

# Геометрия и топология. Неофициальный конспект

Лектор: Лебедева Нина Дмитриевна  
Конспектировал Леонид Данилевич

I семестр, осень 2022 г.

# Оглавление

<b>1 База топологии</b>	<b>3</b>
1.1 Метрические пространства . . . . .	3
1.1.1 Примеры метрических пространств . . . . .	3
1.2 Топологические пространства . . . . .	5
1.2.1 Примеры топологических пространств . . . . .	6
1.2.2 Примеры замкнутых множеств . . . . .	6
1.3 Метрики и топологии . . . . .	7
1.4 Сравнение метрик и топологий . . . . .	7
1.5 Специальные точки множеств в топологии . . . . .	8
1.5.1 Внутренность множества. Внутренние точки . . . . .	8
1.5.2 Замыкание множества. Точки прикосновения . . . . .	9
1.5.3 Граница множества, граничные точки . . . . .	9
1.5.4 Пределевые, изолированные точки . . . . .	10
1.6 База топологии . . . . .	10
1.7 Подпространства . . . . .	12
1.7.1 Свойства подпространства . . . . .	12
1.8 Произведение метрических пространств . . . . .	13
1.8.1 Тихоновская топология прямого произведения бесконечного числа пространств	13
<b>2 Непрерывные отображения</b>	<b>15</b>
2.1 Свойства образа и прообраза . . . . .	15
2.2 Непрерывность отображения . . . . .	15
2.3 Локальная непрерывность . . . . .	16
2.4 Гомеоморфизмы . . . . .	17
2.5 Фундаментальные покрытия . . . . .	18
2.6 Непрерывность и произведение пространств . . . . .	19
2.7 Арифметические операции над непрерывными функциями . . . . .	20
2.8 Топологические свойства . . . . .	21
2.8.1 Аксиомы счётности . . . . .	21
2.8.2 Сепарабельные пространства . . . . .	22
2.8.3 Аксиомы отделимости . . . . .	22
2.8.4 Связность . . . . .	24
2.8.5 Линейная связность . . . . .	26
2.8.6 Связность и линейная связность . . . . .	27
2.8.7 Негомеоморфность . . . . .	28
2.8.8 Компактные пространства и множества . . . . .	28
2.9 Полные метрические пространства . . . . .	33
2.9.1 Нигде не плотные множества . . . . .	34
2.10 Секвенциальная компактность . . . . .	35
2.11 Вполне ограниченные метрические пространства . . . . .	36
2.12 Факторпространства . . . . .	37
2.12.1 Свойства . . . . .	37
2.12.2 Частные случаи факторизации . . . . .	38
2.13 Многообразия . . . . .	39

2.13.1	Модельные поверхности . . . . .	40
2.13.2	Клеточные пространства . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Геометрия</b>	<b>45</b>
3.1	Евклидово пространство . . . . .	45
3.2	Ортогональные векторы . . . . .	47
3.3	Ортогональные преобразования . . . . .	49
3.3.1	Ориентация векторного пространства . . . . .	50
3.3.2	Формула в координатах . . . . .	51
3.4	Матрицы Грама . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Аффинные пространства</b>	<b>52</b>
4.1	Аффинные отображения . . . . .	55

# Глава 1

## База топологии

### Лекция I 8 ноября 2022 г.

#### 1.1 Метрические пространства

Рассмотрим произвольное множество  $X$ . Введём на нём метрику  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , удовлетворяющую некоторым тождествам:

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (1.1)$$

Симметричность:

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x) \quad (1.2)$$

Неравенство треугольника:

$$\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (1.3)$$

**Определение 1.1.1** (Метрическое пространство). Пара  $(X, d)$ , где  $d$  удовлетворяет трём вышеперечисленным аксиомам.

При проверке, что некая функция действительно является метрикой, сложности чаще всего вызывает проверка третьей аксиомы, неравенства треугольника. Скорее всего, проверки остальных двух аксиом я буду опускать.

#### 1.1.1 Примеры метрических пространств

- *Дискретная метрика* может быть введена на любом множестве  $X : d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ .
- Для  $X = \mathbb{R}^n$  *манхэттенская метрика*  $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .
- Для  $X = \mathbb{R}^n$  *шахматная метрика* (*метрика Чебышёва*)  $d(x, y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .
- Для  $X = C[0; 1]$  — множества непрерывных функций  $[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — можно задать метрику  $d(x, y) = \max_{t \in [0; 1]} |x(t) - y(t)|$ . Данная метрика вместе с  $C[0; 1]$  образуют *пространство непрерывных функций*  $(X, d)$ .

- Для  $X = \mathbb{R}^n$  евклидова метрика  $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ . Проверим, что для евклидовой метрики выполняется неравенство треугольника:

**Теорема 1.1.1** (Прямое произведение метрических пространств). Пусть  $(X_1, d_1)$  и  $(X_2, d_2)$  — метрические пространства. Тогда функция  $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , определённая  $d((A_1, A_2), (B_1, B_2)) = \sqrt{d_1(A_1, B_1)^2 + d_2(A_2, B_2)^2}$ , задаёт метрику на  $X_1 \times X_2$ .

*Доказательство.* Проверим неравенство треугольника: рассмотрим  $(A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) \in X_1 \times X_2$ .

Обозначим  $a_i = d_i(B_i, C_i), b_i = d_i(A_i, C_i), c_i = d_i(A_i, B_i)$ .

Используя свойства неравенства треугольника для  $d_1$  и  $d_2$ , получаем

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \leq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}$$

Рассмотрим на плоскости треугольник с координатами вершин  $(0, 0), (b_1, b_2), (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ . Неравенство треугольника для него выглядит

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Дальше, по транзитивности, получаем  $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ , откуда в самом деле  $d$  является метрикой.  $\square$

**Следствие 1.1.1.** На произведении  $n$  пространств  $X_1 \times \cdots \times X_n$  аналогичная функция

$$d((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(a_i, b_i)}$$

также является метрикой.

*Замечание.* Также иногда рассматривают метрику на прямом произведении пространств  $d((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \max\{d_1(a_1, b_1), d_2(a_2, b_2)\}$ . Проверить, что данная функция тоже является метрикой, довольно просто.

- **Определение 1.1.2** (Сужение метрического пространства). Метрическое пространство  $(X, d)$  можно сузить на  $Y \subset X$ , метрикой будет  $d|_{Y \times Y}$ .

**Определение 1.1.3** (Открытый шар в метрическом пространстве  $(X, d)$  с центром в  $a \in X$  и радиусом  $r > 0$ ).  $B_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ .

**Определение 1.1.4** (Замкнутый шар в пространстве  $(X, d)$  с центром в  $a \in X$  и радиусом  $r > 0$ ).  $\overline{B_r}(a) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ .

По умолчанию все шары открыты.

**Определение 1.1.5** (Сфера в метрическом пространстве  $(X, d)$  с центром в  $a \in X$  и радиусом  $r > 0$ ).  $S_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$ .

**Определение 1.1.6** (Расстояние от точки  $a \in X$  до подмножества  $A \subset X$ ).  $\inf \{d(x, a) \mid x \in A\}$

**Определение 1.1.7** (Окрестность множества  $A \subset X$  с радиусом  $r$ ).  $U_r(A) = \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$ .

**Определение 1.1.8** (Диаметр множества  $A \subset X$ ).  $\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ .

Если  $\text{diam}(A) < \infty$ , то множество называют *ограниченным*.

Несложно проверить, что условие ограниченности эквивалентно тому, что множество лежит в некотором (открытом) шаре.

**Определение 1.1.9** (Множество  $A \subset X$  открыто). Любая точка  $a \in A$  содержится в  $A$  вместе с некоторым своим шаром:

$$\forall a \in A : \exists r > 0 : B_r(a) \subset A$$

**Факт 1.1.1.** Множество  $A$  открыто, если оно представимо, как объединение множества открытых шаров.  $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_{r_\alpha}(x_\alpha)$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Возьмём для каждой точки шар, с которым она содержится в множестве, и объединим их всех.

$\Leftarrow$ . Для каждой точки  $x$  из шара  $S$  подойдёт шар радиусом  $r(S) - d(x, c(S))$ , проверяется неравенством треугольника.  $\square$

**Следствие 1.1.2.** Открытый шар открыт.

*Замечание.* В метрике  $(X, d)$   $X$  и  $\emptyset$  открыты.

В дискретной метрике (все расстояния целые)  $(X, d)$  любое однозначное множество открыто. Достаточно рассмотреть шар радиусом  $1/2$ .

**Теорема 1.1.2.** Объединение открытых множеств открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

*Доказательство.* • Очевидно из определения через объединение шаров

- Всякая точка  $a \in A$  лежит вместе с шаром радиуса  $\min(r_1, \dots, r_n)$ , где  $r_i$  — радиус открытого шара с центром в  $a$ , содержащегося в  $A_i$ .  $\square$

*Замечание.*  $[0; 1] = \bigcap (-\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n})$  — пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открыто.

**Предложение 1.1.1.** Все открытые множества на прямой — дизъюнктные объединения интервалов.

*Доказательство.* Заметим, что  $B_r(x) = (x - r; x + r)$ .

Для каждой точки можно найти максимальный по включению интервал, содержащийся в множестве, и содержащий данную точку.

Любые два таких интервала либо уж не пересекаются, либо уж совпадают.  $\square$

## 1.2 Топологические пространства

Пусть  $X$  — произвольное множество. Рассмотрим  $\Omega \subset 2^X$ , такое, что

$$\begin{aligned} \emptyset \in \Omega; \quad X \in \Omega \\ \forall U \subset \Omega : \bigcup U \in \Omega \\ \forall U \subset \Omega : (|U| < \infty \Rightarrow \bigcap U \in \Omega) \end{aligned}$$

Тогда будем говорить, что  $\Omega$  — топологическая структура (топология) на множестве  $X$ .

**Определение 1.2.1** (Топологическое пространство  $(X, \Omega)$ ). Множество  $X$  с заданной на нём топологией  $\Omega$ .

В топологических пространствах элементы  $\Omega$  называют открытыми множествами.

### 1.2.1 Примеры топологических пространств

- Для метрического пространства  $(X, d)$  определяют *индуцированное метрикой  $d$  топологическое пространство*  $(X, \Omega_d)$  где  $\Omega_d$  — множество подмножеств  $X$ , метрически открытых в  $X$ .

Так, на прямой  $\mathbb{R}$  при рассмотрении дискретной метрики  $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ , или стандартной метрики  $d(x, y) = |x - y|$ , получаются различные топологические пространства.

Дискретную метрику можно определить на любом множестве, породится дискретная топология  $\Omega = 2^X$ .

- Антидискретная топология  $\Omega = \{\emptyset, X\}$ .
- **Определение 1.2.2** (Топология стрелки). :  $(\mathbb{R}, \Omega)$ , где  $\Omega = \{(a; +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ .

*Замечание.* Пространство при  $\Omega = \{[a; +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  не удовлетворяет второй аксиоме.

- Топология конечных дополнений: для произвольного  $X : \Omega = \{A \subset X \mid |X \setminus A| < \infty\}$ .
- На двухточечном множестве  $\{0, 1\}$  есть 4 различные топологии, из них интересна (может быть?) топология  $\Omega = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$  (или  $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ , неважно).

**Определение 1.2.3** (Замкнутое множество). Множество с открытым дополнением

**Теорема 1.2.1.** Для топологического пространства  $(X, \Omega)$

$$\begin{aligned} &\emptyset, X \text{ замкнуты} \\ &\text{пересечение замкнутых множеств замкнуто} \\ &\text{объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто} \end{aligned}$$

*Доказательство.* Следует из формулы двойственности де Моргана. □

### 1.2.2 Примеры замкнутых множеств

- В дискретной метрике все множества замкнуты, так как все (их дополнения) открыты.
- На прямой  $\mathbb{R}$  со стандартной метрикой отрезки  $[a, b]$  и точки  $\{a\}$  замкнуты.
- Хорошего вида у замкнутых множеств нет: так, Канторово множество замкнуто.

**Определение 1.2.4** (Канторов множество). Строится итеративно:

1. Берём отрезок  $[0; 1]$ .
2. Вырезаем из него средний интервал, равный трети длины  $(1/3; 2/3)$ .
3. Осталось два отрезка,  $[0; 1/3]$  и  $[2/3; 1]$ . Опять вырезаем из каждого средний интервал, равные трети длины.
4. И так далее: можно доказать по индукции, что на очередном шагу будет некоторое конечное множество непересекающихся отрезков.

Канторово множество замкнуто, так как можно взять последовательность надмножеств Канторова множества, появляющихся в определении (каждое замкнуто) и взять их пересечение.

- Точка и вообще замкнутый шар замкнуты в любом метрическом пространстве.

*Доказательство.* Несложно проверить. □

**Факт 1.2.1.** Для топологического пространства  $(x, \Omega)$   $U \setminus F = U \cap \overline{F}$  открыто, где  $U$  — открыто,  $F$  — замкнуто.

**Факт 1.2.2.** Для топологического пространства  $(x, \Omega)$   $F \setminus U = F \cap \overline{U}$  замкнуто, где  $U$  — открыто,  $F$  — замкнуто.

## 1.3 Метрики и топологии

**Определение 1.3.1** (Метризуемое топологическое пространство  $(X, \Omega)$ ). Существует метрика  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $\Omega = \Omega_d$ .

Дискретная топология метризуема, порождается дискретной метрикой.

**Факт 1.3.1.** Для  $X : |X| > 1$  антидискретная топология не является метризуемой.

*Доказательство.* Так как  $|X| > 1$ , то  $\exists x, y \in X : B_{\frac{d(x,y)}{2}}(x)$  содержит  $x$ , но не содержит  $y$ .  $\square$

**Факт 1.3.2.** Стрелка (определение 1.2.2) тоже не метризуема.

*Доказательство.* Найдётся два непустых непересекающихся шара, но в стрелке любые два непустых открытых множества пересекаются.  $\square$

**Факт 1.3.3.** Топология конечных дополнений метризуема  $\iff$  множество  $X$  конечно.

*Доказательство.*  $|X| < \infty$  — топология дискретна.

$|X| \geq \infty$  — неметризуема по той же причине, что и стрелка, любые два открытых пересекаются.  $\square$

## 1.4 Сравнение метрик и топологий

Пусть на множестве  $X$  заданы две различные топологии  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , причём  $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ . Говорят, что  $\Omega_1$  слабее (грубее)  $\Omega_2$ , или же  $\Omega_2$  сильнее (точнее)  $\Omega_1$ .

Из определения видно, что дискретная топология — самая сильная, а антидискретная — самая слабая.

**Теорема 1.4.1.** Для множества  $X$  с двумя метриками  $d_1$  и  $d_2$  топология  $\Omega_{d_1}$  слабее  $\Omega_{d_2}$ , если и только если

$$\forall B_{r_1}^{d_1}(a) : \exists r_2 : B_{r_1}^{d_1}(a) \supseteq B_{r_2}^{d_2}(a)$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Рассмотрим шар  $B_{r_1}^{d_1}(a)$ . Он открыт в первой топологии, но первая — слабее, значит, открыт во второй. Значит,  $\exists r_2 : B_{r_1}^{d_1}(a) \supseteq B_{r_2}^{d_2}(a)$

$\Leftarrow$ . Для множества  $U$ , открытого в первой топологии, найдётся объединению шаров в первой топологии, равное ему.

Из условия теоремы каждый такой шар содержит шар во второй метрике. Объединив их все, получим, что  $U$  открыто во второй топологии.  $\square$

## Лекция II

15 ноября 2022 г.

**Следствие 1.4.1.** Для двух метрик  $d_1$  и  $d_2$ , определённых на одном и том же множестве  $X$ , условие  $\forall x, y \in X : d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$  влечёт условие: топология  $(X, d_1)$  грубее топологии  $(X, d_2)$ .

**Определение 1.4.1** ((Топологически) эквивалентные метрики). Метрики, порождающие одно и то же топологическое пространство.

*Замечание.* Для  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  и метрики  $d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  функция  $Cd_1$  — тоже метрика, причём эквивалентная  $d_1$ .

*Доказательство.* Рассмотреть шары. □

*Замечание.* Метрика  $d_1$  грубее метрики  $d_2$ , если  $\exists C > 0 : \forall x, y : d_1(x, y) \leq C \cdot d_2(x, y)$ .

*Доказательство.*  $Cd_2$  эквивалентна  $d_2$  и точнее  $d_1$ . □

**Определение 1.4.2** (Липшицево эквивалентные метрики  $d_1$  и  $d_2$ ). Такие метрики, что  $\exists c, C > 0 : \forall x, y \in X : c \cdot d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq C \cdot d_2(x, y)$ .

*Замечание.* Липшицева эквивалентность влечёт топологическую эквивалентность. Обратное в общем случае неверно: метрики  $|x - y|$  и  $\sqrt{|x - y|}$  на  $\mathbb{R}$  эквивалентны лишь топологически.

Так, на прямом произведении множеств метрики

$$d((A_1, A_2), (B_1, B_2)) = \sqrt{d_1(A_1, B_1)^2 + d_2(A_2, B_2)^2}. \tilde{d}((A_1, A_2), (B_1, B_2)) = \max d_1(A_1, B_1)^2, d_2(A_2, B_2)^2.$$

билипшицево эквивалентны (что такое билипшицево эквивалентны? Тем не менее, просто липшицева эквивалентность понятна). Более точно,  $\forall x, y : \tilde{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{2}\tilde{d}(x, y)$ .

