南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：线性代数　学分：2.5　教学大纲编号：11031201

试卷编号：B　考试方式：闭卷　满分分值：80　考试时间：120 分钟

组卷日期：2023 年 1 月 6 日　组卷教师(签字)：命题组　审定人(签字)：__________

所有解答必须写在答题纸上，写在试卷上无效

一． 是非题：(每小题 3 分，共 15 分)
(下列命题正确的打 √，错误的打×)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $A^2=0$。　(　)

2. 设 A, B 为同阶方阵，则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。　(　)

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B 合同。　(　)

4. 设 V 是 r 维子空间，则 V 中任何 r 个线性无关的向量都是 V 的一个基。　(　)

5. 设 η_1,η_2 均是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则 $\eta_1+\eta_2$ 仍是 $Ax=b$ 的解。　(　)

二．填空题：(每小题 3 分，共 15 分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}x^2&2&x\\y&2&x+y\\-3&z&5\end{pmatrix}$ 是对称矩阵，则 $A=$__________。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}B&D\\0&C\end{pmatrix}$，其中 B，C 均是可逆的方阵，则 $A^{-1}=$__________。

3. 已知向量组 $\alpha_1=(1,-2,0,3)^T$, $\alpha_2=(-2,1,-3,-6)^T$, $\alpha_3=(3,-4,2,t)^T$ 线性无关，则 t______。

4. 若矩阵 A 满足 $A^2=A$，则 A 的特征值为________。

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2-x_2^2-x_3^2$ 的规范形为____________。

三．（6 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}x&-1&0&0\\0&x&-1&0\\0&0&x&-1\\a_4&a_3&a_2&a_1+x\end{vmatrix}$。

四．（8 分）设 R^3 中线性变换 σ 为 $\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+x_3\\x_2+x_3\\-x_3\end{pmatrix}$，求 σ 在基底 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵。

五．（10 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-7\\-11\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\\8\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}-7\\3\\5\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\\-11\end{pmatrix}$，求向量组的秩和一个极大线性无关组。

六．（10 分）试问 a, b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=1\\x_1+2x_2+4x_3-3x_4=-1\\4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=a\\3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=b\end{cases}$ 有解？并在有解时求其通解。

七．（10 分）求一正交变换，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$ 化为标准形（要写出所用的正交变换和此标准形）。

八．（6 分）1、设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为非零实矩阵，若 A 的每个元素与其代数余子式相等，证明 A 是可逆矩阵。

2、试证实对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量必正交。