Аналитическая геометрия. Подготовка к РК №1

1 Теоретические вопросы

1.1 Теоретические вопросы. Базовый уровень

Вопрос 1. Дать определение равенства геометрических векторов.

Ответ. Два векторы называются равными, если:

1. Они коллинеарны и сонаправлены
2. Их длины равны

Вопрос 2. Дать определение суммы векторов и произведения вектора на число.

Ответ. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется $\vec{c}$, который получается по правилу треугольника:

1. Конец вектора $\vec{a}$ совмещают с началом вектора $\vec{b}$
2. Тогда вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ и будет вектором $\vec{c}$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{c}$, который будет коллинеарен вектору $\vec{a}$, длина которого будет или меньше в $|\lambda|$ раз и будет сонаправлен, если $\lambda > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

Вопрос 3. Дать определение коллинеарных и компланарных векторов.

Ответ. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Вопрос 4. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Ответ. Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная равная нулевому вектору линейной комбинация этих векторов:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0$$

Система векторо называется *линейно-независимой*, если существует только тривиальная равная нулевому вектору линейная комбинация.

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda\vec{a_n} = \vec{0}$$

Вопрос 5. Сформулировать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.

Ответ. Два вектору *линейно-зависимы* тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

Три вектора *линейной зависимы* тогда и только тогда, когда они *компланарны*.

Вопрос 6. Дать определение базиса и координат вектора.

Ответ. Базис - упорядоченный набор линейно-независмых векторов. Координаты - ?

Вопрос 7. Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.

Ответ. Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.

Вопрос 8. Дать определение ортогональной скалярной проекции вектора на направление.

Ответ. Что?

Вопрос 9. Дать определение скалярного произведения векторов.

Ответ. Скалярным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется *число* равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Вопрос 10. Сформулировать свойство линейности скалярного произведения.

Ответ. Дистрибутивность

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Ассоциативность

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Вопрос 11. Записать формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.

Ответ.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Вопрос 12. Записать формулу для вычисления косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.

Ответ.

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Вопрос 13. Дать определение правой и левой тройки векторов.

Ответ. Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *против часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется *по часовой стрелки* (смотря из конца вектора $\vec{c}$).

Вопрос 14. Дать определение векторного произведения векторов.

Ответ. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующему условию:

1. $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$);
2. $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\phi$
3. Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют *правую* тройку векторов.

Обозначение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}]$$

Вопрос 15. Сформулировать свойство коммутативности (симметричности) скалярного произведения и свойство антикоммутативности (антисимметричности) векторного произведения.

Ответ. Коммунитативность скалярного произведения векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Антикоммунитативность векторного произведения векторов:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Вопрос 16. Сформулировать свойство линейности векторного произведения векторов.

Ответ. Дистрибутивность

$$(\vec{a_1} + \vec{a_2}) \times \vec{b} = \vec{a_1} \times \vec{b} + \vec{a_2} \times \vec{b}$$

Ассоциативность

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

Вопрос 17. Записать формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

Ответ.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Вопрос 18. Дать определение смешанного произведения векторов

Ответ. Смешанное поизведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведения первых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на третий вектор $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$$

Вопрос 19. Сформулировать свойство перестановки (кососимметричности) смешанного произведения.

Ответ.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

Вопрос 20. Сформулировать свойство линейности смешанного произведения.

Вопрос 21. Записать формулу для вычисления смешанного произведения в правом ортонормированном базисе.

Ответ.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_c \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Вопрос 22. Записать общее уравнение плоскости и уравнение «в отрезках». Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

Ответ. Пусть плоскость α отсекает от координатного угла отрезки a, b, c на осях x, y, z соответственно. Тогда:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Вопрос 23. Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.

Ответ. Пусть заданы точки:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$$
$$M_2(x_2, y_2, z_2) \in \alpha$$
$$M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$$

Тогда:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Вопрос 24. Записать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Ответ. Перпендикулярность:

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Параллельность:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Вопрос 25. Записать формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

Ответ.

$$\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Вопрос 26. Записать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Объяснить геометрический смысл входящих в эти уравнения параметров.