На обычной плоскости  $\mathbb{R}^2$  метрики

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

липшицево эквивалентны. Коэффициенты не превосходят 2.

## 1.5 Специальные точки множеств в топологии

Рассмотрим произвольную топологию  $(X, \Omega)$ .

### 1.5.1 Внутренность множества. Внутренние точки

**Определение 1.5.1** (Внутренность множества  $A$ ). Наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в  $A$ , как подмножество.

*Замечание.* Существование следует из того, что объединение любого количества открытых множеств открыто.

#### Свойства внутренности

- $\text{Int } A \subset A$
- Для открытого  $B : B \subset A \Rightarrow B \subset \text{Int } A$ .
- $A = \text{Int } A \iff A$  открыто.
- $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$ .
- $A \subset B \Rightarrow \text{Int } A \subset \text{Int } B$ .
- $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$ .

*Доказательство.*  $\subseteq A \cap B \subseteq A \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int } A$ .

$$\supseteq \left. \begin{array}{l} \text{Int } A \subseteq A \\ \text{Int } B \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Int } A \cap \text{Int } B \subseteq A \cap B \stackrel{\text{Int} \cap \text{Int}, \text{открыто}}{\Rightarrow} \text{Int } A \cap \text{Int } B \subseteq \text{Int}(A \cap B).$$
□

- $\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int } A \cup \text{Int } B$

*Доказательство.*  $\left. \begin{array}{l} \text{Int } A \subseteq A \\ \text{Int } B \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Int } A \cup \text{Int } B \subseteq A \cup B \stackrel{\text{Int} \cup \text{Int} \text{ открыто}}{\Rightarrow} \text{Int } A \cup \text{Int } B \subseteq \text{Int}(A \cup B).$

$\neq$  в общем случае: Для  $A = \mathbb{Q}$  и  $B = \mathbb{I}$   $\text{Int}(A \cup B) = \mathbb{R}$ , но  $\text{Int } A \cup \text{Int } B = \emptyset$ .  $\square$

**Определение 1.5.2** (Окрестность точки  $x \in (X, \Omega)$ ). Любое открытое множество, содержащее  $x$ .

**Определение 1.5.3** (Внутренняя точка). Содержится с некой своей окрестностью.

Теорема: внутренность множества — множество его внутренних точек. Доказательство: Докажем два включения.  $\forall b \in B$  рассмотрим окрестность  $U(b)$ , как внутренней точки  $A$ . Это открытое подмножество  $A$ , значит,  $U(b) \subset \text{Int } A$ . Отсюда  $B \subset \text{Int } A$ . С другой стороны, для любой точки из  $\text{Int } A$  верно, что она внутренняя — подходящей окрестностью является сама  $\text{Int } A$ .

Следствие:  $A$  открыто — все его точки внутренние.

### 1.5.2 Замыкание множества. Точки прикосновения

**Определение 1.5.4** (Замыкание множества  $A$ ). Пересечение всех замкнутых множеств, его содержащих.

Обозначается  $\text{Cl } A$  или  $\text{Clos } A$ .

*Замечание.* Замыкание — наименьшее замкнутое множество, содержащее данное.  $\text{Cl } A = \bigcap_{X \setminus \mathcal{F} \in \Omega \wedge \mathcal{F} \supset A} \mathcal{F}$

#### Свойства замыкания

- Замыкание замкнуто
- $A \subset \text{Cl } A$ .
- Для замкнутого  $B : B \supset A \Rightarrow B \supset \text{Cl } A$ .
- $A = \text{Cl } A \iff A$  — замкнуто.
- $A \subset B \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$ .
- $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$
- $\text{Cl}(A \cap B) \subset \text{Cl } A \cap \text{Cl } B$
- $\text{Cl } A = \text{Int } \overline{A}$

**Определение 1.5.5** (Точка  $x$  — точка прикосновения  $A$ ).  $\forall U(x) : U(x) \cap A \neq \emptyset$ .

**Теорема 1.5.1.** Для произвольного  $A : \text{Cl } A = \{x \in X \mid x$  — точка прикосновения  $A\}$ .

*Доказательство.*  $\text{Cl } A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$ , откуда, видно, что  $\text{Cl } A$  — действительно, множество точек, не содержащих окрестности, которая не пересекается с  $A$ .  $\square$

**Следствие 1.5.1.** Множество замкнуто  $\iff$  оно совпадает со множеством точек прикосновения.

### 1.5.3 Граница множества, граничные точки

**Определение 1.5.6** (Граница множества). Точки, лежащие в замыкании, но не во внутренности:  $\text{Fr } A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$ .

*Замечание.* Точка  $x$  — граничная для  $A$ , если любая окрестность точки  $x$  пересекается и с  $A$ , и с  $\overline{A}$ .

**Теорема 1.5.2.** Граница множества совпадает со множеством граничных точек.

*Доказательство.*

$$(x \in \text{Fr } A) \iff (x \in \text{Cl } A \wedge x \notin \text{Int } A) \iff (\forall U(b) : U(b) \cap A \neq \emptyset \wedge U(b) \cap \overline{A} \neq \emptyset) \iff x \in \text{Fr } A$$

□

### Свойства

- Граница — замкнутое множество (как пересечение  $\text{Cl } A$  и  $\overline{\text{Int } A}$ ).
- $\text{Fr } A = \text{Fr}(X \setminus A)$
- $A$  — замкнуто  $\iff A \supset \text{Fr } A$ .
- $A$  — открыто  $\iff A \cap \text{Fr } A = \emptyset$ .

### 1.5.4 Предельные, изолированные точки

**Определение 1.5.7** ( $x$  — предельная точка  $A$ ). Любая проколотая окрестность пересекается с  $A$ .

$$\forall U(x) \ni x : (U(x) \setminus x) \cap A \neq \emptyset$$

**Определение 1.5.8** ( $x$  — изолированная точка  $A$ ). Существует проколотая окрестность, не пересекающаяся с  $A$ .

$$\exists U(x) \ni x : (U(x) \setminus x) \cap A = \emptyset$$

### Свойства

- Предельные точки включают точки прикосновения.
- $\text{Cl } A = \text{Int } A \sqcup \text{Fr } A = \{\text{предельные точки } A\} \sqcup \{\text{изолированные точки } A\}$ .

## 1.6 База топологии

**Определение 1.6.1** (Для  $(X, \Omega)$   $\Sigma \subset \Omega$  — база топологии).  $\forall U \in \Omega : \exists \Gamma_U \subset U : U = \bigcup_{w \in \Gamma_U} w = \bigcup \Gamma_U$ .

*Предостережение.* База не единственна; в качестве  $\Sigma$  всегда можно рассмотреть  $\Omega$ , но хочется поменьше.

Так, для метризуемой топологии в качестве базы можно рассмотреть множество всех открытых шаров; Для топологии на прямой можно рассмотреть множество всех шаров с рациональным радиусом, или даже радиусом  $1/n$ .

**Определение 1.6.2** ( $\Gamma \subset 2^X$  — покрытие  $X$ ).  $\bigcup \Gamma = X$ .

В частности, любая база топологии — покрытие  $X$ , так как  $X$  — открыто в любой топологии.

**Теорема 1.6.1.** Для  $(X, \Omega)$   $\Sigma$  — база топологии  $\Omega \iff \forall U \in \Omega, \forall a \in U : \exists w \in \Sigma : a \in w \subset U$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Пусть  $U = \bigcup_{w \in \Gamma} w$ .

Тогда для любого  $a \in U : a$  содержится в каком-то  $w \in \Gamma$ , и, действительно,  $a \in w \subset U$ .

$\Leftarrow$ . Построим для открытого  $U \in \Omega$  множество  $\Gamma_U$  из определения базы. Согласно посылке теоремы  $\forall a \in U : \exists w_a \in \Sigma : a \in w_a \subset U$ .

Рассмотрим в качестве  $\Gamma = \{w_a\}_{a \in U}$ .

□

**Определение 1.6.3** ( $\Sigma_a$  — база топологии в точке  $a \in X$  (база окрестностей)).  $\forall w \in \Sigma_a : w \ni a$  и  $\forall U(a) : \exists w \in \Sigma_a : w \in U(a)$ .

*Замечание.* Для  $\Sigma$  — базы  $\Omega$ :  $\Sigma_a = \{w \in \Sigma \mid a \in w\}$  — база топологии в точке  $a$ .

*Замечание.* Обратно:  $\bigcup\{\Sigma_a\}$  — база топологии.

В метризируемой топологии базой точки является, например, совокупность шаров с центром в данной точке.

**Теорема 1.6.2** (Критерий базы). Рассмотрим  $\Sigma = \{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  — некоторое покрытие.

$\Sigma$  — база некоторой топологии  $\iff \forall \alpha_1, \alpha_2 : B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$  представимо, как объединение некоторого подмножества  $B$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . По определению базы топологии (пересечение открытых множеств открыто)

$\Leftarrow$ . Построим топологию  $\Omega$  над базой  $\Sigma$  и проверим, что это — топология.

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{\alpha \in S} B_\alpha \mid S \subset \Lambda \right\}.$$

1.  $\emptyset, X$  принадлежат  $\Omega$  (последнее — так как  $\Sigma$  — покрытие  $X$ ).

2. Объединение двух множеств из  $\Omega$  очевидно принадлежит  $\Omega$ .

3. Проверим, что пересечение двух множеств из  $\Omega$  принадлежит  $\Omega$ .

Пусть  $U_1 = \bigcup_{\alpha \in S_1} B_\alpha, U_2 = \bigcup_{\alpha \in S_2} B_\alpha$ . Несложно видеть, что  $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha_1 \in S_1, \alpha_2 \in S_2} (B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2})$ .

Но согласно свойству, что пересечение элементов  $\Sigma$  является объединением некоторого его подмножества, автоматически получаем, что  $U_1 \cap U_2$  — объединение некоторого подмножества  $\Sigma$ .

□

Для покрытия  $\Sigma$ , удовлетворяющему условию теоремы, обозначим топологию, задаваемую  $\Sigma$  следующим образом:  $\Omega(\Sigma)$ .

*Замечание.*  $\Omega(\Sigma)$  — наименьшая по включению топология, содержащая  $\Sigma$ . (Наименьшая по включению топология существует, так как пересечение топологий — топология).

Построим топологию из произвольного набора подмножеств  $\Delta \subset 2^X$ . Тогда построим  $\Sigma(\Delta)$ , как все конечные пересечения элементов  $\Delta$  (и само множество  $X$ ).

$$\Sigma(\Delta) = \{X\} \cup \left\{ \bigcap_{i=1}^k \mid k_i \in \mathbb{N}, w_i \in \Delta \right\}$$

Такая база топологии  $\Sigma(\Delta)$  удовлетворяет критерию базы, на ней можно построить топологию  $\Omega(\Sigma(\Delta))$ .

Такая  $\Delta$  называется *предбазой* — множество подмножеств такое, что база — объединение конечных пересечений его элементов.

*Замечание.*  $\Delta$  — предбаза топологии  $\Omega$ , если  $\Omega$  — наименьшая по включению топология, содержащая  $\Delta$ .

## 1.7 Подпространства

Рассмотрим  $A \subset X$  для топологического пространства  $(X, \Omega)$ . Обозначим  $\Omega_A = \{U \cap A \mid U \in \Omega\}$ . Такая  $\Omega_A$  — топология, индуцированная на подпространстве  $A$ .

Несложно убедиться, проверив три аксиомы, что  $\Omega_A$  — топология на множестве  $A$ .

# Лекция III

22 ноября 2022 г.

### 1.7.1 Свойства подпространства

- Множество, открытое в подпространстве, необязательно открыто. Так, подпространство всегда открыто в себе.
- Тем не менее, в открытом подпространстве открытые подмножества исходно открыты.
- Для  $\Sigma$  — базы исходной топологии — можно определить базу для подпространства  $A$ , как  $\Sigma_A = \{A \cap U \mid U \in \Sigma\}$ .
- Пусть  $B \subset A \subset X$ . Тогда топологии  $\Omega_B$  и  $(\Omega_A)_B$  совпадают.

Пусть  $A \subset X$ , где на  $X$  определена метрика  $d$ .

На  $A$  можно ввести топологию двумя способами:

1. Топология, индуцированная на метрике-сужении  $d|_A$ , называется  $\Omega_{d_A}$
2. Подпространство топологии  $(X, \Omega_d)$ . Для данной теоремы назовём её  $\Omega_A^X$ .

**Теорема 1.7.1.** Эти топологии совпадают.

*Доказательство.* Проверим, что для всякой пары {точка; открытое множество, её содержащее} из первой топологии, точка содержится в меньшем по включении открытом множестве из второй топологии. И наоборот.

Так как про обе конструкции понятно, что они являются топологиями, то этой проверки будет достаточно.

- $\Omega_{d_A} \subseteq \Omega_A^X$ .

Зафиксируем точку  $a \in A$  и открытое множество  $U \in \Omega_{d_A}$  ( $a \in U$ ). Так как  $\Omega_{d_A}$  — индуцирована на метрике, то  $a$  содержится с неким открытым шаром радиуса  $r$  внутри  $U$ .

Этот же шар содержится в исходной топологии  $\Omega$

- $\Omega_{d_A} \subseteq \Omega_A^X$ .

Зафиксируем точку  $a \in A$  и открытое множество  $U \in \Omega_A^X$  ( $a \in U$ ).

$U = V \cap A$  для некоего  $V \in \Omega$ . В множестве  $V : a$  содержится вместе с неким шаром радиуса  $r$ .

В топологии  $\Omega_A^X$  есть как раз пересечение этого шара и множества  $A$  (так как этот шар был в  $\Omega$ ).

*Вроде бы доказательство правильное, на лекции было что-то странное, я, к сожалению, как раз отвлёкся, поэтому вышенаписанное — частично моя импровизация. Тем не менее, не понимаю, почему на доске была разность каких-то радиусов.*

□

## 1.8 Произведение метрических пространств

Пусть даны метрически пространства  $(X, \Omega_X)$  и  $(Y, \Omega_Y)$ .

Положим  $\Sigma := \{U \times V \mid U \in \Omega_X, V \in \Omega_Y\}$ .

**Теорема 1.8.1.**  $\Sigma$  — база некой топологии.

*Доказательство.* Проверим критерий базы.

$$\forall (u_1 \times v_1), (u_2 \times v_2) \in \Sigma : (u_1 \times v_1) \cap (u_2 \times v_2) = (u_1 \cap u_2) \times (v_1 \cap v_2).$$

Данная формула красиво обосновывается через пересечение прямоугольников.

Из свойства топологии  $u_1 \cap u_2 \in \Omega_X$  и  $v_1 \cap v_2 \in \Omega_Y$ .  $\square$

**Определение 1.8.1** (Стандартная топология на произведении пространств). Топология, построенная на базе  $\Sigma$ , определённой выше.

*Пример.* Пусть  $\Omega$  — множество метрически открытых множеств в  $\mathbb{R}$ .

Тогда стандартная топология на  $(\mathbb{R}, \Omega) \times (\mathbb{R}, \Omega)$  — стандартная топология плоскости.

*Доказательство.* В базе  $\Sigma$  содержится «открытый квадрат» с данным центром и сколь угодно малым радиусом  $\square$

*Замечание.* Перемножать можно не сами топологии, а их базы  $\Sigma_X$  и  $\Sigma_Y$ , всё равно будет база стандартной топологии произведения  $\Sigma = \{u \times v \mid u \in \Sigma_X, v \in \Sigma_Y\}$ .

Рассмотрим два метрических пространства  $(X, d_x)$  и  $(Y, d_y)$ . На их произведении  $X \times Y$  топологию можно ввести двумя способами:

1. Индуцировать топологию на стандартной метрике произведения пространств  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_x(x_1, x_2)^2 + d_y(y_1, y_2)^2}$ .
2. Перемножить, как топологические пространства  $(X, \Omega_{d_x})$  и  $(Y, \Omega_{d_y})$ .

**Теорема 1.8.2.** Эти топологии совпадают.

*Доказательство.* Вместо  $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$  будем рассматривать её липшицево эквивалентную (определение 1.4.2) метрику  $\tilde{d} = \max\{d_1, d_2\}$ . Она индуцирует ту же топологию.

Заметим, что эта топология порождается базой  $\Sigma = \left\{ B_r^\tilde{d}((x, y)) \mid x \in X, y \in Y, r \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$ .

Но  $\Sigma = \left\{ B_r^\tilde{d}((x, y)) \mid x \in X, y \in Y, r \in \mathbb{R}_{>0} \right\} = \left\{ B_r^{d_x}(x) \times B_r^{d_y}(y) \mid x \in X, y \in Y, r \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$ .

Теперь видно, что  $\Sigma$  является базой  $(X, \Omega_{d_x}) \times (Y, \Omega_{d_y})$  тоже. В самом деле, если перемножить базы — открытые шары в  $d_x$  и  $d_y$ , то получится база  $\Sigma' = \left\{ B_{r_1}^{d_x}(x) \times B_{r_2}^{d_y}(y) \mid x \in X, y \in Y, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$ . Но — так как можно взять из радиусов наименьший — мы поймём, что  $\Omega_{\Sigma'} = \Omega_\Sigma$ .  $\square$

### 1.8.1 Тихоновская топология прямого произведения бесконечного числа пространств

Рассмотрим множество пространств, проиндексированное  $\Lambda$ :  $\{(X_\alpha, \Omega_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ .

