课程名称：高等数学 II　学分：5.5　教学大纲编号：11223302

试卷编号：A　考试方式：闭卷　满分分值：100　考试时间：120 分钟

组卷日期：2022 年 5 月 28 日　组卷教师(签字)：命题组　审定人(签字)：孙秀

考生请注意：所有答案按试题序号写在答题纸上，写在试卷上一律无效！

一、填空题与选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设向量 $\vec{a}=(1,-4,1)$，$\vec{b}=(2,-2,-1)$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=$________.

2. 设曲面 $x^2+y^2+z^2-2z=1$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线为 Γ，则 Γ 在 xoy 面上的投影柱面方程为________.

3. 曲面 $3x^2+2y^2-z^2=2$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面方程为________.

4. 函数 $u=xy+yz+zx$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿 $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ 方向的方向导数为________.

5. 设函数 $z=\ln(1+2x^2+3y^2)$，则全微分 $dz=$________.

6. 微分方程 $y'''+y''+y'+y=0$ 的通解为________.

7. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=x\sin 2x$，若 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $a_2=$______.

8. 设空间立体 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z$，$f(u)$ 为连续函数，则 $\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv=$（　）.

（A）$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r)r^2dr$　　（B）$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r)r^2dr$

（C）$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{1}f(r)r^2dr$　　（D）$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{1}f(r)r^2dr$

9. 设 Σ 是平面 $x+y+z=1$ 位于第一卦限内的三角形区域，则 $\iint\limits_{\Sigma}3xdS=$（　）.

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{6}$

10. 下列级数发散的是（　）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2^n}+\frac{\sqrt{n}}{n^2+1})$　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$　（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n(n^3+2n+1)}}$　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3n}{5n-2})^n$

二、（8 分）求直线 $\begin{cases}2x-y+z-4=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $2x+3y+4z-9=0$ 上的投影直线方程.

三、（8 分）设 $z=yf(x^2-y^2,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（8 分）求函数 $f(x,y)=e^{-x-y}(x^2+y^2)$ 的极值.

五、（8 分）交换二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1\frac{y}{\sqrt{3+x^3}}dx$ 的积分顺序，并求出积分值.

六、（8 分）计算曲线积分 $\oint_L(\sin^2(x+y)+4y)dx+(xy^2+\frac{1}{3}x^3-\cos^2(x+y))dy$，其中曲线 L 是平面区域 $x^2+y^2\le x$ 的正向边界.

七、（9 分）计算曲面积分 $\iint_\Sigma x(z-y^2)dydz+y(y^2+3z)dzdx-2zy^2dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2$ 位于平面 $z=1$ 与平面 $z=2$ 之间的部分，取上侧.

八、（8 分）将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-x-12}$ 展成 $x-2$ 的幂级数.

九、（7 分）设函数 $f(x)$ 的一阶导数连续，且满足：

$$\int_0^x(x+1-t)f'(t)dt=x^2+1-f(x),$$

求 $f(x)$.

十、（6 分）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{\sqrt{n}}$ 在 $x=-2$ 处是条件收敛的，求常数 a 的值，并证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^3(x-a)^n$ 在 $x=\ln\frac{1}{2}$ 处是绝对收敛的.