

# Глубокое обучение

Никита Бекезин

9 апреля 2022

**Неделя 2:** 50 оттенков градиентного спуска

# Agenda

- 50 оттенков градиентного спуска или стратегии его реализации
- Несколько слов о Backpropagation
- Семинар с кодом разных градиентных спусков

# 50 оттенков градиентного спуска



# Как обучать нейросеть?

- Нейросеть - сложная функция, зависящая от весов  $W$
- «Тренировка» — поиск оптимальных  $W$
- «Оптимальных» — минимизирующих какой-то функционал
- Какими бывают функционалы: MSE, MAE, logloss и многие другие
- Как оптимизировать: **градиентный спуск!**

# Градиентный спуск (GD)

Проблема оптимизации:

$$L(w) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n L(w, x_i, y_i) \rightarrow \min_w$$

# Градиентный спуск (GD)

Проблема оптимизации:

$$L(w) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n L(w, x_i, y_i) \rightarrow \min_w$$

Градиент указывает направление максимального роста

$$\nabla L(w) = \left( \frac{\partial L(w)}{\partial w_0}, \frac{\partial L(w)}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial L(w)}{\partial w_k} \right)$$

# Градиентный спуск (GD)

Проблема оптимизации:

$$L(w) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n L(w, x_i, y_i) \rightarrow \min_w$$

Градиент указывает направление максимального роста

$$\nabla L(w) = \left( \frac{\partial L(w)}{\partial w_0}, \frac{\partial L(w)}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial L(w)}{\partial w_k} \right)$$

Идём в противоположную сторону:

$$w^1 = w^0 - \eta \cdot \nabla L(w^0)$$

скорость обучения

# Градиентный спуск (GD)

Проблема оптимизации:

$$L(w) = \sum_{i=1}^n L(w, x_i, y_i) \rightarrow \min_w$$

Инициализация  $w_0$

**while True:**

$$g_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla L(w, x_i, y_i)$$

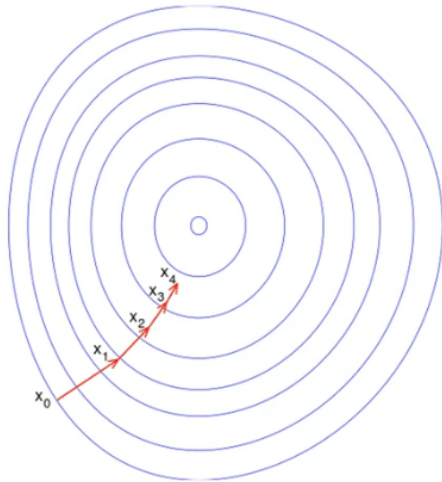
$$w_t = w_{t-1} - \eta_t \cdot g_t$$

**if**  $\|w_t - w_{t-1}\| < \varepsilon :$

**break**



# Градиентный спуск



## Пример:

Проблема оптимизации:

$$L(w) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^T w)^2 \rightarrow \min_w$$

Градиент:

$$\nabla L(w) = -2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^T w) \cdot x_i$$

Идём в противоположную сторону:

$$w^1 = w^0 + 0.001 \cdot 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^T w) \cdot x_i$$

## Пример:

Проблема оптимизации:

$$L(w) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^T w)^2 \rightarrow \min_w$$

Градиент:

$$\nabla L(w) = -2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^T w) \cdot x_i$$

Идём в противоположную сторону:

$$w^1 = w^0 + 0.001 \cdot 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^T w) \cdot x_i$$

Дорого постоянно считать такие суммы!