**Определение 1.8.2** (Прямое произведение множеств  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ).

Множество функций  $X = \left\{ x \in \left( \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \right)^\Lambda \mid \forall \alpha \in \Lambda : x(\alpha) \in X_\alpha \right\}$ .

**Определение 1.8.3** (Координатная проекция). Функция  $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ :  $p_\alpha(x) = x(\alpha)$ .

**Определение 1.8.4** (Цилиндр). Подмножество произведения, открытое в одном сомножителе, и совпадающее с другими. Формально,  $p_\alpha^{-1}(U)$  для некоего  $\alpha \in \Lambda$  и  $U \in \Omega_\alpha$ .

**Определение 1.8.5** (Тихоновская топология произведения пространств  $\{(X_\alpha, \Omega_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ). Топология строится с помощью предбазы  $\Delta := \{p_\alpha^{-1}(U) \mid \alpha \in \Lambda, U \in \Omega_\alpha\}$ .

*Замечание.* Для  $|\Lambda| < \infty$  топология совпадает с ранее определённой.

## Глава 2

# Непрерывные отображения

### 2.1 Свойства образа и прообраза

Задана функция  $f : X \rightarrow Y$ .

**Определение 2.1.1** (Образ  $A \subset X$ ).  $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(a) \mid a \in A\}$ .

**Определение 2.1.2** (Прообраз  $B \subset Y$ ).  $f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in B\}$ .

1. Прообраз объединения — объединение прообразов  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .
2. Прообраз пересечения — пересечение прообразов  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .
3. Прообраз дополнения — дополнение прообраза  $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ .
4. Образ объединения — объединение образов  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
5. Образ пересечения **содержится в** пересечении образов  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ .

*Контрпример.*  $f : x \mapsto x \pmod{2}$ .

$$\{1\} = f(\{0, 1\} \cap \{1, 2\}) \subseteq f(\{0, 1\}) \cap f(\{1, 2\}) = \{0, 1\}$$

**Определение 2.1.3** (Тождественное отображение).  $\text{id}_X : X \rightarrow X; \quad x \mapsto x$ .

**Определение 2.1.4** (Вложение  $A \subset X$  в  $X$ ).  $\text{in}_{A \rightarrow X} : A \rightarrow X; \quad x \mapsto x$ .

### 2.2 Непрерывность отображения

Пусть  $X, Y$  — топологические пространства.

**Определение 2.2.1** (Непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$ ). Отображение, в открытые множества переводящее только открытые множества.  $\forall U \in \Omega_Y : f^{-1}(U) \in \Omega_X$ .

*Замечание.* Применив дополнение, очевидно, что альтернативным определением является то же про замкнутые множества:  $\forall V \notin \Omega_Y : f^{-1}(V) \notin \Omega_X$

*Пример.*  $\text{id}_X$  непрерывно: прообраз всякого открытого множества открыт.

*Пример.*  $f(x) = c$  — постоянное отображение — непрерывно: прообраз всякое множества открыт (либо  $X$ , либо  $\emptyset$ ).

*Пример.* Если в  $X$  много открытых множеств, или в  $Y$  мало, то  $f : X \rightarrow Y$  непрерывна. Так, непрерывны функции, определённые на дискретном  $X$  и/или действующие в антидискретное  $Y$ .

*Замечание.* Если  $X_2$  тоньше  $X_1$ , а  $Y_2$  грубее  $Y_1$ , то  $f : X_1 \rightarrow Y_1$  непрерывна  $\Rightarrow f : X_2 \rightarrow Y_2$  непрерывна.

**Теорема 2.2.1.** Композиция непрерывных функций непрерывна.

Так, пусть  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : W \rightarrow X$ .

*Доказательство.*  $\forall U \in \Omega_W : g^{-1}(U) \in \Omega_X \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Omega_Y$ .  $\square$

**Следствие 2.2.1.** Если  $f$  непрерывна, то её сужение  $f|_W$  непрерывно.

*Доказательство.* Рассмотреть  $g = \text{in}_{W \rightarrow X}$ .  $\square$

Пусть  $f : X \rightarrow Y$ , а множество  $Z$  таково, что  $f(x) \subset Z \subset Y$ .

Положим  $\tilde{f} : X \rightarrow Z$ ,  $\tilde{f}(x) = f(x)$ .

**Теорема 2.2.2.**  $f$  непрерывна  $\iff \tilde{f}$  непрерывна.

*Доказательство.*  $\Rightarrow. f = \text{in}_Z \circ \tilde{f}$

$\Leftarrow.$  Всякое открытое множество в  $Z$  имеет вид  $w = u \cap Z$  для некоего  $U \in \Omega_Y$ .

$$f^{-1}(w) = f^{-1}(u) \cap f^{-1}(Z) = f^{-1}(u)$$

$\square$

## 2.3 Локальная непрерывность

**Определение 2.3.1** ( $f : X \rightarrow Y$  непрерывна в  $a \in X$ ).  $\forall U \ni f(a) : \exists V \ni a : f(V) \subseteq U$ .

**Теорема 2.3.1.** Функция  $f$  непрерывна  $\iff$  во всякой точки области определения функция непрерывна.

*Доказательство.*  $\Rightarrow.$  Очевидно из определений.

$\Leftarrow.$  Рассмотрим  $U \in \Omega_Y$ . Проверим, что  $f^{-1}(U)$  открыто.  $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V(x)$ , где  $V(x)$  — окрестность точки  $x$ , содержащая образ в  $U$ . Объединение открытых — открыто. значит,  $f^{-1}(U)$  в самом деле открыто.  $\square$

*Замечание.* Условие локальной непрерывности можно проверять не на всех открытых множествах, а только на базах окрестностей  $\Sigma_a$  и  $\Sigma_{f(a)}$ .

**Следствие 2.3.1.** Для метрических пространств  $X, Y$  удобно рассмотреть в качестве базы множество открытых шаров. Определение непрерывности в таком случае переписывается так:

$f$  непрерывна в точке  $a$ :  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(B_\delta^{d_X}(a)) \subset B_\varepsilon^{d_Y}(f(a))$ .

$f$  непрерывна в точке  $a$ :  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : d_X(x - a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x) - f(a)) < \varepsilon$ .

Узнали? Согласны?

**Определение 2.3.2** (Липшицово отображение между метрическими пространствами). Такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , что  $\exists C \in \mathbb{R}_{>0} : \forall a, b \in X : d_Y(f(a), f(b)) \leq C \cdot d_X(a, b)$ .

Константа  $C$  из определения — константа Липшица. Отображение, липшицевое с константой  $c$  называется  $c$ -липшицевым.

**Теорема 2.3.2.** Липшицово отображение непрерывно.

*Доказательство.* Легко проверить, что оно непрерывно в любой точке.  $\square$

Примеры.

- Пусть  $x_0 \in X$ . Положим  $d_{x_0}(y) \stackrel{\text{def}}{=} d(x_0, y)$ . Утверждается, что  $d_{x_0}$  — 1-липшицево.
- Более общий случай: пусть  $A \subset X$ . Положим  $d_A(y) \stackrel{\text{def}}{=} d(A, y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A} d(a, y)$ . Утверждается, что  $d_A$  — 1-липшицево.

*Доказательство.* По определению инфимума  $\forall \tau > 0 : \exists a_y \in A : d(y, a_y) < d(y, A) + \tau$ .

Тогда  $d(x, A) \leq d(x, a_y) \leq d(x, y) + d(y, a_y) \leq d(x, y) + d(y, A) + \tau$  — дважды применили неравенство треугольника.

Используя  $\forall \tau > 0 : d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) + \tau$ , получаем  $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ .

Аналогично-симметрично  $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$ , то есть  $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ .  $\square$

- Пусть  $d$  — произвольная метрика на  $X$ .  $d : X \times X \rightarrow R$ . Утверждается, что  $d$  — липшицево отображение.

Коэффициент зависит от того, как определена метрика на произведении. Для  $d = \sqrt{d_X^2 + d_Y^2}$  этот коэффициент равен  $\sqrt{2}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим две произвольные точки из области определения:  $(a, b), (x, y) \in X \times X$ .

Без потери общности предположим, что  $d(x, y) \geq d(a, b)$ . В таком случае  $|d(x, y) - d(a, b)| = d(x, y) - d(a, b)$ .

$d(x, y) - d(a, b) \leq d(x, a) + d(a, y) - d(a, b) \leq d(x, a) + d(y, b) \leq \sqrt{2}\sqrt{d(x, a)^2 + d(y, b)^2}$ , что по определению равно  $\sqrt{2} \cdot d((x, y), (a, b))$ .

Здесь мы воспользовались двумя неравенствами треугольника, а также тем, что  $s + t \leq \sqrt{2}\sqrt{s^2 + t^2}$ , что очевидно после возвведения в квадрат.  $\square$

## Лекция IV

26 ноября 2022 г.

### 2.4 Гомеоморфизмы

**Определение 2.4.1** (Гомеоморфизм). Непрерывное отображение  $f : (X, \Omega_X) \rightarrow (Y, \Omega_Y)$ , такое, что  $f$  — биекция, причём  $f^{-1}$  — тоже непрерывно.

Если между  $(X, \Omega_X)$  и  $(Y, \Omega_Y)$  существует гомеоморфизм, то говорят, что  $(X, \Omega_X)$  гомеоморфно  $(Y, \Omega_Y)$ , пишут  $(X, \Omega_X) \sim (Y, \Omega_Y)$ .

**Теорема 2.4.1.** Гомеоморфность — отношение эквивалентности на множестве топологических пространств.

*Доказательство.*

- $\text{id}$  — гомеоморфизм.
- Если  $f$  — гомеоморфизм, то  $f^{-1}$  — гомеоморфизм.
- Композиция гомеоморфизмов — гомеоморфизм.  $\square$

*Примеры.*

- $X = \{a, b\}$ . Для топологий  $\Omega_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$  и  $\Omega_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$   $(X, \Omega_1) \sim (X, \Omega_2)$ . Гомеоморфизм — функция  $f(x) = \begin{cases} a, & x = b \\ b, & x = a \end{cases}$ .
- Всякие два отрезка с одинаковым типом концом гомеоморфны:  $[a, b] \sim [c, d]$ . Можно построить непрерывное линейное отображение.

- $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$ . В качестве непрерывного отображения может выступать функция  $y = \tan(x)$ .
- На плоскости  $\mathbb{R}^2$  всякие два шара (два открытых, или два замкнутых) гомеоморфны.
- Квадрат гомеоморфен кругу: можно рассмотреть отображение, линейно переводящее «радиусы» в радиусы.
- *Интересный факт.* Более того, всякие два выпуклых непустых замкнутых множества гомеоморфны друг другу.
- $S^n \setminus \{\text{точка}\} \sim \mathbb{R}^n$ .  $S^n$  — стандартная сфера в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , так,  $S^1$  — окружность.

*Доказательство.* Рассмотрим сферу, а на ней — два полюса  $A$  и  $B$ . Проведём касательную плоскость  $\alpha$  через точку  $B$ ; всякой точке  $C \in S^n$  сопоставим пересечение луча  $AC$  и плоскости  $\alpha$ .

Проверить, что это гомеоморфизм, можно с помощью инверсии с центром в точке  $O$  (центр сферы) и радиусом  $R$  (радиус сферы).

Применив инверсию к плоскости  $\alpha$ , получим сферу, построенную на  $BO$ , как на диаметре.

Таким образом, после сужения инверсии, получается отображение из плоскости в сферу без точки.

Доказательство того, что инверсия непрерывна, будет чуть позже.  $\square$

- Круг без точки гомеоморфен кольцу — кругу без круга. Опять же, отображение линейно переводит радиусы в радиусы.
- Если из пространства выкинуть окружность, то это будет то же самое, что и выкинуть прямую и точку.

$$\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \sim \mathbb{R}^3 \setminus (R^1 \cup \{\text{точка вне прямой}\})$$

- Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизму:  $f : [0; 2\pi) \rightarrow S_1$ , такая, что  $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$ .

Обратное отображение не является непрерывным, так как  $[0; 1)$  открыто в  $[0; 2\pi)$ , но  $f([0; 1))$  — отнюдь не открытое подмножество окружности.

## 2.5 Фундаментальные покрытия

**Определение 2.5.1** (Фундаментальное покрытие пространства  $X$ ). Такое покрытие  $\Gamma = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  топологического пространства  $(X, \Omega)$ , что

$$\forall u \subset X : (u \in \Omega \iff \forall \alpha \in \Lambda : u \cap A_\alpha \in \Omega_{A_\alpha})$$

*Замечание.* Аналогично можно рассмотреть не открытые, а замкнутые множества:  $F$  замкнуто в  $X \iff \forall \alpha : F \cap A_\alpha$  замкнуто в  $A_\alpha$ .

**Теорема 2.5.1.** Пусть  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  — фундаментальное покрытие  $X$ .

Если  $f : X \rightarrow Y$  таково, что  $\forall \alpha : f|_{A_\alpha}$  — непрерывно, то само  $f$  — непрерывно.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное открытое множество  $u \in \Omega_Y$ . Докажем, что  $f^{-1}(u) \in \Omega_X$ .

Для произвольного  $\alpha \in \Lambda$ :

$$(f|_{A_\alpha})^{-1}(u) \in \Omega_{A_\alpha} \Rightarrow f^{-1}(u) \cap A_\alpha \in \Omega_{A_\alpha}$$

откуда по определению фундаментального покрытия  $f^{-1}(u) \in \Omega_X$ .  $\square$

**Контрпример.** Для  $X = [0; 1]$  можно рассмотреть покрытие  $[0; 1) = [0; \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}; 1)$ . Оно не является фундаментальным, так как  $f(x) = \{x\}$  — взятие дробной части — не непрерывно, хотя непрерывно на каждом полуинтервале из покрытия.

В то же время покрытие  $[0; 1) = [0; \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; 1)$  — фундаментально (например, см. (теорема 2.5.2)).

**Определение 2.5.2** (Открытое покрытие). Такое покрытие, что все его элементы открыты в  $X$ .

**Определение 2.5.3** (Замкнутое покрытие). Такое покрытие, что все его элементы замкнуты в  $X$ .

**Определение 2.5.4** (Локально конечное покрытие).  $\forall x \in X : \exists V_x \in \Omega_X : x \in V_x$  такая, что она пересекает конечное число элементов покрытия:  $\{\alpha \in \Lambda \mid V_x \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$  конечно.

**Теорема 2.5.2.**

1. Открытое покрытие фундаментально.
2. Конечное замкнутое покрытие фундаментально.
3. Локально конечное замкнутое покрытие фундаментально.

*Доказательство.* 1. Рассмотрим произвольное множество  $U \subset X$ . Если  $\forall \alpha \in \Lambda : A_\alpha \cap U \in \Omega_{A_\alpha}$ , то — по тривиальному свойству топологии, индуцированной на открытом множестве —  $\forall \alpha \in \Lambda : A_\alpha \cap U \in \Omega_X$ . В таком случае  $U$  можно представить, как объединение всех таких частей.

2. Рассмотрим произвольное множество  $U \subset X$ . Если  $\forall \alpha \in \Lambda : A_\alpha \cap U \in \Omega_{A_\alpha}$ , то дополнение  $A_\alpha \cap (X \setminus U)$  замкнуто в  $A_\alpha$ . По тривиальному свойству замкнутой индуцированной топологии получаем, что  $X \setminus U$  замкнуто во всех  $A_\alpha$ .

В таком случае  $X \setminus U$  можно представить, как объединение всех таких частей (объединение конечного числа замкнутых — замкнуто). Значит,  $U$  открыто.

3. Зафиксируем для каждой точки окрестность  $V_x$ , пересекающую конечное число элементов покрытия — из определения локальной конечности.

Рассмотрим произвольное множество  $U \subset X$ . Несложно видеть, что  $U = \bigcup_{x \in U} (U \cap V_x)$ .

Если все эти части открыты в  $V_x$ , где — после сужения — конечные замкнутые покрытия, то, объединив их все, получаем, что и само  $U$  открыто.  $\square$

## 2.6 Непрерывность и произведение пространств

Рассмотрим  $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  — произведение топологических пространств.

**Теорема 2.6.1.** Координатные проекции  $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$  (определение 1.8.3) непрерывны.

*Доказательство.* Всякое множество  $U \in \Omega_{X_\alpha}$  такого, что  $p_\alpha^{-1}(U)$  открыто — по определению, как элемент предбазы  $\prod X_\alpha$ .  $\square$

**Определение 2.6.1** (Координатная компонента  $f$ ). Пусть  $f : Z \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ . Тогда компонентой  $f$  по координате  $\alpha$  называется  $f_\alpha = p_\alpha \circ f$ .

**Теорема 2.6.2.**  $f : Z \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  непрерывно  $\iff \forall \alpha : f_\alpha$  непрерывно.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Композиция  $p_\alpha \circ f$  непрерывна.

$\Leftarrow$ . Проверим, что  $f$  непрерывна на элементах предбазы: прообразы  $\forall U$  — открытым в произведении —  $: p_\alpha^{-1}(U) \in \Omega_{X_\alpha}$ .

