ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Андрей Вячеславович Семёнов

КОНСПЕКТ ЗА АВТОРСТВОМ ПАВЛА ЦЫГАНЕНКО И ЛЬВА МУКОСЕЕВА

Содержание

1. Кольца и модули

1.1. Групповые алгебры

Определение 1: Групповая алгебра группы G над полем k:

$$kG = \langle \{ e_g \mid g \in G \} \rangle_k$$

То есть её элементы – формальные комбинации вида $\sum\limits_{g \in G} \alpha_g g$, где ненулевых α конечное число.

Сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum_{g \in G} \beta_g g \right) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{xy = g} \alpha_x \beta_y \right) g.$$

Определение 2: Модуль M_R называется простым, если он не содержит нетривиальных собственных подмодулей.

Определение 3: Модуль M_R называется полупростым, если любой его подмодуль выделяется прямым слагаемым.

То есть $\forall N \leqslant M : \exists P \leqslant M : M = M \oplus N$.

<u>*Замечание*</u>:

1. M полупрост $\Longleftrightarrow M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$, где все M_i простые.
2. Кольцо называется полупростым, если оно полупросто как левый модуль над собой. Без доказательства скажем, что это эквивалентно тому, что любой R-модуль полупрост.

Следующую теорему вам должны были доказать в школьном курсе по некоммутативным кольцам.

Теорема 1 (Веддерберна — Артина): Если R артиново, то

$$R - \text{полупростое} \Longleftrightarrow R = \prod_{j \in I} M_{n_j}(D_j), \quad D_j - \text{тела}.$$

То есть полупростое артиново кольцо разлагается в прямое произведение матричных колец над телами, и в предположении артиновости обратное тоже верно.

Теорема 2 (Машке): Пусть k – поле, $|G| < \infty$, $\operatorname{char} k = 0$ или $\operatorname{char} k \nmid |G|$. Тогда kG – полупростая алгебра.

Доказательство: Покажем, что произвольный модуль M над kG полупрост. Рассмотрим $N \leqslant M$ и стандартные отображения

$$N \rightarrowtail M \overset{\tilde{\pi}}{\twoheadrightarrow} N.$$

Определим усреднение $\tilde{\pi}$:

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1} x).$$

- π – kG-линейный гомоморфизм. Действительно, для $h \in G$ проверим, что $\pi(hx) h\pi(x)$, а остальное и так понятно.

Обозначим $t = h^{-1} g$, тогда

$$\pi(hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1} h x) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} ht \tilde{\pi}(t^{-1} x) = h\pi(x).$$

- N неподвижен под действием π. Действительно, если $x \in N$, то $g^{-1} x \in N$ и $\tilde{\pi}(g^{-1} x) = g^{-1} x$, так что теперь всё ясно.

Тем самым, $M = N \oplus \operatorname{Ker} \pi$. 😎

1.2. Радикал алгебры

Далее под A подразумевается конечномерная алгебра над полем k.

Определение 4: *Радикалом* $J(A)$ называется сумма всех двухсторонних нильпотентных идеалов.

Теорема 3:
1. $J(A)$ – нильпотентный идеал в A.
2. Любой нильпотентный идеал лежит в $J(A)$.
3. $J(A / J(A)) = 0$

Доказательство:
1. Во-первых, сумма двух нильпотентных двухсторонних идеалов тоже нильпотентный двухсторонний идеал. Действительно, если $I_1^{n_1} = 0$ и $I_2^{n_2} = 0$, то $(I_1 + I_2)^{n_1 + n_2}$ порождается всеми произведениями длины $n_1 + n_2$ элементов из $I_1 + I_2$, но раскрывая скобки получится либо не менее n_1 множителей из I_1, либо не менее n_2 из I_1, а значит $(I_1 + I_2)^{n_1 + n_2} = 0$.

Понятно, что вместо $n_1 + n_2$ можно было взять $\max(n_1, n_2)$.
Во-вторых, можно считать, что в сумме из определения $J(A)$ конечное число идеалов, потому что алгебра конечномерна.

