南京理工大学课程考试答案及评分标准

(20−21(秋学期)线性代数(A)(2.5)考试试题答案)(20.12.09)

一. 是非题（每题 3 分，共 15 分）： 1. × 2. √ 3. √ 4. √ 5. ×

二. 填空题（每题 3 分，共 15 分）：1. $\underline{-\frac{1}{2}(A+I)}$ 2. $\underline{\frac{16}{27}}$ 3. $\underline{2,\alpha_1,\alpha_2\text{或}\alpha_1,\alpha_3\text{或}\alpha_2,\alpha_3}$ 4. $\underline{B}$ 5. $\underline{y_1^2-y_2^2-y_3^2}$

三.（共 6 分）解：$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&2&2\times3&\cdots&2n\\0&0&3&\cdots&2n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$-------(5 分) $=n!$-------（1 分）

四.（共 8 分）解：由 $|A|=4$，知 $AA^*=|A|I=4I$。于是由条件知

$AA^*X=2AA^{-1}+2AX\Rightarrow(2I-A)X=I$ -------（4 分）所以 $X=(2I-A)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$-------（4 分）

五.（共 8 分）解：$\sigma(\eta_1)=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\sigma(\eta_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\sigma(\eta_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，设 σ 在基底 η_1，η_2,η_3 下的矩阵为 A，则 $(\sigma(\eta_1),\sigma(\eta_2),\sigma(\eta_3))=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)A$，-------（4 分）所以

$A=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^{-1}(\sigma(\eta_1),\sigma(\eta_2),\sigma(\eta_3))=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$-------（4 分）

六.（共 10 分）$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p-5&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&0&p+3&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{pmatrix}$ -------（3 分）

(1) 当 $t\neq-2$ 时，$r_{(A|b)}\neq r_A$，方程组无解。(2) 当 $t=-2$，p 为任意值时，$r_{(A|b)}=r_A$，方程组有解。

(3) 仅当 $t=-2$，$p=-3$ 时，$r_{(A|b)}=r_A=2$ 满足 $r_A<3$，-------（2 分）此时原方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\-x_2-2x_3-2x_4=-1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=-1+4x_3-x_4\\x_2=1-2x_3-2x_4\end{cases}$，取 $x_3=x_4=0$，得特解 $X^*=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，-------（2 分）其导出组的解为 $\begin{cases}x_1=4x_3-x_4\\x_2=-2x_3-2x_4\end{cases}$，取 $x_3=1,x_4=0$；$x_3=0,x_4=1$，得导出组的基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$，-------（2 分）故当 $r_A<3$ 时，方程组的通解为 $X=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数。-------（1 分）

七．（共 12 分）解：(1) 设 λ 为 A 的特征值，由 $A^2+6A=0 \Rightarrow \lambda^2+6\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-6$ 或 0

又由 $trA=-12$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-6, \lambda_3=0$ -------（4 分）

(2)由已知 $A\alpha=0=0\alpha$，所以 α 为 A 的 0 特征值对应的特征向量，设 $\lambda_1=\lambda_2=-6$ 的特征向量为 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则

$(\alpha, x)=x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_1=-x_2-x_3$，取 $x_2=1, x_3=0; x_2=0, x_3=1$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，即为 -6 对应的线性无关的特征向量。

正交化：$\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

单位化：$r_1=\dfrac{\eta_1}{|\eta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r_2=\dfrac{\eta_2}{|\eta_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $T=(r_1, r_2, r_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，作正交变换 $X=TY$，得 $f(X)$ 的标准形

$f=-6y_1^2-6y_2^2$。-------（5 分）

(3)因 $T^TAT=\begin{pmatrix} -6 & & \\ & -6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，所以 $A=T\begin{pmatrix} -6 & & \\ & -6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}T^T=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$-------（3 分）

八．（共 6 分）证明：因 $r_A=n-1$，得 $|A|=0$ 且至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于零，而 A 的 $n-1$ 阶子式必是 A 的某个元素的余子式，不妨设元素 a_{ij} 的余子式不为零，进而知 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$。-------（3 分）

又 $n-r_A=1$，知 $Ax=0$ 的任何一个非零解都是解空间的一个基。令 $\xi=(A_{i1}, A_{i2}, \cdots A_{in})^T$，有 $\xi\neq 0$，且 $A\xi=0$，所以 ξ 为 $Ax=0$ 解空间的基底。-------（3 分）