# ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

*Андрей Вячеславович Семёнов*

*КОНСПЕКТ ЗА АВТОРСТВОМ ПАВЛА ЦЫГАНЕНКО*

## Содержание



# 1. Кольца и модули

## 1.1. Групповые алгебры

**Определение 1**: Групповая алгебра группы $G$ над полем $k$:

$$kG = \langle \{e_g \mid g \in G\} \rangle_k$$

То есть её элементы – формальные комбинации вида $\sum\limits_{g\in G} \alpha_g g$, где ненулевых $\alpha$ конечное число. Сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \cdot \left(\sum_{g\in G} \beta_g g\right) = \sum_{g\in G} \left(\sum_{xy=g} \alpha_x \beta_y\right) g.$$

Пока я не разберусь как нормально писать ${}_R M$, буду писать $M_R$ вне зависимости от того, правый модуль или левый.

**Определение 2**: Модуль $M_R$ называется простым, если он не содержит нетривиальных собственных подмодулей.

**Определение 3**: Модуль $M_R$ называется полупростым, если любой его подмодуль выделяется прямым слагаемым.

То есть $\forall N \leqslant M : \exists P \leqslant M : M = M \oplus N$.

<u>*Замечание*</u>:

1. $M$ полупрост $\Longleftrightarrow M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, где все $M_i$ простые.

2. Кольцо называется полупростым, если оно полупросто как левый модуль над собой. Без доказательства скажем, что это эквивалентно тому, что любой левый $R$-модуль полупрост.

Следующую теорему вам должны были доказать в школьном курсе по некоммутативным кольцам.

**Теорема 1** (Веддерберна — Артина): Если $R$ артиново, то

$$R - \text{полупростое} \Longleftrightarrow R = \prod_{j \in I} M_{n_j}(D_j), \quad D_j - \text{тела}.$$

То есть полупростое артиново кольцо разлагается в прямое произведение матричных колец над телами, и в предположении артиновости обратное тоже верно.

**Теорема 2** (Машке): Пусть $k$ – поле, $|G| < \infty$, $\operatorname{char} k = 0$ или $\operatorname{char} k \nmid |G|$. Тогда $kG$ – полупростая алгебра.

*Доказательство*: Покажем, что произвольный модуль $M$ над $kG$ полупрост. Рассмотрим $N \leqslant M$ и стандартные отображения

$$N \rightarrowtail M \overset{\tilde{\pi}}{\twoheadrightarrow} N.$$

Определим усреднение $\tilde{\pi}$:

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\tilde{\pi}(g^{-1}x).$$

- $\pi$ – $kG$-линейный гомоморфизм. Действительно, для $h \in G$ проверим, что $\pi(hx)h\pi(x)$, а остальное и так понятно.

Обозначим $t = h^{-1}g$, тогда

$$\pi(hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\tilde{\pi}(g^{-1}hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} ht\tilde{\pi}(t^{-1}x) = h\pi(x).$$

- $N$ неподвижен под действием $\pi$. Действительно, если $x \in N$, то $g^{-1}x \in N$ и $\tilde{\pi}(g^{-1}x) = g^{-1}x$, так что теперь всё ясно.

Тем самым, $M = N \oplus \operatorname{Ker} \pi$. □

## 1.2. Радикал алгебры

Далее под $A$ подразумевается конечномерная алгебра над полем $k$.

**Определение 4**: *Радикалом* $J(A)$ называется сумма всех двухсторонних нильпотентных идеалов.

**Теорема 3**:
1. $J(A)$ – нильпотентный идеал в $A$.
2. Любой нильпотентный идеал лежит в $J(A)$.
3. $J(A/J(A)) = 0$

*Доказательство*:
1. Во-первых, сумма двух нильпотентных двухсторонних идеалов тоже нильпотентный двухсторонний идеал. Действительно, если $I_1^{n_1} = 0$ и $I_2^{n_2} = 0$, то $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2}$ порождается всеми произведениями длины $n_1 + n_2$ элементов из $I_1 + I_2$, но раскрывая скобки получится либо не менее $n_1$ множителей из $I_1$, либо не менее $n_2$ из $I_1$, а значит $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2} = 0$. Понятно, что вместо $n_1 + n_2$ можно было взять $\max(n_1, n_2)$.
   Во-вторых, можно считать, что в сумме из определения $J(A)$ конечное число идеалов, потому что алгебра конечномерна.
2. Если идеал двухсторонний, то всё ясно. Допустим $I$ – левый идеал и $I^k = 0$. Тогда $IA$ – двухсторонний. Покажем, что $IA \subseteq J(A)$ и так как алгебра с единицей, из этого будет следовать искомое.

$$(IA)^k = I\underbrace{(AI)...(AI)}_{k-1}A \subseteq I^k A = 0.$$

1. Рассмотрим двухсторонний нильпотентный идеал $\overline{I}$ в $A/J(A)$. Пусть $\overline{I}^k = 0$. Тогда $I^k \subseteq J(A)$. По первому пункту теоремы $J(A)$ нильпотентен, скажем, $J^n(A) = 0$.

$$I^{kn} \subseteq J^n(A) = 0 \implies I^{kn} = 0.$$

По второму пункту $I$ лежит в $J(A)$, а значит $\overline{I} = 0$. □

*Факт*: $A$ полупроста $\Longleftrightarrow J(A) = 0$.

## 1.3. Радикал модуля

Сейчас мы будем работать с модулями над конечномерной алгеброй над полем.

**Определение 5**: *Радикалом* модуля $M$ называется пересечение всех его максимальных подмодулей и обозначается как $\operatorname{Rad} M$.

**Лемма 1**: $M$ полупрост $\Longrightarrow \operatorname{Rad} M = 0$.

*Доказательство*: Допустим существует $x \in \operatorname{Rad} M \setminus \{0\}$. Как и всякий подмодуль, $Ax$ можно выделить в прямую сумму: $M = A \oplus U$. Если рассмотреть стандартный эпиморфизм $A \to Ax : 1 \mapsto x$, то станет очевидно, что $Ax \cong A/\operatorname{ann} x$. Вложение $\operatorname{ann} x$ в максимальный идеал $I$, его содержащий, индуцирует эпиморфизм $A/\operatorname{ann} x \twoheadrightarrow A/I$, причём $S := A/I$ – простая алгебра. Имеем

$$M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M/U \cong Ax \cong A/\operatorname{ann} x \overset{f}{\twoheadrightarrow} S,$$

так что будем считать, что $f\pi : M \to S$. Положим $N := \operatorname{Ker} f\pi$, тогда так как $M/N \cong S$, то $N$ – максимальный подмодуль. $U \subseteq N$ по построению и $x \in N$ по определению радикала. Тогда $M = Ax + U \subseteq N$. Противоречие. □

*Замечание*: Мы не пользовались конечномерностью, так что на самом деле это верно для модулей над любым ассоциативным кольцом с единицей.

Перед тем как доказать следующую теорему, упомянем факт, который на лекции был дан как упражнение.

**Предложение 1**: $X \leqslant \operatorname{Rad} M \Longrightarrow \operatorname{Rad} \dfrac{M}{X} = \dfrac{\operatorname{Rad} M}{X}$.

*Доказательство*:

□

**Теорема 4**: $\operatorname{Rad} M = J(A)M$.

*Доказательство*: Допустим, что включение слева направо уже доказано. Рассмотрим $\overline{A} := A/J(A)$ Бля щас бы... □