高数上期中
(2014-2019)

目 录

高等数学（Ⅰ）

2019-2020 学年第一学期期中考试 A 卷

一、选择或填空(第 10 小题 6 分，其余各小题 3 分，共 33 分)

1、设$y=\operatorname{arccot}2x+\arcsin x$，则$dy=$______________.

2、函数$f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(x-2)}$的可去间断点是______________.

3、设$|x|<1$，当$n\to\infty$是$(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1$的等价无穷小量是______________.

4、极坐标曲线$r=2\sin\theta$在$\theta=\dfrac{\pi}{6}$处的切线方程为______________.

5、曲线$y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$的的全部渐近线有______________.

6、$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\dfrac{\ln(4x^2+1)}{\ln x-1}=$______________.

7、曲线$y=x^2+2x$上$(1,3)$处的曲率为______________.

8、函数$f(x)=\ln(1+x^2)$向下凹的区间是______________，拐点是______________.

9、$(\sin3x\cos2x)^{(n)}=$______________.

10、下列命题正确的是哪个或那几个　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A)设函数$f(x)$与$g(x)$在$x=0$处均可导，且$f(0)=g(0)$，则$f'(0)=g'(0)$；

(B)设$f(x)$连续且存在常数a和b，使得当$x\to0$时，有$f(x)-a=bx+o(x)$，则$f'(0)$存在；

(C)设$f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant1\\3+x, & x>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1\\2-x, & x>1\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to1+0}f(g(x))=-1$；

(D)当$x\to0$时，$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1}$是无穷大量.

二、(每小题 7 分，共 14 分)求导数：

1、设$y=\ln\sqrt{1+x^2}+(\sin x)^x$，求$\dfrac{dy}{dx}$；

2、设$y=f(x)$可由方程$2y-xy^2+e^x=3$确定，求$f''(0)$.

三、(每小题 7 分，共 14 分)求极限：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x\sin x^2\cos x}$；

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

四、(9 分)设

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}+\ln(a+x), & x<0\\ e^x+b, & x\geq 0\end{cases}$$

1、求常数a和b，使得$f(x)$在$x=0$处可导；

2、讨论$f'(x)$的连续性.

五、(7 分)求函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$的带拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林展开式.

六、(9 分)从一块半径为 R 的圆形优质不锈钢剪下一个中心角α弧度的扇形，做成一个圆锥形漏斗，问α取何值时漏斗的容积最大？

七、(7 分)计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$.

八、(7 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，$(0,2)$ 内可导，且 $f(1)f(2)<0$.证明：方程 $xf'(x)+(x+1)f(x)=0$ 在 $(0,2)$ 内至少有一个根.

2018-2019 学年第一学期期中考试 A 卷

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$ ________.

（2）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f''(0)=$ ________.

（3）已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\dfrac{dy}{dx}|x=0=$ ________

（4）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 31$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

（5）已知 $y=(\ln x)^x$，则 $y'=$ ________.

二、求极限（每小题 6 分，共 18 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$

三、求导数（每小题 6 分，共 18 分）

（1）设 $f(x)=\arcsin x\cdot\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$，求 $f'(0)$．

（2）设当 $x=0$ 时 $\frac{df(\sin x)}{dx}=\frac{df^2(\sin x)}{dx}$，$f'(0)\neq 0$，求 $f(0)$．

（3）求 $y=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)$．

四、（9 分）设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值.

五、（9 分）证明：两条心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 与 $\rho=a(1-\cos\theta)$ 在交点处的切线相互垂直.

六、（9分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$。试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

七、（10分） 设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 附近有定义，且在点 $x=1$ 可导，$f(1)=0$，$f'(1)=2$. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}.$$

八、（12分） 设 $\{a_n\}$ 为数列，a，λ 为有限数，求证：

（1）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

（2）如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$

2016-2017 学年第一学期期中考试 B 卷

一、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1.设$f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$，求$f[g(x)]=$________

2.设$y=x^{\sin x}$，则$dy=$________

3.$x=2$是$f(x)=\frac{|x-2|}{x^2-3x+2}$的________间断点.（填可去、跳跃、第二类）

4.曲线$y=xe^{2x}+1$的拐点是________

5.$y=\ln(1+2x)$的n阶麦克劳林展开式（*Peano* 型余项）为________

二、求极限(每小题 6 分，共 18 分)

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$；

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\cot x$；

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots\frac{n}{n^2+n}\right)$.

三、求导数（每小题 7 分，共 28 分）

1. 设y由方程$e^{xy}+\tan(xy)=y$确定的隐函数，求$y'(0)$；

2. 设$y=y(x)$由$\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=t-\arctan t\end{cases}$所确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

3. 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$，求$f^{(100)}(0)$；

4. 设$y=x\sin^2x$，求$y^{(n)}$.

四、（6分） 确定a,b的值使得$f(x)=\begin{cases}e^{x^2}, & x\leqslant 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$在$x=1$处可导.

五、（9分） 设$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2\cdots)$,

（1）证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限；

（2）计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

六、（8分）试求抛物线$x^2=4y$上的动点$P(x,y)$与y轴上的定点$Q(0,b)$间的最短距离.

七、（8分）设$0<a<b$，证明：$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

八、（8分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

证明：在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$f''(\xi)=2$.

2015-2016 学年第一学期期中考试试卷

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

1.数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n=$ ________

2.函数$y=\dfrac{1-x}{\sin\pi x}$的可去间断点是________

3.设$y=\arctan e^{2x}$,则$dy=$________

4.曲线$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$的斜渐近线是________

5.曲线$\rho=3\sin 2\varphi$在$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$处的切线方程是________

6.曲线$x^2-xy+y^2=1$在点$(1,1)$处的曲率是________

7.当$x\to 0$时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$与x^n为同阶无穷小，则$n=$________

8.设$f(x)$在$x=0$处连续且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+e^{-2x}-1}{x^2}=4$，则$f'(0)=$________

二、求极限(每小题 7 分，共 14 分)

1.$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{\sin^3 x}$

2.$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

三、求导（每小题 7 分，共 14 分）

1.设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$所确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

2. 设$y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$，求$y^{(n)}(0)$.

四、(8 分) 求函数$f(x)=x-\ln(1+x)$的单调区间与极值.

