# Аналитическая геометрия. Подготовка к РК №1

## 1 Теоретические вопросы

### 1.1 Теоретические вопросы. Базовый уровень

**Вопрос 1.** Дать определение равенства геометрических векторов.

**Ответ.** Два векторы называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

**Вопрос 2.** Дать определение суммы векторов и произведения вектора на число.

**Ответ.** Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется $\vec{c}$, который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора $\vec{a}$ совмещают с началом вектора $\vec{b}$
2. Тогда вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ и будет вектором $\vec{c}$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$ называется вектор $\vec{c}$, который будет коллинеарен вектору $\vec{a}$, длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\lambda > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

**Вопрос 3.** Дать определение коллинеарных и компланарных векторов.

**Ответ.** Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

**Вопрос 4.** Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

**Ответ.** Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейной комбинация этих векторов:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0$$

Система векторо называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$

**Вопрос 5.** Сформулировать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.

**Ответ.** Два вектору *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

Три вектора *линейной зависимы* тогда и только тогда, когда они *компланарны*.

**Вопрос 6.** Дать определение базиса и координат вектора.

**Ответ.** Базис - упорядоченный набор линейно-независмых векторов.

**Вопрос 7.** Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.

**Ответ.** Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

**Вопрос 8.** Дать определение ортогональной скалярной проекции вектора на направление.

**Ответ.** Ортогональной скалярной проекцией вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ называется величина $пр_{\vec{b}}\vec{a} = |a| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi$ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

**Вопрос 9.** Дать определение скалярного произведения векторов.

**Ответ.** Скалярным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

**Вопрос 10.** Сформулировать свойство линейности скалярного произведения.

**Ответ.** Дистрибутивность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Ассоциативность

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

**Вопрос 11.** Записать формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

**Вопрос 12.** Записать формулу для вычисления косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

**Вопрос 13.** Дать определение правой и левой тройки векторов.

**Ответ.** Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

**Вопрос 14.** Дать определение векторного произведения векторов.

**Ответ.** Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующему условию:

1. $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$);
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\varphi$
3. Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

**Вопрос 15.** Сформулировать свойство коммутативности (симметричности) скалярного произведения и свойство антикоммутативности (антисимметричности) векторного произведения.

**Ответ.** Коммунитативность скалярного произведения векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Антикоммунитативность векторного произведения векторов:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

**Вопрос 16.** Сформулировать свойство линейности векторного произведения векторов.

**Ответ.** Дистрибутивность

$$(\vec{a_1} + \vec{a_2}) \times \vec{b} = \vec{a_1} \times \vec{b} + \vec{a_2} \times \vec{b}$$

Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

**Вопрос 17.** Записать формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

**Вопрос 18.** Дать определение смешанного произведения векторов

**Ответ.** Смешанное поизведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведения первых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на третий вектор $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

**Вопрос 19.** Сформулировать свойство перестановки (кососимметричности) смешанного произведения.

**Ответ.**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

**Вопрос 20.** Сформулировать свойство линейности смешанного произведения.

**Ответ.** Свойство ассоциативности:

$$(\lambda \vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

Свойство дистрибутивности:

$$(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$$

**Вопрос 21.** Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_c \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

**Вопрос 22.** Записать общее уравнение плоскости и уравнение «в отрезках». Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

**Ответ.** Пусть плоскость $\alpha$ отсекает от координатного угла отрезки $a, b, c$ на осях $x, y, z$ соответственно. Тогда:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

**Вопрос 23.** Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.

**Ответ.** Пусть заданы точки:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$
$$M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$$

Тогда:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

**Вопрос 24.** Записать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

**Ответ.** Перпендикулярность:

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Параллельность:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

**Вопрос 25.** Записать формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

**Ответ.**

$$\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**Вопрос 26.** Записать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

**Ответ.** Пусть прямая $l$ проходит через точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$. Возьмём на прямой $l$ произвольную точку $M(x, y, z)$. Тогда прямую можно записать уравнениями:

