Содержание

Линейная алгебра и функция нескольких переменных. Модуль 1. Лекции

1 Линейные пространства

Определение 1.1 (Линейное пространство)**.** Линейное пространство $\mathbb{L}$ над множеством значений P (элементы будем называть векторами), для которого определены операции сложения и умножеения на скаляр, а также верно:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L} \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
2. $\forall \vec{x}, \vec{y} \quad (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
3. $\exists \vec{0} : \forall \vec{x} \in \mathbb{L} \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
4. $\forall \vec{x} \in \mathbb{L} \exists \vec{y} : \vec{x} + \vec{y} -$ существование противоположного вектора $(-\vec{x})$
5. $\forall \vec{x} \in \mathbb{L} \quad (\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
6. $\forall \vec{x} \quad 1\vec{x} = \vec{x}$
7. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
8. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

В рамках курса считаем линейное пространство над элементами множества $\mathbb{R}$.

Примерами линейного пространства могут быть:

1. Множество свободных векторов
2. n-мерное пространство (R^n)
3. Множество непрерывных функция на отрезке
4. Множество матриц одинакового размера
5. Множество многочленов степени n
6. и т.п.

1.0.1 Свойства линейных пространств

Свойство. Нулевый элемент единственен.

Доказательство. Пусть существуют два нулевых элемента: $\vec{0_1}$ и $\vec{0_2}$. Тогда:

$$\vec{0_1} = \vec{0_1} + \vec{0_2} = \vec{0_2} + \vec{0_1} = \vec{0_2}$$

□

Свойство. Для каждого элемента противоположный единственный.

Доказательство. Пусть существую два противоположных элемента для $\vec{x}$: $\vec{y_1}$ и $\vec{y_2}$. Тогда:

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y_1}&=\vec{0}\\ \vec{x}+\vec{y_2}&=\vec{0}\\ \vec{x}+\vec{y_1}&=\vec{x}+\vec{y_2}\\ \vec{y_1}&=\vec{y_2}\end{aligned}$$

□

Свойство.

$$0\cdot\vec{x}=\vec{x}$$

Доказательство.

$$0\vec{x}=0\vec{x}+\vec{0}=(0+1)\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$$

□

Свойство.

$$(-1)\cdot\vec{x}=(-\vec{x})$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}(-1)\cdot\vec{x}+\vec{x}=(1-1)\vec{x}=\vec{0}=\vec{x}+-\vec{x}\\ \implies(-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}\end{gathered}$$

□

Свойство. Уравнение

$$\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{L}\quad\vec{x}+\vec{a}=\vec{y}$$

имеет решение и притом единственное.

Доказательство. Пусть:

$$\vec{a}=\vec{y}+(-\vec{x})$$

Тогда подставляя в изначальное уравнение получаем тождество. □

1.1 Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть есть некоторый набор векторов $\vec{x_1},\ldots,\vec{x_k}\in\mathbb{L}$.

Определение 1.2 (Линейная комбинация)**.** Линейной комбинацией называется выражение вида:

$$\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \ldots + \lambda_k + \vec{x_k}$$

Определение 1.3 (Тривиальная линейная комбинация)**.** Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все коэффициенты равны нулю.

Определение 1.4 (Нетривиальная линейная комбинация)**.** Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если хотя бы один коэффициент не равен нулю.

Определение 1.5 (Линейно зависимая комбинацию)**.** Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Теорема 1.1. Чтобы система была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы любой вектор вектор линейно выражался через остальные.

Свойство. Если в системе векторов существует нулевой вектор, то такая система линейно зависима.

Свойство. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то система тоже линейно зависима.

Свойство. Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема тоже линейно независима.

Свойство. Если векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства $\mathbb{L}$ линейно независимы и вектор $y \in \mathbb{L}$ не является их линейной комбинацией, то расширенная система векторов $x_1, \ldots, x_n, y$ является линейно независимой.

