

# ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Андрей Вячеславович Семёнов

КОНСПЕКТ ЗА АВТОРСТВОМ ПАВЛА ЦЫГАНЕНКО И ЛЬВА МУКОСЕЕВА

## Содержание

1. Кольца и модули .....	1
1.1. Групповые алгебры .....	1
1.2. Радиал алгебры .....	2
1.3. Радиал модуля .....	3
2. Проективные модули .....	5
2.1. Свойства .....	5
2.2. Проективные накрытия .....	7
2.3. Инъективные модули .....	9
2.4. Двойственность .....	10

## 1. Кольца и модули

### 1.1. Групповые алгебры

**Определение 1:** Групповая алгебра группы  $G$  над полем  $k$ :

$$kG = \langle \{e_g \mid g \in G\} \rangle_k$$

То есть её элементы – формальные комбинации вида  $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ , где ненулевых  $\alpha$  конечное число.

Сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g &= \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g, \\ \left( \sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left( \sum_{g \in G} \beta_g g \right) &= \sum_{g \in G} \left( \sum_{xy=g} \alpha_x \beta_y \right) g. \end{aligned}$$

**Определение 2:** Модуль  $M_R$  называется простым, если он не содержит нетривиальных собственных подмодулей.

**Определение 3:** Модуль  $M_R$  называется полупростым, если любой его подмодуль выделяется прямым слагаемым.

То есть  $\forall N \leq M : \exists P \leq M : M = M \oplus N$ .

Замечание:

1.  $M$  полупрост  $\iff M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , где все  $M_i$  простые.
2. Кольцо называется полупростым, если оно полупросто как левый модуль над собой. Без доказательства скажем, что это эквивалентно тому, что любой  $R$ -модуль полупрост.

Следующую теорему вам должны были доказать в школьном курсе по некоммутативным кольцам.

**Теорема 1** (Веддерберна — Артина): Если  $R$  артиново, то

$$R \text{ — полупростое} \iff R = \prod_{j \in I} M_{n_j}(D_j), \quad D_j \text{ — тела.}$$

То есть полупростое артиново кольцо разлагается в прямое произведение матричных колец над телами, и в предположении артиновости обратное тоже верно.

**Теорема 2** (Машке): Пусть  $k$  — поле,  $|G| < \infty$ ,  $\text{char } k = 0$  или  $\text{char } k \nmid |G|$ . Тогда  $kG$  — полупростая алгебра.

*Доказательство:* Покажем, что произвольный модуль  $M$  над  $kG$  полупрост. Рассмотрим  $N \leq M$  и стандартные отображения

$$N \hookrightarrow M \xrightarrow{\tilde{\pi}} N.$$

Определим усреднение  $\tilde{\pi}$ :

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1}x).$$

- $\pi$  —  $kG$ -линейный гомоморфизм. Действительно, для  $h \in G$  проверим, что  $\pi(hx)h\pi(x)$ , а остальное и так понятно.

Обозначим  $t = h^{-1}g$ , тогда

$$\pi(hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \tilde{\pi}(g^{-1}hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} ht \tilde{\pi}(t^{-1}x) = h\pi(x).$$

- $N$  неподвижен под действием  $\pi$ . Действительно, если  $x \in N$ , то  $g^{-1}x \in N$  и  $\tilde{\pi}(g^{-1}x) = g^{-1}x$ , так что теперь всё ясно.

Тем самым,  $M = N \oplus \text{Ker } \pi$ .



## 1.2. Радикал алгебры

Далее под  $A$  подразумевается конечномерная алгебра над полем  $k$ .

**Определение 4:** Радикалом  $J(A)$  называется сумма всех двухсторонних нильпотентных идеалов.

**Теорема 3:**

1.  $J(A)$  — нильпотентный идеал в  $A$ .
2. Любой нильпотентный идеал лежит в  $J(A)$ .
3.  $J(A/J(A)) = 0$

*Доказательство:*

1. Во-первых, сумма двух нильпотентных двухсторонних идеалов тоже нильпотентный двухсторонний идеал. Действительно, если  $I_1^{n_1} = 0$  и  $I_2^{n_2} = 0$ , то  $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2}$  порождается всеми произведениями длины  $n_1 + n_2$  элементов из  $I_1 + I_2$ , но раскрывая скобки получится либо не менее  $n_1$  множителей из  $I_1$ , либо не менее  $n_2$  из  $I_2$ , а значит  $(I_1 + I_2)^{n_1+n_2} = 0$ .