五、(8 分) 设$x_1>3, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n=1,2\cdots)$.证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求出.

六、(10 分) 设$g(x)$在$x=0$处二阶可导，且$g(0)=1, g'(0)=2, g''(0)=1$.并设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x}, x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$$，求$f'(0)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

七、（10 分） 设$f(x)$在$x=0$处可导，$f'(0)\neq 0$，若对任意$x\neq 0$，存在介于0与x之间的一点ξ，使得$f(x)-f(0)=2f(\xi)$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}$

八、（每小题 6 分，共 12 分）

（1）设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)f(1)>0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)f(1)<0$，证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=2f(\xi)$.

（2）设$f(x)$是$[0,+\infty]$上的非负可微函数，且$f(0)=0$.若存在常数$c>0$，使得$f'(x)\leqslant cf(x)\ (\forall x\in(0,+\infty))$，求证：$f(x)\equiv 0\ (x>0)$.

2014-2015 学年第一学期期中考试试卷

一、填空题(每小题 3 分，共 30 分)

1.设函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+3xf(\frac{1}{x})=\frac{4}{x}$，则 $f(x)=$__________

2.当 $x\to 0$ 时，函数 $(1+a\sin x^2)^{\frac{2}{3}}-1$ 与 $\cos 2x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$__________

3.设 $y=e^{f(\ln x)}$，则 $y'=$__________

4.函数 $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}}$ 的可去间断点为__________，无穷间断点为__________

5.曲线 $x^3+y^3=3axy$ 在点 $(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{4}a)$ 处的切线方程为__________

6.设 $f(x)=\dfrac{7}{2x^2+5x-3}$，则 $f^{(40)}(x)=$__________

7.曲线 $y=(3-x)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为__________

8.设 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{3\sin 2x}{x^2})=-4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$__________

9.曲线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 处的曲率为__________

10.设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^{2014}}{n^{a+1}-(n+1)^{a+1}}=b$，其中 $a,b\in R$ 且 $b\neq 0$，则 $b=$__________

二、求极限(每小题 5 分，共 10 分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-2}{x+3})^x$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\tan x}-3^x}{x\sin x^2}$.

三、(每小题 5 分，共 10 分)

1.设 $y=(\sin 2x)^{x^3}$，求 $\dfrac{dy}{d(x^3)}$.

2.设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+\dfrac{11}{2}t^2+3t \\ y=(t^2+3t)e^{3t} \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

四、（10分） 设 $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}-2ax, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{xe^{-\frac{1}{x}}}{2+e^{-\frac{1}{x}}}, & x<0 \end{cases}$，

问：（1）当 a 为何值时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？

（2）求 $f'(x)$.

五、（8分） 设 $x_1=24$，$x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限值.

六、（8分） 试确定常数 a,b,c,d，使得当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sin^2 x+ae^{2x^2}+b\sin x+cx\ln(1+x^2)-6x+d$ 为 x 的四阶无穷小.

七、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，在 $(1,3)$ 内可导，并且有 $f(1)=f(3)=1$，$f(2)=-1$. 证明：在 $(1,3)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)$.

八、（8 分）设 α 为正的常数，并使不等式 $(2x)^{\alpha} \geq \ln(2x)$ 对任意 $x>\frac{1}{2}$ 都成立，试求 α 的最小值.

九、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续的三阶导数，且满足方程 $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$，其中 $0<\theta<1$，且 θ 与 h 无关.证明：当 $\theta \neq \frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 为形如 $y=ax+b$ 的函数；当 $\theta=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 为形如 $y=ax^2+bx+c$ 的函数.

2019-2020 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、选择或填空(第 10 小题 6 分，其余各小题 3 分，共 33 分)

1、【正解】$\left(-\dfrac{2}{1+4x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

【解析】$(\operatorname{arccot}2x)'=-\dfrac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)'=-\dfrac{2}{1+4x^2}$，$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，因此

$$dy=\left(-\frac{2}{1+4x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

【考点延伸】专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.1、显函数求导

2、【正解】$x=0$，$x=2$

【解析】函数在$x=0$，$x=2$处无定义，则可能是间断点，有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\pi x}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi x}{x(x-2)}=-\dfrac{\pi}{2}$，因此$x=0$是可去间断点，有$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\pi x}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\pi\cos\pi x}{2(x-1)}=\dfrac{\pi}{2}$，因此$x=2$是可去间断点.

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 【重要题型】 题型 4：判断函数连续性和间断点

3、【正解】$\dfrac{\ln(1+\sin x)}{n}$

【解析】$(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1=e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{n}}-1\backsim\dfrac{\ln(1+\sin x)}{n}\ (n\to\infty)$.

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.2、无穷小的定义和性质

4、【正解】$y=\sqrt{3}x-1$

【解析】$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$，当$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，得到点$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，有$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\dfrac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin2\theta}{\cos2\theta}$，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{6}}=\left.\dfrac{\sin2\theta}{\cos2\theta}\right|_{\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$，从而得到切线方程$y-\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，整理得到

$y=\sqrt{3}x-1$.

【考点延伸】专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.3、参数方程求导

5、【正解】$x=1$，$y=x+1$

【解析】显然$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\infty$，因此垂直渐近线为$x=1$，有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x(x-1)}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{x-1}=1$，故有斜渐近线$y=x+1$，无水平渐近线.

【考点延伸】专题三 导数的应用、中值定理 第二部分 渐近线与函数作图

6、【正解】 arctan2

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(4x^2+1)}{\ln x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{8x}{1+4x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^2}{1+4x^2}=2$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{\ln(4x^2+1)}{\ln x-1}=\arctan2.$$

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算

7、【正解】$\dfrac{2\sqrt{17}}{289}$

【解析】$y'=2x+2$，$y''=2$，在点$(1,3)$处，$y'=4$，$y''=2$，曲率$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{(1+16)^{\frac{3}{2}}}$

$=\dfrac{2}{17\sqrt{17}}=\dfrac{2\sqrt{17}}{289}$.

