南京理工大学课程考试答案及评分标准

(20-21(春学期)线性代数(A)(2.5)考试试题答案)(21.05.28)

一. 是非题（每题3分，共15分）： 1. × 2. √ 3. √ 4. √ 5. ×

二. 填空题（每题3分，共15分）：1. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a,b,c,$为任意常数 2. $-\frac{1}{3}(A+2I)$ 3. 2 4. 14 5. 1

三.（共6分）解：$D_n = \begin{vmatrix} a_1+\lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$--------(3分) $= \begin{vmatrix} \lambda+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda+\sum_{i=1}^{n} a_i)$-------（3分）

四.（共8分）解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 15 & -2 \\ 1 & -5 & p+2 & p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p+10 \end{pmatrix}$ --------（3分）

所以，1、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关的充要条件为$p \neq -10$。-------（2分）

2、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关的充要条件为$p=-10$，此时$r_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}}=3$，且$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$，知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为一个极大线性无关组。-------（3分）

五.（共8分）解：由$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，得从基$e_1,e_2,e_3$到基$\xi_1,\xi_2,\xi_3$的过渡矩阵

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，--------（3分）所以$B=P^{-1}AP$--------（2分）$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

--------（3分）

六.（共10分）$(A\,|\,b) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & (\lambda-1)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$ --------（3分）

（1）当$\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$时，$r_{(A|b)}=r_A=3$，方程组有唯一解。（2）当$\lambda=-2$时，$r_{(A|b)}=3 \neq r_A=2$，线性方程组无解。（3）当$\lambda=1$时，$r_{(A|b)}=r_A=1<3$，线性方程组有无穷多解，--------（3分）此时

原方程组的同解方程组为$x_1+x_2+x_3=1$，解得$x_1=1-x_2-x_3$，取$x_2=x_3=0$，得特解$X^*=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，其导出组的解

为 $x_1=-x_2-x_3$，取 $x_2=1,x_3=0$；$x_2=0,x_3=1$，得导出组的基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，故当 $\lambda=1$ 时，原方程组的通解为 $X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数。-------（4 分）

七.（共 10 分）解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-9 & -4 & 1\\ -4 & \lambda+6 & -4\\ 1 & -4 & \lambda-9\end{vmatrix}=(\lambda-10)^2(\lambda+8)=0$，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=10,\lambda_3=-8$-------（3 分）

对 $\lambda_1=\lambda_2=10$，解得特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，对 $\lambda_3=-8$，解得特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$，-------（3 分）

正交化：$\alpha_1=\xi_1=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{17}\\ \frac{4}{17}\\ 1\end{pmatrix}$ -------（2 分）

单位化：$\eta_1=\dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\dfrac{1}{3\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-1\\4\\17\end{pmatrix},\eta_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$

令 $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{17}} & -\frac{1}{3\sqrt{34}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{3\sqrt{34}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{17}{3\sqrt{34}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 $T^TAT=\begin{pmatrix}10 & & \\ & 10 & \\ & & -8\end{pmatrix}$。-------（2 分）

八.（共 8 分）证明：1、反证，若 $AB-BA=I$，则 $tr(AB-BA)=trI=n$，而 $tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=0$，矛盾，所以 $AB-BA\neq I$。-------（4 分）

2、设满秩线性变换 $x=Py$，将二次型 $f(x)=x^TAx$ 化为标准形

$f(x)=a_1y_1^2+a_2y_2^2+\cdots+a_ny_n^2=g(y)$

因 P 可逆，$x\neq0\Leftrightarrow y\neq0$，对于任意 $x\neq0$，从而对任意 $y\neq0$，$f(x)=g(y)>0$ 当且仅当 $a_i>0,i=1,2,\cdots,n$，即二次型的正惯性指标等于 n。-------（4 分）