Конспект лекций курса ФН-12 “Линейная алгебра и функция нескольких переменных”. Модуль 1: Линейная алгебра

Жихарев Кирилл ИУ7-24Б

Содержание

1 Линейные пространства

Определение 1.1 (Линейное пространство)**.** Линейное пространство $\mathcal{L}$ над множеством значений $mathcal P$ (элементы будем называть векторами), для которого определены операции сложения и умножеения на скаляр, а также верно:

1. $\forall x, y \in \mathcal{L} \quad x + y = y + x$
2. $\forall x, y \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists 0 : \forall x \in \mathcal{L} x + 0 = x$
4. $\forall x \in \mathcal{L} \exists y : x + y$ – существование противоположного вектора $(-x)$
5. $\forall x \in \mathcal{L} \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
6. $\forall x \quad 1x = x$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

В рамках курса считаем линейное пространство над элементами множества $\mathbb{R}$.

Примерами линейного пространства могут быть:

1. Множество свободных векторов
2. n-мерное пространство (R^n)
3. Множество непрерывных функция на отрезке
4. Множество матриц одинакового размера
5. Множество многочленов степени n
6. и т.п.

1.0.1 Свойства линейных пространств

Свойство. Нулевый элемент единственен.

Доказательство. Пусть существуют два нулевых элемента: $\vec{0_1}$ и $\vec{0_2}$. Тогда:

$$\vec{0_1} = \vec{0_1} + \vec{0_2} = \vec{0_2} + \vec{0_1} = \vec{0_2}$$

□

Свойство. Для каждого элемента противоположный единственный.

Доказательство. Пусть существую два противоположных элемента для x: $\vec{y_1}$ и $\vec{y_2}$. Тогда:

$$\begin{aligned} x + \vec{y_1} &= 0 \\ x + \vec{y_2} &= 0 \\ x + \vec{y_1} &= x + \vec{y_2} \\ \vec{y_1} &= \vec{y_2} \end{aligned}$$

□

Свойство.

$$0 \cdot x = x$$

Доказательство.

$$0x = 0x + 0 = (0+1)x + (-x) = 0$$

□

Свойство.

$$(-1) \cdot x = (-x)$$

Доказательство.

$$\begin{gathered} (-1) \cdot x + x = (1-1)x = 0 = x + -x \\ \implies (-1) \cdot x = -x \end{gathered}$$

□

Свойство. Уравнение

$$\forall x, y \in \mathcal{L} \quad x + a = y$$

имеет решение и притом единственное.

Доказательство. Пусть:

$$a = y + (-x)$$

Тогда подставляя в изначальное уравнение получаем тождество. □

1.1 Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть есть некоторый набор векторов $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_k} \in \mathcal{L}$.

Определение 1.2 (Линейная комбинация)**.** Линейной комбинацией называется выражение вида:

$$\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \ldots + \lambda_k + \vec{x_k}$$

Определение 1.3 (Тривиальная линейная комбинация)**.** Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все коэффициенты равны нулю.

Определение 1.4 (Нетривиальная линейная комбинация)**.** Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если хотя бы один коэффициент не равен нулю.

Определение 1.5 (Линейно зависимая комбинацию)**.** Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Теорема 1.1. Чтобы система была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы любой вектор вектор линейно выражался через остальные.

Свойство. Если в системе векторов существует нулевой вектор, то такая система линейно зависима.

Свойство. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то система тоже линейно зависима.

Свойство. Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема тоже линейно независима.

Свойство. Если векторы $x_1, \dots, x_n$ линейного пространства $\mathcal{L}$ линейно независимы и вектор $y \in \mathcal{L}$ не является их линейной комбинацией, то расширенная система векторов $x_1, \dots, x_n, y$ является линейно независимой.

1.2 Базис, размерность пространства

Определение 1.6 (Базис)**.** *Базисом* линейного пространства $\mathcal{L}$ называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия:

1. эта система векторов линейно независима;
2. каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Определение 1.7. Коэффициенты разложения вектора по базису линейного пространства, записанные в соответствии с порядком векторов в базисе, называют *координатами вектора в этом базисе.*

Теорема 1.2 (О единственности разложения)**.** Разложение по базису *единственно.*

Определение 1.8 (Конечномерное пространство)**.** Пространство называется *конечномерное*, если существует базис конечного числа векторов.