Воспользуемся тем, что  $p_\alpha^{-1}(U)$  открыт (по определению топологии произведения). Кроме этого,  $f^{-1}(p_\alpha^{-1}(U))$  тоже открыто, как прообраз открытого в  $f$ .

Значит,  $f^{-1}(p_\alpha^{-1}(U)) = (p_\alpha \circ f)^{-1}(U)$  — открыто, откуда  $p_\alpha \circ f$  непрерывно.  $\square$

*Контрпример.* «Обратное» неверно: не факт, что если  $f : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow Y$  непрерывно на всех проекциях, то оно непрерывно.

Так, можно рассмотреть  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$ .

Такая функция непрерывна в сужении на любую прямую (в том числе и координатную), но не непрерывна:

*Доказательство.* • — Для всякой прямой, не проходящей через 0 ( $y = kx + b$  или  $x = b$ , где  $b \neq 0$ ) сужение функции на эту прямую имеет определённую формулу — частное многочленов, где знаменатель строго положителен. Она непрерывна.

- Сужение на прямую  $x = 0$  даёт  $f(0, x) = 0$ .
- Наконец, для прямых  $y = kx$  сужение даёт функцию  $f(x, kx) = \frac{k^2 x^3}{x^2 + k^4 x^4} = \frac{k^2 x}{1 + k^4 x^2}$  при  $x \neq 0$ . Не в нуле функция понятно, что непрерывна; в нуле  $\frac{kx}{1 + k^4 x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- Несмотря на всё это, если сузить функцию на параболу  $x = y^2$ , то окажется, что  $f(y^2, y) = 1/2$  при  $y \neq 0$ , однако  $y = 0$  при  $y = 0$ . Эта функция непрерывной уже не является.  $\square$

## 2.7 Арифметические операции над непрерывными функциями

**Теорема 2.7.1.** Функции  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны, где  $f(x, y) = x + y$  или  $f(x, y) = x - y$ , или может быть  $f(x, y) = x \cdot y$ . (Доказываем для трёх функций)

*Доказательство.* •  $f(x, y) = x + y$ . Проверим непрерывность в точке: рассмотрим открытый шар  $B_\varepsilon(x_0 + y_0)$ . Докажем, что в его прообразе есть окрестность  $(x_0, y_0)$ .

Для этого возьмём  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ . Несложно видеть, что  $f(B_\delta(x_0), B_\delta(y_0)) \subset B_\varepsilon(x_0 + y_0)$ :

$$\forall x \in B_\delta(x_0), y \in B_\delta(y_0) : |x_0 + y_0 - x - y| \leq |x_0 - x| + |y_0 - y| \leq \delta + \delta = \varepsilon$$

- Аналогично.
- $f(x, y) = x \cdot y$ . Проверим непрерывность в точке: рассмотрим открытый шар  $B_\varepsilon(x_0 \cdot y_0)$ . Докажем, что в его прообразе есть окрестность  $(x_0, y_0)$ .

Пусть  $c = \max\{|x_0|, |y_0|\}$ .

Для этого возьмём  $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{3c}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\}$ .

$$\forall x \in B_\delta(x_0), y \in B_\delta(y_0) : |x \cdot y - x_0 \cdot y_0| \leq |(x \pm \delta)(y \pm \delta) - x_0 \cdot y_0| \leq |x_0 \delta| + |y_0 \delta| + |\delta^2| \leq \varepsilon$$

$\square$

**Следствие 2.7.1.** В топологическом пространстве  $(X, \Omega)$  для непрерывных функций  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  верно, что  $f + g, f - g$  и  $f \cdot g$  — тоже непрерывны.

*Доказательство.* Пусть функция  $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  определена так:  $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ . Она непрерывна, так как проекции непрерывны;

тогда

$$\begin{aligned}f + g &= (x + y) \circ (f, g) \\f - g &= (x - y) \circ (f, g) \\f \cdot g &= (x \cdot y) \circ (f, g)\end{aligned}$$

непрерывны, как композиции.

□

**Следствие 2.7.2.** В топологическом пространстве  $(X, \Omega)$  для непрерывных функций  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  верно, что  $\frac{f}{g}$  — тоже непрерывна на своей области определения (где  $g$  не обращается в 0).

*Доказательство.* Рассмотрим  $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $h(x) = \frac{1}{x}$ . Как известно из матанализа, она непрерывна.

Тогда  $\frac{1}{g} = h \circ g$  и  $\frac{f}{g} = f \cdot (h \circ g)$ .

□

## 2.8 Топологические свойства

Как доказать, что два топологических пространства не являются гомеоморфными?

При гомеоморфизме сохраняются некоторые свойства. Если эти свойства различны, то пространства заведомо не гомеоморфны.

**Определение 2.8.1** (Топологическое свойство). Свойство, которое пространства сохраняют при гомеоморфизме.

Пространство может обладать или не обладать некоторым свойством.

**Определение 2.8.2** (Топологический инвариант). Характеристика, которую пространства сохраняют при гомеоморфизме.

Какое-то число, например.

### 2.8.1 Аксиомы счётности

Ниже для краткости будем называть счётными *не более, чем счётные* множества.

**Определение 2.8.3** (Первая аксиома счётности, AC1). Топологическое пространство  $X$  удовлетворяет первой аксиоме счётности, если у любой точки существует счётная база.

Любое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности: можно взять у всякой точки открытые шары с центром в ней и радиусом  $\frac{1}{n}$ .

**Определение 2.8.4** (Вторая аксиома счётности, AC2). Топологическое пространство  $X$  удовлетворяет второй аксиоме счётности, если у него существует счётная база.

**Теорема 2.8.1.** Из второй аксиомы счётности следует первая: в качестве базы точки можно взять все открытые множества, содержащие её:  $\Sigma_a = \{U \in \Sigma \mid a \in U\}$ .

**Определение 2.8.5** (Наследственное топологическое свойство). Если всё пространство  $X$  обладает свойством, то всегда любое его подпространство обладает этим же свойством.

**Определение 2.8.6** (Наследование свойства для произведения). Если два пространства  $X$  и  $Y$  обладают свойством, то всегда  $X \times Y$  тоже этим свойством обладает.

**Факт 2.8.1.** Вторая аксиома счётности — наследственное свойство. Вторая аксиома счётности наследуется подпространством: если  $\Sigma$  — счётная база, то

$$\Sigma_A \stackrel{\text{def}}{=} \{U \cap A \mid U \in \Sigma\}$$

тоже счётна.

Вторая аксиома счётности наследуется и для произведения: для базы в точке  $(x, y)$  достаточно взять базу  $\Sigma_{(x,y)} = \Sigma_x \times \Sigma_Y$

# Лекция V

29 ноября 2022 г.

*Замечание.*  $\mathbb{R}$  удовлетворяет второй аксиоме счётности: можно рассмотреть в качестве базы шары радиусом  $\frac{1}{n}$  с рациональными центрами.

Отсюда следует, что второй аксиоме счётности удовлетворяют и все подпространства  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема 2.8.2** (Линделёф). Если  $X$  удовлетворяет второй аксиоме счётности, то из любого покрытия можно выделить счётное подпокрытие.

*Доказательство.* Рассмотрим покрытие  $U : \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = X$ .

Обозначим в качестве  $S := \{v \in \Sigma \mid \exists \alpha \in \Lambda : v \subset U_\alpha\}$ .

$S$  — покрытие, так как всякая точка лежит в  $U_\alpha$  вместе с неким множеством из базы.

Теперь для каждого  $s \in S$  сопоставим один любой элемент из  $U$ , содержащий  $s$ . Таким образом мы выделим счётное подпокрытие.  $\square$

## 2.8.2 Сепарабельные пространства

**Определение 2.8.7** ( $A \subset X$  всюду плотно).  $\text{Cl } A = X$

*Замечание.* Это значит, что всякая точка пространства — точка прикосновения  $A$ , то есть  $\forall U \in \Omega_X \setminus \{\emptyset\} : U \cap A \neq \emptyset$ .

**Определение 2.8.8** (Сепарабельное пространство). Пространство, в котором есть всюду плотное счётное множество.

*Пример.*  $\mathbb{R}$  сепарабельно:  $\mathbb{Q}$  — всюду плотное счётное подмножество.

**Теорема 2.8.3.** 1. Из второй аксиомы счётности следует сепарабельность.

2. В метрических пространствах из сепарабельности следует вторая аксиома счётности.

*Доказательство.* 1. Сопоставим всякой  $v \in \Sigma$  одну из её точек. Это всюду плотное множество.

2. Рассмотрим  $\Sigma = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in A; n \in \mathbb{N} \right\}$ , где  $A$  — всюду плотное счётное множество.

Проверим, что  $\Sigma$  — база. Для этого рассмотрим любую точку и любое открытое множество, её содержащее  $b \in U \in \Omega$ .

Проверим, что существует шар  $B$  из базы, такой, что  $b \in B \subset U$ . Пространство метрическое, есть достаточно большое  $k \in \mathbb{N}$ : шар  $B_{\frac{1}{k}}(b)$ , содержащийся в  $U$ .

Тогда  $\exists a \in B_{\frac{1}{k}} \cap A : d(a, b) < \frac{1}{2k}$ , так как  $A$  — всюду плотно.

Теперь понятно, что шар  $b \in B_{\frac{1}{2k}}(a)$ , и что этот шар — из базы.  $\square$

## 2.8.3 Аксиомы отделимости

### Первая аксиома отделимости

**Определение 2.8.9** (Пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости, T1).  $\forall x, y \in X : \exists U_x \in \Omega : x \in U_x \not\ni y$ .

**Теорема 2.8.4.** Пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости  $\iff$  все одноточечные множества замкнуты.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Рассмотрим  $x \in X$ . Проверим, что  $X \setminus \{x\}$  открыто. Рассмотрим  $\forall y \in X \setminus \{x\}$ . Для всякого  $y$  он лежит в  $X \setminus \{x\}$  вместе с некоторой окрестностью по отделимости от  $x$ . Значит,  $\{x\}$  замкнуто.

$\Leftarrow$ . В качестве отделяющего множества для  $x$  и  $y$  можно взять  $X \setminus \{y\}$ .  $\square$

### Вторая аксиома отделимости

**Определение 2.8.10** (Пространство удовлетворяет второй аксиоме отделимости, Т2).  $\forall x, y \in X : \exists U_x \ni x, U_y \ni y : U_x \cap U_y = \emptyset$ . Разумеется,  $U_x, U_y \in \Omega$ .

По-другому такие пространства называются хаусдорфовыми.

**Факт 2.8.2.** Любой метрический пространство Хаусдорфово — для точек  $x$  и  $y$  можно рассмотреть шары радиусом  $d(x, y)/2$ .

**Теорема 2.8.5.** Пространство Хаусдорфово  $\iff$  диагональ  $\{(a, a) \mid a \in X\}$  замкнута в  $X \times X$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Пусть  $\Delta$  — диагональ. Докажем, что дополнение к  $\Delta$  открыто. Рассмотрим  $(a, b) \in (X \times X) \setminus \Delta$ . Из определения Хаусдорфовости  $\exists U_a, U_b \in \Omega$ , отделяющие  $a$  и  $b$ . Но тогда  $U_a \times U_b$  с одной стороны открыто, а с другой — не пересекается с диагональю.

$\Leftarrow$ . Диагональ замкнута, значит,  $(X \times X) \setminus \Delta$  открыто. Рассмотрим  $a, b \in X$ .  $(X \times X) \setminus \Delta$  открыто, значит,  $\exists U_a \times U_b$ , открытое в произведении — элемент базы произведения, содержащий  $(a, b)$ . Получается,  $U_a$  и  $U_b$  отделяют  $a$  и  $b$ .  $\square$

### Третья аксиома отделимости

**Определение 2.8.11** ( $X$  удовлетворяет третьей аксиоме отделимости, Т3).  $\forall \mathcal{F}$  — замкнутого множества, и  $\forall x \notin \mathcal{F}$ : существуют окрестности  $U_x \ni x$  и  $U_{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$ , их отделяющие.

**Теорема 2.8.6.** Пространство удовлетворяет Т3  $\iff \forall x \in X, \forall U_x \in \Omega : \exists V_x \in \Omega$  — подокрестность, такая, что  $\text{Cl } V_x \subset U_x$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Найдём для точки  $x$  и окрестности  $U_x \ni x$  подходящую  $V_x$ . Для этого применим третью аксиому отделимости для  $\{x\}$  и  $X \setminus U_x$ .

Пусть нашлись окрестности  $V_x$  и  $W \supset X \setminus U_x$ . Таким образом,  $\text{Cl } V_x \subset X \setminus W \Rightarrow \text{Cl } V_x \subset U_x$ .

$\Leftarrow$ . Пусть  $x \in X$  и  $\mathcal{F} \subset X$  — точка из замкнутого множества. Рассмотрим  $U = X \setminus \mathcal{F}$ . Согласно посылке теоремы, существует  $V_x \subset U : \text{Cl } V_x \subset U$ .

Легко проверить, что Т3 выполняется, можно рассмотреть  $V_x \ni x$  и  $X \setminus \text{Cl } V_x \supset \mathcal{F}$ .  $\square$

**Определение 2.8.12** (Пространство регулярно). Удовлетворяет Т1 и Т3.

### Четвёртая аксиома отделимости

**Определение 2.8.13** ( $X$  удовлетворяет четвёртой аксиоме отделимости Т4).  $\forall \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  — замкнутые —  $\exists U_1 \supset \mathcal{F}_1$  и  $U_2 \supset \mathcal{F}_2$  — непересекающиеся открытые множества.

**Определение 2.8.14** (Пространство нормально). Удовлетворяет Т1 и Т4.

**Теорема 2.8.7.** Верна цепочка следствий:

$$\{\text{нормальность} = T1 + T4\} \Rightarrow \{\text{регулярность} = T1 + T3\} \Rightarrow \{\text{Хаусдорфовость} = T2\} \Rightarrow T1$$

*Доказательство.* Оставляется, как упражнение читателю.  $\square$

**Теорема 2.8.8.** Метрическое пространство нормально.

*Доказательство.* Проверим Т4 (Т2 проверено выше (факт 2.8.2)).

Заметим, что расстояние от точки до замкнутого множества (не содержащего её) больше нуля:  $d(x, \mathcal{F}) > 0$ . В случае расстояния — нуля — точка бы принадлежала множеству из-за замкнутости.

Пусть  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  — два замкнутых непересекающихся множества. В качестве  $U_1$  и  $U_2$  рассмотрим точки, находящиеся ближе к одному множеству, нежели к другому.

$$U_1 = \left\{ x \in X \mid d(x, \mathcal{F}_1) < d(x, \mathcal{F}_2) \right\} \quad U_2 = \left\{ x \in X \mid d(x, \mathcal{F}_2) < d(x, \mathcal{F}_1) \right\}$$

Эти множества открыты, так как функция расстояния 1-липшицева: всякая точка  $x \in U_1$  содержится в  $U_1$  вместе с шаром радиуса  $\frac{1}{2}(d(x, \mathcal{F}_2) - d(x, \mathcal{F}_1))$ .  $\square$

### Лемма и теорема Урысона

**Определение 2.8.15** (Функция Урысона). Пусть  $A, B$  — два замкнутых непересекающихся множества. Всякая функция  $\phi : X \rightarrow [0; 1]$ , такая, что  $\phi|_A \equiv 0$  и  $\phi|_B \equiv 1$ .

*Замечание.* Такую функцию легко построить в метрическом пространстве:

$$f(x) = \min \left( 1, \frac{d(x, A)}{d(x, B)} \right)$$

*Интересный факт* (Лемма Урысона). Топологическое пространство нормально  $\iff$  для любых двух замкнутых непересекающихся множеств существует функция Урысона.

*Замечание.* Обратно это очевидно: в качестве открытых множеств, содержащих  $A$  и  $B$  можно взять  $\phi^{-1}([0; 1/3])$  и  $\phi^{-1}((2/3; 1])$ .

*Интересный факт* (Теорема Урысона о метризации). Всякое нормальное пространство со счётной базой метризуемо.

## 2.8.4 Связность

**Определение 2.8.16** (Топологическое пространство связно). Его нельзя разбить на два непустых открытых множества.

*Примеры.*

- Антидискретное пространства связано
- Дискретное пространство мощности хотя бы 2 не связано.
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  не связна.
- $[a, b] \cup [c, d]$  не связано ( $a < b < c < d$ ).

**Теорема 2.8.9.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $X$  связано.
2.  $X$  нельзя разбить на 2 непересекающихся замкнутых множеств.
3.  $A \subset X$  одновременно и открытое, и замкнутое  $\Rightarrow A = \emptyset$  или  $A = X$ .
4.  $\#f : X \rightarrow \{0, 1\}$ , где  $f$  — сюръективное непрерывное отображение, а на  $\{0, 1\}$  введена дискретная топология.

*Доказательство.* • (1)  $\iff$  (2). Дополнение открытого замкнуто и наоборот.

- (1)  $\iff$  (3).  $\exists A \neq \emptyset, X$ , одновременно открытое и замкнутое  $\iff A \sqcup (X \setminus A) = X$ , где оба открыты.
- (1)  $\iff$  (4).  $\exists f \iff f^{-1}(\{0\})$  и  $f^{-1}(\{1\})$  открыты.  $\square$

**Теорема 2.8.10.** Отрезок  $[0; 1]$  связан в стандартной топологии.

*Доказательство.* Предположим противное:  $[0; 1] = U \sqcup V$ , где  $U, V \in \Omega_{[0; 1]}$ .