1. *Каноническое*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

2. *Параметрическое*

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

**Вопрос 27.** Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.

**Ответ.**

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

**Вопрос 28.** Записать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.

**Ответ.** Если прямая $l_1$:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

и прямая $l_2$ :

$$\frac{x - x_2}{m} = \frac{y - y_2}{n} = \frac{z - z_2}{p}$$

скрещеиваются, то:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

**Вопрос 29.** Записать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

**Ответ.**

$$\rho(M, l) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

**Вопрос 30.** Записать формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

**Ответ.**

$$\rho(l_2, l_1) = \frac{\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

## 1.2 Теоретические вопросы. Повышенная сложность

**Вопрос 31.** Доказать геометрический критерий линейной зависимости трёх векторов.

**Ответ.** *Три вектора линейной зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Пусть $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ - линейная зависимость. Тогда по определению существуют:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \vec{0}$$

Тогда:

$$\lambda_1 \neq 0$$

$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3}$$

Обозначим $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$, где $i = 2, 3$.

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3}$$

Совместим начала $\vec{a_2}$ и $\vec{a_3}$ и построим $\beta_2\vec{a_2}$ и $\beta_3\vec{a_3}$, где $\beta_2, \beta_3 > 0$. Т.к. $\vec{a_3}$ лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости, а значит, компланарны.

**Вопрос 32.** Доказать теорему о разложении вектора по базису

**Ответ.** *Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.*

Пусть в пространстве $V_3$ зафиксирован базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Возьмём вектор $\vec{x}$. Тогда система векторов $\vec{x}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно зависима, если вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3 + \vec{e_3} \tag{1}$$

Предположим, что разложение вектора $\vec{x}$ - не единственное.

$$\vec{x} = \rho\vec{e_1} + \rho\vec{e_2} + \rho\vec{e_3} \tag{2}$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho_1)\,\vec{e_1} + (\lambda_2 - \rho_2)\,\vec{e_2} + (\lambda_3 - \rho_3)\,\vec{e_3} \tag{3}$$

Поскольку базисные вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{matrix} \lambda_1 - \delta_1 = 0 & & \lambda_1 = \rho_1 \\ \lambda_2 - \delta_2 = 0 & \Rightarrow & \lambda_2 = \rho_2 \\ \lambda_3 - \delta_3 = 0 & & \lambda_3 = \rho_3 \end{matrix}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать.

**Вопрос 33.** Доказать свойство линейности скалярного произведения.

**Ответ.** 1. Свойство дистрибутивности:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= |\vec{c}| \left( np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) \right) \\ &= |\vec{c}|(np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{a}) \\ &= |\vec{c}|np_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}|np_{\vec{c}}\vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

2. Свойство ассоциативности:

$$\begin{aligned} (\lambda\vec{a})\vec{b} &= |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\lambda\vec{a} \\ &= |\vec{b}| \cdot \lambda \cdot np_{\vec{b}}\vec{a} \\ &= \lambda(|\vec{b} \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}|) \\ &= \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

**Вопрос 34.** Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе

**Ответ.** Пусть даны:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k} \\ \vec{b} &= x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}\right)\cdot\left(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}\right) \\
&= x_ax_b(\vec{i}\cdot\vec{i}) + x_ay_b(\vec{i}\cdot\vec{j}) + z_az_b(\vec{i}\cdot\vec{k}) \\
&+ y_ax_b(\vec{j}\cdot\vec{i}) + y_ay_b(\vec{j}\cdot\vec{j}) + y_az_b(\vec{j}\cdot\vec{k}) \\
&+ z_ax_b(\vec{k}\cdot\vec{i}) + z_ay_b(\vec{k}\cdot\vec{j}) + z_az_b(\vec{k}\cdot\vec{k}) \\
&= x_ax_b + y_ay_b + z_az_b
\end{aligned}$$

