高等数学测试卷（一）答案

一、填空与选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1、$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$　　2、$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$　　3、$x_1(y)=y-1$，$x_2(y)=1-y$　　4、π

5、$-\dfrac{\pi}{2}$　　6、$y=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-2x}$　　7、C　　8、D

二、（8 分）解 因为平面 $x-y+z=1$ 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$，直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+7}{-3}$ 的方向向量为 $\vec{s}=\{1,5,-3\}$，所以取平面 π 的法向量为 $\vec{n}_1=\vec{n}\times\vec{s}=\{-2,4,6\}$。故所求平面 π 的方程为 $-2(x-2)+4(y-3)+6(z-5)=0$，即 $x-2y-3z+19=0$。

三、（8 分）解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+y\cos(xy)f_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[-2f_{11}+x\cos(xy)f_{12}]+[\cos(xy)-xy\sin(xy)]f_2$$

$$+y\cos(xy)\,[-2f_{21}+x\cos(xy)f_{22}]$$

$$=[\cos(xy)-xy\sin(xy)]f_2-4xf_{11}+(2x^2-2y)\cos(xy)f_{12}+xy\cos^2(xy)f_{22}\ .$$

四、（8 分）解 $f_x=e^x(x+y^2-2y+1)$，$f_y=e^x(2y-2)$，令

$$\begin{cases}f_x=e^x(x+y^2-2y+1)=0\\ f_y=e^x(2y-2)=0\end{cases}$$

得驻点 $(0,1)$。而 $f_{xx}=e^x(x+y^2-2y+2)$，$f_{xy}=e^x(2y-2)$，$f_{yy}=2e^x$，记 $A=f_{xx}(0,1)=1$，$B=f_{xy}(0,1)=0$，$C=f_{yy}(0,1)=2$，由于 $AC-B^2=2>0$，$A=1>0$，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处取极小值 $f(0,1)=-1$。

五、（8 分）解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y+3$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=4y+x-2$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=6z-6$，

所以 $gradu\big|_{P(1,1,1)}=\{2x+y+3,4y+x-2,6z-6\}_{P(1,1,1)}=\{6,3,0\}$。

记 $\vec{l}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$（2 分），则函数 u 在点 $P(1,1,1)$ 沿向径 $\overrightarrow{OP}$ 方向的方向导数为 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{P(1,1,1)}=gradu\big|_{P(1,1,1)}\cdot\vec{l}=\{6,3,0\}\cdot\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}=3\sqrt{3}$。

六、（8 分）解 $\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2zdv=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 z\rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi dz$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^2\rho^5 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 zdz=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^2\rho^5(2-\frac{\rho^4}{8})d\rho$$

$$=\frac{128}{15}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi=\frac{128}{15}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(2\varphi)}{4}d\varphi=\frac{128}{15}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\varphi)}{8}d\varphi=\frac{32\pi}{15}\quad.$$

七、（8 分）解 （1）记 $a_n=\frac{n}{3^n}$，则 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\frac{1}{3}$，

所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n}$ 的收敛半径 $R=3$。

（2）因为 $\left(\arctan x\right)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ （$-1<x<1$），

所以 $\arctan x=\int_0^x \arctan tdt=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ （$-1\le x\le 1$）。

于是 $f(x)=x\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$ （$-1\le x\le 1$）。

八、

解（1）因为 $\oint_{L+\overline{BA}}\left(e^x\sin y-2y+x^2\right)dx+\left(e^x\cos y+x^2+1\right)dy=\iint\limits_{D}(2x+2)dxdy$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(2\rho\cos\varphi+2\right)d\rho=\pi$$

而 $\int_{\overline{BA}}(e^x\sin y-2y+x^2)dx+(e^x\cos y+x^2+1)dy=\int_1^{-1}x^2dx=-\frac{2}{3}$

所以 $\int_L(e^x\sin y-2y+x^2)dx+(e^x\cos y+x^2+1)dy$

$$=\oint_{L+\overline{BA}}\left(e^x\sin y-2y+x^2\right)dx+\left(e^x\cos y+x^2+1\right)dy$$

$$-\int_{\overline{BA}}(e^x\sin y-2y+x^2)dx+(e^x\cos y+x^2+1)dy=\pi+\frac{2}{3}\quad.$$

（2）$\oiint\limits_{\Sigma}x(8y+3)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dv$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}dv=3\cdot\left(\frac{1}{3}\pi 2^2(3-1)\right)=8\pi\quad.$$

（注：或 $\iiint\limits_{\Omega} 3dv = \int_1^3 3dy \iint\limits_{D_y: x^2+z^2 \le y-1} dxdz = \frac{8}{3}\pi$ ）

九、（7 分）解　设曲线方程为 $y = y(x)$，则它在其上任一点 $P(x, y)$ 的切线方程是 $Y - y = y'(X - x)$（其中 (X, Y) 为切线上动点坐标）。令 $Y = 0$，得切线与 x 轴的交点坐标为 $Q(x - \frac{y}{y'}, 0)$。由题设有 $|PQ| = |OQ|$，即

$\sqrt{\left[(x - \frac{y}{y'}) - x\right]^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{\left[(x - \frac{y}{y'}) - 0\right]^2 + (0 - 0)^2}$，化简得 $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.　（*）

令 $u = \frac{y}{x}$，则方程（*）变为 $u + xu' = \frac{2u}{1 - u^2}$，分离变量得 $\frac{1 - u^2}{u + u^3} du = \frac{dx}{x}$，两边积分得

$\int \frac{1 - u^2}{u + u^3} du = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|$，计算得 $\frac{u}{1 + u^2} = Cx$ （**），将 $u = \frac{y}{x}$ 代入（**）式，化简后得 $C(x^2 + y^2) = y$．由初始条件 $y(2) = 2$ 得 $C = \frac{1}{4}$，故所求曲线方程是 $x^2 + y^2 = 4y$.

十、（5 分）解　因为函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数在全平面连续，所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ．因此曲线积分 $\int_L \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ 在全平面上与路径 L 无关，于是

$$\int_{(0,0)}^{(4,4)} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(4,4) - f(0,0) = f(4,4) \ .$$

又因为 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 2|x - y|$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 2|x - y|$，所以，当 $y = x$ 时，$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$。特别取路径 L 是从起点 $(0,0)$ 经过直线 $y = x$ 到终点 $(4,4)$ 的有向线段，则有

$$\int_{(0,0)}^{(4,4)} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

于是 $f(4,4) = 0$．　由于 $f(5,4) = f(5,4) - f(4,4) = \int_4^5 \frac{\partial f(x,4)}{\partial x} dx$，

所以 $|f(5,4)| = \left|\int_4^5 \frac{\partial f(x,4)}{\partial x} dx\right| \le \int_4^5 \left|\frac{\partial f(x,4)}{\partial x}\right| dx \le \int_4^5 2|x - 4| dx = 1$。