1. 给出下列的正则文法 G，求出对应的 DFA M，使得 L(M) = L(G)。

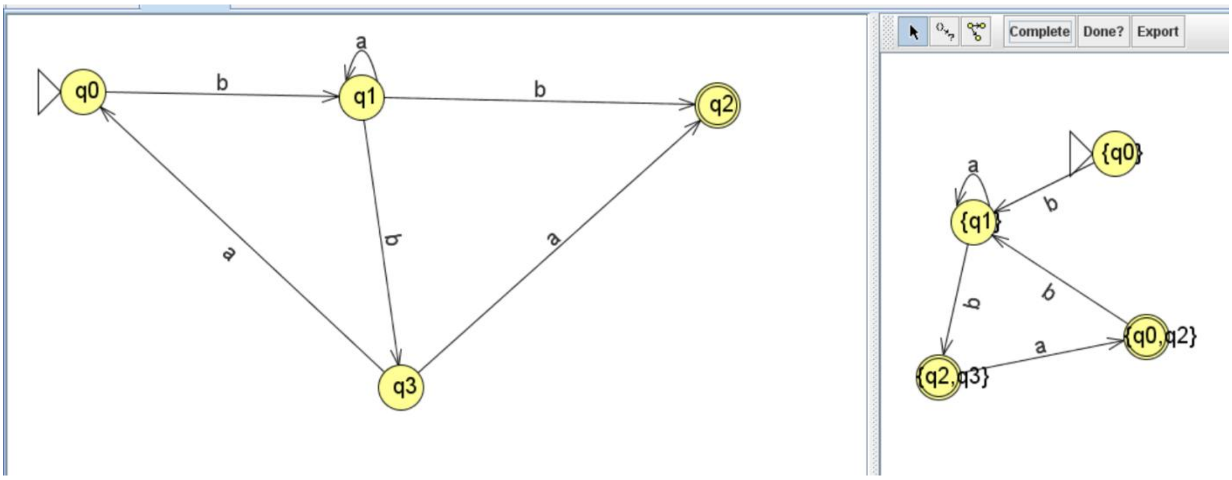
(1) $G_1 = (V, T, P_1, S)$

P_1: $S \to bB$, $B \to aB \mid bA \mid b$, $A \to a \mid aS$

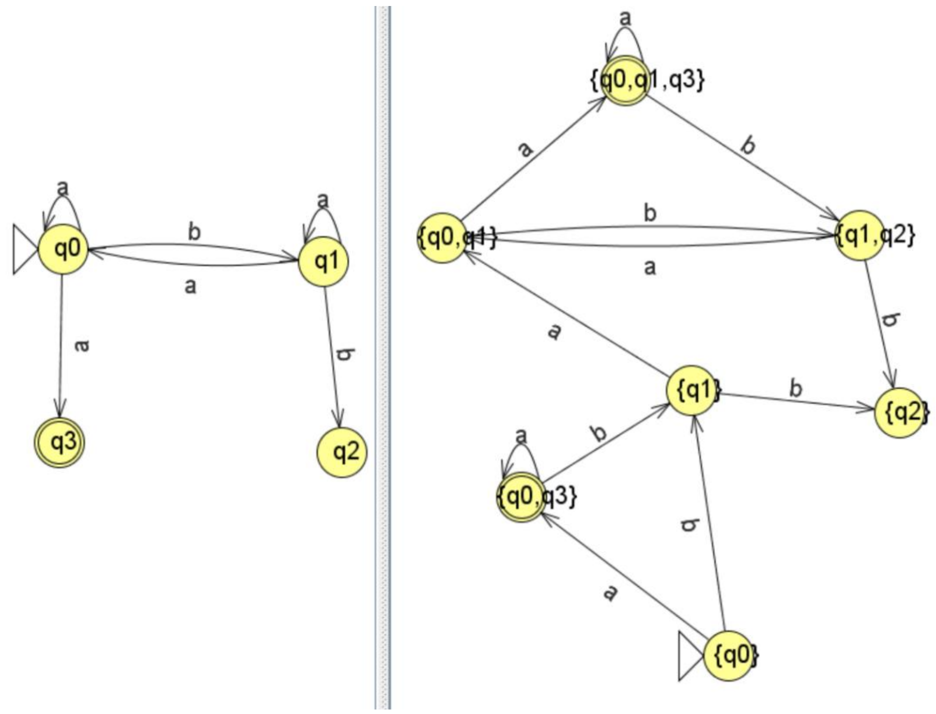
(2) G2= V，T，P_2，S)

