

高等数学试题 A 卷

注意：所有解答写在答卷纸上，写在试卷上无效

一. 填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1.  $y = f(\lg x)$  的定义域为  $[\frac{1}{2}, 2]$ , 则  $y = f(x)$  的定义域为 ( )。
2. 当  $x \rightarrow 0$  时  $(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $\cos x - 1$  是等价无穷小量, 则  $a =$  ( )。
3. 设  $f'(3) = 2$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} =$  ( )。
4.  $d \int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt =$  ( )。
5. 函数  $f(x) = \ln x^2 - x$  单调增加区间是 ( )。
6. 曲线  $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$  ( $x > 0$ ) 的斜渐近线为 ( )。
7.  $\frac{\sin x}{x}$  是  $f(x)$  的一个原函数,  $a \neq 0$ 。则  $\int \frac{f(ax)}{a} dx =$  ( )。
8. 设  $f(x)$  具有连续的二阶导数,  $f(0) = 1, f(2) = 3, f'(2) = 5$ , 则  $\int_0^1 x f''(2x) dx =$  ( )。

9.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx = (\quad \quad \quad)。$

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots 2n} = (\quad \quad \quad)。$

二. 计算题 (每题 6 分, 共 36 分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

2 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^t - e^{-t}) dt}{1 - \cos x^2}$

3. 设  $f(x)$  可微, 且  $f(x) > 0$ ,  $y = f\left(\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right)$ , 试求  $dy$ 。

4. 设函数  $y = y(x)$  由下述参数方程确定  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

5. 求积分  $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$

6 求积分  $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1+\cos 2x} dx$

三. 解答题 (10 分)

试讨论方程  $xe^{-x} = a$  ( $a > 0$ ) 的实根。

四. 应用题 (15 分)

1. (8 分) 已知  $f(x)$  是周期为 5 的连续函数, 它在  $x=0$  的某邻域内满足关系式  $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$ , 其中  $\alpha(x)$  是当  $x \rightarrow 0$  时比  $x$  高阶的无穷小, 且  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(6, f(6))$  处的切线方程。

2. (7 分) 设曲线  $y = -x^2 + x + 2$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 过  $P$  点作该曲线的切线, 求切线与该曲线及  $x$  轴围城的区域绕  $x$  轴旋转一周所成的旋转体体积。

五. 证明题 (9 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不恒为零, 且其导数  $f'(x)$  连续, 并且有  $f(a) = f(b) = 0$ , 试证明存在

$$\xi \in [a, b], \text{ 使 } |f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx.$$