CFD-HW2

李张鑫 2200011085 工学院

一、 数理算法原理

1. 格式构造

（一） 一阶导数差分格式

1. 中心差分格式

$$f^{'}(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

证明：由 Taylor 公式

$$f(x+h) = f(x) + hf^{'}(x) + \frac{h^2}{2}f^{''}(x) + \frac{h^3}{6}f^{'''}(x) + O(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf^{'}(x) + \frac{h^2}{2}f^{''}(x) - \frac{h^3}{6}f^{'''}(x) + O(h^4)$$

两式相减可得：

$$f^{'}(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

所以该差分格式的精度为$O(h^2)$

2. 向前差分格式

$$f^{'}(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

证明：由 Taylor 公式

$$f(x+h) = f(x) + hf^{'}(x) + \frac{h^2}{2}f^{''}(x) + O(\mathrm{h}^3)$$

则有

$$f^{'}(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \mathrm{O}(\mathrm{h})$$

所以该差分格式的精度为$O(h)$

（二） 二导数差分格式

1. 中心差分格式

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

证明：

由 Taylor 展开

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x) + \dfrac{h^3}{6}f'''(x) + \dfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O\left(h^5\right) \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x) - \dfrac{h^3}{6}f'''(x) + \dfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O\left(h^5\right) \end{cases}$$

两式相加得：$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + O(h^6)$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

该格式的构造精度为$O(h^2)$

2.向前差分格式

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

证明：

由 Taylor 展开

$$\begin{cases} f(x) = f(x) \\ f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x) + \dfrac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) \\ f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \dfrac{4h^3}{3}f'''(x) + O(h^4) \end{cases}$$

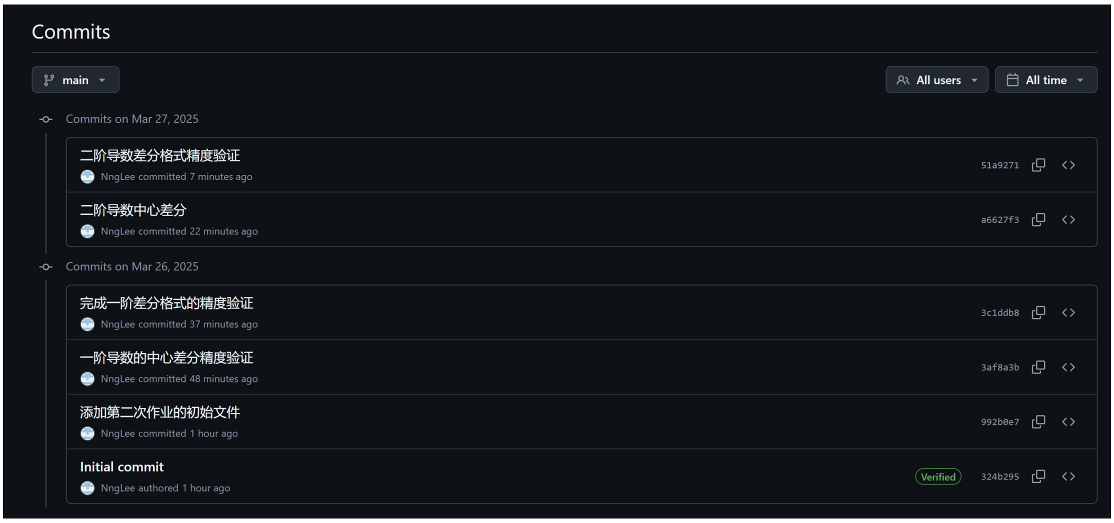
三式线性组合可得：

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h)$$

二、 代码编译及调试

具体代码及 README.文档见附件

github 地址：https://github.com/NngLee/CFD_HW



三、 分析与讨论

1. 舍入误差与截断误差的规律

舍入误差：来源于浮点运算精度限制

截断误差：来源于泰勒展开的高阶项

总误差=舍入误差+截断误差

以二阶中心差分格式为例

$$f^{''}(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

舍入误差：$R_r = \frac{\epsilon}{h^2}$ ，其中 ϵ 是机器精度

截断误差：$R_t = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + O(h^4)$, 即 $O(h^2)$

总误差：$R_{\text{total}} = O(h^2) + O\left(\frac{\epsilon}{h^2}\right)$ 存在最优步长 $h_{\text{opt}} = \epsilon^{1/4}$ ，此时总误差最小。当 h 较大

的时候，截断误差起主导，当 h 较小的时候，舍入误差起主导。

2. 单精度与双精度的比较

精度类型	机器精度ϵ	最优步长h_{opt}	最小误差
单精度	~10^-8	10^-2	~10^-4
双精度	~10^-16	10^-4	~10^-8

双精度允许使用更小的h（h_{opt}小两个量级）

四、 AI 工具使用说明

使用的 AI 工具名称：deepseek

AI 生成代码的行数及功能：24 行，绘制误差随着 h 减小而变化的曲线

核心算法部分比例:100%