Интегралы и дифференциальные уравнения. Модуль 1. Лекции

1 Первообразная и неопределённый интеграл

Определение 1.1 (первообразная). Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ верно:

$$F'(x) = f(x)$$

1. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), то $F(x) + C$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), где $\forall C - const$.
2. Если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b) F'(x) = 0$, то $F(x) = const \forall x \in (a, b)$.
3. Любая непрерывная функция на (a, b) имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две отличаются на константу.

Определение 1.2 (неопределённый интеграл). множество первообразных функции $f(x)$ на (a, b) называется *неопределённым интегралом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- $\int$ – знак интеграла
- $f(x)$ – подынтегральная функция
- $f(x)dx$ – подынтегральное выражение
- x – переменная
- $F(x) + C$ – множество первообразных
- C – константа

Определение 1.3 (Интегрирование). Интегрированием называется процесс нахождения неопределённого интеграла.

1.1 Свойства неопределённого интеграла

Свойство (1). Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$$

$\square$

Свойство (2). Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Доказательство.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = d(F(x)+C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$$

$\square$

Свойство (3). Неопределённый интеграл от
дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\int d(F(x)) = F(x)+C$$

Доказательство.

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$$

$\square$

Свойство (4). Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \lambda \neq 0$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная $f(x)$. Тогда:

$$\lambda \int f(x)dx = \lambda(F(x)+C), \forall c - const$$

Функция $\lambda F(x)$ – первообразная $\lambda f(x)$:

$$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$$

Рассмотрим левую часть:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + C_1, \quad \forall C_1 - -const$$

Т.к константы C_1 и C – произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство $C_1 = \lambda C$. Тогда множества $\lambda(F(x) + C)$ и $\lambda F(x) + C_1$ совпадают. □

Свойство (5). Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ имеет первообразную на (ab) , причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int \left(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\right) dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx$$

Доказательство. $F_1(x)$ – первообразная $f_1(x)$
$F_2(x)$ – первообразная $f_2(x)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x) &= \lambda_1 \left(F_1(x) + C_1\right) + \lambda_2 \left(F_2(x) + C_2\right) \\ &= \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 + C_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} F'(x) = \left(\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)\right) &= \lambda_1 F_1'(x) + \lambda_2 F_2'(x) \\ &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\int \left(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\right) dx = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C \tag{3}$$

Т.к константы C, C_1 и C_2 – произвольные, $\lambda \neq 0$, то их всегда можно выбрать так, чтобы было верно равенство:

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

Тогда множества $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ и $\lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + C$ совпадают. □

Свойство (Инвариантность формы интегрирования). Если $\int f(x)dx + F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $C - const$, где $u = \varphi(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция.

Доказательство. Пусть x – переменная, $f(x)$ – непрерывная функция, $F(x)$ – первообразная $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C - const$$

Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Найдём дифференциал

$F(u)$:

$$d(F(u)) = F'(u)u'(x)dx = \begin{vmatrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = F'(u)du = \\ = f(u)du$$

Неопределённый интеграл:

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C, \quad F(u) + C$$

$\square$

1.2 Геометрический смысл

Неопределённый интеграл геометрически представляет собой семейство интегральных кривых (граф. функций) вида:

$$y = F(x) + C, \quad \forall C = const$$

1.3 Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall C - const$
2. $\int dx = x + c$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
15. $\int shxdx = chx + C$
16. $\int chxdx = shx + C$

17. $\int \frac{dx}{ch^x} = \operatorname{th} x + C$
18. $\int \frac{dx}{sh^x} = -\operatorname{cth} x + C$
19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$
20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)| + C$

1.4 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование (свойства + таблицы).
2. Метод подстановки.
   (a) Занесение под знак дифференциала
   (b) Замена переменной. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференциама на T, а множество X – множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда если существует первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то на множестве T верно равенство:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{vmatrix} = \int f(\phi(t))\varphi'(t)dt$$

3. Интегрирование по частям.

1.4.1 Непосредственное интегрирование

Используя свойства и таблицу интегралов.

1.4.2 Занесение под знак дифференциала

1.4.3 Замена переменной

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на T, а множество X – множество значений этой функции на котором определена $f(x)$. Тогда, если существует первообразная функции $f(x)$ на X, то на множестве T верно равенство:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

1.4.4 Интегрирование по частям

Пусть функция $u = u(x)$, $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемы. Тогда справедлива формула:

$$\int udu = uv - \int vdu$$

Доказательство. Рассмоттрим произведения двух функций: $u(x)\cdot v(x)$. Дифференциал

$$d(uv) = udv + vdu \quad udv = d(uv) - vdu$$

Интегрируем:

$$\int d(uv) = \int (d(uv) - vdu)$$

По свойству неопределённого интеграла:

$$\int ud = uv - \int vdu$$

□

2 Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 2.1 (Рациональная дробь)**.** *Дробно-рациональной функцией* или *рациональной дробью* называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Определение 2.2 (Правильная рациональная дробь)**.** Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$.

Определение 2.3 (Неправильная рациональная дробь)**.** Рациональная дробь называется *неправильной*, если степень числителя *не меньше* степени знаменателя, т.е. $m \geq n$.

2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

1.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a}{x-a} = A\ln|x-a| + C \quad \forall C$$

2.

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{(x-a)^k} &= A\int \frac{dx}{(x-a)^k} \\ &= A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) \\ &= \frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k} + C \quad \forall c\end{aligned}$$

3.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = (*)$$

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q =$$
$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2$$

$$(*) = \int \frac{Mx + N}{(x + \frac{p}{2}) + b^2} dx = \begin{vmatrix} x + \frac{p}{2} = t \\ x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{vmatrix}$$
$$= \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{t^2 + b^2} dt =$$
$$= M \int \frac{t}{t^2 + b^2} dt + \left(N - \frac{p}{2M}\right) \int \frac{dt}{t^2 + b^2} =$$
$$= \frac{M}{2} \int \frac{d\left(t^2 + b^2\right)}{t^2 + b^2} + \left(N - \frac{p}{2}M\right) \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} =$$
$$= \frac{M}{2} \ln |t^2 b^2| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C =$$
$$= \frac{M}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{\left(N - \frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{ps^2}{4}}} + C$$

2.2 Неправильные рациональные дроби

Любая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

Где $L(x)$ – многочлен, частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$; $r(x)$ – остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$; $\frac{r(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Интегрируя выражение выше мы получаем:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int L(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$$

Вывод: интегрирование непрерывной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Теорема 2.1 (О разложении правильной рациональной дроби на простейшие)**.**
Любая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой может быть представлен в виде:

$$Q(x) = (x - x_1)^k \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}$$

может быть представлена и притом единственном образом в виде суммы многочлена и простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$$

2.2.1 Метод неопределенных коэффициентов

Равенство в теореме о разложении правильной рациональной дроби на простые представляет собой тождество. Поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество числителей слева и справа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получим СЛАУ для определения неизвестных коэффициентов.

2.2.2 Метод конкретных значений

После получения тождества числителей, подставляем конкретные значения переменной x, т.к. оно верно $\forall x$. Обычно вместо x подставляют действительные корни знаменателя.