформации обоих стержней. Сразу после этого начинается второй этап столкновения, при котором стержни возвращаются в недеформированное состояние. Это процесс начинается у свободных концов стержней и, рас-

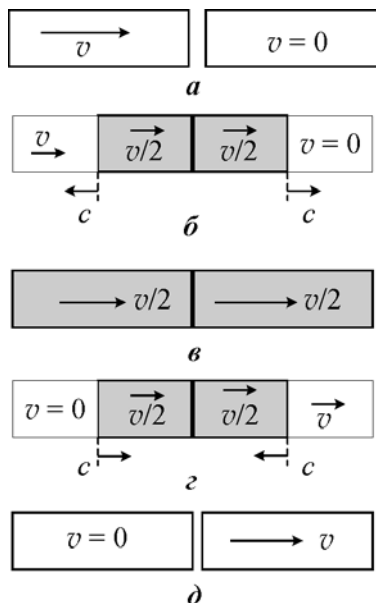


Рис. 2.56

пространяясь по стержням со скоростью звука, приближается к их зоне контакта (рис. 2.56, з). Частицы первого стержня в зоне свободной от деформации уменьшают скорость до нуля, а аналогичные частицы второго стержня получают скорость v . В итоге оба стержня одновременно окажутся недеформированными, происходит их отделение, а стержни обмениваются скоростями (рис. 2.56, д). При этом энергия упругой деформации стержней целиком переходит обратно в их кинетическую энергию.

Понятно, что при столкновении стержней разной длины более длинный стержень не успеет полностью освободиться от деформаций и в нем возникают чередующиеся волны сжатия и разрежения. А это означает, что модель абсолютно упругих материальных точек, в которой принимается, что кинетическая энергия сталкивающихся тел сохраняется, оказывается неприменимой!

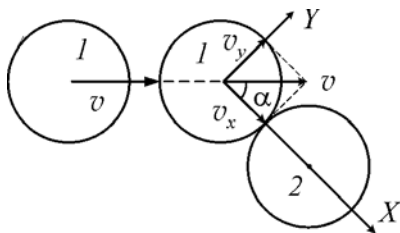


Рис. 2.57

Вернемся теперь к нашей исходной задаче столкновения шаров. Разложим вектор скорости первого шара на две составляющие $v_y = v \sin \alpha$ (ось Y) и $v_x = v \cos \alpha$ (ось X) (рис. 2.57).

Так как шары гладкие, то при их столкновении составляющая скорости налетающего шара, касательная к зоне контакта, v_y не изменится, и весь процесс взаимодействия шаров будет определяться только составляющей скорости v_x . В этом случае процесс упругого столкновения шаров очень похож на рассмотренное ранее столкновение одинаковых стержней, только вместо скорости v необходимо брать $v_x = v \cos \alpha$. В момент наибольшей деформации скорость первого шара имеет составляющие: $v_x = (v \cos \alpha)/2$ и $v_y = v \sin \alpha$, а скорость второго шара равна $v \cos \alpha / 2$. Тогда кинетическая энергия шаров составит

$$E = \frac{1}{2} m \left(v^2 \sin^2 \alpha + \frac{v^2}{4} \cos^2 \alpha \right) + \frac{1}{2} m \frac{v^2}{4} \cos^2 \alpha,$$

а на потенциальную энергию деформации шаров приходится разность энергий $E_0 - E$, где $E_0 = mv^2 / 2$.

Таким образом, доля кинетической энергии η нелетающего шара, которая перешла в потенциальную энергию в момент наибольшей деформации, составит

$$\eta = \frac{E_0 - E}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv^2 \left[\left(\sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{4} \right) + \frac{\cos^2 \alpha}{4} \right]}{\frac{1}{2} mv^2} = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha = 0,25.$$

2.3.9. Шарик и горка. По горизонтальной плоскости может скользить без трения гладкая «горка» высотой h и массой M . Горка плавно переходит в плоскость (рис. 2.58). При какой минимальной скорости небольшой шарик массой m , налетающий на эту горку, перевалит через ее вершину?

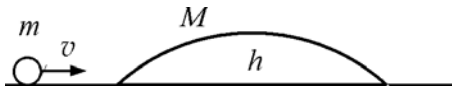


Рис. 2.58

Заложенный в условии задачи плавный переход горки в плоскость предполагает, что шарик должен все время находиться на поверхности горки. Поэтому для преодоления этой горки шарик должен как минимум оказаться на ее вершине. Причем в этот момент скорости горки и шарика должны оказаться одинаковыми (горка, как и шарик, может скользить по плоскости). Поскольку трения нигде нет, то полная энергия системы должна сохраняться:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgh, \quad (1)$$

где V – скорость шарика и горки в тот момент, когда шарик окажется на вершине горки. Понятно, что из уравнения (1) не удастся найти скорость шарика v , так как неизвестно значение V . Конечно, можно использовать закон сохранения импульса, только следует помнить, что данный закон применим не для любого положения шарика относительно горки. Пока шарик не доберется до вершины горки, сила реакции со стороны плоскости, на которой лежит горка, не уравновешена силой тяжести шарика и горки. Именно за счет этой силы и изменяется направление движения шарика. И только в момент наивысшего подъема шарика, когда вектор его скорости будет направлен горизонтально, можно применить закон сохранения импульса:

$$mv = (m+M)V. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), нетрудно найти минимальную скорость шарика, при которой он преодолееет горку:

$$v = \sqrt{2gh \frac{m+M}{M}}.$$

2.3.10. Собачка и санки. Собачка массой m привязана поводком длиной l к санкам массой $M > m$. В начальный момент собачка находится рядом с санками, затем разгоняется от санок на всю длину поводка и, натягивая его, сдвигает санки с места. На какое наибольшее расстояние собачка может сдвинуть санки за один рывок, если коэффициенты трения лап собачки и полозьев санок о снег одинаковы?

Понятно, что для наибольшего перемещения санок собачка должна не только сдвинуть санки с места, сообщив им некоторую скорость, но и пытаться тащить их дальше, используя свою силу трения о снег. Сила же трения санок о снег в это время будет направлена противоположно силе трения собачки о снег. Весь процесс разгона собачки, рывка и дальнейшего движения санок можно разбить на три этапа. При разгоне собачки до скорости v приобретаемая ею кинетическая энергия должна быть равна работе силы трения на пути l :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu mgl \quad (1)$$

(работа силы трения собачки положительна). В силу кратковременности рывка санок при натяжении поводка выполняется закон сохранения импульса

$$mv = (M + m)u, \quad (2)$$

где u – стартовая скорость санок и собачки после рывка. При дальнейшем движении санок и собачки на пути S происходит их остановка. Изменение приобретенной санками и собачкой кинетической энергии должно быть равно сумме работ силы трения собачки (она положительна) и силы трения санок (она отрицательна):

$$-\frac{1}{2}(m + M)u^2 = \mu gS(m - M). \quad (3)$$

Из уравнений (1) и (2) следует

$$u = \frac{m}{m + M} \sqrt{2\mu gl}.$$

Подставляя это значение в (3), находим

$$S = l \frac{m^2}{M^2 - m^2}.$$

2.3.11. Монета на бруске. На бруске длиной l и массой M , расположенном на гладкой горизонтальной поверхности, лежит монета массой m (рис. 2.59). Коэффициент трения между монетой и бруском μ . С какой скоростью должны двигаться брусок и монета, чтобы после упругого удара бруска о стенку монета съехала с бруска?

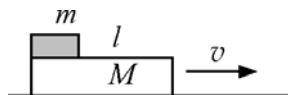


Рис. 2.59

При ударе бруска о стенку его скорость скачком изменится на противоположную. Скорость же монетки за время удара не успевает измениться, и она начнет скользить по бруску. При этом на пути l относительно бруска сила трения совершит работу

$$A = -\mu mgl.$$

Заметим, что эта работа найдена в системе отсчета, связанной с движущимся бруском. Конечно, работа не всякой силы не зависит от системы отсчета (об этом речь еще впереди). Тот факт, что полная работа сил трения не зависит от системы отсчета, имеет совершенно прозрачный физический смысл с энергетической точки зрения. В самом деле, работа сил трения равна, с противоположным знаком, изменению внутренней (тепловой) энергии тел, которое, очевидно, не должно зависеть от системы отсчета (ведь изменение температуры тела не зависит от того, какой наблюдатель его измеряет!).

Приравняем теперь работу силы трения изменению кинетической энергии системы:

$$-\mu mgl = \frac{(m + M)u^2}{2} - \frac{(m + M)v^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь u – скорость бруска с монетой в тот момент, когда монета остановится относительно бруска. Эту скорость можно найти из закона сохранения импульса:

$$Mv - mv = (m + M)u \quad (2)$$

(левая часть этого равенства написана для момента отделения бруска от стенки после удара, правая – в момент соскальзывания монеты с бруска).

В результате совместного решения системы уравнений (1) и (2) находим минимальную скорость бруска:

$$v = \sqrt{\frac{1}{2} \mu g l \left(1 + \frac{m}{M} \right)}.$$

Традиционно мы привыкли применять законы сохранения к системам, состоящим из конечного числа тел. Тем не менее эти законы с успехом можно использовать и в механике сплошных сред (жидкости или газа) при отсутствии сил внутреннего трения. В связи с этим рассмотрим две задачи.

2.3.12. Падающий цилиндр в трубе. В вертикальной трубе радиусом R , заполненной жидкостью плотностью ρ_0 , падает вдоль

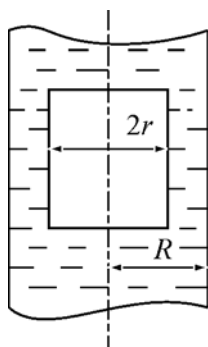


Рис. 2.60

оси длинное цилиндрическое тело плотностью $\rho > \rho_0$ и радиусом r (рис. 2.60). Найти ускорение цилиндра, пренебрегая трением.

На первый взгляд решение задачи не составляет труда. Нужно только учесть силы, действующие на цилиндр и затем записать второй закон Ньютона. В данном случае при отсутствии силы трения на цилиндр действуют две силы – сила тяжести $\rho V g$ и сила Архимеда $\rho_0 V g$, где V – объем цилиндра. Однако так было бы при неподвижном цилиндре. При падении цилиндра в движение также приходит и жидкость, что меняет распределение давления в ней. И теперь сила давления жидкости на находящееся в ней тело не равна $\rho_0 V g$. Поэтому разумно применить в данной задаче энергетический подход. При отсутствии сил трения полная механическая энергия всей системы (жидкость плюс падающее тело) не должна изменяться. Поэтому зададим цилиндру небольшое перемещение h и посмотрим, какие произошли энергетические изменения в системе.

Цилиндр приобрел некоторую скорость v и его кинетическая энергия стала равной $\frac{1}{2} \rho \pi r^2 l v^2$ (l – длина цилиндра). При этом его

потенциальная энергия уменьшилась на $\rho\pi r^2 lgh$. Кроме того, в силу несжимаемости жидкости часть ее, вытесняемая цилиндром, должна двигаться в противоположном направлении в зазоре между цилиндром и трубой. Так как цилиндр длинный, то можно пренебречь краевыми эффектами и считать, что вся жидкость в зазоре движется со скоростью v_0 . С этим связана кинетическая энергия жидкости, равная $\frac{1}{2}\rho_0\pi(R^2 - r^2)lv_0^2$. За счет опускания цилиндра на высоту h жидкость объема $\pi r^2 h$ поднимается на высоту l и ее потенциальная энергия возрастает на $\rho_0\pi r^2 hgl$. Запишем в итоге закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}\rho\pi r^2 lv^2 + \frac{1}{2}\rho_0\pi(R^2 - r^2)lv_0^2 = \rho\pi r^2 lgh - \rho_0\pi r^2 hgl. \quad (1)$$

Связь скорости движения жидкости v_0 и цилиндра v можно найти из уравнения неразрывности. При течении несжимаемой жидкости по каналам разного сечения объем жидкости, проходящей через произвольное сечение в единицу времени, сохраняется неизменным. Это приводит к тому, что сохраняется неизменным произведение скорости жидкости на площадь сечения $vS = \text{const}$. С точки зрения падающего цилиндра на него набегают со скоростью v поток жидкости площадью сечения πR^2 . Затем этот поток проходит с некоторой скоростью v'_0 в зазоре между цилиндром и трубой с площадью сечения $\pi(R^2 - r^2)$. С учетом уравнения неразрывности должно быть выполнено равенство

$$v\pi R^2 = v'_0\pi(R^2 - r^2).$$

Переходя теперь в систему отсчета, связанную с трубой ($v_0 = v'_0 - v$), получаем

$$v_0 = v \frac{r^2}{R^2 - r^2}. \quad (2)$$

Из системы уравнений (1) и (2) нетрудно выразить зависимость квадрата скорости цилиндра от высоты падения h :

$$v^2 = \frac{2(\rho - \rho_0)}{\rho + \rho_0 \frac{r^2}{R^2 - r^2}} gh. \quad (3)$$

Точно такая же связь между скоростью v и пройденным расстоянием h выполняется для равноускоренного движения

$$v^2 = 2ah, \quad (4)$$

где a – ускорение тела. Сравнивая соотношения (3) и (4), находим ускорение цилиндра:

$$a = \frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0 \frac{r^2}{R^2 - r^2}} g.$$

2.3.13. Полость в жидкости. Достаточно большой объем жидкости плотностью ρ находится под давлением P . В жидкости образовалась сферическая вакуумная полость радиусом R . Пренебрегая давлением образующихся паров, найти скорость границы полости в тот момент, когда ее радиус уменьшится до значения r .

Так как объем жидкости достаточно большой, то форма его внешней границы никак не будет влиять на поведение образовавшейся полости. Поэтому для упрощения расчетов будем считать внешней границу сферической с центром кривизны в центре образовавшейся полости. Образование полости приведет к движению жидкости и соответственно к перераспределению давления в ней, но давление на удаленной внешней границе никак не изменится. При изменении радиуса полости от R до r ее объем изменится на $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$.

В силу несжимаемости жидкости ровно на столько же уменьшится видимый объем жидкости по внешней границе. Так как изменение объема по внешней границе происходит при постоянном давлении, то работа сил давления

$$A = P\Delta V = P \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3).$$

Эта работа идет на сообщение кинетической энергии всем частицам сферического объема жидкости. Для расчета кинетической энергии разобьем весь объем жидкости на тонкие шаровые слои радиусом ξ и толщиной $d\xi$. Тогда энергия такого слоя

$$dE = \frac{1}{2} \rho 4\pi \xi^2 d\xi v^2(\xi), \quad (1)$$

где $v(\xi)$ – скорость движения всех частиц тонкого шарового слоя радиусом ξ . Эта скорость естественно различна для разных значений ξ , но ее в силу уравнения неразрывности нетрудно связать со скоростью движения границы полости v_r :

$$4\pi r^2 v_r = 4\pi \xi^2 v(\xi).$$

Откуда находим

$$v(\xi) = v_r \frac{r^2}{\xi^2}.$$

Подставляя это выражение в (1) и интегрируя по ξ от r до бесконечности, получаем

$$E = 2\pi \rho r^3 v_r^2.$$

Приравняем теперь работу сил давления кинетической энергии всех частиц жидкости:

$$P \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) = 2\pi \rho r^3 v_r^2.$$

Откуда сразу следует ответ:

$$v_r = \sqrt{\frac{2P}{3\rho} \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right)}.$$

Перейдем теперь к задачам, связанным с моментом импульса и его законом сохранения.

2.3.14. Человек на вращающемся диске. Человек массой m стоит на краю горизонтального однородного диска массой M и ра-

диусом R , который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. Человек совершает перемещение по краю диска на угол φ' относительно диска и останавливается. Пренебрегая размерами человека, найти угол поворота диска.

Данная задача очень похожа на рассмотренную ранее задачу о движении рыбака в лодке. Только здесь идет речь о вращательном движении. При отсутствии сил трения на оси вращения в данной ситуации можно применить закон сохранения момента импульса. Конечно, сила трения между человеком и диском существует (иначе человек просто не сдвинется с места!), но суммарный момент этих сил трения относительно общей оси вращения равен нулю. До начала движения полный момент импульса системы был равен нулю. При движении человека по диску момент импульса системы равен сумме моментов импульса человека и диска, и эта сумма должна быть равна нулю:

$$0 = I_{\text{ч}}\omega_{\text{ч}} + I_{\text{д}}\omega_{\text{д}}. \quad (1)$$

Здесь $I_{\text{ч}}$ – момент инерции человека относительно оси вращения, $I_{\text{ч}} = mR^2$; $I_{\text{д}}$ – момент инерции диска, $I_{\text{д}} = MR^2/2$; $\omega_{\text{ч}}$ – угловая скорость движения человека относительно земли; $\omega_{\text{д}}$ – угловая скорость вращения диска. Так как соотношение (1) выполняется для угловых скоростей в любой момент времени, то естественно оно будет выполнено и для средних значений угловых скоростей. Среднее значение угловой скорости вращения диска можно найти как $\langle \omega_{\text{д}} \rangle = \varphi / \Delta t$, где φ – угол поворота диска за время Δt . Среднее же значение угловой скорости движения человека будет равно $\langle \omega_{\text{ч}} \rangle = (\varphi' - \varphi) / \Delta t$. Таким образом, закон сохранения момента импульса можно представить в виде

$$mR^2 \frac{\varphi' - \varphi}{\Delta t} = -\frac{1}{2}MR^2 \frac{\varphi}{\Delta t}.$$

Откуда легко найти и угол поворота диска

$$\varphi = -\varphi' \frac{m}{m + \frac{M}{2}}$$

(знак минус означает, что диск поворачивается в обратную сторону).

Изменим несколько постановку задачи. Пусть теперь диск вращается с некоторой угловой скоростью ω_0 , а человек совершает медленное перемещение по радиусу диска в направлении центра. С какой угловой скоростью будет вращаться диск, когда человек перейдет в его центр. Насколько при этом изменится энергия системы и какую работу должен совершить человек?

Здесь также можно применить закон сохранения момента импульса, так как момент силы трения человека о диск равен нулю:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0 + mR^2\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega + mr^2\omega.$$

Откуда находим зависимость угловой скорости диска от положения человека:

$$\omega(r) = \omega_0 \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}.$$

При $r = 0$ получаем

$$\omega(0) = \omega_0 \left(1 + \frac{2m}{M} \right).$$

Найдем теперь изменение кинетической энергии (она обязана измениться, так как внутри системы присутствует сила трения):

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}MR^2\omega^2(0) - \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \right) \omega_0^2 \right].$$

Подставляя сюда значение угловой скорости $\omega(0)$, после несложных преобразований получаем

$$\Delta E = \frac{1}{2} \omega_0^2 m R^2 \left(1 + \frac{2m}{M} \right) > 0.$$

Заметим, что энергия системы увеличилась. Связано это с тем, что сила трения при движении человека направлена к центру диска и совершает положительную работу. Для того чтобы убедиться в этом, рассчитаем работу силы трения. При медленном перемещении человека сила трения должна быть равна центростремительной силе $m\omega^2 r$, а ее работа

$$A = \int_0^R m\omega^2 r dr = m\omega_0^2 \int_0^R \left[\frac{MR^2/2 + mR^2}{MR^2/2 + mr^2} \right]^2 r dr = \frac{1}{2} m\omega_0^2 R^2 \left(1 + \frac{2m}{M} \right),$$

что в точности совпадает с изменением кинетической энергии системы ΔE .

2.3.15. Частица в центральном поле. Частица движется по замкнутой траектории в центральном силовом поле, где ее потенциальная энергия $U = kr^2$ (k – положительная постоянная; r – расстояние частицы до центра поля O). Найти массу частицы, если наименьшее расстояние ее до точки O равно r_1 , а скорость на наибольшем расстоянии от этой точки v_2 .

Нетрудно доказать, что центральное силовое поле является потенциальным, так как работа центральных сил не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела. Поэтому при отсутствии сил трения движение частицы подчиняется закону сохранения энергии. В данном случае этот закон будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + kr_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + kr_2^2. \quad (1)$$

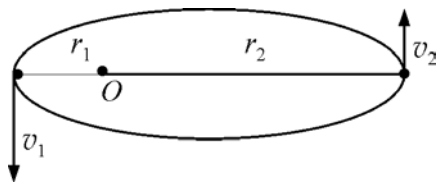


Рис. 2.61

Здесь r_2 – максимальное расстояние частицы до точки O ; v_1 – ее скорость на наименьшем расстоянии (рис. 2.61). Найти из (1) значение m не удастся, так как сюда входят еще две неизвестные

величины v_1 и r_2 . Однако, в силу определения центрального силового поля, в нем должен сохраняться и момент импульса движущейся частицы, который для максимального и минимального расстояний будет иметь вид

$$mr_1v_1 = mr_2v_2. \quad (2)$$

Совместное решение системы уравнений (1), (2) дает ответ:

$$m = \frac{2kr_1^2}{v_2^2}.$$

2.3.16. Шарик на нити. Небольшой шарик подвешен к точке O на легкой нерастяжимой нити длиной l . Затем нить с шариком отклонили на угол θ от вертикали и сообщили шарiku скорость v_0 перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой находится нить. При каком значении v_0 максимальный угол отклонения натянутой нити от вертикали окажется равным 90° ?

Шарик движется в поле тяготения Земли под действием сторонней силы натяжения нити. Эта сила (при натянутой нити) все время перпендикулярна скорости шарика и поэтому работы не совершает. В этом случае полная механическая энергия шарика в поле тяжести сохраняется:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl \cos \theta, \quad (1)$$

здесь v – скорость шарика в наивысшем положении, при котором нить составляет прямой угол с вертикалью. В этом положении шарик не может остановиться, как это было бы, если шарик толкнули в плоскости, проходящей через нить и вертикальную ось Z , проходящую через точку O . Это привело бы к нарушению закона сохранения момента импульса относительно оси Z (относительно данной оси суммарный момент силы тяжести и силы натяжения нити равен нулю). Поэтому естественно воспользоваться данным законом сохранения:

$$l \sin \theta mv_0 = lmv, \quad (2)$$

где правая часть равенства соответствует горизонтальному положению нити, а левая – исходному.

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gl}{\cos \theta}}.$$

2.3.17. Шайба внутри конуса. Небольшую шайбу поместили на внутреннюю гладкую поверхность неподвижного круглого конуса (рис. 2.62) на высоте h_1 от его вершины и сообщили ей в горизонтальном направлении по касательной к поверхности конуса скорость v_1 . На какую максимальную высоту h_2 от вершины конуса поднимется шайба?

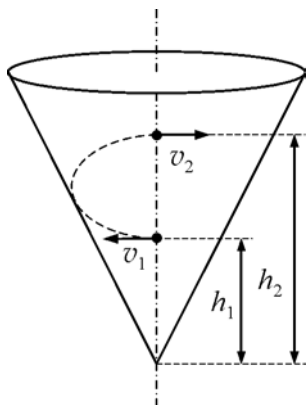


Рис. 2.62

Здесь, как и в предыдущих задачах, совершенно естественно воспользоваться законами сохранения энергии и момента импульса (относительно вертикальной оси Z , проходящей через вершину конуса):

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \quad (1)$$

$$r_1mv_1 = r_2mv_2, \quad (2)$$

где r_1 и r_2 – радиусы окружности конуса на высоте h_1 и h_2 .

Для того чтобы получить полную систему уравнений относительно всех неизвестных величин, учтем еще и геометрическое соотношение между радиусами и высотами:

$$\frac{h_2}{r_2} = \frac{h_1}{r_1}. \quad (3)$$

После алгебраических преобразований система уравнений (1)–(3) сводится к квадратному уравнению относительно h_2 , решение которого имеет вид

$$h_2 = \frac{v_1^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gh_1}{v_1^2}} \right).$$

2.3.18. Качение цилиндра по плоскости с перегибом. Сплошной однородный цилиндр радиусом r катится по горизонтальной плоскости, которая переходит в наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол θ . Найти максимальное значение скорости цилиндра v_0 , при которой он перейдет на наклонную плоскость еще без скачка. Скольжения нет.

Требование перехода на наклонную плоскость без скачка означает, что цилиндр ни на мгновение не отделяется от опоры, т.е. ни от плоскостей, ни от линии их перехода. Наличие резкого перехода горизонтальной плоскости в наклонную хотя и легко зрительно представить, но описать его на языке уравнений динамики достаточно сложно. Поэтому воспользуемся довольно часто применяемым приемом. Смоделируем этот резкий переход в виде гладкой линии, например, в виде дуги окружности радиусом R с центральным углом θ (рис. 2.63), а затем после решения задачи совершим предельный переход при $R \rightarrow 0$.

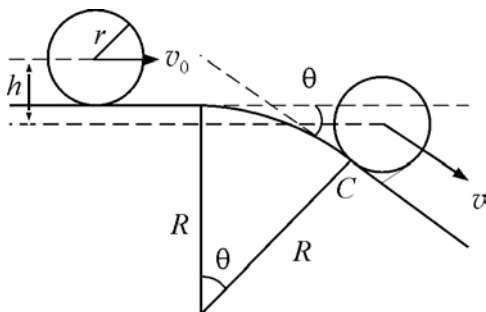


Рис. 2.63

Так как качение цилиндра в любом месте обязательно сопровождается трением, то естественно возникает вопрос: а можно ли применять закон сохранения энергии? При переходе цилиндра на наклонную плоскость без скольжения необходимо наличие силы трения покоя и именно такой, чтобы скатывание происходило без скольжения. Но трение покоя работы над цилиндром не совершает, так как точки цилиндра, к которым приложена данная сила, в каждый момент времени неподвижны. Это и позволяет воспользоваться законом сохранения энергии. Условимся отсчитывать потенциальную энергию цилиндра от его положения в момент выхода на наклонную

плоскость. Тогда его полная энергия при движении по горизонтальной поверхности будет равна $mgh + mv_0^2/2 + mv_0^2/4$, где

$$h = (R + r)(1 - \cos \theta). \quad (1)$$

При этом мы воспользовались тем, что кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения $mv_0^2/2$ и энергии вращательного движения $I\omega^2/2 = mv_0^2/4$. Полная же энергия в момент перехода цилиндра на наклонную плоскость будет равна $mv^2/2 + mv^2/4$, где v – скорость цилиндра в момент перехода. Таким образом, закон сохранения энергии можно записать в виде

$$mgh + \frac{3}{4}mv_0^2 = \frac{3}{4}mv^2. \quad (2)$$

Попытаемся теперь учесть условие безотрывного движения цилиндра. Пусть цилиндр катится по горизонтальной плоскости вначале с небольшой скоростью, такой, что он нигде не отрывается от опоры. Постепенное увеличение этой скорости приведет к тому, что в некоторой точке дуги окружности произойдет его отрыв. И если мы хотим, чтобы движение происходило без отрыва, то естественно потребовать, чтобы эта точка отрыва как раз находилась в месте перехода дуги окружности в наклонную плоскость – точка C на рис. 2.63 (далее-то он точно не оторвется от плоскости!). Все это означает, что в точке C пропадает сила реакции опоры и проекция силы тяжести на нормаль к окружности $mg \cos \theta$ должна обеспечить нормальное ускорение, равное $v^2/(R + r)$:

$$mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R + r}. \quad (3)$$

После решения системы уравнений (2), (3) с учетом соотношения (1) и совершения предельного перехода $R \rightarrow 0$, получаем ответ:

$$v_0 = \sqrt{gr \frac{7 \cos \theta - 4}{3}}.$$

2.3.19. Шарик и гантель. Шарик массой m налетает со скоростью v на гантель, состоящую из двух шаров массой M , соединенных невесомым стержнем длиной l (рис. 2.64). Скорость шарика перпендикулярна стержню, удар центральный и абсолютно упругий. Пренебрегая размерами шаров, найти скорости шарика и центра масс гантели, а также угловую скорость гантели после удара.

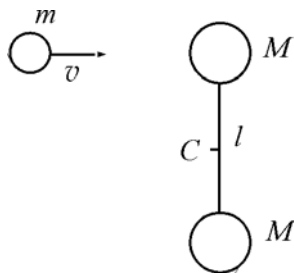


Рис. 2.64

В этой задаче выполняются все три закона сохранения – импульса, энергии и момента импульса, так как система полностью изолированная и удар абсолютно упругий.

Закон сохранения импульса:

$$mv = mv' + 2Mv_c. \quad (1)$$

Здесь v' – скорость шарика после удара; v_c – скорость центра масс гантели после удара. В силу закона сохранения импульса центр масс гантели будет двигаться после удара прямолинейно и равномерно со скоростью v_c .

Закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}2Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2. \quad (2)$$

Здесь второе слагаемое справа дает кинетическую энергию центра масс гантели, а третье – кинетическую энергию вращательного движения гантели; I_c – момент инерции гантели относительно центра масс, $I_c = 2M\frac{l^2}{4}$.

Закон сохранения момента импульса запишем относительно центра масс гантели (точка C на рис. 2.64):

$$mv\frac{l}{2} = mv'\frac{l}{2} + I_c\omega. \quad (3)$$

С формальной точки зрения мы получили нелинейную систему трех уравнений относительно трех неизвестных v' , v_c и ω . С подобными системами уравнений приходится сталкиваться довольно часто при решении задач на различные удары. Поэтому рассмотрим более подробно, каким образом систему нелинейных уравнений можно свести к системе линейных уравнений. Для этого перепишем уравнения (1)–(3) так, чтобы неизвестные величины, относящиеся к разным телам, находились с разных сторон равенств:

$$m(v - v') = 2Mv_c, \quad (4)$$

$$m(v - v') = Ml\omega, \quad (5)$$

$$m(v - v')(v + v') = 2Mv_c^2 + \frac{Ml^2\omega^2}{2}. \quad (6)$$

Из уравнений (4) и (5) следует $\omega = 2v_c / l$. Подставим это значение в (6):

$$m(v - v')(v + v') = 4Mv_c^2.$$

Поделив это уравнение на уравнение (4), получаем

$$v + v' = 2v_c. \quad (7)$$

Таким образом, мы пришли к уже линейной системе уравнений (4), (5) и (7) относительно неизвестных v' , v_c и ω . Ее решение дает следующий результат:

$$v' = v \frac{m - M}{m + M},$$

$$v_c = v \frac{m}{m + M},$$

$$\omega = \frac{v}{l} \frac{2m}{m + M}.$$

Согласно приведенным выражениям центр масс гантели после удара движется поступательно со скоростью v_c . Кроме того, начинается ее вращение, такое, что нижний шар вначале остается в покое, а в движение приходит верхний шар со скоростью $2v_c$. Этот резуль-

тат является естественным, так как в первое мгновение после соударения нижний шар еще не почувствует удар и весь удар приходится только на верхний шар гантели.

2.3.20. Гантель с пружинкой. На гладкой горизонтальной плоскости лежит гантель, состоящая из двух маленьких шариков массой m , соединенных пружинкой жесткостью k и длиной l . Одному из шариков сообщили скорость v в горизонтальном направлении перпендикулярно пружинке. Найти максимальное относительное удлинение пружинки в процессе движения, предполагая, что оно значительно меньше единицы.

Здесь, как и в предыдущей задаче, выполняются все законы сохранения – импульса, энергии и момента импульса. Однако движение шариков получается более сложным, так как шарики соединены не жестким стержнем, а пружинкой. В соответствии с законом сохранения импульса центр масс гантели будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $v_c = v/2$. Кроме того, шарики будут вращаться вокруг центра масс и совершать продольные колебания около центра масс. Для описания такого сложного движения разумно перейти в систему центра масс – Ц-систему. В этой системе закон сохранения энергии будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2} 2m \left(\frac{1}{2} v \right)^2 - \frac{1}{2} 2m v_1^2 = \frac{1}{2} k \Delta l^2, \quad (1)$$

здесь Δl – максимальное удлинение пружинки; $v/2$ – начальные скорости каждого шарика относительно центра масс (они отличаются знаком); v_1 – скорости шариков относительно центра масс при максимальной деформации пружинки. Эти скорости должны быть одинаковы по модулю в силу закона сохранения импульса.

