南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：线性代数　学分：2.5　教学大纲编号：11031201

试卷编号：A　考试方式：闭卷　满分分值：80　考试时间：120 分钟

组卷日期：2020 年 12 月 9 日　组卷教师(签字)：命题组　审定人(签字)：__________

所有解答必须写在答题纸上，写在试卷上无效

一．是非题:（每小题 3 分，共 15 分）

（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. 设 A 为可逆矩阵，互换 A 中第 i 行与第 j 行的元素得到矩阵 B，则 $B=AI(i,j)$。（ ）

2. 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 。（ ）

3. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A^3=0$。（ ）

4. 若二阶矩阵 A 的行列式 $|A|<0$，则 A 可对角化。（ ）

5. 若 n 阶矩阵 A 与 B 合同，则 A，B 均为对称矩阵。（ ）

二．填空题:（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设方阵 A 满足 $A^2+A+2I=0$，则 $A^{-1}=$__________。

2. 设 A 是 3 阶矩阵，且 $|A|=-\frac{1}{2}$，则行列式 $\left|(3A)^{-1}+2A^*\right|=$________。

3. 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-5\\-4\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组为_________。

4. 设 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$，则下列向量中是 A 的特征向量的是(　　)。

(A) $(1,1,1)^T$　　(B) $(1,0,1)^T$　　(C) $(1,1,0)^T$　　(D) $(0,1,1)^T$

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2$ 的规范形为___________。

三．（ 6 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&0&3&\cdots&n\\-1&-2&0&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0\end{vmatrix}$。

四．（ 8 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=2A^{-1}+2X$，求矩阵 X 。

五．（8 分）设 R^3 中线性变换 σ 为 $\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\x_1\end{pmatrix}$，求线性变换 σ 在基底 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵。

六．（10 分）已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+(p-5)x_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t\end{cases}$，试问 p,t 取何值时，方程组有解、无解？并对 $r_A<3$ 时，求其通解。

七．（12 分）设矩阵 A 为 3 阶实对称矩阵，且满足 $A^2=-6A$，$trA=-12$，向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解向量，试求 1、A 的全部特征值；2、正交变换 $X=TY$，化二次型 $f(X)=X^TAX$ 为标准形（要写出所用的正交变换和此标准形）； 3、矩阵 A。

八．（6 分）设齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的秩为 $n-1$，证明：在行列式 $|A|$ 中至少有一行元素，由它们的代数余子式组成的向量 $\xi\in R^n$ 是此方程组解空间的基底。