1. 利用 Myhill-Nerode 定理证明下列语言是否正则语言，如果是正则语言，请构造其 FA、RE 及 RG。

1) $\{x \mid x=x^R，x\in\{0,1\}^+\}$

2) $\{x \mid x$ 中 0 的个数不少于 1 的个数，$x\in\{0,1\}\ \}$

3) $\{xx^Rw \mid x, w\in\{0,1\}^+\}$

解题：对 Σ^* 下的字符串的划分

(1) $L_1=\{x \mid x=x^R,\ x\in\{0,1\}^+\}$

由命题5-2，$L_1\subseteq\Sigma^*$，则 R_{L_1}（R_{L_1}是L_1所确定的右不变的等价关系）是一个等价关系

则 R_{L_1}下存在划分 S_i 使得 R_{L_1}

将Σ^*下的所有字符串属于不同的划分下

也就是 R_{L_1} 将Σ^*下的字符串划分为了不同的等价类，若能证出 R_{L_1}的有穷/无穷性 (划分(等价类))

则可证明出 L_1 的正则性

∵ 取 $x,y\in\Sigma^+$ $x\neq y$ 且 $|x|=|y|$

由等价类的定义可知：$\forall i$ S_i，S_i中$\forall$2个元素 a,b aRb 恒成立，

又知 又对 $i\neq j$ $a\in S_i$，$b\in S_j$ aRb 恒不成立

又由R_L的定义可知 $\forall x,y\in\Sigma^*$

$xR_Ly \Longleftrightarrow \forall z\in\Sigma^*$，$xz\in L \Longleftrightarrow yz\in L$

则此时 $x,y\in S_i$

∵ $|x|=|y|$，$x\neq y$ （∵L_1只接受回文串）

∴ 取 $z=x^R$ 则 $xz=xx^R\in L_1$

$yz=yx^R\notin L_1$ $\quad xz \not\Leftrightarrow yz$

则此时，x,y必属于不同的等价类

所以 $\forall l$，l代表字符串的长度，在l下，(l固定)

$\forall x,y$，$x,y\in\Sigma^+$ $|x|=|y|=l$，$xR_{L_1}y$ 恒不成立

而 $l=1,2\ldots\infty$ 故可知 需要无穷个等价类才能对Σ^*进行划分，∴ L_1不是 RL（由M-N定理可知）

(2) $L_2 = \{x \mid x$中0的个数大于等于1的个数, $x \in \{0,1\}^+\}$

L_2的划分如下 设n_0 n_1分别代表,字符串中0,1个数

[0]: 0,1个数相同的字符串,以及ε

[1]: $n_0 - n_1 = 1$

[2]: $n_0 - n_1 = 2$

⋮

R_{L2}有

根据0,1个数之差有无穷多种划分,无穷

多种等价类,故L_2不是RL

(3) $L_3 = \{x x^R w \mid x, w \in \{0,1\}^+\}$

同(1) 找划分找等价类

设$x = 0^n 1^n$ 设$z = x^R 1 = 1^n 0^n 1$

∴ $xz = 0^n 1^n 1^n 0^n 1 \in L_3$

$y = 0^k 1^k$ $z = x^R 1 = 1^n 0^n 1$, $n \neq k$

∴ $yz = 0^k 1^k 1^n 0^n 1$

$= 0^k 1^{n+k+1} 0^n$

∵ $n \neq k$ ∴ $yz \notin L_3$

∴ x, y属于不同的等价类

由n, k的无穷性与任意性

故R_{L3}有无穷指数,由

MN定理,L_3不是RL

2. 判断下列命题，并证明你的结论。

1) 正则语言的任意子集都是正则语言。

2) 正则语言的补也是正则语言。

3) 无穷多个正则语言的并不一定是正则语言。

2.(1) 正则语言的任意子集都是正则语言

不对。比如 $L_1=\{x \mid x=x^R, x\in\{0,1\}^+\}$

由上题可知，L_1 不是正则语言

(2) 正则语言的补也是正则语言

对。若 L 为 RL 则 R_L 具有有穷指数 设 $\bar{L}$ 为 L 的补

则 $\forall x\in\Sigma^*$, $x\in L \Leftrightarrow x\notin\bar{L}$

$\therefore \forall x,y\in\Sigma^*$, $xR_Ly \Leftrightarrow$

$\forall z\in\Sigma^*$, $xz\in L \Leftrightarrow yz\in L \Leftrightarrow$

$\forall z\in\Sigma^*$, $xz\notin\bar{L} \Leftrightarrow yz\notin\bar{L} \Leftrightarrow$