Понятно, что вместо  $n_1 + n_2$  можно было взять  $\max(n_1, n_2)$ .

Во-вторых, можно считать, что в сумме из определения  $J(A)$  конечное число идеалов, потому что алгебра конечномерна.

- Если идеал двухсторонний, то всё ясно. Допустим  $I$  – левый идеал и  $I^k = 0$ . Тогда  $IA$  – двухсторонний. Покажем, что  $IA \subseteq J(A)$  и так как алгебра с единицей, из этого будет следовать искомое.

$$(IA)^k = I \underbrace{(AI) \dots (AI)}_{k-1} A \subseteq I^k A = 0.$$

- Рассмотрим двухсторонний нильпотентный идеал  $\bar{I}$  в  $A/J(A)$ . Пусть  $\bar{I}^k = 0$ . Тогда  $I^k \subseteq J(A)$ . По первому пункту теоремы  $J(A)$  нильпотентен, скажем,  $J^n(A) = 0$ .

$$I^{kn} \subseteq J^n(A) = 0 \implies I^{kn} = 0.$$

По второму пункту  $I$  лежит в  $J(A)$ , а значит  $\bar{I} = 0$ .



**Факт:**  $A$  полупроста  $\iff J(A) = 0$ .

### 1.3. Радикал модуля

Сейчас мы будем работать с модулями над конечномерной алгеброй над полем.

**Определение 5:** Радикалом модуля  $M$  называется пересечение всех его максимальных подмодулей и обозначается как  $\text{Rad } M$ .

**Лемма 1:**  $M$  полупрост  $\implies \text{Rad } M = 0$ .

*Доказательство:* Допустим существует  $x \in \text{Rad } M \setminus \{0\}$ . Как и всякий подмодуль,  $Ax$  можно выделить в прямую сумму:  $M = Ax \oplus U$ . Если рассмотреть стандартный эпиморфизм  $A \rightarrow Ax : 1 \mapsto x$ , то станет очевидно, что  $Ax \cong A/\text{Ann } x$ . Вложение  $\text{Ann } x$  в максимальный идеал  $I$ , его содержащий, индуцирует эпиморфизм  $A/\text{Ann } x \twoheadrightarrow A/I$ , причём  $S := A/I$  – простая алгебра. Имеем

$$M \xrightarrow{\pi} M/U \cong Ax \cong A/\text{Ann } x \xrightarrow{f} S,$$

так что будем считать, что  $f\pi : M \rightarrow S$ . Положим  $N := \text{Ker } f\pi$ , тогда так как  $M/N \cong S$ , то  $N$  – максимальный подмодуль.  $U \subseteq N$  по построению и  $x \in N$  по определению радикала. Тогда  $M = Ax + U \subseteq N$ . Противоречие.



**Замечание:** Мы не пользовались конечномерностью, так что на самом деле это верно для модулей над любым ассоциативным кольцом с единицей.

Перед тем как доказать следующую теорему, упомянем факт, который на лекции был дан как упражнение.

**Предложение 1:**  $X \leq \text{Rad } M \implies \text{Rad } \frac{M}{X} = \frac{\text{Rad } M}{X}$ .

*Доказательство:* Просто факт о том, что максимальные подмодули фактора  $\overline{M} \leq \frac{M}{X}$  соответствуют максимальным подмодулям  $X \subseteq M \leq M$ .



**Теорема 4:**  $\text{Rad } M = J(A)M$ .

*Доказательство:* Допустим, что включение  $\text{Rad } M \supseteq J(A)M$  уже доказано. Обозначим за  $\bar{A} := A/J(A)$ . Теорема 3 утверждает, что алгебра  $\bar{A}$  полупроста. Рассмотрим  $\bar{M} := M/J(A)M$ , который в силу  $\text{Ann } M \supseteq J(A)$  является  $\bar{A}$ -модулем. По замечанию о полупростоте кольца,  $M$  является полупростым модулем, из чего по предложению 1 следует, что  $\text{Rad } M \subseteq J(A)M$ .