Определение 1.9 (Бесконечномерное пространство)**.** Пространство называется *бесконечномерное*, если не существсвует базис конечного числа векторов.

Теорема 1.3. Если $\mathcal{L}$ – конечномерное пространство, тогда все базисы состоят из конечного числа векторов.

Определение 1.10 (Размерность линейного пространства)**.** Максимальное количество линейно независимых векторов в данном линейном пространстве называют *размерностью линейного пространства.*

$$\dim(\mathcal{L}) = n$$

Линейная зависимость (независимость) равносильна линейной зависимости (независимости) столбцов координат в том же базисе.

1.3 Преобразование координат вектора при замене базиса

Пусть в n-мерном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса:

$$b = (b_1, \dots b_n) \quad c = (c_1, \dots c_n)$$

Любой вектор мжно разложить по базису b. А значит любой вектор из базиса c может быть представлен как:

$$c_i = \lambda_{1i} b_1 + \ldots + \lambda_{ni} b_n, \quad i = \overline{1, n}$$

Запишем в матричном виде:

$$c_i = b \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}$$

Или

$$c = bU \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Определение 1.11 (Матрица перехода)**.** Матрицу U (1.11) называют *матрицей перехода* от старого базиса b к новому базису ,c.

Свойство (1)**.** Матрица перехода невырождена и всегда имеет обратную.

Свойство (2)**.** Если в n-мерном линейном пространстве задан базис b, то для любой невырожденной квадратной матрицы U порядка n существует такой базис c в этом линейном пространстве, что U будет матрицей перехода от базиса b к базису c.

Свойство (3)**.** Если U – матрица перехода от старого базиса b к новому базису с линейного пространства, то U^{-1} – матрица перехода от базиса c к базису b.

Свойство (4)**.** Если в линейном пространстве заданы базисы b, c и d, причем U – матрица перехода от базиса b к базису c, а V – матрица перехода от базиса c к базису d, то произведение этих матриц UV – матрица перехода от базиса b к базису d.

2 Линейные подпространства

Определение 2.1 (Линейное подпространства)**.** Подмножество $\mathcal{H}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называют *линейным подпространством*, если выполнены следующие два условия:

1. Сумма любых двух векторов из $\mathcal{H}$ принадлежит $\mathcal{H} : x, y \in \mathcal{H} \implies x + y \in \mathcal{H}$;

2. Произведение любого вектора из $\mathcal{H}$ на любое действительное число снова принадлежит $\mathcal{H} : x \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x \in \mathcal{H}$.

Определение 2.1 фактически говорит о том, что линейное подпространство – это любое подмножество данного линейного пространства, замкнутое относительно линейных операций, т.е. применение линейных операций к векторам, принадлежащим этому подмножеству, не выводит результат за пределы подмножества.

В любом линейном пространстве $\mathcal{L}$ всегда имеются два линейных подпространства: само линейное пространство $\mathcal{L}$ и *нулевое подпространство* $\{0\}$. Эти линейные подпространства называют *несобственными*, в то время как все остальные линейные подпространства называют *собственными*.

Определение 2.2 (Нулевое подпространство)**.** *Нулевым подпространством* называется подпространство, состоящее из единственного элемента – нулевого.

Определение 2.3 (Несобственные пространства). Линейные подпространства $\mathcal{L}$ и нулевое подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$ называются *несобственными* .

Определение 2.4 (Собственные пространства). Линейные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$ за исключением несобственных называются *несобственными* .

Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана система векторов $e_1, \ldots, e_k$. Рассмотрим множество $\mathcal{H}$ всех векторов в $\mathcal{L}$, которые могут быть представлены линейной комбинацией этих векторов. Это множество является линейным подпространством в $\mathcal{L}$. Пусть:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k \quad y = y_1 e_1 + \ldots + y_k e_k$$

Тогда:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1)\, e_1 + \ldots + (x_k + y_k)\, e_k \in H \\ \lambda x &= (\lambda x_1)\, e_1 + \ldots + (\lambda x_k)\, e_k \in H \end{aligned}$$

Описанное линейное подпространство называют *линейным подпространством.*

Определение 2.5. Линейной оболочкой линейного пространства $\mathcal{L}$ называется совокупность всех конечных линейных комибнаций векторов данной системы.