# Стохастический градиентный спуск (SGD)

Проблема оптимизации:

$$L(w) = \sum_{i=1}^n L(w, x_i, y_i) \rightarrow \min_w$$

Инициализация  $w_0$

**while True:**

    рандомно выбрали  $i$

$$g_t = \nabla L(w_{t-1}, x_i, y_i)$$

$$w_t = w_{t-1} - \eta_t \cdot g_t$$

**if**  $\|w_t - w_{t-1}\| < \varepsilon :$

**break**

## Пример:

Проблема оптимизации:

$$L(w) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^T w)^2 \rightarrow \min_w$$

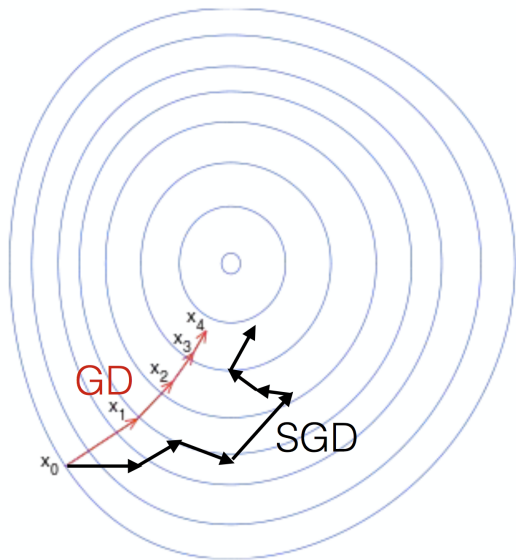
Градиент:

$$\nabla L(w) = -2 \cdot (y_i - x_i^T w) \cdot x_i$$

Идём в противоположную сторону:

$$w^1 = w^0 + 0.001 \cdot 2 \cdot (y_i - x_i^T w) \cdot x_i$$

# Стохастический градиентный спуск (SGD)



- И для GD и для SGD нет гарантий глобального минимума, сходимости
- SGD быстрее, на каждой итерации используется только одно наблюдение
- Для SGD спуск очень зашумлён
- GD:  $O(n)$ , SGD:  $O(1)$

# Mini-batch SGD

Проблема оптимизации:

$$L(w) = \sum_{i=1}^n L(w, x_i, y_i) \rightarrow \min_w$$

Инициализация  $w_0$

**while True:**

    рандомно выбрали  $m < n$  индексов

$$g_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \nabla L(w, x_i, y_i)$$

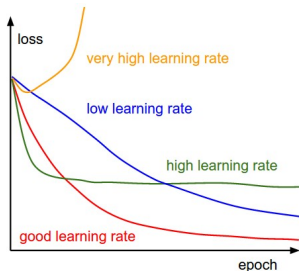
$$w_t = w_{t-1} - \eta_t \cdot g_t$$

**if**  $\|w_t - w_{t-1}\| < \varepsilon :$

**break**

# Вызовы

- Скорость обучения  $\eta$  надо подбирать аккуратно, если она будет большой, мы можем скакать вокруг минимума, если маленькой - вечно ползти к нему.



- К обновлению всех параметров применяется одна и та же скорость обучения. Возможно, что какие-то параметры приходят в оптимальную точку быстрее, и их не надо обновлять.



# Momentum SGD

Мы считали на каждом шаге градиент по формуле

$$g_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \nabla L(w_{t-1}, x_i, y_i).$$

После шага мы забывали его. **Давайте запоминать направление:**

$$h_t = \alpha \cdot h_{t-1} + \eta \cdot g_t$$

$$w_t = w_{t-1} - h_t$$

- Движение поддерживается в том же направлении, что и на предыдущем шаге
- Нет резких изменений направления движения.
- Обычно  $\alpha = 0.9$ .

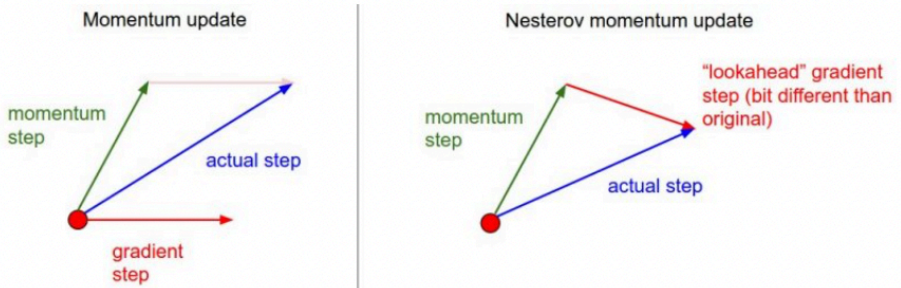
Крутой интерактив для моментума: <https://distill.pub/2017/momentum/>