【考点延伸】专题三 导数的应用、中值定理 第四部分 曲率与弧微分 4.2、曲率

8、【正解】$(-1,1)$;$(1,\ln 2)$，$(-1,\ln 2)$

【解析】定义域$(-\infty,+\infty)$，下凹区间，即$f''(x)>0$，有$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$f''(x)=\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}$

$=\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}>0$，即$2-2x^2>0\Rightarrow x^2<1\Rightarrow -1<x<1$，则下凹区间为：$(-1,1)$

拐点为$(1,\ln 2)$，$(-1,\ln 2)$.

【考点延伸】专题三 导数的应用、中值定理 第一部分 极值、最值和凹凸性 1.3、凹凸性

9、【正解】$\dfrac{1}{2}\left[5^n\sin\left(5x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$

【解析】由于$\sin 3x\cos 2x=\dfrac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)$，有

$$(\sin 5x)^{(n)}=5^n\sin\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad (\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

因此$(\sin 3x\cos 2x)^{(n)}=\dfrac{1}{2}\left[5^n\sin\left(5x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$.

【考点延伸】专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.5、求高阶导数

10、【正解】BC

【解析】A 项：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$，$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$，尽管$f(0)=g(0)$，但是不一定有$f'(0)=g'(0)$，故错误；

B 项：有$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-a]=f(0)-a=\lim\limits_{x\to 0}[bx+o(x)]=0$，得到$f(0)=a$，因此

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx+o(x)}{x}=b$，存在，故正确；

C 项：$\lim\limits_{x\to 1+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(2-x)=1$，则$\lim\limits_{x\to 1+0}f(g(x))=-1$，故正确；

D 项：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1}$，有$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{2e^{-x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1)=+\infty$；

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{2e^{-x}+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2e^{-x}+1}=0$，因此$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，故错误.

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 【重要题型】题型 4：判断函数连续性和间断点

二、(每小题 7 分，共 14 分)求导数：

1、【解析】$y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+e^{x\ln\sin x}$，$y'=\dfrac{x}{1+x^2}+e^{x\ln\sin x}\cdot\left(\ln\sin x+\dfrac{x\cdot\cos x}{\sin x}\right)$，整理得到

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{1+x^2}+(\sin x)^x\cdot(x\cot x+\ln\sin x)$.

【考点延伸】专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.1、显函数求导

2、【解析】两边关于x求导得到：$2y'-y^2-2xyy'+e^x=0\Rightarrow y'=\dfrac{e^x-y^2}{2xy-2}$，将$x=0$带入方程得

到$y=1$，$y'=0$，而$y''=\dfrac{(e^x-2yy')(2xy-2)-(2y+2xy')(e^x-y^2)}{(2xy-2)^2}$，带入得到

$f''(0)=-\dfrac{1}{2}$.

【考点延伸】专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.2、隐函数求导 3.5、求高阶导数

三、(每小题 7 分，共 14 分)求极限：

1、【解析】当$x\to 0$时，$\sin x^2\backsim x^2$，构造函数$f(x)=\sqrt{1+x}$，利用拉格朗日中值定理得到，存在ξ在x和$\tan x$之间，使得$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}=\dfrac{\tan x-x}{2\sqrt{1+\xi}}$，当$x\to 0$时，$\xi\to 0$且$\tan x-x\backsim\dfrac{1}{3}x^3$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x\sin x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{2\sqrt{1+\xi}\,x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{2\sqrt{1+\xi}\,x^3\cos x}=\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{6\sqrt{1+\xi}}=\frac{1}{6}.$$

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 【重要题型】 题型 1：不定型极限的计算问题

2、【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}+1}{2e^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{e^{3x}+1}{2e^x}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{e^{3x}+1}{2e^x}}{x}\right)$，而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{e^{3x}+1}{2e^x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{e^{3x}-1}{2}\right)}{x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}-1=\frac{1}{2}$$，因此$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{2}}$.

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 【重要题型】 题型 1：不定型极限的计算问题

四、1、【解析】先讨论连续性：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[x^2\cos\dfrac{1}{x}+\ln(a+x)\right]=\ln a$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+b)=b+1$，则有$\ln a=b+1$；

当$x<0$时，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}+\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x}=\dfrac{1}{a}$

当$x>0$时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+b-(b+1)}{x}=1$

由于$f(x)$在$x=0$处可导，因此$f'_-(0)=f'_+(0)\Rightarrow\dfrac{1}{a}=1\Rightarrow a=1$，又$\ln a=b+1=0\Rightarrow b=-1$，

因此当$a=1$，$b=-1$时，$f(x)$在$x=0$处可导.

2、由第 1 小题可以得到$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a+x}, & x<0\\ e^x, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$，由于当$x>0$时，$\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1$，当$x<0$时，$\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a+x}\right]$不存在，因此$f'(x)$在$x=0$处不连续，在其余各点均连续.

【考点延伸】专题一 函数、极限、连续性 【重要题型】 题型 5：求极限表达式中的未知参数

五、【解析】$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，由于$\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$，

$\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$，则

$$f^{(n)}(0)=\left[\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}\right]\Bigg|_{x=0}=\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}\right]\Bigg|_{x=0}=\frac{(2^{n+1}-1)n!}{2^{n+1}}$$

有$f^{(n+1)}(x)=\left[\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n+1)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n+1)}\right]=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-2)^{n+2}}-\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$，则

$$f(x)=f(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i+1}-1}{2^{i+1}}x^i+\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(\xi-2)^{n+2}}-\frac{(-1)^{n+1}}{(\xi-1)^{n+2}}\right]x^{n+1}$$，其中ξ介于 0 到x之间.

【考点延伸】专题三 导数的应用、中值定理 第三部分 中值定理 3.4、泰勒中值定理

六、【解析】漏斗的弧长：$l=\alpha R$，则漏斗半径：$r=\frac{\alpha R}{2\pi}$，高：$h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$，

因此漏斗的体积$V(\alpha)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha^2R^2}{4\pi}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2\alpha^4-\alpha^6}$，要求最大体积，只需要保证根号里面的最大即可，设$f(x)=4\pi^2x^4-x^6$，$x\in(0,2\pi)$，$f'(x)=16\pi^2x^3-6x^5=0$

$\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$，有此时$f''\left(\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}\right)<0$，因此当$\alpha=\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$时，漏斗的容积最大.

