2014年.1月5日工程数学

一．填空题（每小题2分，共20分）：

1．方程 $e^{iz}=-1$ 的根为________；

2．若 $f(z)=x^2-y^2+ax+by+i(cxy+3x+2y)$ 在复平面内处处解析，则 (a,b,c) 的值为_________；

3．函数 $f(z)=\dfrac{1}{4-3z}$ 在 $z_0=1+i$ 点的泰勒级数的收敛半径 R=_________；

$(A)\ \dfrac{1}{2}$ $(B)\ \dfrac{1}{6}$ $(C)\ 0$ $(D)\ \dfrac{1}{3}$

4. $z=0$ 是函数 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的_________；

(A) 可去奇点 (B) 三级极点 (C) 二级极点 (D) 本性奇点

5．映射 $w=e^z$ 将 z 平面的区域 $0<\operatorname{Im}z<\dfrac{\pi}{2}$ 映射成 w 平面上的区域_________；

6．$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-1)\frac{e^{2t}\sin t}{1+t^2}dt=$ ___________

7．设 $f(t)=\displaystyle\int_0^t \tau^2\cos(t-\tau)d\tau$，则 Laplace 变换 $L[f(t)]=$ ___________；

三．计算下列积分（每小题5分，共15分）：

1．$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^6}dz$； 3．$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)}dx$。

四．（8分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数：

1．$3<|z|<+\infty$； 2．$0<|z-2|<1$。

五．计算下列各题（每小题5分，共10分）：

1．设 $F(\omega)=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$ ，求 Fourier 逆变换；$F^{-1}[F(\omega)\cos 2\omega]$

2．设 $f(t)=\displaystyle\int_0^t \tau e^{-2\tau}\cos 3\tau\ d\tau$，求 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $L[f(t)]$。

六．（6分）用积分变换法解微分方程：$\begin{cases} y'''+6y''+12y'+8y=6e^{-2t} \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \end{cases}$ 。

七．（6分）求一映射 $w=f(z)$，将 z 平面的区域：$\operatorname{Im}z>0,\ |z+i|<2$ 映射成 w 平面上的区域：$\operatorname{Im}w>0$。

八．（6分）若函数 $f(z)$ 在 z_0 点的一个领域内连续，试证：

$$\lim_{r\to 0}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

2014-1-5 工程数学 4 学分解答

一． 填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1. $\underline{(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)}$；2. $\underline{(2,-3,\ 2)}$；3. $\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{3}}$ ； 4. $\underline{C}$；5. $\underline{0<\arg w<\dfrac{\pi}{2}}$；

6. $\underline{\dfrac{e^2\sin 1}{2}}$； 7. $\underline{\dfrac{2}{s^2(s^2+1)}}$；

三．（每小题 5 分，共 15 分）

解：1. $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^6}dz=2\pi i\frac{1}{5!}(e^z)^{(5)}\Big|_{z=0}=\frac{\pi i}{60}$，

3. $\dfrac{z^2}{(1+z^2)(4+z^2)}$ 在上半平面有一级极点 $z=i$ 和 $z=2i$，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)}dx=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{(1+z^2)(4+z^2)},i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{(1+z^2)(4+z^2)},2i\right]\right)$$

$$=2\pi i\left(-\frac{1}{6i}+\frac{1}{3i}\right)=\frac{\pi}{3}$$

四．（共 8 分） 解：1． $3<|z|<+\infty$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3^n-2^n)}{z^{n+1}}$$

2． $0<|z-2|<1$ $\qquad f(z)=\dfrac{1}{(z-2)}\cdot\dfrac{1}{(z-2-1)}=-\dfrac{1}{(z-2)}\cdot\dfrac{1}{1-(z-2)}$

$$=-\frac{1}{(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^{n-1}$$

五．（每小题 5 分，共 10 分）

解：1. $F^{-1}[F(\omega)]=F^{-1}\left[\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=u(t)$ ，

$$F^{-1}[F(\omega)\cos 2\omega]=F^{-1}\left[F(\omega)\frac{e^{i2\omega}+e^{-i2\omega}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}F^{-1}[F(\omega)e^{i2\omega}]+\frac{1}{2}F^{-1}[F(\omega)e^{-i2\omega}]=\frac{1}{2}[u(t+2)+u(t-2)]$$

2. $L[f(t)]=\dfrac{1}{s}L\left[te^{-2t}\cos 3t\right]$

$$=-\frac{1}{s}L\left[e^{-2t}\cos 3t\right]'=-\frac{1}{s}\cdot\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right]'=\frac{(s+2)^2-9}{s[(s+2)^2+9]^2}$$

六．（共 6 分）

解：设 $L[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取拉氏变换得

$$s^3Y(s)+6s^2Y(s)+12sY(s)+8Y(s)=\frac{6}{s+2},$$

由此可得 $Y(s)=\dfrac{6}{(s+2)^4}$，

取拉氏逆变换得 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=t^3e^{-2t}$

七．（共 6 分）解：

$$\operatorname{Im} z>0,\quad |z+i|<2\xrightarrow{w_1=\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}}-\pi<\arg w_1<-\frac{2}{3}\pi\xrightarrow{w_2=-w_1}0<\arg w_2<\frac{\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{w=w_2^3}0<\arg w<\pi$$，即 $\operatorname{Im} w>0$

复合以上 3 个映射，即得所求的一个映射为 $w=-\left(\dfrac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right)^3$

八．（共 6 分）证明： 由 $\displaystyle\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$

有 $$\left|\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-2\pi i f(z_0)\right|=\left|\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|$$

$$\le\oint_{|z-z_0|=r}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds=\frac{1}{r}\oint_{|z-z_0|=r}|f(z)-f(z_0)|ds$$

又 $f(z)$ 在 z_0 点的一个领域内连续，所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 只要

$0<|z-z_0|<\delta$，就有 $|f(z)-f(z_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2\pi}$，于是有

$$\left|\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-2\pi i f(z_0)\right|<\frac{1}{r}\cdot\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot 2\pi r=\varepsilon,$$

故 $$\lim_{r\to 0}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

2015 年. 1 月工程数学

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1．方程 $e^{iz}=-2$ 的根为________；

2．若 $u(x,y)=-2x^2+4xy+Ay^2$ 为调和函数，则 A=_________；

3．函数 $f(z)=\dfrac{1}{4-3z}$ 在 $z_0=1+2i$ 处的泰勒级数的收敛半径 R=_________；

5．映射 $w=z^2-2z$ 将 z 平面上下列区域__________缩小；

(A) $|z+1|<\dfrac{1}{2}$ (B) $|z+1|>\dfrac{1}{2}$ (C) $|z-1|<\dfrac{1}{2}$ (D) $|z-1|>\dfrac{1}{2}$

6．设 $f(t)=\delta(t)+\cos 2t$，则 Fourier 变换 $F[f(t)]=$___________

7．设 $f(t)=\int_0^t \tau^2\cos 2(t-\tau)d\tau$，则 Laplace 变换 $L[f(t)]=$___________；

三．计算下列积分（每小题 5 分，共 10 分）：

1． $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \dfrac{e^{iz}}{z^2(z^2-1)}dz$； 2． $\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{10+6\cos\theta}d\theta$。

四．（8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-12}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数：

1． $3<|z|<4$； 2． $0<|z-4|<7$。

五．计算下列各题（每小题 5 分，共 10 分）：

1．设 $F[e^{-t}u(t)]=F(\omega)$，求 Fourier 逆变换； $F^{-1}[F(\omega)\cos 2\omega]$

2．设 $f(t)=e^{-2t}\int_0^t\dfrac{\sin 3\tau}{\tau}d\tau$，求 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $L[f(t)]$。

六．（8 分）用积分变换法解微分方程： $\begin{cases} y''+4y'+3y=u(t) \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$。

七．（7 分）求一映射 $w=f(z)$，将 z 平面的区域：$0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 映射成 w 平面上的区域：$|w|<2$。

八．（7 分）若 $f(z)$ 在复平面上处处解析且有界，对于任意给定的两个复数 a,b，试求极限：

$\lim\limits_{R\to+\infty}\oint\limits_{|z|=R}\dfrac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$，并由此推证 $f(a)=f(b)$

2015-1-15 工程数学 4 学分解答

一． 填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1. $\underline{(2k+1)\pi-i\ln 2\ (k=0,\pm1,\mathrm{L}\ )}$； 2. $\underline{2}$； 3. $\underline{\dfrac{\sqrt{37}}{3}}$； 5. $\underline{C}$；

6. $\underline{1+\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]}$； 7. $\underline{\dfrac{2}{s^2(s^2+4)}}$；

三．（每小题 5 分，共 10 分）

解：1. 因 $\dfrac{e^{iz}}{z^2(z^2-1)}=e^{iz}\left(\dfrac{1}{z^2-1}-\dfrac{1}{z^2}\right)$，所以

$$\oint_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{e^{iz}}{z^2(z^2-1)}dz=\oint_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{e^{iz}}{z^2-1}dz-\oint_{|z-1|=\frac{3}{2}}\frac{e^{iz}}{z^2}dz=2\pi i\left[\left.\frac{e^{iz}}{z+1}\right|_{z=1}-\left.(e^{iz})'\right|_{z=0}\right]$$

$$=\pi i\left[e^i-2i\right]$$

2. $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{10+6\cos\theta}\,d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{10+6\dfrac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{(3z+1)(z+3)}dz$$

$$=\frac{1}{i}2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{1}{(3z+1)(z+3)},-\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi}{4}$$

四.（共 8 分） 解：1． $3<|z|<4$

$$f(z)=\frac{1}{(z+3)(z-4)}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z+3}\right)=-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{4}}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3}{z}}$$

$$=-\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}-\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{z^{n+1}}$$