Без потери общности считаем, что  $0 \in U$ . Из открытости  $\exists \varepsilon > 0 : [0; \varepsilon) \subset U$ .

Пусть  $a = \sup \left\{ \varepsilon \in [0; 1] \mid [0; \varepsilon) \subset U \right\}$ .

Если  $a \in V$ , то из открытости  $V$  получаем, что  $a$  — не точная верхняя грань (в районе некоторой  $\delta : (a - \delta; a + \delta) \subset V$  все точки в  $V$ , грань можно уменьшить).

Если  $a \in U$ , то из открытости  $U$  получаем, что  $a$  — не точная верхняя грань (есть больше). Здесь может так случиться, что  $a = 1$ , но в таком случае  $U = [0; 1]$  и  $V = \emptyset$ , опять же противоречие.  $\square$

**Теорема 2.8.11.** Для подмножества прямой  $X \subset \mathbb{R}$  следующие условия эквивалентны:

1.  $X$  связно.
2.  $X$  выпукло ( $\forall a, b \in X : (a, b) \subset X$ ).
3.  $X$  — интервал в обобщённом смысле ( $\langle a, b \rangle$ , где  $a \leq b$ ,  $a \in [-\infty; +\infty)$ ,  $b \in (-\infty; +\infty]$ ).

*Доказательство.* • (1)  $\Rightarrow$  (2). Предположим, что это не так: возьмём отрезок  $(a, b)$  такой, что точка  $x$  внутри не принадлежит отрезку. Тогда нашлось разбиение  $X = (X \cap (-\infty; x)) \sqcup (X \cap (x; +\infty))$ .

- (2)  $\Rightarrow$  (1). Предположим, что это не так:  $X = U \sqcup V$ . Но тогда возьмём две точки  $a \in U$ ,  $b \in V$ , без потери общности  $a < b$ , тогда из выпуклости  $X$ :  $[a, b] = (U \cap [a, b]) \sqcup (V \cap [a, b])$  — противоречие со связностью отрезка.
- (2)  $\Rightarrow$  (3).  $X = \langle \inf X, \sup X \rangle$ .
- (3)  $\Rightarrow$  (2). Очевидно.  $\square$

### Связность и непрерывность

**Теорема 2.8.12.** Непрерывный образ связного пространства связан:  $\forall f : X \rightarrow Y : f$  — непрерывно и  $X$  — связно, значит,  $Y$  связано.

*Доказательство.* Пусть  $U \sqcup V = f(X)$ , где  $U, V \in \Omega_{f(X)}$ .

Тогда  $f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V) = X$ , противоречие со связностью  $X$ .  $\square$

**Следствие 2.8.1.** Связность — топологическое свойство.

**Теорема 2.8.13** (О промежуточном значении). Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывное отображение.

Если  $X$  связано, то  $\forall a, b \in f(X) : f(X) \supset [a, b]$ .

*Доказательство.*  $X$  связано  $\Rightarrow f(X)$  связано  $\Rightarrow f(X)$  выпукло.  $\square$

**Определение 2.8.17** (Компонента связности пространства  $X$ ). Связное подмножество, не содержащееся ни в каком, строго большем по включению, связанном подмножестве.

## Лекция VI

3 декабря 2022 г.

**Лемма 2.8.1.** Объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связано.

*Доказательство.* Пусть данное семейство  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ .  $\forall \alpha \in \Lambda : A_\alpha$  связано и  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda : A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ .

Положим  $Y = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ .

От противного: пусть  $Y = U \sqcup V$ , где  $U, V$  — открыты. Рассмотрим произвольное  $A_{\alpha_0}$ . Так как оно связно, то он содержится либо полностью в  $U$ , либо полностью в  $V$ . Не умоляя общности, в  $U$ .

Так как  $\forall \beta \in \Lambda : A_\beta \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset$ , то  $\forall \beta \in \Lambda : A_\beta \subset U$ .

Но тогда из-за связности все  $A_\beta \subset U$ , откуда  $V = \emptyset$ . □

#### Теорема 2.8.14.

- Всякая точка лежит в некоторой компоненте связности.
- Причём различные компоненты связности не пересекаются.

*Доказательство.* Всякая точка  $x \in X$  содержится в объединении всех связных множеств, её содержащих (эти множества есть, например,  $\{x\}$  связно). Нетрудно видеть, что эти объединения связны, максимальны по включению и дизъюнктны. □

**Следствие 2.8.2.** Компоненты связности дают разбиения топологического пространства.

#### Свойства связности

1. Любое связное подмножество подпространства содержится в некоторой компоненте связности.
2. Пространство несвязно  $\iff$  в нём есть хотя бы две компоненты связности.
3. Замыкание связного множества связно.

*Доказательство.* Пусть замыкание несвязно. Тогда оно представимо в виде объединения двух замкнутых множеств  $\text{Cl } A = \mathcal{F}_1 \sqcup \mathcal{F}_2$ . Так как исходное множество  $A$  связно, то оно содержится полностью в одном из них, пусть в  $\mathcal{F}_1$ .

Согласно свойству замыкания,  $\text{Cl } A \subset \mathcal{F}_1$ , значит,  $\mathcal{F}_2 = \emptyset$ . □

**Следствие 2.8.3.** Компоненты связности замкнуты.

*Замечание.* Число компонент связности — топологический инвариант.

#### 2.8.5 Линейная связность

Пусть  $X$  — топологическое пространство.

**Определение 2.8.18** (Путь в  $X$ ). Непрерывное отображение  $\alpha : [0; 1] \rightarrow X$ .

станд.

$\alpha(0)$  называют *началом пути*, а  $\alpha(1)$  — *концом пути*.

**Определение 2.8.19** (Линейно связное топологическое пространство  $X$ ). Любые две точки  $X$  можно соединить путём.

Говорят, что  $A \subset X$  линейно связно, если  $A$  связно в индуцированной топологии; это значит, что между всякой парой точек  $a, b \in A$  существует путь, полностью лежащий в  $A$ .

*Пример.* Отрезок евклидового пространства — путь. Таким образом,  $\mathbb{R}^n$  линейно связно, как и его выпуклые подмножества.

## Линейная связность и непрерывность

Пусть  $X, Y$  — топологические пространства, причём  $X$  — линейно связно.

**Теорема 2.8.15.** Если есть непрерывная функция  $f : X \rightarrow Y$ , то  $f(X)$  линейно связно.

*Доказательство.* Пусть  $x, y \in f(X)$ . Тогда есть путь, соединяющий  $a, b$  — какие-то два прообраза  $x$  и  $y$  соответственно, между ними есть путь  $\alpha$ .

Композиция непрерывных функций непрерывна, значит,  $f \circ \alpha$  — путь между  $x$  и  $y$ .  $\square$

**Лемма 2.8.2.** Способность быть соединёнными путём — отношение эквивалентности.

*Доказательство.* • Рефлексивность. Постоянное отображение непрерывно.

- Симметричность. Если  $\alpha : [0; 1] \rightarrow X$  — путь, то  $\alpha \circ (1 - x)$  — тоже путь.

- Транзитивность. Если  $\alpha$  — путь между  $x, y$ , а  $\beta$  — путь между  $y, z$ , то  $\gamma : [0; 1] \rightarrow X$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0; \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

$\gamma$  непрерывна, так как  $\alpha([0; 1])$  и  $\beta([0; 1])$  — фундаментальное покрытие  $\gamma([0; 1])$  (определение 2.5.1).  $\square$

**Определение 2.8.20** (Компоненты линейной связности). Классы эквивалентности по отношению способности быть соединёнными путём.

*Замечание.* Число компонент линейной связности — топологический инвариант.

## 2.8.6 Связность и линейная связность

**Теорема 2.8.16.** Из линейной связности следует связность.

*Доказательство.*  $\forall x, y \in X : \exists \alpha$  — путь между  $x$  и  $y$ . Так как отрезок связан, то образ пути  $\alpha([0; 1])$  тоже связан.

Таким образом,  $\alpha([0; 1]) \subset \mathcal{C}$ , где  $\mathcal{C}$  — компонента связности точки  $x$ .

Получаем, что  $\forall y \in X : y \in \mathcal{C}$ , откуда  $\mathcal{C} = X$   $\square$

**Следствие 2.8.4.** Компоненты линейной связности содержатся в компонентах связности.

*Контрпример* (Связное, но не линейно связное множество).

- Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^2$ .

В нём график  $y = \cos(\frac{1}{x})$

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \cos\left(\frac{1}{x}\right), x > 0 \right\}$$

линейно связан, значит, связан.

Рассмотрим  $X := A \cup \{(0, 0)\}$ . Так как  $\text{Cl}_{\mathbb{R}^2} A = A \cup \{(0, y) \mid y \in [-1; 1]\}$ , то  $\text{Cl}_X A = X$ , то есть  $X$  связано.

- В то же время точка  $(0, 0)$  образуют одноточечную компоненту линейной связности. От противного: пусть есть путь  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  с началом в  $(0, 0)$ . Обозначим  $T = \alpha^{-1}((0, 0))$ .

- Докажем, что  $T$  открыто. Пусть  $t_0 \in T$  — произвольный элемент. Рассмотрим единичный шар  $B_1((0, 0))$ . Из непрерывности пути  $\exists \delta > 0 : \alpha(B_\delta(t_0)) \subset B_1((0, 0))$ .

Пусть  $\exists t_1 \in B_\delta(t_0) : \alpha(t_1) \neq (0, 0)$ . Запишем путь покомпонентно:  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Оба отображения  $x, y$  непрерывны, по теореме о промежуточном значении все значения из  $(x(t_0), x(t_1))$  достигаются.

В частности, достигается  $\frac{1}{2\pi n_*} = x(t_*)$  для достаточно большого  $n_*$  и  $t_*$  между  $t_0$  и  $t_1$ . Тогда заключаем, что  $y(t_*) = 1$  и приходим к противоречию —  $\alpha(t_*) \notin B_1((0, 0))$ .

Таким образом  $\forall t_1 \in B_\delta((0, 0)) : \alpha(t_1) = (0, 0)$  и  $T$  открыто.

- $T$  замкнуто, как прообраз замкнутого. Значит,  $T$  и замкнуто, и открыто, но так как это — непустое подмножество  $[0, 1]$ , то  $T = [0, 1]$ , откуда все пути с началом в  $(0, 0)$  постоянны.

### Пространства, в которых всякая точка имеет некоторую линейно связную окрестность

*Примеры.*

- Какое-то открытое евклидово подмножество  $U \subset \mathbb{R}^n$ .
- **Определение 2.8.21** (Топологическое многообразие размерности  $n$ ). Хаусдорфовое пространство  $X$  со счётной базой, такое, что  $\forall x \in X : \exists U_x \in \Omega_X : U_x \sim \mathbb{R}^n$ .

Так, примером многообразия размерности  $n$  является  $S^n$  — стандартная сфера в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Теорема 2.8.17.** Для пространств, в которых всякая точка имеет некоторую линейно связную окрестность, линейная связность совпадает со связностью, причём компоненты связности открыты.

*Доказательство.* Пусть  $W$  — компонента линейной связности. Рассмотрим произвольную  $a \in W$  и её линейно связную окрестность  $U_a$ . Из-за линейной связности  $U_a \subset W$ , значит,  $W$  открыто.

Если какая-то компонента связности состоит из некоторых компонент линейной связности, то она бьётся на некоторые открытые множества, противоречие.  $\square$

### 2.8.7 Негомеоморфность

**Теорема 2.8.18.** Следующие множества попарно негомеоморфны:

$$[0; 1] \quad [0; 1) \quad \mathbb{R} \quad S^1 \quad \mathbb{R}^2$$

*Доказательство.* • В  $[0; 1]$  есть две точки (0 и 1), такие, что  $[0; 1] \setminus \{0, 1\}$  по-прежнему связно.

- В  $[0; 1)$  есть одна точка (0), но нету двух, таких, что при выкидывании их вместе пространство останется связным.
- В  $\mathbb{R}$  нет ни одной точки, при выкидывании которой пространство останется связным.
- В  $S^1$  есть одна точка, при выкидывании которой пространство останется связным, причём это любая точка, а в полуинтервале — не любая.
- В  $\mathbb{R}^2$  есть как минимум 3 точки, при выкидывании которых пространство не потеряет связность — например,  $(0, 0), (0, 1), (0, 2)$ .

*Замечание.*  $\mathbb{R}^2$  не потеряет связность при выкидывании конечного числа точек, так как оно останется линейно связным.

$\square$

### 2.8.8 Компактные пространства и множества

**Определение 2.8.22** (Компактное топологическое пространство). Из любого открытого покрытия пространства можно выделить конечное подпокрытие.

*Примеры.*

- Конечное пространство компактно.

- Бесконечное дискретное пространство некомпактно — из покрытия одноточечными множествами не выделить конечное подпокрытие.
- Полуинтервал  $(0, 1]$  некомпактен — можно рассмотреть бесконечное покрытие  $(0; 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}; 1]$ .
- Пусть  $A \subset X$ .

*Замечание.* Следующие условия равносильны:

- $A$  компактно в индуцированной топологии.
- Для любого  $\Gamma \subset \Omega_X$ , такого, что  $\bigcup \Gamma \supset A$  можно выделить конечное подмножество  $\Gamma$  с тем же свойством.

- **Лемма 2.8.3** (Лемма Гейне — Бореля). *Отрезок  $[0, 1]$  компактен.*

*Доказательство.* От противного. Зафиксируем покрытие отрезка  $[0, 1]$ , из которого не выделить конечное подпокрытие.

Положим  $[a_0, b_0] := [0, 1]$ .

Построим по индукции систему вложенных отрезков со сколь угодно малыми длинами  $[a_i, b_i]$ , такую, что из покрытия  $[a_i, b_i]$  не выделить конечное. В самом деле, если из покрытия  $[a_i, b_i]$  не выделить конечное, то это же верно и либо для  $[a_i, \frac{a_i+b_i}{2}]$ , либо для  $[\frac{a_i+b_i}{2}, b_i]$ .

Рассмотрим  $\{c\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$ . По определению покрытия найдётся открытое множество  $U_c \ni c$ , значит, есть открытый шар  $B_r(c) \subset U_c$ .

Значит, найдётся отрезок, лежащий внутри данного шара. Для него получилось неверно, что из его покрытия не выделить конечное, противоречие.  $\square$

**Теорема 2.8.19.**  $X$  компактно,  $A \subset X$  замкнуто  $\Rightarrow A$  компактно.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное открытое покрытие  $A$ , назовём его  $\Gamma$ . Заметим, что  $\Gamma \cup (X \setminus A)$  — открытое покрытие  $X$ , получается, из него можно выделить конечное подпокрытие  $\tilde{\Gamma}$ .

Значит,  $\tilde{\Gamma} \setminus (X \setminus A)$  — конечное подпокрытие  $A$ , так как  $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ .  $\square$

**Теорема 2.8.20.** Произведение двух компактов — компакт.

*Доказательство.*

**Лемма 2.8.4.** Заметим, что для проверки на компактность достаточно проверять только покрытия элементами из базы  $\Sigma = \{V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_n}\}$ .

*Доказательство леммы.* Рассмотрим произвольное покрытие  $\Gamma$ ,  $\forall U \in \Gamma : U = \bigcup_{\text{какие-то } \beta} V_{\beta}$ , где  $V_{\beta} \in \Sigma$ .

Из покрытия всеми такими  $V_{\beta}$  можно выделить конечное подпокрытие  $\tilde{\Sigma}$ . Тогда сопоставим всякому  $V_{\beta} \in \tilde{\Sigma}$  одно любое  $U \in \Gamma : V_{\beta} \subset U$ . Это искомое конечное подпокрытие.  $\square$

Рассмотрим произвольное  $\Gamma$  — покрытие  $X \times Y$  множествами из базы — они имеют вид  $U_{\alpha} \times V_{\beta}$ , где  $U_{\alpha} \in \Omega_X, V_{\beta} \in \Omega_Y$ .

Посмотрим на произвольный  $x \in X$ . Множество  $\{x\} \times Y$  компактно, так как оно гомеоморфно  $Y$ . Значит, можно выделить конечное подпокрытие, покрывающее  $\{x\} \times Y$ , назовём это покрытие  $\{U_i^x \times V_i^x\}_{i=1..N_x} \subset \Gamma$ .

Сопоставим всякому  $x : W_x = \bigcap_{i=1}^{N_x} U_i^x$ . Это пересечение конечного числа открытых множеств, оно открыто.

Так как  $X$  компактно, то можно выбрать некоторое конечное множество  $\tilde{X} \subset X$ , такое, что  $\bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} W_{\tilde{x}} = X$ .

Получаем конечное подпокрытие  $X \times Y$ , оно равно

$$\bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \left\{ U_i^{\tilde{x}} \times V_i^{\tilde{x}} \right\}_{i=1..N_{\tilde{x}}}$$

□

*Интересный факт* (Теорема Тихонова). Тихоновское произведение любого числа компактных пространств компактно.

**Теорема 2.8.21.** Пусть  $X$  – хаусдорфово пространство, а  $A \subset X$  – компактно. Тогда  $A$  замкнуто.

*Доказательство.* Докажем, что  $X \setminus A$  открыто. Рассмотрим  $y \in X \setminus A$ .