【考点延伸】专题三 导数的应用、中值定理 第一部分 极值、最值和凹凸性 1.2、最值

七、【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\frac{e\ln(1+x)}{x}}{x^2}=e\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x^2}$

$=e\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x^2}$，利用$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)$，

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}=e^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}=1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)^2}{2}+o(x^2)$$

$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$，因此

$$e\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x^2}=e\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}$$

$=e\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{e}{8}$，故$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\frac{e}{8}$.

【考点延伸】专题三 导数的应用、中值定理 第三部分 中值定理 3.4、泰勒中值定理

八、【解析】构造函数$g(x)=xe^xf(x)$，由于$f(1)f(2)<0$，由零点定理知：$\exists x_0\in(1,2)$，成立$f(x_0)=0$，则得到$g(0)=g(x_0)=0$，由于$g(x)$在$[0,2]$上连续，$(0,2)$内可导，由罗尔定理得到$\exists c\in(0,2)$，使得$g'(c)=0$，而$g'(x)=e^x[(x+1)f(x)+xf'(x)]$，由于$e^x\neq0$，因此$(c+1)f(c)+cf'(c)=0$，原命题得证.

【考点延伸】专题三 导数的应用、中值定理 第三部分 中值定理 3.1、罗尔定理

2018-2019 学年第一学期期中考试 A 卷参考答案

一、填空题

1、【正解】36

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 6x}{x}+f(x)+6-6}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 6x}{x}-6}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 6x}{x}-6}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-6x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\cos 6x-6}{3x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-1}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=-36$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

2、【正解】$-\dfrac{1}{3}$

【解析】$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x}=0$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.1——可导性

3、【正解】$\dfrac{3\pi}{4}$

【解析】$y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)=f\left(1-\dfrac{4}{3x+2}\right)$,

而$f'(x)=\arctan x^2$,故$y'=\dfrac{3\times 4}{(3x+2)^2}\cdot\arctan\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^2$,

故$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{12}{4}\cdot\arctan 1=\dfrac{3\pi}{4}$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.4——复合函数求导法则

4、【正解】$-\dfrac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$

【解析】对方程取对数，则$\ln x+f(y)=y+\ln\ln 31$，求导得$\dfrac{1}{x}+f'(y)\cdot y'=y'$，得

$$y'=\frac{1}{x(1-f'(y))}$$

继续求二阶导得$-\dfrac{1}{x^2}+f''(y)\cdot(y')^2+y''\cdot f'(y)=y''$，代入$y'$得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.2——隐函数求导

5、【正解】$(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right)$

【解析】取对数得$\ln y=x\ln(\ln x)$，求导数得$\dfrac{y'}{y}=\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\Rightarrow y'=y\left(\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right)$

故$y'=(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right)$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.2——隐函数求导

二、求极限

1、【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}-e^2+e^2\ln(1+x)}{x}$

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}-e^2}{x}=e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}=e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}{x}$

$=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=-e^2$

故原式$=e^2-e^2=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

2、【解析】因为$\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}$，因此

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\cdot\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n\pi}{2n+\sqrt{1-4n^2}}}=e^{\frac{\pi}{4}}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

3、【解析】原式$=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^3}\left[\left(1+\dfrac{t^2}{2}-t^3\tan t\right)e^t-\sqrt{1+t^6}\right]=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^3}\left[\left(1+\dfrac{t^2}{2}\right)e^t-\sqrt{1+t^6}\right]$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+t^6}e^t\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)-3t^5}{3t^2\sqrt{1+t^6}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1+t+\frac{t^2}{2}}{3t^2}=\dfrac{1}{6}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

三、求导数

1、【解析】令$x=0$，得$f(0)=0$

故$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\cdot\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.1——可导性

2、【解析】应用复合函数求导法则，有

$\dfrac{df(\sin x)}{dx}=f'(\sin x)\cos x,\ \dfrac{df^2(\sin x)}{dx}=2f(\sin x)f'(\sin x)\cos x$

令$x=0$，得$f'(0)=2f(0)f'(0)$，因$f'(0)\neq 0$，因此$f(0)=\dfrac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.4——复合函数求导法则

3、【解析】$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$,变形为$(1+x^2)\cdot y'=1$，利用莱布尼茨公式，两边对x求n阶导数，得

$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0$

令$x=0$,得

$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0)$

$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)$，易得

$y^{(0)}(0)=0, y^{(1)}(0)=1$，由此得：当$n$为偶数$y^{(n)}(0)=0$；当$n$为奇数时，

$y^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.5——求高阶导数

四、 方程两边对 x 求导，得$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0$

故$y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令$y'=0$，得$x(x+2y)=0\Rightarrow x=0$或$x=-2y$

将$x=0$和$x=-2y$代入所给方程，得$\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$和$\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$

又$y''=\dfrac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)-(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}$，将两组值分别代入

$y(0)=-1$为极大值，$y(-2)=1$为极小值

【考点延伸】《考试宝典》专题三 1.1——极值点

五、 曲线$\rho=a(1+\cos\theta)$化为参数方程为

$$\begin{cases}x=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\y=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$$

其斜率为

$$k_1=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{-\sin\theta-\sin2\theta}$$

曲线$\rho=a(1-\cos\theta)$化为参数方程为

$$\begin{cases}x=a(1-\cos\theta)\cos\theta\\y=a(1-\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$$

其斜率为

$$k_2=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta-\cos2\theta}{-\sin\theta+\sin2\theta}$$

再求两曲线的交点，由$\begin{cases}\rho=a(1+\cos\theta)\\\rho=a(1-\cos\theta)\end{cases}$，解得$\cos\theta=0$，于是交点的极坐标为

$\left(\dfrac{\pi}{2},\ a\right)$与$\left(\dfrac{3\pi}{2},\ a\right)$。

将极坐标代入斜率，在两交点处$k_1k_2=-1$，所以在两交点处的切线相互垂直。

【考点延伸】《考试宝典》专题二 3.3——参数方程求导

六、 因为$f(x)$在$[0,3]$上连续，所以$f(x)$在$[0,2]$上连续，且在$[0,2]$上必有最大值M

和最小值m，于是

$m \le f(0) \le M$， $m \le f(1) \le M$， $m \le f(2) \le M$，

故$m \le \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \le M$. 由介值定理知，至少存在一点$c \in [0,2]$，使

