Wavelet-Kompression und Multiskalenanalyse

Vortrag zum Thema ‘Mathematik in Computerspielen’

Simon Cordes & Niklas Budinger

22. Mai 2018

JGU Mainz

Gliederung

1. Multiskalenanalyse

2. Algorithmen

3. Splinekurven

Multiskalenanalyse

Titel

Inhalt

Inhalt 3

Inhalt 2

Titel

Inhalt

Inhalt 2

Inhalt 3

Inhalt 4

$\Rightarrow$ Inhalt 5

Algorithmen

Haar-Wavelet-Transformation	$\longleftrightarrow$	Basiswechsel zwischen Orthonormalbasen

Zwei Ansätze:

- einzelne Koeffizienten: Projektion durch Skalarprodukt
- gesamte Transformation: Filterbank-Algorithmus

Erinnerung: Filterbank

Die Filterbank-Transformation:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
C^k & \rightarrow & C^{k-1} & \rightarrow & C^{k-2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & C^1 & \rightarrow & \mathrm{C}^0 \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & \mathrm{D}^{k-1} & & \mathrm{D}^{k-2} & & \dots & & \mathrm{D}^1 & & \mathrm{D}^0
\end{array}$$

mit

$$C^j = P^j \; C^{j-1} + Q^j \; D^{j-1}$$

bzw.

$$C^{j-1} = A^j \; C^j \quad , \quad D^{j-1} = B^j \; C^j$$

Erinnerung: Filterbank

Die Filterbank-Transformation:

$$\begin{array}{ccccccccccc} C^k & \rightarrow & C^{k-1} & \rightarrow & C^{k-2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & C^1 & \rightarrow & C^0 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & D^{k-1} & & D^{k-2} & & \dots & & D^1 & & D^0 \end{array}$$

mit

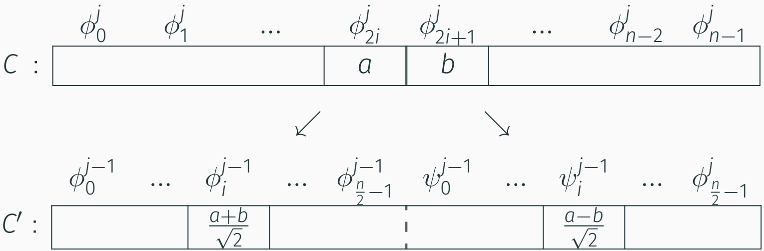
$$C^j = P^j \; C^{j-1} + Q^j \; D^{j-1}$$

bzw.

$$C^{j-1} = A^j \; C^j \quad , \quad D^{j-1} = B^j \; C^j$$

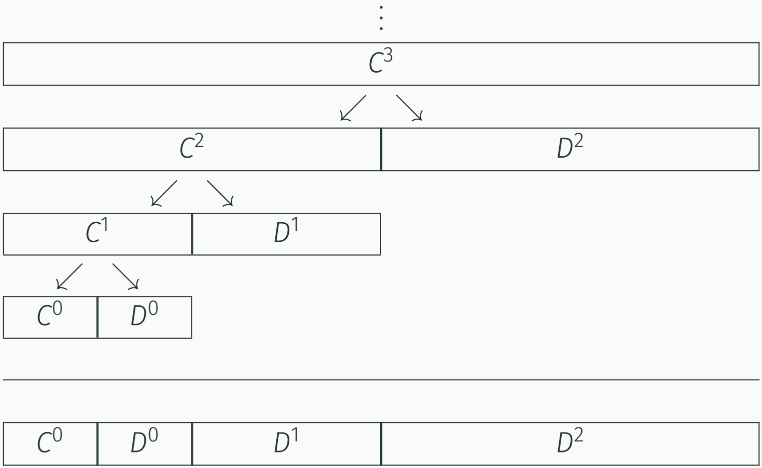
Mehrere Matrixmultiplikationen – Teuer!?

