第三章　中值定理与导数的应用

§1 微分中值定理

1．解：$\because y(\frac{\pi}{6})=y(\frac{5\pi}{6})=\ln\frac{1}{2}, y'=\frac{1}{\sin x}\cos x=\cot x.$

$\therefore y=\ln\sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上满足罗尔定理的条件.

由 $y'=0$ 得 $x=\frac{\pi}{2}, \therefore \xi=\frac{\pi}{2}$.

2．解：$\because f(1-0)=f(1+0)=f(1)=2, \therefore f(x)$ 在 $x=1$ 连续，

$\therefore f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e},3]$ 上满足拉格朗日定理的条件.又 $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}, & \frac{1}{e}\le x<1,\\ -\frac{1}{x^2}, & 1<x\le 3,\end{cases}$

而 $\dfrac{f(3)-f(\frac{1}{e})}{3-\frac{1}{e}}=\dfrac{-5e}{3(3e-1)}=\dfrac{-5e}{9e-3}$,

令 $f'(x)=\dfrac{-5e}{9e-3}$ 得 $x_1=\dfrac{9e-3}{5e}, x_2=\sqrt{\dfrac{9e-3}{5e}}$,

$x_1=\dfrac{9e-3}{5e}>1$（舍去），故中值 $\xi=\sqrt{\dfrac{9e-3}{5e}}$.

3．证明：设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}\ (x>0)$，则

由题意知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

又 $F(a)=\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(b)}{b}=F(b)$，则

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$.

即 $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\xi$.

4．证明：$f(x)$ 在$[a,c]$，$[c,b]$上满足拉格朗日中值定理，

因此，至少分别存在一点$\xi_1 \in (a,c)$，$\xi_2 \in (c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}，\quad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

由 A,B,C 三点位于同一直线上，因此$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，

故在$[\xi_1,\xi_2]$上，$f'(x)$满足罗尔定理条件，

则至少存在一点$\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$,使得 $f''(\xi)=0$.

5 证明：（1）令$f(x)=\ln(1+x)$,则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$,在$[0,x]$上应用拉格朗日中值定理，

得：
$$\ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}x,\quad \xi \in (0,x).$$

$$\because 1+x>1+\xi>1,\quad \frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,$$

$$\therefore \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

（2）令$f(x)=\arctan x$,则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,

在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理，得：

$$\arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\xi^2}(b-a),\quad \xi \in (a,b).$$

$$\because \frac{1}{1+\xi^2}<1,\left|\frac{1}{1+\xi^2}(a-b)\right|<|a-b|$$

$\therefore |\arctan a-\arctan b|<|a-b|$.（当$a=b$时显然成立）.

6　由 $f(2)=f(1)=0$ 得 $F(2)=f(1)=0$，且 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件，则

存在 $\xi_1\in(1,2)$，使得 $F'(\xi_1)=0$.

又 $F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$，显然 $F'(1)=0$，

且 $F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$ 满足罗尔定理，

所以存在 $\xi\in(1,\xi_1)$，使得 $F''(\xi)=0$.

7 证明：对 $e^x,f(x)$ 用柯西中值定理，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{e^{\xi}}{f'(\xi)}=\frac{e^b-e^a}{f(b)-f(a)}\ ,\qquad (1)$$

对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理，则存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\eta)(b-a)\ ,\qquad (2)$$

联立(1), (2)，整理得 $\dfrac{f'(\eta)}{f'(\xi)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\xi}$.

8. .证明：当 $a>0$ 时，对 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上应用拉格朗日中值定理，得：

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi_1)$，即 $\dfrac{f(a)}{a}=f'(\xi_1)\ (0<\xi_1<a)$.

对 $f(x)$ 在 $[b,a+b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得：

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{(a+b)-b}=f'(\xi_2),\ \text{即}\ \frac{f(a+b)-f(b)}{a}=f'(\xi_2),\xi_2\in(b,a+b).$$

显然 ξ_1,ξ_2 均在[0，c]上，$0<\xi_1<a\le b<\xi_2<a+b\le c$.又因为 $f'(x)$ 在

$[0,c]$ 上单调下降，$\therefore f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)$，即 $\dfrac{f(a)}{a}\ge\dfrac{f(a+b)-f(b)}{a}$.

