南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：线性代数　学分：2.5　教学大纲编号：11031201

试卷编号：A　考试方式：闭卷　满分分值：80　考试时间：120 分钟

组卷日期：2021 年 05 月 28 日　组卷教师(签字)：命题组　审定人(签字)：__________

所有解答必须写在答题纸上，写在试卷上无效

一. 是非题：（每小题 3 分，共 15 分）

（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. 设 A 为 n 阶非零实矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $A^*=A^T$，则 A 不可逆。（ ）

2. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&-4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$a$ 为任意常数，则 A 与 B 等价。（ ）

3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\ge 2)$ 线性无关的充要条件是其任一向量都不能由其余向量线性表示。（ ）

4. 设 A，B 均为 n 阶矩阵，且 $AB=0$，则 A 的任一行向量与的 B 的任一列向量正交。（ ）

5. 二次型 $f(x)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$。（ ）

二．填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则所有满足 $AB=BA$ 的矩阵 $B=$__________。

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A+I=0$，则 $(A-I)^{-1}=$__________。

3. 若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(1,-1,1,0)^T$，$\xi_2=(1,1,0,1)^T$，则 $r_A=$_______。

4. 设三阶方阵 A 的特征值为 0，1，2，又 $B=2A^2-A+I$，则 B 的行列式 $|B|=$_______。

5. 已知 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 $|A|$ 的第 i 行第 j 列元素的代数余子式，则 $|A|$ 中所有元素的代数余子式的和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=$__________。

三.（6 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1+\lambda&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+\lambda&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3+\lambda&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+\lambda\end{vmatrix}$。

四.（8 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\-5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\15\\p+2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\6\\-2\\p\end{pmatrix}$，

1、给出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关的充要条件；

2、给出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关的充要条件，并在此时求出其秩和一个极大线性无关组。

五.（8 分）已知线性变换 σ 在 R^3 中自然基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&-3&2\\6&-4&4\\4&-4&5\end{pmatrix}$，求 σ 在基 $\xi_1=e_1+2e_2+e_3$，$\xi_2=e_1+e_2$，$\xi_3=e_1+2e_2+2e_3$ 下的矩阵 B。

六.（10 分）设线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$，试问 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

七.（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}9&4&-1\\4&-6&4\\-1&4&9\end{pmatrix}$，求一正交矩阵 T，使得 T^TAT 为对角矩阵，并写出此对角阵。

八.（8 分）1、设 A，B 均为 n 阶矩阵，证明 $AB-BA\ne I$。

2、n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次型 $f(x)=x^TAx$ 正定的充分必要条件是它的正惯性指标等于 n。