2. Если идеал двухсторонний, то всё ясно. Допустим I – левый идеал и $I^k = 0$. Тогда IA – двухсторонний. Покажем, что $IA \subseteq J(A)$ и так как алгебра с единицей, из этого будет следовать искомое.

$$(IA)^k = I\underbrace{(AI)...(AI)}_{k-1}A \subseteq I^k A = 0.$$

1. Рассмотрим двухсторонний нильпотентный идеал $\overline{I}$ в $A/J(A)$. Пусть $\overline{I}^k = 0$. Тогда $I^k \subseteq J(A)$. По первому пункту теоремы $J(A)$ нильпотентен, скажем, $J^n(A) = 0$.

$$I^{kn} \subseteq J^n(A) = 0 \implies I^{kn} = 0.$$

По второму пункту I лежит в $J(A)$, а значит $\overline{I} = 0$. 😎

Факт: A полупроста $\iff J(A) = 0$.

1.3. Радикал модуля

Сейчас мы будем работать с модулями над конечномерной алгеброй над полем.

Определение 5: *Радикалом* модуля M называется пересечение всех его максимальных подмодулей и обозначается как $\operatorname{Rad} M$.

Лемма 1: M полупрост $\implies \operatorname{Rad} M = 0$.

Доказательство: Допустим существует $x \in \operatorname{Rad} M \setminus \{0\}$. Как и всякий подмодуль, Ax можно выделить в прямую сумму: $M = A \oplus U$. Если рассмотреть стандартный эпиморфизм $A \to Ax : 1 \mapsto x$, то станет очевидно, что $Ax \cong A/\operatorname{Ann} x$. Вложение $\operatorname{Ann} x$ в максимальный идеал I, его содержащий, индуцирует эпиморфизм $A/\operatorname{Ann} x \twoheadrightarrow A/I$, причём $S := A/I$ – простая алгебра. Имеем

$$M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M/U \cong Ax \cong A/\operatorname{Ann} x \overset{f}{\twoheadrightarrow} S,$$

так что будем считать, что $f\pi : M \to S$. Положим $N := \operatorname{Ker} f\pi$, тогда так как $M/N \cong S$, то N – максимальный подмодуль. $U \subseteq N$ по построению и $x \in N$ по определению радикала. Тогда $M = Ax + U \subseteq N$. Противоречие. 😎

Замечание: Мы не пользовались конечномерностью, так что на самом деле это верно для модулей над любым ассоциативным кольцом с единицей.

Перед тем как доказать следующую теорему, упомянем факт, который на лекции был дан как упражнение.

Предложение 1: $X \leqslant \operatorname{Rad} M \implies \operatorname{Rad} \dfrac{M}{X} = \dfrac{\operatorname{Rad} M}{X}$.

Доказательство: Просто факт о том, что максимальные подмодули фактора $\overline{\mathfrak{M}} \leqslant \dfrac{M}{X}$ соответствуют максимальным подмодулям $X \subseteq \mathfrak{M} \leqslant M$. 😎

Теорема 4: $\operatorname{Rad} M = J(A)M$.

Доказательство: Допустим, что включение $\operatorname{Rad} M \supseteq J(A)M$ уже доказано. Обозначим за $\overline{A} := A/J(A)$. Теорема 3 утверждает, что алгебра $\overline{A}$ полупроста. Рассмотрим $\overline{M} := M/J(A)M$, который в силу $\operatorname{Ann} M \supseteq J(A)$ является $\overline{A}$ - модулем. По замечанию о полупростоте кольца, M является полупростым модулем, из чего по предложению 1 следует, что $\operatorname{Rad} M \subseteq J(A)M$.

Докажем включение в обратную сторону.

⚠️ SCAM ALERT ⚠️

В этом месте Семенов решил заскамить аудиторию! Ведутся работы по устранению скама, сохраняйте спокойствие!

😎

Следствие: $\operatorname{Rad} {}_A A = {}_A J(A)$, $\operatorname{Rad} A_A = J(A)_A$ и $\operatorname{Rad} A = J(A)$ (в коммутативном случае).

