

## Математический анализ. Подготовка к РК №1

### 1 Теоретические вопросы

#### 1.1 Определения

**Вопрос 1.** Сформулируйте определение окрестности точки  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ответ.** Окрестностью точки  $x$  называется любой интервал, содержащий данную точку.

**Вопрос 2.** Сформулируйте определение  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ответ.**  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x$  называется интервал с центром в точке  $x$  и длиной  $2\varepsilon$ .

$$S(x, \varepsilon) \quad \text{или} \quad u_\varepsilon(x)$$

**Вопрос 3.** Сформулируйте определение окрестности  $+\infty$ .

**Ответ.** Окрестностью  $+\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(a, +\infty), \quad a > 0$$

**Вопрос 4.** Сформулируйте определение окрестности  $-\infty$ .

**Ответ.** Окрестностью  $-\infty$  называется любой интервал вида:

$$S(-\infty, -a), \quad a > 0$$

**Вопрос 5.** Сформулируйте определение окрестности  $\infty$ .

**Ответ.** Окрестностью  $\infty$  называется любой интервал вида:

$$\begin{aligned} S(\infty, a) &= S(-\infty, -a) \cup S(a, +\infty) \\ &= (-\infty, -a) \cup (a, +\infty), \quad a > 0 \end{aligned}$$

**Вопрос 6.** Сформулируйте определение предела последовательности.

**Ответ.** Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся натуральное число  $N(\varepsilon)$  такое, что если порядковый номер  $n$  члена последовательности станет больше  $N(\varepsilon)$ , то имеет место неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$$

**Вопрос 7.** Сформулируйте определение сходящейся последовательности.

**Ответ.** Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

**Вопрос 8.** Сформулируйте определение ограниченной последовательности.

**Ответ.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.:

$$\exists M, m : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow m \leq x_n \leq M$$

**Вопрос 9.** Сформулируйте определение монотонной последовательности.

**Ответ.** Последовательность называется монотонной, если она является неубывающей, либо невозрастающей.

**Вопрос 10.** Сформулируйте определение возрастающей последовательности.

**Ответ.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется возрастающей, если каждый последующий член  $x_{n+1} > x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Вопрос 11.** Сформулируйте определение убывающей последовательности.

**Ответ.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется убывающей, если каждый последующий член  $x_{n+1} < x_n$ .

**Вопрос 12.** Сформулируйте определение невозрастающей последовательности.

**Ответ.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется невозрастающей, если каждый последующий член  $x_{n+1} \leq x_n$ .

**Вопрос 13.** Сформулируйте определение неубывающей последовательности.

**Ответ.** Последовательность чисел  $\{x_n\}$  называется неубывающей, если каждый последующий член  $x_{n+1} \geq x_n$ .

**Вопрос 14.** Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

**Ответ.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется фундаментальной, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует свой порядковый номер  $N(\varepsilon)$  такой, что при всех  $n \geq N(\varepsilon)$  и  $m \geq N(\varepsilon)$  выполнено неравенство  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon)$$

**Вопрос 15.** Сформулируйте критерий Коши существования предела последовательности.

**Ответ.** Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно чтобы она была фундаментальной.

**Вопрос 16.** Сформулируйте определение по Гейне предела функции.

**Ответ.** Число  $a$  называется пределом  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если эта функция определена в окрестности точки  $a$  и  $\forall$  последовательности  $\{x_n\}$  из области определения этой функции, сходящейся к  $x_0$  соответствующая последовательность функций  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \right)$$

**Вопрос 17.** Сформулируйте определение бесконечно малой функции при  $x \rightarrow x_0$ .

**Ответ.** Функция называется бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

**Вопрос 18.** Сформулируйте определение бесконечно большой функции.

**Ответ.** Функция называется бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

**Вопрос 19.** Сформулируйте определение бесконечно малых функций одного порядка.

**Ответ.** Две б.м.ф.  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются одного порядка малости, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0$$

**Вопрос 20.** Сформулируйте определение несравнимых бесконечно малых функций.

**Ответ.** Две б.м.ф.  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *несравнимыми*, если:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

**Вопрос 21.** Сформулируйте определение эквивалентных бесконечно малых функций.

**Ответ.** Две б.м.ф.  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *эквивалентными*, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

**Вопрос 22.** Сформулируйте определение порядка малости одной функции относительно другой.

**Ответ.** Б.м.ф.  $\alpha(x)$  имеет порядок малости  $k$  относительно функции б.м.ф.  $\beta(x)$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = \text{const} \neq 0$$

**Вопрос 23.** Сформулируйте определение приращения функции.

**Ответ.**

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

**Вопрос 24.** Сформулируйте определение непрерывности функции в точке (любое).

**Ответ.** Любой ответ из:

1. Функция  $f(x)$ , определённая в некоторой окрестности точки  $x_0$ , называется непрерывной в этой точке если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. Функция  $y = f(x)$ , определённая в некоторой окрестности точки  $x_0$ , называется непрерывной в этой точке, если в достаточно малой окрестности точки  $x_0$  значение функции близко к  $f(x_0)$ .

