南京理工大学课程考试试卷(学生考试用)

课程名称：线性代数　学分：2.5　教学大纲编号：11031201

试卷编号：A　考试方式：闭卷　满分分值：100　考试时间：120 分钟

组卷日期：2019 年 5 月 8 日　组卷教师(签字)：命题组　审定人(签字)：__________

所有解答必须写在答题纸上，写在试卷上无效

一． 是非题：（每小题 3 分，共 15 分）

（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，若对任意 $x \in R^n$，都有 $x^T Ax = 0$，则 $A = 0$。　（　）
2. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则其任一部分向量组也线性相关。　（　）
3. 设 η_1 与 η_2 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同解，则 A 的列向量组线性无关。　（　）
4. 设 ξ_1, ξ_2 分别为方阵 A 的互异特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量，则 $\xi_1 + \xi_2$ 不是 A 的特征向量。（　）
5. 全体 n 阶可逆实矩阵的集合，按照矩阵的加法和数乘运算构成 R 上的线性空间。　（　）

二．填空题：（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，$D_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的余子式，则 $D_{41} + D_{42} + D_{43} + D_{44} =$_________。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$，则 $r_A =$_________。

3. 已知向量 α 在 R^3 中两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标分别为 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$，$y = (y_1, y_2, y_3)^T$，且 $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_2 - y_3, x_3 = y_3$，则由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为__________。

4. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$ 经正交变换化为标准形 $3y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2$，则其正规形的矩阵为__________。

5. 在 $R^{2\times2}$ 中，定义线性变换 $\sigma(X) = XF$，其中 X 为 $R^{2\times2}$ 中的任意矩阵，$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$，则 σ 在 $R^{2\times2}$ 的基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为__________。

三．（12 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $2A^*X = A^{-1}B + X$，求矩阵 X。

四．（10 分）设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \\ -11 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$，求子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的维数和一组基。

五．（12 分）当参数 a, b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + ax_4 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = a - 4 \end{cases}$ 有解？并在有解时求其通解。

六．（14 分）设矩阵 A 为3阶实对称矩阵，$|A| = 4$，$trA = 6$，向量 $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为齐次线性方程组 $(A - 4I)X = 0$ 的解向量，试求 1、正交变换 $X = TY$，化二次型 $f(X) = X^T AX$ 为标准形（要写出所用的正交变换和此标准形）； 2、矩阵 A。

七．（10 分）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -k & 1 & k \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 可对角化， 1、求 k 的值； 2、求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

八．（7 分）设 A 为实对称矩阵，证明当 t 充分大时，$tI + A$ 为正定矩阵。