高等数学测试卷（一）

一、填空与选择题(每空 3 分，共 24 分)

1. 设 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的余弦是____________ .

2. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线方程是____________ .

3. 若 $\int_{-1}^{0}dx\int_{0}^{1+x}f(x,y)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}f(x,y)dy=\int_{0}^{1}dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)dx$，则

$x_1(y)=$____________ ，$x_2(y)=$ ____________ .

4. 设 L 是圆 $x^2+y^2=1$，则 $\oint_L(2x+y^2)ds=$____________ .

5. 已知 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，在 $-\pi\le x<\pi$ 上 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<\pi \\ x, & -\pi\le x<0 \end{cases}$，设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(\pi)=$

.

6. 微分方程 $y'+2y=2x$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解为____________ .

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})$（常数 $\alpha>0$）(　　).

（A）发散　　（B）条件收敛　　（C）绝对收敛　　（D）收敛性与 α 有关

8. 设 A, B 是待定常数，则微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的一个特解具有形式（　　）.

（A）Ae^x　　（B）Axe^x　　（C）$(Ax+B)e^x$　　（D）$(Ax+B)xe^x$

二、(8 分）设平面 π 通过点 $P(2,3,5)$ 且与已知平面 $x-y+z=1$ 垂直，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+7}{-3}$ 平行，求平面 π 的方程.

三、(8 分）设 $z=f(x^2-2y,\sin(xy))$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、(8 分）求函数 $f(x,y)=e^x(x+y^2-2y)$ 的极值.

五、(8 分）求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的梯度以及沿向径 $\overrightarrow{OP}$ 方向的方向导数.

六、(8 分）计算三重积分 $\iiint_{\Omega}x^2y^2zdv$，其中 Ω 是由曲面 $2z=x^2+y^2$ 与平面 $z=2$ 所围的

立体.

七、(8 分)(1)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n}$的收敛半径;(2)将函数$f(x)=x\arctan x$展开成$x$的幂级数.

八、(每小题 8 分,共 16 分)计算下列曲线与曲面积分

(1)$\int_L (e^x\sin y-2y+x^2)dx+(e^x\cos y+x^2+1)dy$,其中曲线$L$是以$A(-1,0)$为起点,$B(1,0)$为终点的,以$AB$为直径的圆的下半周.

(2)$\oiint\limits_{\Sigma} x(8y+3)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$,其中$\Sigma$是曲面$\sqrt{x^2+z^2}=y-1$与平面$y=3$所围立体表面外侧.

九、(7 分)曲线上任一点处的切线与x轴的交点到切点的距离等于该交点到原点的距离,且曲线经过点$(2,2)$,求曲线方程.

十、(5 分)设函数$f(x,y)$的二阶偏导数在全平面连续,且$f(0,0)=0$,$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\le 2|x-y|$,$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le 2|x-y|$. 证明:$|f(5,4)|\le 1$.