CFD-HW3

李张鑫 2200011085 工学院

一、 数理算法原理

1. 格式构造

（一） 迎风格式

算法原理：

基于特征线传播方向选择差分方向，方程$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 的特征速度为+1，故采用后向空间差分：$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)$

数学推导：

1. 泰勒展开误差分析显示一阶截断误差
2. 通过 Von Neumann 稳定性分析得到增长因子：$G=1-\nu\left(1-e^{-ik\Delta x}\right)$
3. 稳定性条件：CFL 数$\nu=\frac{\Delta t}{\Delta x}\leq 1$

（二） Lax-Friedrichs 格式

算法原理：

通过引入空间平均项增强稳定性：

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n\right)-\frac{\nu}{2}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)$$

数学推导：

1. 截断误差为$O(\Delta t,\Delta x^2)$
2. 增长因子分析：$G=\cos\left(k\Delta x\right)-i\nu\sin\left(k\Delta x\right)$
3. 稳定性条件$\nu\leq 1$

（三） Lax-Wendroff 格式

算法原理：

通过泰勒展开引入二阶修正项：

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\nu}{2}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)+\frac{\nu^2}{2}\left(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\right)$$

数学推导：

1. **通过二阶泰勒展开推导得到**
2. **增长因子：**$G = 1 - i\nu\sin(k\Delta x) - 2\nu^2\sin^2(k\Delta x/2)$
3. **稳定性条件：**$\nu \leq 1$

二、 代码编译及调试

具体代码及 README.文档见附件

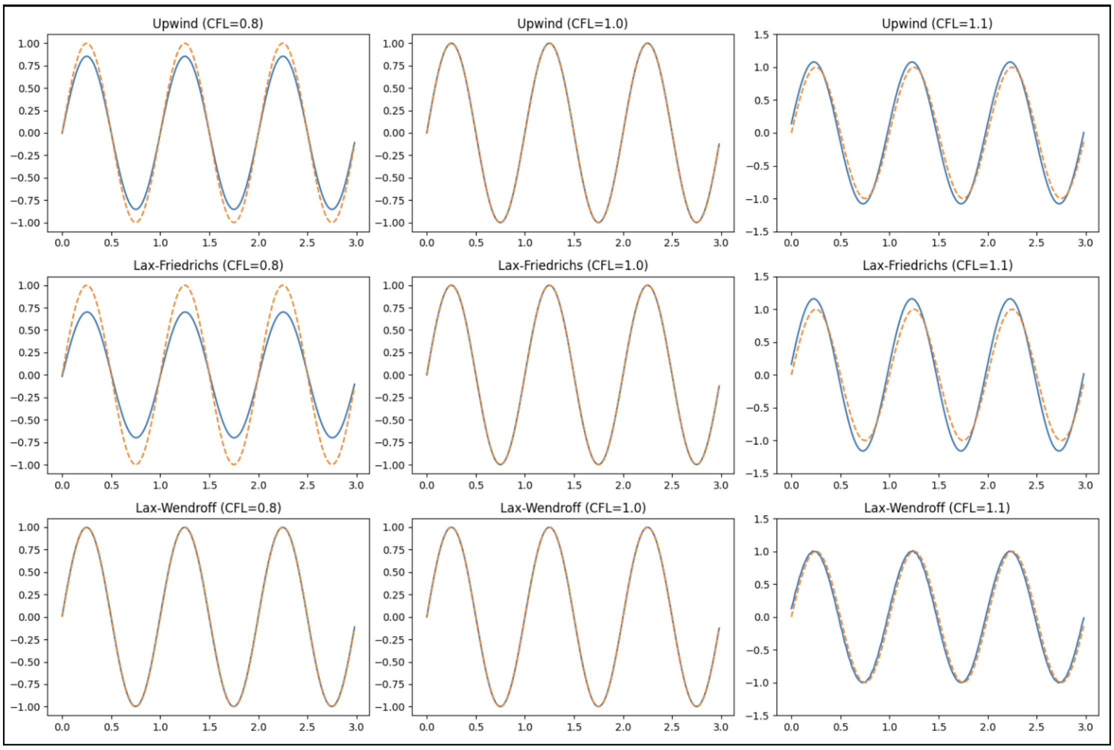
github 地址：https://github.com/NngLee/CFD_HW