P_2：$S \to aS \mid bB \mid a$, $B \to bA \mid aB \mid aS$

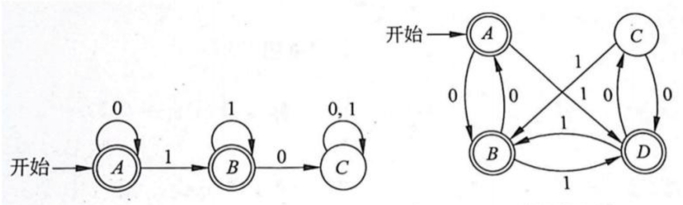
（1）对应的 NFA 和转化生成的 DFA 如下所示：



（2）对应的 NFA 和转化生成的 DFA 如下所示：



2. 给出下图描述的两个 DFA M，分别求出对应的正则文法 G，使得 L(G)=L(M)。



a) DFA M_1　　b) DFA M_2

（a）

$G1=(V,\{0，1\},\ P1,\ S)$　S 对应 A

P1：S → 0S ｜ 1B ｜ ε ｜ 1

　　B → 1B ｜ 0C ｜ ε

　　C → 0C ｜ 1C

（b）

$G2=(V,\{0，1\},\ P2,\ S)$ S 对应 A

P2：S → 0B ｜ 1D ｜0 ｜ 1 ｜ ε

　　B → 0S ｜ 1D ｜0 ｜ 1 ｜ ε

　　C → 0D ｜ 1S

　　D → 0C ｜ 1B ｜ ε

3．利用正则语言的泵引理，证明下列语言不是正则的

a） $\{0^n1^m|n<=m\}$

b） $\{0^n|n$ 是完全平方数$\}$

c） $\{0^i1^j|$ i 和 ji 是互素的$\}$

3.(a) $L=\{0^n1^m \mid n\le m\}$ 不是正则的

① $n<m$ 设 L 是正则语言，L 符合泵引理，故

令 $L=0^p1^{p+1}$ p 为泵长 设 $S=xyz$

设 $y=0^k$ 则 $x=0^{p-k}$ $z=1^{p+1}$

$\therefore S=0^{p-k}\,0^k\,1^{p+1}$ ，$k\ge1$

$xy^{ik}z=0^{p-k}\,0^{ik}\,1^{p+1}$

$i=2$ 时 $xy^2z=0^{p+k}\,1^{p+1}$

$\because k\ge1$ 则 0的个数大于等于 1的个数

这与 $n<m$ 矛盾，故 L 不是 RL

② $n=m$ 设 L 为 RL，故

令 $L=0^p1^p$ p 为泵长，设 $S=xyz$

设 $y=0^k$ $x=0^{p-k}$ $z=1^p$

$\therefore S=0^{p-k}0^k1^p$

$\therefore xy^iz=0^{p-k}0^{ik}1^p$

$i=2$ 时 $xy^2z=0^{p+k}1^p$

$k\ge1$，$p+k>p$ 这与 $n=m$ 矛盾

故 L 不是 RL，综合①② L 不是 RL

3.(b) $L=\{0^n \mid n为完全平方数\}$ 不是RL

设L是RL，设泵长为p

令 $s=0^{p^2}$ $s=xyz$ $x=0^{p-k}$ $y=0^k$ $z=0^{p(p-1)}$

$s=xyz$

$S=0^{p-k}0^k0^{p(p-1)}$ $1\le k\le p$

$xy^iz=0^{p-k}0^{ik}0^{p(p-1)}$

i=2时

$xy^2z=0^{p+k+p^2-p}$

$xy^2z=0^{p^2+k}$

∵ $k\in[1,p]$ 且 $(p+1)^2-p=2p+1>k$

∴ $p^2+k<(p+1)^2$ ∴ p^2+k 不是一个完全平方数

这与L定义矛盾，故 L不是RL

3.(c) $L=\{0^i1^j \mid i,j互质\}$ 不是RL

反证法，若L为RL 则设其泵长为p

设 p_0 为质数，且 $p_0>p+1$

设 $w=xyz=0^{p_0}1^{(p_0-1)!}$

p_0与$(p_0-1)!$互质

设 $y=0^k$ $x=0^t$ $t<p-k$，多余的0给z $z=1^{(p_0-1)!}0^{e}$

$e=p_0-k-t$

$k\in[1,p_0)$

∴ $w=0^t0^k0^{p_0-k-t}1^{(p_0-1)!}$

$w'=xy^{p_0}z=0^{(k+1)p_0}1^{(p_0-1)!}$

$p_0>p+1$

$1\le k<p_0-1$

∴ $2\le k+1<p_0$ $k+1\le p_0-1$

∴ $(p_0-1)!$ 与 $p_0(k+1)$ 有公因子 $k+1$

