2020-2021 学年春高等数学（II）期中试卷 B 卷答案

一．填空题

1. 2；**2.** $2x^2+3y^2+2xy=8$；**3.** -1；**4.** $-dx$；**5.** $\arccos\frac{8}{\sqrt{89}}$

6. 4；**7.** $-\frac{1}{e}$；**8.** 2；**9.** $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；**10.** 4π

二．解：（1）方法一. 由于 $\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^4}\right|\le 1$，即为有界量，而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，即为无穷小量，所

以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy^2\sin x}{x^2+y^4}$=0.

方法二. 由于 $0\le\left|\frac{2xy^2\sin x}{x^2+y^4}\right|\le|\sin x|$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，由夹逼原理，可得

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy^2\sin x}{x^2+y^4}$=0.

（2）因 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{a}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

三．解：设平面方程为 $Ax+By+D=0$，垂足 **Q** 的坐标为 (x,y,z)。

则直线 l 的方向向量为 $(1,0,0)\times(0,1,-1)=(0,1,1)$，

$\overrightarrow{PQ}=(x-1,y+1,z-1)$,由于 $\overrightarrow{PQ}\perp l$，所以 $y+z=0$。

Q 又在直线 l 上，得垂足 $Q(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

P，Q 在平面上，得平面方程为 $x+2y+1=0$

四．解：方程两边同时求微分，移项可得：

$$\begin{cases} xdu - ydv = -udx + vdy \\ ydu + xdv = -udy - vdx \end{cases}$$

解上述方程组可得 $\begin{cases} du = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}dx - \dfrac{yu - xv}{x^2 + y^2}dy \\ dv = -\dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2}dx - \dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}dy \end{cases}$

五．（1）解：设第一象限部分立体在 xoy 面投影为 $D:(x-1)^2 + y^2 \le 1, x \ge 0$

由对称性得，

$$V = 4\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy \quad = 4\iint_D \sqrt{4 - \rho^2}\rho d\rho d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{4 - \rho^2}\rho d\rho \quad = \frac{32}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$$

（2）解：由对称性所求曲面的面积可以看成球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 落在

$D: x^2 + y^2 \le 2x, y \ge 0$ 那部分面积的 4 倍，

$$A = 4\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy \quad = 4\iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} = 8\pi - 16$$

六．解：（1）$I = \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 4\int_2^8 z^2 dz = 336\pi$

（2）$\iiint_\Omega \sin(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dV = \iiint_\Omega r^2 \sin r^3 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_a^b r^2 \sin r^3 dr$$

$$= -\frac{4\pi}{3}(\cos b^3 - \cos a^3)$$

七．解：因 $\begin{cases} f_x' = 2x - 2xy^2 = 0 \\ f_y' = 4y - 2x^2 y = 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$，$\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = -1 \end{cases}$，$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

所以 $f(x,y)$ 在区域 D 内的驻点为 $(\sqrt{2},1),(-\sqrt{2},1)$ 和 $(0,0)$。

下面求 $f(x,y)$ 在边界线上的极值，作拉格朗日函数如下：

$$L(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

则$\begin{cases} L_x' = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ L_y' = 4y - 2x^2 y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda' = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$，解之得：$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$，$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}$，$\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}$

于是条件驻点为$(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}), (\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}), (0,2), (\pm 2, 0)$

而 $f(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{7}{4}, f(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{7}{4}, f(0,0) = 0, f(0,2) = 8, f(\pm 2, 0) = 4$

比较以上函数值，可得函数在区域D上的最大值为 8，最小值为 0.

八．解：方法一 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du}{1-e^{-x^3}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^x du \int_0^{u^2} f(t,u)dt}{x^3} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} f(t,x)dt}{3x^2}$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 f(c,x)}{3x^2} (0 \le c \le x^2) = -\frac{1}{3} f(0,0) = \frac{1}{3}$$

方法二 $\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du = -\iint\limits_D f(t,u)dtdu = -f(\xi,\eta)S$，其中$(\xi,\eta) \in D$，$S$

为D的面积。而，$S = \int_0^{x^2} dt \int_{\sqrt{t}}^x du = \frac{1}{3} x^2$，

故 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du}{1-e^{-x^3}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(\xi,\eta)\cdot \frac{1}{3}x^3}{x^3} = -\dfrac{1}{3} f(0,0) = \dfrac{1}{3}$