# Momentum SGD

- Бежим с горки и всё больше ускоряемся в том направлении, в котором были направлены сразу несколько предыдущих градиентов, но при этом движемся медленно там, где градиент постоянно меняется
- Хотелось бы не просто бежать с горы, но и хотя бы на полшага смотреть себе под ноги, чтобы внезапно не споткнуться  $\Rightarrow$  давайте смотреть на градиент в будущей точке
- Согласно методу моментов  $\alpha \cdot h_{t-1}$  точно будет использоваться при шаге, давайте искать  $\nabla L(w_{t-1} - \alpha \cdot h_{t-1})$ .

# Nesterov Momentum SGD

- Мы теперь сначала прыгаем в том же направлении, в каком шли до этого, потом корректируем его (голубая траектория).



$$h_t = \alpha \cdot h_{t-1} + \eta \cdot \nabla L(w_{t-1} - \alpha \cdot h_{t-1})$$

$$w_t = w_{t-1} - h_t$$

Рисунок взят из классических лекций Стэнфорда <https://cs231n.github.io/neural-networks-3/>

# Разная скорость обучения

- Может сложиться, что некоторые веса уже близки к своим локальным минимумам, по этим координатам надо двигаться медленнее, а по другим быстрее  $\Rightarrow$  **адаптивные методы градиентного спуска**
- Шаг изменения должен быть меньше у тех параметров, которые в большей степени варьируются в данных, и больше у тех, которые менее изменчивы

# AdaGrad

$$G_t^j = G_{t-1}^j + g_{tj}^2$$
$$w_t^j = w_{t-1}^j - \frac{\eta}{\sqrt{G_t^j + \varepsilon}} \cdot g_t^j$$

- $g_t^j$  — градиент по  $j$ -ому параметру
- своя скорость обучения для каждого параметра
- обычно  $\eta = 0.01$ , т.к. параметр не очень важен
- $G_t^j$  всегда увеличивается, из-за этого обучение может рано останавливаться (изменение весов затухает)  $\Rightarrow$  RMSprop

# RMSprop

$$G_t^j = \alpha \cdot G_{t-1}^j + (1 - \alpha) \cdot g_{tj}^2$$
$$w_t^j = w_{t-1}^j - \frac{\eta_t}{\sqrt{G_t^j + \varepsilon}} \cdot g_t^j$$

- Обычно  $\alpha = 0.9$
- Скорость обучения адаптируется к последнему сделанному шагу, неконтролируемого роста  $G_t^j$  больше не происходит
- RMSprop нигде не был опубликован, Хинтон просто привёл его в своей лекции, сказав, что это норм тема

# Adam (Adaptive Moment Estimation)

$$\begin{aligned}h_t^j &= \beta_1 \cdot h_{t-1}^j + (1 - \beta_1) \cdot g_{tj} \\G_t^j &= \beta_2 \cdot G_{t-1}^j + (1 - \beta_2) \cdot g_{tj}^2 \\w_t^j &= w_{t-1}^j - \frac{\eta_t}{\sqrt{G_t^j + \varepsilon}} \cdot h_t^j\end{aligned}$$

- $\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.999$
- Комбинируем Momentum и индивидуальные скорости обучения
- Фактически  $h_t$  и  $G_t$  это оценки первого и второго моментов для стохастического градиента

# Adam with bias correction

$$h_t^j = \beta_1 \cdot h_{t-1}^j + (1 - \beta_1) \cdot g_{tj}$$

$$G_t^j = \beta_2 \cdot G_{t-1}^j + (1 - \beta_2) \cdot g_{tj}^2$$

$$\widehat{h}_t^j = \frac{h_t^j}{1 - \beta_1^t}, \quad \widehat{G}_t^j = \frac{G_t^j}{1 - \beta_2^t} \quad (\text{bias correction})$$

$$w_t^j = w_{t-1}^j - \frac{\eta_t}{\sqrt{\widehat{G}_t^j + \varepsilon}} \cdot \widehat{h}_t^j$$



