南京理工大学课程考试答案及评分标准

(21-22(春学期)线性代数(A)(2.5)考试试题答案)(22.5.10)

一. 是非题（每题 3 分，共 15 分）： 1. √ 2. √ 3. × 4. × 5. ×

二. 填空题（每题 3 分，共 15 分）：1. $\underline{0}$ 2. $\underline{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}}$ 3. $\underline{1}$，$\underline{2,3}$ 4. $\underline{C}$ 5. $\underline{B}$

三.（共 6 分）解：$-M_{41}+2M_{42}-3M_{43}+4M_{44}=A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\1&1&1&1\\0&1&2&1\\1&2&3&4\end{vmatrix}\text{--------(3 分)}=\begin{vmatrix}1&-1&2&-1\\0&2&-1&2\\0&1&2&1\\0&3&1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&2\\1&2&1\\3&1&5\end{vmatrix}=10 \text{ --------（3 分）}$$

四.（共 8 分）解：由 $XA=X+BB^T$，知 $XA-X=BB^T\Rightarrow X(A-I)=BB^T$，而 $|A-I|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $(A-I)$ 可逆，--------（4 分）从而 $X=BB^T(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$--------（4 分）

五.（共 8 分）解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&3&6&1\\3&-1&-2&15\\1&-5&-10&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&2&4&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$--------（6 分）

可得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的全部极大线性无关组为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$，$\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$。--------（2 分）

六.（共 10 分）解：$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1&2&5&1&2\\2&-6&-5&-3&-1\\-3&12&a&6&b\\1&6&11&3&a-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&5&1&2\\0&2&3&1&1\\0&0&a-12&0&b-3\\0&0&0&0&a-12\end{pmatrix}$--------（3 分）所以 $r_A=\begin{cases}2 & a=12\\3 & a\neq 12\end{cases}$，

$r_{(A|b)}=\begin{cases}2 & a=12,b=3\\3 & a=12,b\neq 3\\4 & a\neq 12\end{cases}$，因此当 $a=12$，$b=3$ 时，$r_{(A|b)}=r_A=2<4$，线性方程组有无穷多解，--------（3 分）此时，原方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+2x_2+5x_3+x_4=2\\2x_2+3x_3+x_4=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=1-2x_3\\x_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases}$，取 $x_3=x_4=0$，得特解

$X^*=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，--------（1 分）其导出组的解为 $\begin{cases}x_1=-2x_3\\x_2=-\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases}$，取 $x_3=2,x_4=0$；$x_3=0,x_4=2$，得导出组的基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$，---- ----（2 分）故当 $a=12,b=3$ 时，方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-4\\ -3\\ 2\\ 0\end{pmatrix}+k_2=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$$，k_1,k_2 为任意常数。-------（1 分）

七．（共 10 分）解：(1)设 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征向量为 $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，则 ξ 与 x 正交，即 $(\xi,x)=x_1-2x_2+2x_3=0$

$\Rightarrow x_1=2x_2-2x_3$，取 $x_2=1,x_3=0;\ x_2=0,x_3=1$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，即为1对应的线性无关的特征向量。

-------（3 分）

正交化：$\beta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\beta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 1\end{pmatrix}$-------（2 分）

单位化：$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\dfrac{1}{3\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 5\end{pmatrix},\eta_3=\dfrac{\xi}{|\xi|}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$ -------（1 分）

令 $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，作正交变换 $X=TY$，得 $f(X)$ 的标准形 $f=9y_3^2$。-------（1 分）

(2) 因 $T^TAT=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$，所以 $A=T\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}T^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}$-------（3 分）

八．（共 8 分）证明：1、设 $k\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t=0$ (1)

(1)式两边左乘 A，并利用 $A\eta^*=b, A\xi_i=0\,(i=1,\cdots,t)$ 有 $kA\eta^*+k_1A\xi_1+k_2A\xi_2+\cdots+k_tA\xi_t=0$

$\Rightarrow kb=0\quad\because b\neq0\quad\therefore k=0$，代入(1)式又得 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t=0$，因向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性无关，所以有 $k_1=\cdots=k_t=0=k$，故 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性无关。-------（5 分）

2、因存在可逆矩阵 P_1,Q 使 $P_1AQ=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\Rightarrow P_1A=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}\Rightarrow QP_1A=Q\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$，令 $QP_1=P$，于是 $PA=Q\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$，且 $(PA)^2=Q\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}=PA$-------（3 分）