2020 年秋高等数学 I 期中 A 卷参考答案

一、填空选择题（每小题 3 分，共 27 分）

1、$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$；　　2、$(\frac{\sqrt[4]{2}}{2},\frac{1}{4})$；　　3、$\frac{-1}{2\sqrt{e^2-1}}dx$；

4、-1；　　5、$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$；　　6、$-\frac{11!}{9\cdot 2^9}$；

7、$y=2x-\frac{1}{2}$；　　8、$\frac{3}{2}$；　　9、$3\cos 1$；

二、(每小题 7 分，共 14 分)

解：(1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{2n}}}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2}$$

$$\because 1\le\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\le e,\quad \therefore\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{2n}}=1,\ \therefore\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}\right)^n=e^{-2}。$$

或者 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{\sqrt{n^2+1}-n-2}{n+2}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\frac{\sqrt{n^2+1}-n-2}{n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-4n^2-3}{(n+2)\left(\sqrt{n^2+1}+n+2\right)}}\overset{n=x}{=}\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-4x^2-3}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+1}+x+2\right)}}=e^{-2}$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{x^x}{(1+x)^x}-\frac{1}{e}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}-\frac{1}{e}\right)$$

$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=}e^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{e^{-\frac{\ln(t+1)}{t}+1}-1}{t}=e^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{-\ln(t+1)+t}{t^2}=\frac{1}{2e}。$$

三、(每小题 7 分，共 14 分)

（1）解：$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-1}{1+t^2}$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}-1)=\dfrac{-1}{\sqrt{1+t^2}}$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\sqrt{1+t^2}\ ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{-1}{1+t^2}}=-t\sqrt{1+t^2}\ 。$$

（2）解：方程两边对 x 求导，则

$y+xy'-\sin 2x+y'\sec^2 y=0$，即 $y'|_{(0,\frac{\pi}{4})}=-\dfrac{\pi}{8}$。

再对 x 求导，则 $2y'+xy''-2\cos 2x+2y'^2\sec^2 y\tan y+y''\sec^2 y=0$。

将 $\boldsymbol{y'}$ 代入，整理得到 $y''|_{(0,\frac{\pi}{4})}=1+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\pi^2}{32}$。

四、（14 分） 解：(1) $y'=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$。

$y''=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$,由 $y''=0$ 的 $x=0,\pm\sqrt{3}$ 。

当 $y''<0$ 时得到下凸区间为 $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right),\left(0,\sqrt{3}\right)$。

当 $y''>0$ 时得到下凹区间为 $\left(-\sqrt{3},0\right),\left(\sqrt{3},+\infty\right)$。

由拐点的定义以及上述凸凹区间可得到拐点分别为

$\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right),\left(0,0\right),\left(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$。

(2) 令 $f(x)=x-\ln^2 x+2a\ln x-1\ (x\geq 1)$， 则 $f'(x)=\dfrac{x-2\ln x+2a}{x}\quad (x>1)$。

再令 $g(x)=x-2\ln x+2a\quad (x>1)$,则 $g'(x)=1-\dfrac{2}{x}$。

当 $1<x<2$ 时 $g'(x)=1-\dfrac{2}{x}<0\Rightarrow g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调减少，所以 $g(x)\geq g(2)$。

当 $x>2$ 时 $g'(x)=1-\dfrac{2}{x}>0\Rightarrow g(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调增加，所以 $g(x)\geq g(2)$。

综上可知 $x>1$ 时，$g(x)\geq g(2)=2-2\ln 2+2a\geq 2-2\ln 2+2\left(\ln 2-1\right)\geq 0$。

五、（8 分）数列满足的递推关系为：$x_{n+1}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}$。

由$x_1>0$,假设$n=k$时，$x_k>0$，则当$n=k+1$时，$x_{k+1}=\ln\dfrac{e^{x_k}-1}{x_k}$。

因为$x_k>0$时，$e^{x_k}-1>x_k$，所以$x_{k+1}>0$. 由数学归纳法知$x_n>0(n\geq 1)$。

因而，原数列有下界。

$$e^{x_{n+1}}-e^{x_n}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-e^{x_n}=\frac{e^{x_n}-1-x_ne^{x_n}}{x_n}。$$

令$f(x)=e^x-1-xe^x\ (x>0)$,则$f'(x)=-xe^x<0\ (x>0)$。

由$f(x)$单调递减可知，$f(x)<f(0)=0\ (x>0)$。

所以$e^{x_{n+1}}-e^{x_n}<0$,即$x_{n+1}<x_n$. 由单调有界准则知，数列收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$ae^a=e^a-1\Rightarrow a=0$.

