# ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Андрей Вячеславович Семёнов

КОНСПЕКТ ЗА АВТОРСТВОМ ПАВЛА ЦЫГАНЕНКО И ЛЬВА МУКОСЕЕВА

## Содержание



# 1. Кольца и модули

## 1.1. Групповые алгебры

**Определение 1**: Групповая алгебра группы $G$ над полем $k$:

$$kG = \langle \{ e_g \mid g \in G \} \rangle_k$$

То есть её элементы – формальные комбинации вида $\sum\limits_{g \in G} \alpha_g g$, где ненулевых $\alpha$ конечное число.

Сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$\left( \sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left( \sum_{g \in G} \beta_g g \right) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{xy = g} \alpha_x \beta_y \right) g.$$

**Определение 2**: Модуль $M_R$ называется простым, если он не содержит нетривиальных собственных подмодулей.

**Определение 3**: Модуль $M_R$ называется полупростым, если любой его подмодуль выделяется прямым слагаемым.

То есть $\forall N \leqslant M : \exists P \leqslant M : M = M \oplus N$.

<u>*Замечание*</u>:

1. $M$ полупрост $\Longleftrightarrow M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$, где все $M_i$ простые.
2. Кольцо называется полупростым, если оно полупросто как левый модуль над собой. Без доказательства скажем, что это эквивалентно тому, что любой $R$-модуль полупрост.

Следующую теорему вам должны были доказать в школьном курсе по некоммутативным кольцам.

**Теорема 1** (Веддерберна — Артина): Если $R$ артиново, то

$$R - \text{полупростое} \Longleftrightarrow R = \prod_{j \in I} M_{n_j}(D_j), \quad D_j - \text{тела}.$$

То есть полупростое артиново кольцо разлагается в прямое произведение матричных колец над телами, и в предположении артиновости обратное тоже верно.

**Теорема 2** (Машке): Пусть $k$ – поле, $|G| < \infty$, $\operatorname{char} k = 0$ или $\operatorname{char} k \nmid |G|$. Тогда $kG$ – полупростая алгебра.

*Доказательство*: Покажем, что произвольный модуль $M$ над $kG$ полупрост. Рассмотрим $N \leqslant M$ и стандартные отображения

$$N \rightarrowtail M \overset{\tilde{\pi}}{\twoheadrightarrow} N.$$

Определим усреднение $\tilde{\pi}$:

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1} x).$$

- $\pi$ – $kG$-линейный гомоморфизм. Действительно, для $h \in G$ проверим, что $\pi(hx)h\pi(x)$, а остальное и так понятно.

Обозначим $t = h^{-1} g$, тогда

$$\pi(hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1} h x) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} h t \tilde{\pi}(t^{-1} x) = h \pi(x).$$

- $N$ неподвижен под действием $\pi$. Действительно, если $x \in N$, то $g^{-1} x \in N$ и $\tilde{\pi}(g^{-1} x) = g^{-1} x$, так что теперь всё ясно.

Тем самым, $M = N \oplus \operatorname{Ker} \pi$. 😎

## 1.2. Радикал алгебры

Далее под $A$ подразумевается конечномерная алгебра над полем $k$.

**Определение 4**: *Радикалом* $J(A)$ называется сумма всех двухсторонних нильпотентных идеалов.

**Теорема 3**:
1. $J(A)$ – нильпотентный идеал в $A$.
2. Любой нильпотентный идеал лежит в $J(A)$.
3. $J(A / J(A)) = 0$

*Доказательство*:
1. Во-первых, сумма двух нильпотентных двухсторонних идеалов тоже нильпотентный двухсторонний идеал. Действительно, если $I_1^{n_1} = 0$ и $I_2^{n_2} = 0$, то $(I_1 + I_2)^{n_1 + n_2}$ порождается всеми произведениями длины $n_1 + n_2$ элементов из $I_1 + I_2$, но раскрывая скобки получится либо не менее $n_1$ множителей из $I_1$, либо не менее $n_2$ из $I_1$, а значит $(I_1 + I_2)^{n_1 + n_2} = 0$.