$f(c) = \dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1$

因为$f(c)=1=f(3)$，且$f(x)$在$[c,3]$上连续，在$(c,3)$内可导，所以由罗尔定理

知，必存在必存在$\xi \in (0,3)$，使$f'(\xi)=0$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 3.1——罗尔定理

七、由题设可知

$$\lim_{y\to 1}\frac{f(y)-f(1)}{y-1} = \lim_{y\to 1}\frac{f(y)}{y-1} = f'(1) = 2$$

令$y=\sin^2 x+\cos x$，那么当$x \to 0$时$y=\sin^2 x+\cos x \to 1$，故由上式有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}\bullet\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}\right)$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x} = \frac{1}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

八、（1）由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\exists M>0$使得$|a_n| \le M$，且$\forall \varepsilon>0, \exists N_1 \in \mathrm{N}$,当$n>N_1$时

$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,当$n \le N_1$时，有$|a_n - a| \le |a_n| + |a| \le M + |a|$

$$\left|\frac{a_1+..+a_n}{n} - a\right| \le \frac{N_1(M+|a|)}{n} + \frac{(n-N_1)}{n}|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$

（2）令$A_n = a_{n+p} - a_n$

由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n) = \lambda$，知$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lambda$，由第一问的结论知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\ldots+A_n}{n} = \lambda$$

而$A_1+A_2+\ldots+A_n = (a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}) - (a_1+a_2+\ldots+a_p)$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_p)/n = 0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}}{n} = \lambda = p\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.3——极限的计算

2016-2017 学年第一学期期中考试 B 卷参考答案

一、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

1、【正解】$\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

【解析】当$g(x)<0$即$x<0$时，$f[g(x)]=\frac{1}{2}[g(x)-g(x)]=0$；

当$g(x)\geqslant 0$即$x\geqslant 0$时，$f[g(x)]=\frac{1}{2}(x^2+x^2)=x^2$. 综上，$f[g(x)]=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 1.1——函数代换

2、【正解】$x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

【解析】等式两边同时取对数得，$\ln y=\sin x\ln x$，

两边同时对x求导得，$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 2.4——对数求导法

3、【正解】跳跃

【解析】$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=1$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-1)(x-2)}=-1$，

故而$x=2$是跳跃间断点.

【考点延伸】《考试宝典》第一章【重要题型】题型 4——间断点类型的判断

4、【正解】$(-1,1-e^{-2})$

【解析】$y'=(1+2x)e^{2x}$，$y''=(4+4x)e^{2x}$，$y'''=(12+8x)e^{2x}$，令$y''=0$，得$x=-1$，

且$y'''(-1)=4e^{-2}\neq 0$，故$(-1,1-e^{-2})$是曲线的拐点.

【考点延伸】《考试宝典》第三章【重要题型】题型 2——曲线拐点的求法

5、【正解】$2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}+o(x^n)$

【解析】已知$\ln(1+x)$的麦克劳林展开式为$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

将$2x$代入即得.

【考点延伸】麦克劳林展开

二、求极限(每小题 6 分，共 18 分)

1、【解析】原极限$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-4(\pi-2x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{8}=-\frac{1}{8}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 2.3——利用等价无穷小和洛必达法则求极限

2、【解析】原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\frac{\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 2.3——利用等价无穷小求极限

3、【解析】$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\frac{1}{2}$，故原极限$=\frac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 2.3——利用夹逼法则求极限

三、求导数（每小题 7 分，共 28 分）

1、【解析】方程两边同时对x求导得，$e^{xy}(y+xy')+\sec^2(xy)(y+xy')=y'$，

可得$y'=\dfrac{ye^{xy}+y\sec^2(xy)}{1-xe^{xy}-x^2\sec^2(xy)}$，当$x=0$时，$y=1$，代入可得$y'(0)=2$.

【考点延伸】《考试宝典》第二章 3.2——隐函数求导

2、【解析】$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t}=t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{\frac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{t}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 3.3——参数方程求导

3、【解析】$f(x)=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2}\right)$，其$n$阶导数为$f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}\right]$，

则$f^{(100)}(0)=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{(-1)^{100}100!}{(0-3)^{101}}-\dfrac{(-1)^{100}100!}{(0+2)^{101}}\right]=-\dfrac{100!}{5}\left(\dfrac{1}{3^{101}}+\dfrac{1}{2^{101}}\right)$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 3.5——函数的高阶导数

4、【解析】$y=\dfrac{1}{2}(x-x\cos 2x)$，$y'=\sin^2 x+x\sin 2x$，当$n>1$时，

$$y^{(n)}=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{(k)}(\cos 2x)^{(n-k)}=-x\cdot 2^{n-1}\cdot\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)-n\cdot 2^{n-2}\cdot\cos\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 3.5——函数的高阶导数

四、（6 分）

【解析】$f(1)=e$，$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x^2}-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2xe^{x^2}}{1}=2e$；$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-e}{x-1}=2e$，

故$\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b-e)=a+b-e=0$ ①，由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a}{1}=a=2e$，

代入①得，$b=-e$，综上，$\begin{cases}a=2e\\b=-e\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 1.1——函数可导的条件

五、（9 分）

【解析】(1) $\because 0<x_{n+1}=\sin x_n<1$，$\therefore x_{n+1}=\sin x_n<x_n(n\geq 2)$，

因此数列$\{x_n\}$满足单调递减且有界，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，两边同时取极限有$A=\sin A$，解得$A=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 先考虑求$\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to 0}e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{6}t^3}{t^3}}=e^{-\frac{1}{6}}$，

于是有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 2.3——利用单调有界和等价无穷小求极限

六、　（8 分）

【解析】设距离为d，则有$d^2=x^2+(y-b)^2=4y+(y-b)^2=y^2+(4-2b)y+b^2$，

令$f(y)=y^2+(4-2b)y+b^2\ (y\geq 0)$，$f'(y)=2y+4-2b$，

令$f'(y)=0$得唯一驻点$y=b-2$，

①当$b\geq 2$时，易知函数$f(y)$在$y=b-2$处取得极小值，

$d_{\min}=\sqrt{4(b-2)+(b-2-b)^2}=2\sqrt{b-1}$；

②当$b<2$时，函数$f(y)$在$y=0$处取得最小值，此时有$d_{\min}=|b|$.