1.2 Базис, размерность пространства

Определение 1.6 (Базис)**.** *Базисом* линейного пространства $\mathbb{L}$ называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия:

1. эта система векторов линейно независима;
2. каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Определение 1.7. Коэффициенты разложения вектора по базису линейного пространства, записанные в соответствии с порядком векторов в базисе, называют *координатами вектора в этом базисе.*

Теорема 1.2 (О единственности разложения)**.** Разложение по базису *единственно.*

Определение 1.8 (Конечномерное пространство)**.** Пространство называется *конечномерное*, если существсвует базис конечного числа векторов.

Определение 1.9 (Бесконечномерное пространство)**.** Пространство называется *бесконечномерное*, если не существсвует базис конечного числа векторов.

Теорема 1.3. Если $\mathbb{L}$ – конечномерное пространство, тогда все базисы состоят из конечного числа векторов.

Определение 1.10 (Размерность линейного пространства)**.** Максимальное количество линейно независимых векторов в данном линейном пространстве называют *размерностью линейного пространства.*

$$\dim(\mathbb{L}) = n$$

Линейная зависимость (независимость) равносильна линейной зависимости (независимости) столбцов координат в том же базисе.

1.3 Преобразование координат вектора при замене базиса

Пусть в n-мерном пространстве $\mathbf{L}$ заданы два базиса:

$$b = (b_1, \dots b_n) \quad c = (c_1, \dots c_n)$$

Любой вектор мжно разложить по базису b. А значит любой вектор из базиса c может быть представлен как:

$$c_i = \lambda_{1i} b_1 + \dots + \lambda_{ni} b_n, \quad i = \overline{1, n}$$

Запишем в матричном виде:

$$c_i = b \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}$$

Или

$$c = bU \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Определение 1.11 (Матрица перехода). Матрицу U (1.11) называют *матрицей перехода* от старого базиса b к новому базису ,c.

Свойство (1). Матрица перехода невырождена и всегда имеет обратную.

Свойство (2). Если в n-мерном линейном пространстве задан базис b, то для любой невырожденной квадратной матрицы U порядка n существует такой базис c в этом линейном пространстве, что U будет матрицей перехода от базиса b к базису c.

Свойство (3). Если U – матрица перехода от старого базиса b к новому базису c линейного пространства, то U^{-1} – матрица перехода от базиса c к базису b.

Свойство (4). Если в линейном пространстве заданы базисы b, c и d, причем U – матрица перехода от базиса b к базису c, а V – матрица перехода от базиса c к базису d, то произведение этих матриц UV – матрица перехода от базиса b к базису d.

2 Линейные подпространства

Определение 2.1 (Линейное подпространства). Подмножество $\mathbb{H}$ линейного пространства $\mathbb{L}$ называют *линейным подпространством*, если выполнены следующие два условия:

1. Сумма любых двух векторов из $\mathbb{H}$ принадлежит $\mathbb{H} : \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{H} \implies \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{H}$;
2. Произведение любого вектора из $\mathbb{H}$ на любое действительное число снова принадлежит $\mathbb{H} : \vec{x} \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\vec{x} \in \mathbb{H}$.

Определение **??** фактически говорит о том, что линейное подпространство – это любое подмножество данного линейного пространства, замкнутое относительно линейных операций, т.е. применение линейных операций к векторам, принадлежащим этому подмножеству, не выводит результат за пределы подмножества.

В любом линейном пространстве $\mathbb{L}$ всегда имеются два линейных подпространства: само линейное пространство $\mathbb{L}$ и *нулевое подпространство* $\{0\}$. Эти линейные подпространства называют *несобственными*, в то время как все остальные линейные подпространства называют *собственными*.

Определение 2.2 (Нулевое подпространство). *Нулевым подпространством* называется подпространство, состоящее из единственного элемента – нулевого.

Определение 2.3 (Несобственные пространства). Линейные подпространства $\mathbb{L}$ и нулевое подпространство линейного пространства $\mathbb{L}$ называются *несобственными* .

Определение 2.4 (Собственные пространства). Линейные подпространства линейного пространства $\mathbb{L}$ за исключением несобственных называются *несобственными* .