2． $0<|z-4|<7$

$$f(z)=\frac{1}{(z-4)}\cdot\frac{1}{(z-4+7)}=\frac{1}{(z-4)}\cdot\frac{1}{7(1+\dfrac{z-4}{7})}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-4)^{n-1}}{7^{n+1}}$$

五.（每小题 5 分，共 10 分）

解：1.

$$F^{-1}[F(\omega)\cos 2\omega]=F^{-1}\left[F(\omega)\frac{e^{i2\omega}+e^{-i2\omega}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}F^{-1}[F(\omega)e^{i2\omega}]+\frac{1}{2}F^{-1}[F(\omega)e^{-i2\omega}]=\frac{1}{2}[e^{-(t+2)}u(t+2)+e^{-(t-2)}u(t-2)]$$

2. $$L\left[\int_0^t\frac{\sin 3\tau}{\tau}\,d\tau\right]=\frac{1}{s}L\left[\frac{\sin 3t}{t}\right]=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\frac{3}{s^2+9}ds=\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{3}\right)$$

$$L[f(t)]=\frac{1}{s+2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+2}{3}\right)$$

六.（共 8 分）

解：设 $L[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取拉氏变换得

$$s^2Y(s)-1+4sY(s)+3Y(s)=\frac{1}{s},$$

由此可得$Y(s)=\dfrac{1}{s(s+3)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+3}\right)$ ，

取拉氏逆变换得$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\dfrac{1}{3}(1-e^{-3t})$

七.（共 7 分）解：

$$0<\arg z<\frac{\pi}{3}\xrightarrow{w_1=z^3}0<\arg w_1<\pi\xrightarrow{w_2=\frac{w_1-i}{w_1+i}}|w_2|<1\xrightarrow{w=2w_2}|w|<2,$$

复合以上 3 个映射，即得所求的一个映射为$w=2\dfrac{z^3-i}{z^3+i}$

八.（共 7 分）证明： 因$f(z)$在复平面有界，可设$|f(z)|\le M$，且对$|z|=R$

$|z-a|\ge||z|-|a||=|R-|a||$，于是由积分不等式可得

$$\left|\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right|\le\oint_{|z|=R}\frac{|f(z)|}{|z-a||z-b|}ds\le\oint_{|z|=R}\frac{M}{|R-|a||\cdot|R-|b||}ds$$

$$=\frac{2\pi M}{|R-|a||\cdot|R-|b||}\xrightarrow{R\to+\infty}0，\text{所以}\lim_{R\to+\infty}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz=0$$

又当$R>\max\{|a|,|b|\}$时，由柯西积分公式（不妨设$a\ne b$）

$$\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz=\frac{1}{a-b}\left[\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)}dz-\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-b)}dz\right]=\frac{1}{a-b}[2\pi if(a)-2\pi if(b)]$$

令$R\to+\infty$，即知$f(a)=f(b)$。

2016 年. 1 月工程数学

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1．设$f(z)=2x^2+3y^2i$，则$f'(3+2i)=$________；

2．$(2i)^i=$________；

3．设$\sin(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(z-1)^n,|z-1|<+\infty$，则$c_4=$________；

4. $\mathrm{Res}\left[\dfrac{2z}{3+z^2},\infty\right]=$________;

5．映射$w=f(z)$将$|z|<1$映射成$|w|<1$，并满足$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0,\arg f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

则映射$w=$________________;

6．$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+1)\cos t\,dt=$__________

7．设$F(s)=\dfrac{se^{-2s}}{s^2+1}$,，则 Laplace 逆变换$L^{-1}[F(S)]=$___________;

三.（每小题 5 分，共 15 分）：

1．计算积分$\int_C\bar{z}\,\mathrm{Re}(z)dz$，其中$C$是 0 到$1+i$的直线段；

2. 求积分 $\oint\limits_{|z-1|=1}\dfrac{e^z}{z-1}dz$，从而证明 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta=\pi$；

3. 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x+2}{x^4+5x^2+4}\,dx$

四.（7 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-7z+10}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数：

1. $2<|z|<5$； 2. $3<|z-5|<+\infty$。

五．计算下列各题（每小题 5 分，共 10 分）：

1．设 $f(t)=u(t)\cos 3t$,，求 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F[f(t)]$；

2．设 $f(t)=\int_0^t\tau\cos\tau\,d\tau$，求 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $L[f(t)]$。

六.（7 分） 用积分变换法求解微分积分方程

$$\begin{cases}y'(t)+2y(t)+\int_0^t y(\tau)e^{-2(t-\tau)}\,d\tau=e^{-2t}\\ y(0)=1\end{cases}$$。

七.（7 分）求一映射 $w=f(z)$，将 z 平面的区域：$0<\mathrm{Re}\,z<2$ 映射成 w 平面上的区域：$|w|<1$。

八．（6 分）设 $\varphi(x,y)$ 与 $\psi(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数，$u=\varphi_y-\psi_x$，$v=\varphi_x+\psi_y$，证明 $f(z)=u+iv$ 是 D 内的解析函数。

2016-1-12 工程数学 4 学分解答

一. 填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1. $\underline{12}$； 2. $\underline{e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2)\ (k=0,\pm1,\cdots)}$； 3. $\underline{\dfrac{\sin 1}{4!}}$； 4. $\underline{-2}$； 5. $\underline{\dfrac{2z-1}{2-z}}$；

6. $\underline{\cos 1}$； 7. $\underline{u(t-2)\cos(t-2)}$；

三.（每小题 5 分，共 15 分）

解：1. C 的参数方程：$z=(1+i)t,\ \ t\in[0,1]$， 所以

$$\int_C\bar{z}\,\mathrm{Re}(z)\,dz=\int_0^1(1+i)t^2(1+i)dt=\frac{2}{3}$$

2. 由柯西积分公式，有

令 $z=e^{i\theta}(-\pi<\theta\leq\pi)$, 则 $\oint\limits_{|z-1|=1}\dfrac{e^z}{z-1}dz=2\pi ie^z\Big|_{z=1}=2\pi ei$ （*）

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{e^z}{z-1}dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{1+e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}iee^{e^{i\theta}}d\theta=ie\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta$$

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{e^z}{z-1}dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{1+e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}iee^{e^{i\theta}}d\theta=ie\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta$$

$$=ie\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta-e\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta$$

$$=2ie\int_{0}^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta(**)$$

比较（*）（**），可得 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\ d\theta=\pi$ 。

3. $\dfrac{z+2}{z^4+5z^2+4}$ 在上半平面有一级极点 $i,2i$ ，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+2}{x^4+5x^2+4}dx=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{z+2}{z^4+5z^2+4},i\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z+2}{z^4+5z^2+4},2i\right]\right\}$$

$$=2\pi i\left(\frac{2+i}{6i}-\frac{1+i}{6i}\right)=\frac{\pi}{3}$$

四.（共 7 分）解：1. $2<|z|<5$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-5)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-2}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{5}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^n}-\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

2. $3<|z-5|<+\infty$ $\qquad f(z)=\dfrac{1}{(z-5)}\cdot\dfrac{1}{(z-5+3)}=\dfrac{1}{(z-5)^2}\cdot\dfrac{1}{(1+\frac{3}{z-5})}$

$$=\frac{1}{(z-5)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(z-5)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(z-5)^{n+2}}$$

五.（每小题 5 分，共 10 分）

解: 1. 因 $F[u(t)]=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)=F(\omega)$，所以

$$F[u(t)\cos 3t]=F\left[u(t)\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}\right]=\frac{1}{2}[F(\omega-3)+F(\omega-3)]$$

$$F[u(t)]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(\omega-3)}+\pi\delta(\omega-3)+\frac{1}{i(\omega+3)}+\pi\delta(\omega+3)\right]$$

$$=\frac{i\omega}{9-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)]$$

2. $L[f(t)]=\frac{1}{s}L[t\cos t]=-\frac{1}{s}(L[\cos t])'=-\frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'=\frac{s^2-1}{s(s^2+1)^2}$

六.（共 7 分）解：设 $L[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取拉氏变换得

$$sY(s)-y(0)+2Y(s)+Y(s)\frac{1}{s+2}=\frac{1}{s+2}\quad,$$

由此可得 $Y(s)=\frac{s+2+1}{(s+2)^2+1}=\frac{1}{(s+2)^2+1}+\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\quad,$

取拉氏逆变换得 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=e^{-2t}\sin t+e^{-2t}\cos t$

七.（共 7 分）解：

$$0<\operatorname{Re}z<2\xrightarrow{w_1=\frac{\pi}{2}z}0<\operatorname{Re}w_1<\pi\xrightarrow{w_2=iw_1}0<\operatorname{Im}w_2$$

$$\xrightarrow{w_3=e^{w_2}}\operatorname{Im}w_3>0\xrightarrow{w=\frac{w_3-i}{w_3+i}}|w|<1\ ,$$

复合以上 4 个映射，即得所求的一个映射为 $w=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}zi}-i}{e^{\frac{\pi}{2}zi}+i}$

八.（共 7 分）证明： 因 $\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0,\ \psi_{xx}+\psi_{yy}=0$，且 φ 与 ψ 有二阶连续偏导数，所以 $u_x=\varphi_{yx}-\psi_{xx}$，$u_y=\varphi_{yy}-\psi_{xy}=-(\varphi_{xx}+\psi_{xy})$

$v_x=\varphi_{xx}+\psi_{yx}$，$v_y=\varphi_{xy}+\psi_{yy}=\varphi_{xy}-\psi_{xx}$，

于是得 $u_x=v_y, u_y=-v_x$，且 u 与 v 有一阶连续偏导数，

故 $f(z)=u+iv$ 是 D 内的解析函数

2017 年. 1 月工程数学

一. 填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1. 设 $Ln(-4-3i)=$________；