Закон сохранения момента импульса требует выполнения равенства

$$\frac{1}{2} v \frac{l}{2} = v_1 \left(\frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2} \right).$$

Найдем отсюда v_1 :

$$v_1 = \frac{vl}{2(l + \Delta l)} = \frac{v}{2(1 + \varepsilon)},$$

где ε – максимальное относительное удлинение пружинки, $\varepsilon = \Delta l / l$.
Так как по условию $\varepsilon \ll 1$, то значение скорости

$$v_1 \approx \frac{v}{2}(1 - \varepsilon). \quad (2)$$

После подстановки выражения (2) в закон сохранения энергии (1) получаем

$$\varepsilon \approx \frac{mv^2}{kl^2}.$$

2.3.21. Соударение шарика и пластинки. Однородная тонкая квадратная пластинка со стороной l и массой M может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. В центр пластинки по нормали к ней упруго ударяется шарик массой m со скоростью v . На какой максимальный угол отклонится пластинка?

Так как удар шарика упругий и нет трения в оси, то на любом этапе выполняется закон сохранения энергии. В момент удара его можно записать в виде

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (1)$$

здесь v' – скорость шарика после удара; ω – угловая скорость пластинки после удара; I – момент инерции пластинки относительно оси вращения, $I = ml^2/3$.

Кроме того, выполняется закон сохранения момента импульса относительно оси вращения пластинки:

$$mv\frac{l}{2} = mv'\frac{l}{2} + I\omega. \quad (2)$$

А вот закон сохранения импульса здесь не выполняется, так как есть внешняя сила – сила реакции со стороны оси вращения. То, что для описания удара в данной задаче достаточно двух законов сохранения, сразу следует из чисто формальных соображений: неизвестными являются две величины – скорость шарика после удара v' и угловая скорость вращения пластинки ω .

Угол отклонения пластинки после удара можно найти из закона сохранения энергии:

$$Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m (v^2 - v'^2). \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1)–(3), находим

$$\cos \theta = 1 - \frac{48m^2 v^2}{gl(3m + 4M)^2}.$$

Понятно, что полученный ответ имеет смысл, если правая часть по модулю не больше единицы.

В заключение этой главы рассмотрим несколько **задач-парадоксов**, анализ которых позволит лучше понять содержание законов сохранения энергии.

2.3.22. Шарик на наклонной плоскости. На гладкой наклонной плоскости, переходящей в горизонтальную плоскость, на высоте h относительно ее находится маленький шарик (рис. 2.65). Скатившись на горизонтальную плоскость, шарик получает скорость v_0 . Запишем закон сохранения энергии в неподвижной относительно горизонтальной плоскости системе отсчета. В верхней точке шарик обладает только потенциальной энергией mgh , а при выходе на горизонтальную плоскость получает кинетическую энергию $mv_0^2/2$. Так как нигде нет трения, то эти энергии должны быть равны:

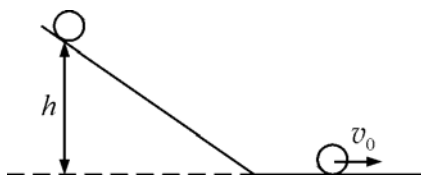


Рис. 2.65

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Данное соотношение утверждает, что потенциальная энергия шарика превратилась в его кинетическую энергию, но полная механическая энергия при этом не изменилась.

Рассмотрим теперь этот же процесс в инерциальной системе отсчета, перемещающейся вправо со скоростью \vec{v}_0 , которую получит шарик внизу. В верхней точке скорость шарика уже не равна нулю (вектор скорости по модулю равен v_0 и направлен влево), кроме того, шарик обладает и потенциальной энергией. Таким образом, в верхней точке полная энергия шарика равна $mv_0^2/2 + mgh$. В нижнем же положении скорость шарика и его высота обращаются в нуль. Значит, его полная энергия также равна нулю. Поступая, как и ранее, мы должны записать закон сохранения энергии в виде

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = 0.$$

Это равенство, во-первых, бессмысленно с формальной точки зрения. Во-вторых, с физической точки зрения возникает вопрос: куда же подевалась энергия шарика?

Парадокс здесь заключается в том, что шарик не является замкнутой системой (наличие Земли мы учли через потенциальную энергию шарика в поле тяготения). При скатывании шарик взаимодействует также и с наклонной плоскостью. При этом формируется сила реакции со стороны наклонной плоскости N , не равная силе тяжести mg . В неподвижной системе отсчета работа силы N равна нулю, так как эта сила перпендикулярна наклонной плоскости и вектору скорости скатывающегося шарика. В движущейся системе отсчета сила реакции опоры, оставаясь перпендикулярной наклонной плоскости, уже не перпендикулярна вектору скорости шарика и ее работа уже не равна нулю! Попытаемся рассчитать полную работу силы реакции при скатывании шарика. По определению за бесконеч-

но малое время dt работа этой силы $dA_N = \vec{N}\vec{v}'dt$, где \vec{v}' – скорость шарика в движущейся системе отсчета, равная разности векторов скорости шарика в неподвижной системе отсчета \vec{v} и скорости движения самой системы отсчета СО относительно неподвижной системы отсчета \vec{v}_{CO} : $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{CO}$. Таким образом, $dA_N = \vec{N}(\vec{v} - \vec{v}_{CO})dt = -\vec{N}\vec{v}_{CO}dt$ (скалярное произведение $\vec{N}\vec{v} = 0$). Произведение $-\vec{N}\vec{v}_{CO}$, как видно из рис. 2.66, равно $-Nv_{CO}\sin\alpha$, а $N = mg\cos\alpha$. Тогда $dA_N = -mg\cos\alpha v_{CO}\sin\alpha dt$. Произведение $g\sin\alpha$ равно ускорению шарика, а произведение ускорения на время dt равно изменению скорости шарика dv . Элементарная работа силы N $dA_N = -mv_{CO} \times dv\cos\alpha = -m\vec{v}_{CO} d\vec{v}$. Так как вектор \vec{v}_{CO} является постоянным, то полная работа силы N $A_N = -m\vec{v}_{CO} \Delta\vec{v}$, где $\Delta\vec{v}$ – изменение вектора скорости шарика при скатывании в неподвижной системе отсчета, модуль которого равен скорости шарика на горизонтальной плоскости v_0 . Таким образом,

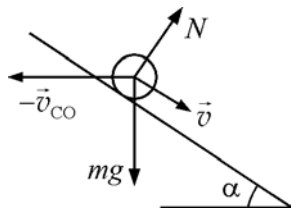


Рис. 2.66

$$A_N = -mv_0^2.$$

Запишем теперь теорему об изменении кинетической энергии (изменение кинетической энергии равно работе всех сил). Учитывая, что работа силы тяжести равна mgh , получаем

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh - mv_0^2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

т. е. никакого нарушения закона сохранения энергии мы не наблюдаем.

2.3.23. Падающий лифт. Рассмотрим теперь свободное падение шарика без начальной скорости с высоты h . В неподвижной относительно Земли системе отсчета его кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия – mgh . В нижней точке падения ша-

рик теряет потенциальную энергию, но приобретает кинетическую энергию $mv^2/2$. Тогда закон сохранения энергии будет иметь вид

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1)$$

Перейдем теперь в систему отсчета, связанную с равномерно падающим лифтом со скоростью, равной скорости шарика в нижней точке v . В этой инерциальной системе отсчета полная энергия шарика вначале равна $mgh + mv^2/2$ (в ней шарик начинает движение со скоростью $-v$!). В конечном же положении обращаются в нуль, как кинетическая, так и потенциальная энергия. И возникают те же вопросы, что и в предыдущей задаче. Но теперь списать все на какую-то неучтенную силу уже нельзя (единственная сила – сила тяжести).

Противоречие теперь носит уже принципиальный характер. В движущейся вертикально относительно Земли системе отсчета уже нельзя вводить понятие потенциальной энергии. Ведь главным условием введения потенциальной энергии является условие стационарности силового поля, т. е. если его любые характеристики не зависят от времени. В падающей же системе отсчета каждой фиксированной точке пространства соответствуют разные точки поля, и теперь работа силы тяжести по любому замкнутому пути не будет равна нулю! Таким образом, в данной ситуации просто нельзя пользоваться законом сохранения механической энергии, включающей в себя кинетическую и потенциальную энергию. Если же применить теорему об изменении кинетической энергии, то никакого парадокса не возникает. В падающей системе отсчета изменение кинетической энергии шарика равно $-mv^2/2$, а работа единственной силы тяжести равна $-mgh$ (в этой системе отсчета шарик движется против силы тяжести). Таким образом, соотношение (1) оказывается также справедливым.

2.3.24. Разгоняющийся автомобиль. По горизонтальному шоссе разгоняется из состояния покоя до скорости \vec{v} автомобиль. В неподвижной системе отсчета работа мотора по разгону автомобиля по теореме об изменении кинетической энергии равна $mv^2/2$. А в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$, эта работа,

очевидно, равна нулю (кинетическая энергия автомобиля, как в начале, так и в конце равна $mv^2/8$). Возникает совершенно естественный вопрос – куда же подевалась работа мотора? Этот вопрос можно поставить и иначе – не противоречит ли данный факт утверждению, что работа мотора совершается за счет ресурсов собственной внутренней энергии (сожгли бензин), и потому не должна зависеть от системы отсчета?

С точки зрения баланса энергий, работа мотора, конечно, не должна зависеть от системы отсчета. Однако работа мотора по разгону автомобиля явно различна в разных системах отсчета. Все дело в том, что мотор совершает работу не только над автомобилем, но и над Землей! И для восстановления правильного баланса энергий необходимо учесть изменение кинетической энергии Земли при разгоне автомобиля. Эти доводы кажутся весьма непривычными, так как обычно молчаливо предполагается, что изменением скорости Земли можно пренебречь (масса Земли M очень велика), и учитывается только кинетическая энергия тел, движущихся в поле тяжести Земли. Тем не менее дело обстоит именно так. Поэтому проведем расчеты более аккуратно.

Приращение скорости Земли $\Delta \vec{V}$ можно найти из закона сохранения импульса системы автомобиль–Земля:

$$m\vec{v} + M\Delta\vec{V} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}.$$

В системе отсчета, где начальная скорость Земли равна нулю, приращение кинетической энергии Земли ничтожно мало:

$$\Delta E_3 = \frac{M(\Delta V)^2}{2} = \frac{m}{M} \frac{mv^2}{2} \ll \frac{mv^2}{2},$$

и мы его обычно не учитываем.

Однако в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$, изменение кинетической энергии Земли отнюдь не является пренебрежимо малым:

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{v}{2} + \Delta V\right)^2 - \frac{1}{2}M\left(\frac{v}{2}\right)^2 \approx \frac{1}{2}Mv\Delta V = \frac{mv^2}{2}.$$

Видно, что и здесь полная работа мотора равна $mv^2/2$.

Таким образом, необходимо иметь в виду, что изменение кинетической энергии очень тяжелого тела (Земли, стенки и т. п.) можно считать ничтожно малым только в той системе отсчета, где это тело в начальный момент покоится.

2.3.25. Жидкость в капилляре. Вертикальную капиллярную трубку с внутренним радиусом r опускают нижним концом в жидкость с поверхностным натяжением σ и плотностью ρ . Жидкость полностью смачивает поверхность капилляра. На какую высоту поднимется жидкость?

В конечном состоянии столб жидкости покоится, поднявшись на высоту h , которую можно найти из условия равновесия. Действующая на столб жидкости сила тяжести, равная $\pi r^2 h \rho g$, уравновешена силой поверхностного натяжения, приложенной к столбику жидкости по верхней кольцевой границе соприкосновения жидкости с внутренней поверхностью капилляра. Длина этой границы равна $2\pi r$, поэтому сила натяжения равна $2\pi r \sigma$. Из равенства сил следует

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}. \quad (1)$$

Найдем теперь высоту подъема из энергетических соображений. Работа силы поверхностного натяжения, совершаемая при подъеме жидкости на высоту h , $A = 2\pi r \sigma h$. Эта работа идет на изменение потенциальной энергии столба жидкости. Центр масс этого столба массой $m = \pi r^2 h \rho$ находится на высоте $h/2$ над поверхностью жидкости в сосуде. Поэтому его потенциальная энергия

$$U = mg \frac{h}{2} = \pi r^2 h \rho g \frac{h}{2}.$$

Из равенства потенциальной энергии и работы следует

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g r}. \quad (2)$$

Видно, что найденное разными способами значение h отличается в 2 раза. В чем дело? Как это ни парадоксально, оба ответа правильны. Дело в том, что выражение (1) дает установившийся уровень жидкости в капилляре, а выражение (2) определяет максимальную высоту подъема жидкости при отсутствии сил трения. В этом случае после подъема на высоту $h = \frac{4\sigma}{\rho g r}$ начинаются колебания столба

жидкости. Жидкость опускается до исходного уровня, затем поднимается и т. д. И в итоге за счет сил трения установится в равновесном состоянии с высотой $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$. При достаточно большой вязкости

жидкости колебания вообще не возникают: на высоте $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$ скорость жидкости уже уменьшается до нуля.

Начальное состояние системы, когда нижний конец капилляра пришел в соприкосновение с жидкостью, — это неравновесное состояние, из которого система самопроизвольно переходит в конечное равновесное состояние, причем этот переход совершается необратимым образом с выделением теплоты.

3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

3.1. Методы исследования собственных колебаний

Обычно при решении задач на собственные незатухающие колебания применяют два подхода. Первый подход основан на применении либо второго закона Ньютона, либо основного закона динамики вращательного движения. Тогда уравнения динамики сводятся к дифференциальному уравнению типа

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

решение которого имеет вид

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

здесь x – смещение от положения равновесия; A – амплитуда колебаний, определяемая начальными условиями; ω_0 – частота собственных колебаний.

Второй подход связан с применением закона сохранения энергии. Энергию колебательной системы довольно часто можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \alpha q^2 + \frac{1}{2} \beta \left(\frac{dq}{dt} \right)^2, \quad (1)$$

где q – обобщенная переменная, характеризующая положение системы; α и β – некоторые постоянные, определяемые свойствами системы. Если сравнить это выражение с энергией пружинного маятника

$$W_{\text{п.м}} = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m v^2,$$

для которого $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (k – жесткость пружины; m – масса), то видно, что частота колебаний рассматриваемой системы

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha/\beta}.$$

Рассмотрим для примера колебательный контур с емкостью C и индуктивностью L без сопротивления. Его полную энергию можно представить в виде

$$W_{\text{к.к}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2,$$

где q – заряд конденсатора; I – сила тока, $I = \frac{dq}{dt}$. Сравнивая это выражение с (1), находим, что частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Попробуем применить этот подход к пружинному маятнику массой m с пружинкой жесткостью k и массой $m_0 \ll m$ (рис. 3.1). Его полная механическая энергия складывается из трех слагаемых – кинетической энергии груза $1/2mv^2$, потенциальной энергии пружинки $1/2kx^2$ и ее кинетической энергии (напомним, что пружинка обладает массой). Для расчета кинетической энергии пружинки выделим ее малый элемент

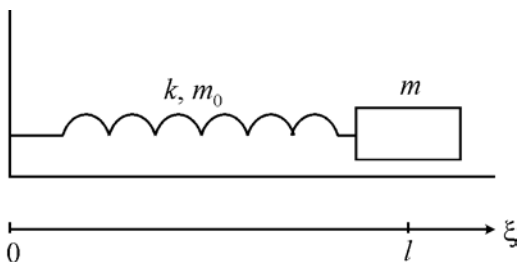


Рис. 3.1

длиной $d\xi$ и массой $\frac{m_0}{l} d\xi$. Тогда его кинетическая энергия

$$dE_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l} d\xi v_0^2(\xi),$$

где $v_0(\xi)$ – скорость маленького элемента пружинки, отстоящего от ее начала на расстояние ξ . Как изменяется эта скорость, нам неизвестно (это самостоятельная задача), но в качестве первого прибли-

жения, полагая колебания малыми, разумно взять ее в виде линейной функции

$$v_0(\xi) = \frac{v}{l} \xi,$$

где v – скорость груза. Кинетическая энергия всей пружинки

$$E_{\text{кр}} = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{m_0}{l} \frac{v^2}{l^2} \xi^2 d\xi = \frac{1}{6} m_0 v^2,$$

и для полной энергии пружинного маятника получаем

$$W = \frac{1}{2} (m + m_0/3) v^2 + \frac{1}{2} kx^2,$$

что сразу дает ответ для частоты колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + m_0/3}}.$$

Гармонические колебания вида $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ возникают в системах, для которых потенциальная энергия $U(x)$ является квадратичной функцией координаты x . Такая ситуация реализуется, как правило, при малых отклонениях системы от равновесия, в котором функция $U(x)$ имеет минимум. При произвольных же отклонениях от равновесия $U(x)$ может и не быть квадратичной функцией координаты. Рассмотрим для пояснения сказанного следующую задачу.

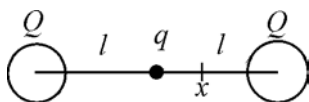


Рис. 3.2

Шарик небольших размеров с зарядом q и массой m может двигаться без трения по натянутой нити длиной $2l$, на концах которой закреплены неподвижные заряды Q (рис. 3.2). Найти частоту малых колебаний.

Для определения вида потенциальной энергии сместим заряд q от положения равновесия на величину x . Тогда потенциальная энергия взаимодействия заряда q с зарядами Q

$$U(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{l+x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{l-x},$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Понятно, что при произвольных значениях x потенциальная энергия никак не похожа на квадратичную функцию. Имея же в виду только малые колебания ($x \ll l$), функцию $U(x)$ нетрудно представить в виде

$$U(x) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2qQ}{l} \left(1 + \frac{x^2}{l^2} \right) = U(0) + \frac{1}{2} kx^2,$$

где $U(0) = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 l}$; $k = \frac{4qQ}{\pi\varepsilon_0 l^3}$ (при этом мы учли известную приближенную формулу $\frac{1}{1-x^2} \approx 1+x^2$ при $x \ll 1$).

В силу произвольности выбора начала отсчета потенциальной энергии можно положить $U(0) = 0$. Тогда полная энергия заряда q

$$W = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

Откуда сразу находим выражение для частоты малых колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{qQ}{\pi m l \varepsilon_0}}.$$

В общем случае при произвольной функции $U(x)$ ее можно разложить в ряд Маклорена по степеням x :

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2} U''(0)x^2,$$

ограничиваясь ввиду малости x тремя слагаемыми (для простоты мы приняли, что в положении равновесия $x = 0$). Поскольку $U(x)$ при $x = 0$ имеет минимум, то $U'(0)$ равна нулю, а $U''(0)$ положительна. Введя обозначение $U''(0) = k > 0$ и полагая $U(0) = 0$, приходим к полученному выше результату:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2.$$

Если же $U''(0)$ окажется равной нулю, то, очевидно, следует сохранить в ряду Маклорена слагаемое, пропорциональное четвертой степени координаты. В этом случае закон сохранения энергии также позволяет получить явное выражение для периода колебаний, справедливое не только для малых колебаний, при которых потенциальная энергия является квадратичной функцией координаты. Пусть полная энергия имеет вид

$$W = U(x) + \frac{1}{2}mv^2,$$

где $U(x)$ – некоторая функция координаты (для пружинного маятника $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$). Исходя из закона сохранения энергии, можно записать

$$U(x) + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = U(A),$$

где A – размах колебаний (для гармонических колебаний это амплитуда). Найдём отсюда скорость колебаний:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[U(A) - U(x)]}.$$

Разрешим это уравнение относительно dt :

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[U(A) - U(x)]}}.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получим выражение для периода колебаний:

$$T = 4 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[U(A) - U(x)]}} \quad (2)$$

Для иллюстрации этого подхода найдём период колебаний нестандартного пружинного маятника. Груз массой m , который

может перемещаться без трения по горизонтальной плоскости, упруго закреплен с помощью вертикальной пружины с коэффициентом жесткости k (рис. 3.3). В положении равновесия пружина не растянута и ее длина равна l_0 . Для определения потенциальной энергии пружины выразим ее удлинение через смещение груза x :

$$\Delta l = \sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0.$$

Тогда

$$U(x) = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{k}{2} \left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0 \right)^2.$$

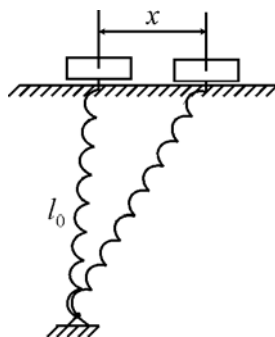


Рис. 3.3

Предполагая колебания малыми ($x \ll l_0$), последнее выражение можно представить в виде

$$U(x) = \frac{kx^4}{8l_0^2} = \alpha x^4,$$

где $\alpha = \frac{k}{8l_0^2}$. Заметим, что дифференциальное уравнение колебаний

(второй закон Ньютона) оказывается нелинейным. В самом деле сила, действующая на груз,

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{kx^3}{2l_0^2}.$$

И уравнение колебаний приобретет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{2l_0^2} x^3 = 0.$$

Таким образом, из предположения малости колебаний не обязательно следует линейное описание системы!

Для определения периода колебаний подставим $U(x)$ в выражение (2):

$$T = 4 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m} [A^4 - x^4]}}.$$

Введем замену переменных $u = x / A$. Тогда выражение для периода можно записать в виде

$$T = \frac{4\sqrt{m}}{A\sqrt{2\alpha}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Этот интеграл выражается через гамма-функцию $\Gamma(z)$:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \approx 1,311.$$

И для периода колебаний получаем окончательное выражение:

$$T = 3,71 \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{l_0}{A}.$$

В этом выражении можно видеть проявление одного из характерных свойств нелинейных систем – их неизохронность, т.е. зависимость периода свободных колебаний от амплитуды.

Еще один пример нелинейной колебательной системы – физический и математический маятники. Колебания физических и математических маятников являются изохронными (т.е. период колебаний не зависит от амплитуды) только при достаточно малых амплитудах. При увеличении амплитуды колебаний они становятся неизохронными и, кроме того, не являются чисто гармоническими (в них появляются гармоники более высоких порядков).

Для установления зависимости периода колебаний (и соответственно частоты) от амплитуды применим энергетический подход к незатухающим колебаниям физического маятника.

Из закона сохранения энергии следует $\frac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = mga(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$, где φ – угол отклонения маятника от положения равновесия; φ_0 – максимальное значение угла отклонения (амплитуда колебаний); I – момент инерции маятника; a – расстояние от точки подвеса до центра инерции маятника (рис. 3.4).

Введем в рассмотрение период колебаний физического маятника в приближении малых амплитуд

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}.$$

Тогда закон сохранения энергии можно будет представить в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4\pi}{T_0} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

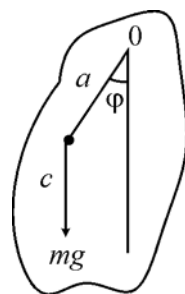


Рис. 3.4

Для определения периода колебаний разрешим это уравнение относительно dt , проинтегрируем его по углу от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$ и умножим результат на четыре. В итоге получаем

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Путем последовательной замены переменных $x = \frac{\sin(\varphi/2)}{k}$ и $x = \sin u$ полученное выражение для периода колебаний можно привести к полному эллиптическому интегралу первого рода:

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}},$$

где обозначено $k = \sin(\varphi_0/2)$.

Данный интеграл не выражается через элементарные функции. Однако учитывая, что $|k \sin x| \leq 1$, подынтегральное выражение можно разложить в ряд по формуле бинома Ньютона и после почленного интегрирования приходим к формуле

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\Phi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\Phi_0}{2} + \dots \right].$$

С достаточной для практики точностью можно учесть только первые два члена этого ряда:

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\Phi_0}{2} \right]. \quad (3)$$

Значения относительного отклонения в процентах периода колебаний T , рассчитанного по формуле (3), от значения T_0 для различных амплитуд следующие:

Φ_0 , град	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$(T-T_0)/T_0$, %	0,2	0,7	1,7	2,9	4,5	6,3	8,2	10,3	12,5

Итак, мы выяснили, что колебания математического и физического маятника изохронны только при малых амплитудах. Точно так же колебания материальной точки, движущейся по дуге окружности, обращенной выпуклостью вниз, под действием силы тяжести будут в общем случае неизохронными. В связи с этим возникает вопрос: существует ли такая гладкая кривая, при движении по которой под действием силы тяжести материальная точка будет совершать гармонические изохронные колебания при любых амплитудах? Такая задача была решена Гюйгенсом, который показал, что такой кривой является перевернутая циклоида. При доказательстве Гюйгенс опирался в значительной степени на кинематические свойства циклоиды как кривой, которую описывает фиксированная точка окружности, катящейся без скольжения по прямой. Найдем период колебаний материальной точки, движущейся по циклоиде (циклоидаальный маятник), исходя из более простых физических соображений.

Рассмотрим циклоиду, обращенную выпуклостью вниз. В соответствии с этим примем, что окружность расположена ниже горизонтальной прямой, по которой она катится (эта прямая на рис. 3.5 изображена штриховой линией). За ось X примем параллельную ей прямую, смещенную вниз на диаметр окружности $2R$. Пусть точка A на катящейся окружности, описывающая циклоиду, в исходном положении находится на оси Y в наивысшей точке. Если окружность при качении повернется на угол φ , то ее центр C переместится вправо на расстояние $R\varphi$.

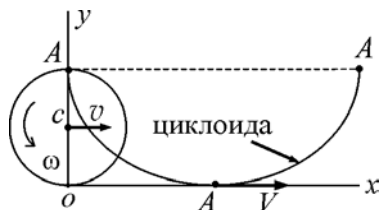


Рис. 3.5

При этом точка A сместится относительно центра влево на расстояние $R\sin\varphi$ и вниз на расстояние $R(1 - \cos\varphi)$. Тогда прямоугольные координаты точки A примут значения:

$$x = R(\varphi - \sin\varphi), y = R(1 + \cos\varphi).$$

Эти уравнения задают циклоиду в параметрическом виде (параметр φ является функцией времени $\varphi = \omega t$, где ω равна угловой скорости вращения колеса). Пусть теперь x и y означают координаты материальной точки, совершающей циклоидальные колебания под действием силы тяжести. Тогда потенциальная энергия точки $U = mgy$, а кинетическая — $E = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$. Найдя производные \dot{x}, \dot{y} , после элементарных преобразований получаем

$$U = 2mgR\cos^2\varphi/2, \quad E = 2mR^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi/2.$$

Введем новую переменную $q = \cos\varphi/2$. Тогда $\dot{q} = -(1/2)\dot{\varphi}\sin\varphi/2$. Эта переменная q может быть принята за обобщенную координату, определяющую положение колеблющейся точки, а ее производная \dot{q} — за обобщенную скорость. В этих обозначениях

$$U = 2mgRq^2, \quad E = 8mR^2\dot{q}^2.$$

Данные соотношения показывают, что потенциальная энергия является квадратичной функцией координаты q , а кинетическая энергия – квадратичная функция скорости \dot{q} с постоянными коэффициентами. Отсюда сразу делаем вывод о том, что при любых амплитудах колебания циклоидального маятника будут изохронными и гармоническими с периодом $T = 2\pi\sqrt{4R/g}$.

При малых амплитудах колебаний движение циклоидального маятника почти не отличается от движения математического маятника по окружности радиусом, равным радиусу кривизны циклоиды в нижней точке. Найдем его значение. Точка A (см. рис. 3.5) описывает данную циклоиду независимо от того, катится ли колесо равномерно или с ускорением, важно только, чтобы оно не проскальзывало. Проще всего рассмотреть, разумеется, равномерное качение колеса. Такое качение получается в результате сложения равномерного вращения колеса вокруг оси с угловой скоростью ω и равномерного поступательного движения, линейная скорость v которого равна ωR .

Во всех инерциальных системах отсчета материальная точка имеет одно и то же ускорение. Поэтому находить его можно в любой такой системе отсчета. Ясно, что ускорение точек обода колеса связано только с его вращением вокруг оси. Поэтому ускорение любой точки обода a направлено по радиусу к центру колеса и определяется выражением

$$a = v^2 / R . \quad (4)$$

Значит, и в нижней точке циклоиды ускорение элемента обода колеса равно v^2 / R и направлено вверх.

Рассмотрим теперь движение этой же точки обода как движение по циклоиде. Скорость в любой точке траектории направлена по касательной к ней; значит, в нижней точке циклоиды скорость направлена горизонтально. Ускорение же, как мы выяснили, направлено верти-

кально вверх, т.е. перпендикулярно скорости. Поэтому найденное выше ускорение также может быть записано в виде

$$a = \frac{V^2}{r}, \quad (5)$$

где V – скорость точки обода в ее низшем положении; r – искомый радиус кривизны циклоиды.

Скорость любой точки обода катящегося колеса равна векторной сумме скорости поступательного движения колеса и линейной скорости вращения вокруг оси. При отсутствии проскальзывания эти скорости равны по модулю, а в нижней точке и направлены одинаково. Поэтому $V = 2v$ и, сравнивая формулы (4) и (5), находим

$$r = 4R.$$

Так как радиус кривизны в нижней точке как раз и равен длине математического маятника l , то мы попутно получили и формулу для периода колебаний математического маятника при малых амплитудах $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

3.2. Период, частота и амплитуда собственных колебаний

3.2.1. Математический маятник между наклонными стенками. Между двумя наклонными стенками с малым углом полураствора α находится шарик на нити длиной l (рис. 3.6). Толчком ему сообщают скорость v . Найти период колебаний (взаимодействие со стенкой считать упругим).

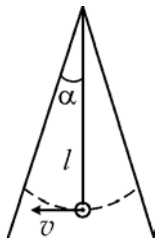


Рис. 3.6

Понятно, что если начальная скорость шарика настолько мала, что он не ударяется о стенки, то период колебаний рассчитывается как для обычного математического маятника:

$$T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Найдем, при какой скорости шарика v_{\min} это возможно. Исходя из закона сохранения энергии, получаем

$$\frac{1}{2}mv_{\min}^2 = mgl(1 - \cos\alpha).$$

При малом угле α находим $v_{\min} = \alpha\sqrt{gl}$. Если же начальная скорость шарика больше v_{\min} , то он начинает упруго ударяться о стенки, причем после каждого удара скорость шарика просто изменяет знак. Это

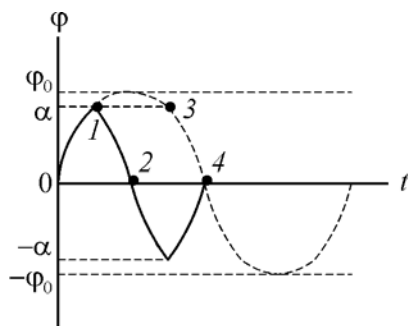


Рис. 3.7

означает, что после удара участок 1–2 зависимости угла отклонения от времени (рис. 3.7) повторяет участок 3–4, который был бы при свободных колебаниях. Уравнение свободных колебаний имеет вид

$$\phi = \phi_0 \sin \omega_0 t,$$

где ϕ_0 – угловая амплитуда малых свободных колебаний, $\phi_0 = v/\sqrt{g/l}$;

ω_0 – частота свободных колебаний, $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Полагая $\varphi = \alpha$, найдем время достижения шариком стенки:

$$\alpha = \varphi_0 \sin \omega_0 t_1 \rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arcsin(\alpha / \varphi_0).$$

Период же колебаний будет больше этого времени в 4 раза:

$$T = 4t_1 = \frac{4}{\omega_0} \arcsin(\alpha / \varphi_0) = T_0 \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\alpha \sqrt{gl}}{v} \text{ при } v \geq \alpha \sqrt{gl}.$$

3.2.2. Математический маятник на тележке. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массой M с установленным на ней математическим маятником длиной l и массой m (рис. 3.8). Найти период колебаний.

Эта задача существенно отличается от обычного математического маятника тем, что точка подвеса сама совершает колебания в горизонтальной плоскости.

Попробуем несколько видоизменить реальную ситуацию. Так как тележка вместе со стойкой жесткая, то саму эту тележку можно представить как материальную точку массы M , находящуюся на противоположном от шарика конце нити (см. рис. 3.8). В этой системе двух материальных точек нет внешних сил, действующих по горизонтали. Поэтому в силу закона сохранения импульса в ней существует точка C (рис. 3.9), не совершающая горизонтальных колебаний – центр инерции. Конечно, эта точка слегка колеблется по вертикали, но в силу малости самих колебаний маятника вертикальными колебаниями можно пренебречь. Таким образом, задача сводится к колебаниям материальной точки массой m относительно точки C на нити длиной l' .

