Конспект лекций курса ФН-12
“Интегралы и дифференциальные уравнения”.
Модуль 1: Интегралы

Жихарев Кирилл ИУ7-24Б

Содержание

1 Первообразная и неопределённый интеграл

Определение 1.1 (Первообразная). Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ верно:

$$F'(x) = f(x)$$

1. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), то $F(x) + C$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), где $\forall C - const$.
2. Если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b) F'(x) = 0$, то $F(x) = const \forall x \in (a, b)$.
3. Любая непрерывная функция на (a, b) имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две отличаются на константу.

Определение 1.2 (Неопределённый интеграл). Множество первообразных функции $f(x)$ на (a, b) называется *неопределённым интегралом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- $\int$ – знак интеграла
- $f(x)$ – подынтегральная функция
- $f(x)dx$ – подынтегральное выражение
- x – переменная
- $F(x) + C$ – множество первообразных
- C – константа

Определение 1.3 (Интегрирование). Интегрированием называется процесс нахождения неопределённого интеграла.

1.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство (1). Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

□

Свойство (2). Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = d(F(x)+C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$$

□

Свойство (3). Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

□

Свойство (4). Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \lambda \neq 0$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная $f(x)$. Тогда:

$$\lambda \int f(x)dx = \lambda(F(x)+C), \forall c - const$$

Функция $\lambda F(x)$ – первообразная $\lambda f(x)$:

$$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$$

Рассмотрим левую часть:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - -const$$

Т.к константы C_1 и C – произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda(F(x)+C)$ и $\lambda F(x) + C_1$ совпадают. □

Свойство (5). Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ имеет первообразную на (ab) , причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx$$

Доказательство. $F_1(x)$ – первообразная $f_1(x)$
$F_2(x)$ – первообразная $f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x) &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 + C_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} F'(x) = (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)) &= \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \\ &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \tag{3}$$

Т.к константы C, C_1 и C_2 – произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство:

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

Тогда множества $\lambda_1 F_1(x)+\lambda_2 F_2(x)+\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2$ и $\lambda_1 F_1(x)+\lambda_2 F_2(x)+C$ совпадают. □

Свойство (Инвариантность формы интегрирования). Если $\int f(x)dx + F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $C - const$, где $u = \varphi(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство. Пусть x – переменная, $f(x)$ – непрерывная функция, $F(x)$ – первообразная $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C - const$$

Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Найдём дифференциал $F(u)$:

$$\begin{aligned} d(F(u)) = F'(u)u'(x)dx = \begin{vmatrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = F'(u)du = \\ = f(u)du \end{aligned}$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C, \quad F(u) + C$$

□

1.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (граф. функций) вида:

$$y = F(x) + C, \quad \forall C = const$$

1.3 Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall C - const$
2. $\int dx = x + c$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
15. $\int shxdx = chx + C$
16. $\int chxdx = shx + C$
17. $\int \frac{dx}{ch^x} = \operatorname{th} x + C$
18. $\int \frac{dx}{sh^x} = -\operatorname{cth} x + C$
19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$
20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)| + C$

1.4 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование (свойства + таблицы).
2. Метод подстановки.
   (a) Занесение под знак дифференциала
   (b) Замена переменной. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференциама на T, а множество X – множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда если существует первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то на множестве T верно равенство:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{vmatrix} = \int f(\phi(t))\varphi'(t)dt$$

3. Интегрирование по частям.

1.4.1 Непосредственное интегрирование

Используя свойства и таблицу интегралов.

1.4.2 Занесение под знак дифференциала

1.4.3 Замена переменной

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на T, а множество X – множество значений этой функции на котором определена $f(x)$. Тогда, если существует первообразная функции $f(x)$ на X, то на множестве T верно равенство:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

1.4.4 Интегрирование по частям

Пусть функция $u = u(x)$, $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемы. Тогда справедлива формула:

$$\int udu = uv - \int vdu$$

Доказательство. Рассмоттрим произведения двух функций: $u(x) \cdot v(x)$. Дифференциал

$$d(uv) = udv + vdu \quad udv = d(uv) - vdu$$

Интегрируем:

$$\int d(uv) = \int (d(uv) - vdu)$$

По свойству неопределённого интеграла:

$$\int ud = uv - \int vdu$$

□

2 Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 2.1 (Рациональная дробь). *Дробно-рациональной функцией* или *рациональной дробью* называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Определение 2.2 (Правильная рациональная дробь). Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$.

Определение 2.3 (Неправильная рациональная дробь). Рациональная дробь называется *неправильной*, если степень числителя *не меньше* степени знаменателя, т.е. $m \geq n$.

2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

1.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a}{x-a} = A\ln|x-a| + C \quad \forall C$$

2.