Ниже под R понимается ассоциативное кольцо с единицей.

Определение 6: Подмодуль X модуля M_R называется малым, если для всякого $K \leqslant M$ из $X + K = M$ следует $K = M$.

Лемма 2: Пусть A – конечномерная алгебра, M_R – правый A-модуль. Тогда
1. Любой малый подмодуль M лежит в $\operatorname{Rad} M$.
2. $\operatorname{Rad} M$ есть сумма малых модулей.

Доказательство:
1. Пусть имеется малый подмодуль $N \nsubseteq \operatorname{Rad} M$. Тогда существует максимальный подмодуль U, не содержащий N. Из максимальности U следует $N + U = M$, а значит $U = M$. Противоречие с максимальностью U.
2. $\operatorname{Rad} M = \sum\limits_{x \in \operatorname{Rad} M} Ax$. Покажем, что каждый Ax мал. «Дело за малым» - А. В. Семёнов.

Пусть $Ax + K = M$, проверим, что $K = M$.

$$M \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{K} = \frac{Ax}{Ax \cap K} =: D_A \overset{\pi_2}{\cong} \frac{A}{\operatorname{Ker}\left(A \underset{1 \mapsto x}{\longrightarrow} M\right)} \overset{\pi_3}{\twoheadrightarrow} \frac{A}{I} = S.$$

Первое равенство получено по второй теореме об изоморфизме. D_A – циклический модуль. I – некоторый максимальный подмодуль, в который вложено ядро. S – простой модуль.
Положим $f = \pi_3 \pi_2 \pi_1 : M \to S$ – эпиморфизм в простой модуль. Значит $\operatorname{Ker} f$ – максимальный подмодуль M, тогда $x \in \operatorname{Ker} f$ так как он изначально брался из радикала.

$K \subseteq \operatorname{Ker} f$ так как $K \subseteq \operatorname{Ker} \pi_1$. Получаем, что $\operatorname{Ker} f = M$. Противоречие. 😎

Теорема 5: Если A – конечномерная алгебра и M_A – модуль, то $\operatorname{Rad} M$ мал.

Доказательство:
1. Пусть M конечнопорождён. Тогда $\operatorname{Rad} M$ конечнопорождён по У МЕНЯ НАПИСАНО НЁТЕРОВОСТИ, НО НАДО ПРОВЕРИТЬ. Тогда можно считать, что радикал представляется конечной суммой малых модулей. Остаётся показать, что сумма двух малых мала. Действительно, $(N_1 + N_2) + K = M \Longrightarrow N_2 + K = M \Longrightarrow K = M$.
2.

⚠ **SCAM ALERT** ⚠

$M = \lim\limits_{\overrightarrow{n}} M_n$, где M_n конечнопорождённые. $\operatorname{Rad} M = \lim\limits_{\overrightarrow{n}} \operatorname{Rad} M_n$ так как радикал сохраняется при гомоморфизмах. Тогда $\operatorname{Rad} M$ мал так как

$$\boxed{|\operatorname{Rad} M - \operatorname{Rad} M_n| < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{Rad} M + K = M.}$$

😎

2. Проективные модули

2.1. Свойства

Определение 7: Модуль P_R называется проективным, если

$$\forall f : P \to N \quad \forall \sigma : M \twoheadrightarrow N \quad \exists g : P \to M : f = \sigma g.$$

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "\forall f"] \\
M \arrow[r, two heads, "\forall \sigma"'] & N
\end{tikzcd}$$

Лемма 3: Любой свободный модуль проективен.

Доказательство: Рассмотрим свободный модуль F и зафиксируем диаграмму

$$M \xrightarrow{\sigma} \!\!\!\!\rightarrow N \xleftarrow{f} F$$

Пусть $\{w_j\}_{j \in I}$ – базис F, $f(w_j) = y_j$. Так как σ сюръективно, $\forall j \in I : \exists x_j \in M : \sigma(x_j) = y_j$.