2.1 Ранг системы векторов

Определение 2.6 (Ранг системы векторов). *Рангом системы векторов* в линейном пространстве называют размерность линейной оболочки этой системы векторов.

Теорема 2.1. Ранг системы векторов $a = (a_1, \ldots, a_k)$ линейного пространства $\mathcal{L}$ равен:

1. максимальному количеству линейно независимых векторов в системе a;
2. рангу матрицы, составленной по столбцам из координат векторов $a_1, \ldots, a_k$ в каком-либо базисе линейного пространства $\mathcal{L}$.

2.2 Евклидово пространство

Определение 2.7 (Евклидово пространство). Линейное пространство $\mathcal{E}$ называют *евклидовым пространством*, если в этом пространстве задано скалярное умножение, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре векторов $x, y \in \mathcal{E}$ поставлено в соответствие действительное число (x, y), называемое скалярным произведением. При этом выполняются следующие аксиомы скалярного умножения:

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(x, x) > 0$, причём $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Замечание. Т.е. евклидово пространство – это пространство, в котором определена операция *скалярного произведения*.

Свойство (1).

$$(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$$

Свойство (2).

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$

Свойство (3).

$$(x, 0) = 0$$

2.3 Неравенство Коши – Буняковского

Теорема 2.2. Для любых векторов x, y евклидова пространства $\mathcal{E}$ справедливо неравенство:

$$(x, y)^2 \leq (x, y)(y, y)$$

Определение 2.8 (Угол между векторами). *Углом* φ *между* ненулевыми *векторами* x и y в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называют такое значение $\varphi \in (0, \pi)$ что:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}$$

где $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, а $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$

2.4 Норма вектора

Определение 2.9. Функцию, заданную на линейном пространстве $\mathcal{L}$, которая каждому вектору $x \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие действительное число $\|x\|$, называют *нормой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам нормы:

1. $\|x\| > 0$, причем равенство $\|x\| = 0$ возможно только при $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Теорема 2.3. Всякое скалярное умножение в евклидовом пространстве определяет норму согласно формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

2.5 Ортогональные системы векторов

Определение 2.10. Два вектора в евклидовом пространстве называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

$$x \perp y \iff (x,y) = 0$$

Говорят, что вектор x в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ ортогонален подпространству H, и обозначают $x \perp \mathcal{H}$, если он ортогонален каждому вектору этого подпространства.

Определение 2.11 (Ортогональная система вектором)**.** Систему векторов евклидова пространства называют *ортогональной*, если любые два вектора из этой системы ортогональны.

Теорема 2.4. Любая ортогональная система ненулевых вектором всегда линейно независима.

Определение 2.12 (Ортогональный базис)**.** Если базис евклидова пространства представляет собой ортогональную систему векторов, то этот базис называют *ортогональным*.

Определение 2.13. Ортогональный базис называют *ортонормированным*, если каждый вектор этого базиса имеет норму, равную единице.

Теорема 2.5 (Теорема Пифагора)**.** Если векторы x и y из евклидова пространства ортогональны, то:

$$\|x+y\|s^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Определение 2.14. Ортогональный базис называют ортонормированным, если каждый вектор этого базиса имеет норму (длину), равную единице.

3 Процесс ортогонализации. Линейные операторы

3.1 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Теорема 3.1. В конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пусть $f = (f_1 \dots f_n)$ – некоторый базис в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Построим новый ортонормированный базис $e = (e_1 \dots e_n)$:

$$e_1 = f_1$$
$$e_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i^{k-1} e_i \quad k = 2 \dots n$$

Определение 3.1 (Сурьективное отображение)**.** Отображение $f : X \to Y$ называют *сурьективным*, если каждый $y \in Y$ является образом некоторого элемента $x \in X$.

Определение 3.2 (Инъективное отображение)**.** Отображение $f : X \to Y$ называют *инъективным*, если разные элементы $x_1, x_2 \in X$ имеют разные образы.