Понятно, что вместо $n_1 + n_2$ можно было взять $\max(n_1, n_2)$.
Во-вторых, можно считать, что в сумме из определения $J(A)$ конечное число идеалов, потому что алгебра конечномерна.

2. Если идеал двухсторонний, то всё ясно. Допустим $I$ – левый идеал и $I^k = 0$. Тогда $IA$ – двухсторонний. Покажем, что $IA \subseteq J(A)$ и так как алгебра с единицей, из этого будет следовать искомое.

$$(IA)^k = I\underbrace{(AI)...(AI)}_{k-1}A \subseteq I^k A = 0.$$

1. Рассмотрим двухсторонний нильпотентный идеал $\overline{I}$ в $A/J(A)$. Пусть $\overline{I}^k = 0$. Тогда $I^k \subseteq J(A)$. По первому пункту теоремы $J(A)$ нильпотентен, скажем, $J^n(A) = 0$.

$$I^{kn} \subseteq J^n(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad I^{kn} = 0.$$

По второму пункту $I$ лежит в $J(A)$, а значит $\overline{I} = 0$. 😎

*Факт*: $A$ полупроста $\Longleftrightarrow J(A) = 0$.

### 1.3. Радикал модуля

Сейчас мы будем работать с модулями над конечномерной алгеброй над полем.

**Определение 5**: *Радикалом* модуля $M$ называется пересечение всех его максимальных подмодулей и обозначается как $\operatorname{Rad} M$.

**Лемма 1**: $M$ полупрост $\Longrightarrow \operatorname{Rad} M = 0$.

*Доказательство*: Допустим существует $x \in \operatorname{Rad} M \setminus \{0\}$. Как и всякий подмодуль, $Ax$ можно выделить в прямую сумму: $M = A \oplus U$. Если рассмотреть стандартный эпиморфизм $A \to Ax : 1 \mapsto x$, то станет очевидно, что $Ax \cong A/\operatorname{Ann} x$. Вложение $\operatorname{Ann} x$ в максимальный идеал $I$, его содержащий, индуцирует эпиморфизм $A/\operatorname{Ann} x \twoheadrightarrow A/I$, причём $S := A/I$ – простая алгебра. Имеем

$$M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M/U \cong Ax \cong A/\operatorname{Ann} x \overset{f}{\twoheadrightarrow} S,$$

так что будем считать, что $f\pi : M \to S$. Положим $N := \operatorname{Ker} f\pi$, тогда так как $M/N \cong S$, то $N$ – максимальный подмодуль. $U \subseteq N$ по построению и $x \in N$ по определению радикала. Тогда $M = Ax + U \subseteq N$. Противоречие. 😎

*Замечание*: Мы не пользовались конечномерностью, так что на самом деле это верно для модулей над любым ассоциативным кольцом с единицей.

Перед тем как доказать следующую теорему, упомянем факт, который на лекции был дан как упражнение.

**Предложение 1**: $X \leqslant \operatorname{Rad} M \Longrightarrow \operatorname{Rad} \dfrac{M}{X} = \dfrac{\operatorname{Rad} M}{X}$.

*Доказательство*: Просто факт о том, что максимальные подмодули фактора $\overline{\mathfrak{M}} \leqslant \dfrac{M}{X}$ соответствуют максимальным подмодулям $X \subseteq \mathfrak{M} \leqslant M$. 😎

**Теорема 4**: $\operatorname{Rad} M = J(A)M$.

*Доказательство*: Допустим, что включение $\operatorname{Rad} M \supseteq J(A)M$ уже доказано. Обозначим за $\overline{A} := A/J(A)$. Теорема 3 утверждает, что алгебра $\overline{A}$ полупроста. Рассмотрим $\overline{M} := M/J(A)M$, который в силу $\operatorname{Ann} M \supseteq J(A)$ является $\overline{A}$ - модулем. По замечанию о полупростоте кольца, $M$ является полупростым модулем, из чего по предложению 1 следует, что $\operatorname{Rad} M \subseteq J(A)M$.

Докажем включение в обратную сторону.

⚠️ **SCAM ALERT** ⚠️

В этом месте Семенов решил заскамить аудиторию! Ведуться работы по устранению скама, сохраняйте спокойствие!