2. $\oint_{|z|=2}\frac{1}{2}\bar{z}\cos z dz=$________；

3. $\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z-3}dz=$________；

4. $\operatorname{Re}s\left[z^2e^{\frac{1}{z}},0\right]=$________

5. 映射 $w=z^2-2z$ 在点 $z=1+2i$ 处的伸缩率为______，转动角为_______；

6．设 $f(t)=\cos\left(3t+\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 Fourier 变换 $F[f(t)]=$________；

7．设 $f(t)=\int_0^t \sin 2\tau e^{3(t-\tau)}d\tau$，则 Laplace 变换 $L[f(t)]=$________；

二．（每小题 5 分，共 15 分）：

1．计算积分 $\int_C \bar{z}\,\mathrm{Im}(z+2)dz$，其中 C 是 0 到 $2+i$ 的直线段；

2．设函数 $f(z)=u+iv$ 解析，且 $u=2(x-1)y$，求函数 $f(z)$；

3．计算积分 $\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{17+8\cos\theta}d\theta$

三．（每小题 4 分，共 8 分）：

1.将函数 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开 z 的幂级数，并指出其收敛半径：

2．将函数 $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $2<|z+1|<3$ 内展开成洛朗级数。

四．计算下列各题（每小题 4 分，共 8 分）：

1．设 $f(t)=tu(t)$，其中 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$，求 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F[f(t)]$；

2．设 $f(t)=e^{3t}\int_0^t \dfrac{\sin 4\tau}{\tau}d\tau$，求 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $L[f(t)]$。

五．（7 分）用积分变换法解微分方程：$\begin{cases}y''+6y'+9y=e^{-3t}\\ y(0)=y'(0)=1\end{cases}$。

七．（6 分）求一映射 $w=f(z)$，将 z 平面的区域：$\mathrm{Re}\,z>0, |z|<1$ 映射成 w 平面上的区域：$\mathrm{Im}\,w>0$。

八．（6 分）若 $f(z)$ 解析，且 $|f(z)|\le 1+|z|$，则 $f(z)=az+b$，且 $|a|\le 1$，$|b|\le 1$。

2017-1-2 工程数学 4 学分解答

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1. $\ln 5+i\arctan\dfrac{3}{4}+(2k-1)\pi i(k=0,\pm1,\cdots)$； 2. $4\pi i$； 3. 0； 4. $\dfrac{1}{6}$； 5. $4,\dfrac{\pi}{2}$；

6. $\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\pi\delta(\omega+3)+\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\pi\delta(\omega-3)$； 7. $\dfrac{2}{(s-3)(s^2+4)}$；

二．（每小题 5 分，共 15 分）

解：1. C 的参数方程：$z=(2+i)t,\ t\in[0,1]$，所以

$$\int_C \bar{z}\,\mathrm{Im}(z+2)\,dz=\int_0^1 (2-)t^2(2+i)dt=\frac{5}{3}$$

2.由 $v_x=-u_y=-2(x-1)$，得 $v=\int -2(x-1)dx=-(x-1)^2+g(y)$，

又 $u_x=v_y \Rightarrow g'(y)=2y$， 所以 $g(y)=y^2+c$，因此 $v(x,y)=-(x-1)^2+y^2+c$ 。从而得解析函数 $f(z)=2(x-1)+i(y^2-(x-1)^2++c)$ 。

3. $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{17+8\cos\theta}\,d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{17+8\dfrac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{(4z+1)(z+4)}dz$$

$$=\frac{1}{i}2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{1}{(4z+1)(z+4)},-\frac{1}{4}\right]=\frac{2\pi}{15}$$

三．（每小题 4 分，共 8 分）解：1．由 $\dfrac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ ，两边求导得

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1}$$ ，所以 $$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}(|z|<1)$$

收敛半径 R=1

2． $2<|z+1|<3$ ，

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+1}{3}}-\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{(1+\dfrac{2}{z+1})}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n-\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^n}$$

四．（共 7 分）

解: 1. 因 $F[u(t)]=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$，所以

$$F[tu(t)]=i\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]'=-\frac{1}{\omega^2}+i\pi\delta'(\omega)$$

2. $$L\left[\int_0^t\frac{\sin 4\tau}{\tau}\,d\tau\right]=\frac{1}{s}L\left[\frac{\sin 4t}{t}\right]=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\frac{4}{s^2+4^2}ds=\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{4}\right)$$

$$L[f(t)]=\frac{1}{s-3}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s-3}{4}\right)$$

五．（共 7 分）解：设 $L[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取拉氏变换得

$$s^2Y(s)-s-1+6sY(s)-6+9Y(s)=\frac{1}{s+3}$$ ，

由此可得 $$Y(s)=\frac{1}{(s+3)^3}+\frac{s+3+4}{(s+3)^2}=\frac{1}{s+3}+\frac{4}{(s+3)^2}+\frac{1}{(s+3)^3}$$ ，

取拉氏逆变换得 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=e^{-3t}+4te^{-3t}+\dfrac{1}{2}t^2e^{-3t}$

七．（共 6 分）解：$\mathrm{Re}\, z>0, |z|<1 \xrightarrow{w_1=iz} |w_1|<1,\ \ 0<\arg w_1<\pi \xrightarrow{w_2=-\frac{w_1+1}{w_1-1}} 0<\arg w_2<\frac{\pi}{2}$

$\xrightarrow{w=w_2^2} \mathrm{Im}\, w>0$，

复合以上 3 个映射，即得所求的一个映射为 $w=\left(\dfrac{iz+1}{iz-1}\right)^2$

八．（共 6 分）证：$f(z)$ 的泰勒展开式为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ ，则

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=R}\frac{1+R}{R^{n+1}}ds=\frac{1+R}{R^n}$$

当 $n>1$‖ 时，令 $R\to\infty$,，得 $|a_n|=0$ ，故得 $f(z)=a_0+a_1 z=az+b$

由 $|f(z)|\le 1+|z|$ ，令 $z=0$, 得 $|f(0)|=|b|\le 1$,

又 $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|=\left|\dfrac{b+a}{z}\right|\le 1+\dfrac{1}{|z|}$ ，令 $z\to\infty$,，得 $|a|\le 1$

2018 年. 1 月工程数学

一．填空题（每小题 3 分，共 20 分）：

1．复数 $(5+12i)^i$ 的三角表示为_________；

2．设函数 $f(z)=x^2+3y^2 i$，则 $f'(3+i)=$ ________ ；

3．积分 $\int_C \mathrm{Re}(\bar{z}+1)dz=$ _____ ，其中 C 是从点 $z=-i$ 沿虚轴到点 $z=i$ 的路径

4．映射 $w=z^4$ 将 $\boldsymbol{z}$ 平面区域 $\dfrac{\pi}{12}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ 映射成 $\boldsymbol{w}$ 平面区域__________

5．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+(-1)^n}{3^n}z^n$ 的收敛半径 $R=$_________

6．$\mathrm{Res}\left[\dfrac{\sin z}{z^4},0\right]=$ __________ ；

7．$\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{x^2-1+\sin(x^3+5)}{e^{x+1}+\cos(x-3)+4}\delta(x-1)dx=$ __________ ；

8．$L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s+1)^2+4}\right]=$ __________ ；

二．（ 10 分）已知调和函数 $v(x,y)=e^x(x\sin y+y\cos y)$，求一个解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，使 $f(0)=0$。

三．（ 8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-7z+10}$ 在下列指定的圆环域内展开成洛朗级数：

(1)．$0<|z-2|<3$；　　　　(2)．$1<|z-3|<2$ 。

四、(8 分)求一个将 z 平面的区域 $|z|<2, \operatorname{Im} z<0$ 映射成 w 平面上的区域 $|w|<1$ 的映射 。(请画出映射前后的示意图)

五．计算下列积分：

1) $\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-1)(z+4)} dz$; (4分)　　2) $\int_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{\cos \pi z} dz$; (6分)

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+10} dx$ (4分)　　4) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z(z+1)^2} dz$; (6分)

六、(10 分)

1) 设 $F(\omega)=F[f(t)]$，计算 Fourier 变换 $F[f(t)\cos(2t+3)]$；

2) 求 $L\left[e^{-7t}\int_0^t \sin 3\tau \, d\tau\right]$。

七．(10 分) 用 Laplace 解常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y''+5y'+4y=e^{-t}\cos 2t \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$。

八．(4 分) 若函数 $f(z)$ 在圆周 $C:|z-z_0|=R$ 解析，在圆周上连续，且 $M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$，证明：对任意的 $n=1,2,\cdots$，都有 $|f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!}{R^n}M$ 。

2018 年. 1 月工程数学答案

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1．$e^{-(2k\pi+\arctan\frac{12}{5})}(\cos(\log 13)+i\sin(\log 13))$，其中 $k\in Z$ 为任意整数；2．6；3．$2i$；4．角形域 $\frac{\pi}{3}<\arg w<\pi$；5．$\frac{3}{2}$；　6．$-\frac{1}{6}$；7．0；　8．$e^{-t}[\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t]$；

二、因为 $v(x,y)=e^x(x\sin y+y\cos y)$，所以 $v_x=e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)$，$v_y=e^x(x\cos y+\cos y-y\sin y)$。由 Cauchy-Riemann 条件知：

$u_y=-v_x=-e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)$ 和 $u_x=v_y=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)$。

从而，$f'(z)=u_x+iv_x=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)+ie^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)$

$=e^x(xe^{iy}+iye^{iy}+e^{iy})=e^z(z+1)$。(3 分) 所以，$f(z)=ze^z+C$，其中 C 为任意常数。又因为 $f(0)=1$，所以，$C=0$。故 $f(z)=ze^z$

三、 $f(z)=\dfrac{z}{z^2-7z+10}=\dfrac{z}{(z-2)(z-5)}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{5}{z-5}-\dfrac{2}{z-2})$。

(1) $0<|z-2|<3$ 因为 $\dfrac{1}{z-5}=\dfrac{1}{(z-2)-3}=-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{z-2}{3}}=-\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{z-2}{3})^n$；

