南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：线性代数 学分：2.5 教学大纲编号：11031201

试卷编号：A 考试方式：闭卷 满分分值：80 考试时间：120 分钟

组卷日期：2022 年 5 月 10 日 组卷教师(签字)：命题组 审定人(签字)：__________

所有解答必须写在答题纸上，写在试卷上无效

一． 是非题：（每小题 3 分，共 15 分）

（下列命题正确的打 √，错误的打×）

1. 设 A，B 为同阶矩阵，则有 $(A+B)^T = B^T + A^T$。 （ ）
2. 已知矩阵 A 的秩为 2，P 为适当阶数的可逆矩阵，则 $r_{PA^T} = 2$。 （ ）
3. 设 W_1，W_2 均是 R^n 的子空间，记 $W_1 + W_2 = \{\alpha \in R^n \mid \alpha = \alpha_1 + \beta_1, \alpha_1 \in W_1, \beta_1 \in W_2\}$，则 $W_1 + W_2$ 不是 R^n 的子空间。 （ ）
4. 若非零矩阵 A 满足 $A^k = 0$，其中 k 为正整数，则 A 可对角化。 （ ）
5. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 + 2t x_1 x_2 + 2x_1 x_3$ 是正定二次型，则 $-3 < t < 3$。（ ）

二．填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} =$ __________。

2. 在 R^3 中，定义 $\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$，则线性变换 σ 在基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为__________。

3. 设 0 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ 的一个特征值，则 $a =$____，A 的另两个特征值为__________。

4. 设 A，B 均为 n 阶方阵，且 A 可逆，则下列结论错误的是_______。
(A) AB 与 BA 有相同的特征值 (B) $r_{AB} = r_{BA}$ (C) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

5. 若 A 为负定矩阵，则下列结论正确的是_______。
(A) $|A| < 0$ (B) $-A$ 为正定矩阵 (C) A 的特征值均大于零

三．（6 分）设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$，$M_{ij}$，$A_{ij}$ 分别为元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式，求 $-M_{41} + 2M_{42} - 3M_{43} + 4M_{44}$。

四．（8 分）设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $XA = X + BB^T$，求矩阵 X。

五．（8 分）求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$ 的所有极大线性无关组。

六．（10 分）试问 a，b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -1 \\ -3x_1 + 12x_2 + a x_3 + 6x_4 = b \\ x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 3x_4 = a - 8 \end{cases}$ 有解？并在有解时求其通解。

七．（10 分）设 0, 0, 9 是 3 阶实对称矩阵 A 的特征值，对应于 9 的特征向量为 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$，试求

1、正交变换 $X = TY$，化二次型 $f(X) = X^T A X$ 为标准形（要写出所用的正交变换和此标准形）；

2、矩阵 A。

八．（8 分）1、设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$ 的任一解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ 是其导出组的基础解系，证明 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ 线性无关。

2、设 A 是任意的 n 阶矩阵，证明存在可逆矩阵 P 使得 $(PA)^2 = PA$。