😎

*Следствие*: $\operatorname{Rad} {}_AA = {}_AJ(A), \operatorname{Rad} A_A = J(A)_A$ и $\operatorname{Rad} A = J(A)$ (в коммутативном случае).

Ниже под $R$ понимается ассоциативное кольцо с единицей.

**Определение 6**: Подмодуль $X$ модуля $M_R$ называется малым, если для всякого $K \leqslant M$ из $X + K = M$ следует $K = M$.

**Лемма 2**: Пусть $A$ – конечномерная алгебра, $M_R$ – правый $A$-модуль. Тогда
1. Любой малый подмодуль $M$ лежит в $\operatorname{Rad} M$.
2. $\operatorname{Rad} M$ есть сумма малых модулей.

*Доказательство*:
1. Пусть имеется малый подмодуль $N \nsubseteq \operatorname{Rad} M$. Тогда существует максимальный подмодуль $U$, не содержащий $N$. Из максимальности $U$ следует $N + U = M$, а значит $U = M$. Противоречие с максимальностью $U$.
2. $\operatorname{Rad} M = \sum\limits_{x \in \operatorname{Rad} M} Ax$. Покажем, что каждый $Ax$ мал. «Дело за малым» - А. В. Семёнов.

Пусть $Ax + K = M$, проверим, что $K = M$.

$$M \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{K} = \frac{Ax}{Ax \cap K} =: D_A \overset{\pi_2}{\cong} \frac{A}{\operatorname{Ker}\left(A \underset{1 \mapsto x}{\longrightarrow} M\right)} \overset{\pi_3}{\twoheadrightarrow} \frac{A}{I} = S.$$

Первое равенство получено по второй теореме об изоморфизме. $D_A$ – циклический модуль. $I$ – некоторый максимальный подмодуль, в который вложено ядро. $S$ – простой модуль.
Положим $f = \pi_3\pi_2\pi_1 : M \to S$ – эпиморфизм в простой модуль. Значит $\operatorname{Ker} f$ – максимальный подмодуль $M$, тогда $x \in \operatorname{Ker} f$ так как он изначально брался из радикала.

$K \subseteq \operatorname{Ker} f$ так как $K \subseteq \operatorname{Ker} \pi_1$. Получаем, что $\operatorname{Ker} f = M$. Противоречие. 😎

**Теорема 5**: Если $A$ – конечномерная алгебра и $M_A$ – модуль, то $\operatorname{Rad} M$ мал.

*Доказательство*:
1. Пусть $M$ конечнопорождён. Тогда $\operatorname{Rad} M$ конечнопорождён по У МЕНЯ НАПИСАНО НЁТЕРОВОСТИ, НО НАДО ПРОВЕРИТЬ. Тогда можно считать, что радикал представляется конечной суммой малых модулей. Остаётся показать, что сумма двух малых мала. Действительно, $(N_1 + N_2) + K = M \Longrightarrow N_2 + K = M \Longrightarrow K = M$.
2. ⚠️ **SCAM ALERT** ⚠️

   $M = \varinjlim_n M_n$, где $M_n$ конечнопорождённые. $\operatorname{Rad} M = \varinjlim_n \operatorname{Rad} M_n$ так как радикал сохраняется при гомоморфизмах. Тогда $\operatorname{Rad} M$ мал так как

   $$\boxed{|\operatorname{Rad} M - \operatorname{Rad} M_n| < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{Rad} M + K = M.}$$

😎

# 2. Проективные модули

## 2.1. Свойства

**Определение 7**: Модуль $P_R$ называется проективным, если

$$\forall f : P \to N \quad \forall \sigma : M \twoheadrightarrow N \quad \exists g : P \to M : f = \sigma g.$$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "\forall f"] \\ M \arrow[r, two heads, "\forall \sigma"'] & N \end{tikzcd}$$

**Лемма 3**: Любой свободный модуль проективен.

*Доказательство*: Рассмотрим свободный модуль $F$ и зафиксируем диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\sigma"] & N & F \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

Пусть $\{w_j\}_{j \in I}$ – базис $F$, $f(w_j) = y_j$. Так как $\sigma$ сюръективно, $\forall j \in I : \exists x_j \in M : \sigma(x_j) = y_j$.

