

### 目 录

11.1 非正弦周期信号

11.2 非正弦周期函数分解为傅里叶级数

11.3 非正弦周期电流电路的有效值和平均功率

## 11.1 非正弦周期信号

任何一个满足狄利赫利条件的非正弦周期信号 $f(t)$ , 均可以分解成傅里叶级数。

狄里赫利(Dirichlet)条件:

1. 在一个周期内只含有有限个不连续的点
2. 在一个周期内只含有有限个极值点
3. 在一个周期内函数绝对值的积分为有限值:

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{km} \cos(k\omega t + \psi_k)$$

## 11.1 非正弦周期信号

设一个非正弦周期信号(函数)都可以分解为:  
一个恒定分量与一系列不同角频率的正弦量之和

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{km} \cos(k\omega t + \psi_k)$$

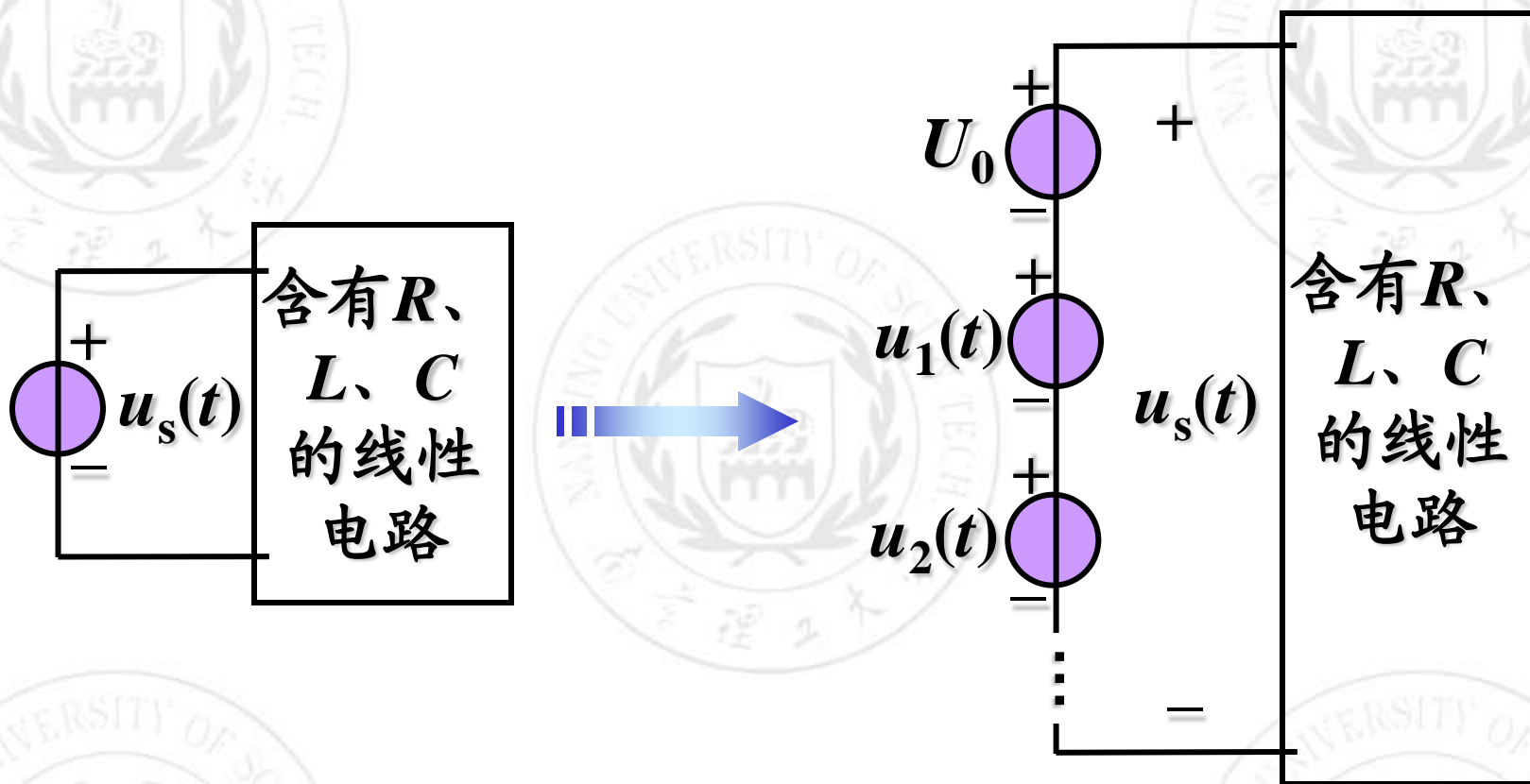
$F_0$  — 恒定分量:  $f(t)$  在一周内的平均值

$F_{1m} \cos(\omega t + \psi_1)$ : 基波, 一次谐波:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  为基波角频率

