2018 级高数上期中 B 卷

一．填空选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率半径 $R=$__________。

2. 设函数 $y=f(x)$ 的极坐标方程为 $\rho=a(1+\cos\theta)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________。

3. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{x}-e^{2y}=2x\cos(x+y)$ 所确定，则 $y'|_{x=0}=$__________。

4. 设 u，v 均为 x 的可微函数，$v\neq 0$，$y(x)=\arctan\dfrac{u}{v}$，则 $dy=$__________。

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{1-\cos 2x}=1$，其中 $f(0)=0$，则 $f'(0)=$__________。

6. 当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^{2}-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限（　　）。

   A．等于 2；　B.等于 0 ；　C. 为∞；　D. 不存在但不是无穷大

7. 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^{2}}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　　）。

   A．无穷小；　B.无穷大；

   C. 有界的但不是无穷小；　D. 无界的但不是无穷大

8. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近具有 5 阶连续导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=f^{(4)}(x_0)=0$，$f^{(5)}(x_0)>0$，则（　　）。

   A. $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极大值;　B. $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极小值;

   C. $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 有拐点;　D. $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 无极大值也无拐点

二.（每小题 3 分，共 18 分）求极限：

1. (6 分) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$；

2. (6 分) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x\sin x}-2x^{2}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$；

3. (6 分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|\sin ax|}{\ln|\sin bx|}$。

三. (8 分) 设 $x_1=4$， $x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}$， $(n=1,2,\cdots)$。证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

四. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n})$。

五.（8 分）设 $y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$。

六.（8 分）求 $f(x)=\cos^2 x$ 的 $2n$+1 阶的带皮亚诺余项的麦克劳林展开式。

七.（8 分）设当 $x\to x_0$， $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是无穷小，且 $\alpha(x)\neq 0$， $\beta(x)\neq 0$。证明：$[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}-1$ 是 $\alpha(x)\beta(x)$ 的等价无穷小。

八.（9 分）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(0)=0$， $f'(x)$ 单调递增。证明：在 $(0,a]$ 上， $af(x)<xf(a)$。

九.（9 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$。证明：在 $(0,1)$ 内至少有一点 c，使 $cf'(c)+nf(c)=0$（n 为正整数）。