Докажем включение в обратную сторону.



В этом месте Семенов решил заскамить аудиторию! Ведутся работы по устранению скама, сохраняйте спокойствие!



*Следствие:*  $\text{Rad } {}_A A = {}_A J(A)$ ,  $\text{Rad } A_A = J(A)_A$  и  $\text{Rad } A = J(A)$  (в коммутативном случае).

Ниже под  $R$  понимается ассоциативное кольцо с единицей.

**Определение 6:** Подмодуль  $X$  модуля  $M_R$  называется малым, если для всякого  $K \leq M$  из  $X + K = M$  следует  $K = M$ .

**Лемма 2:** Пусть  $A$  – конечномерная алгебра,  $M_R$  – правый  $A$ -модуль. Тогда

1. Любой малый подмодуль  $M$  лежит в  $\text{Rad } M$ .
2.  $\text{Rad } M$  есть сумма малых модулей.

*Доказательство:*

1. Пусть имеется малый подмодуль  $N \not\subseteq \text{Rad } M$ . Тогда существует максимальный подмодуль  $U$ , не содержащий  $N$ . Из максимальной  $U$  следует  $N + U = M$ , а значит  $U = M$ . Противоречие с максимальнойностью  $U$ .
2.  $\text{Rad } M = \sum_{x \in \text{Rad } M} Ax$ . Покажем, что каждый  $Ax$  мал. «Дело за малым» - А. В. Семёнов.

Пусть  $Ax + K = M$ , проверим, что  $K = M$ .

$$M \xrightarrow{\pi_1} \frac{M}{K} = \frac{Ax}{Ax \cap K} =: D_A \xrightarrow{\pi_2} \frac{A}{\text{Ker} \left( A \xrightarrow{1 \mapsto x} M \right)} \xrightarrow{\pi_3} \frac{A}{I} = S.$$

Первое равенство получено по второй теореме об изоморфизме.  $D_A$  – циклический модуль.  $I$  – некоторый максимальный подмодуль, в который вложено ядро.  $S$  – простой модуль.

Положим  $f = \pi_3 \pi_2 \pi_1 : M \rightarrow S$  – эпиморфизм в простой модуль. Значит  $\text{Ker } f$  – максимальный подмодуль  $M$ , тогда  $x \in \text{Ker } f$  так как он изначально брался из радикала.

$K \subseteq \text{Ker } f$  так как  $K \subseteq \text{Ker } \pi_1$ . Получаем, что  $\text{Ker } f = M$ . Противоречие.



**Теорема 5:** Если  $A$  – конечномерная алгебра и  $M_A$  – модуль, то  $\text{Rad } M$  мал.

Доказательство:

1. Пусть  $M$  конечнопорождён. Тогда  $\text{Rad } M$  конечнопорождён по **У МЕНЯ НАПИСАНО НЁТЕРОВОСТИ, НО НАДО ПРОВЕРИТЬ**. Тогда можно считать, что радикал представляется конечной суммой малых модулей. Остаётся показать, что сумма двух малых мала. Действительно,  $(N_1 + N_2) + K = M \Rightarrow N_2 + K = M \Rightarrow K = M$ .
- 2.

**! SCAM ALERT !**

$M = \varinjlim M_n$ , где  $M_n$  конечнопорождённые.  $\text{Rad } M = \varinjlim \text{Rad } M_n$  так как радикал сохраняется при гомоморфизмах. Тогда  $\text{Rad } M$  мал так как

$$|\text{Rad } M - \text{Rad } M_n| < \varepsilon \Rightarrow \text{Rad } M + K = M.$$

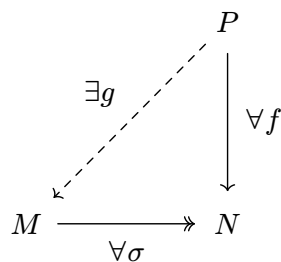


## 2. Проективные модули

### 2.1. Свойства

**Определение 7:** Модуль  $P_R$  называется проективным, если

$$\forall f : P \rightarrow N \quad \forall \sigma : M \twoheadrightarrow N \quad \exists g : P \rightarrow M : f = \sigma g.$$