Положив $g(w_j) = x_j$, замкнём диаграмму до коммутативной:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\sigma"] & N & F \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

😎

> **Теорема 6**: P – проективный $\Longleftrightarrow \forall \sigma : M \twoheadrightarrow P \quad \exists i : P \to M : \sigma i = \mathrm{id}_P$.

Доказательство: $\Rightarrow$: Фиксируем $\sigma : M \twoheadrightarrow P$. Взяв в определении проективного модуля $N = P$ и $f = \mathrm{id}_N$ получаем требуемое i.
$\Leftarrow$: Рассмотрим $U = \{(p, m) \in P \oplus M \mid f(p) = \sigma(m)\}$ вместе с проекциями $U \overset{\pi_1}{\to} P$ и $U \overset{\pi_2}{\to} M$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend right, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"'] & P \arrow[l, bend right, "j"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"] \\ M \arrow[r, two heads, "\sigma"] & N \end{tikzcd}$$

Из эпиморфности σ следует эпиморфность π_1, значит по условию $\exists i : P \to U : \pi_1 i = \mathrm{id}_P$.
Тогда $g = \pi_2 j$ замыкает диаграмму, так как $\forall x \in P$

$$\sigma g(x) = \sigma \pi_2 j(x) = \sigma(\pi_2(x, m)) = \sigma(m) = f(x).$$

😎

> **Лемма 4**: Если $P = \bigoplus\limits_{k \in I} P_k$, то P – проективен $\Longleftrightarrow$ все P_k проективны.

Доказательство: $\Rightarrow$: Рассмотрим произвольный P_k и покажем, что он проективен.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, two heads, "\sigma"'] & P = \bigoplus\limits_{k \in I} P_k \arrow[l, "g"'] \arrow[rr, bend left, two heads, "\pi_k"] & & P_k \arrow[ll, hook, bend left, "i_k"] \arrow[dll, bend left, "f"] \arrow[lll, dashed, bend right, "g_k"'] \\ & N & & \end{tikzcd}$$

Из проективности P следует существование $g : P \to M : f\pi_k = \sigma g$. Тогда нам подходит $g_k = g i_k$:

$$f = f \pi_k i_k = \sigma g i_k = g i_k.$$

$\Leftarrow$: Из проективности P_k следует существование $g_k : P_k \to M : \sigma g_k = f i_k$.
Положим $g = \bigoplus\limits_{k \in I} g_k \pi_k$, тогда

$$\sigma g = \bigoplus_{k \in I} \sigma g_k \pi_k = \bigoplus_{k \in I} f i_k \pi_k = f \circ \bigoplus_{k \in I} i_k \pi_k = f.$$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[dd, two heads, "\sigma"'] & & \\
& P = \bigoplus\limits_{k\in I} P_k \arrow[ul, dashed, "g"'] \arrow[dl, "f"] \arrow[r, bend left, two heads, "\pi_k"] & P_k \arrow[l, bend left, hook, "i_k"] \arrow[ull, bend right, "g_k"'] \\
N & &
\end{tikzcd}
$$

😎

Следствие: P – проективен $\Longleftrightarrow$ P – прямое слагаемое свободного.

Доказательство:
$\Rightarrow$: Для любого проективного модуля P существует свободный модуль F и эпиморфизм $F \twoheadrightarrow P$ (можно взять свободный модуль на образующих P). Из проективности P следует существование $i : P \to F : \pi i = \mathrm{id}_P$. Тогда $\exists X \leqslant F : F = X \oplus i(P) \cong X \oplus P$. можно добавить в первую лекцию теорему о диаграмме прямой суммы и сослаться на неё

$\Leftarrow$: Очевидно следует из лемм 3 и 4. потом можно ссылки добавить, мне впадлу 😎

2.2. Проективные накрытия

Пусть A – конечномерная алгебра над полем K.

Определение 8: Можно представить A_A как $A_A = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} P_j$, где все P_j неприводимые. Они называются главными неразложимыми модулями.

Все P_j проективны так как A свободна как модуль над собой.

Определение 9: Кольцо R называется локальным, если у него всего один максимальный идеал.