核心代码部分：

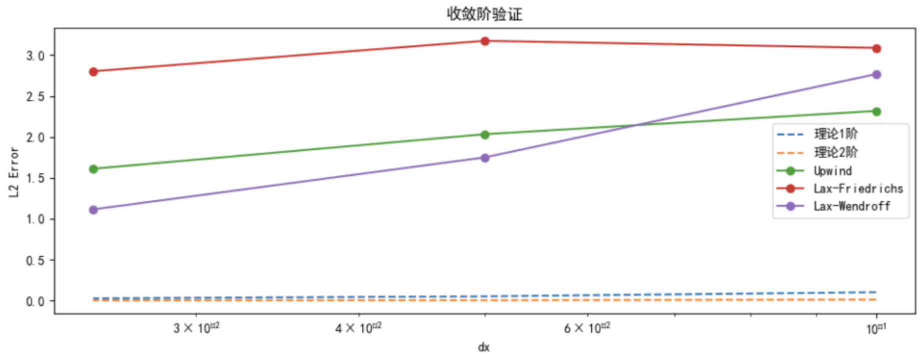
```python
# 数值格式实现函数
# =====================
def upwind(u, dx, dt):                                                          #迎风格式
    nu = dt/dx
    return u - nu*(u - np.roll(u, 1))

def lax_friedrichs(u, dx, dt):
    nu = dt/dx
    u_avg = 0.5*(np.roll(u, -1) + np.roll(u, 1))
    return u_avg - 0.5*nu*(np.roll(u, -1) - np.roll(u, 1))                      # Lax_friedrichs格式

def lax_wendroff(u, dx, dt):
    nu = dt/dx
    flux = 0.5*nu*(np.roll(u, -1) - np.roll(u, 1))
    diffusion = 0.5* nu **2 * (np.roll(u, -1) - 2 * u + np.roll(u, 1))          # Lax_wendroff格式
    return u - flux + diffusion
```

三、 分析与讨论

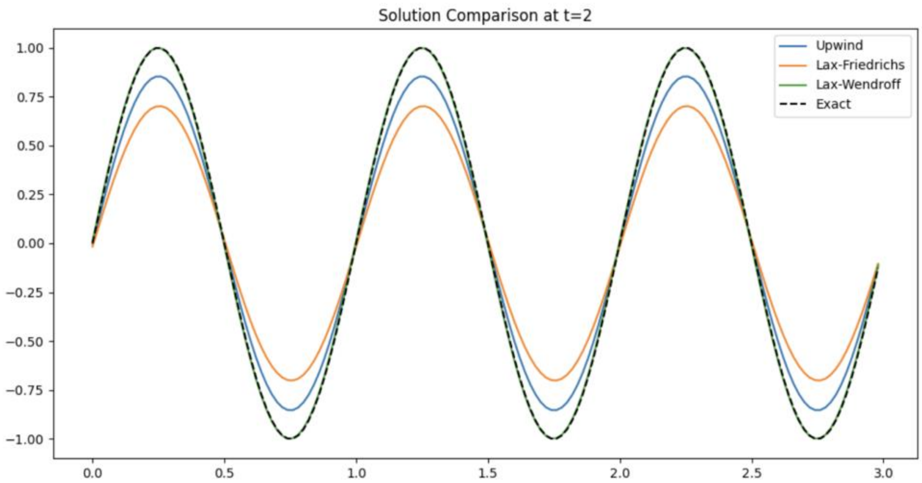
（1）稳定性条件



（2）验证格式精度



（3）数值解的耗散



1. AI 工具使用说明

使用的 AI 工具名称：deepseek

AI 生成代码的行数及功能：16 行 绘图

核心算法部分比例:100%