Согласно хаусдорфовости,  $\forall a \in A : \exists U_a \ni a, U_y \ni y : U_a \cap U_y = \emptyset$ .

Получили покрытие множества  $A$  открытыми множествами; выделим из них конечное подпокрытие  $\{U_{a_i}\}_{i=1..N}$ .

Каждой такой окрестности  $U_{a_i}$  соответствует своя окрестность точки  $y$ . Пересечение конечного числа открытых множеств открыто, получили, что  $y$  содержится в  $X \setminus A$  вместе с некоторой своей окрестностью. □

## Лекция VII

6 декабря 2022 г.

**Теорема 2.8.22.**  $X$  – хаусдорфово и компактно  $\Rightarrow X$  – нормально.

*Доказательство.* • T1. Очевидно из хаусдорфовости.

- T4. Рассмотрим  $A, B \subset X$  – замкнутые множества. Они компактны, как замкнутые подмножества компакта.

Зафиксируем  $a \in A$ .

Из хаусдорфовости  $\forall b \in B$  найдутся непересекающиеся окрестности  $\exists V_{a,b} \ni a, U_{a,b} \ni b$ , обозначим  $\mathcal{U}_a := \bigcup_{b \in B} U_{a,b}$ .

$\mathcal{U}_a \supset B$ , значит, можно выделить конечное подпокрытие  $\tilde{\mathcal{U}}_a := \bigcup_{i=1}^N U_{a,b_i} \supset B$ .

Обозначим  $\mathcal{V}_a := \bigcap_{i=1}^N V_{a,b_i}$ . Заметим, что  $a \in \mathcal{V}_a$ , причём  $\mathcal{V}_a \cap \mathcal{U}_a = \emptyset$ , а  $\mathcal{V}_a \cap \tilde{\mathcal{U}}_a = \emptyset$  и подавно.

Теперь аналогично переберём все  $a \in A$ . Здесь уже из покрытия  $A \subset \bigcup_{a \in A} \mathcal{V}_a$  выберем конечное

подпокрытие  $A \subset \bigcup_{j=1}^M \mathcal{V}_{a_j}$ . Соответствующее пересечение  $B \subset \bigcap_{j=1}^M \tilde{\mathcal{U}}_{a_j}$  открыто. □

**Теорема 2.8.23.** Компактное метрическое пространство  $(X, d)$  ограничено.

*Доказательство.* Пусть  $a \in X$  — произвольная точка. Так как  $\forall x \in X : d(a, x) \in \mathbb{R}$ , то  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a) = X$ .

Выделив из покрытия конечное подпокрытие, найдём такое  $n \in \mathbb{N} : B_n(a) = X$ . Тогда, согласно неравенству треугольника, расстояние между любыми двумя точками не превышает  $2n$ .  $\square$

**Следствие 2.8.5.** Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

*Доказательство.* Из (теорема 2.8.23) ограничено, из (теорема 2.8.21) — замкнуто.  $\square$

**Теорема 2.8.24.**  $A \subset \mathbb{R}$  — компактно  $\iff A$  замкнуто и ограничено.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . См. следствие.

$\Leftarrow$ . Так как  $A$  ограничено, то  $\exists R \in \mathbb{R} : A \subset [-R; R]^n$ . Заметим, что  $[-R; R]^n$  — компактно, как произведение компактов. Тогда  $A$  — замкнутое подмножество компакта, откуда  $A$  — компактно.  $\square$

### Компактность на языке замкнутых множеств:

**Определение 2.8.23** (Центрированный набор подмножеств  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ). Такой набор, что любое его конечное подмножество имеет непустое пересечение.

*Пример.*  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$  центрирован.

**Теорема 2.8.25.**  $X$  компактно  $\iff$  любой центрированный набор замкнутых подмножеств  $X$  имеет непустое пересечение.

*Доказательство.*

**Факт 2.8.3.**  $\{X \setminus B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  — покрытие  $\iff \bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha = \emptyset$ .

$\Rightarrow$ . От противного: пусть есть центрированный набор замкнутых множеств с пустым пересечением. Тогда  $\{X \setminus A_\alpha\}$  — открытое покрытие, из него можно выделить конечное подпокрытие. Тогда мы нашли конечное подмножество с пустым пересечением  $\Rightarrow$  набор не центрирован.

$\Leftarrow$ . От противного: пусть  $U_\alpha$  — открытое покрытие, из которого не выделить конечное подпокрытие. Это значит, что  $\bigcap(X \setminus U_{\alpha_i}) \neq \emptyset$  для любого конечного подмножества индексов  $\{\alpha_i\}$ .

Но тогда получается, что  $\{X \setminus U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  центрирован по определению, значит,  $U_\alpha$  — не покрытие. Противоречие.  $\square$

**Следствие 2.8.6.** Пусть  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  — центрированный набор замкнутых множеств.

Если  $\exists \alpha_0 \in \Lambda : A_{\alpha_0}$  компактно, то  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$ .

*Доказательство.* Сузим набор на  $A_{\alpha_0}$ : рассмотрим  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} = \{A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \mid \alpha \in \Lambda\}$ . Получили центрированный набор замкнутых подмножеств компакта  $A_{\alpha_0}$ . Значит, пересечение непусто.  $\square$

**Теорема 2.8.26.** Непрерывный образ компакта — компакт.

*Доказательство.* Рассмотрим непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$ , где  $X$  — компакт. Докажем, что  $f(X)$  — компакт. Рассмотрим произвольное открытое покрытие  $f(X) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ . Но  $\forall \alpha \in \Lambda : U_\alpha$  открыто в  $f(X)$ , значит,  $f^{-1}(U_\alpha)$  открыто в  $X$ . Объединение прообразов — прообраз объединения, значит,  $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$  — покрытие  $X$ . Из него можно выделить открытое подпокрытие.  $\square$

**Следствие 2.8.7.** Компактность — топологическое свойство.

**Теорема 2.8.27** (Вейерштрасс). Непрерывная функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  на компакте достигает свои наибольшее и наименьшее значения.

*Доказательство.*  $f(X)$  — образ компакта — компакт, значит, содержит свои предельные точки.  $f(X) \ni \inf f, \sup f$ .  $\square$

**Теорема 2.8.28.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывная биекция, где  $X$  — компактно, а  $Y$  — хаусдорфово. Тогда  $f$  — гомеоморфизм.

*Доказательство.* Фактически, достаточно доказать, что  $f^{-1}$  непрерывно.

Пусть  $\mathcal{F} \subset X$  — произвольное замкнутое подмножество  $X$  (откуда  $\mathcal{F}$  — компакт).

$f(\mathcal{F})$  — образ компакта, компакт, в хаусдорфовом пространстве компакт замкнут  $\Rightarrow f(\mathcal{F})$  — замкнут.  $\square$

**Определение 2.8.24** (Топологическое вложение). Такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , что  $f$  — гомеоморфизм между  $X$  и  $f(X)$ .

**Контрпример** (Пример инъективного непрерывного отображения — не вложения). Улитка — открытый интервал сворачивается в букву  $\rho$ . Обратное не непрерывно, так как интервал не компактен.

**Следствие 2.8.8.** Непрерывная инъекция  $f : \underbrace{X}_{\text{компакт}} \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{хаусдорфово}}$  — непременно вложение.

**Теорема 2.8.29** (Лемма Лебега). Пусть  $X$  — компактное метрическое пространство,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  — открытое покрытие.

Тогда  $\exists r > 0 : \forall a \in X : \exists U_\alpha : B_r(a) \subset U_\alpha$ .

**Определение 2.8.25** (Число Лебега). Такой радиус  $r$ .

*Доказательство.* Сопоставим каждой точке  $a \in X$  радиус  $r(a)$ , такой, что  $\exists U_\alpha : B_{r(a)}(a) \subset U_\alpha$ .

Тогда  $\{B_{\frac{1}{2}r(a)}(a)\}$  — тоже открытое покрытие, выделим из него конечное подпокрытие  $\{B_{\frac{1}{2}r(a_i)}(a_i)\}_{i=1}^n$ .

Тогда числом Лебега является, например,  $r := \min_{i=1}^n \frac{1}{2}r(a_i)$ .

В самом деле,  $\forall a \in X : \exists B_{\frac{1}{2}r(a_i)}(a_i) \ni a \Rightarrow |a - a_i| < \frac{1}{2}r(a_i) \Rightarrow B_r(a) \subset U_{\alpha_a}$ .  $\square$

**Следствие 2.8.9** (Лемма Лебега для отображений). Пусть  $(X, d)$  — компактно, дано открытое покрытие  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ . Для непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$  найдётся радиус  $r > 0 : \forall x \in X : \exists U_\alpha : f(B_r(x)) \subset U_\alpha$ .

*Доказательство.* Рассмотреть  $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ .  $\square$

Пусть  $(X, d_x)$  и  $(Y, d_y)$  — два метрических пространства.

**Определение 2.8.26** (Равномерно непрерывное отображение). Такое отображение  $f : X \rightarrow Y$ , такое, что  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : d_x(x, y) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Теорема 2.8.30.** Любое непрерывное отображение  $f : \underbrace{X}_{\text{компакт}} \rightarrow Y$  — равномерно непрерывно.

*Доказательство.* Рассмотрим покрытие  $\{B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y)\}_{y \in Y}$ . В качестве  $\delta$  подойдёт число Лебега для покрытия  $\{f^{-1}(B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y))\}$ .  $\square$

**Определение 2.8.27** (Предел последовательности  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ ). Такая точка  $b \in X$ , что

$$\forall U_b \in \Omega_X : \exists M \in \mathbb{N} : \forall n > M : a_n \in U_b$$

*Примеры.*

- Постоянная последовательность всегда сходится к своему образу.
- Если последовательность сходится к пределу  $b$ , то любая подпоследовательность тоже сходится к  $b$ .
- В антидискретном пространстве любая последовательность сходится к любому пределу.
- В дискретном пространстве последовательность сходится  $\iff$  стабилизируется.

**Теорема 2.8.31.** В хаусдорфовом пространстве всякая последовательность имеет не более одного предела.

*Доказательство.* От противного. □

**Определение 2.8.28** (Секвенциальное замыкание  $A \subset X$ ). Совокупность пределов последовательностей, имеющих все точки в  $A$ . Обозначается  $\text{S}\text{Cl}A$ .

*Контрпример.* Не всегда секвенциальное замыкание — множество предельных точек. Можно рассмотреть прямую с топологией не более, чем счётных дополнений:

$$\text{S}\text{Cl}(0, 1) = (0, 1), \text{ в то время как } \text{Cl}(0, 1) = \mathbb{R}$$

**Теорема 2.8.32.**  $\text{S}\text{Cl}A \subset \text{Cl } A$ .

*Доказательство.* Предел всякой последовательности — точка прикосновения для  $A$ , поэтому очевидно. □

**Теорема 2.8.33.** В пространстве  $X$ , удовлетворяющем первой аксиоме счётности,  $\forall A \subset X : \text{S}\text{Cl}A = \text{Cl } A$ .

*Доказательство.* Пусть  $b \in \text{Cl } A$ . Рассмотрим счётную базу  $\Sigma_b = \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Построим убывающую счётную базу  $\left\{U_i = \bigcap_{j=1}^i V_j\right\}_{i \in \mathbb{N}}$

Построим последовательность  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  так, чтобы выполнялось  $a_i \in U_i \cap A$ . Она сходится к  $b$ . □

## 2.9 Полные метрические пространства

Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство.

**Определение 2.9.1** (Фундаментальная последовательность).  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Для любого  $\varepsilon > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall n, m > M : d_x(a_n, a_m) < \varepsilon$ . Их также называют *последовательность Коши* или *сходящаяся в себе последовательность*.

Свойства:

- Сходится  $\Rightarrow$  фундаментальна.
- Фундаментальна  $\Rightarrow$  ограничена (лежит в неком шаре).
- Фундаментальна, и содержит сходящуюся подпоследовательность  $\Rightarrow$  сходится туда же.

**Определение 2.9.2** (Полное метрическое пространство). В нём всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

*Примеры.*

- $\mathbb{R}$  полно.
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  не полно.
- **Теорема 2.9.1.**  $\mathbb{R}^n$  полно.

*Доказательство.* Рассмотрим фундаментальную последовательность  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^n)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . По каждой координате последовательность фундаментальна, из полноты  $\mathbb{R}$  всякая имеет предел  $b^i$ , значит, вся последовательность сходится к  $(b^1, \dots, b^n)$ .  $\square$

**Теорема 2.9.2.** Замкнутое подмножество  $Y$  полного пространства  $X$  полно.

*Доказательство.*  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \in X$ ,  $b$  — точка прикосновения для  $Y$ , значит,  $b \in Y$ .  $\square$

*Примеры.*

- Отрезок — замкнутое подмножество прямой.
- Интервал не является полным, так как не замкнут, хотя и подмножество прямой.

*Предостережение.* Полнота — не топологическое свойство, например,  $(0, 1) \sim \mathbb{R}$ .

**Теорема 2.9.3** (О вложенных шарах). Метрическое пространство полно  $\iff$  любая последовательность вложенных замкнутых шаров с радиусом, стремящимся к 0, обладает непустым пересечением.

*Замечание.* Более общая формулировка говорит о последовательности вложенных замкнутых множеств, с диаметрами, стремящимися к 0. Доказательство не меняется.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ .  $D_{r_1}(a_1) \supset D_{r_2}(a_2) \supset \dots$  выберем в каждом шаре по точке. Последовательность фундаментальна,  $\exists a$  — предел. Покажем, что  $\forall i \in \mathbb{N} : a \in D_{r_i}(a_i)$ :

Например, от противного:  $\exists i : d(a_i, a) > r_i$ , значит, для  $\varepsilon := d(a_i, a) - r_i$ , согласно неравенству треугольника,  $\forall j > i : B_\varepsilon(a) \cap D_{r_j}(a_j) = \emptyset$ .

$\Leftarrow$ . Используя данное свойство, построим точку, являющуюся пределом последовательности  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

Для этого рассмотрим последовательность шаров радиусами  $1/2^n$ .

Согласно фундаментальности, для  $\varepsilon = 1/2^n$  найдётся  $M_n : \forall n, m \geq M_n : d(a_n, a_m) < \varepsilon$ .

Определим последовательность вложенных шаров  $D_{\frac{1}{2^{n-1}}}(a_{M_n})$ . Несложно проверить, что шары вложены, а точка в их пересечении является пределом некоторой подпоследовательности  $\{a_i\}$ .  $\square$

## 2.9.1 Нигде не плотные множества

**Определение 2.9.3** (Нигде не плотное множество  $A$ ). Множество, внутренность замыкания которого пуста.

**Определение 2.9.4** (Внешность  $A$ ). Внутренность дополнения. Обозначается  $\overset{\circ}{A}$  или  $\text{Ext}(A)$ .

$$X = \text{Int } A \sqcup \text{Fr } A \sqcup \overset{\circ}{A}.$$

# Лекция VIII

13 декабря 2022 г.

**Теорема 2.9.4.** Следующие условия равносильны:

1. Множество  $A$  нигде не плотно.
2.  $\text{Ext}(A)$  всюду плотно.
3.  $\forall U \in \Omega : \exists V \ni \Omega : V \subset U \wedge V \cap A = \emptyset$ .

*Доказательство.*

- (1)  $\iff$  (2).  $\text{Int Cl } A = \emptyset \iff \forall x \in X : \forall U_x \in \Omega : U_x \cap (X \setminus \text{Cl } A) \neq \emptyset \iff U_x \cap \text{Ext } A \neq \emptyset \iff \text{Ext } A \text{ всюду плотно.}$
- (2)  $\iff$  (3).  $V \cap A = \emptyset \iff V \subset \text{Ext}(A).$

□

**Теорема 2.9.5** (Бэр). Полное метрическое пространство нельзя покрыть счётным набором нигде не плотных множеств.

*Доказательство.* От противного: пусть  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  покрывают полное пространство  $X$ .

Рассмотрим произвольный открытый шар  $B_0$ . Будем поддерживать инвариант:  $B_n \cap \bigcup_{i=1}^n A_i = \emptyset$ , причём радиус шара  $B_n$  меньше  $\frac{1}{n}$ .

При переходе от  $B_n$  к  $B_{n+1}$  заметим, что так как  $B_n \cap \bigcup_{i=1}^n A_i = \emptyset$ , то  $B_n \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = B_n \cap A_{n+1}$ . Так как  $A_{n+1}$  нигде не плотно, то найдётся внутри  $B_n$  открытое множество  $U$ , такое, что  $U \cap A_{n+1} = \emptyset$ . Внутри  $U$  найдётся шар достаточно маленького радиуса, положим его за  $B_{n+1}$ .

Внутри каждого шара  $B_i$  возьмём замкнутый шар меньшего радиуса  $D_i$ , так, чтобы последовательность получилась вложенной. Из полноты пространства у них есть общая точка; эта точка не покрыта последовательностью  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

*Контрпример* (Неполное метрическое пространство, которое можно покрыть счётным набором нигде не плотных множеств).  $\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$ .