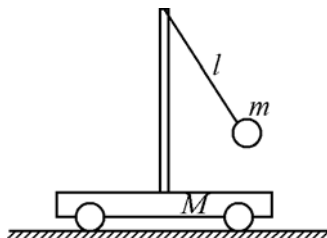


Рис. 3.8

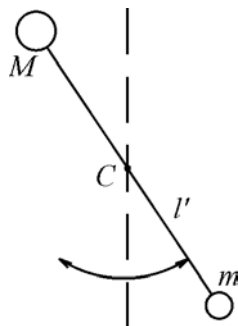


Рис. 3.9

Положение центра инерции можно определить по формуле

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

Помещая начало отсчета оси x в точке с массой m , легко находим l' :

$$l' = \frac{M}{m + M} l.$$

Для периода колебаний получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \left(1 + \frac{m}{M}\right)}}.$$

3.2.3. Два шарика на пружинке. На гладкой горизонтальной поверхности находятся два шарика массами m_1 и m_2 , связанные пружинкой жесткости k . Найти частоту колебаний такой системы (рис. 3.10).

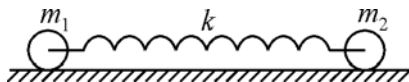


Рис. 3.10

Рассмотрим несколько вариантов решения данной задачи, каждый из которых иллюстрирует различные физические подходы.

Первый вариант. Так как мы наблюдаем одновременное движение двух тел, то разумно описать движение каждого из них. Пусть x_1 и x_2 — отклонения от положения равновесия первого и второго шарика. Запишем для них второй закон Ньютона:

$$\begin{aligned} k(x_2 - x_1) &= m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \\ -k(x_2 - x_1) &= m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \end{aligned} \tag{1}$$

(здесь учтено, что сила упругости определяется не отклонением от положения равновесия каждого шарика, а разностью этих отклонений).

Введем новую переменную: $x_1 - x_2 = \xi$. Тогда система уравнений (1) перепишется в виде

$$\begin{aligned} -k\xi &= m_1 \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} \right), \\ k\xi &= m_2 \left(\frac{d^2x_2}{dt^2} \right). \end{aligned}$$

После исключения из них переменной x_2 приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \xi = 0.$$

Откуда находим, что частота колебаний должна быть

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

где μ – так называемая приведенная масса системы из двух частиц,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Второй вариант. Из закона сохранения импульса следует, что частоты колебаний этих шариков должны быть одинаковыми, а сами колебания являются противофазными. Полагая колебания шариков гармоническими, представим отклонение от положения равновесия каждого из них в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos \omega_0 t, \\ x_2 &= -a_2 \cos \omega_0 t, \end{aligned}$$

где a_1, a_2 – амплитуды колебаний. Подставляя эти выражения в систему уравнений (1) и сокращая на $\cos \omega_0 t$, получаем

$$\begin{aligned} k(a_1 + a_2) &= m_1 a_1 \omega_0^2, \\ k(a_1 + a_2) &= m_2 a_2 \omega_0^2. \end{aligned}$$

Из этих уравнений нетрудно найти частоту колебаний ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

Кроме того, мы нашли и соотношение амплитуд колебаний шариков:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Третий вариант (самый физический). Нетрудно увидеть, что эта задача очень похожа на предыдущую задачу о колебаниях математического маятника на тележке. В данной системе также есть точка C (центр инерции), не совершающая колебаний. Ее расстояние от массы m_1 можно определить по формуле

$$l_1 = l \frac{m_2}{m_1 + m}.$$

Таким образом, задача сводится к колебаниям пружинного маятника массы m_1 на пружинке жесткостью k_1 . Эту жесткость можно выразить через жесткость всей пружины k :

$$k_1 = k \frac{l}{l_1} = k \frac{m_1 + m_2}{m_2}.$$

Тогда частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

Изменим теперь несколько условие задачи. Пусть шарики имеют одинаковую массу m и в момент времени $t=0$ к одному из них приложили постоянную горизонтальную силу F_0 , направленную от второго шарика. Найти разность между максимальной и минимальной длиной пружины.

Из второго закона Ньютона для этой системы следует, что центр инерции получит ускорение $a_c = F_0 / 2m$. Понятно, что описывать

движение шариков в неподвижной лабораторной системе отсчета крайне неудобно, поэтому перейдем в систему отсчета, привязанную к центру инерции. Эта система отсчета уже неинерциальная и на каждое тело кроме сил, обусловленных взаимодействием, будет действовать сила инерции $F_{in} = ma_c = F_0 / 2$, направленная против силы F_0 .

Таким образом, в неинерциальной системе отсчета динамика движения правого шарика (рис. 3.11) будет описываться уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2kx = F_0 / 2,$$

здесь $2k$ – это жесткость половины пружины (уравнение движения левого шарика аналогично). Данное неоднородное дифференциальное уравнение легко свести к однородному путем замены переменных $\xi = x - F_0 / 4k$:

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2k\xi = 0.$$



Рис. 3.11

Из этого уравнения сразу следует, что постоянная внешняя сила не изменяет частоту колебаний ($\omega = \sqrt{2k/m}$ – это мы уже знаем из предыдущей задачи). Для определения размаха колебаний вспомним, что амплитуда определяется как максимальное смещение от положения равновесия. В положении равновесия ускорение шариков равно нулю, и для данного положения справедливо

$$\frac{F_0}{2} = 2kA.$$

Откуда находим $A = F_0 / 4k$. Тогда минимальное расстояние между шариками равно исходной длине пружины l_0 , а максимальное равно $l_0 + 2 \cdot 2A$, и разность длин пружины составит

$$\Delta l = 4A = F_0 / k.$$

3.2.4. Пружинный маятник на горизонтальной плоскости с трением. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ лежит брусок массой m , соединенный горизонтальной пружиной жесткостью k с вертикальной стенкой (рис. 3.12). Вначале брусок

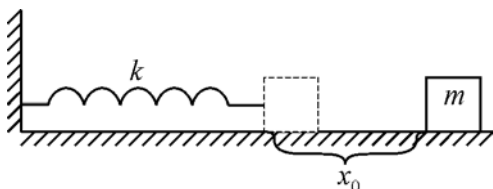


Рис. 3.12

сместили так, что пружина растянулась на x_0 и затем отпустили. Через какое время брусок остановится, если после остановки тела пружина оказалась недеформированной?

При колебаниях на брусок действуют две силы – сила упругости, равная $-kx$ (x – растяжение пружины), и сила трения скольжения, равная μmg . Эта сила остается постоянной по модулю и всегда направлена против скорости движения бруска, что приводит к затуханию колебаний. В то же время сила трения никак не влияет на период колебаний, так как она при каждом движении бруска в одну сторону не изменяется. Ранее уже отмечалось, что постоянная сила не влияет на период колебаний, поэтому его можно найти по известной формуле для пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Для определения времени колебаний, очевидно, осталось найти полное число колебаний. Чтобы найти число колебаний бруска до остановки, необходимо знать, насколько брусок за счет силы трения не доедет до той точки, в которой он остановился бы без

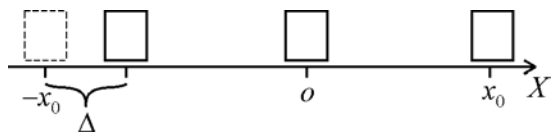


Рис. 3.13

трения (рис. 3.13). Если мы будем знать, как эта величина (Δ) изменяется при каждом колебании, то сможем затем найти и число

колебаний до остановки. Запишем для первого колебания теорему об изменении кинетической энергии:

$$\Delta E = 0 = A_{\text{тр}} + A_{\text{упр}},$$

где $A_{\text{тр}}$ – работа силы трения, равная $-\mu mg(2x_0 - \Delta)$; $A_{\text{упр}}$ – работа силы упругости, равная $kx_0^2/2 - k(x_0 - \Delta)^2/2$. Таким образом, для величины Δ получаем квадратное уравнение

$$-\mu mg(2x_0 - \Delta) + \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}k(x_0 - \Delta)^2 = 0,$$

которое имеет два корня: $\Delta = 2\mu mg/k$ и $\Delta = 2x_0$. Второй корень не имеет физического смысла и его следует отбросить. Что же мы получили? При каждом колебании в одну сторону, независимо от величины x_0 , брусок будет не доезжать одно и то же расстояние $\Delta = 2\mu mg/k$, поэтому число колебаний до остановки

$$N = \frac{x_0}{2\Delta} = \frac{x_0 k}{4\mu mg}.$$

Тогда полное время движения бруска составит

$$\tau = NT = \frac{x_0}{2\mu g} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3.2.5. Пружинный маятник на ленте транспортера. На горизонтальной ленте транспортера, движущейся со скоростью u , находится груз массой m , связанный со стенкой пружиной жесткостью k (рис. 3.14). В начальный момент времени пружина не деформирована, а груз из-за трения движется вместе с лентой. Исследовать характер движения груза и определить амплитуду возникших колебаний.

Казалось бы, из-за трения, как и в предыдущей задаче, колебания должны

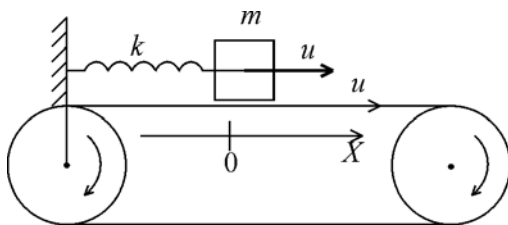


Рис. 3.14

быть затухающими, и тогда непонятно, о какой амплитуде идет речь. На самом же деле ситуация здесь совершенно иная. Так как скорость груза никогда не может превысить скорость ленты, то сила трения, исключая самый начальный этап движения, всегда равна μmg и направлена в одну и ту же сторону. Работа такой силы за одно полное колебание всегда будет равна нулю и колебания будут незатухающими!

Во многих задачах на колебания очень полезным оказывается понятие фазового портрета системы. Это кривые, описывающие движение тела в переменных импульс–координата. Пусть точка совершает гармонические колебания по закону

$$x = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Тогда ее импульс

$$p = mv = mA\omega \cos(\omega t + \alpha).$$

Исключая из этих уравнений время, найдем связь импульса и координаты при гармонических колебаниях:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{mA^2\omega^2} = 1.$$

А это есть уравнение эллипса в координатах p, x (рис. 3.15). Кстати, как будет выглядеть фазовый портрет для затухающих колебаний при малом затухании?

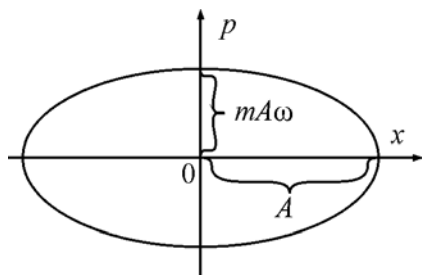


Рис. 3.15

Попробуем построить такой фазовый портрет для нашей задачи в несколько усеченном варианте – найдем графическую зависимость скорости тела v от его координаты x .

Вначале, когда пружина еще не растянута и груз движется вместе с лентой, сила трения является трением покоя и равна силе упру-

гости пружины. Это означает, что скорость тела вначале не изменяется (рис. 3.16).

Затем, когда пружина растянется настолько, что сила упругости сравняется с силой трения скольжения, груз начнет отставать от ленты. Обозначим величину деформации пружины (положение груза) в этот момент как x_0 . Эта точка является положением равновесия тела и его мож-

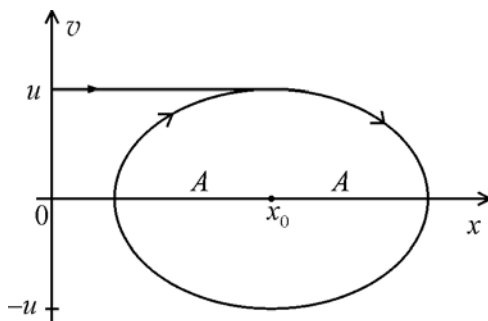


Рис. 3.16

но найти из условия

$$kx_0 = \mu mg. \quad (1)$$

При дальнейшем движении груза сила упругости будет расти, а сила трения будет оставаться постоянной, что приведет к уменьшению скорости тела. При некотором предельном растяжении пружины тело остановится и затем начнет двигаться обратно. Обратное движение тела в точности повторяет его прямое движение, так как величины силы упругости и силы трения будут теми же самыми в той же точке, сменится лишь знак скорости. После того, как тело пройдет положение равновесия (точка x_0), его скорость будет уменьшаться по модулю до нуля (сила трения стала больше силы упругости). После остановки тело начнет двигаться вправо, увеличивая скорость, и подойдет к положению равновесия со скоростью, равной скорости ленты. Таким образом, после того как груз в первый раз достигнет положения равновесия, установятся гармонические колебания с некоторой амплитудой A .

Для определения амплитуды колебаний запишем для участка движения от x_0 до $x_0 + A$ теорему об изменении кинетической энергии:

$$-\frac{1}{2}mu^2 = \mu mgA - \frac{1}{2}k(x_0 + A)^2 + \frac{1}{2}kA^2.$$

Откуда с учетом соотношения (1) находим

$$A = u \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Этот же результат можно получить и из формальных соображений. Так как колебания грузика являются гармоническими, то можно записать

$$x = x_0 + A \sin \omega t, \quad (2)$$

где x_0 – положение равновесия тела; A – амплитуда колебаний; ω – частота, равная $\sqrt{k/m}$. Продифференцируем соотношение (2) по времени:

$$u = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t.$$

Полагая здесь $t = 0$, находим

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = u = A\omega.$$

Откуда

$$A = \frac{u}{\omega} = u \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Изменим несколько условие задачи. Пусть теперь начальная скорость груза равна нулю. Требуется выяснить, при какой скорости ленты, движение груза будет гармоническим. Как зависит амплитуда установившихся колебаний от скорости ленты u ?

Для понимания характера происходящего движения груза попробуем, как и в предыдущей задаче, построить графическую зависимость скорости груза от его положения.

Вначале скорость ленты явно больше скорости груза, и сила трения будет равна силе трения скольжения μmg . Полная сила, действующая на груз, будет равна $\mu mg - kx$. Под действием данной си-

лы груз может приобрести максимальную скорость v_{\max} , которую найдем из условия

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \int_0^{x_0} (\mu mg - kx)dx,$$

где x_0 – положение равновесия груза, определяемое соотношением

$$kx_0 = \mu mg.$$

Из этих двух соотношений находим максимальную скорость груза, которую он мог бы приобрести под действием силы $\mu mg - kx$:

$$v_{\max} = \mu g \sqrt{\frac{m}{k}},$$

если, разумеется, она не превышает скорости ленты.

Так как груз не может двигаться быстрее ленты, то дальнейший анализ движения груза зависит от того, превышает ли расчетное значение v_{\max} скорость ленты или нет. Рассмотрим вначале случай $v_{\max} < u$.

В этой ситуации максимальная скорость груза будет достигнута в точке равновесия x_0 (участок 0–1, рис. 3.17, а) и затем его скорость начнет убывать (участок 1–2) до остановки груза. После остановки груз начнет двигаться в обратную сторону и в итоге вернется в точку 1. Таким образом, при выполнении условия

$$u > \mu g \sqrt{\frac{m}{k}}$$

сразу начнутся гармонические колебания с амплитудой

$$A_1 = x_0 = \frac{\mu mg}{k}.$$

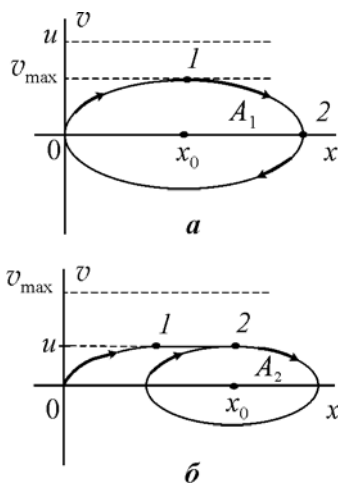


Рис. 3.17

Если же расчетное значение v_{\max} превышает u , то после достижения грузом скорости ленты его скорость некоторое время будет оставаться постоянной (участок 1–2 рис. 3.17, б) до точки $x = x_0$ и мы приходим к ситуации, рассмотренной в предыдущей задаче, т.е. при $u < \mu g \sqrt{\frac{m}{k}}$ установятся гармонические колебания с амплитудой

$$A_2 = u \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ее максимальное значение нетрудно найти, если вместо скорости u подставить значение v_{\max} :

$$A_{2\max} = \mu g \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\mu}{k} mg,$$

что, естественно, совпадает со значением A_1 .

3.3. Гармоническое движение

3.3.1. Полет камня в глубоком тоннеле. Через центр Земли от одного полюса к другому прорыт прямой тоннель (рис. 3.18). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить время полета камня от одного полюса к другому. Плотность Земли считать постоянной.

Направим ось X с началом в центре Земли вдоль тоннеля и запишем для падающего камня второй закон Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F(x),$$

где $F(x)$ – модуль силы притяжения, которая в силу симметрии задачи может зависеть только от расстояния камня до центра Земли x . Применить закон тяготения к падающему камню напрямую нельзя, так как этот закон в его первоначальном виде справедлив только для материальных точек. Для расчета силы тяготения разделим мысленно Землю на две части – шаровой слой с внутренним радиусом, равным x (область 1), и сферу радиусом x (область 2). Покажем, что сила взаимодействия камня и шарового слоя, как это ни парадоксально, равна нулю!

Разобьем область 1 на бесконечно тонкие шаровые слои радиусом R . Построим конус с малым углом раствора и вершиной в точке, где находится камень массой m (рис. 3.19). Сила притяжения масс m и dm_1

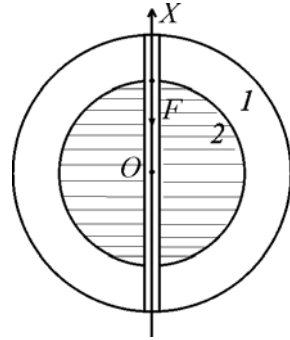


Рис. 3.18

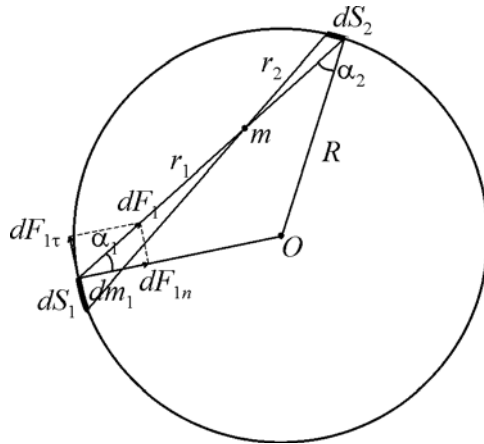


Рис. 3.19

$$dF_1 = G \frac{mdm_1}{r_1^2}.$$

Если ввести поверхностную плотность тонкого шарового слоя σ , то массу dm_1 можно представить в виде $dm_1 = \sigma dS_1$, где dS_1 – площадь участка, вырезанного конусом с одной стороны от массы m . Тогда сила

$$dF_1 = G \frac{m\sigma dS_1}{r_1^2}.$$

Напрямую интегрировать это выражение по всем элементам dS_1 нельзя (сила – величина векторная!), поэтому разложим силу dF_1 на две проекции: на нормаль к элементу dS_1 – dF_{1n} и на касательную – $dF_{1\tau}$. Величина нормальной составляющей силы

$$dF_{1n} = Gm\sigma \frac{dS_1 \cos \alpha_1}{r_1^2}.$$

Множитель $\frac{dS_1 \cos \alpha_1}{r_1^2}$ представляет собой телесный угол $d\Omega$,

под которым видна площадка dS_1 из точки, где находится масса m . Таким образом, нормальная составляющая силы тяготения

$$dF_{1n} = Gm\sigma d\Omega,$$

причем точно такое же выражение получается и для силы dF_{2n} (телесный угол один и тот же!). Обратимся теперь к касательной составляющей силы $dF_{1\tau}$:

$$dF_{1\tau} = Gm\sigma \frac{dS_1 \sin \alpha_1}{r_1^2}.$$

Представим это выражение несколько иначе:

$$dF_{1\tau} = Gm\sigma \frac{dS_1 \cos \alpha_1}{r_1^2} \operatorname{tg} \alpha_1 = Gm\sigma d\Omega \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Соответственно для противоположного элемента dS_2 имеем:

$$dF_{2\tau} = Gm\sigma d\Omega \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Так как элементы располагаются на поверхности сферы, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и соответственно $dF_{1r} = dF_{2r}$. Если учесть, что равны и нормальные составляющие сил, то это означает, что масса m притягивается одинаково к любым двум противоположным относительно ее элементам сферического слоя (но только сферического слоя!).

Таким образом, мы доказали, что внутри любого однородного сферического слоя нет поля тяготения. С учетом доказанного утверждения сила тяготения камня обусловлена только его притяжением к шару радиусом x и массой $M(x)$, т.е. только к области 2:

$$F(x) = G \frac{mM(x)}{x^2}.$$

Так как плотность Земли $\rho = \text{const}$, то

$$M(x) = \frac{4}{3} \pi x^3 \rho,$$

и тогда сила

$$F(x) = G \frac{m \frac{4}{3} \pi x^3 \rho}{x^2} = Gm \frac{4}{3} \pi \rho \cdot x.$$

На самом деле нам не нужно знать значение плотности Земли, так как при x , равном радиусу Земли R_3 , сила тяготения должна быть равна силе тяжести mg (g – ускорение свободного падения на поверхности Земли). Окончательно

$$F(x) = mg \frac{x}{R_3}.$$

И тогда второй закон Ньютона для падающего камня приобретает вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \frac{x}{R_3}.$$

Сокращая на массу, получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{R_3} x = 0.$$

А это есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_0 = \sqrt{g/R_3}$. Тогда время полета камня τ от одного полюса к другому будет равно половине периода колебаний $T = 2\pi/\omega_0$:

$$\tau = \pi\sqrt{R_3/g} \approx 42 \text{ мин.}$$

Любопытно, что это время равно половине времени обращения спутника вокруг Земли на малой высоте.

Попробуйте доказать, что столько же времени потребуется камню, чтобы показаться с другой стороны прямого тоннеля, *не проходящего* через центр Земли, если пренебречь вращением Земли и трением.

3.3.2. Вербка в трубе. Однородную веревку длиной l удерживают в гладком вертикальном колене изогнутой трубки так, что нижний конец веревки касается горизонтальной части трубки (рис. 3.20). Через какое время веревка полностью окажется в горизонтальном колене, если ее отпустить?

Рассмотрим произвольное положение веревки, когда она сместится на расстояние x от верхнего края трубки. Единственной внешней силой, влияющей на движение веревки, является сила тяжести, приложенная к вертикальной части веревки длиной $l - x$. Так как веревка однородна, то сила тяжести

$$F = \frac{m}{l}(l - x)g.$$

По второму закону Ньютона эта сила должна быть равна $m\ddot{x}$, т.е. выполняется соотношение

$$\frac{m}{l}(l - x)g = m\ddot{x}.$$

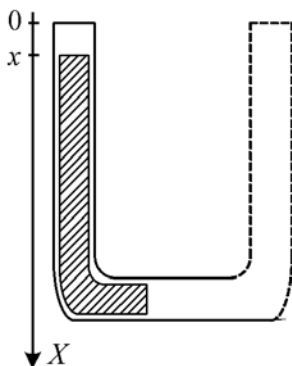


Рис. 3.20

Таким образом, мы приходим к неоднородному дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = g,$$

которое после замены переменных $\xi = x - l$, приводится к стандартному дифференциальному уравнению гармонических колебаний

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{l}\xi = 0.$$

Конечно, если горизонтальное колено трубки очень длинное, то ни о каких колебаниях не может быть и речи. После того, как веревка вся окажется в горизонтальном колене, она будет двигаться равномерно. Но, представим, что длина горизонтального участка трубки равна длине веревки, а затем начинается вертикальный участок. Тогда, очевидно, мы будем наблюдать колебательное движение веревки с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, а время, через которое веревка вся окажется в горизонтальном колене трубки, будет равно четверти периода этих колебаний:

$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Посмотрим, изменится ли ответ, если вначале часть веревки уже находится в горизонтальном колене. Конечно, нет, так как изменится только амплитуда колебаний, а период не зависит от амплитуды.

3.3.3. Брусok на шероховатой поверхности. По гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v_0 скользит однородный брусok длиной l (рис. 3.21). Брусok наезжает на обширный шероховатый участок с коэффициентом трения μ . Через какое время брусok остановится?

Если брусok принять за материальную точку, то после того, как он въедет на шероховатый участок, появится сила трения, равная μmg . Эта сила приведет к равнозамедленному движению с уско-

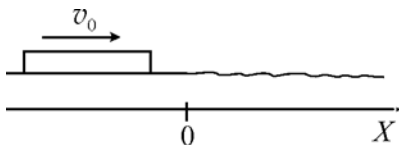


Рис. 3.21

рением $a = \mu g$, и тогда время движения было бы равным $t = v_0 / a = v_0 / \mu g$. Но брусок, обладающий длиной, никак в данных условиях нельзя принять за материальную

точку! Он будет въезжать на шероховатый участок постепенно, следовательно, и сила трения не будет оставаться постоянной. Примем за x координату правого конца бруска. Тогда легко увидеть, что сила трения, действующая на брусок, должна иметь вид, представленный на рис. 3.22. Описать такую зависимость простой аналитической функцией нам не удастся, поэтому задачу следует разбить на два этапа.

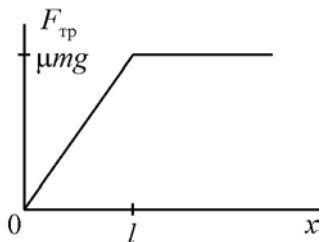


Рис. 3.22

1. Пусть длина бруска и его скорость таковы, что он остановится раньше, чем весь окажется на шероховатой поверхности. В этом случае сила трения $F_{\text{тр}} = \mu mgx/l$. Это произойдет, если скорость бруска меньше некоторой минимальной скорости v_{\min} , которую можно найти из условия

$$\frac{1}{2}mv_{\min}^2 = \int_0^l \frac{\mu mg}{l} x dx.$$

Откуда $v_{\min} = \sqrt{\mu gl}$. Запишем теперь для бруска второй закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -\frac{\mu mg}{l}x.$$

Сокращая на массу, приходим к дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{l}x = 0, \quad (1)$$

которое формально совпадает с дифференциальным уравнением гармонических колебаний, хотя, очевидно, в отличие от предыдущей

задачи ни о каких колебаниях не может быть и речи. Это совпадение означает только то, что характер движения бруска на этапе торможения формально похож на некоторый отдельно выбранный интервал гармонического движения. Воспользуемся тем, что мы знаем, как выглядит решение уравнения (1):

$$x = A \sin \sqrt{\frac{\mu g}{l}} t.$$

Дифференцируя это выражение по времени, найдем закон изменения скорости:

$$v = A \sqrt{\frac{\mu g}{l}} \cos \sqrt{\frac{\mu g}{l}} t. \quad (2)$$

Множитель $A \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$, очевидно, равен начальной скорости бруска v_0 :

$$A \sqrt{\frac{\mu g}{l}} = v_0.$$

Откуда находим значение параметра A :

$$A = v_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}} = \frac{v_0}{v_{\min}} l,$$

которое определяет точку остановки правого конца бруска.

Время торможения τ можно найти из условия $v(\tau) = 0$. Из уравнения (2) следует

$$\sqrt{\frac{\mu g}{l}} \tau = \pi/2 \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Интересно, что это время никак не зависит от начальной скорости бруска.

2. Пусть теперь начальная скорость бруска больше v_{\min} . В этом случае брусок весь въедет на шероховатый участок и остановится, пройдя еще некоторое расстояние при постоянной силе трения μmg . Поэтому время торможения будет складываться из двух слагаемых. Первое слагаемое равно времени, через которое брусок весь въедет

на шероховатый участок, — τ_l , и у него еще сохранится некоторая скорость v_l . Второе слагаемое равно времени торможения от скорости v_l до нуля при постоянной силе трения.

Найдем вначале скорость v_l из теоремы об изменении кинетической энергии:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_l^2 = \int_0^l \frac{\mu mg}{l} x dx.$$

Откуда следует

$$v_l = \sqrt{v_0^2 - \mu gl}.$$

Изменение скорости бруса от v_0 до v_l подчиняется уравнению

$$v = v_0 \cos \sqrt{\frac{\mu g}{l}} t.$$

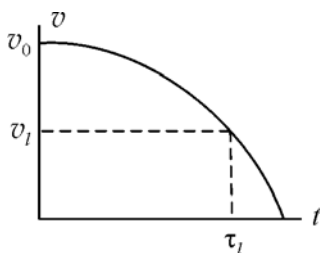


Рис. 3.23

Отобразим графически этот закон изменения (рис. 3.23). Полагая $v = v_l$, найдем время въезда бруса на шероховатую поверхность τ_l :

$$\tau_l = \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \arccos \frac{v_l}{v_0}.$$

Время торможения от скорости v_l до нуля при постоянной силе трения, которая сообщает постоянное ускорение $a = \mu g$, очевидно будет

$$\tau_0 = \frac{v_l}{\mu g}.$$

Таким образом, полное время торможения

$$\tau = \tau_l + \tau_0 = \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \arccos \frac{v_l}{v_0} + \frac{v_l}{\mu g},$$

где $v_l = \sqrt{v_0^2 - \mu gl}$.

3.3.4. Тело на колеблющейся наклонной плоскости. На наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 3.24), совершающей гармонические колебания с большой частотой ω вдоль своей поверхности, находится небольшое тело. Амплитуда скорости колебаний плоскости v_0 , коэффициент трения μ . Какова средняя скорость соскальзывания тела за достаточно большое время, если $\operatorname{tg} \alpha \ll \mu$?

Попробуем представить характер движения тела вдоль плоскости. Если бы плоскость не совершала никаких колебаний, то при выполнении условия $\operatorname{tg} \alpha \ll \mu$ (или даже более слабого условия $\operatorname{tg} \alpha < \mu$) тело вообще никуда не будет двигаться.

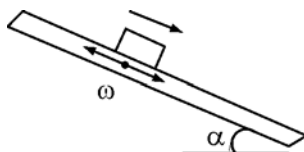


Рис. 3.24

При наличии колебаний за счет силы трения тело будет получать небольшие импульсы противоположных направлений вдоль плоскости. Малость этих импульсов обусловлена малым временем действия силы трения (большая частота колебаний плоскости ω). Если бы плоскость была горизонтальной, то в среднем скорость движения тела при колебаниях с большой частотой была бы равна нулю. Но так как плоскость наклонена, то под действием силы тяжести возможно через достаточно большое время почти установившееся соскальзывание тела с небольшой скоростью u .

Обратимся к графику зависимости скорости колебаний плоскости v от времени t (рис. 3.25). Пусть положительное значение скорости v соответствует движению плоскости вниз, а отрицательное значение скорости v соответствует движению вверх. В связи с такой договоренностью мы должны считать и скорость почти установившегося соскальзывания тела u также положительной.