$\therefore f(a+b)\le f(a)+f(b)$.（当 $a=0$ 时，不等式为等式）.

§ 2 洛必达法则

1. （1）解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=2$.

（2）解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{-\dfrac{x^{3}}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+\tan x})}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^{3}}=\frac{1}{3}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^{2}x}{3x^{2}}=\frac{1}{3}.$$

（3）解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin^{2}x-x^{2}\cos^{2}x}{x^{2}\sin^{2}x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{2}x-x^{2}}{x^{2}\tan^{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{2}x-x^{2}}{x^{2}\cdot x^{2}}=$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^{3}})=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan -x}{x^{3}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^{2}x-1}{3x^{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{2}x}{x^{2}}=\frac{2}{3}.$$

（4）解：原式$=\lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^{2}}\quad(x=\dfrac{1}{t})$

$$=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{t}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

（5）解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x}\cdot\frac{x}{\tan x-\sin x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\tan x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\tan x(1-\cos x)}}$$

$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^{3}}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^{2}}}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

（6）解：原式$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}}=e^{-1}.$$

（7）解：原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$.

（8）解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$.

2．解：$\because\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0,\therefore\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$.

$\because\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=\sqrt{e}$.

3．证明：由已知，$g(x)$连续，且当$x\neq0$时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

而$g'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-f''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$.

当$x\neq0$时$g'(x)$显然连续

而$\lim\limits_{x\to0}g'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$.

$\therefore g'(x)$在$x=0$连续，从而$g'(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是连续函数.

§3 泰勒公式

1 解：$p(x)=x^4-2x^3+1, p'(x)=4x^3-6x^2, p''(x)=12x^2-12x, p'''(x)=24x-12,$

$p^{(4)}(x)=24, p^{(5)}(x)=0$.

当 $x_0=1$ 时，则

$p(1)=0, p'(1)=-2, p''(1)=0, p'''(1)=12, p^{(4)}(1)=24, p^{(5)}(1)=0, p^{(6)}(1)=\cdots p^{(n)}(1)=0.$

$\therefore p(x)=x^4-2x^3+1$

$$=p(1)+p'(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{p^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+0$$

$$=0-2(x-1)+0+2(x-1)^3+(x-1)^4,$$

即：$x^4-2x^3+1=-2(x-1)+2(x-1)^3+(x-1)^4$.

2：$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}, x_0=0, f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(\theta x)}{3!}x^3.$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}, f''(x)=\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(1+x)^{-\frac{5}{3}}, f'''(x)=\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(1+x)^{-\frac{8}{3}},$$

$$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{3}, f''(0)=-\frac{2}{9}, f'''(\theta x)=\frac{10}{27}(1+\theta x)^{-\frac{8}{3}}.$$

$$\therefore (1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{3^6x^3}{10(1+\theta x)^{\frac{8}{3}}}\ (0<\theta<1)$$

3 解：$y(4)=2$，$y'(4)=\left.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4}=\dfrac{1}{4}$，$y''(4)=-\left.\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right|_{x=4}=-\dfrac{1}{32}$，

$y'''(4)=\left.\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\right|_{x=4}=\dfrac{3}{256}$，$y^{(4)}(4)=-\dfrac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}=-\dfrac{15}{16\sqrt{x^7}}$.

$$\sqrt{x}=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{5}{128}\frac{(x-4)^4}{[4+\theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}},(0<\theta<1)$$

4 解：$f(x)=xe^x, x_0=0, f'(x)=e^x+xe^x, f''(x)=2e^x+xe^x, f'''(x)=3e^x+xe^x$，

$\cdots, f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x, f^{(n+1)}=(n+1)e^x+xe^x$，则

$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2$，$f'''(0)=3,\cdots$，$f^{(n)}(0)=n$，

$f^{(n+1)}(\theta x)=(n+1)e^{\theta x}+(\theta x)e^{\theta x}=(n+1+\theta x)e^{\theta x}$。

$$\therefore xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{(n+1+\theta x)}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

5：$f(x)=\dfrac{1}{x+2}, f(-1)=\dfrac{1}{-1+2}=1; f'(x)=\dfrac{-1}{(x+2)^2}, f'(-1)=-1;$