## Зачем идейно нужен bias correction?

- Adam вычисляет скользящее среднее  $WMA_t = \sum_{i=0}^{n-1} w_{t-i} \cdot f_{t-i}$  градиентов и называет его  $h_t$
- Причина: мы не хотим сильно полагаться на отдельно взятый градиент  $g_t$ . Нам хочется использовать знание об изменениях градиента с течением времени
- Один из способов достичь наши цели - это рассчитывать мат. ожидание  $E[g_t] = E[\nabla L(w_t)]$
- Тем не менее в Adam рассчитывается не  $E[\nabla L(w_t)]$ , а  $h_t$ , причем методом скользящего среднего
- В идеальном мире нам хочется:  $E[h_t] = E[\nabla L(w_t)]$ . Поэтому мы делаем bias correction

# Откуда берётся bias correction?

CS7015: Lec 5.9 (Part-2)

$$h_t = \beta_1 \cdot h_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot g_t$$

$$h_0 = 0$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \beta h_0 + (1 - \beta)g_1 \\ &= (1 - \beta)g_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 &= \beta h_1 + (1 - \beta)g_2 \\ &= \beta(1 - \beta)g_1 + (1 - \beta)g_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3 &= \beta h_2 + (1 - \beta)g_3 \\ &= \beta(\beta(1 - \beta)g_1 + (1 - \beta)g_2) + (1 - \beta)g_3 \\ &= \beta^2(1 - \beta)g_1 + \beta(1 - \beta)g_2 + (1 - \beta)g_3 \end{aligned}$$

$$= (1 - \beta) \sum_{i=1}^3 \beta^{3-i} g_i \Rightarrow h_t = (1 - \beta) \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} g_i$$

# Откуда берётся bias correction?

Возьмем мат. ожидание с обеих сторон

$$E[h_t] = E \left[ (1 - \beta) \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} g_i \right]$$

$$E[h_t] = (1 - \beta) E \left[ \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} g_i \right]$$

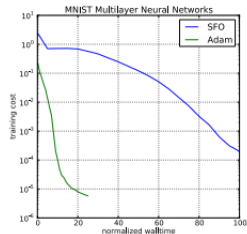
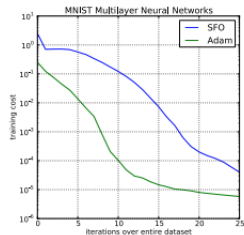
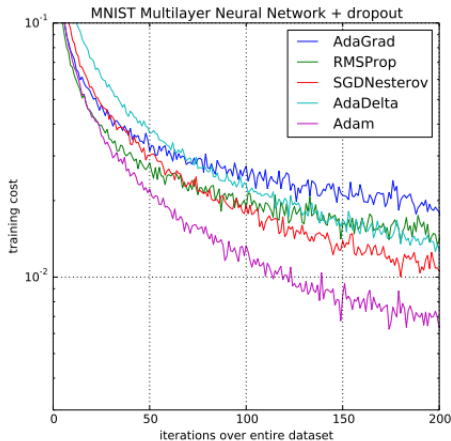
$$E[h_t] = (1 - \beta) \sum_{i=1}^t E[\beta^{t-i} g_i]$$

$$= (1 - \beta) \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} E[g_i]$$

## Откуда берётся bias correction?

$$\begin{aligned}E[h_t] &= (1 - \beta) \sum_{i=1}^t (\beta)^{t-i} E[g] \\&= E[g] (1 - \beta) \sum_{i=1}^t (\beta)^{t-i} \\&= E[g] (1 - \beta) (\beta^{t-1} + \beta^{t-2} + \dots + \beta^0) \\&= E[g] (1 - \beta) \frac{1 - \beta^t}{1 - \beta} \\E[h_t] &= E[g] (1 - \beta^t) \\E\left[\frac{h_t}{1 - \beta^t}\right] &= E[g] \\E[\hat{h}_t] &= E[g] \left( \text{т.к. } \frac{h_t}{1 - \beta^t} = \hat{h}_t \right)\end{aligned}$$

