# ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Андрей Вячеславович Семёнов

КОНСПЕКТ ЗА АВТОРСТВОМ ПАВЛА ЦЫГАНЕНКО И ЛЬВА МУКОСЕЕВА

## Содержание



## 1. Кольца и модули

### 1.1. Групповые алгебры

**Определение 1**: Групповая алгебра группы $G$ над полем $k$:

$$kG = \langle \{ e_g \mid g \in G \} \rangle_k$$

То есть её элементы – формальные комбинации вида $\sum\limits_{g \in G} \alpha_g g$, где ненулевых $\alpha$ конечное число.

Сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$\left( \sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left( \sum_{g \in G} \beta_g g \right) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{xy = g} \alpha_x \beta_y \right) g.$$

**Определение 2**: Модуль $M_R$ называется простым, если он не содержит нетривиальных собственных подмодулей.

**Определение 3**: Модуль $M_R$ называется полупростым, если любой его подмодуль выделяется прямым слагаемым.

То есть $\forall N \leqslant M : \exists P \leqslant M : M = M \oplus N$.

*Замечание*:

1. $M$ полупрост $\Longleftrightarrow M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$, где все $M_i$ простые.
2. Кольцо называется полупростым, если оно полупросто как левый модуль над собой. Без доказательства скажем, что это эквивалентно тому, что любой $R$-модуль полупрост.

Следующую теорему вам должны были доказать в школьном курсе по некоммутативным кольцам.

**Теорема 1** (Веддерберна — Артина): Если $R$ артиново, то

$$R - \text{полупростое} \Longleftrightarrow R = \prod_{j \in I} M_{n_j}(D_j), \quad D_j - \text{тела}.$$

То есть полупростое артиново кольцо разлагается в прямое произведение матричных колец над телами, и в предположении артиновости обратное тоже верно.

**Теорема 2** (Машке): Пусть $k$ – поле, $|G| < \infty$, $\operatorname{char} k = 0$ или $\operatorname{char} k \nmid |G|$. Тогда $kG$ – полупростая алгебра.

*Доказательство*: Покажем, что произвольный модуль $M$ над $kG$ полупрост. Рассмотрим $N \leqslant M$ и стандартные отображения

$$N \rightarrowtail M \overset{\tilde{\pi}}{\twoheadrightarrow} N.$$

Определим усреднение $\tilde{\pi}$:

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1} x).$$

- $\pi$ – $kG$-линейный гомоморфизм. Действительно, для $h \in G$ проверим, что $\pi(hx) h \pi(x)$, а остальное и так понятно.

Обозначим $t = h^{-1} g$, тогда

$$\pi(hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1} h x) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} h t \tilde{\pi}(t^{-1} x) = h \pi(x).$$

- $N$ неподвижен под действием $\pi$. Действительно, если $x \in N$, то $g^{-1} x \in N$ и $\tilde{\pi}(g^{-1} x) = g^{-1} x$, так что теперь всё ясно.

Тем самым, $M = N \oplus \operatorname{Ker} \pi$. 😎

## 1.2. Радикал алгебры

Далее под $A$ подразумевается конечномерная алгебра над полем $k$.

**Определение 4**: *Радикалом* $J(A)$ называется сумма всех двухсторонних нильпотентных идеалов.

**Теорема 3**:
1. $J(A)$ – нильпотентный идеал в $A$.
2. Любой нильпотентный идеал лежит в $J(A)$.
3. $J(A / J(A)) = 0$

*Доказательство*:
1. Во-первых, сумма двух нильпотентных двухсторонних идеалов тоже нильпотентный двухсторонний идеал. Действительно, если $I_1^{n_1} = 0$ и $I_2^{n_2} = 0$, то $(I_1 + I_2)^{n_1 + n_2}$ порождается всеми произведениями длины $n_1 + n_2$ элементов из $I_1 + I_2$, но раскрывая скобки получится либо не менее $n_1$ множителей из $I_1$, либо не менее $n_2$ из $I_1$, а значит $(I_1 + I_2)^{n_1 + n_2} = 0$.

Понятно, что вместо $n_1 + n_2$ можно было взять $\max(n_1, n_2)$.
Во-вторых, можно считать, что в сумме из определения $J(A)$ конечное число идеалов, потому что алгебра конечномерна.

