南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：线性代数 学分：2.5 教学大纲编号：11031201

试卷编号：A 考试方式：闭卷 满分分值：80 考试时间：120分钟

组卷日期：2021年12月2日 组卷教师(签字)：命题组 审定人(签字)：__________

所有解答必须写在答题纸上，写在试卷上无效

一． 是非题：（每小题3分，共15分）

（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵，则有 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$。（ ）

2. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，则 $B=I(1,2)AI(3(1),1)$。（ ）

3. 设 $W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n \,|\, x_1=1\}$，则 W 是 R^n 的子空间。（ ）

4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=I$，则 A 的特征值为1或 -1。（ ）

5. 若 A，B 均为正定矩阵，则 $A+B$ 也是正定矩阵。（ ）

二．填空题：（每小题3分，共15分）

1. 设 A 是3阶矩阵，且 $|A|=-\dfrac{1}{2}$，则行列式 $\left|(2A)^{-1}-2A^*\right|=$__________。

2. 设 $m\times n$ 阶矩阵 $A\neq 0$，$m<n$，则__________。

(A) 非齐次线性方程组 $AX=b$ 有无穷多解 (B) 齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解

(C) 非齐次线性方程组 $AX=b$ 只有唯一解 (D) 齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解

3. 设三阶方阵 A 的特征值是0, 1, 2，又 $B=A^2+A+I$，则行列式 $|B|=$__________。

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-x_2^2-2x_3^2$ 的秩_____，正惯性指标为_____，负惯性指标为_____。

5. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$_______，$b=$_______。

三．（6分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$，其中 $b_1b_2\cdots b_n\neq 0$。

四．（8分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$，1、求子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数和一组基；2、向量 $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ -3 \end{pmatrix}\notin L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，求 a。

五．（8分）已知线性变换 σ 在 R^3 中基底 $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，求 σ 在基底 $\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵 B。

六．（10分）试问 a, b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} -4x_1-8x_2+3x_3+6x_4=-5 \\ -x_1-2x_2-x_3-2x_4=-3 \\ 3x_1+6x_2+4x_3+8x_4=a \\ 2x_1+4x_2-2x_3-4x_4=b \end{cases}$ 有解？并在有解时求其通解。

七．（10分）求一正交变换，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2-8x_2x_3+2x_3^2$ 化为标准形（要写出所用的正交变换和此标准形）。

八．（8分）1、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，证明向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}-\alpha_s$ 也是线性无关。

2、试证：若 n 阶矩阵 A 可逆，则 A 可以写成初等矩阵的乘积。