# ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

### Андрей Вячеславович Семёнов

### КОНСПЕКТ ЗА АВТОРСТВОМ ПАВЛА ЦЫГАНЕНКО И ЛЬВА МУКОСЕЕВА

## Содержание

1.	Кольца и модули	1
	1.1. Групповые алгебры	
	1.2. Радикал алгебры	
	1.3. Радикал модуля	
2.	Проективные модули	5
	2.1. Свойства	5
	2.2. Проективные накрытия	7
	2.3. Инъективные модули	
	2.4. Двойственность	

## 1. Кольца и модули

## 1.1. Групповые алгебры

**Определение 1**: Групповая алгебра группы G над полем k:

$$kG = \langle \left\{ e_g \mid g \in G \right\} \rangle_k$$

То есть её элементы – формальные комбинации вида  $\sum_{g\in G} \alpha_g g$ , где ненулевых  $\alpha$  конечное число.

Сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} \bigl(\alpha_g + \beta_g\bigr) g,$$

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) \cdot \left(\sum_{g \in G} \beta_g g\right) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{xy = g} \alpha_x \beta_y\right) g.$$

**Определение 2**: Модуль  $M_R$  называется простым, если он не содержит нетривиальных собственных подмодулей.

**Определение 3**: Модуль  $M_R$  называется полупростым, если любой его подмодуль выделяется прямым слагаемым.

To есть  $\forall N \leqslant M : \exists P \leqslant M : M = M \oplus N$ .

### Замечание:

- 1. M полупрост  $\Longleftrightarrow M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , где все  $M_i$  простые.
- 2. Кольцо называется полупростым, если оно полупросто как левый модуль над собой. Без доказательства скажем, что это эквивалентно тому, что любой R-модуль полупрост.

Следующую теорему вам должны были доказать в школьном курсе по некоммутативным кольцам.

**Теорема 1** (Веддерберна — Артина): Если R артиново, то

$$R$$
 – полупростое  $\Longleftrightarrow R = \prod_{j \in I} M_{n_j} ig( D_j ig), \quad D_j$  – тела.

То есть полупростое артиново кольцо разлагается в прямое произведение матричных колец над телами, и в предположении артиновости обратное тоже верно.

**Теорема 2** (Машке): Пусть k – поле,  $|G| < \infty$ , char k = 0 или char  $k \nmid |G|$ . Тогда kG – полупростая алгебра.

Доказательство: Покажем, что произвольный модуль M над kG полупрост. Рассмотрим  $N\leqslant M$  и стандартные отображения

$$N \rightarrowtail M \stackrel{\tilde{\pi}}{\twoheadrightarrow} N.$$

Определим усреднение  $\tilde{\pi}$ :

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi} (g^{-1}x).$$

•  $\pi$  – kG-линейный гомоморфизм. Действительно, для  $h \in G$  проверим, что  $\pi(hx)h\pi(x)$ , а остальное и так понятно.

Обозначим  $t = h^{-1}g$ , тогда

$$\pi(hx) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g\tilde{\pi}\big(g^{-1}hx\big) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}ht\tilde{\pi}\big(t^{-1}x\big) = h\pi(x).$$

• N неподвижен под действием  $\pi$ . Действительно, если  $x\in N$ , то  $g^{-1}x\in N$  и  $\tilde{\pi}(g^{-1}x)=g^{-1}x$ , так что теперь всё ясно.

Тем самым,  $M = N \oplus \operatorname{Ker} \pi$ .

#### **2**

## 1.2. Радикал алгебры

Далее под A подразумевается конечномерная алгебра над полем k.

**Определение 4**:  $Padukanom\ J(A)$  называется сумма всех двухсторонних нильпотентных идеалов.

## Теорема 3:

- 1. J(A) нильпотентный идеал в A.
- 2. Любой нильпотентный идеал лежит в J(A).
- 3. J(A/J(A)) = 0

### Доказательство:

1. Во-первых, сумма двух нильпотентных двухсторонних идеалов тоже нильпотентный двухсторонний идеал. Действительно, если  $I_1^{n_1}=0$  и  $I_2^{n_2}=0$ , то  $(I_1+I_2)^{n_1+n_2}$  порождается всеми произведениями длины  $n_1+n_2$  элементов из  $I_1+I_2$ , но раскрывая скобки получится либо не менее  $n_1$  множителей из  $I_1$ , либо не менее  $n_2$  из  $I_1$ , а значит  $(I_1+I_2)^{n_1+n_2}=0$ .

