高等数学试题 A 卷

注意：所有解答写在答卷纸上，写在试卷上无效

一．　填空题　（每题 3 分，共 30 分）

1． $y=f(\lg x)$ 的定义域为 $[\frac{1}{2},2]$，则 $y=f(x)$ 的定义域为（　　　）。$[-\lg 2,\lg 2]$

2． 当 $x\to 0$ 时 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小量，则 $a=$（　　　）。$-\frac{3}{2}$

3． 设 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$（　　　　）－1。

4． $d\int_{x^2}^{0}x\cos t^2dt=$（　　　　）。$(\int_{x^2}^{0}\cos t^2dt-2x^2\cos x^4)dx$

5． 函数 $f(x)=\ln x^2-x$ 单调增加区间是（　　　　）。$(0,2)$

6． 曲线 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})\quad(x>0)$ 的斜渐近线为（　　　　　）。$y=x+\frac{1}{e}$

7． $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$a\neq 0$。则 $\int\frac{f(ax)}{a}dx=$（　　　　　）。$\frac{\sin ax}{a^3x}+c$

8． 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，$f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)dx=$（**2**）。

9． $\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{2-x}}dx=$（　　　　　）。$\frac{\pi}{4e}$

10． $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\Lambda\ 2n}=$（　　　　　）。$\frac{4}{e}$

二．计算题（每题 6 分，共 36 分）

1． 求 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

$$\lim_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x-0}\cos x\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^t-e^{-t})dt}{1-\cos x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^t-e^{-t})dt}{1-\cos x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-e^{-x^2})2x}{2x\sin x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+2xe^{-x^2}}{2x}=2$$

3．设 $f(x)$ 可微，且 $f(x)>0$，$y=f(\frac{\ln f(x)}{f(x)})$，试求 dy 。

$$dy=f'(\frac{\ln f(x)}{f(x)})\cdot\frac{[1-\ln f(x)]f'(x)}{f^2(x)}dx$$

4．设函数 $y=y(x)$ 由下述参数方程确定 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

5．求积分 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

令 $u=\sqrt{e^x-1}$ ，$x=\ln(u^2+1)$，$dx=\frac{2u}{u^2+1}du$

则 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\frac{(u^2+1)\ln(u^2+1)}{u}\frac{2u}{u^2+1}du=2\int\ln(u^2+1)du$

$$=2u\ln(u^2+1)-2\int\frac{2u^2}{u^2+1}du\quad=2u\ln(u^2+1)-2\int(2-\frac{2}{u^2+1})du$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C\quad=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

6 求积分 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{1+\cos 2x}dx$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}|\cos x|dx=\sqrt{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos xdx)=2\sqrt{2}-1$$

三．解答题（**10** 分）

试讨论方程 $xe^{-x}=a\ (a>0)$ 的实根。

解 令 $F(x)=xe^{-x}-a$，则 $F'(x)=(1-x)e^{-x}$，由 $F'(x)=0$ 得 $x=1$

当 $x\in(-\infty,1)$,$F'(x)>0$,$F(x)\uparrow$；当 $x\in(1,+\infty)$,$F'(x)<0$,$F(x)\downarrow$。所以 $x=1$ 是 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的极大值点，且极大值 $F(1)=e^{-1}-a$ 。因为 $x=1$ 是 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 但唯一驻点，则极大值 $F(1)=e^{-1}-a$ 是最大值。

（**1**） 若 $F(1)=e^{-1}-a<0$ 时，$F(x)$ 没有零点，即方程无根。

（2） 若$F(1)=e^{-1}-a$＝0时，$F(x)$有唯一零点，即方程有唯一的根。

（3） 若$F(1)=e^{-1}-a>0$时，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$，$F(x)$在$(-\infty,1)$有唯一零点，即方程唯一的根；$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-a<0$，$F(x)$在$(1,+\infty)$有唯一零点，即方程唯一的根。这时方程有两个根。

四．应用题（**15** 分）

1.（**8** 分）已知$f(x)$是周期为 **5** 的连续函数，它在$x=0$的某邻域内满足关系式$f(1+\sin x)$ －$3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$是当$x\to 0$时比$x$高阶的无穷小，且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程。

1．由连续性，有$\lim\limits_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim\limits_{x\to 0}[8x+\alpha(x)]$

即$f(1)-3f(1)=0$，故$f(1)=0$

因此$f'(1)=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(1+u)}{u}$

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{\sin x}$

即$\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{f(1+\sin x)}{\sin x}+\dfrac{3f(1-\sin x)}{-\sin x}]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{x}$

也即$f'(1)+3f'(1)=8$，故$f'(1)=2$

由函数的周期性，$f(6)=f(1)=0$，故所求切线方程为$y=2(x-6)$

2.（**7** 分）设曲线$y=-x^2+x+2$与y轴的交点为 **P**，过 **P** 点作该曲线的切线，求切线与该曲线及x轴围城的区域绕x轴旋转一周所成的旋转体体积。

2．$V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2-\pi\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)^2dx=\dfrac{29}{30}\pi$

五．证明题（**9** 分）

设$f(x)$在$[a,b]$上不恒为零，且其导数$f'(x)$连续，并且有$f(a)=f(b)=0$，试证明存在$\xi\in[a,b]$，使$|f'(\xi)|>\dfrac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$。