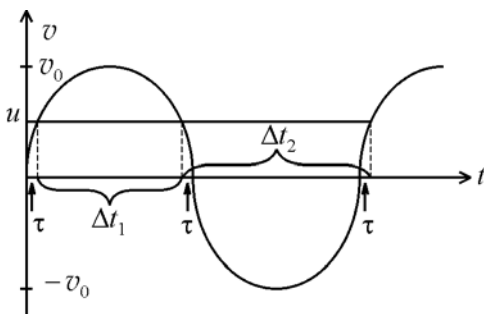


Рис. 3.25

Понятно, что тело будет получать за счет колебаний плоскости небольшие импульсы $\Delta p_{\text{вниз}}$, направленные вниз, если скорость плоскости положительна (т.е. направлена вниз) и больше скорости установившегося движения тела u . Это происходит в интервале времени Δt_1 . Если же скорость колебаний плоскости меньше скорости тела u , или отрицательна (т.е. плоскость движется вверх), то тело будет получать небольшие импульсы $\Delta p_{\text{вверх}}$, направленные вверх. Этот интервал времени Δt_2 , как видно на рисунке, больше интервала Δt_1 . Легко сообразить, что условием «стационарности» движения тела является равенство импульсов, полученных за промежутки времени Δt_1 и Δt_2 :

$$\Delta p_{\text{вниз}} = \Delta p_{\text{вверх}}.$$

Это равенство можно переписать иначе:

$$\Delta t_1 a_{\text{вниз}} = \Delta t_2 a_{\text{вверх}},$$

где $a_{\text{вниз}}$ – ускорение тела при движении плоскости вниз; $a_{\text{вверх}}$ – ускорение тела при движении плоскости вверх. Модули этих ускорений, как следует из второго закона Ньютона, определяются по формулам:

$$a_{\text{вниз}} = g(\mu + \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha,$$

$$a_{\text{вверх}} = g(\mu - \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha.$$

На рис. 3.25 видно, что интервал времени Δt_1 , в течение которого тело получает импульс вниз,

$$\Delta t_1 = \frac{T}{2} - 2\tau,$$

где T – период колебаний плоскости, равный $2\pi/\omega$; τ – время много меньшее периода колебаний и в течение которого скорость колебаний плоскости меньше скорости установившегося движения тела u . Интервал же времени, в течение которого тело получает импульс вверх,

$$\Delta t_2 = \frac{T}{2} + 2\tau.$$

Значение τ можно определить из закона изменения скорости колебаний плоскости

$$v = v_0 \sin \omega t .$$

Полагая здесь $t = \tau$ и $v = u$, приходим к уравнению

$$u = v_0 \sin \omega \tau .$$

При малом времени τ синус является почти линейной функцией, и тогда

$$\tau \approx \frac{u}{v_0 \omega} .$$

Таким образом, условие «стационарности» соскальзывания тела можно представить в виде

$$\left(\frac{\pi}{\omega} - 2 \frac{u}{v_0 \omega} \right) (\mu + \operatorname{tg} \alpha) = \left(\frac{\pi}{\omega} + 2 \frac{u}{v_0 \omega} \right) (\mu - \operatorname{tg} \alpha) ,$$

откуда легко найти среднюю скорость соскальзывания тела

$$u = v_0 \frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2\mu} .$$

Из данного выражения видно, что при выполнении условия $\operatorname{tg} \alpha \ll \mu$, скорость соскальзывания тела не зависит от частоты колебаний плоскости и много меньше амплитуды скорости колебаний плоскости, что и было заложено с самого начала в наших рассуждениях.

3.4. Волновое движение

В предыдущем разделе были рассмотрены колебания отдельных частиц, происходящие под действием восстанавливающей силы. Если же имеется совокупность связанных, т.е. взаимодействующих между собой частиц, то в колебательный процесс вовлекаются все частицы данной среды. Такая ситуация возникает во всех сплошных средах: газах, жидкостях и твердых телах. Распространяющиеся упругие колебания в газах и жидкостях или твердых телах называются звуковыми волнами или просто звуком.

Ранее мы рассмотрели задачу о распространении звука в твердых телах и получили выражение для скорости упругих волн $c = \sqrt{E/\rho}$, где E – модуль Юнга; ρ – плотность среды. Распространение звука в газах существенно отличается от распространения звука в твердых телах, прежде всего тем, что плотность газа может значительно изменяться при распространении упругих волн. В связи с этим рассмотрим задачу о скорости распространения звука в газах.

Пусть имеется полубесконечная цилиндрическая труба, заполненная газом. В начале этой трубы имеется поршень Π , совершающий колебания вдоль трубы (рис. 3.26). Эти колебания будут передаваться от поршня к соседним с ним частицам газа, от этих частиц – к более далеким и т.д. Таким образом, вдоль трубы будет распространяться волна сжатий и разрежений, сопровождаемая изменением, как плотности, так и давления в различных точках среды. Найдем скорость этой волны – c . При движении поршня со скоростью v

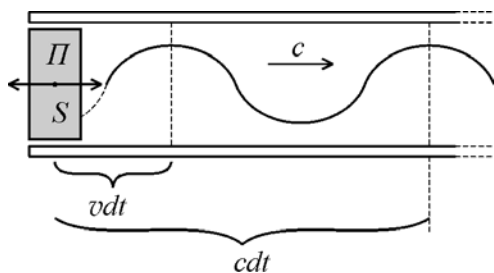


Рис. 3.26

за время dt частицы газа, прилипшие к поршню, пройдут путь vdt , а звук распространится на расстояние cdt . В состоянии волнового движения придут частицы в объеме $cdtS$, где S – площадь поперечного сече-

ния трубы. За счет движения поршня объем газа уменьшится на $v dt S$, и тогда относительное изменение объема газа

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V} = \frac{v dt S}{c dt S} = \frac{v}{c},$$

где V – объем газа, вовлеченный в волновой процесс; ΔV – его изменение по сравнению с начальным состоянием. С другой стороны, относительное изменение объема можно выразить через относительное изменение плотности газа $\Delta \rho / \rho_0$, где ρ_0 – плотность газа в отсутствие звука; $\Delta \rho$ – изменение плотности, обусловленное распространяющейся звуковой волной. Так как $\rho = m / V$, где m – масса газа, вовлеченная в волновой процесс, то

$$\Delta \rho \approx \frac{m}{V^2} \Delta V = \frac{\rho}{V} \Delta V \approx \frac{\rho_0}{V} \Delta V.$$

Откуда следует

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{v}{c}. \quad (1)$$

Изменение плотности неизбежно вызывает изменение давления газа. Полагая изменения давления газа Δp малыми, их можно связать с изменением его плотности:

$$\Delta p = \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \Delta \rho,$$

где $\left(\frac{dp}{d\rho} \right)$ – производная от давления газа или жидкости по плотности. Величина Δp часто называется акустическим давлением.

Учитывая соотношение (1), величину Δp можно представить в виде

$$\Delta p = \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \rho_0 \frac{v}{c}.$$

Произведение Δp на площадь поршня S дает силу F , с которой поршень давит на газ:

$$F = \Delta p S = \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \rho_0 \frac{v}{c} S.$$

По второму закону Ньютона эта сила должна быть равна скорости изменения импульса частиц газа, вовлеченных в волновой процесс. За время dt , как отмечалось выше, в волновое движение будут вовлечены частицы газа в объеме $c dt S$. Умножая этот объем на ρ_0 и v , получаем изменение импульса газа за время dt . Поэтому скорость изменения импульса газа будет равна $\rho_0 c S v$. Таким образом, мы приходим к равенству

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right) \rho_0 \frac{v}{c} S = \rho_0 c S v.$$

Откуда находим выражение для скорости звука:

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)}, \quad (2)$$

справедливое при распространении любых малых колебаний плотности в газах или жидкостях.

Формула (2) впервые была получена Ньютоном, который предположил, что распространение изменения давления и плотности газа в звуковой волне представляет собой изотермический процесс, подчиняющийся закону Бойля–Мариотта:

$$pV = \text{const.}$$

Представляя этот закон в виде $p = A\rho$, где A – некоторая постоянная, можно записать

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right) = A = \frac{p_0}{\rho_0}.$$

И тогда для скорости звука получаем выражение

$$c_{\text{Ньютон}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}},$$

где p_0 и ρ_0 – невозмущенные значения давления и плотности газа при отсутствии звуковой волны. Обозначение $c_{\text{Ньютон}}$ подчеркивает, что речь идет о скорости звука, вычисленной Ньютоном. С учетом уравнения Менделеева–Клапейрона выражение для $c_{\text{Ньютон}}$ можно представить в более удобном для расчетов виде

$$c_{\text{Ньютон}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}},$$

где R – универсальная газовая постоянная; T – температура газа; μ – молярная масса его. Подставляя числовые значения $\mu \approx 0,029$ кг/моль, $R = 8,31$ Дж/(моль · К), найдем скорость звука в воздухе при $T = 0^\circ\text{C}$: $c_{\text{Ньютон}} = 280$ м/с. Однако опыт дает другое значение $c = 330$ м/с. Причина столь значительного расхождения между теорией и опытом заключается в следующем.

Так как звуковые колебания совершаются очень быстро, то при распространении звука отдельные участки газа не успевают обмениваться теплом и поэтому распространение звука представляет собой адиабатический, а не изотермический процесс, как это предположил Ньютон.

Поэтому правильное выражение для скорости звука должно иметь вид

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\text{адиабат}}},$$

где $\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\text{адиабат}}$ – производная от давления газа (или жидкости)

по плотности при адиабатическом процессе. Рассчитаем эту производную. Адиабатический процесс подчиняется уравнению Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

где $\gamma = C_p / C_v$ – показатель адиабаты. Это уравнение можно переписать через плотность:

$$p = \text{const} \cdot \rho^\gamma \Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}.$$

Откуда нетрудно найти и производную:

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адиабат}} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Таким образом, скорость звука в идеальном газе

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}.$$

С учетом уравнения Менделеева–Клапейрона это выражение можно записать в более удобной форме:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}.$$

Принимая для воздуха $\gamma = C_p / C_v = 1,4$, при $T = 0^\circ\text{C}$ получаем $c = 331$ м/с, что значительно лучше совпадает с опытом, чем значение, полученное Ньютоном. Причина этого заключается в следующем. Звуковая волна состоит из движущихся друг за другом областей сжатия и разрежения газа. Над сжатыми областями совершается работа, которая идет на повышение их температуры. Разреженные же области сами совершают работу и благодаря этому охлаждаются. Так как сжатия и разрежения совершаются очень быстро, то температура между ними не успевает выровняться и поэтому сжатые области всегда горячее разреженных. Наличие этой разности температур повышает перепад давления между областями сжатия и разрежения в газах, что и приводит к увеличению скорости звука по сравнению с изотермическим процессом.

3.4.1. Сверхзвуковой самолет. Интересно, что движущийся предмет вовсе не обязан быть источником звука. Оказывается, что когда предмет движется со скоростью, большей скорости звука, то он сам производит звук, благодаря своему движению, и ему совершенно не обязательно вибрировать.

В связи с этим рассмотрим следующую задачу. Наблюдатель увидел горизонтально летящий сверхзвуковой самолет точно над головой, а услышал его звук только через $t = 5$ с. Скорость самолета v превышает скорость звука $c = 340$ м/с в 2 раза. На какой высоте летел самолет?

Первое, что приходит в голову для определения высоты самолета, нужно просто перемножить скорость звука и время. Однако это будет совершенно неверным. С чего мы взяли, что звуковая волна приходит к наблюдателю из точки, в которой его увидели? Здесь необходимо воспользоваться принципом Гюйгенса. Если источник звука движется со сверхзвуковой скоростью, то происходит следующее. Пусть в данный момент времени источник, находящийся в точке x_1 , порождает звуковую волну со сферическим фронтом

(рис. 3.27). Когда источник переместится в следующую точку x_2 , из нее также пойдет сферическая звуковая волна и т.д. Конечно, все это происходит непрерывно, а не какими-то этапами, и поэтому получается непрерывный ряд

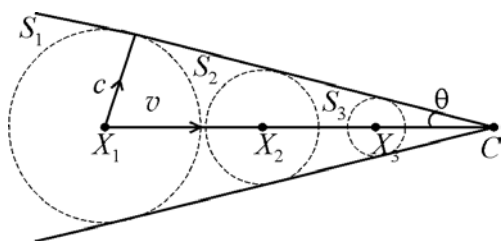


Рис. 3.27

сферических фронтов с общей касательной линией, проходящей через движущийся источник. Видно, что источник, вместо того, чтобы порождать сферические волны, как это было бы, будь он неподвижен, порождает в силу принципа Гюйгенса фронт, образующий в трехмерном пространстве конус с вершиной в точке C , в которой находится сам источник. На рисунке нетрудно определить угол полураствора этого конуса. За время перемещения источ-

ника из точки x_1 в точку C со скоростью v звуковая волна пройдет со скоростью c путь, равный радиусу сферической поверхности S_1 . Так как в силу принципа Гюйгенса фронт образующейся волны является касательным ко всем сферическим фронтам, то

$$\sin \theta = \frac{c}{v}. \quad (1)$$

Ясно, что это может быть только в том случае, если скорость источника больше скорости звука. И любой предмет, движущийся через среду быстрее, чем эта среда переносит волны, будет автоматически порождать волны просто благодаря своему движению. Подобное явление наблюдается и в оптике. Частица, движущаяся со скоростью, большей фазовой скорости света в данной среде, порождает коническую световую волну с вершиной в источнике. Это явление называется излучением Вавилова–Черенкова.

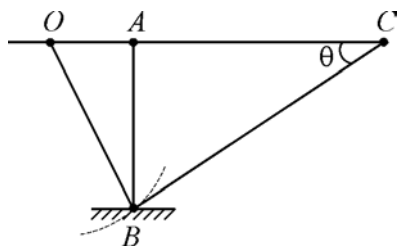


Рис. 3.28

Вернемся теперь к нашей исходной задаче. Пусть наблюдатель увидел самолет в точке A (рис. 3.28). Из изложенного выше следует, что наблюдатель услышит звук, испущенный самолетом, когда он был еще в точке O . На рисунке видно, что высота самолета $h = AB = AC \operatorname{tg} \theta$.

Так как расстояние AC самолет пролетел за t секунд со скоростью v , то $AC = vt$, и для высоты получаем выражение

$$h = vt \operatorname{tg} \theta.$$

После несложных тригонометрических преобразований с учетом соотношения (1) получаем

$$h = ct \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \approx 1963 \text{ м},$$

где M – число Маха, показывающее, во сколько раз скорость источника превышает скорость звука в среде, $M = v/c$. Очевидно, полученный ответ имеет смысл только в том случае, если $M = v/c > 1$.

3.4.2. Скорость волн на «мелкой воде». Ранее мы рассмотрели распространение звука в жидкостях и газах, которое связано с перемещением изменения плотности и давления. В жидкостях кроме звуковых волн могут распространяться и волны, не связанные с изменением плотности. В элементарных курсах физики примером таких волн служат волны на поверхности воды. Более неудачного примера придумать трудно, так как они совершенно не похожи на звуковые волны. Здесь собрались все трудности, которые только могут быть в волнах!

Рассмотрим, например, распространение длинных волн на глубокой воде (при распространении таких волн мы пренебрегаем поверхностным натяжением). Если считать глубину водоема очень большой, то на его поверхности могут возникать любые возмущения, простейшим из которых является синусоидальное движение. Вода, разумеется, в среднем остается на месте, а движутся сами волны. Это движение не является ни поперечным, ни продольным. Хотя в каждом данном месте горбы чередуются со впадинами, движение частиц воды не может быть просто вертикальным из-за крайне слабой сжимаемости воды. Если образуется впадина, то при ее образовании вода из данного места может двигаться только в стороны, и частицы воды будут двигаться приблизительно по окружности (рис. 3.29). Картина движения частиц воды получается довольно неожиданная: мы имеем дело со смесью продольных и поперечных волн. С увеличением глубины круги уменьшаются, пока на достаточной глубине от них ничего не останется.

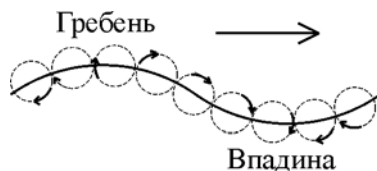


Рис. 3.29

Другим примером являются так называемые волны на «мелкой воде» – волны, длина которых много больше глубины водоема h , а изменение уровня воды за счет возмущения мало по сравнению с h (рис. 3.30). Землетрясения вызывают иногда появление громадных отдельных волн – цунами, распространяющихся на огромные рас-

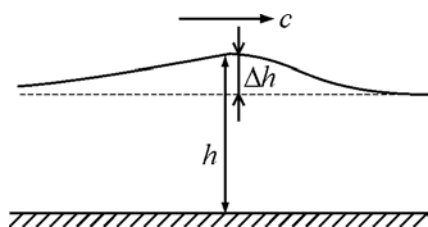


Рис. 3.30

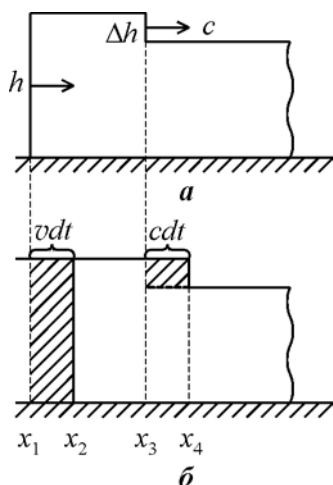


Рис. 3.31

стояния. Длина таких волн во много раз превышает глубину океана, а высота достигает нескольких десятков метров. При таких волнах в движение приходит вся вода под волной вплоть до океанского дна. Аналогичной волной является приливная волна. Найдем скорость таких волн.

С целью упрощения расчетов изменим несколько фронт волны – сделаем его более крутым. В такой волне все частицы воды на глубине h левее сечения x_3 (рис. 3.31, а) движутся со скоростью v , а фронт волны (сечение x_3) движется со скоростью c . За время dt вертикальная плоскость, проходившая через точку x_1 , пройдет путь vdt до сечения x_2 (рис. 3.31, б), а фронт волны из положения x_3 перейдет в положение x_4 , пройдя расстояние cdt . В силу несжимаемости воды масса на единицу ширины, которая прошла через сечение x_1 с высотой h должна быть равна массе

воды, прошедшей через сечение x_3 с высотой Δh , т.е. должны быть равны заштрихованные области: $\rho h v dt = \rho \Delta h c dt$. Разделив на ρdt , получаем

$$vh = c\Delta h \quad (1)$$

(это соотношение отражает просто закон сохранения массы).

Обратимся теперь ко второму закону Ньютона. Согласно этому закону скорость изменения импульса движения воды должна быть

равна разности сил давления, действующих в сечениях x_1 и x_4 . Дополнительная масса (на единицу ширины) воды, которая приобрела скорость v , равна $\rho h c dt - \rho h v dt$, а дополнительный импульс будет равен $(\rho h c dt - \rho h v dt)v$.

Разберемся теперь с силами давления в сечениях x_1 и x_4 . Так как давление воды возрастает линейно с глубиной, то среднее давление на плоскость, проходящую через сечение x_1 , будет равно $\rho g h / 2$. Умножая на h , получим силу давления, действующую в сечении x_1 (на единицу ширины): $F_1 = \rho g h^2 / 2$. Аналогично для сечения x_4 : $F_2 = \rho g (h - \Delta h)^2 / 2$.

Тогда второй закон Ньютона будет выглядеть следующим образом:

$$(\rho h v dt - \rho h c dt)v = \left[\frac{1}{2} \rho g h^2 - \frac{1}{2} \rho g (h - \Delta h)^2 \right] dt. \quad (2)$$

Решая совместно систему уравнений (1) и (2) при условии $\Delta h \ll h$, находим скорость волны:

$$c = \sqrt{gh}.$$

3.4.3. Скорость волны в бесконечной цепочке атомов. Одна из моделей упругого твердого тела представляет собой бесконечную одномерную цепочку атомов массой m , связанных пружинками длиной l (расстояние между атомами) и жесткостью $\chi = m\omega_0^2$. Пусть по такой цепочке атомов бежит продольная синусоидальная волна частоты ω (рис. 3.32, продольные смещения атомов отложены по вертикали в увеличенном масштабе). Нетрудно убедиться, что пара-

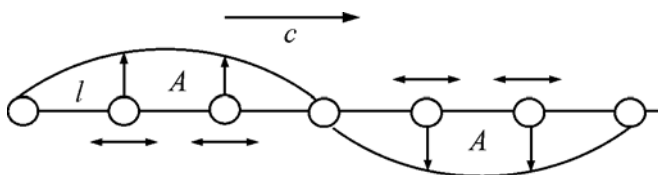


Рис. 3.32

метр ω_0 равен половине частоты собственных колебаний атомов в бесконечной цепочке, при которых центр инерции любой пары соседних атомов никуда не двигается (в этом случае фазы колебаний любых двух соседних атомов противоположны). Полагая амплитуду смещений атомов A много меньше l , найти скорость распространения этой волны.

Пусть колебания какого-либо атома в плоскости, проходящей через начало координат, имеют вид

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (1)$$

Возьмем волновую поверхность, отстоящую от начала координат на расстояние x . Колебания атомов в этой плоскости будут повторять колебания (1) с отставанием по времени τ , равному времени прохождения волной расстояния x : $\tau = x/c$ (c – фазовая скорость волны). Таким образом, колебания любого атома можно записать в виде

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega(t - x/c) + \alpha] = A \cos(\omega t - kx + \alpha),$$

где k – волновое число, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$.

Уравнение $\xi = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$ предполагает, что волна распространяется в однородной сплошной среде, т.е. координата x изменяется непрерывным образом. В нашем же случае координата x изменяется дискретным образом. Пронумеруем положение каждого атома в бесконечной цепочке:

$$\dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$$

Тогда колебание любого атома с номером n и координатой x_n можно записать в виде

$$\xi_n = A \cos(\omega t - kx_n + \alpha). \quad (2)$$

Величина начальной фазы α в нашей задаче не имеет никакого значения, поэтому в дальнейшем будем полагать ее равной нулю.

Для упрощения различных математических выкладок очень удобно представлять уравнение волны (2) в комплексном виде:

$$\xi_n = \operatorname{Re} \left\{ A \exp \left[i(\omega t - kx_n) \right] \right\}.$$

Здесь знак Re означает вещественную часть комплексной экспоненты и его обычно опускают. Таким образом, уравнение колебаний любого атома будем представлять в виде

$$\xi_n = A \exp[i(\omega t - kx_n)]. \quad (3)$$

За счет упругой связи между соседними атомами их колебания не являются независимыми. Эта связь заключена во втором законе Ньютона. Запишем этот закон для атома с номером n с учетом закона Гука:

$$m\ddot{\xi}_n = F_{n+1,n} + F_{n-1,n},$$

где $F_{n+1,n}$ – сила взаимодействия атомов с номерами n и $n+1$, $F_{n+1,n} = \chi(\xi_{n+1} - \xi_n)$; $F_{n-1,n}$ – сила взаимодействия атомов с номерами $n-1$ и n , $F_{n-1,n} = \chi(\xi_{n-1} - \xi_n)$. Таким образом, дифференциальное уравнение колебаний n -го атома будет иметь вид

$$m\ddot{\xi}_n = \chi[(\xi_{n+1} - \xi_n) - (\xi_n - \xi_{n-1})] = \chi[\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}] \quad (4)$$

(сила упругости определяется не отклонением от положения равновесия каждого атома, а разностью этих отклонений; если бы все ξ_n были бы одинаковыми, то вся цепочка атомов была бы однородно смещена и никаких колебаний не было!).

Уравнение (3) позволяет выразить колебания атомов с номерами $n-1$ и $n+1$ через колебания атома с номером n :

$$\begin{aligned} \xi_{n-1} &= A \exp[i(\omega t - kx_n + kl)] = \xi_n \exp(ikl), \\ \xi_{n+1} &= \xi_n \exp(-ikl). \end{aligned} \quad (5)$$

После подстановки соотношений (3) и (5) в уравнение (4) и сокращения на общий множитель $m\xi_n$ приходим к уравнению

$$-\omega^2 = \omega_0^2 [e^{ikl} - 2 + e^{-ikl}].$$

С учетом формулы $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$ последнее соотношение можно переписать иначе:

$$\omega^2 = \omega_0^2 [-2 \cos kl + 2] = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{kl}{2}.$$

Откуда находим

$$\frac{\omega}{2\omega_0} = \sin \frac{kl}{2} \rightarrow \frac{kl}{2} = \arcsin \frac{\omega}{2\omega_0}.$$

Теперь вспомним, что волновое число k равно отношению частоты колебаний ω к фазовой скорости волны c . Тогда для фазовой скорости волны, распространяющейся по бесконечной цепочке атомов, получаем выражение

$$c = \frac{\omega l}{2 \arcsin \frac{\omega}{2\omega_0}},$$

из которого следует, что скорость волн зависит от частоты. В этом заключается явление дисперсии волн.

В низкочастотном пределе ($\omega \ll \omega_0$) скорость волны уже не зависит от частоты:

$$c = \omega_0 l.$$

Нетрудно видеть, что это значение в точности совпадает со скоростью упругих волн в твердом теле. Для этого выделим в твердом теле в направлении распространения волны маленький цилиндр с площадью сечения S и высотой l . Запишем для него закон Гука:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} = \frac{\chi \Delta l}{S},$$

из которого следует, что параметр χ , указанный в условии задачи, можно выразить через модуль Юнга E :

$$\chi = \frac{ES}{l}.$$

Тогда скорость волны в низкочастотном пределе

$$c = \omega_0 l = \sqrt{\frac{\chi}{m}} l = l \sqrt{\frac{ES}{ml}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Оценим величину ω_0 для железа:

$$\omega_0 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} \cdot \frac{1}{10^{-10}} \approx 0,5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

Это очень большое значение.

3.4.4. Колебания груза на тяжелой пружине. Ранее мы рассматривали задачу о колебаниях пружинного маятника с массой пружинки, много меньшей массы груза. Рассмотрим теперь задачу о колебаниях пружинного маятника с произвольной массой пружины.

Несмотря на внешнюю простоту, пружина представляет собой довольно сложное упругое тело, в котором присутствуют деформации самых различных типов. Поэтому, чтобы не вдаваться в излишние детали, представим ее как упругий стержень из материала с модулем Юнга E , длиной l и площадью сечения S . В предыдущей задаче было показано, что параметры такого упругого стержня связаны с жесткостью пружины χ соотношением

$$\chi = \frac{ES}{l}. \quad (1)$$

Таким образом, постановка задачи о колебаниях пружинного маятника сводится к следующей. На свободном конце упругого стержня длиной l и площадью сечения S прикреплено тело массой m (рис. 3.33). Масса стержня m_0 , модуль Юнга материала E , плотность ρ . Определить частоту собственных колебаний тела.

За счет колебаний тела (оно является источником волн) в стержне будут распространяться волны, бегущие как от источника, так и к нему. Волна, бегущая

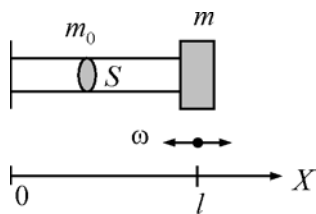


Рис. 3.33

к источнику, возникает при отражении от закрепленного конца стержня. Для описания этих волн направим ось X вправо от закрепленного конца стержня. Тогда координата тела x будет равна длине стержня l (см. рис. 3.33) и закон колебаний тела будет в точности повторять колебания частиц упругого стержня с координатой $x = l$.

Смещение частиц стержня от положения равновесия в волне, бегущей против оси X , подчиняется уравнению

$$\xi_{\text{пад}} = A \cos(\omega t + kx + \alpha),$$

а в волне, отраженной от закрепленного конца стержня, – уравнению

$$\xi_{\text{отр}} = A' \cos(\omega t - kx),$$

здесь k – волновое число, равное ω/c ; c – скорость упругих волн в стержне, равная $\sqrt{E/\rho}$. Если пренебречь затуханием колебаний, то следует положить

$$A = A'.$$

В силу принципа суперпозиции полное колебание частиц стержня ξ (и заодно колебание тела) является суммой $\xi_{\text{пад}}$ и $\xi_{\text{отр}}$:

$$\xi(x, t) = \xi_{\text{пад}} + \xi_{\text{отр}} = A [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \alpha)].$$

Так как на закрепленном конце стержня ($x = 0$) нет колебаний, то следует положить

$$\xi(0, t) = 0.$$

Откуда следует, что $\alpha = \pi$. Это означает, что при отражении волны от закрепленного конца стержня фаза волны изменяется на противоположную.

Таким образом, закон колебаний частиц стержня в любой его точке будет иметь вид так называемой стоячей волны:

$$\xi(x, t) = 2A \sin \omega t \cdot \sin kx = A_0 \sin \omega t \cdot \sin kx, \quad (2)$$

где A_0 равно амплитуде колебаний тела. Соответственно мы получили и закон колебаний тела:

$$\xi = \xi(l, t) = A_0 \sin \omega t \cdot \sin kl.$$

Для определения частоты колебаний тела ω запишем для него второй закон Ньютона:

$$m\ddot{\xi}(l,t) = F ,$$

где F – сила, действующая на тело со стороны упругого стержня. Эта сила по закону Гука определяется относительной деформацией ε стержня в точке прикрепления груза. Найдем ее. Для этого выделим небольшой элемент стержня длиной Δx (рис. 3.34).

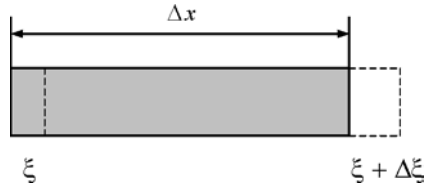


Рис. 3.34

Пусть ξ – смещение левого края участка стержня, а $\xi + \Delta\xi$ – смещение его правого края. Тогда

относительная деформация $\varepsilon = \frac{\Delta\xi}{\Delta x}$, и в пределе получаем $\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x}$.

Дифференцируя соотношение (2) при $x = l$, найдем силу, действующую на тело со стороны стержня:

$$F = -ES \frac{\partial\xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = ESA_0 k \sin \omega t \cdot \cos kl .$$

Таким образом, после дифференцирования по времени $\xi(x,t)$ при $x = l$ второй закон Ньютона для колеблющегося тела можно представить в виде

$$mA_0 \omega^2 \sin \omega t \cdot \sin kl = ESA_0 k \sin \omega t \cdot \cos kl .$$

С учетом соотношения $k = \omega / c$ получаем

$$m\omega = \frac{ES}{c} \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{c} .$$

Ну а сейчас пришла пора выразить параметры упругого стержня через жесткость пружины χ . Из соотношения (1) следует $ES = \chi l$. Далее найдем скорость упругой волны:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{ESl}{\rho Sl}} = l \sqrt{\frac{\chi}{m_0}} .$$

И для определения частоты колебаний получаем трансцендентное уравнение

$$m\omega = \sqrt{\chi m_0} \operatorname{ctg} \left(\omega \sqrt{\frac{m_0}{\chi}} \right). \quad (3)$$

Это уравнение имеет бесконечное множество корней, определяющих дискретный спектр частот собственных колебаний груза на тяжелой пружине. Данное обстоятельство хорошо известно из теории колебаний. Замкнутая с обеих сторон труба (струна) характеризуется не одной, а бесконечным числом собственных частот.

При произвольных значениях параметров решение уравнения (3) относительно частоты можно получить графическим способом. Найдем его приближенное решение, учитывая разложение функции $\operatorname{ctg} x$ в ряд по степеням x :

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} |B_{2k}|}{2k!} x^{2k-1}, \quad (4)$$

где B_n – числа Бернулли. Приведем их некоторые значения:

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30} \dots$$

В качестве первого приближения возьмем в разложении (4) первое слагаемое, т.е. будем полагать $\operatorname{ctg} x \approx 1/x$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$m\omega = \sqrt{\chi m_0} \sqrt{\frac{\chi}{m_0}} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

Откуда находим первое приближение для частоты колебаний:

$$\omega_{(1)}^2 \approx \frac{\chi}{m},$$

которое, очевидно, соответствует массе пружины, равной нулю. Для второго приближения оставим в разложении (4) первые два слагаемых:

$$\operatorname{ctg} x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}.$$

В этом случае уравнение (3) можно представить в виде

$$m\omega = \sqrt{\chi m_0} \left[\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\chi}{m_0}} - \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{m_0}{\chi}} \right].$$

Откуда следует

$$\omega_{(2)}^2 \approx \frac{\chi}{m + \frac{m_0}{3}}.$$

Этот результат мы уже получали ранее. Поступая аналогичным образом, можно найти и следующие приближения для частоты колебаний. Однако для практических целей достаточно второго приближения.

3.4.5. Пластиковый снаряд. Одним из эффективных способов борьбы с танками являются «пластиковые» снаряды. Взрывчатка во время удара такого снаряда о танк расплывается по броне, а затем взрывается. Волна, порожденная взрывом, проходит толщу брони и откалывает с внутренней стороны слой, отлетающий с большой скоростью. Найти эту скорость и толщину отколотого слоя брони при следующих данных: давление на броню при взрыве $P = 5 \cdot 10^4$ атм и действует оно в течение времени $\tau = 4 \cdot 10^{-6}$ с. Модуль Юнга стали принять равным $2 \cdot 10^{11}$ Па, плотность брони $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м³.

Какое отношение имеет эта задача к разделу «Волновое движение»? При внешнем воздействии на упругую среду характер протекающих в ней процессов имеет самое прямое отношение к распространению и отражению упругих возмущений. Поэтому рассмотрим, насколько это возможно в наших условиях, что происходит в броне танка при внешнем импульсном воздействии.

Достаточно хорошей моделью упругой среды является длинная цепочка атомов, связанных между собой легкими пружинками (см. задачу 3.4.3). В низкочастотном пределе скорость распространения упругих возмущений в такой цепочке атомов равна скорости звука в твердом теле: $c = \sqrt{E/\rho}$. В наших условиях эта скорость равна примерно $5 \cdot 10^3$ м/с.