Свойства:
1. Этот максимальный идеал состоит из всех необратимых элементов. Действительно, если бы существовал другой необратимый элемент, то он бы содержался в некотором другом максимальном идеале.
2. $R/\operatorname{Rad} R$ – тело. На самом деле это критерий локальности. Надо либо добавить объяснение, либо удостовериться у Семёнова, что это идёт без доказательства
3. $1 - x$ необратим $\Longleftrightarrow$ x обратим. Следует из известного факта про описание радикала Джекобсона, в нашем случае он совпадает с единственным максимальным идеалом.

Определение 10: $(P_A, \pi : P \twoheadrightarrow M_A)$ – проективное накрытие модуля M $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} \pi$ мало.

Теорема 7: Если проективное накрытие существует, то оно единственно.

Доказательство: Пусть существуют проективные накрытия $(P_1, \pi : P_1 \twoheadrightarrow M)$ и $(P_2, \pi : P_2 \twoheadrightarrow M)$. Из проективности P_1 следует существование $f : P_1 \to P_2 : \pi_2 f = \pi_1$. Проверим, что это изоморфизм.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, two heads, "\pi_1"] & \\
& M \\
P_2 \arrow[ur, two heads, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

- Эпиморфность. $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} \pi_2 = P_2$. вроде это очев, но я уже совсем мясо чтобы думать. Так как $\operatorname{Ker} \pi_2$ мало, то $\operatorname{Im} f = P_2$, то есть сюръективность доказана.
- Номорфность. По только что доказаной эпиморфности f расщепляется, то есть $\exists i : P_1 \to M$: $fi = \mathrm{id}_{P_1}$. добавить ссылк на теорему 6, а в ней добавить слово расщепимость.
  Значит $\exists X \leqslant P_1 : \operatorname{Ker} f \oplus X = P_1$. Ядро f тоже мало, так как $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} \pi_1$ и подмодуль малого модуля мал. Получаем, что $\operatorname{Ker} f = 0$.

😎

в следующую теорему не вдумывался, но вроде норм

Теорема 8: S_A – просто $\implies \exists (P, \pi : P \twoheadrightarrow S)$ – проективное накрытие.

Доказательство: $\exists \pi : A_A \twoheadrightarrow S$. Представим A как $A = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} P_j$.

$$S = \operatorname{Im} \pi = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\pi(P_j)}_{\leqslant S} \quad \implies \quad \pi(P_k) = S.$$

Предположим, что $\operatorname{Ker} \pi + X = P$, но $X \neq P$. Тогда $\pi(X) = \pi(\operatorname{Ker} \pi + X) = \pi(P) = S$.
Пусть $\pi_1 = \pi|_X : X \twoheadrightarrow S$. По проективности P существует $f : P \to X : \pi = \pi_1 f = \pi j f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[dr, hook, bend left, "j"] & S \\
& P \arrow[u, two heads, "\pi"'] \arrow[ul, bend left, "f"]
\end{tikzcd}$$

Примем без доказательства, что $\operatorname{End}(P_A)$ – лоакльное кольцо. Лев написал почему так, но оказывается у меня в конспекте б/д относится к словам «главный неразложимый», короче потом надо чекнуть. Так как $\pi(1 - jf) = 0$, то $1 - jf$ необратим и jf обратим. Значит j эпиморфизм и $X = P$.

😎

Следствие: Если модуль S над конечномерной алгеброй прост, то существует главный неразложимый модуль P такой, что $S \cong \dfrac{P}{J(A)P}$.

Следствие: Если алгебра A полупроста, то любой модуль M_A можно представить как $\bigoplus\limits_{i \in I} \dfrac{P_i}{J(A)P_i}$.

