

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Андрей Вячеславович Семёнов

КОНСПЕКТ ЗА АВТОРСТВОМ ПАВЛА ЦЫГАНЕНКО И ЛЬВА МУКОСЕЕВА

Содержание

1. Кольца и модули	1
1.1. Групповые алгебры	1
1.2. Радиал алгебры	2
1.3. Радиал модуля	3
2. Проективные модули	5
2.1. Свойства	5
2.2. Проективные накрытия	7
2.3. Инъективные модули	9
2.4. Двойственность	10

1. Кольца и модули

1.1. Групповые алгебры

Определение 1: Групповая алгебра группы G над полем k :

$$kG = \langle \{e_g \mid g \in G\} \rangle_k$$

То есть её элементы – формальные комбинации вида $\sum_{g \in G} \alpha_g g$, где ненулевых α конечное число.

Сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g &= \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g, \\ \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum_{g \in G} \beta_g g \right) &= \sum_{g \in G} \left(\sum_{xy=g} \alpha_x \beta_y \right) g. \end{aligned}$$

Определение 2: Модуль M_R называется простым, если он не содержит нетривиальных собственных подмодулей.

Определение 3: Модуль M_R называется полупростым, если любой его подмодуль выделяется прямым слагаемым.

То есть $\forall N \leq M : \exists P \leq M : M = M \oplus N$.

Замечание:

1. M полупрост $\iff M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, где все M_i простые.
2. Кольцо называется полупростым, если оно полупросто как левый модуль над собой. Без доказательства скажем, что это эквивалентно тому, что любой R -модуль полупрост.

Следующую теорему вам должны были доказать в школьном курсе по некоммутативным кольцам.

Теорема 1 (Веддерберна — Артина): Если R артиново, то

$$R \text{ — полупростое} \iff R = \prod_{j \in I} M_{n_j}(D_j), \quad D_j \text{ — тела.}$$

То есть полупростое артиново кольцо разлагается в прямое произведение матричных колец над телами, и в предположении артиновости обратное тоже верно.

Теорема 2 (Машке): Пусть k — поле, $|G| < \infty$, $\text{char } k = 0$ или $\text{char } k \nmid |G|$. Тогда kG — полупростая алгебра.

Доказательство: Покажем, что произвольный модуль M над kG полупрост. Рассмотрим $N \leq M$ и стандартные отображения

$$N \hookrightarrow M \xrightarrow{\tilde{\pi}} N.$$

Определим усреднение $\tilde{\pi}$:

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1}x).$$

- π — kG -линейный гомоморфизм. Действительно, для $h \in G$ проверим, что $\pi(hx)h\pi(x)$, а остальное и так понятно.

Обозначим $t = h^{-1}g$, тогда

$$\pi(hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1}hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} ht \tilde{\pi}(t^{-1}x) = h\pi(x).$$

- N неподвижен под действием π . Действительно, если $x \in N$, то $g^{-1}x \in N$ и $\tilde{\pi}(g^{-1}x) = g^{-1}x$, так что теперь всё ясно.

Тем самым, $M = N \oplus \text{Ker } \pi$.



1.2. Радикал алгебры

Далее под A подразумевается конечномерная алгебра над полем k .

Определение 4: Радикалом $J(A)$ называется сумма всех двухсторонних нильпотентных идеалов.

Теорема 3:

1. $J(A)$ — нильпотентный идеал в A .
2. Любой нильпотентный идеал лежит в $J(A)$.
3. $J(A/J(A)) = 0$

Доказательство:

1. Во-первых, сумма двух нильпотентных двухсторонних идеалов тоже нильпотентный двухсторонний идеал. Действительно, если $I_1^{n_1} = 0$ и $I_2^{n_2} = 0$, то $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2}$ порождается всеми произведениями длины $n_1 + n_2$ элементов из $I_1 + I_2$, но раскрывая скобки получится либо не менее n_1 множителей из I_1 , либо не менее n_2 из I_2 , а значит $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2} = 0$.

Понятно, что вместо $n_1 + n_2$ можно было взять $\max(n_1, n_2)$.

Во-вторых, можно считать, что в сумме из определения $J(A)$ конечное число идеалов, потому что алгебра конечномерна.