所以 $f(z)=\dfrac{1}{3}[-\dfrac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2)^n}{3^n}-\dfrac{2}{z-2}]$；

(2) $1<|z-3|<2$ 因为 $\dfrac{1}{z-5}=\dfrac{1}{(z-3)-2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\dfrac{z-3}{2}}=-\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{z-3}{2})^n$ 和

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-3)+1}=\frac{1}{(z-3)[1+\dfrac{1}{z-3}]}=\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}},$$

所以 $f(z)=\dfrac{5}{3}\dfrac{1}{z-5}-\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3)^n}{2^{n+1}}-\dfrac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}$。

四、解：由题设知 $w_1=\dfrac{2-z}{2+z}$ 将 z 平面上的区域 $|z|<2$，$-\pi<\arg z<0$ 映射成 w_1 平面上的区域（第一象限）$\mathrm{Re}(w_1)>0$，$\mathrm{Im}\,w_1>0$；$w_2=w_1^2$ 将 w_1 平面上的区域 $\mathrm{Re}(w_1)>0$，$\mathrm{Im}\,w_1>0$ 映射成 w_2 平面上的区域（上半平面）$\mathrm{Im}\,w_2>0$；$w=\dfrac{w_2-i}{w_2+i}$ 将 w_2 平面上的区域 $\mathrm{Im}\,w_2>0$ 映射成 w 平面上的单位圆内 $|w|<1$。

复合上述映射，即得 $w=\dfrac{w_2-i}{w_2+i}=\dfrac{w_1^2-i}{w_1^2+i}=\dfrac{(z-2)^2-i(z+2)^2}{(z-2)^2+i(z+2)^2}$。

五、（20 分）

1）$\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{\sin z}{(z-1)(z+4)}dz=2\pi i\cdot\frac{\sin z}{z+4}\Big|_{z=1}=\frac{2\pi i}{5}\sin 1$。

2）$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^{2z}}{\cos\pi z}dz=2\pi i\left\{\mathrm{Res}[\frac{e^{2z}}{\cos\pi z},\frac{1}{2}]+\mathrm{Res}[\frac{e^{2z}}{\cos\pi z},-\frac{1}{2}]\right\}$

$\displaystyle=2\pi i\left\{\frac{e^{2z}}{-\pi\sin\pi z}\Big|_{z=\frac{1}{2}}+\frac{e^{2z}}{-\pi\sin\pi z}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}\right\}=2(e^{-1}-e)i$。（6 分）

3）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+6x+10}dx=2\pi i\,\mathrm{Re}s[\frac{1}{z^2+6z+10},-3+i]=2\pi i\cdot\frac{1}{z+3+i}|_{z=-3+i}=\pi$。

4）$\int_{|z|=2}\frac{\sin z}{z(z+1)^2}dz=2\pi i\left\{\mathrm{Re}s[\frac{\sin z}{z(z+1)^2},0]+\mathrm{Re}s[\frac{\sin z}{z(z+1)^2},-1]\right\}$

$=2\pi i\left\{0+(\frac{\sin z}{z})'|_{z=-1}\right\}=2\pi i(\sin 1-\cos 1)$。

六、1）解：$F[f(t)\cos(2t+3)]=F[f(t)\frac{e^{i(2t+3)}+e^{-i(2t+3)}}{2}]=\frac{1}{2}e^{3i}F[f(t)e^{2ti}]$

$+\frac{1}{2}e^{-3i}F[f(t)e^{-2ti}]=\frac{1}{2}e^{3i}F(w-2)+\frac{1}{2}e^{-3i}F(w+2)$。（5 分）

2）由 $L[\sin 3t]=\frac{3}{s^2+9}$（1 分）知：$L[\int_0^t\sin 3\tau d\tau]=\frac{1}{s}\frac{3}{s^2+9}$（积分性质）；

因此，$L[e^{-7t}\int_0^t\sin 3\tau d\tau]=\frac{3}{(s+7)[(s+7)^2+9]}$。

七、解：设 $L[y(t)]=Y(s)$，（1 分）对方程 $y''+5y'+4y=e^{-t}\cos 2t$ 的两边同时取 Laplace 变换，则得 $L[y''(t)]+5L[y'(t)]+4L[y(t)]=L[e^{-t}\cos 2t]$；即

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+5[sY(s)-y(0)]+4Y(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$$(s^2+5s+4)Y(s)-sy(0)-y'(0)-5y(0)=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}。$$

又因为 $y(0)=0,\ y'(0)=1$，则

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s+4)}+\frac{1}{s+4}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+4}=\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\frac{1}{s+4}+\frac{1}{s+4}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+4}。$$

再取 Laplace 逆变换，得

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{3}L^{-1}[\frac{1}{s+1}]-\frac{1}{3}L^{-1}[\frac{1}{s+4}]+L^{-1}[\frac{1}{s+4}]*L^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2+4}]$$

$=\frac{1}{3}e^{-t}H(t)-\frac{1}{3}e^{-4t}H(t)+e^{-4t}H(t)*\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$

$=\frac{1}{3}e^{-t}H(t)-\frac{1}{3}e^{-4t}H(t)+\frac{1}{26}e^{-t}H(t)[3\sin 2t-2\cos 2t+2]$，

即为所求的初值问题的解，其中 $H(t)$ 是单位阶跃函数。

八、证明：由题设和高阶导数公式知

$$|f^{(n)}(z_0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|\le\frac{n!}{2\pi}\oint_C\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}ds\le\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\oint_C ds=\frac{n!}{R^n}M\text{。}$$

2019 年. 1 月工程数学

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1．$Ln(4-3i)=$__________；

2．已知 $f(z)=2(y-1)x+iv(x,y)$ 为解析函数，则 $v(x,y)=$___________；

3．已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}\,a_n)z^n$ 的收敛半径______ R；

(A) 等于　　(B) 小于　　(C) 不小于

4．$\oint\limits_{|z|=1}\bar{z}\cos\frac{1}{\bar{z}}dz=$__________；

5．映射 $w=z^2$ 在点 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 处的转动角为__________；

6．映射 $w=\frac{i}{z}$ 将 z 平面区域 $\mathrm{Re}\,z>0,0<\mathrm{Im}\,z<1$ 映射成 w 平面区域___________；

7．$\int_0^{+\infty}\frac{t^2+\sin t}{1+t^2}\delta(t-1)dt=$__________；

8．设 $f(t)=\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}$，则 Laplace 变换 $L[f(t)]=$__________；

三．计算下列积分（每小题 5 分，共 15 分）：

1．$\int_C(i-\bar{z})dz$，其中 C 为沿曲线 $y=x^2$ 从 0 到 $1+i$；

2．$\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}dz$；　　3．$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{(4+x^2)^2}dx$。

四．（8 分）将函数 $f(z)=\frac{z+4}{z^2+3z+2}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数：

1．$1<|z|<2$；　　2．$1<|z+2|<+\infty$。

五．（每小题 4 分，共 8 分）：

1．设 $f(t)=\begin{cases}0 & t>0\\ e^t & t\le 0\end{cases}$，求 $f(t)$ 的 Fourier 变换，并证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t-\omega\sin\omega t}{1+\omega^2}d\omega=\begin{cases}0 & t>0\\ \frac{\pi}{2} & t=0\\ \pi e^t & t<0\end{cases};$$

2．设 $f(t)=t\int_0^t\sin 2t\,dt$，求 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $L[f(t)]$。

六．（7 分）用积分变换法求解微分方程$\begin{cases} y''+4y'+5y=e^{-2t}\sin 2t \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$。

七．（7 分）求一映射 $w=f(z)$，将 z 平面的区域：$\operatorname{Re} z>0, |z+1|<2$ 映射成 w 平面上的区域：$|w|<1$。

八．（5 分）设 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数，$f(z)=u_x-iu_y$，证明 $f(z)$ 为 D 内的解析函数。

2019 年. 1 月工程数学答案

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：1. $\ln 5+i(2k\pi-\arctan\frac{3}{4})\ (k=0,\pm1,\Lambda)$；

2. y^2-2y-x^2+c, 或 $(y-1)^2-x^2+c$, c 为实常数；3. C；4. $2\pi i$；5. $\frac{\pi}{4}$；

6. $\operatorname{Re} w>0, \operatorname{Im} w>0$ 且 $\left|w-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$；7. $\frac{1+\sin 1}{2}$；8. $\ln\frac{s+3}{s+1}$；

三．计算下列积分（每小题 5 分，共 15 分）

解：1. C 的参数方程为 $z=t+it^2 \quad 0\le t\le 1$

所以 $\int_C (i-\bar{z})dz=\int_0^1(-3t-2t^3)dt+i\int_0^1(1-t^2)dt=-2+\frac{2}{3}i$

2. 被积函数 f(z)在 $|z|=2$ 内只有一级极点 $z=-1$ 和二级极点 $z=1$，而

$$\operatorname{Re}s[f(z),-1]=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}=-\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),1]=\lim_{z\to1}\left((z-1)^2\frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}\right)'=\frac{5}{4}$$

所以 $$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}dz=2\pi i\{\operatorname{Re}s[f(z),-1]+\operatorname{Re}s[f(z),1]\}=2\pi i$$

3. $\frac{z}{(4+z^2)^2}$ 在上半平面有二级极点 $2i$，　所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{2ix}}{(4+x^2)^2}dx=2\pi i\operatorname{Res}[\frac{ze^{2iz}}{(4+z^2)^2},2i]=2\pi i\left(\frac{ze^{2iz}}{(z+2i)^2}\right)'\Bigg|_{z=2i}=\frac{\pi}{2}e^{-4}i,$$

因此，$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{(4+x^2)^2}dx=\operatorname{Im}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{2ix}}{(4+x^2)^2}dx]=\frac{\pi}{2}e^{-4}$$