Положив $g(w_j) = x_j$, замкнём диаграмму до коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads, "\sigma"] & N & F \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "g"]
\end{tikzcd}$$

😎

> **Теорема 6**: $P$ – проективный $\Longleftrightarrow \forall \sigma : M \twoheadrightarrow P \quad \exists i : P \to M : \sigma i = \mathrm{id}_P$.

*Доказательство*: $\Rightarrow$: Фиксируем $\sigma : M \twoheadrightarrow P$. Взяв в определении проективного модуля $N = P$ и $f = \mathrm{id}_N$ получаем требуемое $i$.
$\Leftarrow$: Рассмотрим $U = \{(p, m) \in P \oplus M \mid f(p) = \sigma(m)\}$ вместе с проекциями $U \xrightarrow{\pi_1} P$ и $U \xrightarrow{\pi_2} M$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend right, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"'] & P \arrow[l, bend right, "j"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"] \\
M \arrow[r, two heads, "\sigma"] & N
\end{tikzcd}$$

Из эпиморфности $\sigma$ следует эпиморфность $\pi_1$, значит по условию $\exists i : P \to U : \pi_1 i = \mathrm{id}_P$.
Тогда $g = \pi_2 j$ замыкает диаграмму, так как $\forall x \in P$

$$\sigma g(x) = \sigma \pi_2 j(x) = \sigma(\pi_2(x, m)) = \sigma(m) = f(x).$$

😎

> **Лемма 4**: Если $P = \bigoplus\limits_{k \in I} P_k$, то $P$ – проективен $\Longleftrightarrow$ все $P_k$ проективны.

*Доказательство*: $\Rightarrow$: Рассмотрим произвольный $P_k$ и покажем, что он проективен.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, two heads, "\sigma"'] & P = \bigoplus\limits_{k \in I} P_k \arrow[l, "g"'] \arrow[r, bend left, two heads, "\pi_k"] & P_k \arrow[l, bend left, hook, "i_k"] \arrow[dl, bend left, "f"] \arrow[ll, bend right, dashed, "g_k"'] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

Из проективности $P$ следует существование $g : P \to M : f\pi_k = \sigma g$. Тогда нам подходит $g_k = g i_k$:

$$f = f \pi_k i_k = \sigma g i_k = g i_k.$$

$\Leftarrow$: Из проективности $P_k$ следует существование $g_k : P_k \to M : \sigma g_k = f i_k$.
Положим $g = \bigoplus\limits_{k \in I} g_k \pi_k$, тогда

$$\sigma g = \bigoplus_{k \in I} \sigma g_k \pi_k = \bigoplus_{k \in I} f i_k \pi_k = f \circ \bigoplus_{k \in I} i_k \pi_k = f.$$

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[dd, two heads, "\sigma"'] & & \\
& P = \bigoplus\limits_{k\in I} P_k \arrow[ul, dashed, "g"'] \arrow[dl, "f"] \arrow[r, two heads, bend left, "\pi_k"] & P_k \arrow[l, hook, bend left, "i_k"] \arrow[ull, bend right, "g_k"'] \\
N & &
\end{tikzcd}
$$

😎

> *Следствие*: $P$ – проективен $\iff$ $P$ – прямое слагаемое свободного.

*Доказательство*:
$\Rightarrow$: Для любого проективного модуля $P$ существует свободный модуль $F$ и эпиморфизм $F \twoheadrightarrow P$ (можно взять свободный модуль на образующих $P$). Из проективности $P$ следует существование $i : P \to F : \pi i = \mathrm{id}_P$. Тогда $\exists X \leqslant F : F = X \oplus i(P) \cong X \oplus P$. можно добавить в первую лекцию теорему о диаграмме прямой суммы и сослаться на неё

$\Leftarrow$: Очевидно следует из лемм 3 и 4. потом можно ссылки добавить, мне впадлу 😎

## 2.2. Проективные накрытия

Пусть $A$ – конечномерная алгебра над полем $K$.

