南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：线性代数　学分：2.5　教学大纲编号：11031201

试卷编号：A　考试方式：闭卷　满分分值：100　考试时间：120 分钟

组卷日期：2020 年 06 月 30 日　组卷教师(签字)：命题组　审定人(签字)：__________

所有解答必须写在答题纸上，写在试卷上无效

一． 是非题：（每小题 3 分，共 15 分）

（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. 设 A 为 n 阶矩阵，$B=diag(1,2,\cdots,n)$，且有 $AB=BA$，则 A 为对角矩阵。　(　)

2. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示。　(　)

3. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$ 与单位矩阵是合同的。　(　)

4. 设 σ 是 R^n 上的一个线性变换，则集合 $\ker(\sigma)=\{x\in R^n \mid \sigma(x)=0\}$ 是 R^n 的一个子空间。　(　)

5. 非零向量 ξ 是方阵 A 的特征向量，则 $-\xi$ 必为 $-A$ 的特征向量。　(　)

二．填空题：（每小题 4 分，共 20 分）

1. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&t&3\\1&2&9\end{pmatrix}$ 的等价标准形为 $\begin{pmatrix}I_2&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $t=$_______。

2. 设 R^3 中的线性变换 σ 为 $\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\x_1\end{pmatrix}$，则 σ 在基底 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵为___________。

3. 三阶方阵 A 与 B 相似，且 $|A|=-\dfrac{1}{2}$，则行列式 $|2A^{-1}B|=$________。

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&2\\3&2&x\\2&0&6\end{pmatrix}$ 可对角化，则 $x=$________。

5. A 是正定矩阵，则下列结论错误的是________。

(A) $|A|>0$　(B) A 为非奇异矩阵　(C) A 的元素全是正实数　(D) A 的特征值均大于零

三．（8 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a+1&a&a&\cdots&a\\a&a+2&a&\cdots&a\\a&a&a+3&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&a+n\end{vmatrix}$。

四．（12 分）设矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，矩阵 A 满足关系 $A(I-C^{-1}B)^TC^T=I$，求矩阵 A。

五．（12 分）已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\-4\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\0\\7\\-5\\-4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\\a\end{pmatrix}$，根据 a 的取值情况，求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数和一组基。

六．（12 分）已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\2x_2+4x_3-2x_4=2\\3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3\\2x_1-2x_2-4x_3+13x_4=b\end{cases}$，试问 a，b 取何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

七．（14 分）求一正交变换，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$ 化为标准形（要写出所用的正交变换和此标准形）。

八．（7 分）设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 为矩阵 A 的互异特征值，对应的特征向量分别为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 必线性无关。