# Математический анализ. Подготовка к РК №1

## 1 Теоретические вопросы

### 1.1 Определения

**Вопрос 1.** Сформулируйте определение окрестности точки $x \in \mathbb{R}$.

**Ответ.** Окрестностью точки $x$ называется любой интервал, содержащий данную точку.

**Вопрос 2.** Сформулируйте определение $\varepsilon$-окрестности точки $x \in \mathbb{R}$.

**Ответ.** $\varepsilon$-окрестностью точки $x$ называется интервал с центром в точке $x$ и длиной $2\varepsilon$.

$$S(x, \varepsilon) \qquad \text{или} \qquad u_\varepsilon(x)$$

**Вопрос 3.** Сформулируйте определение окрестности $+\infty$.

**Ответ.** Окрестностью $+\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(a, +\infty), a > 0$$

**Вопрос 4.** Сформулируйте определение окрестности $-\infty$.

**Ответ.** Окрестностью $-\infty$ называется любой интервал вида:

$$S(-\infty, -a), a > 0$$

**Вопрос 5.** Сформулируйте определение окрестности $\infty$.

**Ответ.** Окрестностью $\infty$ называется любой интервал вида:

$$\begin{aligned} S(\infty, a) &= S(-\infty, -a) \cup S(a, +\infty) \\ &= (-\infty, -a) \cup (+\infty, a), a > 0 \end{aligned}$$

**Вопрос 6.** Сформулируйте определение предела последовательности.

**Ответ.** Число $a$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдётся натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что если порядковый номер $n$ члена последовательности станет больше $N(\varepsilon)$, то имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$$

**Вопрос 7.** Сформулируйте определение сходящейся последовательности.

**Ответ.** Последовательность, имеющая предел, назыается сходящейся.

**Вопрос 8.** Сформулируйте определение ограниченной последовательности.

**Ответ.** Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е.:

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \leq M \Leftrightarrow |x_n| \leq M$$

**Вопрос 9.** Сформулируйте определение монотонной последовательности.

**Вопрос 10.** Сформулируйте определение возрастающей последовательности.

**Ответ.** Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется возрастающей, если каждый последующий член $x_{n+1} > x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Вопрос 11.** Сформулируйте определение убывающей последовательности.

**Ответ.** Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется убывающей, если каждый последующий член $x_{n+1} < x_n$.

**Вопрос 12.** Сформулируйте определение невозрастающей последовательности.

**Ответ.** Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется невозрастающей, если каждый последующий член $x_{n+1} \leq x_n$.

**Вопрос 13.** Сформулируйте определение неубывающей последовательности.

**Ответ.** Последовательность чисел $\{x_n\}$ называется неубывающей, если каждый последующий член $x_{n+1} \geq x_n$.

**Вопрос 14.** Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

**Ответ.** Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ свой порядковый номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

**Вопрос 15.** Сформулируйте критерий Коши существования предела последовательности.

**Ответ.** Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно чтобы она была фундаментальной.

**Вопрос 16.** Сформулируйте определение по Гейне предела функции.

**Ответ.** Число а называется пределом $y = f(x)$ в точке $x_0$, если эта функция определена в окрестности точки $a$ и $\forall$ последовательньсти $\{x_n\}$ из области определения этой функции, сходящейся к $x_0$ соответствующая последовательность функций $\{f(x_n)\}$ сходится к $a$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall x_n \in D_f)(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a)$$

**Вопрос 17.** Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to x_0$.

**Ответ.** Функция называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

**Вопрос 18.** Сформулируйте определение бесконечно большой функции.

**Ответ.** Функция называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

**Вопрос 19.** Сформулируйте определение бесконечно малых функций одного порядка.

**Ответ.** Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются одного порядка малости, если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = const \neq 0$$

**Вопрос 20.** Сформулируйте определение несравнимых бесконечно малых функций.

**Ответ.** Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми* , если:

$$\nexists \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

**Вопрос 21.** Сформулируйте определение эквивалентных бесконечно малых функций.

**Ответ.** Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* , если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

**Вопрос 22.** Сформулируйте определение порядка малости одной функции относительно другой.

**Ответ.** Б.м.ф. $\alpha(x)$ имеет порядок малости $k$ относительно функции б.м.ф. $\beta(x)$, если:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = const \neq 0$$

**Вопрос 23.** Сформулируйте определение приращения функции.

**Вопрос 24.** Сформулируйте определение непрерывности функции в точке (любое).

**Вопрос 25.** Сформулируйте определение непрерывности функции на интервале.

**Вопрос 26.** Сформулируйте определение непрерывности функции на отрезке.

**Вопрос 27.** Сформулируйте опредление точки разрыва.

**Вопрос 28.** Сформулируйте определение точки устранимого разрыва.

**Вопрос 29.** Сформулируйте определение точки разрыва I рода.

**Вопрос 30.** Сформулируйте определение точки разрыва II рода.

## 1.2 Определение предела по Коши

**Вопрос 31.** Сформулируйте определение по Коши $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = b$, где $b \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

**Ответ.** Определение:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = b$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathring{S}(0, \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Пример:

$$\lim_{x \to 0} (x + b) = b$$

**Вопрос 32.** Сформулируйте определение по Коши $\lim\limits_{x \to a} = +\infty$, где $a \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

**Ответ.** Определение:

$$\lim_{x \to a} = +\infty$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\forall M > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in S(a, \delta) \Rightarrow f(x) > M)$$

Пример:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{|x - a|} = +\infty$$

**Вопрос 33.** Сформулируйте определелние по Коши $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

**Ответ.** Определение:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) > 0)(\forall |x| > N \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

**Вопрос 34.** Сформулируйте определние по Коши $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$, где $a \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).

**Ответ.** Определение:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\forall M > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) < -M)$$

Пример:

$$\lim_{x\to a-0} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

## 1.3 Формулировка теорем

**Вопрос 35.** Сформулируйте теорему об ограниченности сходящейся числовой последовательности.

**Ответ.** Любая сходящаяся последовательность ограничена.

**Вопрос 36.** Сформулируйте теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

**Ответ.** Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда её можно представить в виде суммы предела и некоторой бесконечно малой функции.

**Вопрос 37.** Сформулируйте теорему о сумме конечного числа бесконечно малых функций.

**Ответ.** Конечная сумма бесконечно малых функции есть бесконечно малая функция.

**Вопрос 38.** Сформулируйте теорему о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию.

**Ответ.** Произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть величина бесконечно малая.

**Вопрос 39.** Сформулируйте теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

**Ответ.** Если $\alpha(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

**Вопрос 40.** Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых.

**Ответ.** Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости по сравнению с каждой из них.

**Вопрос 41.** Сформулируйте теорему о сумме бесконечно малых разных порядков

**Ответ.** Сумма бесконечно малых функций разных порядком малости эквивалентно слагаемому низшего порядка малости.