$f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$，$f''(-1)=2.\therefore f(x)=\dfrac{1}{x+2}$在$x=-1$处的泰勒公式为：

$$\frac{1}{x+2}=1-(x+1)+(x+1)^2+R_2(x).$$

所以$R_2(x)=\dfrac{1}{x+2}-1+(x+1)-(x+1)^2=-\dfrac{(x+1)^3}{x+2}$，

故 $\dfrac{1}{x+2}=1-(x+1)+(x+1)^2-\dfrac{(x+1)^3}{x+2}$与

$$\frac{1}{x+2}=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+R_2(x)$$

比较可得：$a_0=1, a_1=-1, a_2=1, R_2=-\dfrac{(1+x)^3}{x+2}$.

6：$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数，$\therefore f(x)$在$x_0=b$处展成$(n-1)$阶泰勒公式为

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x-b)^n,$$

ζ位于x与b之间.

令$x=a$,则

$$f(a)=f(b)+f'(b)(a-b)+\frac{f''(b)}{2!}(a-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(a-b)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(a-b)^n$$

$\because f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0, a\neq b$，

$\therefore f^{(n)}(\xi)=0(a<\xi<b)$.

7 用泰勒展开得到 $f(x)=(a+1)+(b+c+1)x+\frac{1}{6}(7-b-4c)x^3+\frac{x^4}{4}+o(x^4)$

所以 $a+1=0, b+c+1=0, 7-b-4c=0$，

即 $a=-1, b=-\frac{11}{3}, c=\frac{8}{3}$.

8 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$，得 $f(0)=0, f'(0)=0$，

由 *Taylor* 公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，

即 $f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，

令 $x=1$ 则 $f(1)=\frac{1}{2}f''(\xi)$，由因为 $f(1)=1$

$\therefore f''(\xi)=2\quad(0<\xi<1)$.

9.解：$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10})^3+\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{10})^5+\cdots+R_{2n}(x)$.

$$\left|R_{2n}(x)\right|=\left|\frac{\sin(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|$$

$$\leq\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{(\frac{\pi}{10})^{2n+1}}{(2n+1)!}<\frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}<10^{-4}(x=\frac{\pi}{10}).$$

取 $n=3$，有 $\frac{1}{2^7 7!}=\frac{1}{128\times 5040}<\frac{1}{128\times 5000}=\frac{1}{5}\times 10^{-5}<10^{-4}$.

$\therefore \sin 18^\circ\approx\frac{\pi}{10}+\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10})^3+\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{10})^5\approx 0.30902$.

§4 函数的单调性、极值、最值

1. $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

由 $y' \geq 0$ 可得 $x \geq 3$ 或 $x \leq 1$，

由 $y' \leq 0$ 可得 $3 \geq x \geq 1$.

所以单调增加区间为 $(-\infty, 1], [3, +\infty)$，单调递减区间为 $[1,3]$

$x \geq 3$ 时 $y' \geq 0$ 并且 $3 \geq x \geq 1$ 时 $y' \leq 0$，所以有极小值为 $y\big|_{x=3} = 13$

$x \leq 1$ 时 $y' \geq 0$ 并且 $3 \geq x \geq 1$ 时 $y' \leq 0$，所以有极大值为 $y\big|_{x=1} = 7$

2. $y' = 0$ 可得 $x = 2$，并且 $x = 1$ 为不可导点.

在 $x = 1$ 的邻域内恒有 $y \leq \dfrac{2}{3} = f(1)$，由定义得到

函数在 $x = 1$ 取极大值，且极大值为 $y\big|_{x=1} = \dfrac{2}{3}$.

$y' = \dfrac{2(\sqrt[3]{x-1} - 1)}{3\sqrt[3]{x-1}}$，

当 $x > 2$ 时，$y' > 0$，且 $1 < x < 2$ 时，$y' < 0$

故在 $x = 2$ 处取得极小值，且极小值为 $y\big|_{x=2} = \dfrac{1}{3}$

3. $f'(x) = -\dfrac{x^n}{n!} e^{-x}$, 由 $f'(x) = 0$ 可知 $x = 0$ 为驻点.

(1)当 n 为奇数时，$x < 0$ 时，$f'(x) > 0$；$x > 0$ 时 $f'(x) < 0$

$\therefore x = 0$ 为极大值点，极大值为 1.