四．（共 8 分）解：1. $1<|z|<2$

$$f(z)=\frac{z+4}{(z+1)(z+2)}=\frac{3}{z+1}-\frac{2}{z+2}=\frac{3}{z}[\frac{1}{(1+\frac{1}{z})}-\frac{1}{(1+\frac{z}{2})}]$$

$$=\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}$$

2. $1<|z+2|<+\infty$

$$f(z)=\frac{3}{z+1}-\frac{2}{z+2}=\frac{3}{z+2-1}-\frac{2}{z+2}=\frac{3}{z+2}\frac{1}{(1-\frac{1}{z+2})}-\frac{2}{z+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{(z+2)^{n+1}}-\frac{2}{z+2}$$

五.（每小题 4 分，共 8 分）

解：1. $F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-j\omega)t}dt=\dfrac{1}{1-j\omega}$

且在 $f(t)$ 的连续点处有

$$f(t)=F^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+j\omega)}{1+\omega^2}(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t-\omega\sin\omega t}{1+\omega^2}d\omega,$$

所　以　$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t-\omega\sin\omega t}{1+\omega^2}d\omega=\begin{cases}0 & t>0\\ \dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\dfrac{1}{2} & t=0\\ e^{t} & t<0\end{cases}$，　即

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t-\omega\sin\omega t}{1+\omega^2}d\omega=\begin{cases}0 & t>0\\ \dfrac{\pi}{2} & t=0\\ \pi e^{t} & t<0\end{cases}$$

2. $L[f(t)]=-(L[\int_{0}^{t}\sin 2t\,dt])'=-(\dfrac{1}{s}L[\sin 2t])'$

$$=-(\frac{1}{s}\frac{2}{s^2+2^2})'=\frac{2(3s^2+4)}{s^2(s^2+4)^2}$$

六.（共 7 分）解：设 $L[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取拉氏变换得

$$s^2Y(s)-1+4sY(s)+5Y(s)=\frac{2}{(s+2)^2+4}$$

由此可得

$Y(s)=\dfrac{1}{(s+2)^2+1}+\dfrac{2}{[(s+2)^2+1][(s+2)^2+4]}=\dfrac{5}{3}\dfrac{1}{(s+2)^2+1}-\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{(s+2)^2+4}$ 取拉氏逆变换得 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\dfrac{5}{3}e^{-2t}\sin t-\dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 2t$

七.（共 7 分）解： $0<\operatorname{Re}z,|z+1|<2\xrightarrow{w_1=\frac{z+\sqrt{3}i}{z-\sqrt{3}i}}\dfrac{2}{3}\pi<\arg w_1<\pi$

$$\xrightarrow{w_2=e^{-\frac{2}{3}\pi i}w_1}0<\arg w_2<\frac{\pi}{3}\qquad\xrightarrow{w_3=w_2^{\ 3}}\ 0<\arg w_3<\pi\qquad\xrightarrow{w=\frac{w_3-i}{w_3+i}}|w|<1$$

复合以上四个映射，即得所求的一个映射为 $w=\dfrac{(z+\sqrt{3}i)^3-i(z-\sqrt{3}i)^3}{(z+\sqrt{3}i)^3+i(z-\sqrt{3}i)^3}$。

八.（共 5 分）证：由已知有 $u_{xx},u_{xy},u_{yx},u_{yy}$ 存在且连续，所以 $f(z)$ 的实部 u_x 与虚部 $-u_y$ 有一阶连续偏导数，又

$u_{xx}+u_{yy}=0\Rightarrow(u_x)_x=(-u_y)_y$， $u_{xy}=u_{yx}\Rightarrow(u_x)_y=-(-u_y)_x$

即 $f(z)$ 的实部 u_x 与虚部 $-u_y$ 满足柯西-黎曼方程，故 $f(z)=u_x-iu_y$ 在 D 内解析。

2019 年. 12 月工程数学 3. 5

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1．设 $e^z=1+\sqrt{3}i$，则 $z=$_________；

2．已知 $f(z)=x^3-3xy^2+i\,v(x,y)$ 为解析函数，则 $f'(z)=$__________；

3．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(-3+4i)^n}z^n$ 的收敛半径 $R=$_________；

4．设 $f(t)=1+\sin 2t$，则 Fourier 变换 $F[f(t)]=$_________；

5．映射 $w=\ln(z-1)$ 在点 $z=-1+2i$ 处的转动角为_________；

6．映射 $w=e^z$ 将 z 平面直线 $\mathrm{Re}\,z=\dfrac{1}{2}$ 映射成 w 平面上__________；

7． 计算积分 $\int_C \mathrm{Re}\,z\,dz=$_________；其中 C 是从坐标原点 O 到 $1+i$ 的直线段；

8．$L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s^2+4)}\right]=$_________；

二.计算下列积分（每小题 5 分，共 15 分）：

1. $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z-1}{z^2(z-1)^2}\mathrm{d}z$； 2. $\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{5+3\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$； 3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$

四.（8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数：

1．$1<|z|<2$； 2．$1<|z-2|<+\infty$。

五.（8 分）：

设 $f(t)=\begin{cases}\cos t & t\le\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases}$，求 $f(t)$ 的 Fourier 变换，并证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\omega\sin\omega t\cos\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}0 & |t|>\pi\\ -\dfrac{\pi}{2} & |t|=\pi\\ \pi\cos t & |t|<\pi\end{cases};$$

六.（8 分）用 Laplace 变换法求解微分积分方程

$$y'(t)-4y(t)+4\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=t,\ \ y(0)=0$$

七．（8 分）求一映射 $w=f(z)$，将 z 平面的区域：$|z+i|<2, \operatorname{Im} z>0,$ 映射成 w 平面上的区域：$|w|<1$。

八．（5 分）设 $f(z)$ 为区域 D 内解析，证明

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$$

2019 年. 12 月工程数学答案

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：1. $\underline{\ln 2+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)\,(k=0,\pm 1,\Lambda\,)}$；

2. $\underline{3x^2-3y^2+6xyi，或3z^2}$； 3. $\underline{\ 5\ }$ 4. $\underline{2\pi\delta(w)+i\pi[\delta(w+2)-\delta(w-2)]}$； 5.

$\underline{-\frac{3\pi}{4}}$； 6. $\underline{圆周|w|=e^{\frac{1}{2}}}$； 7. $\underline{\frac{1+i}{2}}$； 8. $\underline{\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t}$；

二．计算下列积分（每小题 5 分，共 15 分）

解：1. 被积函数 $f(z)$在$|z|=2$ 内只有一级极点 $z=0$ 和二级极点 $z=1$，而

$$\operatorname{Re}s[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\frac{e^z-1}{z^2(z-1)^2}=1$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{e^z-1}{z^2(z-1)^2}\right)'=2-e$$

所以 $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}dz=2\pi i\{\operatorname{Re}s[f(z),0]+\operatorname{Re}s[f(z),1]\}=2\pi i(3-e)$

2. $$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos\varphi}d\varphi=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{3z^2+10z+3}$$

$$=4\pi\{\operatorname{Re}s[\frac{1}{3z^2+10z+3},-\frac{1}{3}]=4\pi\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\frac{1}{(3z^2+10z+3)'}=4\pi\times\frac{1}{8}=\frac{\pi}{2}.$$

3. $\frac{1}{z^2-2z+5}$ 在上半平面有一级极点 $1+2i$

所以 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+5}dx=2\pi i\operatorname{Res}[\frac{1}{z^2-2z+5},1+2i]$$

$$=2\pi i\left.\frac{1}{(z^2-2z+5)'}\right|_{z=1+2i}=\frac{\pi}{2}.$$

四．（共 8 分）解：1. $1<|z|<2$

$$f(z)=\frac{z+1}{(z+1)(z+2)}=\frac{3}{z-2}-\frac{2}{z-1}=-\frac{3}{2}\frac{1}{(1-\frac{z}{2})}-\frac{2}{z}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})}]$$

$$=-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

2. $1<|z-2|<+\infty$

$$f(z)=\frac{3}{z-2}-\frac{2}{z-1}=\frac{3}{z+2}-\frac{2}{z-2+1}=\frac{3}{z+2}-\frac{2}{z-2}\frac{1}{(1+\frac{1}{z-2})}$$

$$=\frac{3}{z-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$$

五.（共 8 分）解：

$$F(w)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t\cos wt-i\cos t\sin wt)dt$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\cos t\cos wtdt$$

$$=\int_{0}^{\pi}[\cos(1-w)t+\cos(1+w)t]dt=\left.\frac{\sin(1-w)t}{1-w}\right|_{0}^{\pi}+\left.\frac{\sin(1+w)t}{1+w}\right|_{0}^{\pi}=\frac{2w\sin w\pi}{1-w^2}$$

在 $f(t)$ 的连续点处有

$$f(t)=F^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2w\sin w\pi}{1-w^2}(\cos wt+i\sin wt)dw$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{2w\sin w\pi\cos wt}{1-w^2}dw$$

$$=\begin{cases}\cos t & |t|<\pi\\ \dfrac{f(\pm\pi+0)+f(\pm\pi-0)}{2} & |t|=\pi\\ 0 & |t|>\pi\end{cases}=\begin{cases}\cos t & |t|<\pi\\ -\dfrac{1}{2} & |t|=\pi\\ 0 & |t|>\pi\end{cases},$$

所以$$\int_{0}^{+\infty}\frac{2w\sin w\pi\cos wt}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}0 & |t|>\pi\\ -\dfrac{\pi}{2} & |t|=\pi\\ \pi\cos t & t<|\pi|\end{cases}$$

六.（共 8 分）解：设 $L[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取拉氏变换得

$$sY(s)-4Y(s)+\frac{4}{s}Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

由此可得 $Y(s)=\dfrac{1}{s(s-2)^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(s-2)^2}$

取拉氏逆变换得 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}e^{2t}-\dfrac{1}{2}te^{2t}$.

