高等数学试题 A 卷

注意：所有解答写在答卷纸上，写在试卷上无效

一. 填空题 （每题 3 分，共 30 分）

1. $y=f(\lg x)$的定义域为$[\frac{1}{2},2]$，则$y=f(x)$的定义域为（　　　　　　）。

2. 当$x\to 0$时$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小量，则$a=$（　　　）。

3. 设$f'(3)=2$，则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$（　　　　）。

4. $d\int_{x^2}^{0}x\cos t^2dt=$（　　　　）。

5. 函数$f(x)=\ln x^2-x$单调增加区间是（　　　　）。

6. 曲线 $y = x\ln(e+\frac{1}{x}) \quad (x>0)$ 的斜渐近线为（　　　　　　）。

7. $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$a \neq 0$。则 $\int \frac{f(ax)}{a} dx =$（　　　　　　）。

8. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，$f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$，则 $\int_0^1 x f''(2x) dx =$（　　）。

9. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx =$（　　　　　　）。

10. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\Lambda\ 2n} =$（　　　　　　）。

二.　　计算题（每题 **6** 分，共 **36** 分）

1．求$\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$

2 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^t-e^{-t})dt}{1-\cos x^2}$

3．设 $f(x)$ 可微，且 $f(x)>0$， $y=f(\frac{\ln f(x)}{f(x)})$，试求$dy$。

4．设函数$y=y(x)$由下述参数方程确定$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$。

5．求积分$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

6 求积分$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{1+\cos 2x}dx$

三．解答题（**10** 分）

试讨论方程 $xe^{-x}=a\ (a>0)$ 的实根。

四．应用题（**15** 分）

1.（**8** 分）已知 $f(x)$ 是周期为 **5** 的连续函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式 $f(1+\sin x)$ $-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程。

2.（**7** 分）设曲线 $y=-x^2+x+2$ 与 y 轴的交点为 **P**，过 **P** 点作该曲线的切线，求切线与该曲线及 x 轴围城的区域绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积。

五．证明题（9 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为零，且其导数 $f'(x)$ 连续，并且有 $f(a)=f(b)=0$，试证明存在

$\xi\in[a,b]$，使 $\left|f'(\xi)\right|>\dfrac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$。

A 卷答案

一填空题

1. $[-\lg 2, \lg 2]$　　**2.** $-\dfrac{3}{2}$　　**3.** -1　　**4.** $(\int_{x^2}^{0} \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4)dx$

5. $(0,2)$　　**6.** $y = x + \dfrac{1}{e}$　　**7.** $\dfrac{\sin ax}{a^3 x} + c$　　**8. 2**

9. $\dfrac{\pi}{4e}$　　**10.** $\dfrac{4}{e}$

二．计算题

$$\lim_{x\to 0} \cot x\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x}\frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x-0} \cos x \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

2． $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^t - e^{-t})dt}{1 - \cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - e^{-x^2})2x}{2x \sin x^2} = 4\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + 2xe^{-x^2}}{2x} = 2$$

3． $$dy = f'\left(\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right) \cdot \frac{[1 - \ln f(x)] f'(x)}{f^2(x)} dx$$

4． $$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}$$

5． 令 $u = \sqrt{e^x - 1}$ ，$x = \ln(u^2 + 1)$，$dx = \dfrac{2u}{u^2 + 1} du$

则 $$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int \frac{(u^2 + 1)\ln(u^2 + 1)}{u} \frac{2u}{u^2 + 1} du = 2\int \ln(u^2 + 1)du$$

$$= 2u \ln(u^2 + 1) - 2\int \frac{2u^2}{u^2 + 1} du$$

$$= 2u \ln(u^2 + 1) - 2\int \left(2 - \frac{2}{u^2 + 1}\right)du$$

$$= 2u \ln(1 + u^2) - 4u + 4\arctan u + C$$

$$= 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4\arctan\sqrt{e^x - 1} + C$$

6． $$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}|\cos x| dx = \sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx\right)$$

$$= 2\sqrt{2} - 1$$

三解答题

解 令 $F(x)=xe^{-x}-a$，则 $F'(x)=(1-x)e^{-x}$，由 $F'(x)=0$ 得 $x=1$

当 $x\in(-\infty,1)$，$F'(x)>0$，$F(x)\uparrow$；当 $x\in(1,+\infty)$，$F'(x)<0$，$F(x)\downarrow$。所以 $x=1$ 是 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的极大值点，且极大值 $F(1)=e^{-1}-a$。因为 $x=1$ 是 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 但唯一驻点，则极大值 $F(1)=e^{-1}-a$ 是最大值。

（1） 若 $F(1)=e^{-1}-a<0$ 时，$F(x)$ 没有零点，即方程无根。

（2） 若 $F(1)=e^{-1}-a=0$ 时，$F(x)$ 有唯一零点，即方程有唯一的根。

（3） 若 $F(1)=e^{-1}-a>0$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$，$F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 有唯一零点，即方程唯一的根；$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-a<0$，$F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有唯一零点，即方程唯一的根。这时方程有两个根。

四．1．由连续性，有 $\lim\limits_{x\to0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim\limits_{x\to0}[8x+\alpha(x)]$

即 $f(1)-3f(1)=0$，故 $f(1)=0$

因此 $f'(1)=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(1+u)}{u}$

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{\sin x}$

即 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{f(1+\sin x)}{\sin x}+\dfrac{3f(1-\sin x)}{-\sin x}]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{x}$

也即 $f'(1)+3f'(1)=8$，故 $f'(1)=2$

由函数的周期性，$f(6)=f(1)=0$，故所求切线方程为 $y=2(x-6)$

2．$V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot2^2\cdot2-\pi\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)^2dx=\dfrac{29}{30}\pi$

五．证明题

（1）当 $\int_a^b f(x)dx\le0$ 时，$[a,b]$ 上任一点均可取做 ξ。

（2）当 $\int_a^b f(x)dx>0$ 时，因为 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $|f'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续。于是，存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $|f'(\xi)|=M=\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$。

又由题设有

$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a)\quad(a<\xi_1<x)$

$$f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b) \quad (x<\xi_2<b)$$

从而$\left|f(x)\right|\le M(x-a)$，$\left|f(x)\right|\le M(b-x)$。

$$\int_a^b\left|f(x)\right|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f(x)\right|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f(x)\right|dx\le M[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)dx]$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}M$$

又$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx$，且$\int_a^b f(x)dx>0$，故结论成立。