南京理工大学课程考试答案及评分标准

(19-20(春学期)线性代数(A)(2.5)考试试题答案)(20.06.30)

一. 是非题（每题 3 分，共 15 分）： 1. √ 2. × 3. × 4. √ 5. √

二. 填空题（每题 4 分，共 20 分）：1. 1 2. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 3. 8 4. 6 5. C

三.（共 8 分）解：$D_n=\begin{vmatrix}a+1 & a & a & \cdots & a\\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$ ----(4 分) $=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{i} & a & a & \cdots & a\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=n!(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{i})$ -------（4 分）

四.（共 12 分）解：由 $A(I-C^{-1}B)^T C^T = A[C(I-C^{-1}B)]^T = A(C-B)^T = I$，-------（6 分）所以

$A=[(C-B)^T]^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ -------（6 分）

五.（共 12 分）解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 2\\ -2 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 5 & 7 & 2\\ -3 & -4 & -5 & -1\\ 2 & -1 & -4 & a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ -------（6 分）

所以，(1)当 $a=-3$ 时，$r_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}}=2$，且 $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ 知 α_1,α_2 为一个极大线性无关组。

于是 $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 为一组基. -------（3 分）

(2)当 $a\neq -3$ 时，$r_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}}=3$，$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a+3\end{vmatrix}\neq 0$，知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大线性无关组。

故 $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一组基. -------（3 分）

六.（共 12 分）$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2\\ 3 & -1 & -a & 15 & 3\\ 2 & -2 & -4 & 13 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2-a & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+2\end{pmatrix}$ -------（4 分）

(1)当 $a\neq 2$ 时，$r_A=r_{(A|b)}=4$，方程组有唯一解。

(2)当 $a=2$ 时，则有 $(A\,|\,b)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4\end{pmatrix}$ -------（3 分）

知 $r_A=3$，$r_{(A|b)}=\begin{cases}4 & b\neq 4\\ 3 & b=4\end{cases}$，所以当 $a=2, b\neq 4$ 时，$r_A=3<r_{(A|b)}=4$，方程组无解。

当 $a=2$, $b=4$ 时， $r_A=r_{(A|b)}=3<4$，线性方程组有无穷多解，--------（2 分）此时，原方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\ \quad x_2+2x_3-x_4=1\\ \qquad x_4=2\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}x_1=-8\\ x_2=3-2x_3\\ x_4=2\end{cases}$ ，取 $x_3=0$ ，得特解 $X^*=\begin{pmatrix}-8\\3\\0\\2\end{pmatrix}$ ，--------（1 分）其导出组的解为

$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-2x_3\\ x_4=0\end{cases}$ ，取 $x_3=1$ ，得导出组的基础解系 $\eta=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ ，--------（1 分）故当 $a=2$, $b=4$ 时，方程组的通解为

$X=\begin{pmatrix}-8\\3\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, k 为任意常数。--------（1 分）

七.（共 14 分）解： $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$ --------（1 分） $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-1\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7)=0$,

得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$ --------（5 分）

对 $\lambda_1=\lambda_2=1$ ，特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ，对 $\lambda_3=7$ ，特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ， --------（3 分）

正交化： $\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ --------（2 分）

单位化： $r_1=\dfrac{\eta_1}{|\eta_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},r_2=\dfrac{\eta_2}{|\eta_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},r_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ --------（2 分）

令 $T=(r_1,r_2,r_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ ，作正交变换 $X=TY$ ，得标准形 $f=y_1^2+y_2^2+7y_3^2$. --------（1 分）

八.（共 7 分）证明：对特征值的个数 m 用归纳法.（1）当 $m=1$ 时，由于 $\boldsymbol{\xi}_1\neq\boldsymbol{0}$ ，所以线性无关. 结论自然成立.（2）假设 $m=r-1$ 时结论成立. 下证 $m=r$ 时结论也成立. 设 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\xi}_{r-1}+k_r\boldsymbol{\xi}_r=\boldsymbol{0}$.（1）

在式（1）两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可得 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\xi}_{r-1}+k_r\boldsymbol{\xi}_r)=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$,

整理可得 $k_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{r-1}\lambda_{r-1}\boldsymbol{\xi}_{r-1}+k_r\lambda_r\boldsymbol{\xi}_r=\boldsymbol{0}$ （2） --------（4 分）

式（1）两端同乘以 λ_r 可得 $k_1\lambda_r\boldsymbol{\xi}_1+k_2\lambda_r\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{r-1}\lambda_r\boldsymbol{\xi}_{r-1}+k_r\lambda_r\boldsymbol{\xi}_r=\boldsymbol{0}$.（3）

式（3）减去式（2）得 $k_1(\lambda_r-\lambda_1)\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\lambda_r-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{r-1}(\lambda_r-\lambda_{r-1})\boldsymbol{\xi}_{r-1}=\boldsymbol{0}$.

由归纳假设可得，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r-1}$ 是线性无关的，所以 $k_i(\lambda_r-\lambda_i)=0, i=1,2,\cdots,r-1$.
注意到 $\lambda_r-\lambda_i\neq 0$, 于是 $k_i=0(i=1,2,\cdots,r-1)$. 代回到式（1）可得，$k_r\boldsymbol{\xi}_r=\boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{\xi}_r\neq\boldsymbol{0}$，故 $k_r=0$，因此 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 线性无关. -------（3 分）