Понятно, что вместо  $n_1 + n_2$  можно было взять  $\max(n_1, n_2)$ .

Во-вторых, можно считать, что в сумме из определения J(A) конечное число идеалов, потому что алгебра конечномерна.

2. Если идеал двухсторонний, то всё ясно. Допустим I – левый идеал и  $I^k=0$ . Тогда IA – двухсторонний. Покажем, что  $IA\subseteq J(A)$  и так как алгебра с единицей, из этого будет следовать искомое.

$$(IA)^k = I\underbrace{(AI)...(AI)}_{k-1}A \subseteq I^kA = 0.$$

1. Рассмотрим двухсторонний нильпотентный идеал  $\overline{I}$  в A/J(A). Пусть  $\overline{I}^k=0$ . Тогда  $I^k\subseteq J(A)$ . По первому пункту теоремы J(A) нильпотентен, скажем,  $J^n(A)=0$ .

$$I^{kn} \subseteq J^n(A) = 0 \implies I^{kn} = 0.$$

По второму пункту I лежит в J(A), а значит  $\overline{I}=0$ .

 $\Phi$ акт: A полупроста  $\iff J(A) = 0$ .

## 1.3. Радикал модуля

Сейчас мы будем работать с модулями над конечномерной алгеброй над полем.

**Определение 5**: Paдикалом модуля M называется пересечение всех его максимальных подмодулей и обозначается как  $\mathrm{Rad}\,M$ .

**Лемма 1**: M полупрост  $\Longrightarrow \operatorname{Rad} M = 0$ .

Доказательство: Допустим существует  $x\in \mathrm{Rad}\, M\setminus \{0\}$ . Как и всякий подмодуль, Ax можно выделить в прямую сумму:  $M=A\oplus U$ . Если рассмотреть стандартный эпиморфизм  $A\to Ax: 1\mapsto x$ , то станет очевидно, что  $Ax\cong A/\mathrm{Ann}\, x$ . Вложение  $\mathrm{Ann}\, x$  в максимальный идеал I, его содержащий, индуцирует эпиморфизм  $A/\mathrm{Ann}\, x \twoheadrightarrow A/I$ , причём S:=A/I – простая алгебра. Имеем

$$M \stackrel{\pi}{\twoheadrightarrow} M/U \cong Ax \cong A/\operatorname{Ann} x \stackrel{f}{\twoheadrightarrow} S,$$

так что будем считать, что  $f\pi:M\to S$ . Положим  $N:=\mathrm{Ker}\, f\pi$ , тогда так как  $M/N\cong S$ , то N- максимальный подмодуль.  $U\subseteq N$  по построению и  $x\in N$  по определению радикала. Тогда  $M=Ax+U\subseteq N$ . Противоречие.

<u>Замечание</u>: Мы не пользовались конечномерностью, так что на самом деле это верно для модулей над любым ассоциативным кольцом с единицей.

Перед тем как доказать следующую теорему, упомянем факт, который на лекции был дан как упражнение.

Предложение 1: 
$$X \leqslant \operatorname{Rad} M \Longrightarrow \operatorname{Rad} \frac{M}{X} = \frac{\operatorname{Rad} M}{X}.$$

Доказательство: Просто факт о том, что максимальные подмодули фактора  $\overline{\mathfrak{M}}\leqslant \frac{M}{X}$  соответствуют максимальным подмодулям  $X\subseteq \mathfrak{M}\leqslant M$ .

Доказательство: Допустим, что включение  ${\rm Rad}\ M\supseteq J(A)M$  уже доказано. Обозначим за  $\overline{A}:=A/J(A)$ . Теорема 3 утверждает, что алгебра  $\overline{A}$  полупроста. Рассмотрим  $\overline{M}:=M/J(A)M$ , который в силу  ${\rm Ann}\ M\supseteq J(A)$  является  $\overline{A}$  - модулем. По замечанию о полупростоте кольца, M является полупростым модулем, из чего по предложению 1 следует, что  ${\rm Rad}\ M\subseteq J(A)M$ .

