Интегралы и дифференциальные уравнения. Модуль 1. Лекции

1 Первообразная и неопределённый интеграл

Определение 1.1 (первообразная). Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ верно:

$$F'(x) = f(x)$$

1. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), то $F(x) + C$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), где $\forall C - const$.
2. Если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b) F'(x) = 0$, то $F(x) = const \forall x \in (a, b)$.
3. Любая непрерывная функция на (a, b) имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две отличаются на константу.

Определение 1.2 (неопределённый интеграл). множество первообразных функции $f(x)$ на (a, b) называется *неопределённым интегралом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- $\int$ – знак интеграла
- $f(x)$ – подынтегральная функция
- $f(x)dx$ – подынтегральное выражение
- x – переменная
- $F(x) + C$ – множество первообразных
- C – константа

Определение 1.3 (Интегрирование). Интегрированием называется процесс нахождения неопределённого интеграла.

1.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство (1). Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$$

$\square$

Свойство (2). Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = d(F(x)+C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$$

$\square$

Свойство (3). Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\int d(F(x)) = F(x)+C$$

Доказательство.

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$$

$\square$

Свойство (4). Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \lambda \neq 0$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная $f(x)$. Тогда:

$$\lambda \int f(x)dx = \lambda(F(x)+C), \forall c - const$$

Функция $\lambda F(x)$ – первообразная $\lambda f(x)$:

$$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$$

Рассмотрим левую часть:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - -const$$

Т.к константы C_1 и C – произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda(F(x) + C)$ и $\lambda F(x) + C_1$ совпадают. □

Свойство (5). Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ имеет первообразную на (ab) , причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx$$

Доказательство. $F_1(x)$ – первообразная $f_1(x)$
$F_2(x)$ – первообразная $f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 + C_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} F'(x) = (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)) &= \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \\ &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \tag{3}$$

Т.к константы C, C_1 и C_2 – произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство:

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

Тогда множества $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ и $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$ совпадают. □

Свойство (Инвариантность формы интегрирования). Если $\int f(x) dx + F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u) du = F(u) + C$, где $C - const$, где $u = \varphi(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство. Пусть x – переменная, $f(x)$ – непрерывная функция, $F(x)$ – первообразная $f(x)$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C - const$$

Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Найдём дифференциал

$F(u)$:

$$d(F(u)) = F'(u)u'(x)dx = \begin{vmatrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = F'(u)du =$$
$$= f(u)du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C, \quad F(u) + C$$

□

1.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (граф. функций) вида:

$$y = F(x) + C, \quad \forall C = const$$

1.3 Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall C - const$
2. $\int dx = x + c$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
15. $\int shxdx = chx + C$
16. $\int chxdx = shx + C$

17. $\int \frac{dx}{ch^x} = \operatorname{th} x + C$

18. $\int \frac{dx}{sh^x} = -\operatorname{cth} x + C$

19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$

20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)| + C$

1.4 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование (свойства + таблицы).

2. Метод подстановки.

   (a) Занесение под знак дифференциала

   (b) Замена переменной. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференциама на T, а множество X – множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда если существует первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то на множестве T верно равенство:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{vmatrix} = \int f(\phi(t))\varphi'(t)dt$$