- Если идеал двухсторонний, то всё ясно. Допустим I – левый идеал и $I^k = 0$. Тогда IA – двухсторонний. Покажем, что $IA \subseteq J(A)$ и так как алгебра с единицей, из этого будет следовать искомое.

$$(IA)^k = I \underbrace{(AI) \dots (AI)}_{k-1} A \subseteq I^k A = 0.$$

- Рассмотрим двухсторонний нильпотентный идеал \bar{I} в $A/J(A)$. Пусть $\bar{I}^k = 0$. Тогда $I^k \subseteq J(A)$. По первому пункту теоремы $J(A)$ нильпотентен, скажем, $J^n(A) = 0$.

$$I^{kn} \subseteq J^n(A) = 0 \implies I^{kn} = 0.$$

По второму пункту I лежит в $J(A)$, а значит $\bar{I} = 0$.



Факт: A полупроста $\iff J(A) = 0$.

1.3. Радикал модуля

Сейчас мы будем работать с модулями над конечномерной алгеброй над полем.

Определение 5: Радикалом модуля M называется пересечение всех его максимальных подмодулей и обозначается как $\text{Rad } M$.

Лемма 1: M полупрост $\implies \text{Rad } M = 0$.

Доказательство: Допустим существует $x \in \text{Rad } M \setminus \{0\}$. Как и всякий подмодуль, Ax можно выделить в прямую сумму: $M = Ax \oplus U$. Если рассмотреть стандартный эпиморфизм $A \rightarrow Ax : 1 \mapsto x$, то станет очевидно, что $Ax \cong A/\text{Ann } x$. Вложение $\text{Ann } x$ в максимальный идеал I , его содержащий, индуцирует эпиморфизм $A/\text{Ann } x \twoheadrightarrow A/I$, причём $S := A/I$ – простая алгебра. Имеем

$$M \xrightarrow{\pi} M/U \cong Ax \cong A/\text{Ann } x \xrightarrow{f} S,$$

так что будем считать, что $f\pi : M \rightarrow S$. Положим $N := \text{Ker } f\pi$, тогда так как $M/N \cong S$, то N – максимальный подмодуль. $U \subseteq N$ по построению и $x \in N$ по определению радикала. Тогда $M = Ax + U \subseteq N$. Противоречие.



Замечание: Мы не пользовались конечномерностью, так что на самом деле это верно для модулей над любым ассоциативным кольцом с единицей.

Перед тем как доказать следующую теорему, упомянем факт, который на лекции был дан как упражнение.

Предложение 1: $X \leq \text{Rad } M \implies \text{Rad } \frac{M}{X} = \frac{\text{Rad } M}{X}$.

Доказательство: Просто факт о том, что максимальные подмодули фактора $\overline{M} \leq \frac{M}{X}$ соответствуют максимальным подмодулям $X \subseteq M \leq M$.



Теорема 4: $\text{Rad } M = J(A)M$.

Доказательство: Допустим, что включение $\text{Rad } M \supseteq J(A)M$ уже доказано. Обозначим за $\bar{A} := A/J(A)$. Теорема 3 утверждает, что алгебра \bar{A} полупроста. Рассмотрим $\bar{M} := M/J(A)M$, который в силу $\text{Ann } M \supseteq J(A)$ является \bar{A} -модулем. По замечанию о полупростоте кольца, M является полупростым модулем, из чего по предложению 1 следует, что $\text{Rad } M \subseteq J(A)M$.

Докажем включение в обратную сторону.



В этом месте Семенов решил заскамить аудиторию! Ведутся работы по устранению скама, сохраняйте спокойствие!



Следствие: $\text{Rad } {}_A A = {}_A J(A)$, $\text{Rad } A_A = J(A)_A$ и $\text{Rad } A = J(A)$ (в коммутативном случае).

Ниже под R понимается ассоциативное кольцо с единицей.

Определение 6: Подмодуль X модуля M_R называется малым, если для всякого $K \leq M$ из $X + K = M$ следует $K = M$.

Лемма 2: Пусть A – конечномерная алгебра, M_R – правый A -модуль. Тогда

1. Любой малый подмодуль M лежит в $\text{Rad } M$.
2. $\text{Rad } M$ есть сумма малых модулей.

Доказательство:

1. Пусть имеется малый подмодуль $N \not\subseteq \text{Rad } M$. Тогда существует максимальный подмодуль U , не содержащий N . Из максимальности U следует $N + U = M$, а значит $U = M$. Противоречие с максимальностью U .
2. $\text{Rad } M = \sum_{x \in \text{Rad } M} Ax$. Покажем, что каждый Ax мал. «Дело за малым» - А. В. Семёнов.