Под действием внешнего давления P в броне рождается область сжатия (на рис. 3.35, *а* эта область отмечена вертикальной штриховкой). При этом частицы среды приобретают скорость $v = P / \sqrt{E\rho}$ (см. задачу 3.4.3), составляющую примерно 125 м/с. По окончании действия внешнего давления длина области сжатия будет равна $c\tau$ (рис. 3.35, *б*, в модели линейной цепочки атомов, соединенных пружинками, расстояние между атомами меньше, чем в исходном состоянии, все пружинки сжаты, а сами атомы движутся со скоростью v в направлении движения области сжатия). Назовем эту область возмущением сжатия. Это возмущение сжатия в дальнейшем движется со скоростью звука в недеформированной среде, сохраняя свои размеры. Справа от него деформации еще нет, а слева частицы среды уже остановились, и исчезла деформация сжатия (рис. 3.35, *в*). С приходом возмущения сжатия к свободной границе частицы среды имеют скорости, направленные вправо (рис. 3.35, *з*). Так как граница свободна, то остановиться эти частицы могут лишь тогда, когда со стороны среды на них подействуют силы, направленные влево. А для этого среда у правой границы должна оказаться растянутой, т.е. сжатие частиц

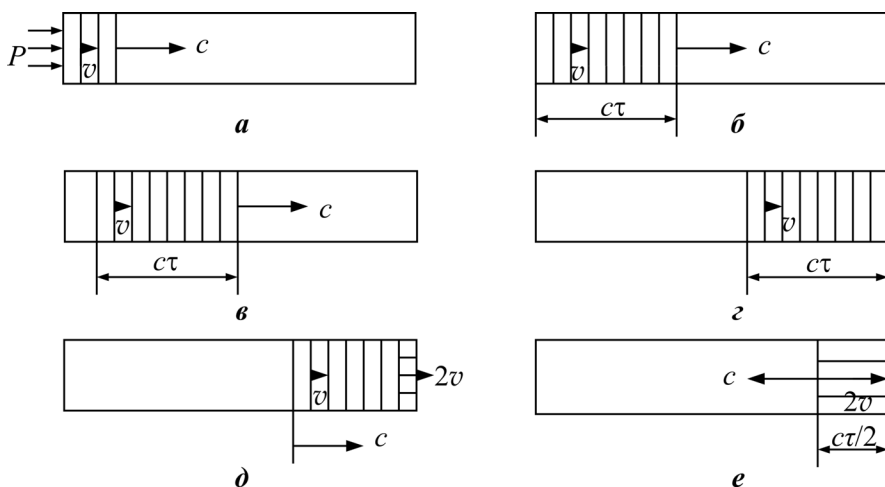


Рис. 3.35

у правой границы переходит в растяжение. Это вызывает в среде возмущение растяжения, которое распространяется уже влево со скоростью звука. Скорости движения частиц в области растяжения, как и ранее, направлены вправо, но, самое главное, величина этой скорости возрастает в 2 раза (рис. 3.34, *д*), область растяжения отмечена горизонтальной штриховкой). Это является неизбежным следствием закона сохранения импульса. Уменьшение полного импульса за счет уменьшения числа частиц в области сжатия при ее переходе через свободную границу должно быть скомпенсировано появлением дополнительного импульса частиц в области растяжения за счет увеличения скорости. Это и приводит к тому, что скорость частиц в области растяжения в 2 раза превышает скорость частиц в области сжатия.

Перестройка возмущения сжатия в возмущение растяжения закончится, очевидно, через половину времени формирования возмущения сжатия у левого края среды τ , т.е. длина области растяжения в этот момент будет равна $c\tau/2$. В модели линейной цепочки атомов в этой области все пружинки между атомами растянуты, а сами атомы движутся вправо со скоростью $2v$ (рис. 3.35, *е*). Если созданное коротким взрывом механическое напряжение превышает предел прочности стали на растяжение, то именно в данный момент и произойдет разрушение, при котором слой стали толщиной $c\tau/2$ отделится от основного материала. Таким образом, толщина отколотого слоя брони

$$l = \frac{c\tau}{2} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\tau}{2} \approx 1 \text{ см.}$$

Аналогичное явление наблюдается при попадании микрометеоритов в стекло иллюминатора космического корабля. При этом на внешней стороне стекла возникают разрушения. Подобные же разрушения видны и на внутренней стороне, так как предел прочности стекла на разрыв значительно меньше, чем на сжатие.

Для определения скорости отколотого слоя брони u воспользуемся вторым законом Ньютона $F\tau = mu$, который для нашего случая представим в виде

$$PS\tau = \rho l S u,$$

где l – толщина отколотого слоя брони площадью S . Откуда сразу находим:

$$u = \frac{P\tau}{\rho l} = \frac{P\tau \cdot 2}{\rho c \tau} = \frac{2P}{\rho c} = 250 \text{ м/с}.$$

Заметим, что эта скорость ровно в 2 раза превышает скорость движения частиц в области сжатия сразу после взрыва. В этом нет ничего удивительного, так как все частицы отколотого слоя брони перед его отделением как раз и имели такую скорость!

4. ФИЗИКА МАКРОСИСТЕМ

4.1. Общие подходы

По мнению нобелевского лауреата по физике Р. Фейнмана, одним из самых главных и продуктивных утверждений, которые выработала наука, являются молекулярно-кинетические представления о строении вещества. Согласно этим представлениям любое тело – твердое, жидкое или газообразное – состоит из очень большого количества частиц – атомов или молекул. Эти частицы находятся в беспорядочном, хаотическом движении и взаимодействуют между собой. В этом утверждении содержится невероятно большое количество информации об окружающем нас мире.

Казалось бы, что поведение таких систем (их еще называют макросистемами) в принципе можно рассматривать на основе законов классической механики. Но это тупиковый путь, так как для этого пришлось бы составить совершенно невысказанное число уравнений (даже если бы частицы подчинялись классическим законам и имели бы точно известные начальные условия). В то же время именно гигантское число частиц привело к разработке двух радикально отличающихся методов изучения макросистем – молекулярной (статистической) физики и термодинамики.

Молекулярная (статистическая) физика ставит своей целью истолковать наблюдаемые на опыте свойства тел (давление, температура и т.п.) как суммарный результат действия молекул. При этом наличие большого числа частиц приводит к новому типу закономерностей, имеющих статистический, вероятностный характер.

С другой стороны, многие соотношения между свойствами вещества можно понять, ни слова не говоря об атомах или молекулах, т.е. не интересуясь микроскопической картиной строения вещества. В этом заключается термодинамический подход к изучению макросистем. В основе термодинамики лежат несколько фундаментальных законов (начал термодинамики), установленных на основании обобщения большого числа экспериментальных фактов. В силу этого вы-

воды термодинамики имеют весьма общий характер. Конечно, глубокое понимание термодинамики возможно лишь после подробного изучения механизма, лежащего в основе того или иного процесса. В этом смысле термодинамический и статистический методы изучения макросистем взаимно дополняют друг друга и их комбинированное применение позволяет более глубоко вникнуть в суть той или иной проблемы.

4.2. Основы молекулярно-кинетической теории

4.2.1. Истечение газа из сосуда. Газ, заключенный в сосуде объемом V , вытекает в вакуум через небольшое отверстие площади S . Найти закон изменения со временем концентрации газа в сосуде. Средняя скорость движения молекул газа в сосуде равна $\langle v \rangle$.

Изменение концентрации газа связано с тем, что часть молекул вылетает из сосуда через отверстие. Если газ находится в равновесии, то его молекулы движутся совершенно беспорядочно, хаотически. Все направления движения равновероятны и ни одному из них не может быть отдано предпочтение. Часть молекул на своем пути при движении к отверстию, испытывая столкновения с другими молекулами, изменит направление своего движения и не достигнет отверстия. Однако соударения не нарушают хаотического характера движения молекул и выбытие некоторого числа молекул из группы, движущейся по направлению к отверстию, сопровождается одновременным переходом такого же числа молекул из групп, не движущихся в направлении отверстия. Поэтому при расчете числа молекул, покидающих сосуд, столкновения молекул между собой можно не учитывать и считать, что все молекулы движутся прямолинейно.

Выделим из N молекул, находящихся в сосуде, dN_v молекул, скорости которых заключены в интервале от v до $v + dv$. В силу хаотичности движения разумно подсчитывать число молекул, летящих в каком-то направлении, через телесный угол $d\Omega$, в пределах которого заключены направления движения молекул. В сферической

системе координат (рис. 4.1) бесконечно малый телесный угол $d\Omega$ можно определить следующим образом:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{rd\theta \cdot r \sin \theta \cdot d\varphi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Тогда число молекул, движущихся со скоростью v в пределах телесного угла $d\Omega$,

$$dN_{v,\theta,\varphi} = dN_v \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

В силу однородности пространственного распределения молекул внутри сосуда из всего числа молекул $dN_{v,\theta,\varphi}$, находящихся в сосуде и движущихся под углом θ в направлении отверстия за время dt , успеет долететь только часть молекул $dN'_{v,\theta,\varphi}$. Нетрудно понять, что это число

$$dN'_{v,\theta,\varphi} = dN_{v,\theta,\varphi} \frac{dV}{V},$$

где dV – объем косоугольного цилиндра с основанием S и высотой $v \cos \theta dt$ (рис. 4.2). Таким образом, число молекул, попавших в отверстие за время dt в направлении телесного угла $d\Omega$, можно записать в виде

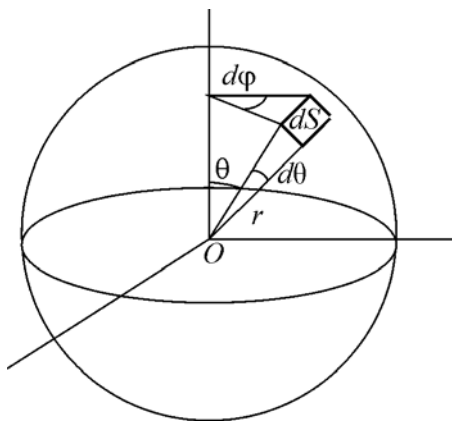


Рис. 4.1

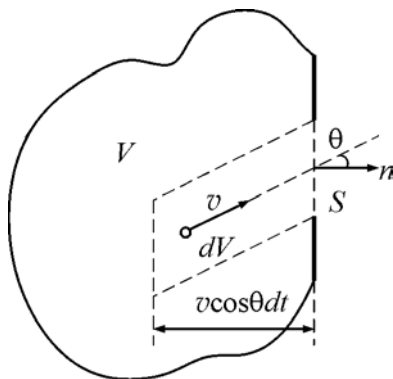


Рис. 4.2

$$dN'_{v,\theta,\varphi} = dN_v \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{S v \cos \theta dt}{V} = \frac{dN_v v S dt}{4\pi V} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Чтобы получить полное число молекул, вылетевших через отверстие за время dt , нужно проинтегрировать последнее выражение по углу φ от нуля до 2π , по углу θ от нуля до $\pi/2$ и по всем возможным скоростям движения молекул в сосуде:

$$dN' = \frac{Sdt}{4\pi V} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int v dN_v.$$

Интегралы по углам равны π , а интеграл по скоростям будет равен произведению полного числа молекул в сосуде N на их среднюю скорость $\langle v \rangle$ (именно так и вводится понятие средней скорости). Таким образом, полное число молекул, вылетевших через отверстие за время dt , составит

$$dN' = \frac{Sdt}{4V} N \langle v \rangle = \frac{1}{4} S n \langle v \rangle dt,$$

где n – концентрация молекул в сосуде в данный момент времени. Поделив последнее выражение на объем сосуда V , находим, что уменьшение концентрации молекул газа в сосуде за время dt

$$dn = -\frac{1}{4} \frac{S \langle v \rangle}{V} n dt \quad (1)$$

(знак минус появился потому, что $dn < 0$). Интегрирование выражения (1) дает

$$n(t) = n_0 \exp \left[-\frac{\langle v \rangle S}{4V} t \right],$$

где n_0 – начальное значение концентрации молекул газа в сосуде.

4.2.2. Давление фотонного газа. Внутри нагретого до высокой температуры ящика объемом V с зеркальными стенками имеется огромное число фотонов, обладающих полной энергией U . Найти давление фотонного газа.

В качестве такого ящика можно взять очень горячую звезду. В ней, правда, много атомов, но если ее температура очень высока,

то атомами можно пренебречь и считать, что все пространство внутри звезды целиком заполнено фотонами.

Выделим на одной из стенок ящика небольшой элемент площадью ΔS и рассмотрим направление X , перпендикулярное этой площадке. Каждый фотон, обладая импульсом \vec{p} , при отражении от стенки сообщает ей импульс $2p_x$. Подсчитаем теперь число столкновений фотонов с элементом ΔS . Понятно, что за время dt ударятся о стенку только те фотоны, которые расположены от нее на расстоянии, не большем $v_x dt$, где v – скорость фотонов (она для всех одинакова и равна скорости света). Если полное число фотонов в ящике N , то за время dt число соударений с элементом ΔS будет равно $(N/V)v_x dt \Delta S$. Если это число помножить на импульс, сообщаемый стенке одним фотоном, то в силу второго закона Ньютона мы получим импульс силы давления на элемент ΔS :

$$Fdt = 2 \frac{N}{V} v_x p_x \Delta S dt.$$

Так как отношение силы к площади – это и есть давление, то давление фотонного газа

$$P = 2 \frac{N}{V} v_x p_x. \quad (1)$$

Исправим теперь кое-какие неточности. Прежде всего, не все фотоны движутся в одном направлении, так что мы имеем дело с разными v_x . Поэтому усредним (1) по всем фотонам:

$$P = \frac{N}{V} \langle v_x p_x \rangle.$$

Двойка исчезла, так как лишь половина фотонов движется на стенку. Кроме того, фотоны движутся в ящике в произвольных направлениях, и направление X для них ничем не отличается от любого другого (Y или Z). В силу полной неразличимости направлений можно записать

$$\langle v_x p_x \rangle = \langle v_y p_y \rangle = \langle v_z p_z \rangle.$$

Откуда сразу следует

$$\langle v_x p_x \rangle = \frac{1}{3} \langle v_x p_x + v_y p_y + v_z p_z \rangle.$$

Так как правая часть последнего равенства представляет собой просто скалярное произведение $\langle \vec{v} \vec{p} \rangle$, то

$$\langle v_x p_x \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{v} \vec{p} \rangle.$$

Тогда выражение для давления фотонного газа (1) можно представить в виде

$$P = \frac{N}{V} \frac{1}{3} \langle \vec{v} \vec{p} \rangle.$$

Чему равно произведение $\vec{v} \vec{p}$? Импульс и скорость направлены одинаково, а скорость равна скорости света. Поэтому $\vec{v} \vec{p}$ – это импульс фотона, умноженный на скорость света. А произведение импульса фотона на скорость света – это энергия фотона $E = pc$. Произведение средней энергии фотона на их полное число дает полную энергию всех фотонов в ящике U . Окончательно для давления фотонного газа получаем выражение

$$P = \frac{U}{3V},$$

т.е. для фотонного газа произведение давления на объем равно 1/3 от полной энергии:

$$PV = \frac{1}{3} U.$$

4.2.3. Сосуд с перегородками. Сосуд разделен перегородками на N изолированных отсеков (рис. 4.3). Смесь одинаковых количеств водорода и гелия находится в первом отсеке, остальные отсеки пусты. На короткое время открывают отверстие между первым и вторым отсеками, затем его закрывают и через некоторое время открывают от-

верстие между вторым и третьим отсеками и т.д. Найти отношение концентраций водорода и гелия в последнем отсеке.



Рис. 4.3

Конечно, если бы отверстия открывались на достаточно продолжительное время, то отношение концентраций газов в последнем отсеке было бы точно такое же, как и в первом. Если же отверстия открывать на небольшое время, то тем самым мы даем шанс более быстрым молекулам из первого отсека чаще пролетать через отверстие во второй отсек. Это, естественно, приведет к повышению концентрации более быстрых молекул в соседнем отсеке. Осталось только выяснить, молекулы какого газа (гелия или водорода) двигаются более быстро. Это достаточно трудная задача, хотя окончательный результат запоминается очень легко.

Итак, рассмотрим две сталкивающиеся молекулы, обладающие разными массами и скоростями. Для простоты будем наблюдать за столкновением из системы их центра масс. Как было показано в разделе «Законы сохранения в динамике», из законов сохранения импульса и энергии следует, что после столкновения в Ц-системе разные молекулы будут двигаться с прежними по модулю скоростями, изменив только направление движения.

В силу полной хаотичности движения молекул в газе центр масс любой пары молекул будет двигаться в произвольно выбранном направлении с той же вероятностью, что и в любом другом. Рассмотрим теперь скалярное произведение относительной скорости движения разных молекул \vec{v}_{12} на скорость их центра масс \vec{v}_c . Так как газы в сосуде находятся в равновесии, то все направления относительной скорости \vec{v}_{12} равновероятны относительно направления скорости центра масс \vec{v}_c . Это означает, что никакой корреляции между направлением \vec{v}_c и \vec{v}_{12} не существует. Если бы даже такая корреляция существовала вначале, то столкновения ее разрушили бы и она, в конце концов, исчезла бы полностью. Поэтому среднее значение косинуса угла между векторами \vec{v}_c и \vec{v}_{12} равно нулю. Это значит,

что среднее значение $\langle \vec{v}_{12} \vec{v}_c \rangle$ равно нулю. Вспомним теперь, что $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, а $\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_{12} \vec{v}_c \rangle &= \left\langle \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} \right\rangle = \\ &= \frac{\langle m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2 \rangle + (m_2 - m_1) \langle \vec{v}_1 \vec{v}_2 \rangle}{m_1 + m_2} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Чему же равно среднее значение проекции скорости одной молекулы на направление движения другой? Ясно, что вероятности движения молекул как в одну сторону, так и в противоположную, одинаковы, т.е. среднее значение скорости \vec{v}_2 в любом направлении равно нулю. Поэтому и в направлении \vec{v}_1 среднее значение скорости \vec{v}_2 также равно нулю. Тогда из (1) следует, что среднее значение $m_1 v_1^2$ должно быть равно среднему значению $m_2 v_2^2$. Таким образом, мы доказали, что средние значения кинетической энергии разных по массе молекул (атомов) смеси газов, находящейся в равновесии, одинаковы!

$$\left\langle \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right\rangle.$$

Это чрезвычайно важный результат. Отсюда в частности следует, что более тяжелые атомы (молекулы) движутся в среднем медленнее более легких, причем отношение скоростей обратно квадратному корню из отношения масс

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (2)$$

Вернемся теперь к нашей исходной задаче. В силу соотношения (2) молекулы водорода в среднем движутся в $\sqrt{2}$ раз быстрее, чем атомы гелия

$$\frac{v_{\text{H}}}{v_{\text{He}}} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{He}}}{\mu_{\text{H}}}} = \sqrt{2}. \quad (3)$$

Ранее в задаче 4.2.1 было показано, что число пролетающих через небольшое отверстие атомов пропорционально произведению концентрации атомов на их среднюю скорость. Отсюда следует с учетом соотношения (3), что при открывании на короткое время отверстия между первым и вторым отсеками концентрация водорода во втором отсеке будет в $\sqrt{2}$ раз выше, чем в исходном первом. В третьем же отсеке отношение концентраций будет уже равно 2, так как в него приходят атомы (молекулы) из второго отсека, в котором отношение концентраций равно $\sqrt{2}$ и отношение скоростей также равно $\sqrt{2}$. Легко сообразить, что в последнем N -м отсеке отношение концентраций водорода и гелия составит

$$\frac{n_{\text{H}}}{n_{\text{He}}} = \left(\frac{\mu_{\text{He}}}{\mu_{\text{H}}} \right)^{\frac{N-1}{2}} = (\sqrt{2})^{N-1}.$$

4.2.4. Разделение изотопов урана. Природный уран состоит из смеси двух изотопов с атомными массами 235 и 238 и отношением концентраций $\alpha_0 = 0,007$. Для увеличения концентрации U^{235} , который применяется в атомных реакторах, используют истечение газообразного гексафторида урана UF_6 в вакуум через маленькие отверстия. Газ пропускается через трубу Tr с пористыми стенками (рис. 4.4). Прошедший через стенки трубы газ откачивается из сосуда C . Оценить увеличение концентрации U^{235} в откачанном сосуде. Для технических целей требуется обогащение урана до высоких концентраций U^{235} . С этой целью гексафторид урана из сосуда C направляют в следующий каскад обогащения, устроенный аналогичным образом. Оценить число таких каскадов, необходимое для получения $\alpha_1 = 0,05$, $\alpha_2 = 99$.

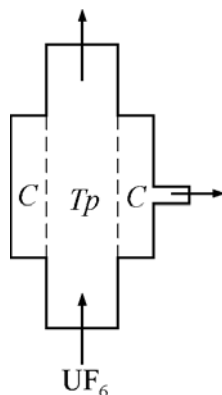


Рис. 4.4

Размеры пор перегородки, разделяющей трубу, по которой пропускается газообразный

гексафторид урана UF_6 , и откачиваемый сосуд, малы по сравнению с длиной свободного пробега молекул. В таких порах столкновений между молекулами нет, и вероятность проникновения через перегородку одинакова для всех молекул, попавших в поры из трубы. Число молекул, попадающих в поры, зависит от их концентрации и скорости. Скорость же при одной и той же температуре зависит только от массы молекулы. Поэтому более легкий газ будет быстрее проходить через пористую перегородку, чем более тяжелый. Это явление называется изотермической эффузией газа через пористую перегородку.

Отношение концентраций гексафторида урана U^{235} и U^{238} в откачиваемом сосуде равно отношению числа столкновений молекул с пористой перегородкой в трубе. С учетом решения задач 4.2.1 и 4.2.3 число столкновений v пропорционально концентрации и обратно пропорционально корню из молярной массы:

$$v \sim \frac{n}{\sqrt{\mu}}.$$

Таким образом, отношение концентраций урана U^{235} и U^{238} в откачиваемом сосуде

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cdot \gamma,$$

где $\gamma = \sqrt{\mu_2 / \mu_1}$ – коэффициент обогащения; $\mu_2 = 352$ г/моль – молярная масса гексафторида урана 238; $\mu_1 = 349$ г/моль – молярная масса гексафторида урана 235. Подставляя численные значения, получаем, что применение одного каскада обогащения приводит к увеличению концентрации U^{235} в $\gamma = 1,0043$ раза.

При прохождении n каскадов коэффициент обогащения γ_n , очевидно, будет равен γ^n . Тогда число каскадов, необходимое для увеличения концентрации до значения α , можно найти из условия

$$\alpha = \alpha_0 \gamma^n.$$

Откуда получаем

$$n = \frac{\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)}{\ln \gamma}.$$

Для интересующих нас случаев расчет дает $n_1 \approx 450$, $n_2 \approx 2200$.

Описанный способ применяется для разделения изотопов урана в крупных промышленных масштабах. Идея этого метода была предложена Рэлеем еще в 1896 году.

4.2.5. Полость с одним отверстием. В сосуде с газом поддерживается постоянная температура T_0 . Вне полости находится такой же газ, давление которого P и температура T (рис. 4.5). Чему равно давление газа в полости, если в ее стенке имеется небольшое отверстие? Газ считать разреженным.

Если сечение отверстия велико по сравнению с длиной свободного пробега молекул, то газ в целом (внутри и вне полости) можно рассматривать как сплошную среду. Условие равновесия в этом случае носит гидродинамический характер: должны быть равны давления внутри и вне полости. В противоположном

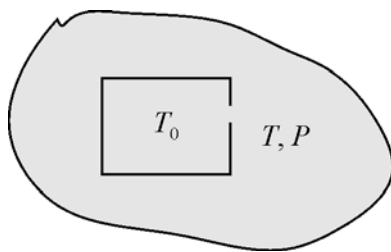


Рис. 4.5

случае, когда длина свободного пробега молекул велика по сравнению с поперечными размерами отверстия, гидродинамический подход неприменим. Тогда условие равновесия требует, чтобы среднее число частиц газа, проходящих отверстие в одном направлении, было равно среднему числу частиц, движущихся в противоположном направлении. Так как по условию задачи заданы макроскопические параметры – давление P и температура T , то необходимо выразить среднее число частиц, движущихся в каком-то направлении, через эти параметры.

В задаче 4.2.2 нами было получено выражение для давления фотонного газа

$$P = \frac{N}{V} \frac{1}{3} \langle \vec{v} \vec{p} \rangle.$$

Естественно, его можно использовать и для расчета давления разреженного газа, только нужно учесть, что $\vec{p} = m\vec{v}$. Таким образом, приходим к соотношению

$$P = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle, \quad (1)$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ – средняя энергия поступательного движения молекул газа,

$\langle \varepsilon \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle$; N – их число в объеме V ; n – концентрация молекул.

Это уравнение часто называют основным уравнением молекулярно-кинетической теории газов.

Как известно состояние идеального газа подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона:

$$P = nkT, \quad (2)$$

здесь k – постоянная Больцмана. Из сравнения уравнений (1) и (2) сразу следует, что средняя энергия поступательного движения молекул пропорциональна температуре газа:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

а средняя скорость движения молекул пропорциональна корню из температуры.

Число молекул, движущихся на отверстие N' (см. задачу 4.2.1), пропорционально произведению концентрации на среднюю скорость $N' \sim n \langle v \rangle$, и с учетом уравнения (2) получаем, что среднее число молекул, движущихся на отверстие с одной стороны можно выразить через макроскопические параметры газа:

$$N' \sim \frac{P}{\sqrt{T}}.$$

Таким образом, для установления равновесия газа по обе стороны от отверстия необходимо выполнить равенство

$$\frac{P_0}{\sqrt{T_0}} = \frac{P}{\sqrt{T}},$$

где P_0 – искомое давление газа внутри полости. Откуда следует

$$P_0 = P \sqrt{\frac{T_0}{T}}.$$

4.2.6. Теплоизолированная полость с двумя отверстиями.

Теплоизолированная полость сообщается через небольшие одинаковые отверстия с двумя другими открытыми полостями, содержащими газообразный гелий, давление которого поддерживается постоянным и равным P , а температура – T в одной полости и $2T$ в другой (рис. 4.6). Найти давление и температуру внутри замкнутой полости. Газ считать разреженным.

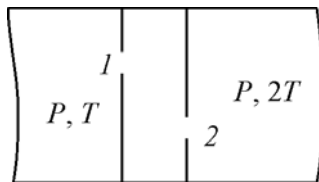


Рис. 4.6

Условие стационарности состояния требует теперь, чтобы суммарные потоки молекул через первое и второе отверстия были одинаковы. Опираясь на результаты предыдущей задачи, запишем

$$\frac{P}{\sqrt{2T}} - \frac{P'}{\sqrt{2T'}} = \frac{P'}{\sqrt{2T'}} - \frac{P}{\sqrt{T}}, \quad (1)$$

где P' и T' – искомые давление и температура внутри полости. Понятно, что одного этого уравнения недостаточно для определения двух величин, т.е. требуется еще какое-то уравнение. Так как по условию задачи полость теплоизолированная и ее состояние поддерживается стационарным, то полный приток энергии из соседних областей через отверстия должен быть равен нулю. Попробуем рассчитать плотность потока энергии j , связанной с движущимися через отверстие молекулами (это энергия, переносимая в среднем через единичную площадку за единицу времени). В силу определения

плотности потока энергии его величина пропорциональна числу движущихся на отверстие молекул N' и средней энергии каждой молекулы $\langle \varepsilon \rangle$, т.е. $j \sim N' \langle \varepsilon \rangle$. Вспоминая соотношение $N' \sim P/\sqrt{T}$ и $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT$, получаем, что плотность потока энергии через отверстие из области с температурой T и давлением P

$$j \sim P\sqrt{T}.$$

Таким образом, учитывая, что через каждое отверстие существует два разнонаправленных потока энергии, дополним уравнение (1) еще одним уравнением:

$$P\sqrt{2T} - P'\sqrt{T'} = P'\sqrt{T'} - P\sqrt{T}. \quad (2)$$

Решение системы уравнений (1) и (2) дает:

$$\begin{aligned} T' &= \sqrt{2}T, \\ P' &= P(1 + \sqrt{2}) \cdot 2^{-5/4}. \end{aligned}$$

4.2.7. Распределение Максвелла и давление газа. Опираясь на распределение Максвелла по скоростям, найти число молекул газа, падающих в единицу времени на единичную площадку, и давление газа, если задана концентрация молекул n , температура газа T и масса каждой молекулы m .

Существуют различные формы записи распределения Максвелла по скоростям. Одно из них:

$$dP_{v_x} = \varphi(v_x)dv_x. \quad (1)$$

Здесь dP_{v_x} – вероятность того, что компонента скорости v_x некоторой молекулы имеет значение в пределах от v_x до $v_x + dv_x$; $\varphi(v_x)$ называется функцией распределения

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right). \quad (2)$$

Аналогичные выражения можно записать и для двух других компонент скорости:

$$dP_{v_y} = \varphi(v_y)dv_y,$$

$$dP_{v_z} = \varphi(v_z)dv_z.$$

В силу равноправности всех направлений движения молекул вид функций $\varphi(v_x)$, $\varphi(v_y)$ и $\varphi(v_z)$ должен быть одинаков. Соотношению (1) можно придать и другой смысл:

$$dN_{v_x} = N\varphi(v_x)dv_x. \quad (3)$$

Здесь dN_{v_x} – число молекул, компонента скорости которых v_x находится в пределах от v_x до $v_x + dv_x$; N – полное число молекул газа.

Вероятность же того, что компоненты скорости некоторой молекулы имеют значения в пределах от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$ представляют следующим образом:

$$dP_{v_x, v_y, v_z} = f(v)dv_x dv_y dv_z,$$

$$\text{где } f(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Если же речь идет о модуле скорости молекул, то распределение Максвелла записывают в виде

$$dP_v = F(v)dv.$$

Здесь $dP_v = dN_v / N$ – вероятность того, что из N молекул газа dN_v имеют скорость в интервале от v до dv ; $F(v) = 4\pi v^2 f(v)$ играет роль функции распределения молекул газа по скоростям:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2.$$

Выберем ось X перпендикулярно стенке, на которую падают молекулы. В этом случае, очевидно, для подсчета числа молекул, падающих на нее, необходимо воспользоваться распределением

Максвелла в форме (3), которое после деления на объем сосуда V примет вид

$$dn_{v_X} = n\varphi(v_X)dv_X.$$

Здесь dn_{v_X} — плотность числа молекул, компонента скорости которых v_X находится в пределах от v_X до $v_X + dv_X$. Понятно, что о стенку ударятся за единицу времени только те молекулы, которые находятся от нее не дальше, чем v_X . Тогда число ударов об единичную площадку за единицу времени dv_{v_X} можно будет найти как произведение плотности числа молекул dn_{v_X} на объем цилиндра с площадью основания $S = 1$ и высотой v_X :

$$dv_{v_X} = n\varphi(v_X)v_X dv_X. \quad (4)$$

Для подсчета полного числа ударов ν необходимо проинтегрировать выражение (4) по всем значениям v_X от нуля до некоторого v_{\max} . Его без ущерба для точности можно положить равным бесконечности (вклад участка интегрирования от v_{\max} до ∞ в силу явного вида функции $\varphi(v_X)$ является пренебрежимо малым). Нижний предел интегрирования, равный нулю, взят из тех соображений, что в расчет входят только молекулы, движущиеся в одном направлении оси X .

$$\nu = \int dv_{v_X} = n \int_0^{\infty} \varphi(v_X)v_X dv_X.$$

Подставляя сюда выражение (2), получаем

$$\nu = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v dv = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Входящий сюда квадратный корень, как легко проверить, есть среднее значение скорости молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

и наш ответ можно записать в виде

$$p = \frac{1}{4} n \langle v \rangle.$$

Ранее (см. задачу 4.2.1) это выражение нами было получено из других соображений.

Найдем теперь давление газа на стенку. Так как каждая молекула при ударе изменяет свой импульс на $2mv_x$, то нетрудно понять с учетом соотношения (4), что давление газа на стенку можно представить в виде

$$P = 2nm \int_0^{\infty} v_x^2 \varphi(v_x) dv_x = 2nm \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) v_x^2 dv_x.$$

Входящий сюда интеграл можно свести к известному интегралу Пуассона:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(достаточно взять производную по параметру α), окончательно получаем

$$P = nkT.$$

А это есть уравнение Менделеева–Клапейрона. В этом нет ничего удивительного, так как вывод распределения Максвелла существенно опирается на данное уравнение.

