2018 级高数上期中 A 卷

一、 填空与选择题（每小题 3 分，共 27 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n^{2018}+1)}{\ln(n+1)}=$________。

2. 设函数 $f(x)$ 可导，$y=xf(\arctan x)$，则微分 $dy=$________。

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{1+4x}-1}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________。

4. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-\pi x}{\sin 2x}$，则 ________。

   （A） $f(x)$ 有无穷多个无穷间断点；　　（B） $f(x)$ 只有 1 个可去间断点；

   （C） $f(x)$ 有 2 个跳跃间断点；　　（D） $f(x)$ 有 2 个可去间断点。

5. 设 $x>0$，当 n 趋于无穷时，$\sqrt[n]{1+x}-1$ 的等价无穷小量为________。

6. 曲线 $y=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$ 的渐近线有：________。

7. 曲线 $y=x^2(x-1)^2$ 的极大值点为________， 极小值点为________。

8. 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\cos h)-f(\sqrt{1+h^2})}{3h^2}=$________。

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{n!}=$________。

二 、（每小题 7 分，共 14 分）计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

2. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\cos\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)-\cos\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$。

三、（每小题 7 分，共 14 分）求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

1. $y=x^{\cos x}+\tan x$；　　　　2. $2y=2\sin x+\sin y$。

四、（每小题 7 分，共 14 分）计算题：

1. 确定函数 $f(x)=xe^{-x^2}$ 的凹凸区间及拐点。

2. 求 $f(x)=x\sin(2x+1)$ 在 $x_0=0$ 处的 Taylor 多项式中 x^{10} 的系数 a_{10}。

五、（8 分）求极坐标曲线 $\rho=\sin(2\theta)$ 在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 处的曲率。

六、（8 分）设在区间(a,b)内 $f''(x)>0$。 证明：对于任意 $x_0\in(a,b)$，曲线 $y=f(x)$ 都位于它在 x_0 处的切线的上方，即恒有

$$f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),\ \forall x\in(a,b)。$$

七、（8 分）设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，(1) 求 $f'(x)$；(2) 试猜测 $f^{(n)}(x)$ 的结构，并证明你的结论。

八、（7 分）设 $f(x)$ 在$[a, b]$上有二次连续导数，且 $f(a)=f(b)$。 证明：

$$|f'(x)|\leq\frac{(b-a)}{2}\max_{x\in[a,\,b]}|f''(x)|,\quad \forall x\in[a,\,b]。$$