(2)当 n 为偶数时，$f'(x) \leq 0, \therefore$ 函数无极值.

4 解：令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}\ (x\ge 1)$,

则 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=e$ 处取极大值 $e^{\frac{1}{e}}$.

所以 $f(x)$ 在 $[1,\ e]$ 上递增，而在 $[e,+\infty)$ 上递减.

因而 $f(1)<f(2), f(3)>f(4)>f(5)\cdots, f(2)=\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{3}=f(3)$,

故所求数列的最大项为 $x_3=\sqrt[3]{3}$.

5．解：

$$f(\frac{\pi}{2})=a-\frac{b}{3}=1, a=1+\frac{b}{3},$$

$$f'(\frac{\pi}{3})=(1+\frac{b}{3})\frac{1}{2}-b=0, b=\frac{3}{5}, a=\frac{6}{5},$$

$\because f''(\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{5}\sqrt{3}<0, \therefore x=\frac{\pi}{3}$ 是极大值点，极大值为 $\frac{3}{5}\sqrt{3}$.

6．作 $f(x)=xe^{-x}-a$，由 $f'(x)=0$

得驻点 $x=1$，并且有最大值 $f(1)=e^{-1}-a$，

（1）当 $a>e^{-1}$ 时，$f(x)$ 的最大值 $f(1)<0$，

故 $f(x)\le f(1)<0$，从而方程无根.

（2）当 $a<e^{-1}$ 时，$f(1)>0$，又 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)<0$，

故方程有且仅有两个实根.

（3）当 $a=e^{-1}$ 时，$f(1)=0$，

又 $x<1$ 时，$f(1)<f(1)=0$，且 $x>1$ 时，$f(1)<f(1)=0$，

故方程有且仅有一个根.

7．解：$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$对x求导，则$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}=0$, 整理$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

曲线在(x_0,y_0)处的切线方程为

$$Y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(X-x_0),\text{化简为}\frac{X}{\sqrt{x_0}}+\frac{Y}{\sqrt{y_0}}=1.$$

它在两坐标轴上的截距分别为$\sqrt{x_0},\sqrt{y_0}$

.

三角形的面积为$\dfrac{1}{2}\sqrt{x_0y_0}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x_0}(1-\sqrt{x_0})=s,$

当$x_0\in(0,\dfrac{1}{4})$时，$\dfrac{ds}{dx_0}>0$;当$x_0\in(\dfrac{1}{4},1)$时，$\dfrac{ds}{dx_0}<0$.

$\therefore x_0=\dfrac{1}{4}$时$s$取得最大值，故所求切点为$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$.

8．令$f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$, 则

$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0(x>0)$,

因而$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加.

当$x>0$时，$f(x)>f(0)$，即$\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}>0\ (x>0)$.

9.证明：令$f(x)=x^p+(1-x)^p \quad x\in(0,1)$.

由$f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]=0$有得驻点$x=\dfrac{1}{2}$,

又$f(0)=1,f(1)=1,f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2^{p-1}}$

则$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为1，最小值为$\dfrac{1}{2^{p-1}}$

故有：$\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1 \quad (0\le x\le 1,p>1)$.

§5 函数图形的凹凸性，拐点及函数图形的描绘

1．$y''=0$ 得 $x=-6$，$x=0$，$x=6$

由 $y''\ge 0$ 得到 $(-6,0)$，$(6,+\infty)$ 为下凸区间

由 $y''\le 0$ 得到 $(-\infty,-6)$，$(0,6)$ 为下凹区间

拐点：$(-6,-\frac{9}{2})$、$(0,0)$、$(6,\frac{9}{2})$

斜渐近线：$y=x$

2．解：$f^{(5)}(x)$在x_0的某一邻域内不变号，则 $f'(x_0)=\frac{1}{4!}f^{(5)}(\zeta)(x-x_0)^4$ 在x_0的某一邻域内不变号，所以 $x=x_0$ 不是极值点.

$f''(x)=\frac{1}{3!}f^{(5)}(\zeta_1)(x-x_0)^3, x$ 由 x_0 左边移到 x_0 右边时 $f''(x)$ 变号，

因而 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点.

