Математический анализ. Подготовка к РК №1

1 Теоретические вопросы

1.1 Определения

Вопрос 1. Сформулируйте определение окрестности точки $x \in \mathbb{R}$.

Ответ. Окрестностью точки x называется любой интервал, содержащий данную точку.

Вопрос 2. Сформулируйте определение ε-окрестности точки $x \in \mathbb{R}$.

Ответ. ε-окрестностью точки x называется интервал с центром в точке x и длиной 2ε.

$$S(x, \varepsilon) \qquad \text{или} \qquad u_\varepsilon(x)$$

Вопрос 3. Сформулируйте определение окрестности $+\infty$.

Ответ. Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(a, +\infty), a > 0$$

Вопрос 4. Сформулируйте определение окрестности $-\infty$.

Ответ. Окрестностью $-\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(-\infty, -a), a > 0$$

Вопрос 5. Сформулируйте определение окрестности ∞.

Ответ. Окрестностью ∞ называется любой интервал вида:

$$\begin{aligned} S(\infty, a) &= S(-\infty, -a) \cup S(a, +\infty) \\ &= (-\infty, -a) \cup (+\infty, a), a > 0 \end{aligned}$$

Вопрос 6. Сформулируйте определение предела последовательности.

Ответ. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдётся натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что если порядковый номер n члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$$

Вопрос 7. Сформулируйте определение сходящейся последовательности.

Ответ. Последовательность, имеющая предел, назыается сходящейся.

Вопрос 8. Сформулируйте определение ограниченной последовательности.

Ответ. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.:

$$\forall n \in \mathbb{N} \le x_n \le M \Leftrightarrow |x_n| \le M$$

Вопрос 9. Сформулируйте определение монотонной последовательности.

Вопрос 10. Сформулируйте определение возрастающей последовательности.

Ответ. Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется возрастающей, если каждый последующий член $x_{n+1} > xn, n \in \mathbb{N}$.

Вопрос 11. Сформулируйте определение убывающей последовательности.

Ответ. Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется убывающей, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n$.

Вопрос 12. Сформулируйте определение невозрастающей последовательности.

Ответ. Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется невозрастающей, если каждый последующий член $x_{n+1} \le x_n$.

Вопрос 13. Сформулируйте определение неубывающей последовательности.

Ответ. Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется неубывающей, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n$.

Вопрос 14. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

Ответ. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для любого > 0 свой порядковый номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N()$ выполнено неравенство $|x_n x_m| <$.

Вопрос 15. Сформулируйте критерий Коши существования предела последовательности.

Ответ. Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно она была фундаментальной.

Вопрос 16. Сформулируйте определение по Гейне предела функции.

Ответ. Число a называется пределом $y = f(x)$ в точке $x0$, если эта функция определена в окрестности точки a и последовательнсти $\{x_n\}$ из области определения этой функции, сходящейся к $x0$ соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a)$$

Вопрос 17. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to x0$.

Ответ. Функция называется бесконечно малой при $x \to x0$, если предел функции в этой точке равен 0.

Вопрос 18. Сформулируйте определение бесконечно большой функции.

Ответ. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой функцией, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Вопрос 19. Сформулируйте определение бесконечно малых функций одного порядка.

Вопрос 20. Сформулируйте определение несравнимых бесконечно малых функций.

Вопрос 21. Сформулируйте определение эквивалентных бесконечно малых функций.

Вопрос 22. Сформулируйте определение порядка малости одной функции относительно другой.

Вопрос 23. Сформулируйте определение приращения функции.

Вопрос 24. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке (любое).

Вопрос 25. Сформулируйте определение непрерывности функции на интервале.

Вопрос 26. Сформулируйте определение непрерывности функции на отрезке.

Вопрос 27. Сформулируйте опредление точки разрыва.

Вопрос 28. Сформулируйте определение точки устранимого разрыва.

Вопрос 29. Сформулируйте определение точки разрыва I рода.

Вопрос 30. Сформулируйте определение точки разрыва II рода.

1.2 Определние предела по Коши

Вопрос 31. Сформулируйте определение по Коши $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = b$, где $b \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

Вопрос 32. Сформулируйте определение по Коши $\lim\limits_{x\to a} \ = +\infty$, где $a \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

Вопрос 33. СФормулируйте определние по Коши $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

Вопрос 34. СФормулируйте определние по Коши $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty$, где $a \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

1.3 Формулировка теорем

Вопрос 35. Сформулируйте теорему об ограниченности сходящейся числовой последовательности.

Вопрос 36. Сформулируйте теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

Вопрос 37. Сформулируйте теорему о сумме конечного числа бесконечно малых функций.

Вопрос 38. Сформулируйте теорему о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию.

Вопрос 39. Сформулируйте теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

Вопрос 40. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

Вопрос 41. Сформулируйте теорему о сумме бесконечно малых разных порядков