2. Если идеал двухсторонний, то всё ясно. Допустим $I$ – левый идеал и $I^k = 0$. Тогда $IA$ – двухсторонний. Покажем, что $IA \subseteq J(A)$ и так как алгебра с единицей, из этого будет следовать искомое.

$$(IA)^k = I\underbrace{(AI)...(AI)}_{k-1}A \subseteq I^k A = 0.$$

1. Рассмотрим двухсторонний нильпотентный идеал $\overline{I}$ в $A/J(A)$. Пусть $\overline{I}^k = 0$. Тогда $I^k \subseteq J(A)$. По первому пункту теоремы $J(A)$ нильпотентен, скажем, $J^n(A) = 0$.

$$I^{kn} \subseteq J^n(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad I^{kn} = 0.$$

По второму пункту $I$ лежит в $J(A)$, а значит $\overline{I} = 0$. 😎

*Факт*: $A$ полупроста $\Longleftrightarrow J(A) = 0$.

### 1.3. Радикал модуля

Сейчас мы будем работать с модулями над конечномерной алгеброй над полем.

**Определение 5**: *Радикалом* модуля $M$ называется пересечение всех его максимальных подмодулей и обозначается как $\operatorname{Rad} M$.

**Лемма 1**: $M$ полупрост $\Longrightarrow \operatorname{Rad} M = 0$.

*Доказательство*: Допустим существует $x \in \operatorname{Rad} M \setminus \{0\}$. Как и всякий подмодуль, $Ax$ можно выделить в прямую сумму: $M = A \oplus U$. Если рассмотреть стандартный эпиморфизм $A \to Ax : 1 \mapsto x$, то станет очевидно, что $Ax \cong A/\operatorname{Ann} x$. Вложение $\operatorname{Ann} x$ в максимальный идеал $I$, его содержащий, индуцирует эпиморфизм $A/\operatorname{Ann} x \twoheadrightarrow A/I$, причём $S := A/I$ – простая алгебра. Имеем

$$M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M/U \cong Ax \cong A/\operatorname{Ann} x \overset{f}{\twoheadrightarrow} S,$$

так что будем считать, что $f\pi : M \to S$. Положим $N := \operatorname{Ker} f\pi$, тогда так как $M/N \cong S$, то $N$ – максимальный подмодуль. $U \subseteq N$ по построению и $x \in N$ по определению радикала. Тогда $M = Ax + U \subseteq N$. Противоречие. 😎

*Замечание*: Мы не пользовались конечномерностью, так что на самом деле это верно для модулей над любым ассоциативным кольцом с единицей.

Перед тем как доказать следующую теорему, упомянем факт, который на лекции был дан как упражнение.

**Предложение 1**: $X \leqslant \operatorname{Rad} M \Longrightarrow \operatorname{Rad} \dfrac{M}{X} = \dfrac{\operatorname{Rad} M}{X}$.

*Доказательство*: Просто факт о том, что максимальные подмодули фактора $\overline{\mathfrak{M}} \leqslant \dfrac{M}{X}$ соответствуют максимальным подмодулям $X \subseteq \mathfrak{M} \leqslant M$. 😎

**Теорема 4**: $\operatorname{Rad} M = J(A)M$.

*Доказательство*: Допустим, что включение $\operatorname{Rad} M \supseteq J(A)M$ уже доказано. Обозначим за $\overline{A} := A/J(A)$. Теорема 3 утверждает, что алгебра $\overline{A}$ полупроста. Рассмотрим $\overline{M} := M/J(A)M$, который в силу $\operatorname{Ann} M \supseteq J(A)$ является $\overline{A}$ - модулем. По замечанию о полупростоте кольца, $M$ является полупростым модулем, из чего по предложению 1 следует, что $\operatorname{Rad} M \subseteq J(A)M$.

Докажем включение в обратную сторону.

⚠️ **SCAM ALERT** ⚠️

В этом месте Семенов решил заскамить аудиторию! Ведуться работы по устранению скама, сохраняйте спокойствие!

😎

*Следствие*: $\operatorname{Rad}\, {}_A A = {}_A J(A)$, $\operatorname{Rad} A_A = J(A)_A$ и $\operatorname{Rad} A = J(A)$ (в коммутативном случае).

