2021 高等数学（II）期中试卷　参考答案

一、　填空题（30 分，每小题 3 分）

1. $\underline{\sqrt{37}}$　　2. $\underline{1}$　　3. $\underline{\frac{\pi}{4}}$　　4. $\underline{-1}$　　5. $\underline{\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy}$

6. $\underline{x-2y+3z-6=0}$　　7. $\underline{1}$　　8. $\underline{\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx}$

9. $\underline{\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz}$　　10. $\underline{-1}$

二、 (10 分) 解：设所求直线L的方向向量$\underset{s}{\rightarrow}=\{m,n,p\}$，则由题意有

$m+2p=0, n-3p=0$. 取 $\underset{s}{\rightarrow}=\{-2,3,1\}$，则直线 L 的方程为

$\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$.

(法一): x轴所在直线方程为$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$，可判断$x$轴与直线$L$为异面直线. x轴上点$(s,0,0)$与直线L上点$(-2t,1+3t,2+t)$的距离$d(s,t)$:

$d^2(s,t)=(-2t-s)^2+(1+3t)^2+(2+t)^2, s,t\in\mathbb{R}$.

下求$d(s,t)$最小值.

$$\begin{cases}\frac{\partial d}{\partial s}=-2(-2t-s)=0\\ \frac{\partial d}{\partial t}=-4(-2t-s)+6(1+3t)+2(2+t)=0\end{cases} \text{得}\begin{cases}s=1\\ t=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

此唯一极值点即为最小值点，因此

$$d=d^2(s,t)_{min}=d^2(s,t)\big|_{s=1,t=-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}.$$

故x轴到直线L的距离为$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

(法二): 过L上点$(0,1,2)$作x轴平行线L_1，其方向向量$\vec{s_1}=\{1,0,0\}$,

L, L_1确定的平面法向量$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s}=\{0,-1,3\}$. 平面$\pi$方程:

$y-3z+5=0$

x轴上点$(0,0,0)$到平面π距离为

$$d=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

三、**(10 分) 解：(1)** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'+e^x g_1$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'+\left(-\frac{y}{x^2}\right)f''\cdot\frac{1}{x}+e^x g_{12}\cdot cosy$$

$$=-\frac{1}{x^2}f'-\frac{y}{x^3}f''+e^x cosy\cdot g_{12}.$$

(2) 依定义有

$(*)$ $f_x(1,1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,1)-f(1,1)}{\Delta x}$, $f_y(1,1)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,1+\Delta y)-f(1,1)}{\Delta y}$.

由于$f(x,y)$在$(1,1)$处可微，所以$f(x,y)$在$(1,1)$处连续，在已知等式中

令$x=0=y$得 $f(1，1)=1$.

再令$y=0$有 $f(cosx,1)=1+x^2+o(x^2).(x\to 0)$.

在$(*)$中令$\Delta x=cosx-1$，则

$$f_x(1,1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(cosx,1)-1}{cosx-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2}=-2.$$

同样可得 $f_y(1,1)=-2$.

四、(10 分) 解：

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(3,4)} = (2ax)|_{(3,4)} = 6a$, $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(3,4)} = (2by)|_{(3,4)} = 8b$.

函数z沿梯度方向的方向导数最大，因此

$\frac{6a}{8b} = \frac{-3}{-4}$, 即$a = b$.　$(*)_1$

由方向导数的最大值为 10，得

$10 = \frac{\partial z}{\partial l}|_{(3,4)} = 6a \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 8b \times \left(-\frac{4}{5}\right)$,

即$9a + 16b = -25$.　$(*)_2$

由$(*)_1$ $(*)_2$得$a = b = -1$.

(2) $\sum$: $z = 2 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$. $\sum$的面积为

$$s = \iint_{z} ds = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} (1 + 4\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + 4\rho^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{3} (1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}} |_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}.$$

五、(10 分) 解：(1) 曲面$\sum$: $x^2 + y^2 = 2z$.