$F_{km} \cos(k\omega t + \psi_k)$ : 高次谐波 ( $k = 2, 3, \dots$ ):  $k\omega$  为  $k$  次谐波角频率

展开式可用公式计算或查表

## 11.1 非正弦周期信号



$$u_s(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \psi_k) = U_0 + u_1(t) + u_2(t) + \dots$$

### ■ 分析方法：谐波分析法

- 1. 根据线性电路的**叠加原理**，非正弦周期信号作用下的线性电路稳态响应可以视为一个**恒定分量**和**无穷多个正弦分量**单独作用下各稳态响应分量之叠加。因此，非正弦周期信号作用下的线性电路稳态响应分析可以转化成直流电路和正弦电路的稳态分析
- 2. 应用电阻电路计算方法计算出**恒定分量**作用于线性电路时的稳态响应分量

利用直流稳态方法： **$C$  — 断路， $L$  — 短路**

### ■ 谐波分析法

3. 应用相量法计算出不同频率正弦分量作用于线性电路时的稳态响应分量

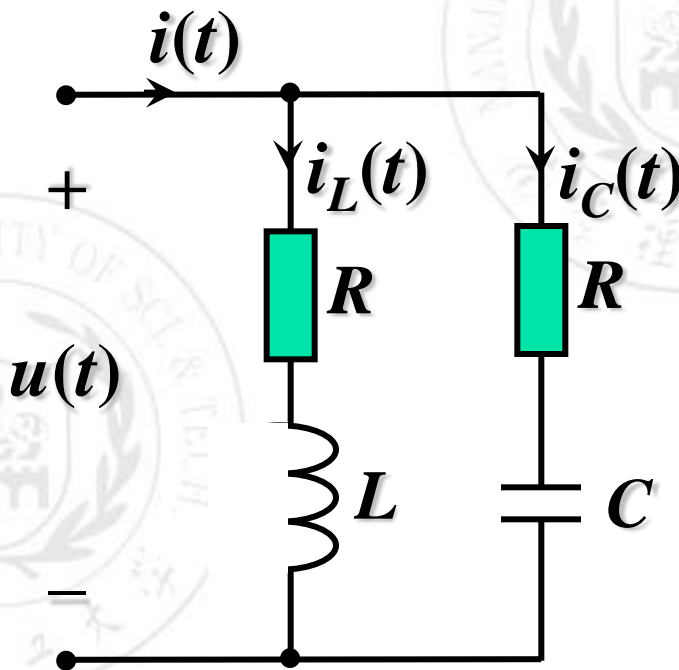
各次谐波单独作用时，利用相量法： $X_{Lk} = k\omega L$ ， $X_{Ck} = -\frac{1}{k\omega C}$

