# 01 级　高等数学（上）A 卷　 6 学分（80 分）

一.　　选择题（$2\times10$）

1、$x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\le 0\\ \dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}, x\rangle 0\end{cases}$ 的 ________ 。　　C

A．连续点；　　B．可去间断点；　　C．跳跃间断点；　　D 第二类间断点。

2、已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(2x+3)dx=$ ________ 。　　B

A．$\frac{1}{2}F(2x+3)$；　B．$\frac{1}{2}F(2x+3)+c$；　C。$2F(2x+3)+c$；D．$2F(2x+3)$

3、过直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$ 且平行于直线 $x-1=t-2=z-3$ 的平面方程为 ________ 。　C

A．$x+y+z=0$；　B. $x+2y+4z=0$；　C. $2x-3y+z=0$

4、设 $f(x)=(x^3-1)(x+2)$，则 $f'(1)=$ ________ 。　　B

A．$-6$；　　B. $9$；　　C. $-9$；　　D. $6$

5、设 $y=f(x)$ 满足 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0, f^{(4)}(x_0)\rangle 0$，则在下列图形中表示曲线 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 附近的性态最正确的是 ________ 。　　C

二、填空题（3×5）

1、已知 $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\ge 0\end{cases}$，则 $f(x)+f(x+1)=$ ________ .　　$\begin{cases}0, x<-1\\ 1, -1<x<0\\ 2, 0\le x\end{cases}$

2、若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，则 $a=$ ________，$b=$ ________ .　　$a=1, b=-1$

3、已知 $y=e^{\arctan\frac{1}{x}}$，则 $dy=$ ________ .　　$\frac{-e^{\arctan\frac{1}{x}}}{1+x^2}dx$

4、$\int x\sin 2xdx=$ ________ .　　$-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

5、设 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}, \vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}, \vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$，则 $\vec{p}\cdot\vec{q}=$ ________ .　　$-2-\sqrt{3}$

三、（5×6）计算

1. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，求 $y''$.　　$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$y''=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}2x$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.　　$-\frac{1}{3}$

3. 设$\begin{cases} y=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3} \\ x=t-\arctan t \end{cases}$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.　　$t^4-1, 4t\left(1+t^2\right)$

4. 求过原点平行于两平面$x+y+z=0, x+2y+4z=3$的直线方程.　　$\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1}$

5. 计算$\int\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.　　$\frac{1}{2}(\arctan x-\frac{x}{1+x^2})+c$

6. 设$f\left(x\right)=\int_x^1\frac{\sin x}{x}dx$，计算$\int_0^1 xf\left(x\right)dx$.　　$\frac{\sin 1-\cos 1}{2}$

四、（6）已知点$\left(1,3\right)$为曲线$y=x^3+ax^2+bx+14$的拐点，求$a,b$.　　$a=-3, b=-9$

五、（7分）设$0<t\le\frac{\pi}{2}$，曲线$y=\sin x$及三直线$x=t, x=2t, y=0$所围的平面图形绕$x$轴旋转一周所得的旋转体体积为$V\left(t\right)$，问$t$为何值时$V\left(t\right)$最大.　　$t=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$

六、（7分）已知$f\left(x\right)\in C\left[0,1\right]$，证明：$\int_0^\pi xf\left(\sin x\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f\left(\sin x\right)dx$，并求$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{2+\cos^2 x}dx$.　　令$x=\pi-t, \pi\sqrt{2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}$

七、（5分）设$f\left(x\right)$在$\left[0,2\right]$连续，$\left(0,2\right)$可导，且$f\left(1\right)=2, \int_1^2 xf\left(x\right)dx=1$，

证明：$\exists\xi\in\left(0,2\right)$，使得$\xi f'\left(\xi\right)+f\left(\xi\right)=0$.　　令$F\left(x\right)=xf\left(x\right)$