南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：线性代数 学分：2.5 教学大纲编号：11031201

试卷编号：A 考试方式：闭卷 满分分值：80 考试时间：120 分钟

组卷日期：2022 年 12 月 4 日 组卷教师(签字)：命题组 审定人(签字)：__________

所有解答必须写在答题纸上，写在试卷上无效

一． 是非题：（每小题 3 分，共 15 分）

（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. 设 A，B 为同阶方阵，则对任意的自然数 k 有 $(AB)^k = A^k B^k$。 （ ）
2. 在 R^3 中，定义变换 $\sigma(x_1,x_2,x_3)^T = (x_1^3, x_2-x_3, x_2)^T$，则 σ 是 R^3 上的线性变换。 （ ）
3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 A 与 B 相似。 （ ）
4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则 $s\le t$。 （ ）
5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2$ 的正惯性指标为 2。 （ ）

二．填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $f(x)=-2x+6$，$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$，则 $f(A)=$__________。
2. 设 3 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=1$，则行列式 $\left|(\frac{1}{2}A)^{-1}+2A^*\right|=$__________。
3. 向量 $\alpha=\begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix}$ 在基底 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的坐标为__________。
4. 已知 $\lambda_1=0$ 是三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$ 的特征值，则 $a=$______。
5. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换化为标准形 $f(y)=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$，则 $a=$_______。

三．（6 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a&-1&0&0\\1&a&-1&0\\0&1&a&-1\\0&0&1&a\end{vmatrix}$。

四．（8 分）已知 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，使 $2AX=X+B^2$ 成立，求矩阵 X。

五．（10 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\\-6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\8\\-2\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\-6\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 的维数和一组基。

六．（10 分）试问 a，b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=6\\x_1+2x_2+x_3+3x_4=1\\2x_1+x_2+2x_3=a+6\\3x_1+4x_2+3x_3+(a-6)x_4=b+8\end{cases}$ 有解？并在有解时求其通解。

七．（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，求一正交矩阵 T，使得 T^TAT 为对角矩阵，并写出此对角阵。

八．（6 分）1、设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，如果 $AB=0$，证明 $r_A+r_B\le n$。

2、设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2-6A+4I=0$，证明 A 为正定矩阵。