Докажем включение в обратную сторону.

# **↑ SCAM ALERT** ↑

В этом месте Семенов решил заскамить аудиторию! Ведуться работы по устранению скама, сохраняйте спокойствие!

Следствие: Rad  ${}_AA={}_AJ(A), {\rm Rad}\, A_A=J(A)_A$  и Rad A=J(A) (в коммутативном случае).

Ниже под R понимается ассоциативное кольцо с единицей.

**Определение 6**: Подмодуль X модуля  $M_R$  называется малым, если для всякого  $K \leqslant M$  из X + K = M следует K = M.

**Лемма 2**: Пусть A – конечномерная алгебра,  $M_R$  – правый A-модуль. Тогда

- 1. Любой малый подмодуль M лежит в  ${\rm Rad}\ M$ .
- $2. \operatorname{Rad} M$  есть сумма малых модулей.

Доказательство:

- 1. Пусть имеется малый подмодуль  $N \nsubseteq \mathrm{Rad}\, M$ . Тогда существует максимальный подмодуль U, не содержащий N. Из максимальности U следует N+U=M, а значит U=M. Противоречие с максимальностью U.
- 2. Rad  $M = \sum_{x \in \operatorname{Rad} M} Ax$ . Покажем, что каждый Ax мал. «Дело за малым» А. В. Семёнов.

Пусть Ax + K = M, проверим, что K = M.

$$M \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{K} = \frac{Ax}{Ax \cap K} =: D_A \overset{\pi_2}{\cong} \frac{A}{\operatorname{Ker}\left(A \underset{1 \mapsto x}{\longrightarrow} M\right)} \overset{\pi_3}{\twoheadrightarrow} \frac{A}{I} = S.$$

Первое равенство получено по второй теореме об изоморфизме.  $D_A$  – циклический модуль. I – некоторый максимальный подмодуль, в который вложено ядро. S – простой модуль.

Положим  $f=\pi_3\pi_2\pi_1: M\to S$  – эпиморфизм в простой модуль. Значит  $\operatorname{Ker} f$  – максимальный подмодуль M, тогда  $x\in \operatorname{Ker} f$  так как он изначально брался из радикала.

 $K\subseteq \operatorname{Ker} f$  так как  $K\subseteq \operatorname{Ker} \pi_1$ . Получаем, что  $\operatorname{Ker} f=M$ . Противоречие.

Доказательство:

1. Пусть M конечнопорождён. Тогда  $\mathrm{Rad}\,M$  конечнопорождён по  $\mathrm{У}$  МЕНЯ НАПИСАНО НЁТЕРОВОСТИ, НО НАДО ПРОВЕРИТЬ. Тогда можно считать, что радикал представляется конечной суммой малых модулей. Остаётся показать, что сумма двух малых мала. Действительно,  $(N_1+N_2)+K=M\Longrightarrow N_2+K=M\Longrightarrow K=M$ .

2.

# **▲ SCAM ALERT**

 $M=\lim_{\stackrel{n}{\to}}M_n$ , где  $M_n$  конечнопорождённые. Rad  $M=\lim_{\stackrel{n}{\to}}\mathrm{Rad}\,M_n$  так как радикал сохраняется при гомоморфизмах. Тогда  $\mathrm{Rad}\,M$  мал так как

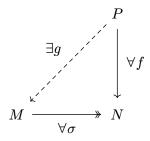
$$|\mathrm{Rad}\, M - \mathrm{Rad}\, M_n| < \varepsilon \Rightarrow \mathrm{Rad}\, M + K = M.$$

# 2. Проективные модули

### 2.1. Свойства

**Определение 7**: Модуль  $P_R$  называется проективным, если

$$\forall f:P\to N \quad \forall \sigma:M \twoheadrightarrow N \quad \exists g:P\to M:f=\sigma g.$$

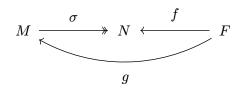


Лемма 3: Любой свободный модуль проективен.

