南京理工大学课程考试答案及评分标准

(19-20(秋学期)线性代数(A)(2.5)考试试题答案)(19.12.11)

一. 是非题（每题 3 分，共 15 分）： 1. × 2. × 3. √ 4. × 5. √

二. 填空题（每题 4 分，共 20 分）：1. $2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\3&3&3\end{pmatrix}$ 2. $\underline{2}$ 3. $\underline{32}$ 4. $\underline{C}$ 5. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

三.（共 8 分）解：$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\1&x&a_2&\cdots&a_n\\1&a_2&x&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2&a_3&\cdots&x\end{vmatrix}$----(4 分)$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&x-a_1&0&\cdots&0\\1&a_2-a_1&x-a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2-a_1&a_3-a_2&\cdots&x-a_n\end{vmatrix}$

$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$ --------（4 分）

四.（共 12 分）解：由$|A|=1$，知$AA^*=|A|I=I$。于是由条件知$2AA^*X=AA^*B+AX\Rightarrow(2I-A)X=B$--------（6 分）因$|2I-A|=-1$，所以$2I-A$可逆，于是

$$X=(2I-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\2&0&1\\-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&4\\3&-3\\-2&2\end{pmatrix}$$--------（6 分）

五.（共 12 分）解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&-3&1\\-2&-5&9&-4\\1&3&-6&3\\3&8&-15&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&1\\0&-1&3&-2\\0&0&0&t-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ --------（6 分）

所以，(1)当$t=7$时，$r_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}}=2$，且$\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}\neq0$，知$\alpha_1,\alpha_2$为一个极大线性无关组。--------（3 分）

(2)当$t\neq7$时，$r_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}}=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为一个极大线性无关组。--------（3 分）

六.（共 12 分）$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1&-3&-5&2&-1\\1&-1&-2&3&0\\1&1&p&4&1\\1&7&10&7&q\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&-5&2&-1\\0&2&3&1&1\\0&0&p-1&0&0\\0&0&0&0&q-4\end{pmatrix}$ --------（4 分）因$r_A=2$，所以$p=1$，

此时$r_{(A|b)}=\begin{cases}3&q\neq4\\2&q=4\end{cases}$，因此当$p=1,q=4$时，$r_{(A|b)}=r_A=2<4$，线性方程组有无穷多解，--------（3 分）此时

原方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1-3x_2-5x_3+2x_4=-1\\2x_2+3x_3+x_4=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3-\frac{7}{2}x_4\\x_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases}$，取$x_3=x_4=0$，得特解

$X^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，-------（2 分）其导出组的解为$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3-\frac{7}{2}x_4\\ x_2=-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases}$，取$x_3=2,x_4=0$；$x_3=0,x_4=2$，得导出组的基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-7\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$，---- ----（2 分）故当 $p=1,q=4$ 时，方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\end{pmatrix}+k_2=\begin{pmatrix}-7\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$$，k_1,k_2为任意常数。-------（1 分）

七.（共 14 分）解：(1) 由$(A-5I)\alpha=0\Rightarrow A\alpha=5\alpha$，知$5$为$A$的特征值，$\alpha$为对应的特征向量，设$A$的另两个特征值为 λ_1,λ_2，则有 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+5=7\\ 5\lambda_1\lambda_2=5\end{cases}$，可得 $\lambda_1=\lambda_2=1$。设 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则

$(\alpha,x)=x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$，取$x_2=1,x_3=0;x_2=0,x_3=1$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，即为$1$对应的线性无关的特征向量。-------（6 分） 因ξ_1,ξ_2正交，故将ξ_1,ξ_2,α单位化得

$\eta_1=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\xi_2}{|\xi_2|}=\xi_2,\eta_3=\frac{\alpha}{|\alpha|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ -------（2 分）令$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0&1&0\end{pmatrix}$，作正交变换$X=TY$，得$f(X)$的标准形$f=y_1^2+y_2^2+5y_3^2$。-------（1 分）

(2)因$T^TAT=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$，所以$A=T\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}T^T=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$-------（5 分）

八.（共 7 分）证明：设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\ (1\le i\le n)$为①，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\ (1\le i\le n)$ 为②，显然向量组①可由向量组②线性表示。又因$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，且$k_1,k_2,\cdots,k_n$均不为 0，所以

$$\alpha_i=-\frac{1}{k_i}(k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_n\alpha_n-\alpha_{n+1})$$

即α_i 可由向量组①线性表示，从而向量组②能由①线性表示，于是①与②等价，-------（4 分）而向量组②的秩显然等于n，从而向量组①的秩也等于n，故①线性无关，又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性无关，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$中任意$n$个向量均线性无关。-------（3 分）