Пусть $Ax + K = M$, проверим, что $K = M$.

$$M \xrightarrow{\pi_1} \frac{M}{K} = \frac{Ax}{Ax \cap K} =: D_A \xrightarrow{\pi_2} \frac{A}{\text{Ker} \left(A \xrightarrow{1 \mapsto x} M \right)} \xrightarrow{\pi_3} \frac{A}{I} = S.$$

Первое равенство получено по второй теореме об изоморфизме. D_A – циклический модуль. I – некоторый максимальный подмодуль, в который вложено ядро. S – простой модуль.

Положим $f = \pi_3 \pi_2 \pi_1 : M \rightarrow S$ – эпиморфизм в простой модуль. Значит $\text{Ker } f$ – максимальный подмодуль M , тогда $x \in \text{Ker } f$ так как он изначально брался из радикала.

$K \subseteq \text{Ker } f$ так как $K \subseteq \text{Ker } \pi_1$. Получаем, что $\text{Ker } f = M$. Противоречие.



Теорема 5: Если A – конечномерная алгебра и M_A – модуль, то $\text{Rad } M$ мал.

Доказательство:

1. Пусть M конечнопорождён. Тогда $\text{Rad } M$ конечнопорождён по **У МЕНЯ НАПИСАНО НЁТЕРОВОСТИ, НО НАДО ПРОВЕРИТЬ**. Тогда можно считать, что радикал представляется конечной суммой малых модулей. Остаётся показать, что сумма двух малых мала. Действительно, $(N_1 + N_2) + K = M \Rightarrow N_2 + K = M \Rightarrow K = M$.
- 2.

! SCAM ALERT !

$M = \varinjlim M_n$, где M_n конечнопорождённые. $\text{Rad } M = \varinjlim \text{Rad } M_n$ так как радикал сохраняется при гомоморфизмах. Тогда $\text{Rad } M$ мал так как

$$|\text{Rad } M - \text{Rad } M_n| < \varepsilon \Rightarrow \text{Rad } M + K = M.$$

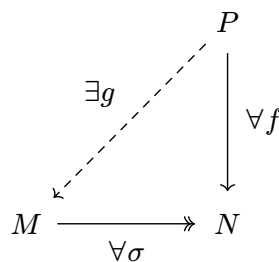


2. Проективные модули

2.1. Свойства

Определение 7: Модуль P_R называется проективным, если

$$\forall f : P \rightarrow N \quad \forall \sigma : M \twoheadrightarrow N \quad \exists g : P \rightarrow M : f = \sigma g.$$



Лемма 3: Любой свободный модуль проективен.

Доказательство: Рассмотрим свободный модуль F и зафиксируем диаграмму

$$M \xrightarrow{\sigma} N \xleftarrow{f} F$$

Пусть $\{w_j\}_{j \in I}$ – базис F , $f(w_j) = y_j$. Так как σ сюръективно, $\forall j \in I : \exists x_j \in M : \sigma(x_j) = y_j$.

Положив $g(w_j) = x_j$, замкнём диаграмму до коммутативной:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\sigma} & N & \xleftarrow{f} & F \\
 & & \searrow g & & \\
 & & & &
 \end{array}$$



Теорема 6: P – проективный $\iff \forall \sigma : M \twoheadrightarrow P \quad \exists i : P \rightarrow M : \sigma i = \text{id}_P$.

Доказательство: \Rightarrow : Фиксируем $\sigma : M \twoheadrightarrow P$. Взяв в определении проективного модуля $N = P$ и $f = \text{id}_P$ получаем требуемое i .

\Leftarrow : Рассмотрим $U = \{(p, m) \in P \oplus M \mid f(p) = \sigma(m)\}$ вместе с проекциями $U \xrightarrow{\pi_1} P$ и $U \xrightarrow{\pi_2} M$.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xleftarrow{j} & P \\
 \pi_2 \downarrow & \nearrow \pi_1 & \downarrow f \\
 M & \xrightarrow{\sigma} & N
 \end{array}$$

g (дashed arrow from U to M)

Из эпиморфности σ следует эпиморфность π_1 , значит по условию $\exists i : P \rightarrow U : \pi_1 i = \text{id}_P$.