4.2.8. Распределение Больцмана. Потенциальная энергия молекул газа в некотором центральном силовом поле зависит от расстояния r до центра поля как $U = \alpha r^2$, α – положительная постоянная. Температура газа T , концентрация газа в центре поля n_0 . Найти наи-

более вероятное расстояние молекул от центра поля и наиболее вероятное значение потенциальной энергии.

О каком наиболее вероятном расстоянии идет речь в условии задачи? Ведь, как мы знаем, в газах в условиях равновесия любое положение молекулы равновероятно. Но так обстоит дело только в том случае, когда газ не находится в каком-либо силовом поле. Наличие силового поля искажает пространственное распределение молекул. И теперь вопрос, поставленный в условии задачи, является уместным. Распределение молекул газа по значениям кинетической энергии можно получить из распределения Максвелла (см. задачу 4.2.7). Пространственное же распределение молекул можно получить из распределения Больцмана:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}.$$

Здесь n – плотность молекул в точке пространства, где потенциальная энергия имеет значение U ; n_0 – значение плотности в том месте, где $U = 0$. В силу того, что потенциальная энергия зависит от положения молекул, то отсюда автоматически следует возможность описать и пространственное распределение молекул.

Так как центральное силовое поле обладает сферической симметрией, то в качестве бесконечно малого элемента пространства dV , во всех точках которого концентрация молекул имеет одинаковое значение, следует взять тонкий шаровой слой радиуса r и толщиной dr : $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда число молекул, обладающих заданным значением потенциальной энергии и располагающихся в слое $(r, r + dr)$, будет следующим:

$$dN = n dV = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) 4\pi r^2 dr.$$

Отношение dN/dr можно назвать плотностью распределения молекул по радиусу r :

$$\frac{dN}{dr} = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) 4\pi r^2 = n_0 \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{kT}\right) 4\pi r^2. \quad (1)$$

На графике этой функции (рис. 4.7) видно, что существует значение $r_{\text{вер}}$, при котором плотность распределения молекул по радиусу максимальна. Это значение и следует назвать наиболее вероятным расстоянием. Найти его – это уже дело техники.

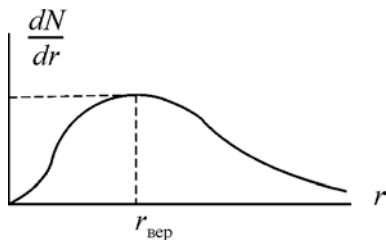


Рис. 4.7

Для этого найдем производную от выражения (1) по r и положим ее равной нулю. Тогда получаем

$$r_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{kT}{\alpha}}.$$

Для определения наиболее вероятного значения потенциальной энергии необходимо переписать выражение (1) так, чтобы его аргументом являлась потенциальная энергия U . Поскольку $U = \alpha r^2$, то $dU = 2\alpha r dr$ и выражение (1) можно представить в виде

$$dN = \frac{2\pi n_0}{\alpha^{3/2}} \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sqrt{U} dU.$$

Здесь dN – число молекул, значение потенциальной энергии которых находится в пределах $(U, U + dU)$. Тогда вопрос о наиболее вероятном значении потенциальной энергии сводится к нахождению значения U , при котором функция $f = \frac{dN}{dU}$ имеет максимум. Вы-

числив производную $\frac{df}{dU}$ и приравняв ее нулю, получим

$$U_{\text{вер}} = \frac{kT}{2}.$$

Примечательно то, что значение постоянной α в зависимости $U = \alpha r^2$ никак не влияет на наиболее вероятное значение потенциальной энергии молекул.

4.3. Уравнение состояния газа и процессы

Состояние макросистемы, т.е. то положение, в котором находится макросистема, задается через так называемые термодинамические параметры – объем V , давление P , температуру T и др. Если эти параметры имеют определенные и постоянные значения для любой части макросистемы, то такое состояние при отсутствии внешних воздействий сохраняется сколь угодно долго и является равновесным. Любой процесс перехода макросистемы из одного состояния в другое происходит, очевидно, через последовательность неравновесных состояний. Однако если внешнее воздействие осуществляется достаточно медленно, то будем считать, что процесс проходит через последовательность равновесных состояний.

В данном разделе мы будем иметь дело с наиболее простой моделью газа – идеальным газом. В этой модели предполагается, что взаимодействие между молекулами пренебрежимо малое. С принципиальной точки зрения взаимодействие между молекулами даже в случае идеальных газов существует, хотя и очень слабое (именно оно приводит систему в равновесное состояние).

Состояние идеального газа подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона:

$$PV = \nu RT,$$

где ν – количество вещества, которое можно выражать либо через его массу $\nu = m/\mu$ (μ – молярная масса), либо через число молекул $\nu = N/N_A$ (N_A – число Авогадро); R – универсальная газовая постоянная.

Часто уравнение Менделеева–Клапейрона представляют в виде

$$P = nkT,$$

где k – постоянная Больцмана.

4.3.1. Всплывающие пузырьки. Герметически закрытый бак высотой h заполнен водой так, что на его дне остались два одинаковых пузырька (рис. 4.8, а). Давление на дно бака равно P_0 . Каким

оно станет, если всплывет один пузырек? два пузырька? Считать процесс изотермическим.

Понятно, что форма пузырьков, если пренебречь поверхностным натяжением, не имеет никакого значения. Поэтому каждый пузырек можно «размазать» по дну бака, сохранив их суммарный объем $2V$, и тогда картина будет выглядеть более просто (рис. 4.8, б). Теперь понятно, что заданное давление на дно бака P_0 и есть начальное давление внутри пузырьков.

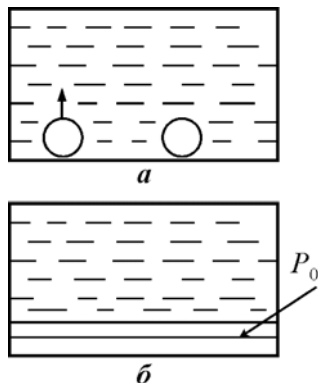


Рис. 4.8

Если бы на дне бака находился только один пузырек, то при его всплытии в несжимаемой жидкости объем пузырька, конечно, не изменился бы. В наших же условиях объем пузырька при всплытии наверняка изменится при одновременном изменении объема оставшегося на дне пузырька. Это связано с перераспределением давлений внутри пузырьков (давление во всплывшем пузырьке должно уменьшиться). Но в любом случае их суммарный объем останется прежним:

$$V_1 + V_2 = 2V, \quad (1)$$

где V_1 – объем оставшегося на дне пузырька; V_2 – объем всплывшего пузырька; V – объем каждого исходного пузырька.

Так как в условии задачи идет речь о давлении, то нам, очевидно, потребуются какие-то уравнения, позволяющие его, так или иначе рассчитать. Одно из них очевидно – это уравнение Менделеева–Клапейрона

$$PV = \nu RT.$$

При неизменной массе воздуха в пузырьках и температуре приходим к двум уравнениям:

$$P_0 V = P_1 V_1, \quad (2)$$

$$P_0 V = P_2 V_2, \quad (3)$$

где P_1 – давление в оставшемся на дне пузырьке (это и есть искомое давление на дно бака); P_2 – давление во всплывшем пузырьке.

Понятно, что из системы уравнений (1)–(3) нельзя найти давление P_1 (число неизвестных превышает число уравнений). Кроме того, мы нигде не воспользовались информацией о высоте бака. В гидростатическом приближении можно связать давление внутри пузырьков (в оставшемся на дне – P_1 и всплывшем – P_2):

$$P_1 = P_2 + \rho gh. \quad (4)$$

Теперь система уравнений (1)–(4) является достаточной для определения давления P_1 . Из уравнений (2), (3) найдем

$$P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2}$$

и подставим это значение в уравнение (4):

$$P_1 = \rho gh + \frac{P_1 V_1}{V_2}. \quad (5)$$

Неизвестное нам отношение объемов V_1/V_2 можно найти из уравнений (1) и (2):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_0}{2P_1 - P_0}.$$

Подставляя это значение в уравнение (5), для определения P_1 получаем квадратное уравнение:

$$2P_1^2 - 2P_1(P_0 + \rho gh) + \rho gh P_0 = 0.$$

Его решение имеет вид

$$P_1 = \frac{1}{2} [P_0 + \rho gh \pm \sqrt{P_0^2 + (\rho gh)^2}].$$

Осталось только выяснить, какой оставить знак, или они оба имеют смысл? Понятно, что следует оставить только знак минус, так

как в противном случае давление на дно бака превысит исходное значение P_0 . Окончательно

$$P_1 = \frac{1}{2} [P_0 + \rho gh - \sqrt{P_0^2 + (\rho gh)^2}].$$

Если же вслед за первым пузырьком всплывет и второй, то это будет равнозначно тому, как если бы оба пузырька всплыли одновременно. В этом случае нетрудно сообразить, что давление на дно бака можно найти из соотношения (4), только следует положить $P_2 = P_0$ (давление внутри единственного в баке пузырька не может измениться при любом изменении его положения!). Таким образом, давление на дно бака при всплытии обоих пузырьков составит:

$$P = P_0 + \rho gh.$$

4.3.2. Плавающий на воде стакан. На поверхности жидкости плотностью ρ плавает тонкостенный цилиндрический стакан высотой h , наполовину погруженный в жидкость (рис. 4.9, *a*). Насколько погрузится стакан в жидкость, если его осторожно положить на поверхность жидкости вверх дном? На какую глубину нужно утопить перевернутый вверх дном стакан, чтобы он вместе с заключенным в нем воздухом пошел ко дну? Давление воздуха P_0 .

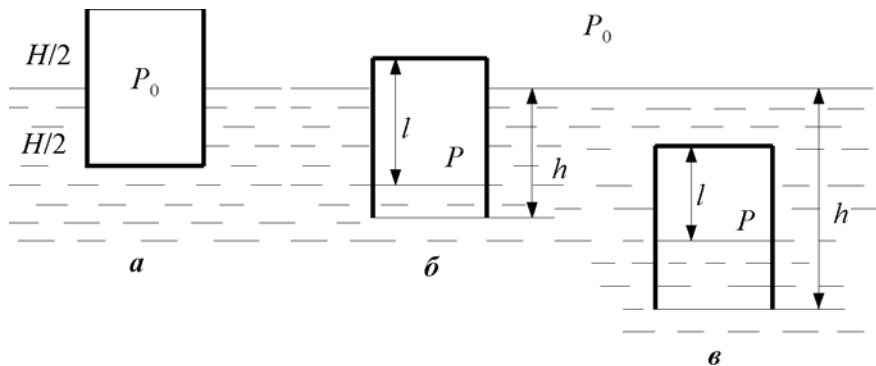


Рис. 4.9

Рассмотрим вначале первую часть задачи. В подобных задачах нужно, прежде всего, записать условие равновесия (плавания). Затем, если этого условия окажется недостаточно для ответа на поставленный вопрос, привлечь какие-то другие уравнения, характеризующие состояние системы.

В исходном положении (рис. 4.9, *а*) сила тяжести стакана уравновешена архимедовой силой:

$$mg = \rho g S \frac{H}{2}, \quad (1)$$

где S – площадь поперечного сечения стакана. После переворачивания стакана (рис. 4.9, *б*) условие его плавания, оставаясь по сути тем же, будет выглядеть как

$$mg = \rho g S (h - H + l), \quad (2)$$

где h – искомая глубина погружения; l – высота части стакана, заполненной воздухом. Этих двух уравнений явно недостаточно для определения глубины погружения (необходимо знать высоту части стакана, заполненной воздухом).

Полагая процесс изотермическим, для объема воздуха внутри стакана можно записать уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$P_0 HS = PlS. \quad (3)$$

Конечно, это уравнение является полезным, но оно требует знания связи давления воздуха в погруженном стакане P и давления воздуха над стаканом P_0 . Так как давление воздуха внутри погруженного стакана равно давлению воды вне стакана на уровне поверхности воды внутри стакана, то для P можно записать:

$$P = P_0 + \rho g (h - H + l). \quad (4)$$

Совместное решение системы уравнений (1)–(4) дает

$$h = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{2\rho g H}{2P_0 + \rho g H} \right).$$

Перейдем теперь ко второй части задачи. Дальнейшее погружение стакана требует некоторой внешней силы, направленной вниз (за счет этой силы и происходит уменьшение объема воздуха, оставшегося в стакане). Нетрудно понять, что вначале архимедова сила будет возрастать, достигая максимума, а затем начнет уменьшаться. Как только она сравняется с силой тяжести стакана, приложение внешней силы уже не требуется и стакан сам пойдет ко дну. В этот момент (рис. 4.9, в), очевидно, выполнится равенство

$$mg = \rho g l S,$$

где l – высота части стакана, заполненной воздухом. Если к этому уравнению добавить оставшиеся неизменными прежние уравнения (1), (3) и (4), то нетрудно определить глубину погружения стакана:

$$h = \frac{H}{2} + \frac{P_0}{\rho g}.$$

4.3.3. Трубка с ртутью. Нижний конец вертикальной трубки длиной $2l$ (в миллиметрах) запаян, а верхний конец открыт в атмосферу (рис. 4.10). В нижней половине трубки находится газ при температуре T_0 , а верхняя ее половина заполнена ртутью. До какой минимальной температуры нужно нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил всю ртуть? Внешнее давление в миллиметрах ртутного столба равно l .

Давление в системе СИ, как известно, измеряют в паскалях. Но иногда удобно измерять его в миллиметрах ртутного столба (мм рт.ст.). Напомним, что один миллиметр ртутного столба равен давлению, которое оказывает столбик ртути высотой 1 мм. Тогда из формулы $P = \rho gh$ следует

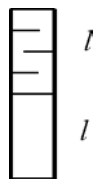


Рис. 4.10

$$1 \text{ мм рт.ст. (торр)} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 133,3 \text{ Па}.$$

Использование этой единицы измерения давления позволяет более коротко записывать выражение для давления, т.е. вместо ρgl писать просто l (нужно только не забыть в итоге значение l перевести в паскалы).

При повышении температуры воздуха внутри трубки растет его давление и ртуть, поднимаясь вверх, начинает постепенно выливаться из трубки. Количество же воздуха внутри трубки v при этом остается постоянным. На первый взгляд кажется, что греть нужно до тех пор, пока вся ртуть не выльется из трубки. В этом случае «очевидно» нужное значение температуры будет достигнуто в самом конце процесса. Посмотрим, насколько это соответствует истине. Для этого запишем уравнение Менделеева–Клапейрона вначале для исходного состояния воздуха, при котором давление равно $2l$ (атмосферное плюс давление столбика ртути высотой l), объем – lS (S – площадь сечения трубки), а температура – T_0 :

$$2l \cdot lS = vRT_0. \quad (1)$$

В конечном же состоянии, когда воздух внутри трубки отделен от атмосферы только тоненькой пленкой ртути, объем воздуха равен $2lS$, давление – l , а температура – T , имеем

$$l \cdot 2lS = vRT. \quad (2)$$

Из уравнений (1), (2) очевидно следует, что $T = T_0$, т.е. и греть-то воздух не нужно! Но это явно неверно, ведь за счет чего-то воздух должен расширяться и вытеснять ртуть. Наша ошибка состоит в том, что мы провели сравнение только начального и конечного состояний воздуха и не проследили, как же развивается при этом состояние системы. Простой пример. Катящийся по гладкой горизонтальной поверхности шарик должен преодолеть горку на своем пути. При какой скорости он ее преодолеет? Очевидно, если мы будем сравнивать начальное состояние шарика до горки и конечное после горки, то скорости шарика окажутся одинаковыми. Но отсюда не следует, что шарик преодолеет горку при любом значении скорости.

Поэтому рассмотрим процесс расширения воздуха более подробно. Для этого зададим некоторое перемещение столбика ртути x и запишем уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$[l + (l - x)](l + x)S = vRT(x), \quad (3)$$

здесь $T(x)$ – температура воздуха, при которой его объем равен $(l + x)S$.

С учетом соотношения (1) уравнение (3) можно переписать в виде

$$T(x) = T_0 \frac{2l^2 + lx - x^2}{2l^2}.$$

Исследование этого уравнения на максимум сразу дает, что максимальное значение $T(x)$ составит $\frac{9T_0}{8}$ и это

произойдет, когда выльется половина ртути (рис. 4.11). И если температура воздуха хотя бы незначительно превысит значение $\frac{9T_0}{8}$, то в дальнейшем

даже при плавном понижении температуры (но не ниже T_0 !) столбик ртути

будет все равно подниматься. Связано это с неустойчивостью состояния системы воздух–ртуть в тот момент, когда в трубке останется половина ртути и когда температура воздуха равна $\frac{9T_0}{8}$.

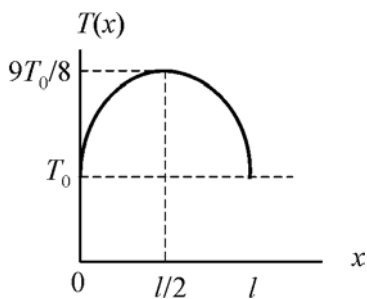


Рис. 4.11

4.3.4. Дымовая труба. Фабричная труба высотой $h = 50$ м выносит дым при температуре $T = 60^\circ\text{C}$. Определить перепад давления на входе в трубу, обеспечивающий тягу. Температура окружающего воздуха $T_0 = -10^\circ\text{C}$, плотность воздуха снаружи трубы $\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$.

О каком перепаде давления, обеспечивающем тягу, идет речь? Так как дым (теплый воздух) свободно выходит в атмосферу, то давление воздуха на срезе верхнего края трубы одинаково как внутри трубы, так и вне ее. Обозначим его как P_0 . При понижении высоты давление растет внутри трубы и вне ее, но с разной скоростью. Найдем эти значения давлений. Изменение давления с высотой дается барометрической формулой

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right).$$

(здесь под P_0 нужно понимать значение давления при $h = 0$).

Если высоту отсчитывать от верхнего среза трубы, то закон нарастания давления по мере уменьшения высоты можно представить в виде

$$P(h) = P_0 \exp\left(\frac{\mu gh}{RT}\right). \quad (1)$$

Оценим значение показателя экспоненты:

$$\frac{\mu gh}{RT} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 50}{8,31 \cdot 330} \approx 0,005.$$

Так как это значение значительно меньше единицы, то зависимость (1) с учетом формулы $\exp(x) \approx 1 + x$ (при малых x) можно аппроксимировать линейной функцией

$$P(h) = P_0 \left(1 + \frac{\mu gh}{RT}\right). \quad (2)$$

Из этого уравнения сразу видно, что давление воздуха снаружи трубы на уровне ее входа больше, чем давление внутри трубы (отличается температура воздуха). Это и обеспечивает тягу воздуха в трубе. Кстати, одно из назначений стеклянного колпака керосиновой лампы и сводится к обеспечению тяги воздуха. Найдем теперь разность давлений на входе трубы с учетом выражения (2):

$$\Delta P = P_0 \frac{\mu gh}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) = \frac{P_0 \mu}{RT_0} gh \left(1 - \frac{T_0}{T} \right).$$

В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона множитель $\frac{P_0 \mu}{RT_0}$ равен просто плотности наружного воздуха ρ_0 . Тогда окончательно перепад давлений можно представить в виде

$$\Delta P = \rho_0 gh \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) \approx 133 \text{ Па}.$$

Из полученного ответа видно, что для повышения тяги в дымовой трубе необходимо увеличивать либо высоту трубы, либо температуру воздуха в ней.

4.3.5. Адиабатическая атмосфера. Адиабатической называется атмосфера, в которой давление и плотность независимо от высоты h удовлетворяют соотношению $P\rho^{-\beta} = \text{const}$ ($\beta > 1$). Найти градиент температуры $\frac{dT}{dh}$, установившийся в данной атмосфере.

То, что температура должна изменяться с высотой, видно из простых соображений. Состояние газа в любом случае подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона:

$$P = \frac{\rho RT}{\mu}. \quad (1)$$

И так как по условию задачи давление не пропорционально плотности, то из (1) автоматически следует, что температура должна изменяться с высотой.

Если газ, находящийся в однородном поле тяжести, нагрет неравномерно, то не при всяком распределении температуры он может находиться в механическом равновесии. В таком газе будет происходить перемешивание (конвекция) различно нагретых слоев. Если пренебречь процессами теплопроводности в газе, то всякое перемещение элемента газа из одного положения в другое можно рассматривать как адиабатический процесс.

Для определения градиента температуры перепишем иначе соотношение, заложенное в условии задачи:

$$P = \alpha \rho^{\beta}, \quad (2)$$

где α и β – некоторые постоянные. Для получения замкнутой системы уравнений с целью определения $\frac{dT}{dh}$ к уравнениям (1) и (2) необходимо добавить соотношение, связывающее изменение давления газа dP с изменением высоты dh :

$$dP = -\rho g dh. \quad (3)$$

Это же изменение давления можно определить и из (2):

$$dP = \beta \alpha \rho^{\beta-1} d\rho. \quad (4)$$

Тогда из соотношений (3), (4) следует

$$\beta \alpha \rho^{\beta-2} d\rho = -g dh. \quad (5)$$

В свою очередь из соотношений (1) и (2) следует

$$\alpha(\beta-1)\rho^{\beta-2}d\rho = \frac{RdT}{\mu}. \quad (6)$$

После деления соотношений (6) и (5) получаем

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\mu g}{R} \frac{\beta-1}{\beta},$$

откуда видно, что температура атмосферы падает с высотой.

Если температура воздуха повышается с высотой, то атмосфера в механическом отношении устойчива (вспомним закон Архимеда). Но оказывается, что устойчивое равновесие возможно и тогда, когда с высотой температура воздуха понижается. Однако для этого, как показывают расчеты [2], градиент температуры не должен превышать примерно одного градуса на каждые 100 м высоты.

4.3.6. Откачивающий насос. Из сосуда объемом V производится с постоянной скоростью c откачка воздуха. Процесс считать изотермическим, а скорость откачки – не зависящей от давления. Найти зависимость от времени давления газа в сосуде.

Скоростью откачки называют объем газа, откачиваемый за единицу времени при давлении в данный момент, т.е. если за время dt откачивается объем dV , то $c = dV/dt$. Каким образом можно откачать объем dV ? Представим, что к откачиваемому сосуду объемом V присоединяют небольшую пустую камеру объемом dV и после выравнивания давления изолируют эту камеру от основного объема. Затем удаляют попавший в камеру воздух и весь этот процесс повторяют шаг за шагом. Конечно, количество воздуха в основном сосуде постоянно уменьшается, но на каждом шаге откачки количество воздуха не изменяется. Так как по усло-

вию задачи при этом не изменяется и температура, то из уравнения Менделеева–Клапейрона для каждого шага откачки следует

$$PV = (P + dP)(V + dV), \quad (1)$$

здесь P – давление в сосуде в данный момент времени t ; dP – его бесконечно малое изменение за время dt . Пренебрегая величинами второго порядка малости, уравнение (1) можно представить в виде

$$VdP + PdV = 0,$$

или

$$VdP + Pcdt = 0.$$

После интегрирования этого уравнения получаем

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{c}{V}t\right),$$

где P_0 – начальное давление в откачиваемом сосуде.

4.3.7. Окружность на диаграмме (P, V) . Тепловой процесс, который совершается с идеальным газом, на диаграмме (P, V) имеет вид окружности, расположенной симметрично по отношению к осям (P, V) (рис. 4.12). Отобразить его на диаграмме (P, T) , полагая, что окружность подходит достаточно близко к осям координат.

Формально такая задача могла бы быть решена следующим образом. Вначале необходимо записать уравнение окружности в переменных (P, V) . Затем, используя уравнение Менделеева–Клапейрона, перевести исходное уравнение окружности в переменные (P, T) . Мы же проделаем это графически. Для этого отобразим на плоскости (P, V) семейство изотерм при уменьшающейся с некоторым шагом температуре. Каждая изотерма с точки зрения математики является гиперболой, причем, чем меньше температура, тем ближе гипербола подходит к осям (P, V) (кривые A, B, C, D, E на рис. 4.13). Тогда точки пересечения (или каса-

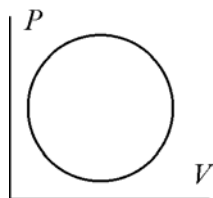


Рис. 4.12

ния) изотерм с окружностью дадут значение давления при заданном значении температуры. В точке 1 получаем давление при максимальной температуре (рис. 4.14). В точках 2, 3 получаем два значения

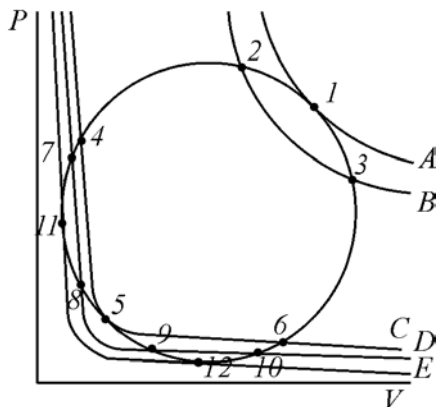


Рис. 4.13

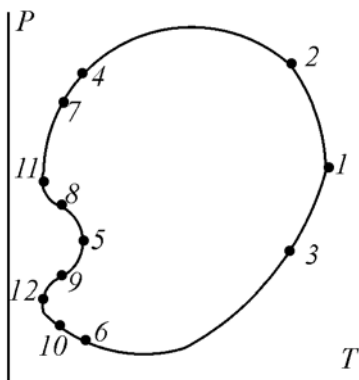


Рис. 4.14

давления при меньшей температуре и т.д. Так обстоит дело до изотермы C . Данной температуре соответствует уже три разных значения давления. На изотерме D находятся четыре таких точки, а последней изотерме E с самой низкой температурой соответствуют только две точки разных давлений. Таким образом, круговой процесс на диаграмме (P, V) будет выглядеть несколько сложнее (см. рис. 4.14). Конечно, при таком построении мы полагали, что при любых температурах система остается газообразной и подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона.

4.3.8. Треугольник на диаграмме (V, T) . С идеальным газом происходит процесс $1-2-3-4-1$, представленный на рис. 4.15. В состоянии 3 на отрезке диаграммы $2-3-4$ давление такое же, как и в состоянии 1. Определить объем газа в состоянии 3, если $V_1 = 1 \text{ м}^3$, $V_2 = 4 \text{ м}^3$, $T_1 = 100 \text{ К}$, $T_4 = 300 \text{ К}$.

Стандартный подход к решению подобных задач заключается в следующем. Для всех точек, относительно которых есть какая-либо информация, записывают уравнение Менделеева–Клапейрона. Таким

образом, получают некоторую систему уравнений, и далее следует ее решение. В наших условиях приходим к системе уравнений:

$$P_1 V_1 = \nu R T_1, \quad P_2 V_2 = \nu R T_1, \\ P_4 V_1 = \nu R T_4, \quad P_1 V_3 = \nu R T_3.$$

При этом мы учли, что по условию задачи $P_1 = P_3$. И если затратить определенные усилия, то в итоге нам удастся разрешить эту систему уравнений относительно V_3 . Но это впечатление обманчиво. Данная система уравнений является неполной!

В ней нигде не сказано о том, что точка 3, которая лежит на продолжении прямой 0–1 (это мы учли), находится также и на прямой 2–4. Конечно, можно написать уравнение данной прямой и «посадить» на нее точку 3, но это довольно долгий путь.

Есть более простой вариант. Учтем геометрические особенности фигуры, отображенной на рис. 4.15. Треугольник 2–3–5 подобен треугольнику 1–2–4. Отсюда сразу следует чисто геометрическое равенство

$$\frac{V_2 - V_3}{V_2 - V_1} = \frac{T_3 - T_1}{T_4 - T_1}. \quad (1)$$

Одного этого соотношения будет явно недостаточно, так как мы еще нигде не учли, что имеем дело с газом, подчиняющимся уравнению Менделеева–Клапейрона. Поэтому обратимся к треугольникам 0–1– T_1 и 0–3– T_3 . Из их подобия, а это как раз и следует из уравнения Менделеева–Клапейрона, получаем

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_3}{T_3}. \quad (2)$$

Теперь видно, что система уравнений (1), (2) является достаточной для определения V_3 , и для него получаем ответ:

$$V_3 = V_1 \frac{V_2 T_4 - V_1 T_1}{V_1 (T_4 - 2T_1) + V_2 T_1} = 2,2 \text{ м}^3.$$

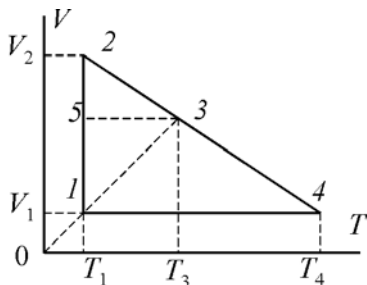


Рис. 4.15

4.3.9. Максимальная температура газа. Один моль газа совершает процесс, отображенный на рис. 4.16. Чему равна максимальная температура газа в этом процессе?

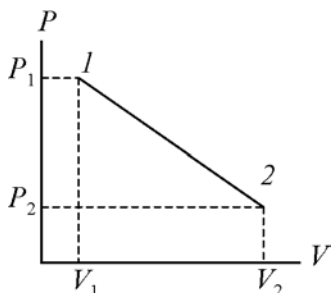


Рис. 4.16

Это достаточно стандартная задача на исследование максимума некоторой функции. Разным точкам указанной линейной зависимости $P(V)$ в силу уравнения Менделеева–Клапейрона соответствуют разные значения температуры. Поэтому для определения максимальной температуры необходимо вначале получить аналитическую зависимость $P(V)$, затем, применяя уравнение Менделеева–

Клапейрона, перевести ее в зависимость $T(V)$ либо $T(P)$ и после этого исследовать полученную функцию на максимум. Так как на рис. 4.16 изображена линейная зависимость, то ее можно представить в виде

$$P = \alpha - \beta V, \quad (1)$$

где значения α и β нетрудно найти по значениям $P(V)$ для крайних точек:

$$\alpha = \frac{P_1 V_2 - P_2 V_1}{V_2 - V_1}, \quad \beta = \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1}. \quad (2)$$

С использованием уравнения Менделеева–Клапейрона зависимость (1) можно перевести в зависимость $T(V)$:

$$T(V) = \frac{V}{R}(\alpha - \beta V).$$

Это уравнение параболы с ветвями, обращенными вниз. Ее максимальное значение достигается при

$$V = V_m = \frac{P_1 V_2 - P_2 V_1}{2(P_1 - P_2)},$$

а само максимальное значение температуры

$$T_{\max} = \frac{\alpha^2}{4\beta R},$$

где α и β даются выражениями (2). Правда, здесь нужно помнить, что использованное нами уравнение (1) описывает бесконечно длинную линию, а в задаче значение объема изменяется в конечных пределах. Поэтому найденное нами значение максимальной температуры имеет смысл при условии

$$V_1 < \frac{P_1 V_2 - P_2 V_1}{2(P_1 - P_2)} < V_2.$$

Если это условие будет нарушено, то максимальное значение температуры достигается на краю заданного на рис. 4.16 отрезка $P(V)$ и будет равно либо $P_1 V_1 / R$, либо $P_2 V_2 / R$ в зависимости от того, какое из них больше.

4.3.10. Смешивание газов. Два теплоизолированных сосуда 1 и 2 наполнены воздухом и соединены короткой трубкой с вентилем. В каждом баллоне заданы значения объема, давления и температуры воздуха (V_1, P_1, T_1 и V_2, P_2, T_2). Найти температуру и давление воздуха, которые установятся после открытия вентиля.

Состояния газов в каждом сосуде до их соединения и в объединенном сосуде после открытия вентиля подчиняются уравнению Менделеева–Клапейрона:

$$P_1 V_1 = \nu_1 R T_1, \quad (1)$$

$$P_2 V_2 = \nu_2 R T_2, \quad (2)$$

$$P(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2) R T. \quad (3)$$

При записи последнего уравнения мы исходили из того, что после соединения через трубку достаточно большого сечения газ в целом можно рассматривать как сплошную среду. В этом случае условие равновесия носит гидродинамический характер: давления в сосудах должны стать одинаковыми и равными P . Кроме того, ка-

ждой молекуле становится доступен объем $V_1 + V_2$ и количество газа ν равно сумме $\nu_1 + \nu_2$. Записанная нами система уравнений (1)–(3) является неполной, так как неизвестных величин четыре: ν_1, ν_2, P и T , а уравнений только три. Это означает, что только уравнения состояния (уравнения Менделеева–Клапейрона) недостаточно для полного описания состояния газов после их перемешивания. Таким уравнением в силу теплоизолированности сосудов является закон сохранения энергии.