$\forall z\in\Sigma^*$, $xz\in\bar{L} \Leftrightarrow yz\in\bar{L}$

$\Leftrightarrow xR_{\bar{L}}y$ $\therefore xR_Ly \Leftrightarrow xR_{\bar{L}}y$

$\therefore R_{\bar{L}}$ 具有有穷指数 由 M-N 定理，$\bar{L}$ 是正则语言

(3) 对，有限语言是正则的

$L_0=\{\varepsilon\}$

$L_1=\{01\}$

$\vdots$

$L_i=\{0^i1^i\}$

$\therefore L=\{0^n1^n \mid n\geq 0\}$ 是形如 $L_i=\{0^i1^i \mid i\geq 0\}$ $i\to\infty$

L_i 的并

由泵引理可知，设 L 是 RL 且 L 泵长为 p

$s=0^p1^p$ $x=0^{p-k}$ $y=0^k$ $z=1^p$

$\therefore s=xyz=0^{p-k}y^k1^p$

$xy^iz=0^{p-k}y^{ik}1^p$

$i=0$ $xz=0^{p-k}1^p$ $p-k<p$

不在 RL 与假设矛盾

故 L 不是 RL 无穷多个正则语言的并

不一定是正则语言

3. 设 L 是正则语言，字母表是 Σ，定义 $L_{1/3}=\{w\in\Sigma^*|\exists\, x,y\in\Sigma^*, wxy\in L, |w|=|x|=|y|\}$。试证明 $L_{1/3}$ 是否正则语言吗？

OURSTORYBEGINS

3. 设 L是RL，字母表是Σ，定义 $L_{\frac{1}{3}}=\{w\in\Sigma^*|\exists x,y\in\Sigma^*, wxy\in L, |w|=|x|=|y|\}$ 试证明 $L_{\frac{1}{3}}$是正则语言

L为RL 则∃ DFA $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$

使 $L(M)=L$ 下面构造 $M'=(Q',\Sigma',\delta',q_0',F')$

以识别 $L_{\frac{1}{3}}$

$L_{\frac{1}{3}}$ 代表的语言是 L中可被均分为3份的字符串

设 $\forall q'\in Q$

$q'=(q,S)$ $q\in Q$，代表在M'中输入字符串后对应M所在的状态

S代表 M中读入当前字符串2倍长度字符串后能到达的所有的接受状态

$$\delta'((q,S),a)=(\delta(q,a),T)$$

T代表了接受2个字符后，能够到达S中任意状态的M中的对应状态的集合

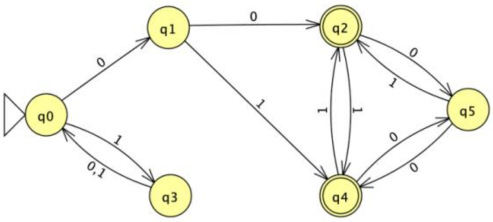
$q_0'=(q_0,F)$，F'对应所有满足 $q_i\in S$的状态(q_i,S)，代表从当前状态到接收状态的字符串长度是当前读入字符长度的2倍

q_0'对应M中的起始状态q_0且接受的字符串长为0

此时 $M'=(Q',\Sigma',\delta',q_0',F')$

$L(M')=L_{\frac{1}{3}}$ $L_{\frac{1}{3}}$是RL

4. 对下图给出的 DFA，求出它的极小状态 DFA，**要求给出主要的求解步骤**。



4.

1	X				
2	X	X			
3	X	X	X		
4	X	X		X	
5	X		X	X	X
	0	1	2	3	4

$\delta(q,x)\in F$ $\delta(p,x)\in F$

只有1个成立 则称p,q可区分

① q_1, q_0 $\delta(q_1,0)=q_2\in F$

$\delta(q_0,0)=q_1\notin F$

标记(q_1,q_0)

② q_3,q_0 $\delta(q_3,0)=q_0\notin F$

$\delta(q_0,0)=q_1\notin F$

(q_1,q_0)已被标记

故标记(q_3,q_0)

③ q_5,q_0 $\delta(q_5,0)=q_2\in F$

$\delta(q_0,0)=q_1\notin F$

(q_1,q_2)已被标记

故标记(q_0,q_5)

④ q_3 q_1

$\delta(q_3,0)=q_0\notin F$

$\delta(q_1,0)=q_2\in F$

(q_0,q_2)已标记

故 (q_3,q_1)标记

⑤ q_5,q_1

$\delta(q_5,0)=q_4\in F$

$\delta(q_1,0)=q_2\in F$

$\delta(q_5,1)=q_2\in F$

$\delta(q_1,1)=q_4\in F$

(q_1,q_5)不标记

⑥ q_4,q_2

同⑤，(q_2,q_4)不标记

⑦ q_3, q_5

$\delta(q_3,0)=q_0\notin F$

$\delta(q_5,0)=q_4\in F$

$\because q_0,q_4$ 标记

$\therefore (q_3,q_5)$标记

综上 q_1, q_5等价

q_2 q_4等价

∴