**Вопрос 35.** Вывести формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}\right)\cdot\left(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}\right) \\
&= x_ax_b(\vec{i}\times\vec{i}) + x_ay_b(\vec{i}\times\vec{j}) + z_az_b(\vec{i}\times\vec{k}) \\
&+ y_ax_b(\vec{j}\times\vec{i}) + y_ay_b(\vec{j}\times\vec{j}) + y_az_b(\vec{j}\times\vec{k}) \\
&+ z_ax_b(\vec{k}\times\vec{i}) + z_ay_b(\vec{k}\times\vec{j}) + z_az_b(\vec{k}\times\vec{k}) \\
&= x_ax_b\vec{k} - x_az_b\vec{j} - y_ax_b\vec{k} + y_az_b\vec{i} + z_ax_b\vec{j} - z_ay_b\vec{i} \\
&= \vec{i}(y_az_b - z_ay_b) - \vec{j}(x_az_b - z_ax_b) + \vec{k}(x_ay_b - x_by_a) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

**Вопрос 36.** Доказать свойство линейности смешанного произведения.

**Ответ.** 1. Дистрибутивность:

$$\begin{aligned}
(\vec{a_1}+\vec{a_2})\vec{b}\vec{c} &= (\vec{a_1}+\vec{a_2})\times\vec{b}\cdot\vec{c} \\
&= (\vec{a_1}\times\vec{b}+\vec{a_2}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \\
&= (\vec{a_1}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a_2}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \\
&= \vec{a_1}\vec{b}\vec{c}+\vec{a_2}\vec{b}\vec{c}
\end{aligned}$$

2. Ассоциативность:

$$\begin{aligned}
(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} &= (\lambda\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \\
&= \lambda(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \\
&= \lambda\vec{a}\vec{b}\vec{c}
\end{aligned}$$

**Вопрос 37.** Вывести формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.

**Ответ.** Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы координатами:

$$\vec{a} = \{x_a, y_a, x_a\}$$
$$\vec{b} = \{x_b, y_b, .z_b\}$$
$$\vec{c} = \{x_c, y_c, z_c\}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\} \cdot \vec{c} = \\ = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c = \\ = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}\end{aligned}$$

А значит:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_c \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

**Вопрос 38.** Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

**Ответ.** Пусть плоскость $\alpha$ задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cx + D = 0, \text{ где } \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть задана некоторая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Возьмём некоторую точку $M(x, y, z) \in \alpha$. Составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z\}$. Тогда модуль проекции $\overrightarrow{MM_0}$ на вектор на направление вектора нормали и есть искомое расстояние. Найдем:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0M}| \underbrace{|\vec{n}| \cdot \cos\varphi}_{np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M}}$$

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} &= A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax - By - Cz) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\end{aligned}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\boxed{\rho(M_0, \alpha) = |np_{\vec{n}\overrightarrow{M_0M}}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

**Вопрос 39.** Вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

**Ответ.** Пусть прямая $l$ задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\}$$

Задана точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l$. Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Построим на векторах $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ параллелограмм. Тогда высота этого параллелограмма из точки $M_1$ и есть искомое расстояние от точки $M_1$ до прямой $l$.

$$S_{par} = h \cdot |\vec{S}|$$
$$h = \frac{S_{par}}{|\vec{S}|}$$
$$S_{par} = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|$$

Тогда:

$$\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n & p\end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ m & p\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{M_0M_1\times\vec{S}}=$$
$$\left\{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ m & p\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}\right\}\Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}|=$$
$$\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ m & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}^2}\Rightarrow$$
$$\rho(M_1,l)=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{S}|}{|\vec{S}|}=$$
$$\boxed{\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ m & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$

**Вопрос 40.** Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

**Ответ.** Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\Rightarrow M_1(x_1,y_1,z_1),\quad \vec{S_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$$
$$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\Rightarrow M_2(x_2,y_2,z_2),\quad \vec{S_2}=\{m_2,n_2,p_2\}$$

Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

Вектора $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны. Поэтому на этих векторах можно построить параллелепипед. Тогда расстояние между прямыми $l_1$ и $l_2$ будет равно высоте этого параллелепипеда.

$$V=|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|$$
$$V=h\cdot S$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$S = |\vec{s_1} \times \vec{s_2}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(l_2, l_1) = \frac{\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}}$$