

## Аналитическая геометрия. Подготовка к РК №1

### 1 Теоретические вопросы

#### 1.1 Теоретические вопросы. Базовый уровень

**Вопрос 1.** Дать определение равенства геометрических векторов.

**Ответ.** Два вектора называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

**Вопрос 2.** Дать определение суммы векторов и произведения вектора на число.

**Ответ.** Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется  $\vec{c}$ , который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора  $\vec{a}$  совмещают с началом вектора  $\vec{b}$
2. Тогда вектор, идущий из начала вектора  $\vec{a}$  к концу вектора  $\vec{b}$  и будет вектором  $\vec{c}$ .

Произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор  $\vec{c}$ , который будет коллинеарен вектору  $\vec{a}$ , длина которого будет или меньше в  $|\lambda|$  раз и будет сонаправлен, если  $\lambda > 0$ , и противоположен, если  $\lambda < 0$ .

**Вопрос 3.** Дать определение коллинеарных и компланарных векторов.

**Ответ.** Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или на прямых, параллельных некоторой плоскости.

**Вопрос 4.** Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

**Ответ.** Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация этих векторов:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0$$

Система векторов называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация

ция.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

**Вопрос 5.** Сформулировать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.

**Ответ.** Два вектора *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

Три вектора *линейной зависимости* тогда и только тогда, когда они *компланарны*.

**Вопрос 6.** Дать определение базиса и координат вектора.

**Ответ.** Базис - упорядоченный набор линейно-независимых векторов.

**Вопрос 7.** Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.

**Ответ.** Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

**Вопрос 8.** Дать определение ортогональной скалярной проекции вектора на направление.

**Ответ.** Ортогональной скалярной проекцией вектора  $\vec{a}$  на направление вектора  $\vec{b}$  называется величина  $pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  - угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**Вопрос 9.** Дать определение скалярного произведения векторов.

**Ответ.** Скалярным произведением векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

**Вопрос 10.** Сформулировать свойство линейности скалярного произведения.

**Ответ.** Дистрибутивность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

**Вопрос 11.** Записать формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

**Вопрос 12.** Записать формулу для вычисления косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

**Вопрос 13.** Дать определение правой и левой тройки векторов.

**Ответ.** Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора  $\vec{c}$ ).

Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора  $\vec{c}$ ).

**Вопрос 14.** Дать определение векторного произведения векторов.

**Ответ.** Векторным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который удовлетворяет следующему условию:

1.  $\vec{c}$  ортогонален векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ );
2.  $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin \varphi$
3. Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

**Вопрос 15.** Сформулировать свойство коммутативности (симметричности) скалярного произведения и свойство антикоммутативности (антисимметричности) векторного произведения.

**Ответ.** Коммутативность скалярного произведения векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Антикоммутативность векторного произведения векторов:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

**Вопрос 16.** Сформулировать свойство линейности векторного произведения векторов.

**Ответ.** Дистрибутивность

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$$

Ассоциативность

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

**Вопрос 17.** Записать формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

**Вопрос 18.** Дать определение смешанного произведения векторов

**Ответ.** Смешанное произведение векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на третий вектор  $\vec{c}$ .

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

**Вопрос 19.** Сформулировать свойство перестановки (кососимметричности) смешанного произведения.

**Ответ.**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

**Вопрос 20.** Сформулировать свойство линейности смешанного произведения.

**Ответ.** Свойство ассоциативности:

$$(\lambda \vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$$

Свойство дистрибутивности:

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$$

**Вопрос 21.** Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

**Вопрос 22.** Записать общее уравнение плоскости и уравнение «в отрезках». Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

**Ответ.** Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где  $A, B, C$  – координаты вектора нормали к плоскости,  $D$  – свободный член, а  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ .

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

где  $a, b, c$  – отрезки, которые плоскость отсекает от координатного угла.

