

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Андрей Вячеславович Семёнов

КОНСПЕКТ ЗА АВТОРСТВОМ ПАВЛА ЦЫГАНЕНКО И ЛЬВА МУКОСЕЕВА

Содержание

1. Кольца и модули	1
1.1. Групповые алгебры	1
1.2. Радиал алгебры	2
1.3. Радиал модуля	3

1. Кольца и модули

1.1. Групповые алгебры

Определение 1: Групповая алгебра группы G над полем k :

$$kG = \langle \{e_g \mid g \in G\} \rangle_k$$

То есть её элементы – формальные комбинации вида $\sum_{g \in G} \alpha_g g$, где ненулевых α конечное число.

Сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g &= \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g, \\ \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum_{g \in G} \beta_g g \right) &= \sum_{g \in G} \left(\sum_{xy=g} \alpha_x \beta_y \right) g. \end{aligned}$$

Пока я не разберусь как нормально писать ${}_R M$, буду писать M_R вне зависимости от того, правый модуль или левый.

Определение 2: Модуль M_R называется простым, если он не содержит нетривиальных собственных подмодулей.

Определение 3: Модуль M_R называется полупростым, если любой его подмодуль выделяется прямым слагаемым.

То есть $\forall N \leq M : \exists P \leq M : M = M \oplus N$.

Замечание:

1. M полупрост $\iff M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, где все M_i простые.
2. Кольцо называется полупростым, если оно полупросто как левый модуль над собой. Без доказательства скажем, что это эквивалентно тому, что любой R -модуль полупрост.

Следующую теорему вам должны были доказать в школьном курсе по некоммутативным кольцам.

Теорема 1 (Веддерберна — Артина): Если R артиново, то

$$R \text{ — полупростое} \iff R = \prod_{j \in I} M_{n_j}(D_j), \quad D_j \text{ — тела.}$$

То есть полупростое артиново кольцо разлагается в прямое произведение матричных колец над телами, и в предположении артиновости обратное тоже верно.

Теорема 2 (Машке): Пусть k — поле, $|G| < \infty$, $\text{char } k = 0$ или $\text{char } k \nmid |G|$. Тогда kG — полупростая алгебра.

Доказательство: Покажем, что произвольный модуль M над kG полупрост. Рассмотрим $N \leq M$ и стандартные отображения

$$N \hookrightarrow M \xrightarrow{\tilde{\pi}} N.$$

Определим усреднение $\tilde{\pi}$:

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1}x).$$

- π — kG -линейный гомоморфизм. Действительно, для $h \in G$ проверим, что $\pi(hx)h\pi(x)$, а остальное и так понятно.

Обозначим $t = h^{-1}g$, тогда

$$\pi(hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1}hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} ht \tilde{\pi}(t^{-1}x) = h\pi(x).$$

- N неподвижен под действием π . Действительно, если $x \in N$, то $g^{-1}x \in N$ и $\tilde{\pi}(g^{-1}x) = g^{-1}x$, так что теперь всё ясно.

Тем самым, $M = N \oplus \text{Ker } \pi$.



1.2. Радикал алгебры

Далее под A подразумевается конечномерная алгебра над полем k .

Определение 4: Радикалом $J(A)$ называется сумма всех двухсторонних нильпотентных идеалов.

Теорема 3:

1. $J(A)$ — нильпотентный идеал в A .
2. Любой нильпотентный идеал лежит в $J(A)$.
3. $J(A/J(A)) = 0$

Доказательство:

1. Во-первых, сумма двух нильпотентных двухсторонних идеалов тоже нильпотентный двухсторонний идеал. Действительно, если $I_1^{n_1} = 0$ и $I_2^{n_2} = 0$, то $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2}$ порождается всеми произведениями длины $n_1 + n_2$ элементов из $I_1 + I_2$, но раскрывая скобки получится либо не менее n_1 множителей из I_1 , либо не менее n_2 из I_2 , а значит $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2} = 0$.