Доказательство: Рассмотрим свободный модуль F и зафиксируем диаграмму

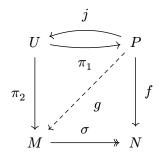
$$M \xrightarrow{\quad \sigma \quad \quad } N \xleftarrow{\quad f \quad \quad } F$$

Пусть  $\left\{w_j\right\}_{j\in I}$  – базис F,  $f\left(w_j\right)=y_j$ . Так как  $\sigma$  сюръективно,  $\forall j\in I:\exists x_j\in M:\sigma(x_j)=y_j$ . Положив  $g\left(w_j\right)=x_j$ , замкнём диаграмму до коммутативной:



**Теорема 6**: P – проективный  $\iff \forall \sigma: M \twoheadrightarrow P \quad \exists i: P \to M: \sigma i = \mathrm{id}_P.$ 

Доказательство:  $\Rightarrow$ : Фиксируем  $\sigma: M \twoheadrightarrow P$ . Взяв в определении проективного модуля N=P и  $f=\mathrm{id}_N$  получаем требуемое i.

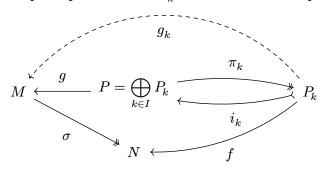


Из эпиморфности  $\sigma$  следует эпиморфность  $\pi_1$ , значит по условию  $\exists i:P \to U: \pi_1 i=\mathrm{id}_P.$  Тогда  $g=\pi_2 j$  замыкает диаграмму, так как  $\forall x \in P$ 

$$\sigma g(x) = \sigma \pi_2 j(x) = \sigma(\pi_2(x, m)) = \sigma(m) = f(x).$$

**Лемма 4**: Если  $P = \bigoplus_{k \in I} P_k$ , то P – проективен  $\Longleftrightarrow$  все  $P_k$  проективны.

Доказательство:  $\Rightarrow$ : Рассмотрим произвольный  $P_k$  и покажем, что он проективен.

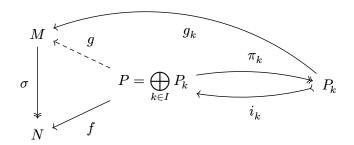


Из проективности P следует существование  $g:P \to M:f\pi_k=\sigma g$ . Тогда нам подходит  $g_k=gi_k$ :

$$f = f\pi_k i_k = \sigma g i_k = g i_k.$$

 $\Leftarrow$ : Из проективности  $P_k$  следует существование  $g_k:P_k\to M:\sigma g_k=fi_k.$  Положим  $g=\bigoplus_{k\in I}g_k\pi_k$ , тогда

$$\sigma g = \bigoplus_{k \in I} \sigma g_k \pi_k = \bigoplus_{k \in I} f i_k \pi_k = f \circ \bigoplus_{k \in I} i_k \pi_k = f.$$





 $\mathit{Следствие} : P$  – проективен  $\iff P$  – прямое слагаемое свободного.

#### Доказательство:

 $\Rightarrow$ : Для любого проективного модуля P существует свободный модуль F и эпиморфизм  $F \twoheadrightarrow P$  (можно взять свободный модуль на образующих P). Из проективности P следует существование  $i:P \to F: \pi i = \mathrm{id}_P$ . Тогда  $\exists X \leqslant F: F = X \oplus i(P) \cong X \oplus P$ . можно добавить в первую лекцию теорему о диаграмме прямой суммы и сослаться на неё

⇐: Очевидно следует из лемм 3 и 4. потом можно ссылки добавить, мне впадлу



### 2.2. Проективные накрытия

Пусть A – конечномерная алгебра над полем K.

**Определение 8**: Можно представить  $A_A$  как  $A_A = \bigoplus_{j=1}^n P_j$ , где все  $P_j$  неприводимые. Они называются главными неразложимыми модулями.

Все  $P_j$  проективны так как A свободна как модуль над собой.