**Следствие 2.9.1.** Полное (метрическое) пространство без изолированных точек несчётно.

$(b \in X \text{ — изолированная точка пространства } X \iff \{b\} \text{ открыто в } X.)$

*Доказательство.* От противного: множество счётно. Так как внутренность замыкания  $\{b\}$  пуста, то  $\{b\}$  нигде не плотно. Отсюда множество покрывается одноточечными множествами, противоречие.

**Определение 2.9.5** (Пополнение метрического пространства  $X$ ). Метрическое пространство  $\overline{X}$ , такое, что

- $\overline{X}$  полное.
- $X \subset \overline{X}$ .
- $X$  всюду плотно в  $\overline{X}$ .

*Интересный факт.* У любого метрического пространства есть пополнение.

План доказательства: Сказать, что последовательности Коши  $u$  и  $v$  эквивалентны  $u \sim v$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) = 0$ . Ввести  $\overline{X} = \{\text{последовательности Коши}\} / \sim$ . Доказать, что  $\overline{X}$  всюду плотно, и распространить на него метрику из  $X$ .

## 2.10 Секвенциальная компактность

**Определение 2.10.1** ( $X$  секвенциальна компактно). Любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

**Определение 2.10.2** ( $b$  — точка накопления для  $A$ ).  $\forall U_b \in \Omega : |U_b \cap A| = \infty$ .

**Теорема 2.10.1.** В компактном пространстве любое бесконечное множество содержит точку накопления.

*Доказательство.* От противного: всякая точка  $x$  имеет окрестность  $U(x)$ , пересекающуюся с  $A$  лишь по конечному множеству точек. Тогда  $X = \bigcup_{x \in X} U(x)$ . Выберем конечное подпокрытие, получим противоречие с бесконечностью  $A$ .  $\square$

**Теорема 2.10.2.** Метрическое пространство  $X$  компактно  $\Rightarrow X$  секвенциально компактно.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную последовательность  $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , выберем в ней сходящуюся подпоследовательность.

Если множество  $\{u_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  конечно, то  $\exists v : u_i = v$  бесконечно часто. Тогда выделим постоянную подпоследовательность, сходящуюся к  $v$ .

Иначе  $\{u_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  бесконечно. Рассмотрим в  $X$   $b$  — точку накопления для  $\{u_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .

Введём последовательность шаров  $B_{1/n}(b)$ , в шаре  $B_{1/n}$  выберем  $n$ -ю точку для подпоследовательности. Так как внутри всякого шара бесконечно много точек, то процесс обречён на успех.  $\square$

## 2.11 Вполне ограниченные метрические пространства

Пусть  $X$  — метрическое пространство.

**Определение 2.11.1** ( $\varepsilon$ -сеть). Такое  $A \subset X$ , что  $\forall x \in X : \exists a \in A : d(x, a) < \varepsilon$ .

**Определение 2.11.2** ( $X$  вполне ограничено).  $\forall \varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть.

*Пример* (Не компактное, но вполне ограниченное пространство). Интервал, например,  $(0, 1)$ .

**Теорема 2.11.1.** Если  $X$  — метрическое пространство, то следующие условия эквивалентны:

- $X$  компактно.
- $X$  секвенциально компактно.
- $X$  полно и вполне ограничено.

*Доказательство.* • (1)  $\Rightarrow$  (2). (теорема 2.10.2)

- (2)  $\Rightarrow$  (3).

– Вполне ограниченность. От противного:  $\exists \varepsilon > 0$ , такое, что нет конечной  $\varepsilon$ -сети. Построим последовательность без сходящейся подпоследовательности. Пусть на очередном шаге последовательность  $\{a_i\}_{i=1..n}$ . Это не  $\varepsilon$ -сеть (так как конечна), возьмём  $a_{n+1}$  так, чтобы выполнялось  $\min_{i=1..n} d(a_{n+1}, a_i) \geq \varepsilon$ .

Попарное расстояние между любой парой точек не меньше  $\varepsilon$ .

– Полнота. Во всякой фундаментальной последовательности есть подпоследовательность, сходящаяся к  $v$ . Тогда вся последовательность тоже сходится к  $v$ .

- (3)  $\Rightarrow$  (1). От противного: пусть  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  — покрытие, из которого не выделить конечное подпокрытие. Построим последовательность вложенных замкнутых множеств  $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .
  - Рассмотрим конечную 1-сеть  $A_1$ . Шары  $\{D_1(a) \mid a \in A_1\}$  покрывают всё пространство; из отсутствия конечного подпокрытия найдётся шар  $C_1 := D_i$ , который не покрыть конечным числом элементов из  $U_\alpha$ .
  - На  $n$ -м шаге возьмём  $\frac{1}{n}$ -сеть для шара  $D_{n-1}$ . Найдётся шар  $D_j$  радиуса  $\frac{1}{n}$ , такой, что его не покрыть конечным числом элементов  $\{U_\alpha\}$ . Положим  $C_n := C_{n-1} \cap D_j$ .

Согласно теореме о вложенных шарах (точнее замечания к ней), пересечение  $\bigcap_{i=1}^n C_i$  состоит из одной точки, назовём её  $c$ .

$c \in U_\alpha$  для некоего  $\alpha \in \Lambda$ , причём лежит вместе с некоторым шаром. Тогда начиная с некоторого места  $C_n \subset U_\alpha$ , откуда противоречие с тем, что шары  $C_n$  нельзя покрыть конечным числом элементов покрытия.  $\square$

**Теорема 2.11.2.** Метрическое пространство  $X$  компактно  $\Rightarrow$  выполняется вторая аксиома счётности.

*Доказательство.*

**Лемма 2.11.1.** Метрическое пространство  $X$  вполне ограничено  $\Rightarrow$  выполняется вторая аксиома счётности.

*Доказательство леммы.* Возьмём  $A$  — объединение по  $n \in \mathbb{N}$  всех  $\frac{1}{n}$ -сетей.

$A$  всюду плотно, так как пересекается с любым шаром — с шаром радиуса  $r$ .  $A$  имеет общую точку в  $\lceil \frac{1}{r} \rceil$  сети.

Отсюда  $X$  сепарабельно ( $A$  счётно).  $\square$

$\square$

**Теорема 2.11.3.** В пространстве со второй аксиомой счётности компактность равносильна секвенциальной компактности.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Из компактности и первой аксиомы счётности (следует из второй) следует секвенциальная компактность. Доказательство аналогично частному случаю (теорема 2.10.2).

$\Leftarrow$ . Выделим из покрытия  $\bigcup U_\alpha = X$  конечное подпокрытие.

По теореме Линделёфа (теорема 2.8.2) в пространстве с 2АС найдётся счётное подпокрытие  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = X$ . Положим  $\mathcal{F}_i := X \setminus U_i$ , обозначим  $W_n = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ .

От противного: для всякого конечного  $n \in \mathbb{N}$ :  $W_n \neq \emptyset$ . Тогда выберем в последовательности множеств  $W_1 \supset W_2 \dots$  последовательность точек  $a_i \in W_i$ . В ней есть подпоследовательность, которая сходится к некой точке  $b \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ . ( $b \in \text{SCI}W_i \Rightarrow b \in \text{Cl } W_i$ )

Получаем, что  $\forall i \in \mathbb{N}: b \notin U_i$ , то есть, противоречие,  $U_i$  — не покрытие.  $\square$

$\square$

## 2.12 Факторпространства

Пусть  $(X, \Omega)$  — топологическое пространство,  $\sim$  — отношение эквивалентности на  $X$ .

**Определение 2.12.1** (Факторпространство  $X$  по отношению  $\sim$ ). Множество  $X/\sim$ , такое, что  $U \subset X/\sim$  открыто  $\iff p^{-1}(U)$  открыто в  $X$ . Здесь  $p: X \rightarrow X/\sim$  — (каноническая) проекция,  $x \mapsto \bar{x}$ .

**Факт 2.12.1.** Проекция  $p$  непрерывна.

### 2.12.1 Свойства

- Факторпространство связного пространства связно.
- Факторпространство линейно связного пространства линейно связно.
- Факторпространство сепарабельного пространства сепарабельно.
- Факторпространство компактного пространства компактно.

*Примеры* (Без доказательства).

- Отрезок со склеенными концами — окружность.  $[0, 1]/_{0 \sim 1} \sim S^1$ .

- Квадрат со склеенными противоположными сторонами — тор  $T^2 = S^1 \times S^1$ .
- Восьмиугольник, склеенный по формуле  $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$  — сфера с двумя ручками; два склеенных через дырку тора.
- Если склеим квадрат вот так, получим цилиндр.
- Если склеим квадрат по-другому, получим лист Мёбиуса.

### 2.12.2 Частные случаи факторизации

- Стягивание подпространства  $A \subset X$  в точку.  $x \sim y \iff \begin{cases} x = y \\ x, y \in A \end{cases}$ . Так, в отрезке  $[0, 1]$  при стягивании подпространства  $\{0, 1\}$  в точку опять же получим окружность.
- В замкнутом круге  $D_1(0)$  при стягивании окружности  $S_1(0)$  получим  $S^2$ .
- Проективная плоскость — отождествление диаметрально противоположных точек на окружности круга.
- **Определение 2.12.2** (Дизъюнктное объединение топологических пространств).  $U$  открыто в  $X \sqcup Y \iff U \cap X$  открыто в  $X$  и  $U \cap Y$  открыто в  $Y$ .

Теперь можно, например, склеить из двух отрезков  $AB$  и  $CD$  окружность, отождествив  $A \sim C$  и  $B \sim D$ .

$X, Y$  — топологические пространства. Пусть  $A \subset X, f : A \rightarrow Y$ .

**Определение 2.12.3** (Склейка  $X$  и  $Y$  по отображению  $f$ ). Факторпространство  $X \sqcup Y / \sim$ , где  $\sim$  — наименьшее по включению отображение эквивалентности, такое, что  $x \sim f(x)$ .

Обозначается  $X \sqcup_f Y$ .

*Свойства.*

- Фактортопология является топологией (проверить).
- Факторпространство связного пространства связно.
- Факторпространство линейно связного пространства связно.
- Факторпространство компактного пространства компактно.

## Лекция IX

20 декабря 2022 г.

**Теорема 2.12.1.**  $Y \rightarrow X \sqcup_f Y$  — топологическое вложение.

*Доказательство.* Проекция  $X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup_f Y$  непрерывна по определению фактортопологии. Значит, сужение проекции  $Y \rightarrow X \sqcup_f Y$  непрерывно.

Обратно: рассмотрим любое открытое  $U \subset Y$ . Докажем, что его образ в  $p(U)$  открыт в  $X \sqcup_f Y$ . По определению склейки по отображению  $p(U) = p(U \sqcup f^{-1}(U))$ . Это множество открыто по определению фактортопологии, и из-за непрерывности  $f$ .  $\square$

**Теорема 2.12.2.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства,  $X$  склеивают по  $\sim$ ,  $f : X / \sim \rightarrow Y$ . Утверждается, что условие непрерывности  $f$  равносильно условию непрерывности  $f \circ p$ .

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ . Композиция непрерывных непрерывна.

$\Leftarrow$ . Проверим по определению непрерывность  $f$ . Рассмотрим открытое  $U \subset Y$ . Так как  $f \circ p$  непрерывна, то  $p^{-1}(f^{-1}(U))$  открыто. Но  $p$  можно «отменить»:  $p(p^{-1}(f^{-1}(U)))$  открыто по определению фактортопологии.  $\square$

**Теорема 2.12.3** (О пропускании через фактор). Пусть  $X, Y$  — топологические пространства,  $\sim$  — отношение эквивалентности на  $X$ . Рассмотрим  $g : X \rightarrow Y$ , такое, что оно уважает  $\sim$ , то есть  $x_1 \sim x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ .

Утверждается, что найдётся **непрерывная**  $f : X / \sim \rightarrow Y$ , такая, что  $g = f \circ p$ , где  $p$  — каноническая проекция.

*Доказательство.*  $f(\bar{x}) = g(x)$ . Определение корректно, так как  $g$  уважает  $\sim$ .

Заметим, что  $f$  непрерывна, так как  $f \circ p$  непрерывна.  $\square$

**Теорема 2.12.4.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывное сюръективное отображение.

Рассмотрим отношение эквивалентности на  $X$ :  $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ .

Утверждается, что  $X / \sim$  гомеоморфно  $Y$ .

*Доказательство.* Гомеоморфизм  $f : X / \sim \rightarrow Y$  существует и непрерывен согласно предыдущей теореме.

Он очевидно инъективен и сюръективен из-за сюръективности  $f$ .

$f^{-1}$  непрерывно, так как  $f(U)$  открыто для открытого  $U$   $\square$

## Лекция X

16 февраля 2022 г.

### 2.13 Многообразия

**Определение 2.13.1** ( $m$ -мерное многообразие). Хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, любая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную  $\mathbb{R}^m$ .

*Контрпример.* Две прямые, склеенные везде, кроме пары точек. Не хаусдорфово.

*Интересный факт* (Теорема об инварианте размерности). Никакие два непустые открытые подмножества  $U \subset \mathbb{R}^n$  и  $V \subset \mathbb{R}^n$  не совпадают.

*Примеры.*

- $\mathbb{R}^n$  и всякое его открытое подмножество.
- Для  $n = 0 : \mathbb{R}^0 = \{\text{pt}\}$ . Многообразием является всякое счётное дискретное топологическое пространство.
- $S^n$  — сфера размерности  $n$ . В качестве окрестности точки  $x$  рассмотрим  $S^n \setminus \{y\}$ , где  $y$  — произвольная точка сферы,  $y \neq x$ .
- $\mathbb{R}P^n$ . Рассмотрим  $S^n \subset \mathbb{R}^n$ . Введём на сфере отношение эквивалентности:  $x = -x$ , где  $x$  — точки сферы.  $\mathbb{R}P^n \cong S^n / \sim$ . Образы координат при проекции на «координатную полусферу».

В частности  $\mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{R}P$ .

**Определение 2.13.2** ( $m$ -мерное многообразие с краем). Хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, любая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную  $\mathbb{R}^m$  или  $\mathbb{R}_+^m := \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$ .

**Определение 2.13.3** (Край многообразия). Множество точек, для которых не существует окрестности, гомеоморфной  $\mathbb{R}^m$ .

*Интересный факт.*  $\mathbb{R}_+^m$  негомеоморфно никакому открытому подмножеству  $\mathbb{R}^n$  для любого  $n$ .

*Интересный факт.* Край многообразия размерности  $n$  — многообразие размерности  $n - 1$ .

**Определение 2.13.4** (Замкнутое многообразие). Компактное многообразие без края.

*Пример.* Например, сфера  $S^n$ .

*Контрпример.* Полупространство.

*Интересный факт.* Всякое замкнутое связное многообразие размерности 1 гомеоморфно окружности  $S^1$ .

*Примеры* (Примеры двумерных многообразий).

•

*Примеры* (Двумерные многообразия).

- Лента Мёбиуса: двумерное многообразие с краем. Склейка прямоугольника по формуле  $aabay$  или треугольника — по формуле  $aax$ . Край ленты Мёбиуса — окружность
- Тор: склейка прямоугольника по формуле  $aba^{-1}b^{-1}$ .
- Бутылка Клейна: склейка прямоугольника по формуле  $aba^{-1}b$ .
- $\mathbb{R}P^2 \cong S^2 / \sim$  эквивалентно склейке  $aa$ . (теорема 2.12.4)

### 2.13.1 Модельные поверхности

- Сфера с  $n$  (открытыми) дырками.
- Сфера с  $p$  ручками: к сфере с  $p$  дырками приклеить по ручке (тор с дыркой) каждой дырке.
- Сфера с  $q$  плёнками к сфере с  $q$  дырками приклеить по плёнке (ленте Мёбиуса) каждой дырке.

Утверждается, что если у дырки отождествить противоположные точки, то получится заклеивание дырки плёнкой.

- Сфера с  $n$  дырками,  $p$  ручками и  $q$  плёнками.

Утверждается, что если есть хотя бы одна плёнка, то  $p$  ручек и  $q$  плёнок гомеоморфны  $2p + q$  плёнкам.

**Определение 2.13.5** (Развёртка). Конечное множество непересекающихся многоугольников плоскости, у которых стороны разбиты на пары, и выбран линейный гомеоморфизм между сторонами одной пары. Соответствующее факторпространство называется замкнутой 2-мерной поверхностью.

**Факт 2.13.1.** Замкнутая 2-мерная поверхность является замкнутым двумерным многообразием.

*Доказательство.* Компактность очевидна; проверим, что у каждой точки (внутренности многоугольника, середины ребра, вершины) есть окрестность, гомеоморфная  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

*Замечание.* Если поверхность связна, то у неё есть развёртка, состоящая из одного многоугольника.

**Определение 2.13.6** (Ориентируемая развёртка). Всегда ребро  $a$  склеивается с ребром  $a^{-1}$ .

**Определение 2.13.7** (Каноническая развёртка первого типа).  $4p$ -угольник, в котором стороны склеены по правилу  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots$ . Для данного  $p$  каноническая развёртка фиксирована. Для  $p = 1$  это тор; для  $p = 2$  поверхность развёртки называется *крендель*. В общем случае это сфера с  $p$  ручками.

**Определение 2.13.8** (Каноническая развёртка второго типа).  $2q$ -угольник, в котором стороны склеены по правилу  $a_1a_1a_2a_2\dots$ . Для  $q = 1$  поверхность развёртки —  $\mathbb{R}P^1$ . В общем виде — сфера с  $q$  плёнками.