4. 对各分量在时间域(瞬时值形式)进行叠加，即可得到线性电路在非正弦周期信号作用下的稳态响应



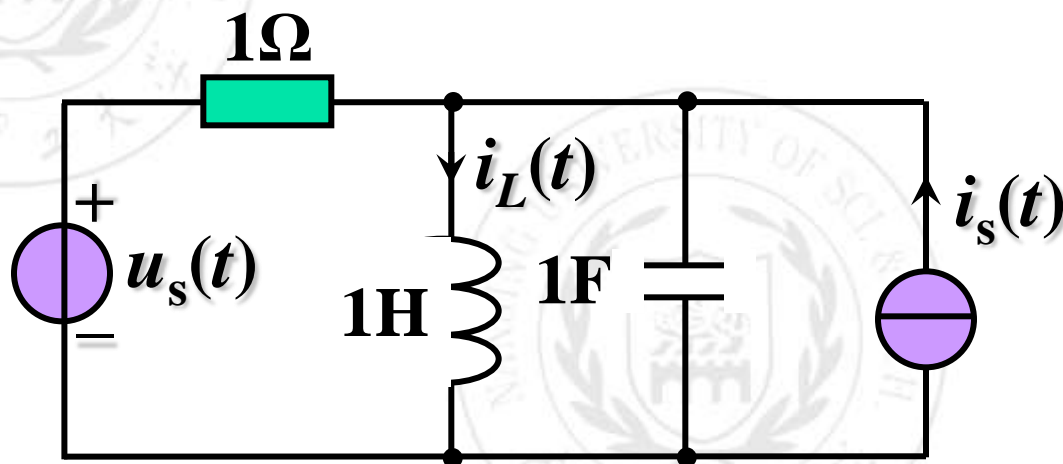
## 11.2 非正弦周期函数分解为傅里叶级数

**例:** 已知  $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 2\Omega$ ,  $u(t) = (10 + 100 \cos \omega t + 40 \cos 3\omega t) \text{V}$ ,  
求:  $i(t), i_L(t), i_C(t)$



## 11.2 非正弦周期函数分解为傅里叶级数

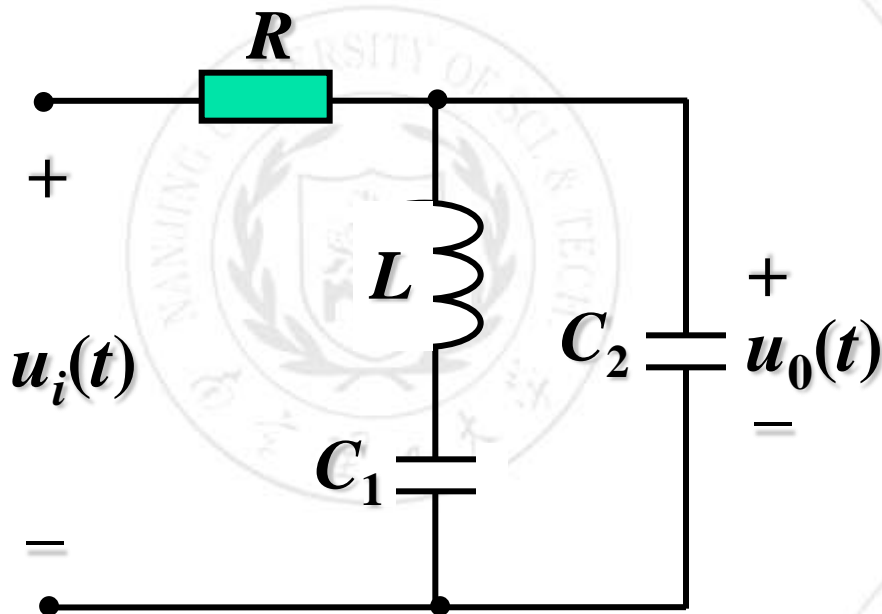
例：已知  $u_s(t) = (2 + 10 \cos 5t) \text{ V}$ ,  $i_s(t) = 4 \cos 4t \text{ A}$ , 求:  $i_L(t)$





