

一、填空题 (每小题 3 分, 满分 27 分)

1. 设向量  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  是两两垂直的单位向量, 则向量的模  $|3\bar{a} + 2\bar{b} + 2\bar{c}| =$  \_\_\_\_\_;
2. 若点  $M(1, 2, 2)$  到平面  $2x + y - 3z + a = 0$  的距离是  $\sqrt{14}$ , 则常数  $a =$  \_\_\_\_\_;
3. 曲线  $L: \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 \_\_\_\_\_;
4. 函数  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  在点  $(2, 0, 2)$  处沿  $\bar{l} = \{1, -2, 2\}$  的方向导数  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(2,0,2)} =$  \_\_\_\_\_;
5. 曲面  $\cos(\pi x) - x^2 y + e^x + yz = 4$  在点  $(0, 1, 2)$  的法线方程为 \_\_\_\_\_;
6. 设  $f(u)$  一阶导数连续, 而  $z = \frac{x}{y} f(x^2 + y^2)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  \_\_\_\_\_;
7. 极坐标系下的二次积分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} f(\rho) \rho d\rho$  化为直角坐标系下的累次积分为 \_\_\_\_\_;
8. 设  $\Omega$  是由三坐标面及  $x + y + z = 1$  所围的空间区域, 则三重积分的值  $\iiint_{\Omega} x dv =$  \_\_\_\_\_;

9. 平面  $x+2y+3z+1=0$  被椭圆柱面  $\frac{x^2}{4}+y^2=1$  截下的有限部分的面积为\_\_\_\_\_.

二、选择题 (每小题 3 分, 满分 9 分)

1. 已知直线  $l_1: x=y=z$ , 直线  $l_2$  过点  $(0,0,3)$  且与直线  $l_1$  垂直相交, 则直线  $l_1$  和直线  $l_2$  交点的坐标是 ( ).

A.  $(2,2,-1)$ ;      B.  $(1,1,1)$ ;      C.  $(-1,-1,2)$ ;      D.  $(0,0,0)$ .

2. 设  $D$  是由  $y=x^2$  与  $y=x$  所围成的闭区域, 则  $\iint_D 2x dx dy = ( )$ .

A.  $\frac{1}{4}$ ;      B.  $\frac{1}{6}$ ;      C.  $\frac{1}{12}$ ;      D.  $\frac{1}{2}$ .

3. 设函数  $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ , 则下面说法正确的是 ( ).

A.  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  点不连续;      B.  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  点一阶偏导不存在;  
C.  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  点可微;      D.  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  点沿各方向的方向导数存在

三、(8分) 求函数  $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$  的极值.

四、计算题 (每小题 8 分, 满分 16 分)

1. 求过点  $P(-1, 0, 4)$  且与直线  $l_1: \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$  垂直, 又与平面  $3x-4y+z-5=0$  平行的直线方程.

2. 求曲线  $\begin{cases} 2x^2+2y^2=z^2 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$  在点  $(1, -1, 2)$  处的切线  $l$  方程, 并求过直线  $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x-y-2z=-3 \end{cases}$  且与切线  $l$  平行的平面方程.

五、计算题 (每小题 8 分, 满分 16 分)

1. 设  $u = f(x+y+z, x^2+y^2z)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $du$  和  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

2. 用拉格朗日乘数法求点  $P(a, b, c)$  与平面  $Ax+By+Cz+D=0$  上点  $M(x, y, z)$  连线长度的最小值.

六、计算题 (每小题 8 分, 满分 16 分)

1. 计算积分  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是由不等式  $y \leq x \leq \sqrt{2y - y^2}$  所确定的平面区域.

2. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} e^z dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z = 2 - x^2 - y^2$  所围成的区域.

七、(8 分) 设连续函数  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 且  $f(0)=0$ , 求极限

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^4} \iiint_{\Omega(t)} (x + f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})) dv$ , 其中区域  $\Omega(t) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2, y \geq 0\}$ .