**Определение 9**: Кольцо R называется локальным, если у него всего один максимальный идеал.

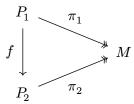
### Свойства:

- 1. Этот максимальный идеал состоит из всех необратимых элементов. Действительно, если бы существовал другой необратимый элемент, то он бы содержался в некотором другом максимальном идеале.
- 2.  $R/\operatorname{Rad} R$  тело. На самом деле это критерий локальности. Надо либо добавить объяснение, либо удостовериться у Семёнова, что это идёт без доказательства
- 3. 1-x необратим  $\iff x$  обратим. Следует из известного факта про описание радикала Джекобсона, в нашем случае он совпадает с единственным максимальным идеалом.

**Определение 10**:  $(P_A,\pi:P \twoheadrightarrow M_A)$  – проективное накрытие модуля  $M \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} \pi$  мало.

Теорема 7: Если проективное накрытие существует, то оно единственно.

Доказательство: Пусть существуют проективные накрытия  $(P_1,\pi:P_1 \twoheadrightarrow M)$  и  $(P_2,\pi:P_2 \twoheadrightarrow M)$ . Из проективности  $P_1$  следует существование  $f:P_1 \to P_2:\pi_2 f=\pi_1$ . Проверим, что это изоморфизм.



- Эпиморфность. Im  $f+{\rm Ker}\,\pi_2=P_2$ . вроде это очев, но я уже совсем мясо чтобы думать. Так как  ${\rm Ker}\,\pi_2$  мало, то  ${\rm Im}\,f=P_2$ , то есть сюръективность доказана.
- Мономорфность. По только что доказаной эпиморфности f расщепляется, то есть  $\exists i: P_1 \to M:$   $fi = \operatorname{id}_{P_1}$ . добавить ссылк на теорему 6, а в ней добавить слово расщепимость. Значит  $\exists X \leqslant P_1: \operatorname{Ker} f \oplus X = P_1$ . Ядро f тоже мало, так как  $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} \pi_1$  и подмодуль малого модуля мал. Получаем, что  $\operatorname{Ker} f = 0$ .



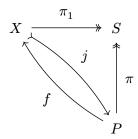
в следующую теорему не вдумывался, но вроде норм

**Теорема 8**:  $S_A$  – просто  $\implies \exists (P,\pi:P \twoheadrightarrow S)$  – проективное накрытие.

Доказательство:  $\exists \pi: A_A \twoheadrightarrow S$ . Представим A как  $A = \bigoplus_{j=1}^n P_j$ .

$$S = \operatorname{Im} \pi = \sum_{j=1}^n \underbrace{\pi \big( P_j \big)}_{\leqslant S} \quad \Longrightarrow \quad \pi(P_k) = S.$$

Предположим, что  $\operatorname{Ker} \pi + X = P$ , но  $X \neq P$ . Тогда  $\pi(X) = \pi(\operatorname{Ker} \pi + X) = \pi(P) = S$ . Пусть  $\pi_1 = \pi|_X : X \twoheadrightarrow S$ . По проективности P существует  $f: P \to X : \pi = \pi_1 f = \pi j f$ .



Примем без доказательства, что  $\operatorname{End}(P_A)$  – лоакльное кольцо. Лев написал почему так, но оказывается у меня в конспекте б/д относится к словам «главный неразложимый», короче потом надо чекнуть. Так как  $\pi(1-jf)=0$ , то 1-jf необратим и jf обратим. Значит j эпиморфизм и X=P.

 $\mathit{Следствиe}\colon \mathsf{Eсли}$  модуль S над конечномерной алгеброй прост, то существует главный неразложимый модуль P такой, что  $S\cong \frac{P}{J(A)P}.$ 

Следствие: Если алгебра A полупроста, то любой модуль  $M_A$  можно представить как  $\bigoplus_{i\in I} \frac{P_i}{J(A)P_i}.$ 

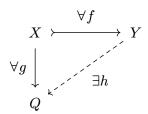
### Теорема 9: ТУТ ТЕОРЕМА ПРО СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОЕКТИВНОГО НАКРЫТИЯ

Следствие: ТУТ СЛЕДСТВИЕ ПРО ГЛАВНЫЕ НЕРАЗЛОЖИМЫЕ

## 2.3. Инъективные модули

**Определение 11**: Модуль  $Q_R$  называется проективным, если

$$\forall f: X \rightarrowtail Y \quad \forall g: X \to Q \quad \exists h: Y \to Q: g = hf.$$



### Лемма 5:

1. Q инъективен  $\Longleftrightarrow$  Любой мономорфизм из Q расщепим, то есть  $\forall Q \stackrel{i}{\rightarrowtail} X \quad \exists h: X \to Q:$  ЫЫЫЫЫ ДА ЫЫЫЫЫ

Тут какая-то дыра в конспекте как будто.