综上，$d_{\min}=\begin{cases}2\sqrt{b-1}, & b\geq 2\\ |b|, & b<2\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第三章【重要题型】题型1——利用函数单调性求极值

七、（8分）

【证明】先证$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$，

设$f(x)=\ln x$，即有$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，由拉格朗日中值定理得，

至少存在一点$c\in(a,b)$，使得$f'(c)=\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，可知$f'(x)$单调递减，

$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{2a}{2ab}=\dfrac{1}{b}=f'(b)$，又$a<c<b$，所以$f'(b)<f'(c)$，

从而$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$；再证$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$，由$0<a<b$可得$b-a>0$，

则有$\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$，而$\ln b-\ln a=\ln\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，

由于$0<a<b$，所以$\dfrac{b}{a}>1$，令$\dfrac{b}{a}=x$，$x>1$，

则不等式等价于$\ln x<\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，令$g(x)=\ln x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，

$g'(x)=\dfrac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2x\sqrt{x}}<0$，即有$g(x)$在$(1,+\infty)$递减，可得$g(x)<g(1)=0$，

即$\ln x<\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$成立，综上，不等式$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$成立 .

【考点延伸】《考试宝典》第三章3.2——拉格朗日中值定理，构造函数利用函数单调性比较大小

八、（8分）

【证明】由$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$得，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$，则$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，

令$F(x)=f(x)-x^2$，则$F(0)=F(1)=0$，

由罗尔定理可得，至少存在一点$\eta\in(0,1)$使得$F'(\eta)=0$，

又$F'(x)=f'(x)-2x$，则$F'(0)=0$，

由罗尔定理得，至少存在一点$\xi\in(0,\eta)\subseteq(0,1)$使得$F''(\xi)=f''(\xi)-2=0$，

即至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=2$.

【考点延伸】《考试宝典》第三章3.1——罗尔定理的应用

2015-2016学年第一学期期中考试试卷参考答案

一、填空题(每小题8分，共24分)

1、【正解】$\frac{1}{e}$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{1+n}\right)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章【重要题型】题型1——1^∞型极限

2、【正解】$x=1$

【解析】函数的无意义点是$x=k,k\in Z$，$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}$，

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{\pi\cos\pi x}=\frac{1}{\pi}$，当$x=1$时，极限存在，故$x=1$是函数的可去间断点；

当$x\neq1$且，$x\in Z$时，为无穷间断点.

【考点延伸】《考试宝典》第一章【重要题型】题型4——间断点的类型及判断方法

3、【正解】$\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+(e^{2x})^2}\cdot2e^{2x}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章2.4——复合函数求导

4、【正解】$y=x$

【解析】$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=1,b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=0$,故斜渐近线是$y=x$.

【考点延伸】《考试宝典》第三章2.3——斜渐近线的求法

5、【正解】$x+y-3\sqrt{2}=0$

【解析】将极坐标方程化为直角坐标方程，

令$x=\rho\cos\varphi,y=\rho\sin\varphi$，$\rho^3=6\rho^2\sin\varphi\cos\varphi$,即$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=6xy$

求导得，$\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(2x+2yy')=6y+6xy'$

$\varphi=\frac{\pi}{4}$时，$\rho=3$，此时直角坐标系中$x=y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,代入方程求得$y'=-1$，

则切线方程是$x+y-3\sqrt{2}=0$

【考点延伸】《考试宝典》第二章4.1——导数的几何意义

6、【正解】$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】方程两边对x求导得，$2x-y-xy'+2yy'=0$，代入$(1,1)$得，$y'=-1$，

方程两边再对x求导，得，$2-2y'-xy''+2y'^2+2yy''=0$，代入得$y''=-6$，

曲率$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

【考点延伸】《考试宝典》第二章3.2第三章4.2——隐函数求导及曲率的求法

7、【正解】5

【解析】原式$=3x-4\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$=3x-4\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)+\frac{1}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right)$$

$$=\frac{12}{5!}x^5+o(x^5)\Rightarrow n=5$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 2.2——同阶无穷小的应用

8、【正解】2

【解析】原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\left[1-2x+\dfrac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right]-1}{x^2}$

$$=2+\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-2x}{x^2}=4\therefore\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=2$$

分母极限为 0，整体有极限，分子极限必为 0⇒ $f(0)=2$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 1.1——极限与导数定义

二、求极限(每小题 7 分，共 14 分)

1、【解析】原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

【考点延伸】《考试宝典》第一章 2.3——洛必达法则

2、【解析】原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

【考点延伸】《考试宝典》第一章 2.3——洛必达法则

三、求导（每小题 7 分，共 14 分）

1、【解析】$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}$，$y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{6t^2+2}{4t^2}}{-2t}=-\dfrac{3t^2+1}{4t^3}$.

【考点延伸】《考试宝典》第二章 3.3——参数方程求导

2、【解析】$y=\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\Rightarrow y^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+3)^{n+1}}\right]$

$$\therefore y^{(n)}(0)=(-1)^n n!\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 3.5——高阶导数的求法

四、（8 分）

【解析】$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$，可得单减区间(-1,0),单增区间$(0,+\infty)$,$x=0$处取极小值 0.

【考点延伸】《考试宝典》第三章 1.1——函数的单调性与极值

五、（8 分）

【解析】首先用数学归纳法证明$x_n>3$.

假设$x_k>3$成立，$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+3}=3$，故而$x_n>3$成立.

$x^2_{n+1}-x^2_n=6+x_n-x_n^2=-(x_n-3)(x_n+2)<0$，

单减有下界，极限存在，设其为a，令$n\to\infty$取极限.$a=\sqrt{6+a}\Rightarrow a=3$.

【考点延伸】《考试宝典》第一章【重要题型】题型3——利用单调有界求数列极限

六、（10分）

【解析】$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-2e^{2x}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}+\frac{2-2e^{2x}}{2x}\right]=\frac{g''(0)}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{x}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x^2}+\dfrac{g'(x)-2e^{2x}}{x},\ x\neq 0\\ -\dfrac{3}{2},\ x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{g(x)-e^{2x}}{x^2}+\frac{g'(x)-2e^{2x}}{x}\right]=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}=f'(0)\Rightarrow \text{连续}$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章3.1——函数的连续性

七、（10分）

【解析】本题未说在区间可导，禁止使用中值定理.