故 $w'\notin L$，L不是RL

4. 对于任意语言 A，$A^R=\{w^R \mid w\in A\}$。证明：如果 A 是正则的，则 A^R 也是正则的。

4. 对任意语言 A，$A^R=\{w^R \mid w\in A\}$，证明：若A是正则的，则 A^R 也是正则的

设L由正则表达式E定义，下面对E进行归纳 要证 存在另一个正则表达式 E^R 使 $L(E^R)=(L(E))^R$，也就是说 E^R 的语言是E的语言反转

基础情况 若E为ε或φ或单符号a，则显然 E^R 与 E 相同

即 $\{\varepsilon\}^R=\{\varepsilon\}$ $\emptyset^R=\emptyset$ $\{a\}^R=\{a\}$

归纳 ① $E=E_1+E_2$ 则 $E^R=E_1^R+E_2^R$ 2个语言的反转 可以通过分别计算这个语言的反转 再取并，进而得到 E^R

② $E=E_1E_2$ 则 $E^R=E_2^RE_1^R$

$w_1\in L(E_1)$ $w_2\in L(E_2)$ $w=w_1w_2\in L(E)$，$E=E_1E_2$

则 $w=w_1w_2$ $w^R=w_2^Rw_1^R$

eg $L(E_1)=\{01,11\}$ $L(E_2)=\{00,10\}$

$L(E_1E_2)=\{0100\ \ 0110\ \ 1100\ \ 1110\}$

$(L(E_1E_2))^R=\{0010\ \ 0110\ \ 0011\ \ 0111\}$

$(L(E_2))^R=\{00,01\}$ $(L(E_1))^R=\{10,11\}$

$(L(E_2))^R(L(E_1))^R=\{00,01\}\{10,11\}$

$=\{0010,0011\ \ 0110\ \ 0111\}$

$=(L(E_1E_2))^R$

即 $w=w_1w_2$

$w^R=w_2^Rw_1^R$

③ $E=E_1^*$ $E^R=(E_1^R)^*$

$\forall w\in L(E_1)$ 设 $w=w_1w_2\cdots w_n$

$\forall i$, $w_i\in L(E)$

$w^R=w_n^Rw_{n-1}^R\cdots w_1^R$

$\forall i$, $w_i^R\in L(E^R)$

则 $\forall w^R\in (E_1^R)^*$

即 $\forall w\in L((E_1^R)^*)$，$w=w_1w_2\cdots w_n$

$\forall i$, w_i是 $L(E_1)$中某个串的反转

则 $w^R=w_n^Rw_{n-1}^R\cdots w_2^Rw_1^R$ 是 $L(E_1^*)$中的串

~~wR也是~~

$\therefore \forall w\in L(E) \iff \forall w^R\in L((E_1^R)^*)$

补充题：

1. 正则语言的泵引理指出，对于每一个正则语言都有一个泵长度 p，使得对于该语言中每一个字符串，如果它的长度等于或大于 p 就能够被抽取。如果 p 是语言 A 的泵长度，则任意 p’>=p 也是 A 的泵长度。A 的**最小泵长度**是 A 的泵长度的最小值。例如，如果 $A=01^*$，则最小泵长度是 2。理由如下：A 中长度为 1 的字符串 s=0 不能被抽取，而 A 中任何长度大于 2 的字符串都含有 1，把它划分成 x=0，y=1，z 为其余部分，从而能够被抽取。对于下列语言，给出最小泵长度，并加以证明。
   a) 0001^*
   b) 0^*1^*
   c) Σ^*

补充：(a) 0001^* $p_{min}=4$ 对任意长度≥4的串

设 $x=000$ $y=1$ z为其余部分

可被抽取

长度为3的字符串是000，不能被抽取

(b) 0^*1^*，最短的无法被抽取的字符串为 ε，且 ε 无法被分割成 xyz 的形式，因为 $|y|\geq 1$

$\therefore p_{min}=0+1=1$

(c) Σ^*，任意字符串都属于该语言，则~~无~~通过抽取来判断字符串是否属于该语言无效，同(b)最短的无法被抽取的字符串为 ε，则 $p_{min}=1$