**Определение 12**: Модуль  $M_R$  над ассоциативном кольцом с единицей называется делимым, если для всех  $r \in R$  уравнение rx = y разрешимо относительно x и y, то есть

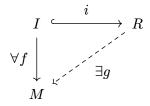
$$\forall r \in R \quad \forall y \in M \quad \exists x \in M : rx = y.$$

3амечание: Это условие эквивалентно тому, что  $\forall r \in R : rM = M$ .

Лев, во-первых разберись пж почему замечание съехало, во-вторых проверь определение и замечание, а то у меня в конспекте какие-то x=y/r, это просто условность?

Следующее утверждение на лекции было дано без доказательства, но для полноты изложения мы его привели.

**Предложение 2** (Критерий Бэра): Если R нётерово, то инъективность M равносильна тому, что любой гомоморфизм (R-модулей) из идеала  $I \subseteq R$  в M продолжается до гомоморфизма на всём R.



Доказательство: ⇒: Следует из определения.

 $\Leftarrow$ : Рассмотрим мономорфизм  $X \rightarrowtail Y$ . Будем мыслить X как подмодуль Y. Пусть  $f: X \to M$ .

$$W = \{(Z,h) \mid h: Z \to M, \ X \subseteq Z \subseteq Y, \ h|_X = f\}.$$

Понятно, что  $W \neq \varnothing$ . Пусть  $(Z_1,h_1) \preccurlyeq (Z_2,h_2) \Longleftrightarrow Z_1 \subseteq Z_2$  и  $h_2|_{Z_1} = h_1$ . Если  $\mathcal C$  – цепь в W, то  $\left(\bigcup_{(Z,h)\in\mathcal C} Z,H\right)$ , где H продолжает все h, является её верхней гранью. Тогда по лемме Цорна существует максимальный элемент (T,g). Предположим, что  $T \neq Y$ , пусть  $t \in Y \setminus T$ . Определим  $J = \{r \in R \mid rb \in T\}$  и  $s:J \to M$  как s(r) = g(rb). По предположению s продолжается до отображения  $k:R \to M$ . Пусть  $N=T+Rb \supsetneq T,N \subseteq Y$ . Положим  $q:N \to M$  как q(t)=g(t) для всех  $t \in T$  и q(rb)=k(r) для  $r \in R$ . Так как  $T \cap Rb = Jb$  и для всех  $r \in J$  имеем g(rb)=s(r)=k(r), то q корректно определён. Получили  $(T,g) \preccurlyeq (N,q)$ , что противоречит максимальности.

23

**Лемма 6**: Пусть R – кольцо главных идеалов. Тогда M делимый  $\Longleftrightarrow M$  инъективный.

Доказательство:  $\Rightarrow$ : Воспользуемся критерием Бэра, продолжим отображение  $f:I\to M$  на всё R. Пусть  $I=\langle r\rangle$ . По делимости  $\exists x\in M: rx=f(r)$ . Тогда отображение  $g:R\to M, 1\mapsto x$  продолжает f так как g(r)=rx=f(r).

<br/>  $\Leftarrow$ : Выберем  $r\in R$  и  $y\in M$ . Отображение  $f:rR\to M, r\mapsto y$  продолжимо до  $g:R\to M$ . Тогда <br/> y=f(r)=g(r)=rg(1).



**Теорема 10**: Пусть R нётерово слева. Тогда  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  инъективен  $\Longleftrightarrow \forall i \in I: M_i$  инъективен.

Доказательство: ДОБАВЛЮ ПОЗЖЕ



## 2.4. Двойственность

Скам, который в итоге вроде не скам.