Линейная алгебра и функция нескольких переменных. Модуль 1. Лекции

1 Линейные пространства

Определение 1.1 (Линейное пространство)**.** Линейное пространство $\mathbb{L}$ над множеством значений P (элементы будем называть векторами), для которого определены операции сложения и умножеения на скаляр, а также верно:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L} \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
2. $\forall \vec{x}, \vec{y} \quad (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
3. $\exists \vec{0} : \forall \vec{x} \in \mathbb{L} \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
4. $\forall \vec{x} \in \mathbb{L} \exists \vec{y} : \vec{x} + \vec{y} -$ существование противоположного вектора $(-\vec{x})$
5. $\forall \vec{x} \in \mathbb{L} \quad (\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
6. $\forall \vec{x} \quad 1\vec{x} = \vec{x}$
7. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
8. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

В рамках курса считаем линейное пространство над элементами множества $\mathbb{R}$.

Примерами линейного пространства могут быть:

1. Множество свободных векторов
2. n-мерное пространство (R^n)
3. Множество непрерывных функция на отрезке
4. Множество матриц одинакового размера
5. Множество многочленов степени n
6. и т.п.

1.0.1 Свойства линейных пространств

Свойство. Нулевый элемент единственен.

Доказательство. Пусть существуют два нулевых элемента: $\vec{0_1}$ и $\vec{0_2}$. Тогда:

$$\vec{0_1} = \vec{0_1} + \vec{0_2} = \vec{0_2} + \vec{0_1} = \vec{0_2}$$

$\square$

Свойство. Для каждого элемента противоположный единственный.

Доказательство. Пусть существую два противоположных элемента для $\vec{x}$: $\vec{y_1}$ и $\vec{y_2}$. Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y_1} &= \vec{0} \\ \vec{x} + \vec{y_2} &= \vec{0} \\ \vec{x} + \vec{y_1} &= \vec{x} + \vec{y_2} \\ \vec{y_1} &= \vec{y_2} \end{aligned}$$

□

Свойство.

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Доказательство.

$$0\vec{x} = 0\vec{x} + \vec{0} = (0+1)\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$$

□

Свойство.

$$(-1) \cdot \vec{x} = (-\vec{x})$$

Доказательство.

$$\begin{gathered} (-1) \cdot \vec{x} + \vec{x} = (1-1)\vec{x} = \vec{0} = \vec{x} + -\vec{x} \\ \implies (-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x} \end{gathered}$$

□

Свойство. Уравнение

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L} \quad \vec{x} + \vec{a} = \vec{y}$$

имеет решение и притом единственное.

Доказательство. Пусть:

$$\vec{a} = \vec{y} + (-\vec{x})$$

Тогда подставляя в изначальное уравнение получаем тождество. □

1.1 Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть есть некоторый набор векторов $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_k} \in \mathbb{L}$.

Определение 1.2 (Линейная комбинация)**.** Линейной комбинацией называется выражение вида:

$$\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \ldots + \lambda_k + \vec{x_k}$$

Определение 1.3 (Тривиальная линейная комбинация)**.** Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все коэффициенты равны нулю.

Определение 1.4 (Нетривиальная линейная комбинация)**.** Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если хотя бы один коэффициент не равен нулю.

Определение 1.5 (Линейно зависимая комбинацию)**.** Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Теорема 1.1. Чтобы система была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы любой вектор вектор линейно выражался через остальные.

Свойство. Если в системе векторов существует нулевой вектор, то такая система линейно зависима.

Свойство. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то система тоже линейно зависима.

Свойство. Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема тоже линейно независима.

Свойство. Если векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства $\mathbb{L}$ линейно независимы и вектор $y \in \mathbb{L}$ не является их линейной комбинацией, то расширенная система векторов $x_1, \ldots, x_n, y$ является линейно независимой.

1.2 Базис, размерность пространства

Определение 1.6 (Базис)**.** *Базисом* линейного пространства $\mathbb{L}$ называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия:

1. эта система векторов линейно независима;
2. каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Определение 1.7. Коэффициенты разложения вектора по базису линейного пространства, записанные в соответствии с порядком векторов в базисе, называют *координатами вектора в этом базисе.*

Теорема 1.2 (О единственности разложения)**.** Разложение по базису *единственно.*

Определение 1.8 (Конечномерное пространство)**.** Пространство называется *конечномерное*, если существсвует базис конечного числа векторов.

Определение 1.9 (Бесконечномерное пространство)**.** Пространство называется *бесконечномерное*, если не существсвует базис конечного числа векторов.

Теорема 1.3. Если $\mathbb{L}$ – конечномерное пространство, тогда все базисы состоят из конечного числа векторов.

Определение 1.10 (Размерность линейного пространства)**.** Максимальное количество линейно независимых векторов в данном линейном пространстве называют *размерностью линейного пространства.*

$$\dim(\mathbb{L}) = n$$

Линейная зависимость (независимость) равносильна линейной зависимости (независимости) столбцов координат в том же базисе.

1.3 Преобразование координат вектора при замене базиса

Пусть в n-мерном пространстве $\mathbf{L}$ заданы два базиса:

$$b = (b_1, \dots b_n) \quad c = (c_1, \dots c_n)$$

Любой вектор мжно разложить по базису b. А значит любой вектор из базиса c может быть представлен как:

$$c_i = \lambda_{1i} b_1 + \ldots + \lambda_{ni} b_n, \quad i = \overline{1,n}$$

Запишем в матричном виде:

$$c_i = b \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n}$$

Или

$$c = bU \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Определение 1.11 (Матрица перехода)**.** Матрицу U (1.11) называют *матрицей перехода* от старого базиса b к новому базису ,c.

Свойство (1)**.** Матрица перехода невырождена и всегда имеет обратную.

Свойство (2)**.** Если в n-мерном линейном пространстве задан базис b, то для любой невырожденной квадратной матрицы U порядка n существует такой базис c в этом линейном пространстве, что U будет матрицей перехода от базиса b к базису c.

Свойство (3)**.** Если U – матрица перехода от старого базиса b к новому базису с линейного пространства, то U^1 – матрица перехода от базиса c к базису b.

Свойство (4)**.** Если в линейном пространстве заданы базисы b, c и d, причем U – матрица перехода от базиса b к базису c, а V – матрица перехода от базиса c к базису d, то произведение этих матриц UV – матрица перехода от базиса b к базису d.