Тогда $g = \pi_2 j$ замыкает диаграмму, так как $\forall x \in P$

$$\sigma g(x) = \sigma \pi_2 j(x) = \sigma(\pi_2(x, m)) = \sigma(m) = f(x).$$



Лемма 4: Если $P = \bigoplus_{k \in I} P_k$, то P – проективен \iff все P_k проективны.

Доказательство: \Rightarrow : Рассмотрим произвольный P_k и покажем, что он проективен.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \xleftarrow{g_k} & \\
 & & & \text{---} & \\
 M & \xleftarrow{g} & P = \bigoplus_{k \in I} P_k & \xleftarrow{\pi_k} & P_k \\
 & \searrow \sigma & & \nearrow i_k & \\
 & & N & \xleftarrow{f} &
 \end{array}$$

g_k (dashed arrow from P_k to M)

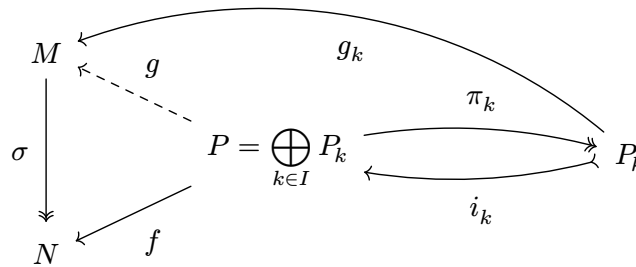
Из проективности P следует существование $g : P \rightarrow M : f \pi_k = \sigma g$. Тогда нам подходит $g_k = g i_k$:

$$f = f \pi_k i_k = \sigma g i_k = g i_k.$$

\Leftarrow : Из проективности P_k следует существование $g_k : P_k \rightarrow M : \sigma g_k = f i_k$.

Положим $g = \bigoplus_{k \in I} g_k \pi_k$, тогда

$$\sigma g = \bigoplus_{k \in I} \sigma g_k \pi_k = \bigoplus_{k \in I} f i_k \pi_k = f \circ \bigoplus_{k \in I} i_k \pi_k = f.$$



Следствие: P – проективен $\iff P$ – прямое слагаемое свободного.

Доказательство:

\Rightarrow : Для любого проективного модуля P существует свободный модуль F и эпиморфизм $F \twoheadrightarrow P$ (можно взять свободный модуль на образующих P). Из проективности P следует существование $i : P \rightarrow F : \pi i = \text{id}_P$. Тогда $\exists X \leq F : F = X \oplus i(P) \cong X \oplus P$. **можно добавить в первую лекцию теорему о диаграмме прямой суммы и сослаться на неё**

\Leftarrow : Очевидно следует из лемм 3 и 4. **потом можно ссылки добавить, мне впадлу**



2.2. Проективные накрытия

Пусть A – конечномерная алгебра над полем K .

Определение 8: Можно представить A_A как $A_A = \bigoplus_{j=1}^n P_j$, где все P_j неприводимые. Они называются главными неразложимыми модулями.

Все P_j проективны так как A свободна как модуль над собой.

Определение 9: Кольцо R называется локальным, если у него всего один максимальный идеал.

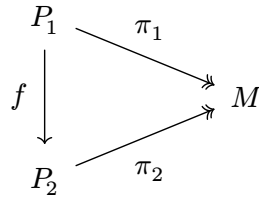
Свойства:

1. Этот максимальный идеал состоит из всех необратимых элементов. Действительно, если бы существовал другой необратимый элемент, то он бы содержался в некотором другом максимальном идеале.
2. $R/\text{Rad } R$ – тело. На самом деле это критерий локальности. **Надо либо добавить объяснение, либо удостовериться у Семёнова, что это идёт без доказательства**
3. $1 - x$ необратим $\iff x$ обратим. Следует из известного факта про описание радикала Джекобсона, в нашем случае он совпадает с единственным максимальным идеалом.

Определение 10: $(P_A, \pi : P \twoheadrightarrow M_A)$ – проективное накрытие модуля $M \iff \text{Ker } \pi$ мало.

Теорема 7: Если проективное накрытие существует, то оно единственно.

Доказательство: Пусть существуют проективные накрытия $(P_1, \pi : P_1 \twoheadrightarrow M)$ и $(P_2, \pi : P_2 \twoheadrightarrow M)$. Из проективности P_1 следует существование $f : P_1 \rightarrow P_2 : \pi_2 f = \pi_1$. Проверим, что это изоморфизм.