Ранее было показано, что произведение давления газа на его объем пропорционально полной энергии поступательного движения молекул в сосуде $W_{\text{пост}} : PV \sim W_{\text{пост}}$. Если считать, что полная энергия молекул после соединения сосудов не изменилась, то, очевидно, должно быть выполнено равенство

$$P_1V_1 + P_2V_2 = P(V_1 + V_2).$$

Это и есть недостающее уравнение. Из него следует

$$P = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2}, \quad (4)$$

т.е. давление в объединенном сосуде (при заданных P_1, V_1 и P_2, V_2) не зависит от температуры перемешиваемых газов. После подстановки выражения (4) в уравнение (3) с учетом уравнений (1), (2) нетрудно получить и температуру смеси газов:

$$T = \frac{T_1T_2(P_1V_1 + P_2V_2)}{P_1V_1T_2 + P_2V_2T_1}.$$

4.4. Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики относится к одному из фундаментальнейших законов природы и по своей сути представляет собой обобщение закона сохранения энергии на макросистемы. В дифференциальном виде этот закон обычно записывают в виде

$$\delta Q = dU + \delta A .$$

Здесь δQ – элементарное количество теплоты, сообщенное системе; dU – приращение ее внутренней энергии; $\delta A = PdV$ – элементарная работа системы над внешними телами. Подчеркнем, что можно говорить о приращении внутренней энергии, но нельзя говорить о приращении работы или теплоты. Это означает, что внутренняя энергия системы является функцией состояния и не зависит от того, каким путем система пришла в данное состояние. В отличие от внутренней энергии количество теплоты и работа зависят от вида процесса, посредством которого система пришла в данное состояние.

4.4.1. Постоянная адиабаты для смеси газов. Найти постоянную адиабаты γ для газовой смеси, содержащей ν_1 молей газа с постоянной адиабаты γ_1 и ν_2 молей газа с постоянной γ_2 .

По определению постоянная адиабаты для произвольного газа

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} ,$$

где C_p, C_v – соответственно молярные теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме. В нашем случае газ состоит из смеси газов, каждый из которых имеет свою теплоемкость. Как же найти теплоемкость смеси? Для этого сообщим смеси газов некоторое тепло δQ . По определению теплоемкости это тепло должно быть равно $\delta Q = CvdT$. Часть этого тепла δQ_1 заберет одна компонента газа, вторую часть δQ_2 – другая. И тогда, очевидно, будет выполнено равенство

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 \rightarrow CvdT = C_1\nu_1dT + C_2\nu_2dT .$$

Откуда

$$C = \frac{C_1 v_1 + C_2 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Поэтому для γ получаем

$$\gamma = \frac{v_1 C_{p1} + v_2 C_{p2}}{v_1 C_{v1} + v_2 C_{v2}}. \quad (1)$$

Учитывая, что молярные теплоемкости можно выразить через постоянную адиабаты

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad C_p = R \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

(при этом мы учли уравнение Майера $C_p = C_v + R$), преобразуем (1) к виду

$$\gamma = \frac{v_1 \gamma_1 (\gamma_2 - 1) + v_2 \gamma_2 (\gamma_1 - 1)}{v_1 (\gamma_2 - 1) + v_2 (\gamma_1 - 1)}.$$

4.4.2. Перемещение поршня в теплоизолированном цилиндре. Внутри закрытого теплоизолированного цилиндра с идеальным газом с показателем адиабаты γ находится легкоподвижный теплопроводящий поршень. При равновесии поршень делит цилиндр на две равные части и температура газа равна T_0 . Найти температуру газа при медленном перемещении поршня как функцию отношения η объема большей части к объему меньшей части.

Так как сосуд теплоизолирован, то для всего газа в целом можно записать

$$dU + \delta A = 0, \quad (1)$$

здесь dU – бесконечно малое приращение внутренней энергии газов при малом перемещении поршня, равное $dU_1 + dU_2$. По условию задачи поршень теплопроводящий. Это означает, что изменение температуры в каждой половине сосуда, содержащей v молей газа, одинаково. Тогда

$$dU = dU_1 + dU_2 = 2v C_v dT. \quad (2)$$

Найдем теперь элементарную работу. Она состоит также из двух слагаемых:

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = P_1 dV_1 + P_2 dV_2,$$

где dV_1 и dV_2 – бесконечно малые изменения объема газа в каждой половине сосуда; P_1 и P_2 – значения давлений, которые определяются уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$P_1 V_1 = \nu RT, \quad P_2 V_2 = \nu RT.$$

Таким образом, полную работу при малом перемещении поршня можно записать в виде

$$\delta A = \nu RT \left(\frac{dV_1}{V_1} + \frac{dV_2}{V_2} \right). \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1), получаем

$$\frac{R}{2C_V} \left(\frac{dV_1}{V_1} + \frac{dV_2}{V_2} \right) = -\frac{dT}{T}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{R}{2C_V} \left(\ln \frac{V_1}{V_0} + \ln \frac{V_2}{V_0} \right) = -\ln \frac{T}{T_0}, \quad (4)$$

где V_0 – первоначальный объем газа в каждой половине сосуда, $V_0 = (V_1 + V_2)/2$. С учетом соотношения $\frac{R}{C_V} = \gamma - 1$ выражение (4)

легко преобразовать к виду

$$\frac{\gamma - 1}{2} \ln \frac{V_1 V_2}{V_0^2} = -\ln \frac{T}{T_0}.$$

Выражение $\frac{V_1 V_2}{V_0^2}$ можно расписать как

$$\frac{V_1 V_2}{V_0^2} = \frac{4V_1 V_2}{(V_1 + V_2)^2} = \frac{4\eta}{(\eta + 1)^2}.$$

Окончательно получаем

$$T = T_0 \left[\frac{(\eta + 1)^2}{4\eta} \right]^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

4.4.3. Газ, для которого тепло равно убыли внутренней энергии. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширяют таким образом, что сообщенное газу тепло равно убыли его внутренней энергии. Найти для этого газа молярную теплоемкость и уравнение процесса в переменных (P, V) .

По определению молярная теплоемкость

$$C = \frac{\delta Q}{dT}, \quad (1)$$

где δQ – количество тепла, которое нужно сообщить одному молю газа для того, чтобы поднять его температуру на dT градусов. В нашем случае $\delta Q = -dU$, и формула (1) приобретает вид

$$C = -\frac{dU}{dT}.$$

Так как приращение внутренней энергии не зависит от вида процесса, то dU нетрудно найти из первого закона термодинамики, сообщая газу тепло при постоянном объеме ($\delta A = 0$): $\delta Q = C_V dT = dU$, т.е. для любого процесса

$$\frac{dU}{dT} = C_V.$$

Таким образом, молярная теплоемкость газа в данном процессе

$$C = -C_V = -\frac{R}{\gamma - 1} < 0. \quad (2)$$

Удивляться тому, что теплоемкость газа оказалась отрицательной, не следует. Например, для изотермического процесса ($dT = 0$) теплоемкость может быть равна как $+\infty$, так и $-\infty$. Это зависит от того, сообщаем ли мы газу тепло ($\delta Q > 0$), или отнимаем его

($\delta Q < 0$). И вообще, если при сообщении газу тепла δQ реализуется процесс, для которого $PdV > \delta Q$, то $dT < 0$ и соответственно теплоемкость отрицательна.

Для определения уравнения процесса запишем первый закон термодинамики в виде

$$CdT = C_v dT + PdV.$$

Именно в таком виде это уравнение связывает все параметры газа. С учетом (2) и уравнения Менделеева–Клапейрона получаем:

$$2C_v = -P \frac{dV}{dT} = -\frac{RT}{V} \frac{dV}{dT}.$$

Разделим в этом уравнении переменные:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{2C_v} \frac{dV}{V},$$

и проинтегрируем:

$$\ln T = -\frac{R}{2C_v} \ln V + \text{const}.$$

Откуда следует

$$TV^{\frac{R}{2C_v}} = \text{const}$$

или

$$TV^{\frac{\gamma-1}{2}} = \text{const}.$$

И, воспользовавшись уравнением Менделеева–Клапейрона, получаем уравнение процесса в переменных (P, V) :

$$PV^{\frac{\gamma+1}{2}} = \text{const}. \quad (3)$$

Легко проверить, что значение показателя степени при V заключено в пределах

$$\gamma > \frac{\gamma+1}{2} > 1.$$

Это означает, что кривая, отображающая процесс (3), идет круче, чем изотерма, но более полого, чем адиабата.

4.4.4. Точка окончания ввода тепла. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает процесс, отображенный на рис. 4.17, и в итоге переходит в состояние с исходной температурой. До какого момента газ получает тепло? Какова его теплоемкость в данном процессе?

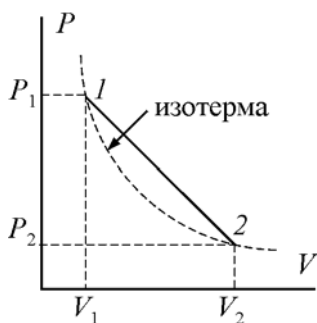


Рис. 4.17

Так как газ переходит в состояние с исходной температурой, то изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$. Кроме того, так как объем все время нарастает, то и полная работа газа в этом процессе положительна. И если обратиться к первому закону термодинамики, то следует «очевидный» ответ: газ все время (от V_1 до V_2) получает тепло. Но это поспешный вывод. На самом деле из того, что полное тепло, полученное газом, положительно, не сле-

дует вывод о том, что газ в любом состоянии указанного процесса получает тепло. При переходе из состояния 1 в состояние 2 вначале, пока растет его температура ($dT > 0$), газ на самом деле получает тепло ($\delta Q > 0$). Затем температура, достигая максимума (это происходит в средней точке процесса), начинает падать ($dT < 0$). И если обратиться к первому закону термодинамики $\delta Q = dU + \delta A$, то из него не следует, что $\delta Q > 0$, так как знаки dU и δA уже противоположны. Таким образом, момент окончания получения газом тепла сводится к определению состояния, вблизи которого выполняется равенство

$$\delta Q = 0. \quad (1)$$

С формальной точки зрения необходимо найти точку касания прямой линии, отображенной на рис. 4.17, с адиабатой, заданной уравнением $PV^\gamma = \text{const}$. Мы же рассмотрим более физический подход к ре-

шению данной задачи. Для этого обратимся к первому закону термодинамики в форме

$$\delta Q = C_V dT + PdV.$$

Перепишем это уравнение с учетом (1):

$$P + C_V \frac{dT}{dV} = 0. \quad (2)$$

Тогда определение момента, например значения V^* , начиная с которого ввод тепла сменится на его отвод, сводится к решению уравнения (2) относительно V . В наших условиях зависимость $P(V)$ имеет вид

$$P = \alpha - \beta V, \quad (3)$$

где, как нетрудно установить, значения α и β будут следующими:

$$\alpha = \frac{P_1 V_2 - P_2 V_1}{V_2 - V_1}, \quad \beta = \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1}. \quad (4)$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона с учетом зависимости (3) следует

$$T = \frac{PV}{R} = \frac{V}{R}(\alpha - \beta V).$$

Тогда производная

$$\frac{dT}{dV} = \frac{\alpha - 2\beta V}{R}. \quad (5)$$

Подставляя эту производную в уравнение (2), получаем

$$\alpha - \beta V^* + \frac{C_V}{R}(\alpha - 2\beta V^*) = 0. \quad (6)$$

Символ (*) означает, что данное соотношение выполняется только для значения объема V^* , начиная с которого ввод тепла сменится на его отвод. Из (6) находим

$$V^* = \frac{\alpha C_P}{\beta(C_P + C_V)}.$$

Подставляя сюда значения α и β , определяемые соотношением (4), получаем

$$V^* = \frac{P_1 V_2 - P_2 V_1}{P_1 - P_2} \frac{C_p}{C_p + C_v} = \frac{P_1 V_2 - P_2 V_1}{P_1 - P_2} \frac{\gamma}{1 + \gamma}.$$

По условию задачи следует, что значения P_1, P_2, V_1, V_2 связаны уравнениями:

$$P_1 = k P_2, \quad V_2 = k V_1,$$

где k – некоторое число, большее единицы. И тогда с учетом этих соотношений значение V^* находится как

$$V^* = V_2 \frac{k+1}{k} \frac{\gamma}{\gamma+1}.$$

Отсюда видно, что значение V^* будет равно V_2 только, если $k = \gamma$. При $k > \gamma$ $V^* < V_2$.

Обратимся теперь к расчету теплоемкости газа в указанном процессе. Как уже отмечалось ранее, теплоемкость газа в любом процессе можно найти как

$$C = C_v + P \frac{dV}{dT}.$$

Воспользовавшись уравнениями (3) и (5), получаем

$$C = C_v + \frac{R(\alpha - \beta V)}{\alpha - 2\beta V}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что теплоемкость в общем случае при $\alpha, \beta \neq 0$ не является постоянной и зависит от объема и соответственно от температуры. И только в некоторых частных случаях теплоемкость постоянна. Например, при $\alpha = 0$, независимо от значения β

$$C = C_v + \frac{R}{2},$$

а при $\beta = 0$ независимо от значения α

$$C = C_v + R = C_p.$$

В том, что теплоемкость в общем случае зависит от температуры, нет ничего удивительного. Согласно теории теплоемкость газа является постоянной только в том случае, если уравнение процесса в переменных (P, V) имеет вид

$$PV^\chi = \text{const},$$

где χ – некоторое постоянное число (показатель политропы),

$$\chi = \frac{C - C_p}{C - C_v}.$$

Такой процесс называется политропическим. Рассмотренный же нами процесс при $\alpha, \beta \neq 0$ явно не является политропическим.

4.4.5. Газ с теплоемкостью, обратной температуре. Имеется идеальный газ с показателем адиабаты γ . Его молярная теплоемкость при некотором процессе изменяется по закону $C = \alpha/T$, где α – постоянная. Найти работу, совершенную одним молем газа при его нагревании от T_0 до температуры в η раз большей и уравнение процесса в переменных (P, V) .

Находить любую из величин (теплоту, внутреннюю энергию или работу) можно двумя путями – либо по их прямому определению, либо через первый закон термодинамики. В данном случае выгодно искать работу не по ее прямому определению ($A = \int PdV$), так как нам неизвестна зависимость $P(V)$, а через первый закон термодинамики. Ее элементарное значение

$$\delta A = \delta Q - dU = \frac{\alpha}{T} dT - C_v dT.$$

Интегрируя данное соотношение, получаем

$$A = \int_{T_0}^{\eta T_0} \left(\frac{\alpha}{T} - C_v \right) dT = \alpha \ln \eta - \frac{RT_0}{\gamma - 1} (\eta - 1).$$

Уравнение процесса также можно найти из первого закона термодинамики, который представим в виде

$$\frac{\alpha}{T} dT = C_v dT + PdV.$$

Необходимо только проинтегрировать это уравнение. Для этого с использованием уравнения Менделеева–Клапейрона перепишем его:

$$\frac{\alpha}{T} dT = C_V dT + RT \frac{dV}{V}.$$

После деления на температуру приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$$\left(\frac{\alpha}{T^2} - \frac{C_V}{T} \right) dT = R \frac{dV}{V}.$$

Его интегрирование дает

$$-\frac{\alpha}{T} - C_V \ln T = R \ln V + \text{const}.$$

После потенцирования получаем

$$\exp\left(-\frac{\alpha}{T}\right) V^R T^{C_V} = \text{const}.$$

Подставляя сюда значение $T = PV / R$ и упрощая, получаем окончательно

$$\exp\left[-\frac{\alpha(\gamma-1)}{PV}\right] PV^\gamma = \text{const}.$$

Убедиться в том, что это разумный ответ, можно следующим образом. При $\alpha = 0$ теплоемкость газа по условию обращается в нуль. А это адиабатический процесс, для которого справедливо уравнение Пуассона $PV^\gamma = \text{const}$. Именно это и получается из общего ответа при $\alpha = 0$.

4.4.6. Колебания поршня в сосуде с газом. В вакуумированном горизонтальном цилиндре вплотную к левому торцу находится поршень массой m с недеформированной пружиной жесткостью k , прикрепленной к правому торцу цилиндра (рис. 4.18). Пространство между левым торцом цилиндра и поршнем заполняется небольшим количеством идеального газа с показателем адиабаты γ . Найти частоту малых колебаний поршня, считая процесс адиабатическим и пренебрегая трением.

То, что в данной системе возможны колебания, вытекает из следующих соображений. После заполнения цилиндра газом в равновесном положении на поршень действуют две противоположно направленные силы – сила упругости kl_0

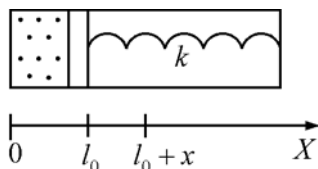


Рис. 4.18

(l_0 – величина сжатия пружины) и сила давления газа P_0S (P_0 – давление газа; S – площадь поршня). При отклонении поршня от положения равновесия на величину x , например вправо, эти силы, сохраняя свое направление, изменяются по величине. Сила упругости возрастает и становится равной $k(l_0 + x)$, а сила давления за счет увеличения объема газа становится меньше. Таким образом, результирующая сила, действующая на поршень, будет направлена влево. Аналогичная картина наблюдается и при отклонении поршня влево – уменьшается сила упругости, возрастает сила давления газа, и результирующая сила будет направлена вправо, т.е. в любом случае сила, действующая на поршень, направлена к его положению равновесия.

Для того чтобы воспользоваться вторым законом Ньютона, необходимо рассчитать силу давления со стороны газа F . В равновесном положении выполняется равенство

$$P_0S = kl_0. \quad (1)$$

При отклонении поршня от положения равновесия изменение давления подчиняется уравнению Пуассона для адиабатического процесса:

$$PS^\gamma (l_0 + x)^\gamma = P_0S^\gamma l_0^\gamma.$$

Тогда сила давления

$$F = PS = P_0S \frac{l_0^\gamma}{(l_0 + x)^\gamma} \approx P_0S \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^\gamma \approx P_0S \left(1 - \gamma \frac{x}{l_0}\right)$$

(при этом мы воспользовались известными приближенными равенствами $(1 + x)^\gamma \approx 1 + \gamma x$, $1/(1 + x) \approx 1 - x$ при малых x).

Тогда второй закон Ньютона для поршня запишется в виде

$$m\ddot{x} = -k(l_0 + x) + P_0 S \left(1 - \gamma \frac{x}{l_0} \right),$$

или с учетом равенства (1)

$$m\ddot{x} = -kx - P_0 S \gamma \frac{x}{l_0} = -kx(1 + \gamma).$$

Таким образом, мы пришли к уравнению гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

из которого следует, что искомая частота колебаний поршня

$$\omega = \sqrt{\frac{k(1 + \gamma)}{m}}.$$

В наших рассуждениях мы, естественно, не учитывали процесс распространения звука в самом газе, пренебрегая его массой.

4.4.7. Падение поршня в цилиндре. В откачанном пространстве вертикально стоит высокий цилиндрический сосуд, перекрытый сверху подвижным поршнем массы M . Под поршнем находится одноатомный идеальный газ при давлении P_0 . Внутреннее сечение цилиндра S . Вначале поршень находится на высоте H относительно дна. Затем его отпускают. Какова максимальная скорость, развиваемая поршнем, если газ сжимается изотермически? адиабатически?

Вначале, когда сила тяжести поршня превышает силу давления газа, поршень приобретает ускорение и его скорость увеличивается. Затем по мере падения поршня нарастает давление газа, что приводит к уменьшению ускорения. Когда сила тяжести сравняется с силой давления, ускорение поршня обращается в нуль, а его скорость становится максимальной, т.е. в момент достижения поршнем максимальной скорости должно выполняться равенство

$$Mg = PS, \tag{1}$$

где P – давление газа в момент максимальной скорости.

Для определения максимальной скорости разумно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии – изменение кинетической энергии поршня равно сумме работ всех сил, действующих на него:

$$\frac{1}{2}mv^2 = Mg(H - h) + A, \quad (2)$$

где h – высота поршня в момент достижения максимальной скорости; A – работа газа при уменьшении его объема. Так как высота поршня пропорциональна объему газа:

$$\frac{H}{h} = \frac{V_0}{V},$$

то соотношение (2) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}mv^2 = MgH \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) + A, \quad (3)$$

где V – объем газа в момент достижения максимальной скорости. Дальнейшие рассуждения зависят от вида процесса сжатия газа.

Рассмотрим вначале изотермический процесс сжатия $PV = \text{const}$. Для него очевидно

$$\frac{V}{V_0} = \frac{P_0}{P},$$

или с учетом (1)

$$\frac{V}{V_0} = \frac{P_0 S}{Mg}. \quad (4)$$

Комплекс $\frac{P_0 S}{Mg}$, как увидим в дальнейшем, будет появляться довольно часто, поэтому есть смысл ввести для него обозначение α ,

$$\alpha = \frac{P_0 S}{Mg}. \quad (5)$$

Тогда с учетом (4) и (5) работа силы тяжести

$$MgH \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) = MgH(1 - \alpha).$$

Работу газа при изотермическом сжатии можно рассчитать по формуле

$$A = \nu RT \ln \frac{V}{V_0}.$$

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона и обозначение α , ее можно переписать как

$$A = MgH\alpha \ln \alpha.$$

Тогда закон сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{1}{2} M v^2 = MgH(1 - \alpha) + MgH\alpha \ln \alpha.$$

Откуда следует

$$v = \sqrt{2gH(1 - \alpha + \alpha \ln \alpha)},$$

где α определяется по формуле (5).

Пусть теперь процесс сжатия газа адиабатический. В этом случае работает уравнение Пуассона

$$P_0 V_0^\gamma = P V^\gamma.$$

Откуда следует

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{P_0}{P} \right)^\gamma = \left(\frac{P_0 S}{Mg} \right)^{1/\gamma} = \alpha^{3/5}$$

(значение γ для одноатомного газа $\gamma = 5/3$). Тогда работа силы тяжести

$$MgH \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) = MgH(1 - \alpha^{3/5}).$$

Работу газа при адиабатическом сжатии можно найти по формуле

$$A = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{3P_0 V_0}{2} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V} \right)^{2/3} \right] = \frac{3}{2} MgH\alpha [1 - \alpha^{-2/5}].$$

Подставляя найденные значения работ в закон сохранения энергии (3), после несложных преобразований получаем

$$\frac{1}{2} M v^2 = M g H \left(1 - \frac{5}{2} \alpha^{3/5} + \frac{3}{2} \alpha \right).$$

Откуда находим

$$v = \sqrt{2 g H \left(1 - \frac{5}{2} \alpha^{3/5} + \frac{3}{2} \alpha \right)},$$

где α определяется по формуле (5).

4.4.8. Понижение температуры воздуха в восходящих потоках. Одной из причин понижения температуры с нарастанием высоты в атмосфере является расширение воздуха в восходящих потоках без теплообмена с окружающей средой. Найти понижение температуры на каждые 100 м высоты, полагая воздух идеальным газом.

То, что температура должна понижаться с увеличением высоты, сразу следует из первого закона термодинамики. Так как теплообмен отсутствует, то вся работа, связанная с перемещением воздуха, должна совершаться за счет убыли его внутренней энергии.

Выделим в поднимающемся потоке воздуха объем, соответствующий одному молю ΔV_m . Пусть этот объем перемещается из области с давлением P_1 в область с давлением P_2 . Это можно представить так, как будто он исчез из одной области пространства и появился в другой. Тогда, очевидно, работа, совершенная газом,

$$A = P_2 \Delta V_{m2} - P_1 \Delta V_{m1},$$

где ΔV_{m1} и ΔV_{m2} – объемы одного моля воздуха в областях с давлением P_1 и P_2 соответственно. Исходя из уравнения Менделеева–Клапейрона, эту работу можно представить как

$$A = R(T_2 - T_1) = R \Delta T,$$

где ΔT – изменение температуры воздуха при его подъеме.

Изменение энергии связано как с изменением температуры, так и с изменением высоты газа в поле тяжести:

$$\Delta U = C_V \Delta T + \mu gh.$$

В силу первого закона термодинамики при отсутствии теплообмена должно выполняться равенство

$$C_V \Delta T + \mu gh + R \Delta T = 0.$$

Откуда

$$\Delta T = -\frac{\mu gh}{C_V + R} = -\frac{\mu gh}{C_p}.$$

Принимая молярную массу воздуха $\mu \approx 29$ г/моль и теплоемкость $C_p \approx 29,3$ Дж/(моль · К), получаем, что температура воздуха понижается примерно на 1 К на каждые 100 м высоты.

4.4.9. Адиабатическое истечение газа. Газ вытекает из теплоизолированного сосуда через малое отверстие. Температура газа в сосуде T_1 , давление P_1 . При выходе из сосуда давление газа P_2 . Найти скорость истечения v газа на выходе из сосуда. Молярная масса газа μ , показатель адиабаты γ .

В силу малости отверстия будем полагать, что вытекающая из сосуда струя газа формируется непосредственно вблизи отверстия, и истечение газа можно рассматривать как макроскопический поток. Ограничимся достаточно малым промежутком времени истечения, таким, что давление и температуру газа в сосуде можно считать постоянными. Тогда процесс истечения газа из сосуда можно рассматривать как стационарный, причем траектории любых выделенных элементов газа совпадают с линиями тока. Кроме того, будем пренебрегать тангенциальными силами вязкости. Это позволит нам воспользоваться законом сохранения энергии.

Выделим мысленно в стационарном потоке газа небольшую трубку (рис. 4.19), один конец которой (2) находится снаружи сосуда вблизи отверстия, а другой (1) – внутри сосуда, где скоростью газа

можно пренебречь. При перемещении небольшого элемента газа объемом ΔV силы давления совершают работу (см. задачу 4.4.8)

$$\Delta A = P_2 \Delta V_2 - P_1 \Delta V_1, \quad (1)$$

где P_1 и P_2 – давления газа в сечениях 1 и 2; ΔV_1 и ΔV_2 – объемы выделенного элемента газа в этих же сечениях.

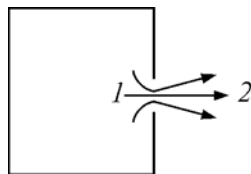


Рис. 4.19

В потоке газа, в отличие от равновесной системы, значения давления и температуры меняются от точки к точке, поэтому можно говорить только о локальном термодинамическом равновесии в отдельных частях потока. Но при достаточно малых скоростях макроскопического движения газа значения термодинамических параметров можно полагать связанными между собой уравнением состояния. Это позволяет представить выражение (1) через температуру газа в сечениях 1 и 2:

$$\Delta A = \nu R(T_2 - T_1),$$

где ν – количество газа в выделенном элементе ΔV .

В силу первого закона термодинамики работа, совершаемая над газом, должна идти на изменение его энергии ΔU , которое состоит из двух слагаемых. Одно слагаемое равно изменению внутренней энергии хаотического движения молекул газа, определяемое изменением температуры $\Delta U(T)$:

$$\Delta U(T) = \nu C_V (T_2 - T_1).$$

Другое слагаемое равно изменению кинетической энергии упорядоченного движения молекул газа ΔE :

$$\Delta E = \frac{\nu \mu}{2} (v_2^2 - v_1^2),$$

где v_1 и v_2 – скорости струи газа в сечениях 1 и 2.

Пренебрегая скоростью v_1 в силу малости отверстия, получаем для изменения энергии газа выражение

$$\Delta U = \Delta U(T) + \Delta E = \nu C_V (T_2 - T_1) + \frac{\nu \mu}{2} v^2,$$

где v – искомая скорость истечения газа из отверстия.

По первому закону термодинамики при отсутствии теплообмена ($\Delta Q = 0$) имеем

$$\Delta A + \Delta U = 0 \rightarrow \nu R(T_2 - T_1) + \nu C_V(T_2 - T_1) + \frac{\nu \mu}{2} v^2 = 0.$$

Откуда, учитывая, что $C_V + R = C_P$, для скорости истечения получаем

$$v = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_P (T_1 - T_2)}. \quad (2)$$

В таком виде эта формула непригодна для вычислений, так как неизвестна температура струи газа на выходе из отверстия T_2 . Однако ее значение можно найти из уравнения Пуассона

$$\frac{P_1^{\gamma-1}}{T_1^\gamma} = \frac{P_2^{\gamma-1}}{T_2^\gamma},$$

из которого следует

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

После подстановки этого выражения в (2) получаем

$$v = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_P T_1 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_1}{\mu(\gamma-1)} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]},$$

здесь мы учли, что $C_P = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$.

Максимальная скорость достигается при истечении газа в вакуум:

$$v_{\text{вак}} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \frac{\gamma RT}{\gamma - 1}}, \quad (3)$$

где T – температура газа в сосуде. Кроме того, мы полагали, что при истечении в вакуум $T_2 = 0$, т.е. газ охлаждается до абсолютного нуля и его теплоемкость сохраняет постоянное значение.

Если вспомнить, что скорость звука в газах $c = \sqrt{\gamma RT / \mu}$ (см. главу 3), то для скорости истечения в вакуум получаем

$$v_{\text{вак}} = c \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}.$$

Для молекулярного водорода при температуре 1000 К по формуле (3) получаем

$$v_{\text{вак}} \approx 5400 \text{ м/с}.$$

Получение больших скоростей истечения газов является одной из важнейших проблем ракетной техники. Из формулы (3) следует, что в ракетной технике выгодно применять горючее с высокой теплотой сгорания (для получения больших температур в камере сгорания) и образующее продукты сгорания с малой молярной массой.

4.5. Второе начало термодинамики. Энтропия

Первое начало термодинамики позволяет, не вдаваясь в детали механизма процессов, получить ряд важных выводов о поведении макросистем. В то же время оно, в частности, ничего не говорит о направлении протекания процессов, или об их возможности. Ответ на этот вопрос заключается во втором начале термодинамики, одна из формулировок которого звучит следующим образом. Предоставленная самой себе макросистема стремится переходить от менее вероятных состояний к более вероятным. Количественно второе начало термодинамики можно выразить через введенное Клаузиусом понятие энтропии. Энтропия изолированной системы не может убывать. Энтропия S вводится через ее элементарное приращение как

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Здесь знак равенства относится к обратимым, а знак неравенства – к необратимым процессам. Энтропия является функцией состояния и при приближении температуры к абсолютному нулю сама стремится к нулю:

$$S \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow 0.$$

Это утверждение представляет собой содержание так называемой теоремы Нернста и иногда его называют третьим началом термодинамики.

Объединяя определение энтропии с первым началом, для обратимых процессов можно получить

$$TdS = dU + PdV.$$

Это уравнение имеет многочисленные применения и его называют основным уравнением термодинамики.

4.5.1. Изменение энтропии при расширении газа в пустоту.

В одном из теплоизолированных сосудов, соединенных трубкой с закрытым вентилем, находится один моль идеального газа, в другом – вакуум. Объемы сосудов V_1 и V_2 . После открытия вентиля газ

заполнил оба сосуда и пришел в состояние термодинамического равновесия. Найти изменение энтропии.

Процесс расширения газов в пустоту, очевидно, необратимый. И непосредственно считать энтропию термодинамическим путем по необратимому процессу невозможно. Поэтому воспользуемся тем, что энтропия – функция состояния и проведем между начальным и конечным состоянием такой обратимый процесс, который позволит найти изменение энтропии. Реальный процесс расширения газа в пустоту шел без теплообмена и без совершения работы. В силу первого закона термодинамики $\Delta U = 0$, т.е. конечная температура газа равна начальной. Поэтому проще всего провести расчет изменения энтропии по обратимому изотермическому процессу. Для этого переведем газ из начального состояния в конечное квазистатически, приведя его в тепловой контакт с нагревателем, имеющим температуру газа. Уменьшая бесконечно медленно давление на газ, можно его изотермически перевести из состояния с объемом V_1 в состояние с объемом $V_1 + V_2$. При этом газ будет забирать тепло от нагревателя и превращать его в эквивалентную работу.

