南京理工大学课程考试答案及评分标准

(21-22(秋学期)线性代数(A)(2.5)考试试题答案)(21.12.02)

一. 是非题（每题 3 分，共 15 分）： 1. × 2. × 3. × 4. √ 5. √

二. 填空题（每题 3 分，共 15 分）：1. $\underline{-\frac{27}{4}}$ 2. $\underline{B}$ 3. $\underline{21}$ 4. $\underline{3,1,2}$ 5. $\underline{3,5}$

三.（共 6 分）解：$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$ --------(3 分) $=\begin{vmatrix} b_1+b_1\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$

$=b_1b_2\cdots b_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i})$--------（3 分）

四.（共 8 分）解：1、$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ --------（3 分）所以，

$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r_{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}}=2$，且$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=5\neq 0$知$\alpha_1,\alpha_2$为一组基。--------（2 分）

2、由题知α_1,α_2,β线性无关，又$(\alpha_1,\alpha_2,\beta)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以$a\neq 1$。--------（3 分）

五.（共 8 分）解：设从基e_1,e_2,e_3到基η_1,η_2,η_3的过渡矩阵为P，则$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(e_1,e_2,e_3)P$，得

$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，--------（3 分）所以$B=P^{-1}AP$ --------（2 分）

$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ --------（3 分）

六.（共 10 分）解：$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix} -4 & -8 & 3 & 6 & -5 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & a \\ 2 & 4 & -2 & -4 & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$ --------（3 分） 所以当

$a=10$且$b=2$时，线性方程组有解，有无穷多解，由同解方程组$\begin{cases} -x_1-2x_2-x_3-2x_4=-3 \\ x_3+2x_4=1 \end{cases}$，解得

$\begin{cases} x_1=2-2x_2 \\ x_3=1-2x_4 \end{cases}$， 取$x_2=x_4=0$，得特解$X^*=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，--------（3 分）其导出组的解为$\begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_3=-2x_4 \end{cases}$，取$x_2=1,x_4=0$与

$x_2=0, x_4=1$，得导出组的基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$，通解为 $X=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$，$k_1$，$k_2$ 为任意常数。--------（4 分）

七．（共 10 分）解：$A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&2&-4\\2&-4&2\end{pmatrix}$，$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&2&-2\\2&\lambda-2&4\\-2&4&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-7)=0$，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=7$ --------（3 分）

对 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$，对 $\lambda_3=7$，特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$， --------（3 分）

正交化：$\alpha_1=\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}$ --------（2 分）单位化：$\eta_1=\dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix}, \eta_2=\dfrac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3\sqrt5}\\\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix}$，

$\eta_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ --------（1 分）令 $T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{-2}{3\sqrt5}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，作正交变换 $X=TY$，得标准形 $f=-2y_1^2-2y_2^2+7y_3^2$． --------（1 分）

八．（共 8 分）证明：1、设 $k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\alpha_3)+\cdots+k_{s-1}(\alpha_{s-1}-\alpha_s)=0$，可得

$k_1\alpha_1+(k_2-k_1)\alpha_2+\cdots+(k_{s-1}-k_{s-2})\alpha_{s-1}-k_{s-1}\alpha_s=0$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，所以有 $\begin{cases}k_1=0\\k_2-k_1=0\\\vdots\\k_{s-1}-k_{s-2}=0\\-k_{s-1}=0\end{cases}$，得 $k_1=k_2=\cdots=k_{s-1}=0$，因此

$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}-\alpha_s$ 线性无关。--------（4 分）

2、因 A 可逆，所以 A 的标准形为 I_n，知存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s,Q_1,\cdots,Q_t$ 使得
$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=I$，又初等矩阵可逆，所以 $A=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}$。
因初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵，故 $P_i^{-1}(i=1,2,\cdots,s)$ 和 $Q_j^{-1}(j=1,2,\cdots,t)$ 均为初等矩阵，所以得 A 是初等矩阵的乘积。--------（4 分）