(2) 空间区域Ω: $x^2 + y^2 = 2z, z = 1, z = 2$.

记$D(z)$: $x^2 + y^2 \leq \left(\sqrt{2z}\right)^2$.

原式$= \int_1^2 dz \iint_{D(z)} zdxdy$

$$= \int_1^2 zdz \iint_{D(z)} dxdy$$

$$= \int_1^2 z \cdot \pi\left(\sqrt{2z}\right)^2 dz$$

$$= 2\pi \int_1^2 z^2 dz = \frac{2\pi}{3} z^3 |_1^2$$

$$= \frac{14\pi}{3}.$$

六、(10 分) 解： 令$x = rsin\varphi cos\theta, y = rsin\varphi sin\theta, z = rcos\varphi$，则

$$\Omega: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

因此

原式$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 rsin\varphi \cdot r^2 sin\varphi dr$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - cos2\varphi}{2} d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{16}(\pi - 2).$$

七、(10 分) 解：（1）在Ω内部，由于

$f_x = 1 \ne 0, f_y = 2 \ne 0, f_z = -2 \ne 0,$

因而f在Ω内部无驻点．其最值只能在$x^2 + y^2 + z^2 = 1$上取得.

令

$F = x + 2y - 2z + 5 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$

由$F_x=1+2\lambda x=0, F_y=2+2\lambda y=0, F_z=-2+2\lambda z=0$，及

$F_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0$ 得

$x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}, z=-\frac{2}{3}$ 或$x=-\frac{1}{3}, y=-\frac{2}{3}, z=\frac{2}{3}$.

由于f在有界闭域Ω上必有最大值，而

$f|_{(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})}=8, f|_{(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})}=2.$

故f在Ω上最大值为 8，最小值为 2.

(2) 由于f与$f^{\frac{1}{3}}$有相同的极值点，因而

$\sqrt[3]{2}\le\sqrt[3]{f}\le\sqrt[3]{8}=2.$

所以

$$\sqrt[3]{2}\iiint_\Omega dv\le\iiint_\Omega\sqrt[3]{x+2y-2z+5}dxdydz\le 2\iiint_\Omega dv.$$

而$\iiint_\Omega dv=\frac{4}{3}\pi$，故

$$\frac{4}{3}\sqrt[3]{2}\pi\le\iiint_\Omega\sqrt[3]{x+2y-2z+5}dxdydz\le\frac{8}{3}\pi.$$

八、**(10 分) 解：(1)** 区域$D=D_1\cup D_2(D_1,D_2$如图).

$$\begin{aligned}&\iint_D|x^2+y^2-1|dxdy\\&=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy\\&\stackrel{\text{def}}{=}I_1+I_2,\end{aligned}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^1(\rho-\rho^3)d\rho=\frac{\pi}{8}.$$

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1)dy$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(x^2-1)\sqrt{1-x^2}\right]dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - \frac{2}{3})dx - \frac{2}{3}\int_0^1 (x^2-1)\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}.$$

所以$\iint_D |x^2+y^2-1|dxdy = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$.

证明：(2) 由函数$f(x,y)$在有界闭域D上连续可知，$\exists M>0$，使得$\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)| = M$.

又$\iint_D f(x,y)d\sigma = \frac{1}{3}$, $\iint_D f(x,y)(x^2+y^2)d\sigma = \frac{\pi}{4}$得

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = \iint_D f(x,y)(x^2+y^2-1)d\sigma.$$

所以

$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \le \iint_D |f(x,y)||(x^2+y^2-1)|d\sigma \le M\iint_D |x^2+y^2-1|d\sigma = M(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3})$

(由(1)结论)，即$M \ge 1$. 故由闭域上连续函数最值存在定理得

$\exists(\xi,\eta)\in D$:　$M = |f(\xi,\eta)| \ge 1$.