七.（共 8 分）解： $|z+i|<2,\operatorname{Im}z>0\xrightarrow{w_1=\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}}-\pi<\arg w_1<-\dfrac{2}{3}\pi$

$$\xrightarrow{w_2=e^{-\pi i}w_1=-w_1} 0<\arg w_2<\frac{\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{w_3=w_2{}^3} \quad 0<\arg w_3<\pi \quad \xrightarrow{w=\frac{w_3-i}{w_3+i}} |w|<1$$

复合以上四个映射，即得所求的一个映射为 $w=\dfrac{(z+\sqrt{3})^3+i(z-\sqrt{3})^3}{(z+\sqrt{3})^3-i(z-\sqrt{3})^3}$。

八.（共 5 分）证：设 $f(z)=u+iv$， $f(z)$ 在 D 内解析，则 $u,\ v$ 在 D 内满足 C.-R.条件且均为调和函数，即

$u_x=v_y, u_y=-v_x$， $u_{xx}+u_{yy}=0,\ v_{xx}+v_{yy}=0$，

又 $|f(z)|^2=u^2+v^2, f'(z)=u_x+iv_x$， $|f'(z)|=u_x^2+v_x^2$，所以

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=\frac{\partial^2(u^2+v^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u^2+v^2)}{\partial y^2}$$

$$=2u_x^2+2uu_{xx}+2v_x^2+2vv_{xx}+2u_y^2+2uu_{yy}+2v_y^2+2vv_{yy}$$

$$=4u_x^2+4v_x^2+2u(u_{xx}+u_{yy})+2v(v_{xx}+v_{yy})$$

$$=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|.$$

2019 年. 12 月工程数学

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1. 函数 $f(z)=2x^2+iy$ 仅在________处可导；
2. $(-1-i)^i=$________；
3. $\oint_C \dfrac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}=$________，其中 C 为正向圆周 $|z|=r<1$；
4. 设 $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$， $|z-1|<+\infty$，则 $c_4=$________；
5. 映射 $w=z^2$ 在点 $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ 处的转动角为________；
6. 映射 $w=e^z$ 将 z 平面区域 $\dfrac{\pi}{3}<\operatorname{Im}z<\dfrac{2\pi}{3}$ 映射成 w 平面区域________；
7. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+1)(\sin t+t^2)dt=$________；
8. 设 $F[f(t)]=F(\omega)$，则 Fourier 变换 $F[tf(2t)]=$________；
9. 设 $F(s)=\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$，则 $L^{-1}[F(s)]=$________。
10. $L[\dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}]=$________。

二．（8 分）设 $u(x,y)=x^3+axy^2+xy$，求常数 a 的值，使 $u(x,y)$ 为调和函数，并求解析函数 $f(z)=u+iv$，使 $f(0)=i$。

三．计算下列积分（每小题 4 分，共 12 分）：

1．$\int_C (x^2+yi)dz$，其中 C 是从原点沿曲线 $z(t)=t+it^2$ 到点 $1+i$；

2．$\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin z}{(z-1)^2(z^2+1)}dz$；3．$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x+2}{x^4+10x^2+9}dx$。

四．（8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-6}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数：

1．$0<|z+2|<5$；　　2．$|z-3|>5$。

五．计算下列各题（每小题 5 分，共 10 分）：

1．设 $f(t)=e^{-2it}u(t-1)$，求 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F[f(t)]$；

2．设 $f(t)=t\int_0^t e^{2t}\sin 3tdt$，求 Laplace 变换 $L[f(t)]$。

六．（8 分）用积分变换法解微分积分方程：$\begin{cases} y'(t)-2y(t)+\int_0^t y(\tau)e^{2(t-\tau)}d\tau=e^{2t} \\ y(0)=1 \end{cases}$。

七．（8 分）求一映射 $w=f(z)$，将 z 平面的区域：$|z|>1, 0<\arg z<\pi$ 映射成 w 平面上的区域：$|w|<1$。

八．（6 分）如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R，证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}\,c_n)z^n$ 的收敛半径不小于 R。

2019 年.12 月工程数学试卷答案

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：1. $x=\dfrac{1}{4}$；2. $e^{(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)}(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2})\ (k=0,\pm1,\cdots)$；3. 0；4. $\dfrac{\cos 1}{4!}$；5. $\dfrac{3}{4}\pi$；6. $\dfrac{\pi}{3}<\arg w<\dfrac{2\pi}{3}$；7. $1-\sin 1$；8. $\dfrac{i}{2}\dfrac{d}{d\omega}F(\dfrac{\omega}{2})$；9. $t+(t-2)u(t-2)$；10. $\ln\dfrac{s+2}{s+1}$。

二．（共 8 分）解：由 $u_{xx}+u_{yy}=2x(3+a)=0$，得 $a=-3$，所以 $u(x,y)=x^3-3xy^2+xy$。

由 $v_y=u_x=3x^2-3y^2+y$，得 $v=\int(3x^2-3y^2+y)dy=3x^2y-y^3+\dfrac{1}{2}y^2+g(x)$，------ (

$v_x=6xy+g'(x)$，由 $v_x=-u_y=-(-6xy+x)$，得 $g'(x)=-x$，所以 $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+c$，因

从而得解析函数

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+c$$

$f(z)=x^3-3xy^2+xy+i(3x^2y-y^3+\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}x^2+c)$。由 $f(0)=i$，得 $c=1$

$f(z)=x^3-3xy^2+xy+i(3x^2y-y^3+\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}x^2+1)=z^3+(1-\dfrac{1}{2}z^2)i$ ------ (

三．（每小题 4 分，共 12 分）

解：1. $\int\limits_C (x^2+yi)dz=\int_0^1(t^2+t^2i)(1+2ti)dt=(1+i)\int_0^1 t^2(1+2ti)dt=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}i)$

2. $\oint_{|z-i|=2} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z^2+1)}dz = 2\pi i\{\mathrm{Res}[\frac{\sin z}{(z-1)^2(z^2+1)},1] + \mathrm{Res}[\frac{\sin z}{(z-1)^2(z^2+1)},i]$

3. $\frac{z+2}{(1+z^2)(9+z^2)}$ 在上半平面有一级极点 i 和 $3i$，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+2}{x^4+10x^2+9}dx$

$= 2\pi i\{\mathrm{Res}[\frac{z+2}{(1+z^2)(9+z^2)},i] + \mathrm{Res}[\frac{z+2}{(1+z^2)(9+z^2)},3i]\} = 2\pi i(\frac{2+i}{16i} - \frac{2+3i}{48i}) = \frac{1}{6}\pi$

四.（共 8 分） 解：1. $0<|z+2|<5$

$f(z) = \frac{1}{-5(z+2)}\frac{1}{(1-\frac{z+2}{5})}$ ------- （2 分） $= -\frac{1}{5(z+2)}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+2}{5})^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{5^{n+1}}$

2. $|z-3|>5$

$f(z) = \frac{1}{(z-3)}\frac{1}{(z-3+5)} = \frac{1}{(z-3)^2}\frac{1}{1+\frac{5}{z-3}}$ ------- （2 分） $= \frac{1}{(z-3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{5}{z-3})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{(z-3)^{n+2}}$

五.（每小题 5 分，共 10 分）解： 1. 因 $F[u(t-1)] = e^{-i\omega}[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)] = F(\omega)$

所以 $F[e^{-2it}u(t-1)] = F(\omega+2) = e^{-i(\omega+2)}[\frac{1}{i(\omega+2)} + \pi\delta(\omega+2)]$

2. 因 $L[\int_0^t e^{2t}\sin 3t dt] = \frac{1}{s}L[e^{2t}\cos 3t] = \frac{1}{s}\frac{3}{(s-2)^2+9}$ ------- （3 分

所以 $L[t\int_0^t e^{2t}\sin 3t dt] = -(\frac{3}{s[(s-2)^2+9]})' = \frac{3(3s^2-8s+13)}{s^2[(s-2)^2+9]^2}$ ------

六.（共 8 分）解：设 $L[y(t)] = Y(s)$，对方程两边取拉氏变换得

$sY(s) - y(0) - 2Y(s) + Y(s)\frac{1}{s-2} = \frac{1}{s-2}$ ------- （3 分）

由此可得 $Y(s) = \frac{(s-2)+1}{(s-2)^2+1} = \frac{1}{(s-2)^2+1} + \frac{s-2}{(s-2)^2+1}$ ------- （3

取拉氏逆变换得 $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = e^{2t}\sin t + e^{2t}\cos t$ ------- （2 分）

七.（共 8 分）解：$|z|>1, 0<\arg z<\pi \xrightarrow{w_1 = i\frac{z+1}{z-1}} 0<\arg w_1<\frac{\pi}{2}$

$\xrightarrow{w_2 = w_1^2} 0<\arg w_2<\pi$ ------- （2 分） $\xrightarrow{w=\frac{w_2-i}{w_2+i}} |w|<1$ ----

复合以上三个映射，即得所求的一个映射为 $w = \frac{(z+1)^2 + i(z-1)^2}{(z+1)^2 - i(z-1)^2}$。

八.（共6分）证明：由$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径为$R$可知，对$|z|<R$内任一点$z_0$，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$不但收敛而且绝对收敛，即$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n|$收敛。-------（3分）

又$|(\mathrm{Re}c_n)z_0^n| = |\mathrm{Re}c_n||z_0|^n \le |c_n||z_0|^n = |c_n z_0^n|$，由比较判别法知，$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Re}c_n)z_0^n$绝对收敛，这样$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Re}c_n)z^n$在$|z|<R$内任一点收敛，它的收敛半径$\ge R$。-------（3分）

2020年.12月工程数学

一、填空题 (每题3分，共30分)