**Лемма 3:** Любой свободный модуль проективен.

Доказательство: Рассмотрим свободный модуль  $F$  и зафиксируем диаграмму

$$M \xrightarrow{\sigma} N \xleftarrow{f} F$$

Пусть  $\{w_j\}_{j \in I}$  – базис  $F$ ,  $f(w_j) = y_j$ . Так как  $\sigma$  сюръективно,  $\forall j \in I : \exists x_j \in M : \sigma(x_j) = y_j$ .

Положив  $g(w_j) = x_j$ , замкнём диаграмму до коммутативной:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\sigma} & N & \xleftarrow{f} & F \\
 & & \searrow g & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$



**Теорема 6:**  $P$  – проективный  $\iff \forall \sigma : M \twoheadrightarrow P \quad \exists i : P \rightarrow M : \sigma i = \text{id}_P$ .

*Доказательство:*  $\Rightarrow$ : Фиксируем  $\sigma : M \twoheadrightarrow P$ . Взяв в определении проективного модуля  $N = P$  и  $f = \text{id}_P$  получаем требуемое  $i$ .

$\Leftarrow$ : Рассмотрим  $U = \{(p, m) \in P \oplus M \mid f(p) = \sigma(m)\}$  вместе с проекциями  $U \xrightarrow{\pi_1} P$  и  $U \xrightarrow{\pi_2} M$ .

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xleftarrow{j} & P \\
 \pi_2 \downarrow & \nearrow \pi_1 & \downarrow f \\
 M & \xrightarrow{\sigma} & N
 \end{array}$$

$g$  (дashed arrow from  $U$  to  $M$ )

Из эпиморфности  $\sigma$  следует эпиморфность  $\pi_1$ , значит по условию  $\exists i : P \rightarrow U : \pi_1 i = \text{id}_P$ .

Тогда  $g = \pi_2 j$  замыкает диаграмму, так как  $\forall x \in P$

$$\sigma g(x) = \sigma \pi_2 j(x) = \sigma(\pi_2(x, m)) = \sigma(m) = f(x).$$



**Лемма 4:** Если  $P = \bigoplus_{k \in I} P_k$ , то  $P$  – проективен  $\iff$  все  $P_k$  проективны.

*Доказательство:*  $\Rightarrow$ : Рассмотрим произвольный  $P_k$  и покажем, что он проективен.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \xleftarrow{g_k} & \\
 & & & \text{---} & \\
 M & \xleftarrow{g} & P = \bigoplus_{k \in I} P_k & \xleftarrow{\pi_k} & P_k \\
 & \searrow \sigma & & \nearrow i_k & \\
 & & N & \xleftarrow{f} & 
 \end{array}$$

$g_k$  (dashed arrow from  $P_k$  to  $M$ )

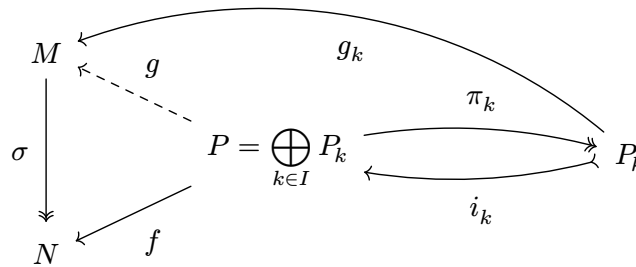
Из проективности  $P$  следует существование  $g : P \rightarrow M : f \pi_k = \sigma g$ . Тогда нам подходит  $g_k = g i_k$ :

$$f = f \pi_k i_k = \sigma g i_k = g i_k.$$

$\Leftarrow$ : Из проективности  $P_k$  следует существование  $g_k : P_k \rightarrow M : \sigma g_k = f i_k$ .

