南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：线性代数　学分：2.5　教学大纲编号：11031201

试卷编号：A　考试方式：闭卷　满分分值：100　考试时间：120 分钟

组卷日期：2019 年 12 月 11 日　组卷教师(签字)：命题组　审定人(签字)：__________

所有解答必须写在答题纸上，写在试卷上无效

一． 是非题：（每小题 3 分，共 15 分）

（下列命题正确的打 √，错误的打×）

1. 设 A，B 为同阶对称矩阵，则 $(AB)^T = AB$。（ ）

2. 若 ξ_1, ξ_2 都是方阵 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量，则其线性组合 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 也是 A 的属于 λ_0 的特征向量。（ ）

3. 若 A，B 均为 n 阶方阵，则 $AB - BA \neq I$。（ ）

4. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定二次型，则 $-3 < t < 3$。（ ）

5. 设 η^* 是线性方程组 $Ax = b, b \neq 0$ 的任一解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ 是其导出组的基础解系，则向量组 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ 线性无关。（ ）

二．填空题：（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\alpha = (1,-2,3)^T, \beta = (1,1,1)^T$，$A = \alpha\beta^T$，则 $A^n =$__________。

2. 已知 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & b_2 & 1 & b_4 \\ 1 & -1 & -2 & c_4 \end{pmatrix}$，且 $\xi_1 = (1,1,0,0)^T, \xi_2 = (1,0,2,1)^T$ 为 $Ax = 0$ 的解，则 A 的秩 $r(A) =$________。

3. 设三阶矩阵 A 的特征值为 0，1，-2，又 $B = A^2 + A + 2I$，则矩阵 B 的行列式 $|B| =$________。

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 A 与 B 是(　)。

(A) 相似但不合同　(B) 合同且相似　(C) 合同但不相似　(D) 既不合同也不相似

5. 在 R^3 中，定义线性变换 $\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则 σ 在基 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为__________。

三．（8 分）计算 $n+1$ 阶行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix}$。

四．（12 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $2A^*X = A^*B + X$，求矩阵 X。

五．（12 分）已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$，根据 t 的取值情况，求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大线性无关组。

六．（12 分）已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + px_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 7x_4 = q \end{cases}$，其系数矩阵 A 的秩 $r_A = 2$，试问 p, q 取何值时，方程组有解？并在有解时求其通解。

七．（14 分）设矩阵 A 为 3 阶实对称矩阵，$|A| = 5$，$trA = 7$，向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为齐次线性方程组 $(A - 5I)X = 0$ 的解向量，试求 1、正交变换 $X = TY$，化二次型 $f(X) = X^TAX$ 为标准形（要写出所用的正交变换和此标准形）；2、矩阵 A。

八．（7 分）设 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性无关的，$\alpha_{n+1} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 均不为 0，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量均线性无关。