南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：高等数学Ⅰ　学分：5　教学大纲编号：11123301

试卷编号：期末A　考试方式：闭卷　满分分值：100　考试时间：120 分钟

组卷日期：2024年1月8日　组卷教师(签字)：王丰　审定人(签字)：__________

（考生请注意：所有答案按试题序号写在答题纸上，写在试卷上一律无效！）

一、填空题（每小题3分，共24分）

1. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=$__________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-\sin x}{x+2\sin x}, & x<0\\ \dfrac{x+a}{\cos 3x}, & x\ge 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$__________.

3. 设 $y=x\arcsin x$，则 $y'|_{x=\frac{1}{2}}=$__________

4. 设 $y=\ln(1+x)$，则 $y^{(2024)}(1)=$__________.

5. 设 $f(x)=\int_0^x 3\ln(1+t^2)dt$，当 $x\to 0$ 时，$f'(x)$ 与 ax^k 是等价无穷小，则 $a=$__________，$k=$__________.

6. 由曲线 $y=2x^2$ 与 $y=1-x^2$ 所围成的平面图形的面积为__________.

7. 由曲线 $y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为__________.

8. 反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx=$__________.

二、单项选择题（每小题3分，共9分）

1. 设 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$，则（　）.

（A）$f(x)$ 有无穷多个第一类间断点　（B）$f(x)$ 只有1个可去间断点

（C）$f(x)$ 有2个跳跃间断点　（D）$f(x)$ 有3个可去间断点

2. 曲线 $y=\ln\cos x$ 对应 $x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 的弧长是（　）.

（A）$\ln(\sqrt{2}+1)$　（B）$\ln(\sqrt{2}-1)$　（C）$2\ln(\sqrt{2}+1)$　（D）$2\ln(\sqrt{2}-1)$

3. 若 $y=f(x)$ 满足 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$dy|_{x=x_0}$ 是（　）.

（A）与 Δx 等价的无穷小　（B）与 Δx 同阶但不等价的无穷小

（C）比 Δx 低阶的无穷小　（D）比 Δx 高阶的无穷小

三、求下列极限（每小题6分，共18分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2})$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+2}+\dfrac{e^{\frac{2}{n}}}{n+2}+\cdots+\dfrac{e^{\frac{n}{n}}}{n+2})$.

四、求下列积分（每小题6分，共12分）

（1）$\int\dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　（2）$\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}}dx$.

五、（6分）设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+2xy=e$ 所确定的隐函数，求 $y''(0)$.

六、（8分）设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=2\cos t\end{cases}$ 所确定.

（1）求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；　（2）求曲线 $y=y(x)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 所对应点处的法线方程与曲率.

七、（8分）确定曲线 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的下凸区间，并求其拐点与渐近线.

八、（8分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=xe^x$.

（1）求 $f(x)$；

（2）若 $g(x)$ 是以2为周期的偶函数，且 $g(x)=f(x)$，$0\le x\le 1$，求 $\int_0^5 g(x)dx$.

九、（7分）设 $f(x)$ 的一阶导数在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)=0$.

（1）证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$；

（2）证明：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\dfrac{x^2+(1-x)^2}{2}\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$，$\forall x\in(0,1)$.

南京理工大学课程考试试卷（学生考试用）

课程名称：高等数学Ⅰ　学分：5　教学大纲编号：11123301

试卷编号：期末 A　考试方式：闭卷　满分分值：100　考试时间：120 分钟

组卷日期：2024 年 1 月 8 日　组卷教师(签字)：王丰　审定人(签字)：

（考生请注意：所有答案按试题序号写在答题纸上，写在试卷上一律无效！）

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=$ ________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-\sin x}{x+2\sin x}, & x<0\\ \dfrac{x+a}{\cos 3x}, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$ ________.

3. 设 $y=x\arcsin x$，则 $y'\big|_{x=\frac{1}{2}}=$ ________.

4. 设 $y=\ln(1+x)$，则 $y^{(2024)}(1)=$ ________.

5. 设 $f(x)=\int_0^x 3\ln(1+t^2)dt$，当 $x\to 0$ 时，$f'(x)$ 与 ax^k 是等价无穷小，则 $a=$ ________，$k=$ ________.

6. 由曲线 $y=2x^2$ 与 $y=1-x^2$ 所围成的平面图形的面积为________.

7. 由曲线 $y=\sin x\ (0\leq x\leq\pi)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为________.

8. 反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx=$ ________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 9 分）

1. 设 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$，则（　）.

（A）$f(x)$ 有无穷多个第一类间断点　（B）$f(x)$ 只有 1 个可去间断点

（C）$f(x)$ 有 2 个跳跃间断点　（D）$f(x)$ 有 3 个可去间断点

2. 曲线 $y=\ln\cos x$ 对应 $x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 的弧长是（　）.

（A）$\ln(\sqrt{2}+1)$　（B）$\ln(\sqrt{2}-1)$　（C）$2\ln(\sqrt{2}+1)$　（D）$2\ln(\sqrt{2}-1)$

3. 若 $y=f(x)$ 满足 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$dy\big|_{x=x_0}$ 是（　）.

（A）与 Δx 等价的无穷小　　（B）与 Δx 同阶但不等价的无穷小

（C）比 Δx 低阶的无穷小　　（D）比 Δx 高阶的无穷小

三、求下列极限（每小题 6 分，共 18 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2})$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+2}+\frac{e^{\frac{2}{n}}}{n+2}+\cdots+\frac{e^{\frac{n}{n}}}{n+2})$.

四、求下列积分（每小题 6 分，共 12 分）

（1）$\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　（2）$\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}}dx$.

五、（6 分）设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+2xy=e$ 所确定的隐函数，求 $y''(0)$.

六、（8 分）设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=2\cos t\end{cases}$ 所确定.

（1）求 $\frac{d^2y}{dx^2}$；　（2）求曲线 $y=y(x)$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 所对应点处的法线方程与曲率.

七、（8 分）确定曲线 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 的下凸区间，并求其拐点与渐近线.

八、（8 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=xe^x$.

（1）求 $f(x)$；

（2）若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且 $g(x)=f(x)$，$0\le x\le 1$，求 $\int_0^5 g(x)dx$.

九、（7 分）设 $f(x)$ 的一阶导数在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)=0$.

（1）证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$；

（2）证明：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\frac{x^2+(1-x)^2}{2}\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$，$\forall x\in(0,1)$.