令$x\to 0$两边同时取极限得：$f(0)-f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow f(x)=2f(\xi)$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi}}\frac{f(\xi)}{f(x)}=\frac{f'(0)}{f'(0)}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章1.1——导数定义

八、（每小题6分，共12分）

【证明】（1）由题意存在$\eta_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$和$\eta_2\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$使得$f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$

令$g(x)=f(x)e^{-2x},g'(x)=[f'(x)-2f(x)]e^{-2x}$，$g(\eta_1)=g(\eta_2)=0$

$\therefore\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)$,使得$g'(\xi)=[f'(\xi)-2f(\xi)]e^{-2\xi}=0$

又$e^{-2\xi}\neq 0\Rightarrow f'(\xi)-2f(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=2f(\xi)$

（2）令$F(x)=f(x)e^{-cx},F'(x)=[f'(x)-cf(x)]e^{-cx}\leqslant 0$

$\therefore F(x)$单减$\Rightarrow F(x)\leqslant F(0)=0$

又$f(x)$为非负可微函数即$f(x)\geqslant 0\Rightarrow F(x)\geqslant 0\therefore F(x)\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$

【考点延伸】《考试宝典》第三章3.1——构造函数、罗尔定理

2014-2015学年第一学期期中考试试卷参考答案

一、填空题(每小题3分，共30分)

1、【正解】$\frac{12}{5}x^2-\frac{8}{5x}$

【解析】令$y=\frac{1}{x}$,得$2f\left(\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{y}f(y)=4y$，$\begin{cases}2f(x)+3xf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{x}\\2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{3}{x}f(x)=4x\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{12}{5}x^2-\frac{8}{5x}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章1.1——抽象函数的求法

2、【正解】-3

【解析】$(1+a\sin x^2)^{\frac{2}{3}}-1\sim\frac{2}{3}a\sin x^2\sim\frac{2}{3}ax^2$，$\cos 2x-1\sim-\frac{1}{2}(2x)^2=-2x^2$，

由$\frac{2}{3}a=-2$得，$a=-3$

【考点延伸】《考试宝典》第一章2.2——等价无穷小

3、【正解】$\frac{e^{f(\ln x)}f'(\ln x)}{x}$

【解析】$y'=e^{f(\ln x)}f'(\ln x)\frac{1}{x}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章2.4——复合函数求导

4、【正解】$x=0,x=2$；$x=-2$

【解析】该函数的所有无意义点是$x=0$、±2，原函数$=\frac{x(x-2)}{x(x+2)}$,

$$\lim_{x\to0}\frac{x(x-2)}{x(x+2)}=-1,\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x(x+2)}=0,故x=0,2是可去间断点$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x(x-2)}{x(x+2)}=\infty,故x=-2是无穷间断点.$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章【重要题型】题型4——间断点

5、【正解】$y=\sqrt[3]{4}a$

【解析】方程两边同时对x求导，得$3x^2+3y^2y'=3ay+3axy'$，将$\left(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{4}a\right)$代入得$y'=0$，

故切线方程是$y=\sqrt[3]{4}a$.

【考点延伸】《考试宝典》第二章3.2——隐函数求导

6、【正解】$\frac{40!\,2^{41}}{(2x-1)^{41}}-\frac{40!}{(x+3)^{41}}$

【解析】$f(x)=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+3}$,

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!\,2^{n+1}}{(2x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}},f^{(40)}(x)=\frac{40!\,2^{41}}{(2x-1)^{41}}-\frac{40!}{(x+3)^{41}}$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章3.5——高阶导数

7、【正解】$y=-x+2$

【解析】$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-x)e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}=-1$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[(3-x)e^{\frac{1}{x}}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[3e^{\frac{1}{x}}+\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[3+\left(-\frac{1}{x}\right)x\right]=2$$

故斜渐近线方程是$y=-x+2$

【考点延伸】《考试宝典》第三章 2.3——斜渐近线

8、【正解】6

【解析】

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{3\sin2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-3\sin2x+6x-6x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-6}{x}+\lim_{x\to0}\frac{6x-3\sin2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-6}{x}+\lim_{x\to0}\frac{3\times\frac{1}{6}(2x)^3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-6}{x}=-4$$

因为分母极限是 0，整体极限存在，所以分子极限也存在，故$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 2.3——极限

9、【正解】$\dfrac{\sqrt{3}}{2a}$

【解析】由直角坐标与极坐标的关系可得，

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta=a(\cos\theta+\cos^2\theta)\\ y=\rho\sin\theta=a\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\end{cases},y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a(\cos\theta+\cos2\theta)}{a(-\sin\theta-\sin2\theta)}=-\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{\sin\theta+\sin2\theta},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{(\sin\theta+2\sin2\theta)(\sin\theta+\sin2\theta)+(\cos\theta+\cos2\theta)(\cos\theta+2\cos2\theta)}{a(\sin\theta+\sin2\theta)^3}$$

$$y'\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=0,y''\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2a}\text{，故曲率}K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2a}$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 3.3 第三章 4.2——参数方程求导和曲率

10、【正解】$-\dfrac{4}{2015}$

【解析】原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^{2014}}{n^{a+1}\left[1-\left(\frac{n+1}{n}\right)^{a+1}\right]}=\lim\limits_{n\to\infty}-\dfrac{4}{n^{a-2013}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{a+1}-1\right]}$

$$=\lim_{n\to\infty}-\frac{4}{n^{a-2013}\cdot(a+1)\left(\frac{n+1}{n}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}-\frac{4}{n^{a-2013}\frac{a+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}-\frac{4}{n^{a-2014}(a+1)},$$

因为极限存在且$b\neq0$，故需使$a=2014$，因此$b=-\dfrac{4}{a+1}=-\dfrac{4}{2015}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 2.3——极限与等价无穷小

二、求极限(每小题5分，共10分)

1、【解析】原式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x+3}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{5x}{x+3}\right)}=e^{-5}=\dfrac{1}{e^5}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章【重要题型】题型1——1^∞型极限