> **Определение 8**: Можно представить $A_A$ как $A_A = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} P_j$, где все $P_j$ неприводимые. Они называются главными неразложимыми модулями.

Все $P_j$ проективны так как $A$ свободна как модуль над собой.

> **Определение 9**: Кольцо $R$ называется локальным, если у него всего один максимальный идеал.

*Свойства*:
1. Этот максимальный идеал состоит из всех необратимых элементов. Действительно, если бы существовал другой необратимый элемент, то он бы содержался в некотором другом максимальном идеале.
2. $R/\operatorname{Rad} R$ – тело. На самом деле это критерий локальности. Надо либо добавить объяснение, либо удостовериться у Семёнова, что это идёт без доказательства
3. $1 - x$ необратим $\iff$ $x$ обратим. Следует из известного факта про описание радикала Джекобсона, в нашем случае он совпадает с единственным максимальным идеалом.

> **Определение 10**: $(P_A, \pi : P \twoheadrightarrow M_A)$ – проективное накрытие модуля $M \iff \operatorname{Ker}\pi$ мало.

> **Теорема 7**: Если проективное накрытие существует, то оно единственно.

*Доказательство*: Пусть существуют проективные накрытия $(P_1, \pi : P_1 \twoheadrightarrow M)$ и $(P_2, \pi : P_2 \twoheadrightarrow M)$. Из проективности $P_1$ следует существование $f : P_1 \to P_2 : \pi_2 f = \pi_1$. Проверим, что это изоморфизм.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[dr, two heads, "\pi_1"] \arrow[dd, "f"'] & \\
& M \\
P_2 \arrow[ur, two heads, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

- Эпиморфность. $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} \pi_2 = P_2$. вроде это очев, но я уже совсем мясо чтобы думать. Так как $\operatorname{Ker} \pi_2$ мало, то $\operatorname{Im} f = P_2$, то есть сюръективность доказана.
- Мономорфность. По только что доказаной эпиморфности $f$ расщепляется, то есть $\exists i : P_1 \to M : fi = \mathrm{id}_{P_1}$. добавить ссылк на теорему 6, а в ней добавить слово расщепимость.
  Значит $\exists X \leqslant P_1 : \operatorname{Ker} f \oplus X = P_1$. Ядро $f$ тоже мало, так как $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} \pi_1$ и подмодуль малого модуля мал. Получаем, что $\operatorname{Ker} f = 0$.

😎

в следующую теорему не вдумывался, но вроде норм

**Теорема 8**: $S_A$ – просто $\implies \exists(P, \pi : P \twoheadrightarrow S)$ – проективное накрытие.

*Доказательство*: $\exists \pi : A_A \twoheadrightarrow S$. Представим $A$ как $A = \bigoplus_{j=1}^{n} P_j$.

$$S = \operatorname{Im} \pi = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\pi(P_j)}_{\leqslant S} \implies \pi(P_k) = S.$$

Предположим, что $\operatorname{Ker} \pi + X = P$, но $X \neq P$. Тогда $\pi(X) = \pi(\operatorname{Ker} \pi + X) = \pi(P) = S$.
Пусть $\pi_1 = \pi|_X : X \twoheadrightarrow S$. По проективности $P$ существует $f : P \to X : \pi = \pi_1 f = \pi j f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[dr, hook, bend left, "j"] & S \\
& P \arrow[u, two heads, "\pi"'] \arrow[ul, bend left, "f"]
\end{tikzcd}$$

Примем без доказательства, что $\operatorname{End}(P_A)$ – лоакльное кольцо. Лев написал почему так, но оказывается у меня в конспекте б/д относится к словам «главный неразложимый», короче потом надо чекнуть. Так как $\pi(1 - jf) = 0$, то $1 - jf$ необратим и $jf$ обратим. Значит $j$ эпиморфизм и $X = P$.

😎

*Следствие*: Если модуль $S$ над конечномерной алгеброй прост, то существует главный неразложимый модуль $P$ такой, что $S \cong \dfrac{P}{J(A)P}$.

*Следствие*: Если алгебра $A$ полупроста, то любой модуль $M_A$ можно представить как $\bigoplus_{i \in I} \dfrac{P_i}{J(A)P_i}$.