Ниже под $R$ понимается ассоциативное кольцо с единицей.

**Определение 6**: Подмодуль $X$ модуля $M_R$ называется малым, если для всякого $K \leqslant M$ из $X + K = M$ следует $K = M$.

**Лемма 2**: Пусть $A$ – конечномерная алгебра, $M_R$ – правый $A$-модуль. Тогда
1. Любой малый подмодуль $M$ лежит в $\operatorname{Rad} M$.
2. $\operatorname{Rad} M$ есть сумма малых модулей.

*Доказательство*:
1. Пусть имеется малый подмодуль $N \not\subseteq \operatorname{Rad} M$. Тогда существует максимальный подмодуль $U$, не содержащий $N$. Из максимальности $U$ следует $N + U = M$, а значит $U = M$. Противоречие с максимальностью $U$.
2. $\operatorname{Rad} M = \sum\limits_{x \in \operatorname{Rad} M} Ax$. Покажем, что каждый $Ax$ мал. «Дело за малым» - А. В. Семёнов.

Пусть $Ax + K = M$, проверим, что $K = M$.

$$M \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{K} = \frac{Ax}{Ax \cap K} =: D_A \overset{\pi_2}{\cong} \frac{A}{\operatorname{Ker}\left(A \underset{1 \mapsto x}{\longrightarrow} M\right)} \overset{\pi_3}{\twoheadrightarrow} \frac{A}{I} = S.$$

Первое равенство получено по второй теореме об изоморфизме. $D_A$ – циклический модуль. $I$ – некоторый максимальный подмодуль, в который вложено ядро. $S$ – простой модуль.
Положим $f = \pi_3\pi_2\pi_1 : M \to S$ – эпиморфизм в простой модуль. Значит $\operatorname{Ker} f$ – максимальный подмодуль $M$, тогда $x \in \operatorname{Ker} f$ так как он изначально брался из радикала.

$K \subseteq \operatorname{Ker} f$ так как $K \subseteq \operatorname{Ker} \pi_1$. Получаем, что $\operatorname{Ker} f = M$. Противоречие. 😎

**Теорема 5**: Если $A$ – конечномерная алгебра и $M_A$ – модуль, то $\operatorname{Rad} M$ мал.

*Доказательство*:
1. Пусть $M$ конечнопорождён. Тогда $\operatorname{Rad} M$ конечнопорождён по (У МЕНЯ НАПИСАНО НЁТЕРОВОСТИ, НО НАДО ПРОВЕРИТЬ). Тогда можно считать, что радикал представляется конечной суммой малых модулей. Остаётся показать, что сумма двух малых мала. Действительно, $(N_1 + N_2) + K = M \Longrightarrow N_2 + K = M \Longrightarrow K = M$.
2. ⚠️ SCAM ALERT ⚠️

   $M = \lim\limits_{\substack{n \\ \to}} M_n$, где $M_n$ конечнопорождённые. $\operatorname{Rad} M = \lim\limits_{\substack{n \\ \to}} \operatorname{Rad} M_n$ так как радикал сохраняется при гомоморфизмах. Тогда $\operatorname{Rad} M$ мал так как

   $$\boxed{|\operatorname{Rad} M - \operatorname{Rad} M_n| < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{Rad} M + K = M.}$$

😎

# 2. Проективные модули

## 2.1. Свойства

**Определение 7**: Модуль $P_R$ называется проективным, если

$$\forall f : P \to N \quad \forall \sigma : M \twoheadrightarrow N \quad \exists g : P \to M : f = \sigma g.$$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "\forall f"] \\ M \arrow[r, two heads, "\forall \sigma"'] & N \end{tikzcd}$$

**Лемма 3**: Любой свободный модуль проективен.

*Доказательство*: Рассмотрим свободный модуль $F$ и зафиксируем диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\sigma"] & N & F \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

Пусть $\{w_j\}_{j \in I}$ – базис $F$, $f(w_j) = y_j$. Так как $\sigma$ сюръективно, $\forall j \in I : \exists x_j \in M : \sigma(x_j) = y_j$. Положив $g(w_j) = x_j$ замкнём диаграмму до коммутативной:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\sigma"] & N & F \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

😎