1．复数i^{1-i}的指数表示式为______________；

2．设函数$f(z) = y^2 + x^2 i$，则$f'(1-i) =$______________；

3．积分$\int_C e^{iz}\,dz =$______________，其中C是圆周$|z| = 2$上从点$z = -2i$到点$z = 2i$的一段路径；

4．映射$w = z^3$将z平面上区域$\frac{\pi}{6} < arg(z) < \frac{\pi}{3}$映射成w平面上区域______________；

5．幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(1-i)^n z^n$的收敛半径R=______________；

6． $\mathrm{Res}\left[\frac{\cos z - 1}{z^3}, 0\right] =$______________；

7． $\int_0^{+\infty} \frac{6\sin(x+1)}{\cos(x-3)+5}\delta(x-3)dx =$______________；

8． $L^{-1}[\frac{s^2}{s^2+2s+10}] =$______________；

二、(10分) 已知调和函数$v(x,y) = (e^{-y} - e^{y})\sin x$，求一个解析函数$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 使得 $f(0) = 2$。

三、(8分) 将函数$f(z) = \frac{z}{z^2-2z-24}$在下列指定的圆环域内展开成洛朗(Laurent)级数

(1) $0 < |z-6| < 10$； (2) $10 < |z+4| < +\infty$。

四、(8分) 求一个将z平面上带形区域 $1 < \mathrm{Re}(z) < 2$映射成w平面上区域 $|w| < 1$的映

射。（请画出映射前后的示意图）

五、(20 分) 计算下列积分

1） $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z(z-1)}dz$；　　2） $\oint_{|z|=3}\frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}dz$；

3） $\oint_{|z|=1}\frac{e^{2z}}{z^6}dz$；　　4） $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+5x^2+4}dx$。

六、(10 分)　设函数$f(t)$的 Fourier 变换$F(\omega)=F[f(t)]$，$H(t)=\begin{cases}1, t>0,\\0, t<0,\end{cases}$

利用函数$F(\omega)$表示$F[f(t)H(t)e^{-3t}\cos(2t)]$。

七、(10 分) 用 Laplace 变换求解常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}y''(t)+6y'(t)+8y(t)=e^{-3t}\sin t,\\ \quad y(0)=2,\ \ y'(0)=\frac{3}{2}.\end{cases}$$

2020 年. 12 月工程数学试卷答案

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1．$e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}}$或$e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}+i(2k\pi+\frac{\pi}{2})}$，其中$k\in Z$为任意整数；　2．$2i$；

3．$2i\sinh 2=i(e^2-e^{-2})$；　4．角形域$\frac{\pi}{2}<\arg w<\pi$；　5．$\frac{\sqrt{2}}{2}$；　6．$-\frac{1}{2}$；

7．$\sin 4$；　8．$\delta(t)-e^{-t}[2\cos 3t-\frac{8}{3}\sin 3t]$；

二、因为$v(x,y)=(e^{-y}-e^{y})\sin x$，所以$v_x=(e^{-y}-e^{y})\cos x$，$v_y=-(e^{-y}+e^{y})\sin x$。由 Cauchy-Riemann 条件知：$u_y=-v_x=-(e^{-y}-e^{y})\cos x$和$u_x=v_y=-(e^{-y}+e^{y})\sin x$。从而，

$f'(z)=u_x+iv_x=-(e^{-y}+e^{y})\sin x+i(e^{-y}-e^{y})\cos x=i[e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}]=$

$i[e^{iz}-e^{-iz}]=-2\sin z.$

所以，$f(z)=2\cos z+C$，其中C为任意常数。又因为$f(0)=2$，

所以，$C=0$。故$f(z)=2\cos z$。

三、$f(z)=\frac{z}{z^2-2z-24}=\frac{z}{(z-6)(z+4)}=\frac{1}{5}(\frac{3}{z-6}+\frac{2}{z+4})$。（1 分）

(1) $0<|z-6|<10$ 因为$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{(z-6)+10}=\frac{1}{10}\frac{1}{1+\frac{z-6}{10}}=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z-6}{10})^n$；

$$所以f(z)=\frac{1}{5}[\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n}(z-6)^n+\frac{3}{z-6}]；$$

(2) $10<|z+4|<+\infty$ 因为

$$\frac{1}{z-6}=\frac{1}{(z+4)-10}=\frac{1}{(z+4)[1-\frac{10}{z+4}]}=\frac{1}{z+4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{10}{z+4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^n}{(z+4)^{n+1}},$$

所以$f(z)=\frac{3}{5}\frac{1}{z-6}+\frac{2}{5}\frac{1}{z+4}=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^n}{(z+4)^{n+1}}+\frac{2}{5}\frac{1}{z+4}$。

四、解：由题设知$w_1=\pi i(z-1)$将 z 平面上的带形区域$1<\mathrm{Re}(z)<2$映射成w_1平面上的带形区域$0<\mathrm{Im}\,w_1<\pi$；$w_2=e^{w_1}$将w_1平面上的带形区域$0<\mathrm{Im}\,w_1<\pi$映射成w_2平面上的区域（上半平面）$\mathrm{Im}\,w_2>0$；$w=\frac{w_2-i}{w_2+i}$将w_2平面上的区域$\mathrm{Im}\,w_2>0$映射成w平面上的单位圆内$|w|<1$。

复合上述映射，即得 $w=\frac{w_2-i}{w_2+i}=\frac{e^{w_1}-i}{e^{w_1}+i}=\frac{e^{\pi i(z-1)}-i}{e^{\pi i(z-1)}+i}$。

五、(每小题 5 分，共 20 分)

1) $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z(z-1)}dz=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z(z-1)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z(z-1)},0\right]\right\}$

$=2\pi i(0+\sin 1)=2\pi i\sin 1.$

2) $\oint_{|z|=3}\frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}dz=2\pi i\left\{\mathrm{Res}[\frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})},0]+\mathrm{Res}[\frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})},\frac{\pi}{2}]\right\}$

$$= 2\pi i\left\{\left(\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}\right)'\Big|_{z=0} + \frac{\cos z}{z^2}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}\right\} = 2\pi i\left(-\frac{2}{\pi^2}+0\right) = -\frac{4i}{\pi}。$$

3) $\oint_{|z|=1}\frac{e^{2z}}{z^6}dz = \frac{2\pi i}{5!}(e^{2z})^{(5)}|_{z=0} = \frac{8}{15}\pi i.$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+5x^2+4}dx = 2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4+5z^2+4}, i\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4+5z^2+4}, 2i\right]\right\}$

$$= 2\pi i\{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}|_{z=i} + \frac{1}{(z+2i)(z^2+1)}|_{z=2i}\} = \frac{\pi}{6}。$$

六、1）解：因为$F[H(t)e^{-3t}] = \frac{1}{3+\omega i}$，所以

$$F[H(t)e^{-3t}\cos(2t)] = F\left[H(t)e^{-3t}\frac{e^{i2t}+e^{-i2t}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3+(\omega-2)i} + \frac{1}{3+(\omega+2)i}\right]$$

$$= \frac{3+\omega i}{(3+\omega i)^2+4}. \quad (4 分)$$

从而，$F[f(t)H(t)e^{-3t}\cos(2t)] = \frac{1}{2\pi}F[f(t)] * F[H(t)e^{-3t}\cos(2t)]$

$$= \frac{(3+\omega i)F(\omega)}{2\pi[(3+\omega i)^2+4]}.$$

七、解：设$L[y(t)] = Y(s)$，（1 分）对方程$y'' + 6y' + 8y = e^{-3t}\sin t$的两边同时取 Laplace 变换，则得$L[y''(t)] + 6L[y'(t)] + 8L[y(t)] = L[e^{-3t}\sin t]$；即

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 6[sY(s) - y(0)] + 8Y(s) = \frac{1}{(s+3)^2+1}$$

$$(s^2+6s+8)Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6y(0) = \frac{1}{(s+3)^2+1}。$$

又因为$y(0) = 2, y'(0) = \frac{3}{2}$，则

$$Y(s) = \frac{2s+\frac{27}{2}}{(s+2)(s+4)} + \frac{1}{(s+2)(s+4)}\cdot\frac{1}{(s+3)^2+1} = \frac{5}{s+2} - \frac{3}{s+4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+3)^2+1}。$$

再取 Laplace 逆变换，得

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=5L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]-3L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]-\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2+1}\right]$$

$$=5e^{-2t}H(t)-3e^{-4t}H(t)-\frac{1}{2}e^{-3t}\sin t,$$

即为所求的初值问题的解，其中$H(t)$是单位阶跃函数。

2021 年. 11 月工程数学

一、填空题 (每题 2 分，共 20 分)

1．复数$(-1-\sqrt{3}i)^i$的三角表示式为______________ ；

2．设函数$f(z)=x^3+3y^2i$，则$f'(-2+2i)=$______________ ；

3. 积分$\int_C(z^2+iz)\,dz=$______________ ，其中 C 是圆周$|z|=3$上从点$z=-3$到点$z=3$的一段路径；

4．映射$w=e^z$将 z 平面上带形区域 $1<\mathrm{Re}(z)<2$映射成 w 平面上为区域；

5．幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(3-4i)^n(z-1)^n$的收敛半径 R=______________ ；

6． $\mathrm{Res}\left[\frac{1+z+\sin z}{z^4},0\right]=$______________ ；

7． $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+5)\cos x}{(x^8+1)(1+x^2)}\delta(x+1)dx=$______________ ；

8． $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4s+13}\right]=$______________ ；

9. 设函数$f(x)=e^{-|x-1|}$，则它的 Fourier 变换$F[f(x)]=$______________ ；

10. 设单位阶跃函数$H(x)=\begin{cases}1, x>0,\\0, x<0,\end{cases}$ 则$F[H(x)\cos(2x)]=$______________ 。