**Теорема 9**: ТУТ ТЕОРЕМА ПРО СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОЕКТИВНОГО НАКРЫТИЯ

*Следствие*: ТУТ СЛЕДСТВИЕ ПРО ГЛАВНЫЕ НЕРАЗЛОЖИМЫЕ

## 2.3. Инъективные модули

**Определение 11**: Модуль $Q_R$ называется проективным, если

$$\forall f : X \rightarrowtail Y \quad \forall g : X \to Q \quad \exists h : Y \to Q : g = hf.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "\forall f"] \arrow[d, "\forall g"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

**Лемма 5**:
1. $Q$ инъективен $\iff$ Любой мономорфизм из $Q$ расщепим, то есть $\forall Q \overset{i}{\rightarrowtail} X \quad \exists h : X \to Q :$ ЫЫЫЫЫ ДА ЫЫЫЫЫЫ

Тут какая-то дыра в конспекте как будто.

**Определение 12**: Модуль $M_R$ над ассоциативном кольцом с единицей называется делимым, если для всех $r \in R$ уравнение $rx = y$ разрешимо относительно $x$ и $y$, то есть

$$\forall r \in R \quad \forall y \in M \quad \exists x \in M : rx = y.$$

*Замечание*: Это условие эквивалентно тому, что $\forall r \in R : rM = M$.

Лев, во-первых разберись пж почему замечание съехало, во-вторых проверь определение и замечание, а то у меня в конспекте какие-то $x = y/r$, это просто условность?

Следующее утверждение на лекции было дано без доказательства, но для полноты изложения мы его привели.

**Предложение 2** (Критерий Бэра): Если $R$ нётерово, то инъективность $M$ равносильна тому, что любой гомоморфизм ($R$-модулей) из идеала $I \subseteq R$ в $M$ продолжается до гомоморфизма на всём $R$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\forall f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\ M & \end{tikzcd}$$

*Доказательство*: $\Rightarrow$: Следует из определения.
$\Leftarrow$: Рассмотрим мономорфизм $X \rightarrowtail Y$. Будем мыслить $X$ как подмодуль $Y$. Пусть $f : X \to M$.

$$W = \{(Z, h) \mid h : Z \to M,\ X \subseteq Z \subseteq Y,\ h|_X = f\}.$$

Понятно, что $W \neq \varnothing$. Пусть $(Z_1, h_1) \preccurlyeq (Z_2, h_2) \Longleftrightarrow Z_1 \subseteq Z_2 \;$ и $\; h_2|_{Z_1} = h_1$. Если $\mathcal{C}$ – цепь в $W$, то $\left(\bigcup_{(Z,h)\in\mathcal{C}} Z, H\right)$, где $H$ продолжает все $h$, является её верхней гранью. Тогда по лемме Цорна существует максимальный элемент $(T, g)$. Предположим, что $T \neq Y$, пусть $t \in Y \setminus T$. Определим $J = \{r \in R \mid rb \in T\}$ и $s : J \to M$ как $s(r) = g(rb)$. По предположению $s$ продолжается до отображения $k : R \to M$. Пусть $N = T + Rb \supsetneq T$, $N \subseteq Y$. Положим $q : N \to M$ как $q(t) = g(t)$ для всех $t \in T$ и $q(rb) = k(r)$ для $r \in R$. Так как $T \cap Rb = Jb$ и для всех $r \in J$ имеем $g(rb) = s(r) = k(r)$, то $q$ корректно определён. Получили $(T, g) \preccurlyeq (N, q)$, что противоречит максимальности.

😎

**Лемма 6**: Пусть $R$ – кольцо главных идеалов. Тогда $M$ делимый $\Longleftrightarrow$ $M$ инъективный.

*Доказательство*:

😎

**Теорема 10**: Пусть $R$ нётерово слева. Тогда $\bigoplus_{i\in I} M_i$ инъективен $\Longleftrightarrow \forall i \in I : M_i$ инъективен.

*Доказательство*:

😎

## 2.4. Двойственность

Скам, который в итоге вроде не скам.