Einzelschritt im Speicher:

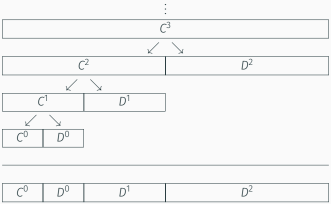


1D Haar-Wavelet-Transformation

Gesamt-Transformation im Speicher:



1D Haar-Wavelet-Transformation




```
def analysis(C):
    C' = copy(C)
    h = C.size
    while h > 1:
        C'[0:h] = analysisStep(C'[0:h])
        h = h // 2
    return C'
```

Ergebnis:
Die Algorithmen aus dem 1D-Fall können zur effizienten Implementierung der Transformation im Standard- und im Nicht-Standard-Fall wiederverwendet werden.

Laufzeitkomplexität für $n \times n$-Input:

- Standard-Basis:
  $4n^2 - 4n$
- Nicht-Standard-Basis:
  $\frac{8}{3}(n^2 - 1)$

Splinekurven

Definition: Splinefunktion
Sei $\mathbf{t} = (t_0, ..., t_n)$ eine monoton steigende Sequenz reeller Zahlen und $d \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $S : [t_0, t_n] \to \mathbb{R}$ in $C^{d-1}(\mathbb{R})$ heißt Splinefunktion vom Grad d zum Knotenvektor $\mathbf{t}$, wenn $S|_{[t_k, t_{k+1}]}$, $k = 0, ..., n-1$, ein Polynom vom Maximalgrad d ist.

Die Menge aller Splinefunktionen selben Grades d und zum selben Knotenvektor $\mathbf{t}$ bilden einen reellen Vektorraum mit $n + d$ Dimensionen.

Definition: B-Spline-Funktionen

Sei $\tau = (t_{-d}, ..., t_0, ..., t_n, ...t_{n+d})$ eine monoton steigende Sequenz reeller Zahlen und $d \in \mathbb{N}_0$. Definiere die B-Spline-Funktionen $(B_{i,d})_{i=1}^{n+d}$ vom Grad d zu den Knoten τ durch

$$B_{i,0}(x) := \begin{cases} 1 & \tau_i < x < \tau_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ,$$

$$B_{i,k}(x) := \frac{x - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{\tau_{i+k+1} - x}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).$$

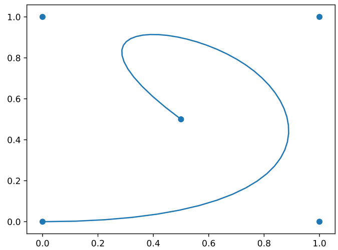
$(B_{i,d})_{i=1}^{n+d}$ ist eine Basis des Splineraums vom Grad d zum Knotenvektor $\mathbf{t} = (t_0, ..., t_n)$.

Grundlagen: B-Spline-Kurven

Definition: B-Spline-Kurve
Für $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^{n+d}$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^m$ heißt

$$\mathbf{f}(x) := \sum_{i=1}^{n+d} \mathbf{c}_\mathbf{i} B_{i,d}(x)$$

B-Spline-Kurve zu den Kontrollpunkten $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^{n+d}$.



Analyse von B-Spline-Kurven ergibt sich Komponentenweise.

Kochrezept:

- Geschachtelte Splineräume:
  Die Splineräume V_d^k eines Grades d zu den Knoten
  $$\mathbf{t}^k = \left(\frac{0}{2^k}, \frac{1}{2^k}, ..., \frac{2^k-1}{2^k}, \frac{2^k}{2^k}\right)$$
  sind geschachtelt. Wähle als Skalierungsfunktionen die B-Splines zu
  $$\tau^k = (\underbrace{0, ..., 0}_{d}, \frac{0}{2^k}, \frac{1}{2^k}, ..., \frac{2^k-1}{2^k}, \frac{2^k}{2^k}, \underbrace{1, ..., 1}_{d}).$$

Multiskalenanalyse von Splinekurven

- Standard-Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

- Wavelets:
  Wahl ist nicht eindeutig! Man verlangt zum Beispiel minimalen Träger, um die Wavelets festzulegen. Diese beschleunigt zudem die Berechnungen.

Vielen Dank!