02 级　高等数学（上）A 卷　　5 学分（80 分）

一.　　填空题（2×13）

1、 设 $y=\sqrt{x}\sin^2\left(2x+1\right)$，则 $y'=$ ________ .

2、 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+xf\left(x\right)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f\left(x\right)}{x^2}=$ ________ .

3、 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,3\right]$ 上具有连续导数，则 $\displaystyle\int_1^3\frac{f'\left(x\right)dx}{1+\left[f\left(x\right)\right]^2}=$ ______ .

4、 直线 $\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z=1$ 的夹角为 ________ .

5、当 $x\to1$ 时，已知 x^x-1 和 $a\left(x-1\right)^k$ 是等价无穷小，则 $a=$ ________ ，

$k=$ ________ .

6、$\left(1,3\right)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$ ________ ， $b=$ ________ .

7、$x=0$是函数$y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{x}{\sin x}$的________间断点.

（请填；跳跃，可去，无穷，振荡之一）

8、已知$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$，则$f^{(100)}\left(0\right)=$________.

9、设$y=y\left(x\right)$是由放程$\int_0^{xy}e^{t^2}dt+ye^x=2$所确定的隐函数，

则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

10、若已知向量$a=\left\{1,2,-1\right\}$，$b=\left\{2,-1,3\right\}$，则由a，b构成的平行四边形的面积为________.

11、曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z=8\\x+2y+2z=1\end{cases}$在$x0y$坐标面上的投影曲线方程为________.

12、曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点为________ .

13、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 的结果为________ .

二、计算题（4×6）

1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\int_0^{\sin x}\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t}dt}$

2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-e^x}{x+2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

3、$\int x^2\cos 2x dx$

4、$\int \frac{dx}{1+2\cos x}$

5、$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$

6、$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

三、（6）求 $y=e^{x^2-x}$ 在 $\left[0,2\right]$ 上的最大，小值，并证明：$2e^{-\frac{1}{4}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2$.

四、（6）求过点 $\left(2,0,-3\right)$ 且与直线 $l:\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程，

并求点 $\left(1,2,2\right)$ 到该平面的距离.

五、（6）已知曲线 $y=y(x)$ 的参数方程 $\begin{cases} x=\arctan 2t \\ y=t+\ln\left(1+4t^2\right) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

六、（6 分）求由曲线 $y^2=2x$ 与 $y^2=1-x$ 所围图形的面积.

七、（6 分）设 $x\ge 0$，证明：$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中 $\dfrac{1}{4}\le\theta(x)\le\dfrac{1}{2}$.

解：$\theta(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right],\theta'(x)\rangle 0,\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2},\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$