微分方程求解总结

可分离变量方程

$g(y)dy=f(x)dx$

$\int g(y)dy=\int f(x)dx$

齐次方程

形如 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

作变量代换 $u=\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=f(u)$

$\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}$

（可分离变量方程）

一阶微分方程

1. 线性方程

标准形式：

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

齐次：$Q(x)=0$

分离变量法

通解 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$

非齐次：$Q(x)\neq 0$

"常数变易法"

有时会以 $\frac{dx}{dy}$ 处理

作变换 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$

则 $y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)dx}$

积分得 $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C,$

$$y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

2. 非线性的 伯努利方程

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$

$n\neq 0,1$ 时为非线性

"变量代换法"

两端 $\div y^n$，令 $z=y^{1-n}$

$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

求出通解后再将 $z=y^{1-n}$ 代回。

3. 全微分方程

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

① 满足 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 条件的，

→ 曲线积分与路径无关法：

$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$

或 $=\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx,$

通解为 $u(x,y)=C$；

→ 微分法（不定积分法）

对 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 分别积分，

求函数并集

→ 凑微分法：

把全微分拆了变成 $d(\cdots)=0$ $\nearrow u(x,y)$

可降阶的高阶方程

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型

令 $z=y^{(n-1)}$，$\frac{dz}{dx}=y^{(n)}$

得到 $y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$

令 $z=y^{(n-2)}$，得

$y^{(n-2)}=\int[\int f(x)dx+C_1]+C_2$

…… 积 n 次分

2. $y''=f(x,y')$ 型

令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$

$p'=f(x,p)$

设通解 $p=\varphi(x,C_1)$

则 $y'=\varphi(x,C_1)$

积一次分，

$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

3. $y''=f(y,y')$ 型（不显 x）

令 $y'=p(y)$（$p(y)$ 是复合的）

$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$

方程变为 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

通解：$y'=p=Q(y,C_1)$

积分，$\int\frac{dy}{Q(y,C_1)}=x+C_2$

常系数高阶

二阶常系数齐次

$y''+py'+qy=0$

令解为 $y=e^{rx}$

得特征方程：

$r^2+pr+q=0$

① 当 $p^2-4q>0$ 时，

$y_1=e^{r_1x}$，$y_2=e^{r_2x}$

通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

② 当 $p^2-4q=0$ 时，

$y_1=e^{r_1x}$，$y_2=x\cdot e^{r_1x}$

通解 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$

③ 当 $p^2-4q<0$ 时，

共轭复根 $r_1=\alpha+i\beta$，

$r_2=\alpha-i\beta$.

$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$

$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$

通解 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

常系数非齐次

① $f(x)=e^{\lambda x}\cdot P_m(x)$ 型

设特解 $y^*=x^kQ_m(x)\cdot e^{\lambda x}$

$Q''(x)+\underline{(2\lambda+p)}Q'(x)+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}Q(x)=P_m(x)$

λ 是特征方程的几重根？

→ λ 不是根，$k=0$

→ λ 是单根，$k=1$

→ λ 是重根，$k=2$

$P_m(x)=\cdots$，$m=\cdots$.

代入特解

常见的全微分表达式 接上页

$xdx+ydy=d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$	$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$
$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$	$\frac{xdy+ydx}{xy}=d(\ln xy)$
$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$	
$\frac{xdy-ydx}{x^2-y^2}=d\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y}\right)$	

② 不满足条件的.

→ 积分因子法:

找 $\mu(x,y)$ 使

$\mu Mdx+\mu Ndy=0$

化为全微分.

→ 化为齐次/线性方程

② $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$ 型

对非齐次方程

$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda+i\omega$ 为特征方程的 k 重根

可设特解:

$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m\cos\omega x+\tilde{R}_m\sin\omega x]$

其中 $m=\max\{n,l\}$.

解题模板(求特解类):

特征方程 …… ,特征根 $r_1=\cdots$, $r_2=\cdots$,

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$,

$\lambda=\cdots$, $\omega=\cdots$

$\lambda+\omega i$ 是特征根?

→ 不是根, $k=0$

→ 是单根, $k=1$

→ 是重根 $k=n$

$P_l(x)=\cdots$, $P_n(x)=\cdots$

所以 $m=\max\{l,n\}=\cdots$

因此 (写出代入后的 y^*)

其它问法:

① 求一个特解:

写出(设出)特解后代入原方程.

② 求通解:

对应齐次方程通解 + 1个特解

by 排版很乱的小赵