Определение 3.3 (Биективное отображение)**.** *Биективным отображением* называют отображение, являющееся и сурьективным, и инъективным одновременно.

Определение 3.4 (Линейное отображение или линейный оператор)**.** Отображение $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ из линейного пространства $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{L}'$ называют *линейным преобразованием* или *линейным оператором*, если выполнены условия:

1. $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$;
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x) \quad \forall x \in \mathcal{L} \quad \forall \lambda \in R$.

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, который осуществляет отображение линейного пространства $\mathcal{L}$ в себя, называют также линейного пространства $\mathcal{L}$ и говорят, что линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Замечание. Условия определения 3.4 можно скомбинировать в виде одного условия, например так:

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda(\mathcal{A}x) + \mu(\mathcal{A}y)$$

3.2 Изоморфизм линейных пространств

Определение 3.5 (Изоморфизм линейных пространств)**.** Два линейных пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ называют *изоморфными*, если существует линейное биективное отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$. При этом само отображение $\mathcal{A}$ называют *изоморфизмом линейных пространств* $\mathcal{L}$ *и* $\mathcal{L}'$

Теорема 3.2. Два конечномерных линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Следствие 3.2.1. Все n-мерные линейные пространства изоморфны *линейному арифметическому пространству* $\mathbb{R}^n$

3.3 Матрица линейного оператора

Определение 3.6. Матрицу $A = (a_1 \dots a_n)$, составленную из координатных столбцов векторов $\mathcal{A}b_1 \dots \mathcal{A}b_n$ в базисе $b = (b_1 \dots b_n)$ называют *матрицей линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в базисе* $\mathcal{B}$.

Теорема 3.3. Пусть $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ – линейный оператор. Тогда столбец y координат вектора $y = \mathcal{A}x$ в данном базисе b линейного пространства $\mathcal{L}$ равен произведению Ax матрицы A оператора A в базисе b на столбец x координат вектора x в том же базисе: $y = Ax$.

Доказательство. Пусть $x = x_1b_1 + \ldots + x_nb_n$. Тогда образом x будет:

$$\begin{aligned} y = \mathcal{A}x &= \mathcal{A}(x_1b_1 + \ldots + x_nb_n) = x_1(\mathcal{A}b_1) + \ldots + x_n(\mathcal{A}b_n) \\ &= x_1\left(a_{11}b_1 + \ldots + a_{n1}b_n\right) + \ldots + x_n\left(a_{1n}b_1 + \ldots + a_{nn}b_n\right) \\ &= \left(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\right)b_1 + \ldots + \left(a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n\right)b_n \end{aligned}$$

Столбец координат вектора $\mathcal{A}x$ в базисе b имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

□

Теорема 3.4. Пусть b – произвольный базис в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$. Различным линейным операторам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующим в пространстве $\mathcal{L}$, соответствуют и различные матрицы в базисе b. Любая квадратная матрица A порядка n является матрицей некоторого линейного оператора, действующего в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Доказательство.

1. Если матрицы A и B операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в базисе b совпадают, то

согласно теореме 3.3 $\forall x$ со столбцом координат x будет верно:

$$\mathcal{A}x = bBx = \mathcal{B}x$$

Образы произвольного вектора при двух отображениях совпадают, а значит совпадают и сами отображения.

2. Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная квадратная матрица порядка n. Определим отображение $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ согласно формуле $\mathcal{A}(x) = bAx$, где x – столбец координат вектора x. Такое отображения является линейным:

$$A(\lambda x + \mu y) = bA(\lambda x + \mu y) = \lambda(bAx) + \mu(bAy) = \lambda\mathcal{A}x + \mu\mathcal{A}y$$

Вычислим $i = \overline{1, n}$ столбец координат образа i-ного вектора из базиса b:

$$\mathcal{A}b_i = bA\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{i-1,i} \\ a_{ii} \\ a_{i+1,i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

где единица стоит в i-ной строке; столбец совпадает с i-ым столбцом матрицы A. Поэтому матрица заданного линейного оператора совпадает с исходной матрицей A.