Положим  $g = \bigoplus_{k \in I} g_k \pi_k$ , тогда

$$\sigma g = \bigoplus_{k \in I} \sigma g_k \pi_k = \bigoplus_{k \in I} f i_k \pi_k = f \circ \bigoplus_{k \in I} i_k \pi_k = f.$$



**Следствие:**  $P$  – проективен  $\Leftrightarrow P$  – прямое слагаемое свободного.

*Доказательство:*

$\Rightarrow$ : Для любого проективного модуля  $P$  существует свободный модуль  $F$  и эпиморфизм  $F \twoheadrightarrow P$  (можно взять свободный модуль на образующих  $P$ ). Из проективности  $P$  следует существование  $i : P \rightarrow F : \pi i = \text{id}_P$ . Тогда  $\exists X \leq F : F = X \oplus i(P) \cong X \oplus P$ . **можно добавить в первую лекцию теорему о диаграмме прямой суммы и сослаться на неё**

$\Leftarrow$ : Очевидно следует из лемм 3 и 4. **потом можно ссылки добавить, мне впадлу**



## 2.2. Проективные накрытия

Пусть  $A$  – конечномерная алгебра над полем  $K$ .

**Определение 8:** Можно представить  $A_A$  как  $A_A = \bigoplus_{j=1}^n P_j$ , где все  $P_j$  неприводимые. Они называются главными неразложимыми модулями.

Все  $P_j$  проективны так как  $A$  свободна как модуль над собой.

**Определение 9:** Кольцо  $R$  называется локальным, если у него всего один максимальный идеал.

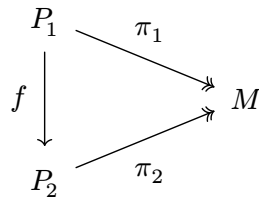
*Свойства:*

1. Этот максимальный идеал состоит из всех необратимых элементов. Действительно, если бы существовал другой необратимый элемент, то он бы содержался в некотором другом максимальном идеале.
2.  $R/\text{Rad } R$  – тело. На самом деле это критерий локальности. **Надо либо добавить объяснение, либо удостовериться у Семёнова, что это идёт без доказательства**
3.  $1 - x$  необратим  $\Leftrightarrow x$  обратим. Следует из известного факта про описание радикала Джекобсона, в нашем случае он совпадает с единственным максимальным идеалом.

**Определение 10:**  $(P_A, \pi : P \twoheadrightarrow M_A)$  – проективное накрытие модуля  $M \Leftrightarrow \text{Ker } \pi$  мало.

**Теорема 7:** Если проективное накрытие существует, то оно единственно.

*Доказательство:* Пусть существуют проективные накрытия  $(P_1, \pi : P_1 \twoheadrightarrow M)$  и  $(P_2, \pi : P_2 \twoheadrightarrow M)$ . Из проективности  $P_1$  следует существование  $f : P_1 \rightarrow P_2 : \pi_2 f = \pi_1$ . Проверим, что это изоморфизм.



- Эпиморфность.  $\text{Im } f + \text{Ker } \pi_2 = P_2$ . вроде это очев, но я уже совсем мясо чтобы думать. Так как  $\text{Ker } \pi_2$  мало, то  $\text{Im } f = P_2$ , то есть сюръективность доказана.
- Мономорфность. По только что доказаной эпиморфности  $f$  расщепляется, то есть  $\exists i : P_1 \rightarrow M : fi = \text{id}_{P_1}$ . **добавить ссылку на теорему 6, а в ней добавить слово расщепимость.** Значит  $\exists X \leq P_1 : \text{Ker } f \oplus X = P_1$ . Ядро  $f$  тоже мало, так как  $\text{Ker } f \subseteq \text{Ker } \pi_1$  и подмодуль малого модуля мал. Получаем, что  $\text{Ker } f = 0$ .



в следующую теорему не вдумывался, но вроде норм

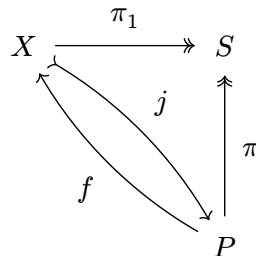
**Теорема 8:**  $S_A$  – просто  $\implies \exists (P, \pi : P \twoheadrightarrow S)$  – проективное накрытие.