# Сравнение на MNIST

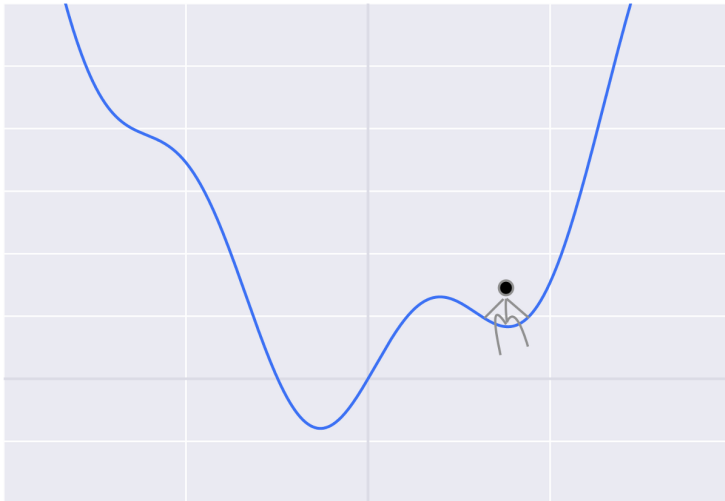


<https://arxiv.org/pdf/1412.6980.pdf>

# Резюме по методам градиентного спуска

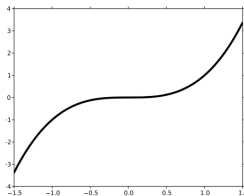
- Momentum SGD сохраняет направление шага и позволяет добиваться более быстрой сходимости
- Адаптивные методы позволяют находить индивидуальную скорость обучения для каждого параметра
- Adam комбинирует в себе оба подхода
- Давайте посмотрим [визуализацию 1](#) и [визуализацию 2](#)
- Но это же не все вызовы!

# Боб чилит в локальном минимуме

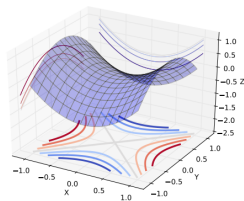


<https://hackernoon.com/life-is-gradient-descent-880c60ac1be8>

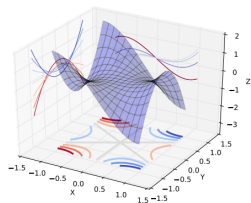
# Седловые точки



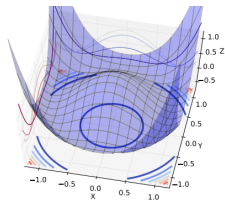
(a)



(b)



(c)



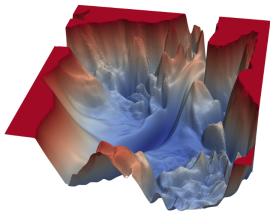
(d)