（**1**）当$\int_a^b f(x)dx\le 0$时，$[a,b]$上任一点均可取做ξ。

（**2**）当$\int_a^b f(x)dx>0$时，因为$f'(x)$在$[a,b]$上连续，所以$|f'(x)|$在$[a,b]$上连续。于是，

存在$\xi \in [a,b]$，使得$\left| f'(\xi) \right| = M = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f'(x) \right|$。

又由题设有

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a) \quad (a < \xi_1 < x)$$

$$f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b) \quad (x < \xi_2 < b)$$

从而$\left| f(x) \right| \le M(x-a)$，$\left| f(x) \right| \le M(b-x)$。

$$\int_a^b \left| f(x) \right| dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| f(x) \right| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left| f(x) \right| dx \le M[\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)dx]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} M$$

又$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \left| f(x) \right| dx$，且$\int_a^b f(x)dx > 0$，故结论成立。

A 卷答案

一填空题

1. $[-\lg 2, \lg 2]$　　**2.** $-\frac{3}{2}$　　**3.** -1　　**4.** $(\int_{x^2}^{0} \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4)dx$

5. $(0,2)$　　**6.** $y = x + \frac{1}{e}$　　**7.** $\frac{\sin ax}{a^3 x} + c$　　**8.** 2

9. $\frac{\pi}{4e}$　　**10.** $\frac{4}{e}$

二．计算题

1. $\lim\limits_{x \to 0} \cot x (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin x} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim\limits_{x - 0} \cos x \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^t - e^{-t})dt}{1 - \cos x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(e^{x^2} - e^{-x^2})2x}{2x \sin x^2} = 4 \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} + 2xe^{-x^2}}{2x} = 2$$

3. $dy = f'(\frac{\ln f(x)}{f(x)}) \cdot \frac{[1 - \ln f(x)] f'(x)}{f^2(x)} dx$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2}$　　$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}$

5．令$u=\sqrt{e^{x}-1}$ ，$x=\ln(u^{2}+1)$，$dx=\dfrac{2u}{u^{2}+1}du$

则$\int\dfrac{xe^{x}}{\sqrt{e^{x}-1}}dx=\int\dfrac{(u^{2}+1)\ln(u^{2}+1)}{u}\dfrac{2u}{u^{2}+1}du=2\int\ln(u^{2}+1)du$

$=2u\ln(u^{2}+1)-2\int\dfrac{2u^{2}}{u^{2}+1}du \quad =2u\ln(u^{2}+1)-2\int(2-\dfrac{2}{u^{2}+1})du$

$=2u\ln(1+u^{2})-4u+4\arctan u+C \quad =2x\sqrt{e^{x}-1}-4\sqrt{e^{x}-1}+4\arctan\sqrt{e^{x}-1}+C$

6．$\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}|\cos x|dx=\sqrt{2}(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos xdx)=2\sqrt{2}-1$

三解答题

解 令$F(x)=xe^{-x}-a$，则$F'(x)=(1-x)e^{-x}$，由$F'(x)=0$得$x=1$

当$x\in(-\infty,1)$，$F'(x)>0$，$F(x)\uparrow$；当$x\in(1,+\infty)$，$F'(x)<0$，$F(x)\downarrow$。所以$x=1$是$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$的极大值点，且极大值$F(1)=e^{-1}-a$。因为$x=1$是$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$但唯一驻点，则极大值$F(1)=e^{-1}-a$是最大值。

（**4**） 若$F(1)=e^{-1}-a<0$时，$F(x)$没有零点，即方程无根。

（**5**） 若$F(1)=e^{-1}-a=0$时，$F(x)$有唯一零点，即方程有唯一的根。

（**6**） 若$F(1)=e^{-1}-a>0$时，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$，$F(x)$在$(-\infty,1)$有唯一零点，即方程唯一的根；$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-a<0$，$F(x)$在$(1,+\infty)$有唯一零点，即方程唯一的根。这时方程有两个根。

四．**1**．由连续性，有$\lim\limits_{x\to0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim\limits_{x\to0}[8x+\alpha(x)]$

即 $f(1)-3f(1)=0$，故 $f(1)=0$

因此 $f'(1)=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(1+u)}{u}$

又$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{\sin x}$

即$\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{f(1+\sin x)}{\sin x}+\dfrac{3f(1-\sin x)}{-\sin x}]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{x}$

也即 $f'(1)+3f'(1)=8$，故 $f'(1)=2$

由函数的周期性， $f(6)=f(1)=0$，故所求切线方程为$y=2(x-6)$

2．$V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2-\pi\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)^2\,dx=\dfrac{29}{30}\pi$

五．证明题

（**1**）当$\int_a^b f(x)dx\le 0$时，$[a,b]$上任一点均可取做ξ。

（**2**）当$\int_a^b f(x)dx>0$时，因为$f'(x)$在$[a,b]$上连续，所以$|f'(x)|$在$[a,b]$上连续。于是，

存在$\xi\in[a,b]$，使得$|f'(\xi)|=M=\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$。

又由题设有

$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)\quad(a<\xi_1<x)$

$f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b)\quad(x<\xi_2<b)$

从而$|f(x)|\le M(x-a)$，$|f(x)|\le M(b-x)$。

$$\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx\le M[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)dx]$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}M$$

又$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx$，且$\int_a^b f(x)dx>0$，故结论成立。