Пусть в линейном пространстве $\mathbb{L}$ задана система векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$. Рассмотрим множество $\mathbb{H}$ всех векторов в $\mathbb{L}$, которые могут быть представлены линейной комбинацией этих векторов. Это множество является линейным подпространством в $\mathbb{L}$. Пусть:

$$\vec{x} = \vec{x}_1\vec{e}_1 + \ldots + \vec{x}_k\vec{e}_k \quad \vec{y} = \vec{y}_1\vec{e}_1 + \ldots + \vec{y}_k\vec{e}_k$$

Тогда:

$$\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1)\,\vec{e}_1 + \ldots + (\vec{x}_k + \vec{y}_k)\,\vec{e}_k \in H$$
$$\lambda\vec{x} = (\lambda\vec{x}_1)\,\vec{e}_1 + \ldots + (\lambda\vec{x}_k)\,\vec{e}_k \in H$$

Описанное линейное подпространство называют *линейным подпространством.*

Определение 2.5. Линейной оболочкой линейного пространства $\mathbb{L}$ называется совокупность всех конечных линейных комибнаций векторов данной системы.

2.1 Ранг системы векторов

Определение 2.6 (Ранг системы векторов). *Рангом системы векторов* в линейном пространстве называют размерность линейной оболочки этой системы векторов.

Теорема 2.1. Ранг системы векторов $a = (a_1, \ldots, a_k)$ линейного пространства $\mathbb{L}$ равен:

1. максимальному количеству линейно независимых векторов в системе a;
2. рангу матрицы, составленной по столбцам из координат векторов $a_1, \ldots, a_k$ в каком-либо базисе линейного пространства $\mathbb{L}$.

2.2 Евклидово пространство

Определение 2.7 (Евклидово пространство). Линейное пространство $\mathbb{E}$ называют *евклидовым пространством*, если в этом пространстве задано скалярное умножение, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}$ поставлено в соответствие действительное число $(\vec{x}, \vec{y})$, называемое скалярным произведением. При этом выполняются следующие аксиомы скалярного умножения:

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
2. $(\vec{x} + y, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$;
3. $(\lambda x, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, причём $(x, \vec{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$.

Замечание. Т.е. евклидово пространство – это пространство, в котором определена операция *скалярного произведения*.

Свойство (1).

$$(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$$

Свойство (2).

$$(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$$

Свойство (3).

$$(\vec{x}, \vec{0}) = 0$$

2.3 Неравенство Коши – Буняковского

Теорема 2.2. Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ евклидова пространства $\mathbb{E}$ справедливо неравенство:

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{y})(\vec{y}, \vec{y})$$

Определение 2.8 (Угол между векторами)**.** *Углом* φ *между* ненулевыми *векторами* $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ называют такое значение $\varphi \in (0, \pi)$ что:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}$$

где $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, а $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$

2.4 Норма вектора

Определение 2.9. Функцию, заданную на линейном пространстве $\mathbb{L}$, которая каждому вектору $\vec{x} \in \mathbb{L}$ ставит в соответствие действительное число $\|\vec{x}\|$, называют *нормой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам нормы:

1. $\|\vec{x}\| > 0$, причем равенство $\|\vec{x}\| = 0$ возможно только при $\vec{x} = \vec{0}$;
2. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|, \lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ (неравенство треугольника).

Теорема 2.3. Всякое скалярное умножение в евклидовом пространстве определяет норму согласно формуле

$$\|x\| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$$

2.5 Ортогональные системы векторов

Определение 2.10. Два вектора в евклидовом пространстве называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{x} \perp \vec{y} \iff (\vec{x},\vec{y}) = 0$$

Говорят, что вектор $\vec{x}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ ортогонален подпространству H, и обозначают $\vec{x} \perp \mathbb{H}$, если он ортогонален каждому вектору этого подпространства.

Определение 2.11 (Ортогональная система векторoм)**.** Систему векторов евклидова пространства называют *ортогональной*, если любые два вектора из этой системы ортогональны.

Теорема 2.4. Любая ортогональная система ненулевых векторoм всегда линейно независима.

Определение 2.12 (Ортогональный базис)**.** Если базис евклидова пространства представляет собой ортогональную систему векторов, то этот базис называют *ортогональным*.

Определение 2.13. Ортогональный базис называют *ортонормированным*, если каждый вектор этого базиса имеет норму, равную единице.