Доказательство:  $\exists \pi : A_A \twoheadrightarrow S$ . Представим  $A$  как  $A = \bigoplus_{j=1}^n P_j$ .

$$S = \text{Im } \pi = \sum_{j=1}^n \underbrace{\pi(P_j)}_{\leq S} \implies \pi(P_k) = S.$$

Предположим, что  $\text{Ker } \pi + X = P$ , но  $X \neq P$ . Тогда  $\pi(X) = \pi(\text{Ker } \pi + X) = \pi(P) = S$ .

Пусть  $\pi_1 = \pi|_X : X \twoheadrightarrow S$ . По проективности  $P$  существует  $f : P \rightarrow X : \pi = \pi_1 f = \pi j f$ .



Примем без доказательства, что  $\text{End}(P_A)$  – локальное кольцо. Лев написал почему так, но оказывается у меня в конспекте б/д относится к словам «главный неразложимый», короче потом надо чекнуть. Так как  $\pi(1 - jf) = 0$ , то  $1 - jf$  необратим и  $jf$  обратим. Значит  $j$  эпиморфизм и  $X = P$ .



**Следствие:** Если модуль  $S$  над конечномерной алгеброй прост, то существует главный неразложимый модуль  $P$  такой, что  $S \cong \frac{P}{J(A)P}$ .

**Следствие:** Если алгебра  $A$  полупроста, то любой модуль  $M_A$  можно представить как  $\bigoplus_{i \in I} \frac{P_i}{J(A)P_i}$ .

**Теорема 9:** ТУТ ТЕОРЕМА ПРО СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОЕКТИВНОГО НАКРЫТИЯ



Следствие: ТУТ СЛЕДСТВИЕ ПРО ГЛАВНЫЕ НЕРАЗЛОЖИМЫЕ

### 2.3. Инъективные модули

**Определение 11:** Модуль  $Q_R$  называется проективным, если

$$\forall f : X \rightarrow Y \quad \forall g : X \rightarrow Q \quad \exists h : Y \rightarrow Q : g = hf.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\forall f} & Y \\ \forall g \downarrow & \nearrow \exists h & \\ Q & & \end{array}$$

**Лемма 5:**

1.  $Q$  инъективен  $\iff$  Любой мономорфизм из  $Q$  расщепим, то есть  $\forall Q \xrightarrow{i} X \quad \exists h : X \rightarrow Q :$   
ЫЫЫЫЫ ДА ЫЫЫЫЫЫ

Тут какая-то дыра в конспекте как будто.

**Определение 12:** Модуль  $M_R$  над ассоциативным кольцом с единицей называется делимым, если для всех  $r \in R$  уравнение  $rx = y$  разрешимо относительно  $x$  и  $y$ , то есть

$$\forall r \in R \quad \forall y \in M \quad \exists x \in M : rx = y.$$

Замечание: Это условие эквивалентно тому, что  $\forall r \in R : rM = M$ .

Лев, во-первых разберись пж почему замечание съехало, во-вторых проверь определение и замечание, а то у меня в конспекте какие-то  $x = y/r$ , это просто условность?

Следующее утверждение на лекции было дано без доказательства, но для полноты изложения мы его привели.

**Предложение 2 (Критерий Бэра):** Если  $R$  нётерово, то инъективность  $M$  равносильна тому, что любой гомоморфизм ( $R$ -модулей) из идеала  $I \subseteq R$  в  $M$  продолжается до гомоморфизма на всём  $R$ .

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{i} & R \\ \forall f \downarrow & \nearrow \exists g & \\ M & & \end{array}$$

Доказательство:  $\Rightarrow$ : Следует из определения.

$\Leftarrow$ :



**Лемма 6:** Пусть  $R$  – кольцо главных идеалов. Тогда  $M$  делимый  $\iff M$  инъективный.

*Доказательство:*



**Теорема 10:** Пусть  $R$  нётерово слева. Тогда  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  инъективен  $\iff \forall i \in I : M_i$  инъективен.

*Доказательство:*



## 2.4. Двойственность

Скам, который в итоге вроде не скам.