3.证明：令 $f(x)=x^n\ (x>0)$，则

$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$，故函数 $y=f(x)$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 上是下凸的，

$\therefore \frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, 即 $\frac{x^n+y^n}{2}>(\frac{x+y}{2})^n$.

4．解：由题设知驻点 $(-2,44)$ 和拐点 $(1,-10)$ 都在曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上，则

$$-8a+4b-2c+d=44, \quad (1)$$
$$a+b+c+d=10, \quad (2)$$

$y'=3ax^2+2bx+c$，$y''=6ax+2b$ 由驻点和拐点条件可得

$$12a-4b+c=0, \quad (3)$$
$$6a+2b=0, \quad (4)$$

由 (1) (2) (3) (4)可得：$a=1,b=-3,c=-24,d=16$。

5.解：(1) $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$ 为增区间，$(0,2)$ 为减区间

(2) 因 $y''=\frac{24}{x^4}>0$，故 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 下凸区间，无拐点，

(3)因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty$，$\therefore x=0$为垂直渐近线

因为$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^3}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4}{x^2}-x\right)=0$，

故$y=x$为斜渐近线

6. *(D)*.

§6 曲率

1 解：$y'=2x-4, y''=2,$ 顶点为$A(2,-1)$，则

$$y'|_A=0, y''|_A=2$$

所求顶点A处的曲率为$K_A=\left.\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_A=\dfrac{2}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=2$。

5. 解：$y^2=8x, A(2,4)$，则

$$y'=\frac{4}{y}, y''=-\frac{4y'}{y^2}\Rightarrow y'|_A=1, y''|_A=-\frac{1}{4}.$$

$$\therefore K_A=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_A=\frac{\left|-\frac{1}{4}\right|}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{16}.\therefore R=\frac{1}{K}=8\sqrt{2}.$$

3.解：$\begin{cases}x=\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}, t=\dfrac{\pi}{2}. y'=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2\cos t}{-\sin t}=-2\cot t,$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=(\frac{2}{sin^2 t})(\frac{1}{-sint})=-\frac{2}{sin^3 t}.$$

当$x=\dfrac{\pi}{2}$时$y''=0, y''=-2$

$\therefore K_A=2, R=\dfrac{1}{2}.$

4.解：$y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},y''=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}.$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{[1+(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.x\in(-\infty,+\infty).$$

曲率 $K'=0$ 得 $e^x-e^{-x}=0$，$\therefore x=0$

当 $x>0$ 时 $K'<0$；当 $x<0$ 时 $K'>0$。

$\therefore$ 在 $x=0$ 时曲率 K 取得最大值，$K_{\max}=\dfrac{4}{2^2}=1.$

5.解：$y'=\cos x,y''=-\sin x,x\in(0,\pi),$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}},x\in(0,\pi).$$

由上式可知：当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，K 最大，即当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时曲率半径最小。

故曲线 $y=\sin x\,(0<x<\pi)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 点处曲率半径最小， 最小值 $R=1$.

6.解：$y=\ln x,y'=\dfrac{1}{x},y''=-\dfrac{1}{x^2}.$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-\dfrac{1}{x^2}\right|}{(1+\dfrac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},K'=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

令 $K'=0$，则得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

当 $x\in(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 时，$K'>0$；当 $x\in(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ 时，$K'<0$

故在点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{\ln 2}{2}\right)$ 处有最大值 $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ 。

7. 证明：$y = a\cdot\cosh\frac{x}{a}, y' = a\cdot\sinh\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a} = \sinh\frac{x}{a}, y'' = \frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}$.

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}}{(1+\sinh^2\frac{x}{a})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}}{(\cosh^2\frac{x}{a})^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2\cosh^2\frac{x}{a}} = \frac{a}{y^2},$$

故对任意点(x, y)，曲率半径为$R = \frac{1}{K} = \frac{y^2}{a}$.

9. $x = \frac{3}{2}(1+\cos 2\theta)$，$y = \frac{3}{2}\sin 2\theta$，则

$$x'(\frac{\pi}{4}) = -3,\ y'(\frac{\pi}{4}) = 0,\ x''(\frac{\pi}{4}) = 0,\ y''(\frac{\pi}{4}) = -6.$$

曲率$K = \frac{|x'y''-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}$.

故$R = \frac{3}{2}$