南京理工大学课程考试答案及评分标准

(22-23(秋学期)线性代数(A)(2.5)考试试题答案)(22.12.4)

一.是非题（每题3分，共15分）： 1. × 2. × 3. × 4. × 5. √

二. 填空题（每题3分，共15分）：1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ 2. 64 3. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ 4. 1 5. 1

三.（共6分）解：$D = a\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$--------(3分)

$= a(a\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a \end{vmatrix}) + a^2 + 1 = a^4 + 3a^2 + 1$--------(3分)

四.（共8分）解：由$2AX = X + B^2$，知$2AX - X = B^2 \Rightarrow (2A - I)X = B^2$，--------（4分）从而

$X = (2A - I)^{-1}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix}$--------（4分）

五.（共10分）解：$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$--------（7分）所以

$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$，$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$为一组基。--------（3分）

六.（共10分）解：$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & a+6 \\ 3 & 4 & 3 & a-6 & b+8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & a-11 & b-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-11 \end{pmatrix}$--------（3分）

所以$r_A = \begin{cases} 2 & a = 11 \\ 3 & a \neq 11 \end{cases}$，$r_{(A|b)} = \begin{cases} 2 & a = 11, b = 5 \\ 3 & a = 11, b \neq 5 \\ 4 & a \neq 11 \end{cases}$，因此当$a = 11$, $b = 5$时，$r_{(A|b)} = r_A = 2 < 4$，线性方程组有无穷多解，--------（3分）此时，原方程组的同解方程组为$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_4 = -5 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x_1 = 11 - x_3 + x_4 \\ x_2 = -5 - 2x_4 \end{cases}$，取$x_3 = x_4 = 0$，

得特解$X^* = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，--------（1分）其导出组的解为$\begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4 \\ x_2 = -2x_4 \end{cases}$，取$x_3 = 1, x_4 = 0$；$x_3 = 0, x_4 = 1$得导出组的基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，---- ----（2分）故当$a = 11, b = 5$时，方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}11\\-5\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$, k_1,k_2 为任意常数。-------（1 分）

七.（共 10 分）解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-1)=0$，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$-------（3 分）

对 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， -------（2 分）对 $\lambda_3=1$，特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$， -------（1 分）

正交化：$\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ -------（2 分）

单位化：$r_1=\dfrac{\eta_1}{|\eta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},r_2=\dfrac{\eta_2}{|\eta_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},r_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ -------（1 分）

令 $T=(r_1,r_2,r_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,，则 $T^TAT=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$。-------（1 分）

八.（共 6 分）证明：1、将 B 按列分块为 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，则

$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)=0\Rightarrow A\beta_i=0\,(i=1,\cdots,s)$，即向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，从而知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由 $AX=0$ 的基础解系线性表示，所以 $r_B=r_{\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}}\le n-r_A$，于是得 $r_A+r_B\le n$。-------（3 分）

2、设 λ 为 A 的特征值，ξ 为对应的特征向量，即 $A\xi=\lambda\xi$，则

$0\xi=(A^2-6A+4I)\xi=A^2\xi-6A\xi+4\xi=(\lambda^2-6\lambda+4)\xi$

$\Rightarrow\lambda^2-6\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=3\pm\sqrt{5}$，所以 A 的特征值只能为 $3\pm\sqrt{5}$ 且均大于 0，因此 A 正定。-------（3 分）