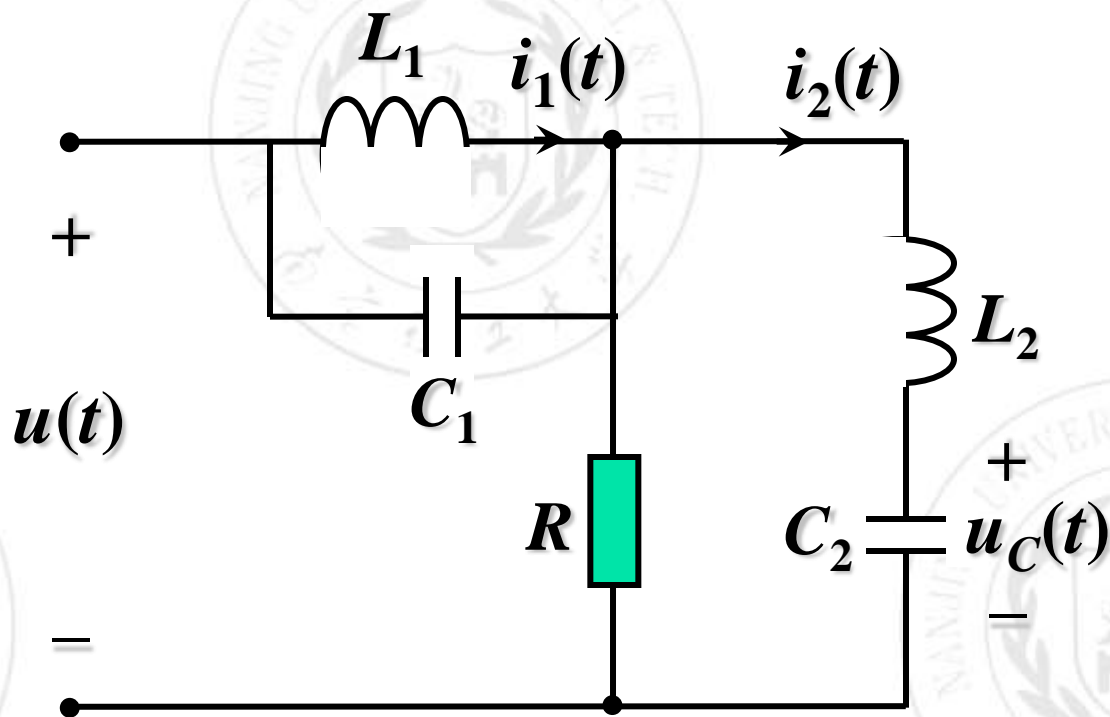
## 11.2 非正弦周期函数分解为傅里叶级数

**例：**已知  $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$  ,  $L = 1 \text{ mH}$  ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$  , 若  $u_0(t)$  中不含基波, 与  $u_i(t)$  中的三次谐波完全相同, 试确定  $C_1$  和  $C_2$



## 例题1

例：已知  $u(t) = (60 + 60\sqrt{2} \cos \omega t + 60\sqrt{2} \cos 2\omega t) \text{ V}$ ,  $R = 60 \Omega$ ,  
 $\omega L_1 = \omega L_2 = 100 \Omega$ ,  $\frac{1}{\omega C_1} = 400 \Omega$ ,  $\frac{1}{\omega C_2} = 100 \Omega$ ,  
求： $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $u_C(t)$



## ■ 非正弦周期量幅值、平均值、有效值

✚ 幅值：峰值

✚ 平均值： $F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$

✚ 周期量有效值的定义： $F \triangleq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$

### ■ 非正弦周期量有效值

■ 非正弦周期量:  $f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{km} \cos(k\omega t + \psi_k)$

■ 将 $f(t)$ 代入有效值定义式, 并利用三角函数的正交性:

i,  $\frac{1}{T} \int_0^T F_0^2 dt = F_0^2$

$F \triangleq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$

ii,  $\frac{1}{T} \int_0^T 2F_0 F_{km} \cos(k\omega t + \psi_k) dt = 0$

iii,  $\frac{1}{T} \int_0^T F_{km}^2 \cos^2(k\omega t + \psi_k) dt = \frac{F_{km}^2}{2} \triangleq F_k^2$

$F_{km} = \sqrt{2} F_k$

iv,  $\frac{1}{T} \int_0^T 2F_{km} \cos(k\omega t + \psi_k) F_{qm} \cos(q\omega t + \psi_q) dt = 0 \quad (k \neq q)$

