南京理工大学课程考试答案及评分标准

(18−19(春学期)线性代数(A)(2.5)考试试题答案)(19.5.8)

一. 是非题（每题 3 分，共 15 分）： 1. √ 2. × 3. × 4. √ 5. ×

二. 填空题（每题 4 分，共 20 分）：1. $\underline{-66}$ 2. $\begin{cases}2n & a\neq \pm b\\ n & a=\pm b\end{cases}$ 3. $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-1&2&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$

三.（共 12 分）解：由$|A|=1$，知$AA^*=|A|I=I$。于是由条件知$2AA^*X=AA^{-1}B+AX\Rightarrow(2I-A)X=B$ --------（6 分）因$|2I-A|=-1$，所以$2I-A$可逆，于是

$$X=(2I-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}-4&-3&1\\-5&-3&1\\6&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-1&-1\\-1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&5&-5\\-9&5&-7\\11&-6&8\end{pmatrix}$$ --------（6 分）

四.（共 10 分）解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-5&2&1\\3&1&-1&-2\\2&6&-3&-3\\-1&-11&5&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-5&2&1\\0&16&-7&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ --------（6 分）所以 $r_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}}=2$，$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}}=2$，因$\begin{vmatrix}1&-5\\0&16\end{vmatrix}\neq 0$，所以$\alpha_1,\alpha_2$为一组基。--------（4 分）

五.（共 12 分）解：$(A\,|\,B)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&-3&0\\0&1&2&a&b\\5&4&3&-1&a-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-6&-3\\0&0&0&a-6&b-3\\0&0&0&0&a-6\end{pmatrix}$ --------（4 分）所以$r_A=\begin{cases}2 & a=6\\3 & a\neq 6\end{cases}$，

$r_{(A|B)}=\begin{cases}2 & a=6,b=3\\3 & a=6,b\neq 3\\4 & a\neq 6\end{cases}$，因此当$a=6$，$b=3$时，$r_{(A|B)}=r_A=2<4$，线性方程组有无穷多解，--------（3 分）此时

原方程组的同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\-x_2-2x_3-6x_4=-3\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_1=-2+x_3+5x_4\\x_2=3-2x_3-6x_4\end{cases}$，取$x_3=x_4=0$，得特解$X^*=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$，

--------（2 分）其导出组的解为$\begin{cases}x_1=x_3+5x_4\\x_2=-2x_3-6x_4\end{cases}$,取$x_3=1,x_4=0$;$x_3=0,x_4=1$得导出组的基础解系

$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\1\end{pmatrix}$，--------（2 分）故当$a=6$，$b=3$时，方程组的通解为$X=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$为任意常数。--------（1 分）

六.（共 14 分）解：(1) 由$(A-4I)\alpha=0\Rightarrow A\alpha=4\alpha$，知 4 为$A$的特征值，$\alpha$为对应的特征向量，设$A$的另两个特征值为$\lambda_1,\lambda_2$，则有$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+4=6\\4\lambda_1\lambda_2=4\end{cases}$，可得$\lambda_1=\lambda_2=1$。设$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量为$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则

$(\alpha,x)=-x_1-x_2+x_3=0\Rightarrow x_1=-x_2+x_3$，取 $x_2=1,x_3=0; x_2=0,x_3=1$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，即为1对应的线性无关的特征向量。-------（5 分）

正交化：$\beta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$-------（2 分）

单位化：$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\eta_3=\dfrac{\alpha}{|\alpha|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ -------（1 分）

令 $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，作正交变换 $X=TY$，得 $f(X)$ 的标准形 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$。-------（1 分）

(2) 因 $T^TAT=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$，所以 $A=T\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}T^T=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$-------（5 分）

七.（共 10 分）解：1、因 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&-4\\k&\lambda-1&-k\\-1&-3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-6)$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=6$。

-------（3 分）因 A 可对角化，所以 $3-r_{(\lambda_1 I-A)}=2\Rightarrow r_{(\lambda_1 I-A)}=1$，而 $(\lambda_1 I-A)=\begin{pmatrix}-1&-3&-4\\k&0&-k\\-1&-3&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-3&-4\\k&0&-k\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $k=0$。-------（2 分）

2、当 $k=0$ 时，对 $\lambda_1=\lambda_2=1$，特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$，对 $\lambda_3=6$，特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，-------（3 分）

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-3&-4&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&6\end{pmatrix}$。-------（2 分）

八.（共 7 分）证明：对任意的实数 t，有 $(tI+A)^T=tI+A$，即 $tI+A$ 为实对称矩阵，又 A 的特征值均为实数，设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则取 $t>\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$，就可使 $tI+A$ 正定。-------（4 分）

事实上，$tI+A$ 的特征值为 $t+\lambda_1,t+\lambda_2,\cdots,t+\lambda_n$，且 $t+\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，故 $tI+A$ 正定。-------（3 分）

注：此题为提高题，考查正定矩阵性质的灵活运用。