六、（8分）当$x>0$时，$f'(x)=(e^{2x\ln x})'=x^{2x}(2\ln x+2)$。

当$x<0$时，$f'(x)=(xe^x+1)'=e^x(x+1)$。

当$x=0$时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\ln x}{x}=\infty$ 。

$\therefore f'(0)$不存在。

所以，$f'(x)=\begin{cases}x^{2x}(2\ln x+2), & x>0,\\ e^x(x+1), & x<0。\end{cases}$

由$f'(x)=0$得到驻点为$x=\dfrac{1}{e},x=-1$,以及不可导点$x=0$。

当$x<-1$时，$f'(x)<0$,且$x>-1$时$f'(x)>0$,故$x=-1$为极小值点,且$f(-1)=1-e^{-1}$。

当$-1<x<0$时，$f'(x)>0$, 且$0<x<\dfrac{1}{e}$时$f'(x)<0$, 故$x=0$ 为极大值点，且$f(0)=1$ 。

当$0<x<\dfrac{1}{e}$时，$f'(x)<0$,且$x>\dfrac{1}{e}$时$f'(x)>0$,故$x=\dfrac{1}{e}$为极小值点，且$f(\dfrac{1}{e})=e^{\frac{2}{e}}$。

七（8 分）解：设所求曲线上的点为$(X,\sqrt{1-4X^2})$，则在该点切线斜率为$K=\dfrac{-4X}{\sqrt{1-4X^2}}$；

从而，切线方程为$y-\sqrt{1-4X^2}=\dfrac{-4X}{\sqrt{1-4X^2}}(x-X)$。

于是，它在坐标轴上的截距分别为$\dfrac{1}{4X}$和$\dfrac{1}{\sqrt{1-4X^2}}$。

所以，面积为$S(X)=\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{X\sqrt{1-4X^2}}$。面积最小转化为$F(X)=X\sqrt{1-4X^2}$的最大值，

则$F'(X)=\sqrt{1-4X^2}+X\dfrac{-4X}{\sqrt{1-4X^2}}=0$，得到符合条件的唯一驻点$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。

所以，所求曲线上的切点为$(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$。

八、（7 分）证明：(1)当$M=0$时，恒成立。

当$M\neq 0$时，由题意可假设最值点为x_0,即$M=|f(x_0)|(0<x_0<2)$。

在$[0,x_0]$上由拉格朗日中值定理得,$|f'(\xi_1)|=\left|\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}\right|=\dfrac{M}{x_0}(0<\xi_1<x_0)$。

在$[x_0,2]$上由拉格朗日中值定理得,$|f'(\xi_2)|=\left|\dfrac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}\right|=\dfrac{M}{2-x_0}(x_0<\xi_2<2)$。

当$0<x_0\leq 1$时取$\xi=\xi_1$；　当$1<x_0<2$时取$\xi=\xi_2$。

(2)当$x_0\neq 1$时，假设M>0，由（1）的证明可知与$|f'(x)|\leq$ M$(0<x<2)$矛盾。

当$x_0=1$时，$|f(1)|=M\Rightarrow f'(1)=0$。

设$g(x)=f(x)-Mx\,(0<x<1)\Rightarrow g'(x)=f'(x)-M<0\Rightarrow g(x)$单调减少。

又$g(0)=g(1)=0$,所以$g(x)\equiv 0$。故$f(x)=Mx\Rightarrow f'_-(1)=M\Rightarrow M=0$。