

Конспект лекций курса ФН-12 "Интегралы и  
дифференциальные уравнения".

Модуль 1: Интегралы

Жихарев Кирилл ИУ7-24Б

## Содержание

<b>1</b>	<b>Первообразная и неопределённый интеграл</b>	<b>3</b>
1.1	Свойства неопределённого интеграла . . . . .	3
1.2	Геометрический смысл . . . . .	6
1.3	Таблица основных интегралов . . . . .	6
1.4	Основные методы интегрирования . . . . .	7
1.4.1	Непосредственное интегрирование . . . . .	7
1.4.2	Занесение под знак дифференциала . . . . .	7
1.4.3	Замена переменной . . . . .	7
1.4.4	Интегрирование по частям . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Правильные и неправильные рациональные дроби</b>	<b>8</b>
2.1	Интегрирование простейших рациональных дробей . . . . .	8
2.2	Неправильные рациональные дроби . . . . .	9
2.2.1	Метод неопределённых коэффициентов . . . . .	9
2.2.2	Метод конкретных значений . . . . .	10

## 1 Первообразная и неопределённый интеграл

**Определение 1.1 (Первообразная).** Функция  $F(x)$  называется *первообразной* функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ , если  $F(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b)$  верно:

$$F'(x) = f(x)$$

1. Если  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$  на  $(a, b)$ , то  $F(x) + C$  – первообразная функции  $f(x)$  на  $(a, b)$ , где  $\forall C = const$ .
2. Если  $F(x)$  дифференцируема на  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b) F'(x) = 0$ , то  $F(x) = const \forall x \in (a, b)$ .
3. Любая непрерывная функция на  $(a, b)$  имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две отличаются на константу.

**Определение 1.2 (Неопределённый интеграл).** множество первообразных функции  $f(x)$  на  $(a, b)$  называется *неопределённым интегралом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- $\int$  – знак интеграла
- $f(x)$  – подынтегральная функция
- $f(x)dx$  – подынтегральное выражение
- $x$  – переменная
- $F(x) + C$  – множество первообразных
- $C$  – константа

**Определение 1.3 (Интегрирование).** Интегрированием называется процесс нахождения неопределённого интеграла.

### 1.1 Свойства неопределённого интеграла

**Свойство (1).** Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left( \int f(x)dx \right)' = f(x)$$

**Доказательство.**

$$\left( \int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

□

**Свойство (2).** Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

**Доказательство.**

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = d(F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$$

□

**Свойство (3).** Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

**Доказательство.**

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

□

**Свойство (4).** Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \lambda \neq 0$$

**Доказательство.** Пусть  $F(x)$  – первообразная  $f(x)$ . Тогда:

$$\lambda \int f(x)dx = \lambda(F(x) + C), \forall C - const$$

Функция  $\lambda F(x)$  – первообразная  $\lambda f(x)$ :

$$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$$

Рассмотрим левую часть:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - const$$

Т.к константы  $C_1$  и  $C$  – произвольные,  $\lambda \neq 0$ , то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство  $C_1 = \lambda C$ . Тогда множества  $\lambda(F(x) + C)$  и  $\lambda F(x) + C_1$  совпадают. □

**Свойство (5).** Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют первообразные  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  соответственно, то функция  $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ , где  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  имеет первообразную на  $(ab)$ , причём  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ :

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) dx$$

**Доказательство.**  $F_1(x)$  – первообразная  $f_1(x)$   
 $F_2(x)$  – первообразная  $f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x) dx + \lambda_2 \int f_2(x) &= \lambda_1 (F_1(x) + C_1) + \lambda_2 (F_2(x) + C_2) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)) = \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \\ &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \quad (3)$$

Т.к константы  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные,  $\lambda \neq 0$ , то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство:

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

Тогда множества  $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$  и  $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$  совпадают.  $\square$

**Свойство (Инвариантность формы интегрирования).** Если  $\int f(x) dx + F(x) + C$ , где  $C - const$ , то  $\int f(u) du = F(u) + C$ , где  $C - const$ , где  $u = \varphi(x)$  – непрерывно-дифференцируемая функция.