**Вопрос 23.** Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.

**Ответ.** Пусть заданы точки:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$

$$M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$$

Тогда:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

**Вопрос 24.** Записать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

**Ответ.** Перпендикулярность:

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

Параллельность:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

**Вопрос 25.** Записать формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

**Ответ.**

$$\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**Вопрос 26.** Записать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

**Ответ.** Пусть прямая  $l$  проходит через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и имеет направляющий вектор  $\vec{S} = \{m, n, p\}$ . Возьмём на прямой  $l$  произвольную точку  $M(x, y, z)$ . Тогда прямую можно записать уравнениями:

1. *Каноническое*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

2. *Параметрическое*

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

**Вопрос 27.** Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.

**Ответ.**

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

**Вопрос 28.** Записать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.

**Ответ.** Если прямая  $l_1$ :

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

и прямая  $l_2$ :

$$\frac{x - x_2}{m} = \frac{y - y_2}{n} = \frac{z - z_2}{p}$$

скрещиваются, то:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

**Вопрос 29.** Записать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

**Ответ.**

$$\rho(M, l) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

**Вопрос 30.** Записать формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

**Ответ.**

$$\rho(l_2, l_1) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

## 1.2 Теоретические вопросы. Повышенная сложность

**Вопрос 31.** Доказать геометрический критерий линейной зависимости трёх векторов.

**Ответ.** Три вектора линейной зависимости тогда и только тогда, когда они компланарны.

Пусть  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  - линейная зависимость. Тогда по определению существуют:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\neq 0 \\ \vec{a}_1 &= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 \end{aligned}$$

Обозначим  $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ , где  $i = 2, 3$ .

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3$$

Совместим начала  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$  и построим  $\beta_2 \vec{a}_2$  и  $\beta_3 \vec{a}_3$ , где  $\beta_2, \beta_3 > 0$ .

Т.к.  $\vec{a}_1$  лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  лежат в одной плоскости, а значит, компланарны.

**Вопрос 32.** Доказать теорему о разложении вектора по базису

**Ответ.** Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

Пусть в пространстве  $V_3$  зафиксирован базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Возьмём вектор  $\vec{x}$ . Тогда система векторов  $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - линейно зависима, если вектор  $\vec{x}$  можно представить в виде линейной комбинации векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \quad (1)$$

Предположим, что разложение вектора  $\vec{x}$  - не единственное.

$$\vec{x} = \rho \vec{e}_1 + \rho \vec{e}_2 + \rho \vec{e}_3 \quad (2)$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \rho) \vec{e}_2 + (\lambda_3 - \rho) \vec{e}_3 \quad (3)$$

Поскольку базисные вектора  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  - линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \rho &= 0 & \lambda_1 &= \rho \\ \lambda_2 - \rho &= 0 & \Rightarrow \lambda_2 &= \rho \\ \lambda_3 - \rho &= 0 & \lambda_3 &= \rho \end{aligned}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать.

**Вопрос 33.** Доказать свойство линейности скалярного произведения.

**Ответ.** 1. Свойство дистрибутивности:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= |\vec{c}| \left( np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) \right) \\ &= |\vec{c}| (np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{b}) \\ &= |\vec{c}| np_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}| np_{\vec{c}}\vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

2. Свойство ассоциативности:

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \lambda \vec{a} \\ &= |\vec{b}| \cdot \lambda \cdot np_{\vec{b}} \vec{a} \\ &= \lambda (|\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}) \\ &= \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

**Вопрос 34.** Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе



**Ответ.** Пусть даны:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \\ \vec{b} &= x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}) \cdot (x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}) \\ &= x_a x_b (\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_a y_b (\vec{i} \cdot \vec{j}) + z_a z_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) \\ &\quad + y_a x_b (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_a y_b (\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_a z_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ &\quad + z_a x_b (\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_a y_b (\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_a z_b (\vec{k} \cdot \vec{k}) \\ &= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b\end{aligned}$$

