南京理工大学课程考试答案及评分标准

(22-23(秋学期)线性代数(B)（2.5)考试试题答案)(23.1.6)

一. 是非题（每题 3 分，共 15 分）： 1. √ 2. × 3. √ 4. √ 5. ×

二．填空题（每题 3 分，共 15 分）：1. $\underline{\begin{pmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$ 2. $\underline{\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}}$ 3. $\underline{\neq 9}$ 4. $\underline{0 \text{ 或 } 1}$

5. $\underline{y_1^2 - y_2^2 - y_3^2}$

三．（共 6 分）解：$D = a_4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} + a_3(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}$

$+ a_2(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (a_1 + x)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$ -------(3 分)$= a_4 + a_3 x + a_2 x^2 + a_1 x^3 + x^4$-------(3 分)

四．（共 8 分）解：$\sigma(\eta_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\sigma(\eta_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\sigma(\eta_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，设 σ 在基底 η_1，η_2, η_3 下的矩阵为 A，则

$(\sigma(\eta_1), \sigma(\eta_2), \sigma(\eta_3)) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)A$，-------（4 分）所以

$A = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^{-1}(\sigma(\eta_1), \sigma(\eta_2), \sigma(\eta_3)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$-------（4 分）

五．（共 10 分）解：$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$-------（7 分）所以

$r_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}} = 3$，且 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 为一个极大无关组。-------（3 分）

六．（共 10 分）解：$(A\,|\,b) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & a \\ 3 & 8 & 24 & -19 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+11 \end{pmatrix}$-------（3 分）

所以当 $a = 8, b = -11$ 时，$r_{(A|b)} = r_A = 2 < 4$，线性方程组有无穷多解，-------（3 分）此时，原方程组的同解方程组

为 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x_1 = 7 + 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -4 - 6x_3 + 5x_4 \end{cases}$，取 $x_3 = x_4 = 0$，得特解 $X^* = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，-------（1 分）其

导出组的解为 $\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$，取 $x_3 = 1, x_4 = 0$；$x_3 = 0, x_4 = 1$ 得导出组的基础解系

$\eta_1=\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}$，-------（2 分）故当 $a=8,b=-11$ 时，方程组的通解为 $X=\begin{pmatrix}7\\-4\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数。-------（1 分）

七．（共 10 分）解：$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-1\\-1&\lambda-3&1\\-1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-1)=0$，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=1$ -------（3 分）

对 $\lambda_1=\lambda_2=4$，特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，对 $\lambda_3=1$，特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$， -------（3 分）

正交化：$\alpha_1=\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ -------（2 分）

单位化：$\eta_1=\dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\eta_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$-------（1 分）

令 $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，作正交变换 $X=TY$，得标准形

$f=4y_1^2+4y_2^2+y_3^2$． -------（1 分）

八．（共 6 分）证明：1、设 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则由已知条件有 $a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 且为实数。又 $A\neq0$，知 A 至少有一元素不等于零，不妨设 $a_{ik}\neq0$，则

$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2>0$，所以 A 可逆。-------（3 分）

2、设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵 A 的两个互异特征值，ξ_1,ξ_2 是对应的特征向量，即 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1,A\xi_2=\lambda_2\xi_2$，则

$\lambda_1(\xi_1,\xi_2)=(A\xi_1,\xi_2)=(A\xi_1)^T\xi_2=\xi_1^T(A\xi_2)=\xi_1^T(\lambda_2\xi_2)=\lambda_2(\xi_1,\xi_2)$

$\Rightarrow\ (\lambda_1-\lambda_2)(\xi_1,\xi_2)=0\Rightarrow\ (\xi_1,\xi_2)=0$，即 ξ_1 与 ξ_2 正交。-------（3 分）