Ответ. Пусть прямая l проходит через точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$. Возьмём на прямой l произвольную точку $M(x, y, z)$. Тогда прямую можно записать уравнениями:

1. *Каноническое*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

2. *Параметрическое*

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Вопрос 27. Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.

Ответ.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Вопрос 28. Записать условие принадлежности двух прямых одной плоскости.

Вопрос 29. Записать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

Ответ.

$$\rho(M, l) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Вопрос 30. Записать формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.

Ответ.

$$\rho(l_2, l_1) = \frac{\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

1.2 Теоретические вопросы. Повышенная сложность

Вопрос 31. Доказать геометрический критерий линейной зависимости трёх векторов.

Ответ. *Три вектора линейной зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Пусть $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ - линейная зависимость. Тогда по определению существуют:

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3} = \vec{0}$$

Тогда:

$$\lambda_1 \neq 0$$
$$\vec{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a_3}$$

Обозначим $\beta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda}$, где $i = 2, 3$.

$$\vec{a_1} = \beta_2\vec{a_2} + \beta_3\vec{a_3}$$

Совместим начала $\vec{a_2}$ и $\vec{a_3}$ и построим $\beta_2\vec{a_2}$ и $\beta_3\vec{a_3}$, где $\beta_2, \beta_3 > 0$. Т.к. $\vec{a_3}$ лежит на диагонали параллелограмма (из правила сложения векторов параллелограммом), получается, что вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лежат в одной плоскости, а значит, компланарны.

Вопрос 32. Доказать теорему о разложении вектора по базису

Ответ. *Любой вектор можно разложить по базису и при этом единственным образом.*

Пусть в пространстве V_3 зафиксирован базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Возьмём вектор $\vec{x}$. Тогда система векторов $\vec{x}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно зависима, если вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов

$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 + \vec{e_3} \tag{1}$$

Предположим, что разложение вектора $\vec{x}$ - не единственное.

$$\vec{x} = \rho \vec{e_1} + \rho \vec{e_2} + \rho \vec{e_3} \tag{2}$$

Вычтем из (1) уравнение (2). Тогда:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \rho_1)\,\vec{e_1} + (\lambda_2 - \rho_2)\,\vec{e_2} + (\lambda_3 - \rho_3)\,\vec{e_3} \tag{3}$$

Поскольку базисные вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - линейно независимы, то выражение (3) представляет собой тривиальную линейную комбинацию векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, равную нулю. Тогда получаем:

$$\begin{matrix} \lambda_1 - \delta_1 = 0 \\ \lambda_2 - \delta_2 = 0 \\ \lambda_3 - \delta_3 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = \rho_1 \\ \lambda_2 = \rho_2 \\ \lambda_3 = \rho_3 \end{matrix}$$

Коэффициенты равны, что и требовалось доказать.

Вопрос 33. Доказать свойство линейности скалярного произведения.

Вопрос 34. Вывести формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе

Ответ. Пусть даны:

$$\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}$$
$$\vec{b} = x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = \left(x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}\right) \cdot \left(x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}\right) = \\ = x_a x_b (\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_a y_b (\vec{i} \cdot \vec{j}) + z_a z_b (\vec{i} \cdot \vec{k}) \\ + y_a x_b (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_a y_b (\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_a z_b (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ + z_a x_b (\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_a y_b (\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_a z_b (\vec{k} \cdot \vec{k}) = \\ = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \end{aligned}$$

Вопрос 35. Вывести формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе.

Ответ.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \times \vec{c} =$$

Вопрос 36. Доказать свойство линейности смешанного произведения.

Вопрос 37. Вывести формулу для вычисления смешанного произведения трёх векторов в правом ортонормированном базисе.

Вопрос 38. Вывести формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

Вопрос 39. Вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

Вопрос 40. Вывести формулу для расстояния между скрещивающимися прямыми.