Для изотермического процесса $\delta Q = PdV$, и тогда

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{PdV}{T} = R \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V} = R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} > 0,$$

т.е. энтропия возросла. Поэтому адиабатическое расширение газа в пустоту – необратимый процесс. Следует обратить внимание на тривиальную, но довольно распространенную ошибку. Из того факта, что в первоначальной постановке задачи $\delta Q = 0$, делают вывод о том, что и $dS = \delta Q/T$ также равно нулю, т.е. энтропия в начальном и конечном состоянии одинакова. Ошибка состоит в том, что равенством $dS = \delta Q/T$ в нашей ситуации нельзя пользоваться. Оно относится только к квазиравновесным процессам и для неравновесных процессов неприменимо.

4.5.2. Изменение энтропии при перемешивании газов. Изменим теперь несколько постановку задачи. Пусть в двух половинах теплоизолированного сосуда объемом V находится по одному молю двух разных идеальных газов, разделенных перегородкой. Температура и давление в обеих половинах сосуда одинаковы. Затем перегородка убирается, и начинается необратимый процесс смешивания газов. Как изменится энтропия системы?

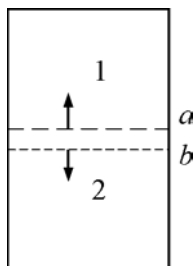


Рис. 4.20

Для того чтобы процесс смешивания газов протекал квазистатически, допустим, что перегородка, разделяющая газы, состоит из двух сложенных вместе полупроницаемых перегородок a и b (рис. 4.20). Перегородка a пропускает газ из первой области, но непроницаема для второго газа. Перегородка b , наоборот, пропускает газ из второй области, но непроницаема для первого газа. Приведем теперь всю систему в тепловой контакт с нагревателем, температура которого поддерживается постоянной и равной температуре газов. Затем, медленно перемещая перегородки a и b , заставим газы занять весь объем сосуда.

Используя результат предыдущей задачи, находим, что при $V_1 = V_2$, приращение энтропии каждого газа равно $R \ln 2$, т.е. суммарное изменение энтропии системы

$$\Delta S = 2R \ln 2. \quad (1)$$

Это приращение $\Delta S > 0$, поскольку процесс смешивания газов существенно необратим (обратный процесс разделения смеси на два отдельных газа совершенно невероятен!).

А что будет с энтропией, если перемешивать одинаковые газы? Тогда по формуле (1) возрастание энтропии остается. Однако конечное состояние системы макроскопически ничем не отличается от исходного и, значит, энтропия не должна измениться! В этом состоит так называемый парадокс Гиббса. На самом деле никакого парадокса нет, так как формула (1) была получена только для случая, когда газы 1 и 2 различны (пусть даже это различие ничтожно). Для тождест-

венных газов наш способ квазистатического перемешивания газов неприменим. Перегородки, проницаемые или непроницаемые для газа 1, останутся такими же и для газа 2, тождественного с газом 1. И принципиально невозможно перемешать тождественные газы квазистатическим способом, описанным выше.

4.5.3. Изменение энтропии при смешивании газов с разной температурой. Два одинаковых теплоизолированных сосуда, соединенных трубкой с вентилем, содержат по одному молю одного и того же газа с молярной теплоемкостью C_V . Температура газа в одном сосуде T_1 , в другом – T_2 . После открытия вентиля газы пришли в новое состояние равновесия. Найти изменение энтропии в этом процессе.

Для определения конечного состояния газа воспользуемся законом сохранения энергии $U_1 + U_2 = U$, где U_1 и U_2 – энергия каждого газа до их перемешивания; U – энергия системы после перемешивания. Так как внутренняя энергия пропорциональна температуре, то, очевидно,

$$T_1 + T_2 = 2T, \quad (1)$$

где T – новая установившаяся температура.

Перевести нашу систему из начального состояния с разными температурами в конечное с одинаковой температурой обратимым путем проще всего изохорически, поставив мысленно между газами неподвижную теплопроводящую перегородку. В этом случае для каждого газа $\delta Q = C_V dT$ ($\delta A = 0$) и тогда для обоих газов имеем

$$\Delta S = \int_{\text{сист}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^T C_V \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^T C_V \frac{dT}{T} + \Delta S_0, \quad (2)$$

где ΔS_0 – приращение энтропии системы за счет перемешивания одинаковых газов при одинаковой температуре. Это слагаемое, как было показано в задаче 4.5.1 (парадокс Гиббса), равно нулю. Тогда с учетом (1) получаем

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T^2}{T_1 T_2} = C_V \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}.$$

Нетрудно показать, что $(T_1 + T_2)^2 / 4T_1T_2$ при любых температурах больше единицы:

$$\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2} + 1,$$

а это значит, что $\Delta S > 0$, т.е. энтропия при перемешивании одинаковых газов, но с разной температурой, возрастает.

4.5.4. Изменение энтропии при измерении температуры тела. Измерение температуры тела обычно производится с помощью термометра, имеющего, хотя и небольшую, но конечную теплоемкость. Найдем изменение энтропии системы (тело плюс термометр) после измерения температуры.

Пусть температура тела до измерения — T_1 , его теплоемкость — c_1 , температура термометра до измерения — T_2 , теплоемкость — $c_2 \ll c_1$. Понятно, что $T_2 \neq T_1$ (иначе нет необходимости измерять температуру тела!). Найдем теперь показания термометра θ после измерения температуры. Из уравнения теплового баланса $c_1(\theta - T_1) + c_2(\theta - T_2) = 0$ находим

$$\theta = \frac{c_1T_1 + c_2T_2}{c_1 + c_2}.$$

Тогда изменение энтропии можно найти как

$$\Delta S = \int_{T_1}^{\theta} c_1 \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^{\theta} c_2 \frac{dT}{T} = c_1 \ln \frac{\theta}{T_1} + c_2 \ln \frac{\theta}{T_2}.$$

Найдем приближенное значение этого выражения при $c_2 \ll c_1$. Для этого введем обозначения:

$$\frac{c_2}{c_1} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{T_2}{T_1} = x.$$

В этих обозначениях:

$$\frac{\theta}{T_1} = \frac{c_1T_1 + c_2T_2}{(c_1 + c_2)T_1} \approx 1 + \varepsilon x - \varepsilon, \quad \frac{\theta}{T_2} = \frac{c_1T_1 + c_2T_2}{(c_1 + c_2)T_2} \approx \frac{1}{x} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{x}.$$

Тогда ΔS с точностью до членов первого порядка малости по ε будет определяться по формуле

$$\Delta S \approx c_1 \left[\ln(1 + \varepsilon x - \varepsilon) + \varepsilon \ln \left(\frac{1}{x} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{x} \right) \right] \approx c_1 (\varepsilon x - \varepsilon - \varepsilon \ln x) \approx \\ \approx c_2 \left(\frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

(при этом мы использовали приближенные равенства $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$ и $\ln(1 + \varepsilon x) \approx \varepsilon x$ при $\varepsilon \ll 1$). Нетрудно проверить, что функция $x - \ln x - 1$ при любых x не бывает отрицательной. А это означает, что изменение энтропии системы при любом соотношении исходных температур тела и термометра всегда больше нуля.

Кроме того, проведенный анализ позволяет сделать весьма важный вывод: любая попытка получить информацию о системе (в частности о ее температуре) приводит к росту энтропии данной системы! Таким образом, существует прямая связь между энтропией системы и информацией о ней.

4.5.5. Изменение энтропии при обратимом процессе. Найти приращение энтропии двух молей идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1,30$, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в $\alpha = 2$ раза, а давление упало в $\beta = 3$ раза.

Так как по условию задачи процесс перевода системы из начального состояния в конечное не определен, то мы вправе сами определить его (главное, чтобы начальное и конечное состояния соответствовали условию задачи). Поэтому вначале при постоянном давлении увеличим объем до заданного значения, а затем при постоянном объеме уменьшим давление. Обратимся теперь к основному уравнению термодинамики:

$$TdS = dU + PdV = \nu C_V dT + PdV,$$

откуда

$$dS = \nu C_V \frac{dT}{T} + \frac{PdV}{T}.$$

После интегрирования с учетом уравнения Менделеева–Клапейрона получаем

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Представляя отношение температур в виде

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1},$$

получаем окончательно

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{\alpha}{\beta} + \nu R \ln \alpha = \nu R \frac{\gamma \ln \alpha - \ln \beta}{\gamma - 1} = -11 \text{ Дж/К}.$$

4.5.6. Изменение энтропии системы лед плюс вода. В калориметре находится вода массой m_1 при температуре t_1 (по Цельсию). Туда опускают кусок льда массой m_2 при температуре $t_2 < 0^\circ\text{C}$. Найти изменение энтропии системы к моменту установления равновесия. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

Для определения ΔS нам необходимо знать конечное состояние системы, т.е. что и при какой температуре будет находиться в калориметре после установления состояния равновесия. Тут возможны три варианта. В системе может остаться один лед (т.е. вода замерзнет), вода (лед растает), или образуется двухфазная система (лед плюс вода) при нулевой температуре. Реализация любого из этих вариантов зависит от тепловых характеристик воды и льда, их массы и исходных температур (для простоты рассуждений будем выражать температуру в градусах Цельсия).

Максимальное тепло, которое можно отнять от воды, — $c_1 m_1 t_1$ (c_1 — удельная теплоемкость воды). Максимальное тепло, которое нужно сообщить льду, чтобы довести его до плавления, — $c_2 m_2 t_2$ (c_2 — удельная теплоемкость льда). Обозначим сумму этих количеств теплоты как Q ,

$$Q = c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2. \quad (1)$$

Если величина Q меньше теплоты плавления льда, образующегося из воды массой m_1 , т.е. если

$$Q < -m_1\lambda, \quad (2)$$

то образуется лед массой $m_1 + m_2$ при температуре

$$\theta_{\text{л}} = \frac{Q + \lambda m_1}{c_2(m_1 + m_2)}, \quad (3)$$

где λ – удельная теплота плавления льда.

Если $Q > m_2\lambda$, то образуется вода массой $m_1 + m_2$ при температуре

$$\theta_{\text{в}} = \frac{Q - \lambda m_2}{c_1(m_1 + m_2)}.$$

И, наконец, если $-m_1\lambda < Q < m_2\lambda$, то в системе останется лед массой $m_2 - \Delta m$ и вода массой $m_1 + \Delta m$ при нулевой температуре, где $\Delta m = Q/\lambda$, значение Q дается выражением (1). Соотношение фаз системы отражено на рис. 4.21 (по осям координат отложены величины $c_1 m_1 t_1 > 0$ и $c_2 m_2 t_2 < 0$).

Теперь нетрудно рассчитать и изменение энтропии. При образовании однородного (только лед) состояния, т.е. при выполнении условия (2), изменение энтропии складывается из четырех слагаемых:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{i=4} \Delta S_i,$$

здесь ΔS_1 – уменьшение энтропии

при остывании воды до 0°C ; ΔS_2 – уменьшение энтропии при замерзании воды; ΔS_3 – уменьшение энтропии при остывании образовавшегося льда массой m_1 до температуры $\theta_{\text{л}}$; ΔS_4 – увеличение

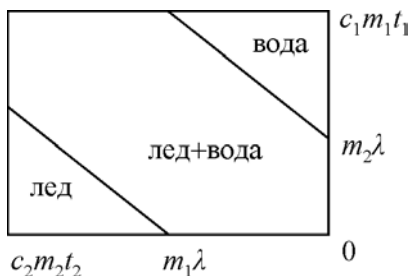


Рис. 4.21

энтропии при нагревании льда массой m_2 до температуры $\theta_{\text{л}}$. Значения этих величин можно рассчитать следующим образом:

$$\Delta S_1 = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_0} c_1 m_1 \frac{dT}{T} = -c_1 m_1 \ln \frac{T_1}{T_0},$$

$$\Delta S_2 = \int \frac{\delta Q}{T} = -\frac{\lambda m_1}{T_0},$$

$$\Delta S_3 = -c_2 m_1 \ln \frac{T_0}{T_{\text{л}}},$$

$$\Delta S_4 = c_2 m_2 \ln \frac{T_{\text{л}}}{T_2}.$$

Здесь $T_0 = 273 \text{ К}$, $T_1 = t_1 + 273$, $T_2 = t_2 + 273$, $T_{\text{л}} = \theta_{\text{л}} + 273$. Значение $\theta_{\text{л}}$ определяется по выражению (3). Очевидно, так как система пришла в состояние равновесия (более вероятное состояние), то суммарное изменение энтропии будет больше нуля.

Совершенно аналогично можно подсчитать и изменение энтропии в остальных двух вариантах (предоставим это выполнить самостоятельно).

4.5.7. Цикл Карно. Что сильнее влияет на повышение коэффициента полезного действия (КПД) цикла Карно – повышение температуры нагревателя или уменьшение температуры холодильника на одинаковую величину?

Известно, что КПД цикла Карно рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (1)$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника. Отсюда видно, что для повышения КПД необходимо либо увеличивать T_1 , либо понижать T_2 . Формально выражение (1) можно представить в виде

$$\eta = f(T_1, T_2). \quad (2)$$

Изменение каждой температуры на небольшую величину ΔT приводит к изменению η на величину $\Delta\eta$,

$$\Delta\eta \approx \frac{\partial\eta}{\partial T_1} \Delta T + \frac{\partial\eta}{\partial T_2} \Delta T.$$

Тогда ответ на поставленный вопрос сводится к определению того, какая из частных производных $\frac{\partial\eta}{\partial T_1}$ или $\frac{\partial\eta}{\partial T_2}$ окажется больше. Найдем эти производные:

$$\frac{\partial\eta}{\partial T_1} = \frac{T_2}{T_1^2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \frac{1}{T_1}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial T_2} = -\frac{1}{T_1}.$$

Так как $T_2 < T_1$, то $\frac{\partial\eta}{\partial T_1} < \left|\frac{\partial\eta}{\partial T_2}\right|$. Значит, на повышение КПД сильнее

влияет уменьшение температуры холодильника в цикле Карно, чем увеличение температуры нагревателя.

4.5.8. Максимальная работа тепловой машины. Какую максимальную работу может произвести тепловая машина, если в качестве нагревателя используется нагретое тело с начальной температурой T_1 , а в качестве холодильника неограниченная среда с температурой T_2 ? Полагать теплоемкость тела не зависящей от температуры и равной c .

Известно, что тепловая машина, работающая по циклу Карно, обладает максимальным КПД. Это означает, что при введении одинакового количества теплоты максимальную работу можно получить, реализуя между телами цикл Карно. В нашей же задаче реализовать полноправный цикл Карно не удастся, так как теплоемкость нагретого тела не равна бесконечности и постепенно его температура будет падать, пока не станет равной температуре окружающей среды, используемой в качестве холодильника. Поэтому для получения максимальной работы будем реализовывать последовательно повторяющиеся бесконечно малые циклы Карно, в которых температура нагревателя стремится к температуре холодильника.

Пусть в результате одного из таких элементарных циклов нагретое тело при температуре T' отдало теплоту $\delta Q_1 = -cdT'$, а второе тело (окружающая среда) при температуре T_2 получило теплоту δQ_2 . При этом была совершена работа $\delta A = \delta Q_1 - \delta Q_2$.

Из сравнения КПД цикла Карно с общим определением КПД любой тепловой машины

$$\frac{T' - T_2}{T'} = \frac{\delta Q_1 - \delta Q_2}{\delta Q_1}$$

следует

$$\delta Q_2 = \frac{T_2}{T'} \delta Q_1.$$

С учетом этого соотношения

$$\delta A = \delta Q_1 - \delta Q_2 = \delta Q_1 - \frac{T_2}{T'} \delta Q_1 = -cdT' + c \frac{T_2}{T'} dT'.$$

Для нахождения полной работы необходимо проинтегрировать это соотношение по температуре:

$$A = -c \int_{T_1}^{T_2} dT' + cT_2 \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT'}{T'} = c(T_1 - T_2) - cT_2 \ln \frac{T_1}{T_2}.$$

Отсюда видно, что нам не удалось полностью преобразовать убыль внутренней энергии нагретого тела $c(T_1 - T_2)$ в механическую работу. Часть внутренней энергии тело передало окружающей среде в виде теплоты.

4.5.9. Коэффициент полезного действия циклов. Найти КПД цикла, состоящего из двух адиабат и двух изохор (рис. 4.22), если рабочим телом тепловой машины является одноатомный идеальный газ.

По определению

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (1)$$

где Q_1 – тепло, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 – тепло, отданное холодильнику. Очевидно, Q_1 равно теплу, сообщаемому

на участке 1–4, а Q_2 равно теплу, отдаваемому на участке 2–3. Так как на этих участках реализован изохорный процесс, то

$$Q_1 = Q_{14} = \nu C_V (T_1 - T_4);$$

$$Q_2 = Q_{23} = \nu C_V (T_2 - T_3).$$

Подставим эти соотношения в (1):

$$\eta = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}, \quad (2)$$

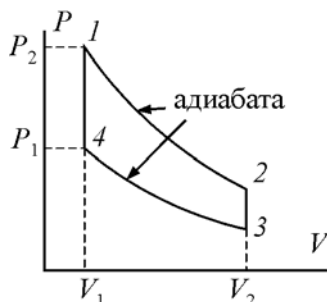


Рис. 4.22

и воспользуемся уравнением Пуассона для участков 1–2 и 3–4:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}; \quad T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}.$$

Из этих равенств вытекает

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}; \quad T_3 = T_4 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}.$$

Подставляя эти соотношения в (2), получаем

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{2/3}.$$

Рассмотрим теперь цикл, представленный на рис. 4.23, рабочим веществом которого является один моль идеального одноатомного газа. На каких участках газ получает тепло? Так как процесс 3–4 происходит при большей температуре, а процесс 2–3 при большем давлении, то именно на этих участках и происходит ввод тепла от нагревателя, а сам цикл совершается по часовой стрелке. Таким образом, КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_{234}},$$

где A – работа, совершаемая газом за один цикл; $Q_{234} = Q_{23} + Q_{34}$.

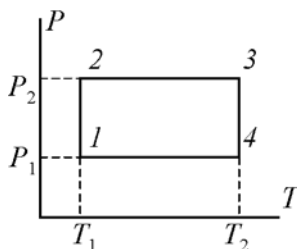


Рис. 4.23

Если бы цикл был задан на диаграмме (P, V) , то работа была бы равна площади этого цикла. Поэтому найдем работу как сумму работ на отдельных участках цикла (P, T) :

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}.$$

Для изотермических участков 3–4 и 1–2:

$$A_{12} = -RT_1 \ln \frac{P_2}{P_1}; \quad A_{34} = RT_2 \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

Для изобарических участков 2–3 и 4–1:

$$A_{23} = P_2(V_3 - V_2) = R(T_2 - T_1); \quad A_{41} = P_1(V_1 - V_4) = R(T_1 - T_2).$$

Таким образом, полная работа

$$A = R(T_2 - T_1) \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

Перейдем теперь к расчету теплоты, введенной от нагревателя. Так как участок 3–4 изотермический, то $\Delta U_{34} = 0$, и тогда

$$Q_{34} = A_{34} = RT_2 \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

Для изобарического участка 2–3 имеем

$$Q_{23} = C_p(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R(T_2 - T_1).$$

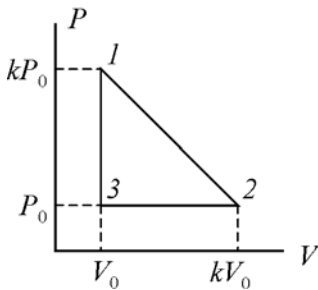


Рис. 4.24

Окончательно для КПД получаем

$$\eta = \frac{(T_2 - T_1) \ln \frac{P_2}{P_1}}{\frac{5}{2}(T_2 - T_1) + T_2 \ln \frac{P_2}{P_1}}.$$

Рассмотрим еще один цикл, представленный на рис. 4.24 (k – некоторое число, большее единицы). Цикл внешне

очень прост, но в нем есть один нюанс, который легко пропустить при недостаточно внимательном анализе. Из первого закона термодинамики легко увидеть, что тепло сообщается на участке 3–1–2:

$$Q_{312} = \Delta U_{32} + A_{312},$$

где ΔU_{32} – изменение внутренней энергии на участке 3–1–2,

$$\Delta U_{32} = \frac{3}{2} R(T_2 - T_3) = \frac{3}{2} (kP_0V_0 - P_0V_0) = \frac{3}{2} (k-1)P_0V_0;$$

A_{312} – работа газа на участке 3–1–2,

$$A_{312} = \frac{kP_0 + P_0}{2} (k-1)V_0.$$

Тогда введенное тепло

$$Q = Q_{312} = \frac{P_0V_0}{2} (k-1)(k+4).$$

Работа A в цикле 3–1–2–3 равна площади треугольника:

$$A = \frac{(k-1)^2}{2} P_0V_0. \quad (1)$$

Таким образом, КПД

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{2(k-1)^2 P_0V_0}{2P_0V_0(k-1)(k+4)} = \frac{k-1}{k+4}. \quad (2)$$

Однако при выводе формулы (2) была допущена ошибка. Мы несколько поспешно решили, что ввод тепла начинается в точке 3 и заканчивается в точке 2. На самом деле (это детально обсуждалось в задаче 4.4.4) ввод тепла заканчивается раньше точки 2 при значении объема

$$V^* = kV_0 \frac{k+1}{k} \frac{\gamma}{\gamma+1} = \frac{5}{8} V_0 (k+1)$$

и давлении

$$P^* = \alpha - \beta V^* = \frac{3}{8} (k+1)P_0$$

(обозначения те же, что и в задаче 4.4.4).

Тогда введенное тепло

$$Q^* = \Delta U_{3*} + A_{31*},$$

где ΔU_{3*} – изменение внутренней энергии в состояниях (P_0, V_0) и (P^*, V^*) ,

$$\Delta U_{3*} = \frac{3}{2}(P^*V^* - P_0V_0) = P_0V_0 \frac{3}{2} \left[\frac{15}{64}(k+1)^2 - 1 \right];$$

A_{31*} – работа газа между этими же состояниями,

$$A_{31*} = \frac{kP_0 + P^*}{2}(V^* - V_0) = P_0V_0 \frac{11k+3}{16} \cdot \frac{5k-3}{8}.$$

Тогда

$$Q^* = \frac{P_0V_0}{2} \left[\frac{(11k+3)(5k-3) + 45(k+1)^2}{64} - 3 \right].$$

Полезная работа, как и ранее, рассчитывается по формуле (1). И правильное выражение для КПД будет иметь вид

$$\eta^* = \frac{A}{Q^*} = \frac{64(k-1)^2}{(11k+3)(5k-3) + 45(k+1)^2 - 192}. \quad (3)$$

Значения выражений (2) и (3) совпадают только при $k = \gamma = 5/3$, при этом $\eta = \eta^* = 2/17$. При $k > \gamma$ начинается расхождение и тем больше, чем больше значение k . Например, при $k = 10$: $\eta^* = 49\%$, $\eta = 64\%$. Предельное значение η^* (при больших k) равно 64% , а значение $\eta \rightarrow 100\%$.

4.5.10. Обогрев с помощью идеальной тепловой машины.

С помощью электрической плитки мощностью 1 кВт в комнате поддерживается температура 17°C при температуре наружного воздуха -23°C . Какая мощность потребовалась бы для поддержания в комнате той же температуры с помощью идеальной тепловой машины?

Принцип действия идеальной тепловой машины заключается в том, что такая машина забирает тепло Q_1 от тела с более высокой

температурой (нагреватель), часть его Q_2 отдает телу с более низкой температурой (холодильник) и разность $Q_1 - Q_2$ превращает в работу. Для идеальной тепловой машины выполняется равенство

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (1)$$

где T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника.

Если обратить цикл тепловой машины, то получается холодильная машина. Такая машина забирает тепло Q_2 от тела с более низкой температурой, отдает тепло Q_1 телу с более высокой температурой и при этом над машиной совершается работа. На таком принципе работают обычные холодильники. Если эта машина идеальна, то для нее также выполняется равенство (1). Естественно, такую машину можно использовать в качестве обогревателя, что и предлагается в условии задачи. Тогда мощность электрической плитки 1 кВт необходимо принять за тепловую мощность Q_1/t , отдаваемую идеальной тепловой машиной телу с более высокой температурой (т.е. в комнату при $T_1 = 290$ К). Тепловую же мощность Q_2/t , отбираемую у тела с более низкой температурой (наружный воздух при $T_2 = 250$ К), можно найти из соотношения (1):

$$\frac{Q_2}{t} = \frac{Q_1}{t} \cdot \frac{T_2}{T_1}.$$

По закону сохранения энергии мощность N , необходимая для осуществления цикла такой идеальной тепловой машины, составит

$$N = \frac{Q_1}{t} - \frac{Q_2}{t} = \frac{Q_1}{t} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = 138 \text{ Вт.}$$

4.5.11. Динамическое отопление. При обычных способах отопления теплота, полученная от сгорания топлива, поступает непосредственно в отапливаемое помещение. Значительная доля теплоты бесполезно расходуется на обогревание окружающей атмосферы.

Имеются и другие потери теплоты. Томсон предложил другую схему отопления, названную динамическим отоплением (тепловой насос). Сейчас такой способ обогрева и кондиционирования помещений реализуется в так называемых сплит-системах. Этот способ отопления с энергетической точки зрения более выгоден, чем обычный.

Рассмотрим один из вариантов такого способа. Для отопления здания используется теплота, которая отдается воздуху в комнате при работе теплового двигателя. Этот двигатель приводит в действие холодильную машину, которая отнимает теплоту от грунтовых вод и отдает ее воздуху в комнате. Определить теоретический КПД такого цикла отопления, если температура в котле теплового двигателя $T_1 = 210^\circ\text{C}$, температура воды в батарее, установленной в комнате, $T_2 = 60^\circ\text{C}$, а температура грунтовых вод $T_3 = 10^\circ\text{C}$.

Двигатель и холодильную машину вместе можно рассматривать как единую термодинамическую систему, совершающую круговой процесс (рис. 4.25). КПД теплового двигателя (для идеальной тепловой машины)

$$\eta_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Если при сгорании топлива выделилась энергия q , то двигатель совершает работу

$$A = q\eta_1 = q \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (1)$$

При этом отопительной системе (батарее, установленной в комнате) было передано количество теплоты

$$Q_1 = (1 - \eta_1)q = \frac{T_2}{T_1} q.$$

Совершаемая рабочим телом 1 работа A идет на приведение в действие холодильной машины. Эта

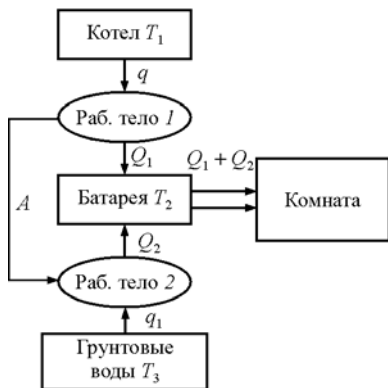


Рис. 4.25

машина работает по обратному циклу. Она отбирает у грунтовых вод теплоту q_1 и передает отопительной системе количество теплоты

$$Q_2 = A + q_1,$$

где A – работа, совершаемая рабочим телом 2 над холодильной машиной. Так как машина идеальная, то она обратима. Это означает, что при работе по прямому циклу она совершает работу A , получая от нагревателя количество теплоты Q_2 и отдавая грунтовым водам количество теплоты q_1 . Ее КПД

$$\eta_2 = \frac{A}{Q_2} = \frac{T_2 - T_3}{T_2}.$$

Откуда находим тепло, вырабатываемое холодильной машиной и поступающее в батареи отопления:

$$Q_2 = A \frac{T_2}{T_2 - T_3}.$$

Подставляя сюда значение A из (1), находим

$$Q_2 = q \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot \frac{T_2}{T_2 - T_3}.$$

Таким образом, полное количество теплоты, которое получит воздух комнаты,

$$Q = Q_1 + Q_2 = q \frac{T_2}{T_1} + q \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} = q \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3}.$$

Естественно определить КПД такой единой отопительной системы, как отношение полного, полученного тепла Q к теплу, полученному от сгорания топлива q :

$$\eta = \frac{Q}{q} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3} \approx 2,76.$$

Не стоит удивляться, что это значение оказалось больше единицы. Ведь мы извлекали еще «бесплатное» тепло от постороннего источника – грунтовых вод.

Динамическое отопление может служить примером процесса, в котором тепло от более холодного тела (окружающая среда) переходит к более теплому телу (отапливаемое помещение). Однако такой процесс не противоречит второму началу термодинамики в формулировке Клаузиуса, так как он сопровождается компенсацией. Компенсация состоит в том, что одновременно теплота переходит от более нагретого тела (топка) к менее нагретому (помещение).

Демон Максвелла. В заключение данной главы рассмотрим парадокс, который много лет служил темой дискуссий и который очень хорошо проверяет «на прочность» статистическую физику и ее отношение ко второму началу термодинамики. В термодинамике все процессы идут так, что энтропия изолированной системы возрастает, и никакого способа нарушить этот закон нет. Но если на атомы и молекулы вещества смотреть как на материальные точки, которые подчиняются законам механики, справедливость закона возрастания энтропии становится не очевидной.

Представим себе маленькое существо, которое может видеть атомы или молекулы («демон Максвелла»). Поместим его в изолированный ящик с газом, который разделен на две половинки (правую и левую) перегородкой с небольшой дверкой. В задачу демона входит открывать дверку перед быстрыми молекулами, летящими слева, и перед медленными молекулами, летящими справа. Через некоторое время, очевидно, температура газа слева понизится, а справа повысится, т.е. энтропия изолированной системы уменьшится. А это прямое нарушение второго начала термодинамики! Ясно, что дело в демоне и что ему приписаны какие-то свойства, противоречащие законам физики. Попытаемся обнаружить эти противоречия.

Для того чтобы различать быстрые и медленные молекулы, демон должен их видеть, т.е. в ящик должен проникать свет. А это означает, что система не изолирована. Конечно, можно снабдить демона маленьким фонариком и освещать молекулы. Но в этом случае будет «садиться» батарейка, и ее энтропия будет возрастать. Связано это с тем, что любая попытка получить информацию о системе приводит к возрастанию ее энтропии (см., например, задачу 4.5.4).

Можно попытаться обойтись и без фонарика. Сделаем демона настолько маленьким, чтобы он мог сам реагировать на удары отдельных молекул. Пусть это будет откидная дверка с пружинкой. Быстрой молекуле хватает сил, чтобы открыть дверку и проскочить в другую половинку сосуда, а медленной не хватит, и она отлетит обратно. Но в этом случае, так как дверка очень маленькая, она вскоре так нагреется, что перестанет различать быстрые и медленные молекулы и будет открываться совершенно произвольно. Так что никакого разделения газов по температуре не произойдет. Можно сделать демона маленьким и тяжелым, чтобы он не нагревался сильно. Но тогда нас ждет другая неприятность – удары молекул не смогут его сдвинуть с места, и он не будет выполнять возложенную на него задачу по разделению молекул на быстрые и медленные.

Чтобы демон мог выполнить свои функции, надо держать его самого при очень низкой температуре, например, охлаждая жидким водородом. Тогда его тепловое движение прекратится, и он сможет различать скорости молекул. Но в этом случае за счет притока энергии, затраченной на охлаждение самого демона, на подавление его собственных флуктуаций и его броуновского движения, обязательно произойдет увеличение энтропии системы, которое превысит ее уменьшение за счет разделения газов по температуре.

Приведенные нами рассуждения свидетельствуют о том, что никакого парадокса нет, и что в любом случае энтропия замкнутой системы не может убывать. Второй закон термодинамики нарушить нельзя. Это один из самых могучих законов нашего мира.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие: в 5 т. – Т. 1: Механика / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1989. – 576 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие: в 5 т. – Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1990. – 592 с.
3. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие для вузов / И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 432 с.
4. Задачи по физике: учеб. пособие / И.И. Воробьев [и др.]; под ред. О.Я. Савченко. – М.: Наука, 1988. – 416 с.

Учебное издание

Паршаков Александр Николаевич

ПРИНЦИПЫ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

Часть 1

Механика. Физика макросистем

Учебное пособие

Редактор и корректор *Н.В. Бабинова*

Подписано в печать 11.08.08. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 15,5. Тираж 250 экз. Заказ № 174/2008.

Издательство
Пермского государственного технического университета.
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.
Тел. (342) 219-80-33.