2、【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{\tan x}(1-3^{x-\tan x})}{x\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x\ln3-x\ln3}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3\ln3}{x^3}=\dfrac{\ln3}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章2.3——等价无穷小求极限

三、(每小题5分，共10分)

1、【解析】取对数得 $\ln y=x^3\ln\sin2x$，对x求导得 $\dfrac{1}{y}y'=3x^2\ln\sin2x+\dfrac{2x^3\cos2x}{\sin2x}$，

$$y'=\frac{dy}{dx}=(\sin2x)^{x^3}\left(3x^2\ln\sin2x+\frac{2x^3\cos2x}{\sin2x}\right),$$

$$\frac{dy}{d(x^3)}=\frac{dy}{3x^2dx}=(\sin2x)^{x^3}\left(\ln\sin2x+\frac{2x\cos2x}{3\sin2x}\right)$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章2.4——对数求导法

2、【解析】$\dfrac{dx}{dt}=3t^2+11t+3$, $\dfrac{dy}{dt}=e^{3t}(3t^2+11t+3)$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=e^{3t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3e^{3t}}{3t^2+11t+3}$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章3.3——参数方程求导

四、(10分)

【解析】(1) $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}-2ax}{x}=-2a$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{2e^{\frac{1}{x}}+1}=1,$$

因为$f(x)$在$x=0$处可导，$-2a=1$,即$a=-\dfrac{1}{2}$

(2) $f(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}-2a, & x>0\\[2ex] \dfrac{2e^{\frac{1}{x}}+\frac{2}{x}e^{\frac{1}{x}}+1}{\left(2e^{\frac{1}{x}}+1\right)^2}, & x<0\end{cases}$，当$x=0$时，若$a=-\dfrac{1}{2}$,$f'(0)=1$

若$a\neq-\dfrac{1}{2}$,$f'(0)$不存在

【考点延伸】《考试宝典》第二章1.1——导数与可导存在的条件

五、(8分)

【证明】$x_2=\sqrt{12+x_1}=6<x_1=24$,

假设$x_n<x_{n-1}$,则$x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}<\sqrt{12+x_{n-1}}=x_n$,

故由数学归纳法可知，x_n单调递减，

由$x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}<x_n$得$x_n{}^2-x_n-12=(x_n-4)(x_n+3)>0$可得$x_n>4$，

所以x_n有下界，数列$\{x_n\}$收敛，

设$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$,$x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$两边取极限得：$A=\sqrt{12+A}$,解得$A=4$或$A=-3$(舍)

故$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=4$

【考点延伸】《考试宝典》第一章【重要题型】题型3——利用单调有界求数列极限

六、(8分)

【解析】对$f(x)$进行麦克劳林展开得，

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\cdots\right]+a\left[1+2x^2+\frac{(2x^2)^2}{2!}+\cdots\right]$$

$$+b\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)+cx\left[x^2-\frac{(x^2)^2}{2}+\cdots\right]-6x+d$$

$$\because f(x)\text{为}x\text{的四阶无穷小，故需满足}\begin{cases}a+d=0\\b-6=0\\1+2a=0\\-\dfrac{1}{6}b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=6\\c=1\\d=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》第三章3.4——泰勒展开

七、(8分)【证明】由闭区间连续函数的零点定理可得，

$\exists\alpha\in(1,2),\beta\in(2,3)$使得$f(\alpha)=f(\beta)=0$,

令$g(x)=f(x)e^{-2x}$,则$g'(x)=(f'(x)-2f(x))e^{-2x}$，$g(\alpha)=g(\beta)=0$，

由罗尔定理可得，$\exists\xi\in(\alpha,\beta)\subset(1,3)$使得$g'(\xi)=(f'(\xi)-2f(\xi))e^{-2\xi}=0$,

也即$f'(\xi)=2f(\xi)$.

【考点延伸】《考试宝典》第三章3.1——罗尔定理

八、(8分)【解析】原不等式等价于$\alpha\ln(2x)\geqslant\ln\ln(2x)$,即$\alpha\geqslant\dfrac{\ln\ln(2x)}{\ln(2x)}$，

所以α的最小值也就是要求$f(x)=\dfrac{\ln\ln(2x)}{\ln(2x)}$的最大值，

$f'(x)=\dfrac{1}{\ln^2(2x)}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\ln\ln(2x)\right]$,得驻点为$x=\dfrac{1}{2}e^e$,在$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}e^e\right)$上,

$f'(x)>0,f(x)$递增，在$\left(\dfrac{1}{2}e^e,+\infty\right)$上，$f'(x)<0,f(x)$递减,

所以$f\left(\dfrac{1}{2}e^e\right)=\dfrac{1}{e}$为$f(x)$的极大值，即最大值.故所求$\alpha$的最小值是$\dfrac{1}{e}$.

【考点延伸】《考试宝典》第三章第一部分——函数性质

九、(8 分)【证明】方程两边关于h求导，得

$f'(x+h)=f'(x+\theta h)+\theta hf''(x+\theta h)$，①

所以，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)+f'(x)-f'(x+\theta h)}{h}=\theta\lim\limits_{h\to 0}f''(x+\theta h)$，

即$f''(x)-\theta f''(x)=\theta f''(x)$，

故当$\theta\neq\dfrac{1}{2}$时，$f''(x)=0,f'(x)=C,f(x)$是形如$y=ax+b$的函数，

方程①两边关于h求导得

$f''(x+h)=2\theta f''(x+\theta h)+\theta^2hf'''(x+\theta h)$，

当$\theta=\dfrac{1}{2}$时，有$f''(x+h)=f''\left(x+\dfrac{1}{2}h\right)+\dfrac{1}{4}hf'''\left(x+\dfrac{1}{2}h\right)$

所以，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+h)-f''(x)+f''(x)-f''\left(x+\frac{1}{2}h\right)}{h}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{h\to 0}f'''\left(x+\dfrac{1}{2}h\right)$

即 $f'''(x)-\dfrac{1}{2}f'''(x)=\dfrac{1}{4}f'''(x)$，可得 $f'''(x)=0,f''(x)=C$，故此时$f(x)$是形如

$y=ax^2+bx+c$的函数.

【考点延伸】《考试宝典》第二章 1.1——函数的导函数