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

3. Функция  $y = f(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  называется

непрерывной в этой точке, если выполняются условия:

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x)$

4. Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

**Вопрос 25.** Сформулируйте определение непрерывности функции на интервале.

**Ответ.** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной на интервале  $(a, b)$ , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

**Вопрос 26.** Сформулируйте определение непрерывности функции на отрезке.

**Ответ.** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , если:

1. Непрерывна на интервале  $(a, b)$
2. Непрерывна в точке  $a$  справа
3. Непрерывна в точке  $b$  слева

**Вопрос 27.** Сформулируйте определение точки разрыва.

**Ответ.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой точке проколотой окрестности точки  $x_0$  непрерывна в любой точке этой окрестности (за исключением самой точки  $x_0$ ). Тогда точка  $x_0$  называется точкой разрыва функции.

**Вопрос 28.** Сформулируйте определение точки устранимого разрыва.

**Ответ.** Если точка  $x_0$  – точка разрыва первого рода функции  $y = f(x)$ , и предел  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ , но  $\nexists f(x_0)$ , то точка  $x_0$  называется точкой устранимого разрыва.

**Вопрос 29.** Сформулируйте определение точки разрыва I рода.

**Ответ.** Если точка  $x_0$  – точка разрыва функции  $y = f(x)$  и существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ , то  $x_0$  называют точкой I-го рода.

**Вопрос 30.** Сформулируйте определение точки разрыва II рода.

**Ответ.** Если точка  $x_0$  – точка разрыва функции  $y = f(x)$  и **не** существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , то  $x_0$  называется точкой разрыва II-го рода.

## 1.2 Определение предела по Коши

**Вопрос 31.** Сформулируйте определение по Коши  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b$ , где  $b \in \mathbb{R}$ . Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

**Ответ.** Определение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b \\ \Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \dot{S}(0, \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon) \end{aligned}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + b) = b$$

**Вопрос 32.** Сформулируйте определение по Коши  $\lim_{x \rightarrow a} = +\infty$ , где  $a \in \mathbb{R}$ . Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

**Ответ.** Определение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} = +\infty \\ \Leftrightarrow \\ (\forall M > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in S(a, \delta) \Rightarrow f(x) > M) \end{aligned}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|x - a|} = +\infty$$

**Вопрос 33.** Сформулируйте определение по Коши  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

**Ответ.** Определение:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall |x| > N \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)\end{aligned}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

**Вопрос 34.** Сформулируйте определение по Коши  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ , где  $a \in \mathbb{R}$ . Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

**Ответ.** Определение:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) &= -\infty \\ \Leftrightarrow \\ (\forall M > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) < -M)\end{aligned}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1}{x - a} = -\infty$$

### 1.3 Формулировка теорем

**Вопрос 35.** Сформулируйте теорему об ограниченности сходящейся числовой последовательности.

**Ответ.** Любая сходящаяся последовательность ограничена.

**Вопрос 36.** Сформулируйте теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

**Ответ.** Функция  $y = f(x)$  имеет конечный предел в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

**Вопрос 37.** Сформулируйте теорему о сумме конечного числа бесконечно малых функций.

**Ответ.** Конечная сумма бесконечно малых функции есть бесконечно малая функция.

**Вопрос 38.** Сформулируйте теорему о произведении бесконечно малой

на ограниченную функцию.

**Ответ.** Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть величина бесконечно малая.

**Вопрос 39.** Сформулируйте теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

**Ответ.** Если  $\alpha(x)$  - бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\frac{1}{\alpha(x)}$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

**Вопрос 40.** Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

**Ответ.** Две функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

**Вопрос 41.** Сформулируйте теорему о сумме бесконечно малых разных порядков

**Ответ.** Сумма бесконечно малых функций разных порядком малости эквивалентно слагаемому низшего порядка малости.