- Эпиморфность. $\text{Im } f + \text{Ker } \pi_2 = P_2$. вроде это очев, но я уже совсем мясо чтобы думать. Так как $\text{Ker } \pi_2$ мало, то $\text{Im } f = P_2$, то есть сюръективность доказана.
- Мономорфность. По только что доказаной эпиморфности f расщепляется, то есть $\exists i : P_1 \rightarrow M : fi = \text{id}_{P_1}$. **добавить ссылку на теорему 6, а в ней добавить слово расщепимость.**
Значит $\exists X \leq P_1 : \text{Ker } f \oplus X = P_1$. Ядро f тоже мало, так как $\text{Ker } f \subseteq \text{Ker } \pi_1$ и подмодуль малого модуля мал. Получаем, что $\text{Ker } f = 0$.



в следующую теорему не вдумывался, но вроде норм

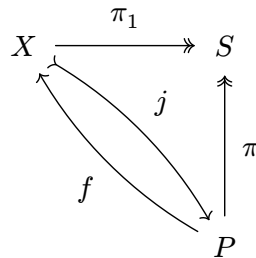
Теорема 8: S_A – просто $\implies \exists(P, \pi : P \twoheadrightarrow S)$ – проективное накрытие.

Доказательство: $\exists \pi : A_A \twoheadrightarrow S$. Представим A как $A = \bigoplus_{j=1}^n P_j$.

$$S = \text{Im } \pi = \sum_{j=1}^n \underbrace{\pi(P_j)}_{\leq S} \implies \pi(P_k) = S.$$

Предположим, что $\text{Ker } \pi + X = P$, но $X \neq P$. Тогда $\pi(X) = \pi(\text{Ker } \pi + X) = \pi(P) = S$.

Пусть $\pi_1 = \pi|_X : X \twoheadrightarrow S$. По проективности P существует $f : P \rightarrow X : \pi = \pi_1 f = \pi j f$.



Примем без доказательства, что $\text{End}(P_A)$ – локальное кольцо. Лев написал почему так, но оказывается у меня в конспекте б/д относится к словам «главный неразложимый», короче потом надо чекнуть. Так как $\pi(1 - jf) = 0$, то $1 - jf$ необратим и jf обратим. Значит j эпиморфизм и $X = P$.



ТУТ ПРОПУЩЕН КУСОК

2.3. Инъективные модули

Определение 11: Модуль Q_R называется проективным, если

$$\forall f : X \rightarrow Y \quad \forall g : X \rightarrow Q \quad \exists h : Y \rightarrow Q : g = hf.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\forall f} & Y \\ \forall g \downarrow & \swarrow \exists h & \\ Q & & \end{array}$$

Лемма 5:

1. Q инъективен \iff Любой мономорфизм из Q расщепим, то есть $\forall Q \xrightarrow{i} X \quad \exists h : X \rightarrow Q :$
ЫЫЫЫЫ ДА ЫЫЫЫЫ

Тут какая-то дыра в конспекте как будто.

Определение 12: Модуль M_R над ассоциативным кольцом с единицей называется делимым, если для всех $r \in R$ уравнение $rx = y$ разрешимо относительно x и y , то есть

$$\forall r \in R \quad \forall y \in M \quad \exists x \in M : rx = y.$$

Замечание: Это условие эквивалентно тому, что $\forall r \in R : rM = M$.

Лев, во-первых разберись пж почему замечание съехало, во-вторых проверь определение и замечание, а то у меня в конспекте какие-то $x = y/r$, это просто условность?

Следующее утверждение на лекции было дано без доказательства, но для полноты изложения мы его привели.

Предложение 2 (Критерий Бэра): Если R нётерово, то инъективность M равносильна тому, что любой гомоморфизм (R -модулей) из идеала $I \subseteq R$ в M продолжается до гомоморфизма на всём R .

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{i} & R \\ \forall f \downarrow & \swarrow \exists g & \\ M & & \end{array}$$

Доказательство: \Rightarrow : Следует из определения.

\Leftarrow :



Лемма 6: Пусть R – кольцо главных идеалов. Тогда M делимый $\iff M$ инъективный.

Доказательство:



Теорема 9: Пусть R нётерово слева. Тогда $\bigoplus_{i \in I} M_i$ инъективен $\iff \forall i \in I : M_i$ инъективен.

Доказательство:



2.4. Двойственность

Скам, который в итоге вроде не скам.