Теорема 9: ТУТ ТЕОРЕМА ПРО СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОЕКТИВНОГО НАКРЫТИЯ

Следствие: ТУТ СЛЕДСТВИЕ ПРО ГЛАВНЫЕ НЕРАЗЛОЖИМЫЕ

2.3. Инъективные модули

Определение 11: Модуль Q_R называется проективным, если

$$\forall f : X \rightarrowtail Y \quad \forall g : X \to Q \quad \exists h : Y \to Q : g = hf.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "\forall f"] \arrow[d, "\forall g"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Лемма 5:
1. Q инъективен $\Longleftrightarrow$ Любой мономорфизм из Q расщепим, то есть $\forall Q \overset{i}{\rightarrowtail} X \quad \exists h : X \to Q :$ ЫЫЫЫЫ ДА ЫЫЫЫЫЫ

Тут какая-то дыра в конспекте как будто.

Определение 12: Модуль M_R над ассоциативном кольцом с единицей называется делимым, если для всех $r \in R$ уравнение $rx = y$ разрешимо относительно x и y, то есть

$$\forall r \in R \quad \forall y \in M \quad \exists x \in M : rx = y.$$

Замечание: Это условие эквивалентно тому, что $\forall r \in R : rM = M$.

Лев, во-первых разберись пж почему замечание съехало, во-вторых проверь определение и замечание, а то у меня в конспекте какие-то $x = y/r$, это просто условность?

Следующее утверждение на лекции было дано без доказательства, но для полноты изложения мы его привели.

Предложение 2 (Критерий Бэра): Если R нётерово, то инъективность M равносильна тому, что любой гомоморфизм (R-модулей) из идеала $I \subseteq R$ в M продолжается до гомоморфизма на всём R.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\forall f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Доказательство: $\Rightarrow$: Следует из определения.
$\Leftarrow$: Рассмотрим мономорфизм $X \rightarrowtail Y$. Будем мыслить X как подмодуль Y. Пусть $f : X \to M$.

$$W = \{(Z, h) \mid h : Z \to M,\ X \subseteq Z \subseteq Y,\ h|_X = f\}.$$

Понятно, что $W \neq \varnothing$. Пусть $(Z_1, h_1) \preccurlyeq (Z_2, h_2) \Longleftrightarrow Z_1 \subseteq Z_2 \;\text{ и }\; h_2|_{Z_1} = h_1$. Если $\mathcal{C}$ – цепь в W, то $\left(\bigcup\limits_{(Z,h)\in\mathcal{C}} Z, H\right)$, где H продолжает все h, является её верхней гранью. Тогда по лемме Цорна существует максимальный элемент (T, g). Предположим, что $T \neq Y$, пусть $t \in Y \setminus T$. Определим $J = \{r \in R \mid rb \in T\}$ и $s : J \to M$ как $s(r) = g(rb)$. По предположению s продолжается до отображения $k : R \to M$. Пусть $N = T + Rb \supsetneq T$, $N \subseteq Y$. Положим $q : N \to M$ как $q(t) = g(t)$ для всех $t \in T$ и $q(rb) = k(r)$ для $r \in R$. Так как $T \cap Rb = Jb$ и для всех $r \in J$ имеем $g(rb) = s(r) = k(r)$, то q корректно определён. Получили $(T, g) \preccurlyeq (N, q)$, что противоречит максимальности.

😎

Лемма 6: Пусть R – кольцо главных идеалов. Тогда M делимый $\Longleftrightarrow$ M инъективный.

Доказательство: $\Rightarrow$: Воспользуемся критерием Бэра, продолжим отображение $f : I \to M$ на всё R. Пусть $I = \langle r \rangle$. По делимости $\exists x \in M : rx = f(r)$. Тогда отображение $g : R \to M$, $1 \mapsto x$ продолжает f так как $g(r) = rx = f(r)$.
$\Leftarrow$: Выберем $r \in R$ и $y \in M$. Отображение $f : rR \to M$, $r \mapsto y$ продолжимо до $g : R \to M$. Тогда

$$y = f(r) = g(r) = rg(1).$$

😎

Теорема 10: Пусть R нётерово слева. Тогда $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ инъективен $\Longleftrightarrow \forall i \in I : M_i$ инъективен.

Доказательство: ДОБАВЛЮ ПОЗЖЕ 😎

2.4. Двойственность

Скам, который в итоге вроде не скам.