<https://arxiv.org/pdf/1406.2572.pdf>

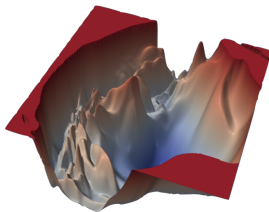


# Визуализация потерь

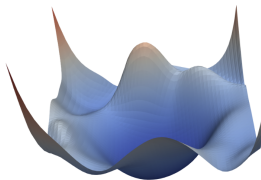
VGG-56



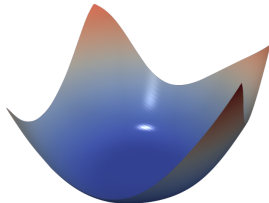
VGG-110



Renset-56



Densenet-121

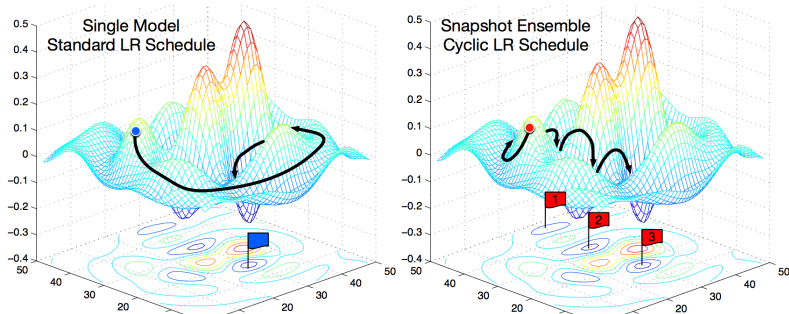


<https://arxiv.org/pdf/1712.09913.pdf>

<https://github.com/tomgoldstein/loss-landscape>

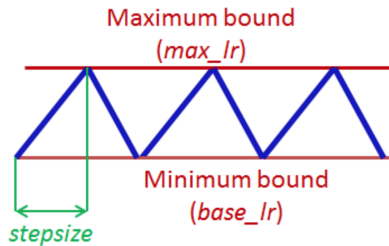
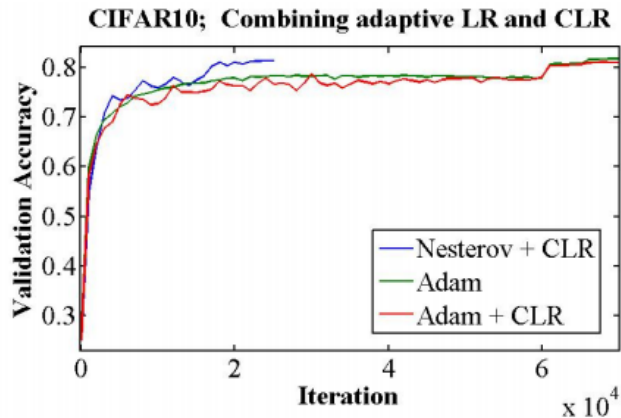
# Циклическая скорость обучения (CLR)

- Хочется, чтобы был шанс вылезти из локального минимума, а также шанс сползти с седла  $\Rightarrow$  давайте менять глобальную скорость обучения циклически



<https://openreview.net/pdf?id=BJYwwY9I>  
<https://arxiv.org/pdf/1506.01186.pdf>  
<https://openreview.net/pdf?id=BJYwwY9I>

# Циклическая скорость обучения (CLR)

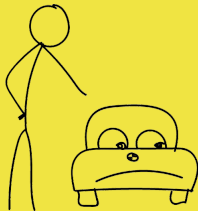


Нестеров с CLR отработал быстрее и лучше Adam

Нет одного правильного алгоритма на все случаи!

Всегда надо экспериментировать

# Так как же обучить нейросетку?



Ты необучаем!

# Нейросеть — сложная функция

- Прямое распространение ошибки (forward propagation):

$$X \Rightarrow X \cdot W_1 \Rightarrow f(X \cdot W_1) \Rightarrow f(X \cdot W_1) \cdot W_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \hat{y}$$

- Считаем потери:

$$Loss = \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2$$

- Для обучения нужно использовать градиентный спуск

# Как обучить нейросеть?

$$L(W_1, W_2) = \frac{1}{2} \cdot (y - f(X \cdot W_1) \cdot W_2)^2$$

Секрет успеха в умении брать производную и градиентном спуске.

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_2} = -(y - f(X \cdot W_1) \cdot W_2) \cdot f(X \cdot W_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_1} = -(y - f(X \cdot W_1) \cdot W_2) \cdot W_2 f'(X \cdot W_1) \cdot X$$

# Как обучить нейросеть?

$$L(W_1, W_2) = \frac{1}{2} \cdot (y - f(X \cdot W_1) \cdot W_2)^2$$

Секрет успеха в умении брать производную и градиентном спуске.

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_2} = -(y - f(X \cdot W_1) \cdot W_2) \cdot f(X \cdot W_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_1} = -(y - f(X \cdot W_1) \cdot W_2) \cdot W_2 f'(X \cdot W_1) \cdot X$$

Дважды ищем одно и то же  $\Rightarrow$  оптимизация поиска производных даст нам алгоритм обратного распространения ошибки (back-propagation)

# Back-propagation

