南京理工大学课程考试答案及评分标准

课程号-课序号：11022601 课程名称：概率与统计 A 学分：3

考试方式：笔试,闭卷 满分分值：100 考试时间：120 分钟

一.（10 分） 根据以往的临床记录，知道乙肝患者对某种试验呈阳性反应的概率为 0.95，非乙肝患者对该试验呈阳性反应的概率为 0.01，一个来自普通人群的被试者患有乙肝的概率为 0.005，若已知此人试验结果呈阳性，求此人真正患有乙肝的概率

解：设 A={试验反应为阳性}，B={被试者患有乙肝}，则由已知条件可知

$$P(A|B)=0.95, P(A|\overline{B})=0.01, P(B)=0.005$$

要求的是$P(B|A)$，由贝叶斯公式可得

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(B)\cdot P(A|B)+P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})}$$
$$=\frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+0.995\times 0.01}=0.323$$

二.（15 分） 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-(1+x)e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

(1) 求$P\{X\le 1\}$。

(2) 求 X 的概率密度

(3) 求$Y=X^2$的数学期望与方差

解：(1) $P\{X\le 1\}=\int_0^1 xe^{-x}dx=1-2e^{-1}$

(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}xe^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，

(3) $E(Y)=E\left(X^2\right)=\int_0^{\infty}x^3e^{-x}dx=6,\quad E\left(Y^2\right)=E\left(X^4\right)=\int_0^{\infty}x^5e^{-x}dx=120,$

$\therefore D(Y)=120-36=84$

三．（20 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-y} & 0\le x\le y \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

求：(1) 常数 c； (2) X 和 Y 的边缘概率密度； （3） $P\{X+Y\le 1\}$。

解：(1)由归一性， $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dx\int_x^{\infty}ce^{-y}dy=c$

解得 $c=1$

(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{\infty}e^{-y}dy & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx & y\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}ye^{-y} & y\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(3) $P\{X+Y\le 1\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1-2e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}$

四. （10 分）一质点在数轴整数点上随机移动，共移动 n 次。设该质点向右移动 1 格（一个单位）的概率为 $p\ (0<p<1)$，向左移动 1 格的概率为 $q\ (q=1-p)$。令 X 为质点在这 n 次移动中向右移动次数。

（1）求 X 的分布律；

（2）若 n 为奇数，求该质点从起点最终又回到起点的概率，并简要说明理由；

（3）令 Y 为该质点在这 n 次移动中向左移动次数。

在下面两问中，任选一问解答（只选一问，多做的不算分）：

(a)求 X 与 Y 的相关系数；或(b)求 $P\{X>Y\}$。

解：(1) $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$

(2) 所求概率为 0

(3) $Y=n-X$，

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{Cov(X,\mathrm{n}-\mathrm{X})}{\sqrt{D(X)D(\mathrm{n}-\mathrm{X})}}=-1$$。

或 $P(X>Y)=P(X>n-X)=P(X>\frac{n}{2})=\sum_{k=[n/2]+1}^{n}C_n^k p^k \mathrm{q}^{n-k}$,

五. (15 分) 计算机进行加法时, 对每个加数取整. 设所有取整误差是相互独立的, 且都服从 U(-0.5, 0.5).

(1) 若 1500 个数相加，误差总和的绝对值大于 15 的概率是多少?

(2) 多少个数相加，可使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9?

解：令 X_k 为第 k 个加数的取整误差. k=1,2,...,1500

则 X_k~U(-0.5,0.5), $E(X_k)=0$, $D(X_k)=1/12$.

(1) $P\{|\sum_{k=1}^{1500}X_k|>15\}=1-P\{-15\le\sum_{k=1}^{1500}X_k\le 15\}$

$$=1-[\Phi(\frac{15-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})-\Phi(\frac{-15-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})]=1\text{-}[2\Phi(\frac{15}{\sqrt{1500/12}})-1]$$

$$=1\text{-}[2\Phi(1.34)-1]=1\text{-}[2\times 0.9099-1]=1-0.8198=0.1802$$

(2) 现求 n, 使 $P\{|\sum_{k=1}^{\mathrm{n}}X_k|<10\}\ge 0.9$。

又

$$P\{|\sum_{k=1}^{\mathrm{n}}X_k|<10\}=P\{-10\le\sum_{k=1}^{\mathrm{n}}X_k\le 10\}$$

$$=\Phi(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})-\Phi(\text{-}\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})=2\Phi(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})\text{-}1\ge 0.9$$,

$\therefore\Phi(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})\ge 0.95$，由分布函数的单调性，有

$\therefore\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\ge 1.645 \quad n\le 443.45$ 　　故 n 取 444。

六. (15 分) 设 $X_1,...,X_n$ 是来自指数分布总体 $X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ 的样本,

(1) 求参数 λ 的最大似然估计量;

（2）求参数 $p=P\{X>5\}$ 的最大似然估计量。

（3）若有 X 的观察值：0.1，2.9，1，1.4，0.23，求参数 λ, p 的最大似然估计值。

解：（1）$L(\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, \ln L=n\ln\lambda-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i, \frac{\partial \ln L}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0, \lambda=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$

λ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}$

(2) $p=P\{X>5\}=\int_5^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-5\lambda}$ 关于 λ 单调，故 p 的极大似然估计为

$\hat{p}=e^{-5\hat{\lambda}}=e^{-\frac{5}{\overline{X}}}$。

(3) $\overline{x}\approx 1.13, \quad \therefore \hat{\lambda}=\frac{1}{1.13}\approx 0.89, \quad \hat{p}=e^{-\frac{5}{\overline{X}}}=e^{-\frac{5}{1.13}}\approx 0.0118$

七. （15 分）工厂生产某种调味品，长期以来其重量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。从某天生产的调味品中随机抽取 6 只，测得重量分别为（单位：克）：14.6，15.1，14.9，14.8，15.2，15.1。试问能否认为该日生产的调味品重量的平均值为 15 克？（$\alpha=0.05$）

解：　H_0：$\mu=\mu_0=15$，　H_1：$\mu\neq\mu_0$

对 $\alpha=0.05$，查表得 $t_{0.025}(5)=2.5706$

计算得 $\overline{x}=14.95$，$s=0.226$，$|t|=|\frac{14.95-15}{0.226/\sqrt{6}}|=0.542$

因为 $|t|=0.542<2.5706$，所以接受 H_0，
即认为该日生产的番茄酱的平均值为 15 克。