### 11.3 非正弦周期电流电路的有效值、平均值和平均功率

则有:  $F = \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_k^2 + \cdots} = \sqrt{F_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k^2}$

非正弦周期电流的有效值:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \cdots} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{K=1}^{\infty} I_k^2}$$

非正弦周期电压的有效值:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \cdots} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{K=1}^{\infty} U_k^2}$$

以上两式表明, 非正弦周期电流或电压的有效值为其直流分量和各次谐波分量有效值的平方和的平方根

**注意:** 使用公式时一定要准确



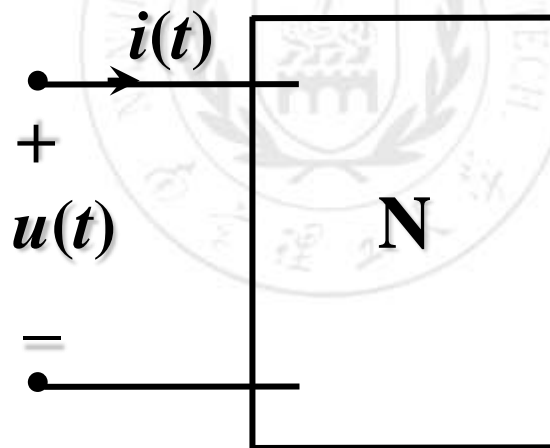
例:  $i(t) = (2 + 6\sqrt{2} \cos \omega t + 4\sqrt{2} \cos 3\omega t) \text{ A}$

求其有效值



### ■ 非正弦周期电流电路的平均功率

■ 如图所示一端口N的端口电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 的关联参考方向下，一端口电路吸收的瞬时功率和平均功率为：



$$p(t) = u(t) \times i(t), P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

### ■ 非正弦周期电流电路的平均功率

✚ 一端口电路的端口电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 均为非正弦周期量，其傅里叶级数形式分别为：

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \psi_{uk})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \psi_{ik})$$

✚ 在图示关联参考方向下，一端口电路吸收的平均功率：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \times i(t) dt$$

### ■ 非正弦周期电流电路的平均功率

✚ 将上式进行积分，并利用三角函数的正交性：

$$i, \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0 \triangleq P_0$$

$$ii, \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_{km} \cos(k\omega t + \psi_{ik}) dt = 0$$

$$iii, \quad \frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_{km} \cos(k\omega t + \psi_{uk}) dt = 0$$

$$\begin{aligned} iv, \quad & \frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \cos(k\omega t + \psi_{uk}) \times I_{km} \cos(k\omega t + \psi_{ik}) dt \\ &= \frac{U_{km} I_{km}}{2} \cos(\psi_{uk} - \psi_{ik}) = U_k I_k \cos \varphi_{zk} \triangleq P_k \end{aligned}$$

### ■ 非正弦周期电流电路的平均功率

$$v, \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \cos(k\omega t + \psi_{uk}) \times I_{qm} \cos(q\omega t + \psi_{iq}) dt = 0 \quad (k \neq q)$$

故:

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_{zk}$$

✚ 上式表明: 不同频率的电压与电流只构成瞬时功率, 不能构成平均功率, 只有同频率的电压与电流才能构成平均功率

✚ 电路的平均功率等于直流分量和各次谐波分量各自产生的平均功率之和, 即**平均功率守恒**

### ■ 非正弦周期电流电路的平均功率

■ 若某电阻中流过的非正弦周期电流的有效值为 $I$ ，显然，该电阻吸收的平均功率为：

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = RI_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} RI_k^2 = RI^2$$

### 11.3 非正弦周期电流电路的有效值、平均值和平均功率

**例：**已知一端口电路的端口电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 均为非正弦周期量，其表达式分别为：

$$u(t) = 10 + 100 \cos \omega t + 40 \cos(2\omega t + 30^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 2 + 4 \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ A}$$

求一端口电路吸收的平均功率 $P = ?$