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{(x-a)^k} &= A\int \frac{dx}{(x-a)^k} \\ &= A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) \\ &= \frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k} + C \quad \forall c\end{aligned}$$

3.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = (*)$$

$$\begin{aligned}x^2+px+q &= x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + b^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(*) &= \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})+b^2}dx = \begin{vmatrix} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \end{vmatrix} \\
&= \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+b^2}dt = \\
&= M\int \frac{t}{t^2+b^2}dt + \left(N-\frac{p}{2M}\right)\int \frac{dt}{t^2+b^2} = \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+b^2\right)}{t^2+b^2} + \left(N-\frac{p}{2}M\right)\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} = \\
&= \frac{M}{2}\ln|t^2b^2| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} + C = \\
&= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{ps^2}{4}}} + C
\end{aligned}
$$

2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

Где $L(x)$ – многочлен, частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$; $r(x)$ – остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$; $\frac{r(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Интегрируя выражение выше мы получаем:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int L(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx$$

Вывод: интегрирование непрерывной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Теорема 2.1 (О разложении правильной рациональной дроби на простейшие). Любая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой может быть представлен в виде:

$$Q(x) = (x-x_1)^k\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{k_n}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$$

может быть представлена и притом единственном образом в виде суммы многочлена и простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$$

2.2.1 Метод неопределенных коэффициентов

Равенство в теореме о разложении правильной рациональной дроби на простые представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

2.2.2 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей, подставляем конкретные значения переменной x, т.к. оно верно $\forall x$. Обычно вместо x подставляют действительные корни знаменателя.

3 Определенный интеграл

Тут пропущена лекция.

3.1 Свойста определённого интеграла (пр)

Теорема 3.1 (Об интегрировании неравенства)**.** Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]$ $f(x) > g(x)$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. По условию $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$. Обозначим $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$. Тогда по теореме **??** $\implies \int_a^b h(x)dx \geq 0$. Получаем:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$$

По теореме **??**:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

□

Теорема 3.2 (Об оценке модуля определённого интеграла)**.** Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируема на оценке $[a, b]$, то справедливо неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. $\forall x \in [a, b]$ верно неравенство:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

По теореме **??** и **??** $\implies$:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \geq \int_a^b |f(x)|fx$$

□

Теорема 3.3 (О среднем значении для определённого интеграла)**.** Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то:

$$\exists c \in [a,b] : f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего значения, т.е. $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M$ По теореме **??**:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

По теореме **??**:

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx$$

По теореме **??**:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \tag{1}$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Больцана-Коши, она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значениями. Разделим (1) на $b-a$:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

по теореме Больцано-Коши:

$$\exists c \in [a,b] : f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

□

Теорема 3.4 (Об оценке определённого интеграла)**.** Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b] : m \leq f(x) \leq$

$M, \quad g(x) \geq 0$. Тогда:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Т.к. $\forall x \in [a,b]$ верны неравенства:

$$\begin{aligned} m \leq& f(x) \leq M \quad m, M \in \mathbb{R} \\ &g(x) \geq 0 \\ mg(x) \leq& f(x)g(x) \leq Mg(x) \end{aligned}$$

По теореме **??**:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

□

Следствие 3.4.1. $g(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$:

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$$

4 Определенный интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Рассмотрим $\int_a^b f(x)dx$. Закрепим нижний предел интегрирования a. Изменяем верхний предел интегрирования b. Чтобы подчеркнуть изменение предела интегрирования, заменим $b \to x$, $x \in [a,b] \implies [a,x] \subset [a,b]$:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Определение 4.1. Определенным интегралом с переменным верхнем пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на $[a,b]$ называется интеграл вида:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Геометрический смысл

$\mathcal{I}(x)$ – переменная площадь криволинейной трапеции с основанием $[a-x] \subset [a,b]$

4.1 Свойства определенного интеграла с переменным верхним пределом интегрирования

Теорема 4.1 (Непрерывность). Если функция $f(x)$ на $[a,b]$ непрерывна, то $\mathcal{I}(x) \int_a^b f(t)dt$ – непрерывна на $[a,b$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{I}(x) = \int_a^b f(t)dt$. Найдем $\mathcal{I}(\S + \cdot\S) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$. Тогда:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{I}(x) &= \mathcal{I}(x+\Delta x) - I(x)\\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = (*)\end{aligned}$$

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ $\implies$ $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ $\implies$ применяем свойство аддитивности определенного интеграла:

$$\begin{aligned}(*) &= \int_a^x f(t)dt + \int_a {}_{x+\Delta x} f(t) - \int_a^x f(t)dt\\ &= \int)_x^{x+\Delta x} = (*)\end{aligned}$$

Согласно теореме **??**:

$$\begin{aligned}(*) &= f(c)(x+\Delta x - x)\\ &= f(c)\Delta x, \text{ где } c \in [x, x+\Delta x]\end{aligned}$$

Найдем предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta\mathcal{I}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)\Delta x = 0$$

По определению непрерывной функции:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

□

Замечание. Такого вопроса на экзамене нет, но при доказательстве следующей теоремы нужно доказать эту.

Теорема 4.2 (О производной). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\forall x \in [a,b]$ верно равенство:

$$(\mathcal{I}(x))' = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Доказательство. По определению производной функции:

$$(\mathcal{I}(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\mathcal{I}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

$\square$

Следствие 4.2.1. Функция $I(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $[a, b]$ по теореме **??**.

4.2 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 4.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда по следствию из теоремы **??**. По свойству первообразной:

$$\mathcal{I}(\S) - F(x) = C, \quad C = const$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \text{ где } C = const \tag{*}$$

Возьмем $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Подставим $C = -F(a)$ в $(*)$:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Возьмем $x = b$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

$\square$

4.3 Методы вычисления определенного интеграла

4.3.1 Интегрирование по частям

Теорема 4.4. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы, тогда имеет место равенство:

$$\int_a^b udu = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Доказательство. Рассмотрим произведение функций uv. Дифференциал:

$$d(uv) = vdu + udv$$
$$udv = d(uv) - vdu$$

Интегрируем:

$$\int_a^b udv = \int_a^b (d(uv) - vdu)$$
$$\int_a^b udv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b vdu$$
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

□