$\square$

3.4 Преобразование матрицы линейного оператора

Теорема 3.5. Матрицы A_b и A_e линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, записанные в базисах b и e линейного пространства $\mathcal{L}$, связаны друг с другом соотношением:

$$A_e = U^{-1}A_bU$$

где $U = U_{b\to e}$ – матрица перехода от базиса b к базису e.

Доказательство. Пусть $y = \mathcal{A}x$. Обозначим координаты векторов x и y в старом базисе через x_b b y_b, а в новом базисе e – через x_e и y_e. Поскольку:

$$y_b = A_bx_b \quad x_b = Ux_e \quad y_b = Uy_e$$

То получаем:

$$y_e = U^{-1}y_b = U^{-1}(A_bx_b) = U^{-1}(A_bUx_e) = (U^{-1}A_bU)x_e$$

Равенство $y_e = (U^{-1}A_bU)x_e$ является матричной формой записи действия линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе e, поэтому, согласно теореме 3.4, $U^{-1}A_bU = A_e$ $\square$

Наглядная иллюстрация доказательства:

$$\begin{tikzcd} x_e \arrow[r, "A_e"] \arrow[d, "U"'] & B \\ x_b \arrow[r, "A_b"] & y_b \arrow[u, "U^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Определение 3.7 (Подобные матрицы)**.** Квадратные матрицы A и B порядка n называют *подобными*, если существует такая невырожденная матрица P, что $P^{-1}Ap = B$.

Теорема 3.6. Если матрицы A и B подобны, то $\det A = \det B$

Доказательство. Если матрицы A и B подобны, то, согласно определению 3.6, существует такая невырожденная матрица P , что $B = P1AP$. Так как определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, а $\det(P^1) = (\det P)^{-1}$, то получаем:

$$\det B = \det\left(P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det A \det P = \det A$$

□

Следствие 3.6.1. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Определение 3.8 (Определитель линейного оператора)**.** *Определителем линейного оператора* называют определитель его матрицы в каком-либо базисе.

3.5 Произведение линейных операторов

Теорема 3.7. Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ действуют линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а A и B – матрицы этих линейных операторов в некотором базисе b. Тогда матрицей линейного оператора $\mathcal{BA}$ в том же базисе b является матрица BA.

Доказательство. Действие линейного оператора на вектор в данном базисе представляется как умножение матрицы этого оператора на столбец координат вектора. Поэтому для произведения двух операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ получаем:

$$(\mathcal{BA})\,x = \mathcal{B}\,(\mathcal{A}x) = \mathcal{B}\,(bAx) = b\,(B(Ax)) = b(BA)x$$

□

Теорема 3.8. Если линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}$, то это отображение линейно, причем если матрицей $\mathcal{A}$ в данном базисе b является A, то матрицей линейного оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в том же базисе является A^{-1}.

Доказательство. Любым векторам y_1 и y_2 линейного пространства $\mathcal{L}$ соответствуют такие однозначно определенные векторы x_1 и x_2, что $y_i = \mathcal{A}x_i, i = 1, 2$. При этом $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ вектору $\lambda y_1 + \mu y_1$ соответствует вектор $\lambda x_1 + \mu x_2$, т.к.:

$$\mathcal{A}\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) = \lambda \mathcal{A}x_1 + \mu \mathcal{A}x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$$

Поэтому:

$$\mathcal{A}^{-1}\left(\lambda y_1 + \mu y_2\right) = \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda \mathcal{A}^{-1} y_1 + \mu \mathcal{A}^{-1} y_2$$

А значит отображение A^{-1} линейно.

Произведение операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$, как композиция прямого и обратного отображения, является тождественным оператором. Согласно теореме 3.7, произведение этих матриц равно единичной матрице $E : A'A = E$. А значит матрица $\mathcal{A}^{-1}$ является обратной к матрице $\mathcal{A}$. $\square$

Теорема 3.9. Пусть в n-мерном пространстве $\mathcal{L}$ задан некоторый базис b. Тогда отображение $\Phi : L\left(\mathcal{L}, \mathcal{L}\right)$, сопоставляющее каждому линейному оператору его матрицу в базисе b, является *изоморфизмом линейных пространств* $L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ и $M_n(\mathbb{R})$