二、(10 分) 已知调和函数$v(x,y)=e^{-y}\sin x+2y$，求一个解析函数

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 使得 $f(0)=2$。

三、(8 分) 将函数$f(z)=\frac{z+4}{z^2+5z-14}$在下列指定的圆环域内展开成洛朗级数

(1) $0<|z-2|<9$; (2) $9<|z+7|<+\infty$。

四、(8 分) 求一个将 z 平面上区域 $\mathrm{Im}(z)>0$映射成 w 平面上区域$|w-2i|<3$，且满足$w(i)=2i$和$\arg w'(i)=\frac{\pi}{2}$的映射。（请画出映射前后的示意图）

五、(每题 5 分，共 15 分) 计算下列积分

1) $\oint_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2(z+1)} dz$；　　2) $\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{4\cos\theta+5} d\theta$；

3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$。

六、(6 分)　1) 求$F[x^2 e^{-5x} H(x)]$；　2) 求$L[e^{-3t}\int_0^t \tau\sin(4\tau)\,d\tau]$。

七、(9 分) 用 Laplace 变换求解常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = e^{-2t}\cos t, \\ \quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

八、(4 分) 已知$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \omega > 0$，证明：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2\omega x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\omega^2}$。

2021 年. 11 月工程数学答案

一、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1. $e^{-2k\pi+\frac{\pi}{3}}(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2))$，其中$k \in Z$为任意整数；　2. 12；

3. 18；　4. 圆环域$e < |w| < e^2$；　5. $\frac{1}{5}$；　6. $-\frac{1}{6}$；　7. $\cos 1$；

8. $\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$；　9. $\frac{2e^{-i\lambda}}{1+\lambda^2}$；　10. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(\lambda-2)} + \pi\delta(\lambda-2) + \frac{1}{i(\lambda+2)} + \pi\delta(\lambda+2)\right]$。

二、因为$v(x,y) = e^{-y}\sin x + 2y$，所以$v_x = e^{-y}\cos x$，$v_y = -e^{-y}\sin x + 2$。

由 Cauchy-Riemann 条件知：$u_y = -v_x = -e^{-y}\cos x$和$u_x = v_y = -e^{-y}\sin x + 2$。

从而，$f'(z) = u_x + iv_x = -e^{-y}\sin x + 2 + ie^{-y}\cos x = ie^{-y}e^{ix} + 2 = ie^{iz} + 2.$

（2 分）所以，$f(z) = e^{iz} + 2z + C$，其中C为任意常数。又因为$f(0) = 2$，所以，$C = 1$。（1 分）故$f(z) = e^{iz} + 2z + 1$

三、$f(z) = \frac{z+4}{z^2+5z-14} = \frac{z+4}{(z-2)(z+7)} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{z-2} + \frac{1}{z+7}\right)$。

(1) $0 < |z-2| < 9$ 因为$\frac{1}{z+7} = \frac{1}{(z-2)+9} = \frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{z-2}{9}} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{9}\right)^n$；

$$所以f(z) = \frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9^{n+1}}(z-2)^n + \frac{2}{z-2}\right];$$

(2) $9<|z+7|<+\infty$ 因为

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+7)-9}=\frac{1}{(z+7)[1-\frac{9}{z+7}]}=\frac{1}{z+7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{z+7}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n}{(z+7)^{n+1}},$$

所以$f(z)=\frac{2}{3}\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{z+7}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n}{(z+7)^{n+1}}+\frac{1}{3}\frac{1}{z+7}$。

四、解：由题设知$w_1=e^{i\theta}\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}$将 z 平面上区域 $\operatorname{Im}(z)>0$映射成w_1平面上的区域$|w_1|<1$，其中$\theta\in\boldsymbol{R}$和Im(λ)>0;（2 分）$w=3w_1+2i$将w_1平面上的区域$|w_1|<1$映射成w平面上的区域$|w-2i|<3$。所以，所求的映射为

$w=3w_1+2i=3e^{i\theta}\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}+2i$ 。 因 为 $w(i)=2i$ ， 所 以 $\lambda=i$， 从 而

$w=3e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}+2i$。进一步有$w'(z)=3e^{i\theta}\frac{2i}{(z+i)^2}$和$w'(i)=-\frac{3}{2}ie^{i\theta}=\frac{3}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$。又因为$\arg w'(i)=\frac{\pi}{2}$，所以$\theta=\pi$。因此，$w=-3\frac{z-i}{z+i}+2i$即为所求。

五、(每小题 5 分，共 15 分)

1) $\oint_{|z|=5}\frac{e^z}{z^2(z+1)}dz=2\pi i\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2(z+1)},0\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2(z+1)},-1\right]\right\}$

$=2\pi i\left[\left(\frac{e^z}{z+1}\right)'|_{z=0}+\frac{e^z}{z^2}|_{z=-1}\right]=2\pi i(0+e^{-1})=2\pi e^{-1}i$。

2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta+1}{4\cos\theta+5}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^2-1}{2iz}+1}{4\frac{z^2+1}{2z}+5}\cdot\frac{dz}{iz}=-\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{z^2-1+2iz}{z(2z+1)(z+2)}dz$

$$=-\pi i\left\{\operatorname{Res}[\frac{z^2-1+2iz}{z(2z+1)(z+2)},0]+\operatorname{Res}[\frac{z^2-1+2iz}{z(2z+1)(z+2)},-\frac{1}{2}]\right\}$$

$=-\pi i\left\{\frac{z^2-1+2iz}{(2z+1)(z+2)}|_{z=0}+\frac{z^2-1+2iz}{2z(z+2)}|_{z=-\frac{1}{2}}\right\}=\frac{2\pi}{3}$。

3) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

$$=\pi i\left\{\text{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)},i\right]+\text{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)},2i\right]\right\}$$

$$=\pi i\{\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)}|_{z=i}+\frac{z^2}{(z+2i)(z^2+1)}|_{z=2i}\}=\frac{\pi}{6}。$$

六、1)解：因为$F[H(x)e^{-5x}]=\frac{1}{5+\lambda i}$，所以

$F[x^2H(x)e^{-5x}]=i^2\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\frac{1}{5+\lambda i}\right]=\frac{2}{(5+\lambda i)^3}$。　　(3 分)

2) 解：因为$L[\sin(4t)]=\frac{4}{s^2+4^2}$，所以$L[t\sin(4t)]=-\frac{d}{ds}\frac{4}{s^2+4^2}=\frac{8s}{(s^2+16)^2}$，

$$L\left[\int_0^t\tau\sin(4\tau)\,d\tau\right]=\frac{1}{s}L[t\sin(4t)]=\frac{8}{(s^2+16)^2},$$

$$L\left[e^{-3t}\int_0^t\tau\sin(4\tau)\,d\tau\right]=\frac{8}{[(s+3)^2+16]^2}。$$

七、解：设$L[y(t)]=Y(s)$，对方程$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=e^{-2t}\cos t$的两边同时取 Laplace 变换，则得

$L[y''(t)]+7L[y'(t)]+12L[y(t)]=L[e^{-2t}\cos t]$；（1 分）即

$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+7[sY(s)-y(0)]+12Y(s)=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$

$$(s^2+7s+12)Y(s)-sy(0)-y'(0)-7y(0)=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}。$$

又因为$y(0)=1,y'(0)=0$，则

$$Y(s)=\frac{s+7}{(s+3)(s+4)}+\frac{1}{(s+3)(s+4)}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

$$=\frac{4}{s+3}-\frac{3}{s+4}+\frac{1}{s+3}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}-\frac{1}{s+4}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}。$$

再取 Laplace 逆变换，得

$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$

$= 4L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] - 3L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right] - L^{-1}[\frac{1}{s+4}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}]$

$= H(t)[4e^{-3t} - 3e^{-4t} + e^{-3t} * (e^{-2t}\cos t) - e^{-4t} * (e^{-2t}\cos t)$

$= H(t)\left[4e^{-3t} - 3e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-3t}(e^t\cos t + e^t\sin t - 1) - \frac{1}{5}e^{-4t}(2e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t - 2)\right]$

$= H(t)\left[\frac{7}{2}e^{-3t} - \frac{13}{5}e^{-4t} + \frac{1}{10}e^{-2t}\cos t - \frac{3}{10}e^{-2t}\sin t\right],$

即为所求的初值问题的解，其中$H(t)$是单位阶跃函数。

八、证明一：因为函数$f(x) = e^{-x^2}$的 Fourier 变换$F(\lambda) = F[f(x)] = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}},$$

所以，$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\lambda x)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin(\lambda x)\,dx = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$。利用奇偶性并取

$\lambda = 2\omega$，即得$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2\omega x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\omega^2}$。

证明二：因为函数$f(z) = e^{-z^2}$在复平面上解析，所以，对$\omega > 0$和充分大的$R > 0$，

在以$(0,0), (R,0), (R, R+\omega i), (0, \omega i)$为顶点的矩形路径上积分$f(z)$，由

Cauchy-Goursat 定理可得

$$\int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^\omega e^{-(R+it)^2}idt - \int_0^R e^{-(t+i\omega)^2}dt - \int_0^\omega e^{-(it)^2}idt = 0。$$

于是，展开有

$$\int_0^R e^{-x^2}dx + e^{-R^2}\int_0^\omega e^{t^2}\sin(2tR)\,dt - e^{\omega^2}\int_0^R e^{-t^2}\cos(2t\omega)\,dt$$

$$+i\left[e^{-R^2}\int_0^{\omega} e^{t^2}\cos(2tR)\,dt + e^{\omega^2}\int_0^{R} e^{-t^2}\sin(2t\omega)\,dt - \int_0^{\omega} e^{t^2}\,dt\right] = 0。$$

取上式的实部，并令$R\to+\infty$，注意到$\lim\limits_{R\to+\infty} e^{-R^2}\int_0^{\omega} e^{t^2}\sin(2tR)\,dt = 0$，可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx - e^{\omega^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2t\omega)\,dt = 0。$$

又因为$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2\omega t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\omega^2}$。