**Доказательство.** Пусть  $x$  – переменная,  $f(x)$  – непрерывная функция,  $F(x)$  – первообразная  $f(x)$ :

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C - const$$

Рассмотрим сложную функцию  $F(u) = F(\varphi(x))$ . Найдём дифференциал  $F(u)$ :

$$\begin{aligned} d(F(u)) &= F'(u) u'(x) dx = \left| \begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = F'(u) du = \\ &= f(u) du \end{aligned}$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C, \quad F(u) + C$$

□

## 1.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (граф. функций) вида:

$$y = F(x) + C, \quad \forall C = const$$

## 1.3 Таблица основных интегралов

1.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall C = const$
2.  $\int dx = x + C$
3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
4.  $\int e^x dx = e^x + C$
5.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7.  $\int \cos x dx = \sin x + C$
8.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10.  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11.  $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$
12.  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right|$
13.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
15.  $\int shx dx = chx + C$
16.  $\int chx dx = shx + C$
17.  $\int \frac{dx}{ch^x} = \operatorname{th} x + C$
18.  $\int \frac{dx}{sh^x} = -\operatorname{cth} x + C$
19.  $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
20.  $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$

### 1.4 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование (свойства + таблицы).
2. Метод подстановки.
  - (а) Занесение под знак дифференциала
  - (б) Замена переменной. Пусть функция  $x = \varphi(t)$  определена и дифференцируема на  $T$ , а множество  $X$  – множество значений этой функции, на котором определена  $f(x)$ . Тогда если существует первообразная функции  $f(x)$  на множестве  $X$ , то на множестве  $T$  верно равенство:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

3. Интегрирование по частям.

#### 1.4.1 Непосредственное интегрирование

Используя свойства и таблицу интегралов.

#### 1.4.2 Занесение под знак дифференциала

#### 1.4.3 Замена переменной

Пусть функция  $x = \varphi(t)$  определена и дифференцируема на  $T$ , а множество  $X$  – множество значений этой функции на котором определена  $f(x)$ . Тогда, если существует первообразная функции  $f(x)$  на  $X$ , то на множестве  $T$  верно равенство:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

#### 1.4.4 Интегрирование по частям

Пусть функция  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  непрерывно-дифференцируемы. Тогда справедлива формула:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

**Доказательство.** Рассмотрим произведения двух функций:  $u(x) \cdot v(x)$ .  
Дифференциал

$$d(uv) = u dv + v du \quad u dv = d(uv) - v du$$

Интегрируем:

$$\int d(uv) = \int (d(uv) - v du)$$

По свойству неопределённого интеграла:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

□

## 2 Правильные и неправильные рациональные дроби

**Определение 2.1 (Рациональная дробь).** Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

**Определение 2.2 (Правильная рациональная дробь).** Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е.  $m < n$ .

**Определение 2.3 (Неправильная рациональная дробь).** Рациональная дробь называется *неправильной*, если степень числителя не меньше степени знаменателя, т.е.  $m \geq n$ .

### 2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

1.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C \quad \forall C$$

2.

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^k} &= A \int \frac{dx}{(x-a)^k} \\ &= A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) \\ &= \frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k} + C \quad \forall C \end{aligned}$$

3.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = (*)$$

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (*) &= \int \frac{Mx + N}{(x + \frac{p}{2}) + b^2} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| \\
 &= \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{t^2 + b^2} dt = \\
 &= M \int \frac{t}{t^2 + b^2} dt + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \int \frac{dt}{t^2 + b^2} = \\
 &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + b^2)}{t^2 + b^2} + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |t^2 + b^2| + \frac{(N - \frac{p}{2}M)}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C = \\
 &= \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{(N - \frac{p}{2}M)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C
 \end{aligned}$$

## 2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

Где  $L(x)$  – многочлен, частное от деления  $P(x)$  на  $Q(x)$ ;  $r(x)$  – остаток от деления  $P(x)$  на  $Q(x)$ ;  $\frac{r(x)}{Q(x)}$  – правильная рациональная дробь.

Интегрируя выражение выше мы получаем:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int L(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$$

Вывод: интегрирование непрерывной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

**Теорема 2.1** (О разложении правильной рациональной дроби на простейшие).

Любая правильная рациональная дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , знаменатель которой может быть представлен в виде:

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-x_n)^{k_n} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$$

может быть представлена и притом единственным образом в виде суммы многочлена и простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$$

### 2.2.1 Метод неопределенных коэффициентов

Равенство в теореме о разложении правильной рациональной дроби на простые представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

### 2.2.2 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей, подставляем конкретные значения переменной  $x$ , т.к. оно верно  $\forall x$ . Обычно вместо  $x$  подставляют действительные корни знаменателя.