Понятно, что вместо $n_1 + n_2$ можно было взять $\max(n_1, n_2)$.

Во-вторых, можно считать, что в сумме из определения $J(A)$ конечное число идеалов, потому что алгебра конечномерна.

2. Если идеал двухсторонний, то всё ясно. Допустим I – левый идеал и $I^k = 0$. Тогда IA – двухсторонний. Покажем, что $IA \subseteq J(A)$ и так как алгебра с единицей, из этого будет следовать искомое.

$$(IA)^k = I \underbrace{(AI) \dots (AI)}_{k-1} A \subseteq I^k A = 0.$$

1. Рассмотрим двухсторонний нильпотентный идеал \bar{I} в $A/J(A)$. Пусть $\bar{I}^k = 0$. Тогда $I^k \subseteq J(A)$. По первому пункту теоремы $J(A)$ нильпотентен, скажем, $J^n(A) = 0$.

$$I^{kn} \subseteq J^n(A) = 0 \implies I^{kn} = 0.$$

По второму пункту I лежит в $J(A)$, а значит $\bar{I} = 0$.



Факт: A полупроста $\iff J(A) = 0$.

1.3. Радикал модуля

Сейчас мы будем работать с модулями над конечномерной алгеброй над полем.

Определение 5: Радикалом модуля M называется пересечение всех его максимальных подмодулей и обозначается как $\text{Rad } M$.

Лемма 1: M полупрост $\implies \text{Rad } M = 0$.

Доказательство: Допустим существует $x \in \text{Rad } M \setminus \{0\}$. Как и всякий подмодуль, Ax можно выделить в прямую сумму: $M = Ax \oplus U$. Если рассмотреть стандартный эпиморфизм $A \rightarrow Ax : 1 \mapsto x$, то станет очевидно, что $Ax \cong A/\text{Ann } x$. Вложение $\text{Ann } x$ в максимальный идеал I , его содержащий, индуцирует эпиморфизм $A/\text{Ann } x \twoheadrightarrow A/I$, причём $S := A/I$ – простая алгебра. Имеем

$$M \xrightarrow{\pi} M/U \cong Ax \cong A/\text{Ann } x \xrightarrow{f} S,$$

так что будем считать, что $f\pi : M \rightarrow S$. Положим $N := \text{Ker } f\pi$, тогда так как $M/N \cong S$, то N – максимальный подмодуль. $U \subseteq N$ по построению и $x \in N$ по определению радикала. Тогда $M = Ax + U \subseteq N$. Противоречие.



note Мы не пользовались конечномерностью, так что на самом деле это верно для модулей над любым ассоциативным кольцом с единицей.

Перед тем как доказать следующую теорему, упомянем факт, который на лекции был дан как упражнение.

Предложение 1: $X \leq \text{Rad } M \implies \text{Rad } \frac{M}{X} = \frac{\text{Rad } M}{X}$.

Доказательство: Просто факт о том, что максимальные подмодули фактора $\overline{M} \leq \frac{M}{X}$ соответствуют максимальным подмодулям $X \subseteq M \leq M$.



Теорема 4: $\text{Rad } M = J(A)M$.

Доказательство: Допустим, что включение $\text{Rad } M \supseteq J(A)M$ уже доказано. Обозначим за $\bar{A} := A/J(A)$. Теорема 3 утверждает, что алгебра \bar{A} полупроста. Рассмотрим $\bar{M} := M/J(A)M$, который в силу $\text{Ann } M \supseteq J(A)$ является \bar{A} -модулем. По замечанию о полупростоте кольца, M является полупростым модулем, из чего по Предложение 1 следует, что $\text{Rad } M \subseteq J(A)M$.

Докажем включение в обратную сторону.

 **SCAM ALERT** 

В этом месте Семенов решил заскамить аудиторию! Ведутся работы по устранению скама, сохраняйте спокойствие!

