02 级　高等数学（上）A 卷　 5 学分（80 分）

一.　　填空题（2×13）

1、设 $y=\sqrt{x}\sin^2(2x+1)$，则 $y'=$ ________ . $\dfrac{\sin^2(2x+1)}{2\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\sin 2(2x+1)$

2、已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=$ ________ . $\dfrac{4}{3}$

3、设 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上具有连续导数，则 $\int_1^3\dfrac{f'(x)dx}{1+[f(x)]^2}=$ ______ . $[\arctan f(x)]_1^3$

4、直线 $\begin{cases}x+y+3z=0\\ x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z=1$ 的夹角为 ________ . 0

5、当 $x\to 1$ 时，已知 x^x-1 和 $a(x-1)^k$ 是等价无穷小，则 $a=$ ________ ,

$k=$ ________ . 1,1

6、$(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$ ________ ，$b=$ ________ . $\dfrac{-3}{2},\dfrac{9}{2}$

7、$x=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{x}{\sin x}$ 的 ________ 间断点.

（请填；跳跃，可去，无穷，振荡之一）　跳跃

8、已知 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$，则 $f^{(100)}(0)=$ ________ . $\dfrac{-1}{5}\left(3^{-101}+2^{-101}\right)100!$

9、设 $y=y(x)$ 是由放程 $\int_0^{xy}e^{t^2}dt+ye^x=2$ 所确定的隐函数，

则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________ . -4

10、若已知向量 $a=\{1,2,-1\}$，$b=\{2,-1,3\}$，则由 a，b 构成的平行

四边形的面积为 ________ . $5\sqrt{3}$

11、曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z=8\\ x+2y+2z=1\end{cases}$ 在 $x0y$ 坐标面上的投影曲线方程为 ________ .

$$\begin{cases}2x^2-x+2y^2-2y=15\\ z=0\end{cases}$$

12、曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点为 ________ . $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{\ln 2}{-2}\right)$

13、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 的结果为________. e^{-1}

二、计算题（4×6）

1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\int_0^{\sin x}\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t}dt}$ $\frac{1}{2}$

2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3-e^x}{x+2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ e^{-1}

3、$\int x^2\cos 2xdx$ $\frac{x^2}{2}\sin 2x-\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$

4、$\int\frac{dx}{1+2\cos x}$ $t=\tan\frac{x}{2},\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}+\tan\frac{x}{2}}\right|+c$

5、$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}dx$ 2

6、$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ $x=\tan t,\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

三、（6）求 $y=e^{x^2-x}$ 在 $\left[0,2\right]$ 上的最大，小值，并证明：$2e^{-\frac{1}{4}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$.

$y_M=e^2,y_m=e^{-\frac{1}{4}}$

四、（6）求过点 $\left(2,0,-3\right)$ 且与直线 $l:\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程，

并求点 $\left(1,2,2\right)$ 到该平面的距离. $2x-5y-3z-13=0,\frac{27}{\sqrt{38}}$

五、（6）已知曲线 $y=y\left(x\right)$ 的参数方程 $\begin{cases}x=\arctan 2t\\ y=t+\ln\left(1+4t^2\right)\end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

$2t^2+4t+\frac{1}{2},8t^3+8t^2+2t+2$

六、（6 分）求由曲线 $y^2=2x$ 与 $y^2=1-x$ 所围图形的面积. $\frac{4}{9}\sqrt{6}$

七、（6 分）设 $x\ge 0$，证明：$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta\left(x\right)}}$，其中 $\frac{1}{4}\le\theta\left(x\right)\le\frac{1}{2}$.

解：$\theta\left(x\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right],\theta'\left(x\right)\rangle 0,\lim\limits_{x\to+\infty}\theta\left(x\right)=\frac{1}{2},\lim\limits_{x\to0^+}\theta\left(x\right)=\frac{1}{4}$