**Вопрос 35.** Вывести формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

**Ответ.**

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}) \cdot (x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}) \\ &= x_a x_b (\vec{i} \times \vec{i}) + x_a y_b (\vec{i} \times \vec{j}) + z_a z_b (\vec{i} \times \vec{k}) \\ &\quad + y_a x_b (\vec{j} \times \vec{i}) + y_a y_b (\vec{j} \times \vec{j}) + y_a z_b (\vec{j} \times \vec{k}) \\ &\quad + z_a x_b (\vec{k} \times \vec{i}) + z_a y_b (\vec{k} \times \vec{j}) + z_a z_b (\vec{k} \times \vec{k}) \\ &= x_a x_b \vec{k} - x_a z_b \vec{j} - y_a x_b \vec{k} + y_a z_b \vec{i} + z_a x_b \vec{j} - z_a y_b \vec{i} \\ &= \vec{i}(y_a z_b - z_a y_b) - \vec{j}(x_a z_b - z_a x_b) + \vec{k}(x_a y_b - x_b y_a) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}\end{aligned}$$

**Вопрос 36.** Доказать свойство линейности смешанного произведения.

**Ответ.** 1. Дистрибутивность:

$$\begin{aligned}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \vec{b} \vec{c} &= (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= (\vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &= (\vec{a}_1 \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a}_2 \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &= \vec{a}_1 \vec{b} \vec{c} + \vec{a}_2 \vec{b} \vec{c}\end{aligned}$$

2. Ассоциативность:

$$\begin{aligned}(\lambda \vec{a}) \vec{b} \vec{c} &= (\lambda \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\&= \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\&= \lambda \vec{a} \vec{b} \vec{c}\end{aligned}$$

**Вопрос 37.** Вывести формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.

**Ответ.** Пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  заданы координатами:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{x_a, y_a, z_a\} \\ \vec{b} &= \{x_b, y_b, z_b\} \\ \vec{c} &= \{x_c, y_c, z_c\}\end{aligned}$$

Найдём смешанное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a} \vec{b} \vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left\{ \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right\} \cdot \vec{c} = \\&= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot x_c - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot y_c + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot z_c = \\&= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}\end{aligned}$$

А значит:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

**Вопрос 38.** Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

**Ответ.** Пусть плоскость  $\alpha$  задана общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } \vec{n} = \{A, B, C\}$$

Пусть задана некоторая точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Возьмём некоторую точку  $M(x, y, z) \in \alpha$ . Составим вектор  $\overrightarrow{M_0M} = \{x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z\}$ . Тогда модуль проекции  $\overrightarrow{M_0M}$  на вектор на направление вектора нормали и есть искомое расстояние. Найдём:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{M_0M}| \underbrace{|\vec{n}| \cdot \cos \varphi}_{np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M}}$$

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M} &= A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax - By - Cz) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\end{aligned}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\rho(M_0, \alpha) = |np_{\vec{n} \overrightarrow{M_0 M}}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**Вопрос 39.** Вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

**Ответ.** Пусть прямая  $l$  задана каноническим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\vec{S} = \{m, n, p\}$$

Задана точка  $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l$ . Составим вектор:

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

Построим на векторах  $\vec{S}$  и  $\overrightarrow{M_0 M_1}$  параллелограмм. Тогда высота этого параллелограмма из точки  $M_1$  и есть искомое расстояние от точки  $M_1$  до прямой  $l$ .

$$S_{par} = h \cdot |\vec{S}|$$

$$h = \frac{S_{par}}{|\vec{S}|}$$

$$S_{par} = |\overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{S}|$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \Rightarrow \\
 \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S} &= \\
 \left\{ \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} \right\} \Rightarrow \\
 |\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}| &= \\
 \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2} \Rightarrow \\
 \rho(M_1, l) &= \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|} = \\
 &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}
 \end{aligned}$$

**Вопрос 40.** Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

**Ответ.** Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} &\Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1), \quad \vec{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\} \\
 l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} &\Rightarrow M_2(x_2, y_2, z_2), \quad \vec{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}
 \end{aligned}$$

Составим вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Вектора  $\vec{S}$  и  $\overrightarrow{M_1M_2}$  не компланарны. Поэтому на этих векторах можно построить параллелепипед. Тогда расстояние между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  будет равно высоте этого параллелепипеда.

$$\begin{aligned}
 V &= |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2| \\
 V &= h \cdot S
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} S = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(l_2, l_1) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$