После хитрого склеивания видно, что бутылка Клейна имеет формулу  $a^{-1}a^{-1}cc$ , то есть изоморфна развёртке второго типа для  $q = 2$ .

**Факт 2.13.2.** Развёртка первого типа для фиксированного  $p$  изоморфна сфере с  $p$  ручками.

*Доказательство.* Будем приклеивать ручки по индукции. Заметим, что склейка пятиугольника по формуле  $aba^{-1}b^{-1}x$  даёт тор с дыркой. Ну, дальше как-нибудь приклеим.  $\square$

**Факт 2.13.3.** Аналогично доказываем, что развёртка второго типа изоморфна сфере с  $q$  плёнками.

**Теорема 2.13.1.** • Любая связная замкнутая двумерная поверхность с ориентируемой развёрткой изоморфна сфере с  $p$  ручками для некоего  $p$ .

• Любая связная замкнутая двумерная поверхность с неориентируемой развёрткой изоморфна сфере с  $q$  плёнками для некоего  $q$ .

## Лекция XI

2 марта 2022 г.

Пусть  $\mathcal{F}$  — замкнутое двумерное многообразие

**Определение 2.13.9** (Топологический треугольник). Пара  $(T, \phi)$ , где  $T \subset \mathcal{F}$  — подпространство, а  $\phi : \Delta \rightarrow T$  — гомеоморфизм из произвольного треугольника плоскости (треугольник берётся  $\subset \mathbb{R}^2$  вместе со внутренностью) на  $T$ . Образы рёбер треугольника называются *рёбрами* топологического треугольника, образы вершин — *вершинами*.

**Определение 2.13.10** (Триангуляция замкнутого двумерного многообразия). Конечный набор топологических треугольников  $K = \{T_i, \phi_i\}_{i=1..n}$ , такой, что выполняются условия:

- Треугольники покрывают всё пространство:  $\bigcup_{i=1}^n T_i = \mathcal{F}$ .
- Пересечение любых двух треугольников — их общее ребро, общая вершина, либо пустое.

**Определение 2.13.11** (Триангулируемая поверхность). Поверхность, у которой существует триангуляция.

*Интересный факт.* У любого замкнутого компактного двумерного многообразия есть триангуляция.

Hint: доказательство использует сильный вариант теоремы Жордана: замкнутая несамопересекающаяся кривая бьёт плоскость на две компоненты, такие, что одна из них — диск.

**Предложение 2.13.1.** Всякое компактное двумерное многообразие можно представить, как факторпространство некоторой развёртки.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную триангуляцию, это частный случай развёртки: треугольников — прообразов  $\phi_i$  в триангуляции — конечное число; их можно расположить на одной плоскости гомеоморфизмом из многих плоскостей в одну.

Совместим два треугольника в один, если их два ребра — общий прообраз какого-то ребра топологического треугольника многообразия.

Надо аккуратно проследить за тем, чтобы гомеоморфизм был линейным, и, видимо, всё получится.

Утверждение: факторпространство объединения треугольников по условию развёртки — исходное многообразие.

В общем, я не понимаю, какого уровня строгости ожидать, и не очень въезжаю вообще в то, что рассказывается.  $\square$

*Интересный факт.* Пространства, задаваемые различными каноническими развёртками негомеоморфны. Доказательство в конце семестра будет использовать фундаментальную группу.

**Теорема 2.13.2.** Если развёртка ориентируемая, то она гомеоморфна поверхности, задаваемой развёрткой I типа. Если развёртка неориентируемая, то она гомеоморфна поверхности, задаваемой развёрткой II типа.

*Доказательство.* Приведём произвольную развёртку к каноническому виду, используя следующие операции над развёртками:

1. Подразделение многоугольника на два. Плюс один многоугольник, плюс одно правило склейки.
2. Обратная предыдущей: склеивание.
3. Свёртывание  $aa^{-1} = \text{ничего}$  (свёртка разрешается, если в многоугольнике хотя бы 3 ребра).

Займёмся комбинаторикой.

1. Так как факторпространство развёртки — поверхность — связна, то можно считать, что развёртка — один многоугольник (склеим, если их несколько). Теперь все правила склейки — одно циклическое слово типа  $abca^{-1}deb^{-1}d^{-1}c^{-1}\dots$
2. Убираем вхождения подстрок типа  $aa^{-1}$ . Если в какой-то момент осталась строка  $aa^{-1}$ , то наша поверхность — сфера.
3. Приводим к развёртке, в которой все вершины эквивалентны. Как? Пусть есть две неэквивалентные вершины  $A \not\sim B$ . Если такие нашлись, то можно считать, что они — соседние.

Пусть  $A = a - B - b - C$ , где  $a, b$  — правила склейки. Заметим, что  $b \neq a^{-1}$ , иначе бы мы свернули  $B$ , а ещё  $b \neq a$ , так как  $B \not\sim A$ . Проведём ребро  $d = AC$ , разрежем по нему, склеим по  $b$ .

Заметим, что вершин, эквивалентных  $A$  стало на одну меньше, эквивалентных  $B$  — на одну меньше, остальных количества не поменялось.

Иначе говоря, отрезали треугольник  $ABC$ , и приклеили его в другое место. Видимо, так всегда можно сделать, хотя у меня это вызывает не очень много доверия.

Такими действиями можно переклеиваниями все вершины сделать эквивалентными.

4. Выделение лент Мёбиуса. Если где-то есть два вхождения символа  $c$  одного направления, то есть слово имеет вид  $c\omega_1c\omega_2$ , то разрежем по диагонали  $d$ , склеим, получим  $dd\omega_1(\omega_2)^{-1}$ .

Повторим этот шаг столько, сколько можно, теперь все правила склейки одного направления идут подряд.

5. Выделение ручек. Если предыдущий шаг не привёл к канонической развёртке, то найдётся две буквы  $c$  и  $c^{-1}$ .

Утверждается, что найдутся ещё два символа  $d, d^{-1}$ , такие, что в циклическом порядке  $d$  идёт между  $c$  и  $c^{-1}$ , а  $d^{-1}$  — нет. Это следует из того, что все вершины эквивалентны: если бы таких  $d, d^{-1}$  не нашлось бы, то между вершинами от  $c$  до  $c^{-1}$  и между вершинами от  $c^{-1}$  до  $c$  не было бы связки эквивалентности.

Итак, слово развёртки имеет вид  $c\omega_1d\omega_2c^{-1}\omega_3d^{-1}\omega_4$ .

Разрежем по диагонали  $a$ , соединяющей соответствующие концы  $c$  и  $c^{-1}$  и склеим по  $d$ . Получим слово  $c\omega_1\omega_4a\omega_3\omega_2c^{-1}a^{-1}$ . Не, ну это нереально понять без картинок (я ещё наверняка везде набагал при записи слов)...

Теперь проведём диагональ  $b$  между соответствующими концами  $a$  и  $a^{-1}$ , разрежем по нему и склеим по  $c$ .

Получим слово  $\omega_1\omega_4a^{-1}bab^{-1}a^{-1}\omega_3\omega_2$ . Выделили ручку. Повторяем это тоже, пока можно.

6. Замена ручек лентами Мёбиуса. Пусть есть хотя бы одна ручка и хотя бы одна плёнка. Слово имеет вид  $cc\omega_1aba^{-1}\omega_2$ . Разрежем по центральной диагонали  $d$  (соединяющей середины ручки и плёнки), склеим по  $c$ , получим слово  $abd(\omega_2)^{-1}bad\omega_1$ . Из  $a, b, d$  склеим три плёнки, повторяем, пока можно.

□

## 2.13.2 Клеточные пространства

«Сейчас мы определим способ построения более страшных пространств, но всё ещё не очень плохих» По-другому клеточные пространства называют CW-комплексы. С значит closure finiteness, W значит Weak?? Возможно, раньше определение сильной и слабой топологии было противоположным.

**Определение 2.13.12** (Клеточное пространство размерности 0). Дискретное пространство — любой (возможно, несчётный) набор точек, каждая из которых — открытое множество.

Эти точки называют (нульмерными) *клетками*.

**Определение 2.13.13** (Диск размерности  $k$ ). Замкнутый шар в  $\mathbb{R}^k$ . Его граница  $\delta D^k$  — сфера  $S^{k-1}$ .

**Определение 2.13.14** (Клеточное пространство размерности  $n \in \mathbb{N}$ ). Топологическое пространство, полученное из клеточного пространства размерности  $n-1$ , в него вклеили множество дисков  $\{D_\alpha^n\}_{\alpha \in \Lambda}$ , приклеивая по их границам: по отображению  $\phi_\alpha = \delta D_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}$ , где  $X^{n-1}$  — предыдущее клеточное пространство размерности  $n-1$ .

Внутренности вклеенных дисков называют *клетками*.

Промежуточные клеточные пространства называются *k-мерными остовами (скелетами)*

Дополнительным условием является то, что  $\phi_\alpha(\delta D_\alpha)$  содержится в конечном числе клеток соответствующего многообразия размерности  $n-1$ .

«Не запрещается что-то плохое», например, всю границу диска  $D^2$  вклейть в среднюю точку одного из отрезков  $D^1$ .

**Определение 2.13.15** (Клеточное разбиение топологического пространства). Конкретное представление топологического пространства в виде клеточного пространства.

Так, сфера  $S^2$  является клеточным пространством «точка + ничего + приклеиваем диск по точке» = «точка + экватор + приклеиваем два диска по экватору».

**Определение 2.13.16** (Клеточное пространство размерности  $\omega$ ). Рассмотрим цепочку клеточных пространств

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset X^{n+1} \subset \dots$$

Можно проверить, что включение — включение подпространств в топологическом смысле, открытые множества сохраняются.

Тогда определим предельное клеточное пространство размерности  $\omega$  на множестве  $\bigcup_{i=0}^{\infty} X^i$ .

Топологию на данном объединении определим следующим образом:  $U$  открыто в  $X \iff \forall n : U \cap X^n$  открыто в  $X^n$ .

Имеют место следующие два утверждения:

- Можно показать, что определённая выше топология — самая сильная, такая, что  $\text{in} : X^n \hookrightarrow X$  — непрерывное отображение.
- Можно показать, что определённая выше топология — самая сильная, такая, что  $\text{in} : X^n \hookrightarrow X$  — вложение.

Пусть  $X$  — конечное (состоит из конечного числа клеток) клеточное пространство.

**Определение 2.13.17** (Эйлерова характеристика клеточного пространства  $X$ ).  $\chi(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k |I_k|$ , где  $|I_k|$  — число  $k$ -мерных клеток.

Используя гомологию, можно доказать, что эйлерова характеристика не зависит от разбиения пространства на клетки.

**Определение 2.13.18** (Род двумерной поверхности). Наибольшее число дизъюнктных окружностей, которые можно вырезать так, чтобы она оставалась связной.

**Факт 2.13.4.** Род сферы с  $p$  ручками и без плёнок:  $\text{род}(S_{p,0}) = p$ . Род сферы с  $q$  плёнками и без ручек:  $\text{род}(S_{0,q}) = q$ .

В частности, род сферы 0, род тора — 1.

Вырезание дырки не меняет род.

Посчитаем эйлерову характеристику сферы с  $p$  ручками.

Рассмотрим каноническую развёртку, ей соответствует естественное клеточное разбиение из одной нульмерной клетки (общая вершина), одной двумерной (поверхность) и  $2p$  одномерных (так как в развёртке  $4p$  вершин и столько же рёбер, но каждая пара рёбер отождествлена).  $\chi(S_{p,0}) = 2 - 2p$ .

Аналогично эйлерова характеристика сферы с  $q$  плёнками равна  $\chi(S_{0,q}) = 2 - q$ .

«Если считать, что всё, что мы сформулировали, мы знаем, то можно получить следующую теорему»

**Теорема 2.13.3.** Двумерная компактная поверхность (возможно, с краем) однозначно задаётся тройкой параметров: число компонент края, ориентируемость (наличие хотя бы одной плёнки), эйлеровой характеристикой.

*Доказательство.* Сведение к случаю поверхности без края очевидно — заклеить все дырки дисками.

В зависимости от ориентируемости определяем, поверхность с ручками или плёнками, а потом эйлерова характеристика показывает, сколько их.  $\square$

Отсюда видно, что всякая такая поверхность имеет развёртку в виде многоугольника, у которого каждая сторона либо сама по себе, либо склеена ровно с одной другой.

# Глава 3

## Геометрия

### Лекция XII 9 марта 2022 г.

#### 3.1 Евклидово пространство

Пусть  $X$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

**Определение 3.1.1** (Скалярное произведение). Отображение  $\langle \cdot, \cdot \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  со следующими свойствами

1. Симметричное:  $\forall x, y \in X : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
2. Билинейное:

$$\forall x, y, z \in X : \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R} : \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

3. Положительная определённость:  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ .

**Определение 3.1.2** (Евклидово пространство). Векторное пространство с заданным на нём скалярным произведением.

*Пример.*  $\mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением.

**Определение 3.1.3** (Норма или длина вектора  $x \in X$ ).  $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Определение 3.1.4** (Расстояние между  $x, y \in X$ ).  $d(x, y) = |x - y|$

Свойства нормы и расстояния:

- $|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$ .
- $|x| > 0$  для  $x \neq 0$ .
- $|\lambda x| = |\lambda||x|$ , в частности,  $|-x| = |x|$ .
- $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ .
- Неравенство Коши — Буняковского — Шварца (далее КБШ):

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

*Доказательство.* Если  $x = 0$  или  $y = 0$ , то доказывать нечего. Пусть оба не равны нулю.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : 0 \leq |x - \lambda y| = \lambda^2 |y|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + |x|^2$$

Выбрав  $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|^2}$  — при нём правая часть принимает наименьшее значение — получаем  $\langle x, y \rangle^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2$  (и равенство достигается при  $|x - \lambda y| = 0$ ), что и требовалось доказать.  $\square$

**Следствие 3.1.1** (Неравенство треугольника для нормы).  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

*Доказательство.* Возвести в квадрат обе части и применить КБШ.  $\square$

**Следствие 3.1.2** (Неравенство треугольника для расстояний).  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

*Доказательство.*

$$d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z) \quad \square$$

**Определение 3.1.5** (Угол между векторами  $x, y \neq 0$ ).  $\angle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|}\right)$

Свойства:

- $\angle \in [0, \pi]$ .
- Для  $\lambda \neq 0$ :  $\angle(x, \lambda y) = \angle(x, y) \cdot \operatorname{sgn}(\lambda)$ .
- **Теорема 3.1.1** (Теорема косинусов).  $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos \angle(x, y)$ .

*Доказательство.* Мы так определили угол.  $\square$

- **Теорема 3.1.2** (Неравенство треугольника для углов).  $\angle(x, z) \leq \angle(x, y) + \angle(y, z)$ .

*Доказательство.* Положим  $\alpha = \angle(x, y), \beta = \angle(y, z)$ . Если  $\alpha + \beta \geq \pi$ , то доказывать нечего.

Построим на плоскости треугольник со сторонами-векторами  $x', z'$ , такими, что  $|x'| = |x|, |z'| = |z|$  и угол между ними равен  $\alpha + \beta$ . Пусть чевиана  $u'$  в треугольнике составляет угол  $\alpha$  со стороной  $x'$  и имеет длину  $|u|$ .

Отложим вектор  $u$  длины  $|u|$  сонаправлено вектору  $y$ .

По теореме косинусов  $|x - u| = |x' - u'|, |u - z| = |u' - z'|$ , согласно неравенству треугольника для  $x$  и  $z$   $|x - z| \leq |x - u| + |u - z| = |x' - u'| + |u' - z'| = |x' - z'|$ .

$$\text{Отсюда получаем } \cos \angle(x, z) = \frac{|x|^2 + |z|^2 - |x - z|^2}{|x| \cdot |z|} \geq \frac{|x'|^2 + |z'|^2 - |x' - z'|^2}{|x'| \cdot |z'|} = \cos \angle(x', z').$$

Таким образом,  $\angle(x, z) \leq \angle(x', z') = \angle(x, y) + \angle(y, z)$ .  $\square$

**Следствие 3.1.3** (Угловой метод на сфере). Пусть  $S = \{x \in X \mid |x| = 1\}$ . На сфере есть метрика  $d_S(x, y) = \angle(x, y)$ .

**Следствие 3.1.4.**  $\angle(x, y) + \angle(y, z) + \angle(x, z) \leq 2\pi$ .

*Доказательство.*

$$\angle(x, z) \leq \underbrace{\angle(x, -y)}_{\pi - \angle(x, y)} + \underbrace{\angle(-y, z)}_{\pi - \angle(y, z)}$$

$\square$

## 3.2 Ортогональные векторы

Пусть  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  — евклидово пространство.

**Определение 3.2.1** (Вектора  $x, y \in X$  ортогональны).  $\langle x, y \rangle = 0$ . Записывают  $x \perp y$ .

Свойства ортогональности:

- $0 \perp x$ .
- $y \perp x_1, \dots, y \perp x_n \Rightarrow y \perp (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$ .
- **Теорема 3.2.1** (Пифагор).

$$x \perp y \Rightarrow |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

**Определение 3.2.2** (Ортонормированный набор векторов). Множество единичных векторов  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , попарно ортогональных.

Пусть  $v_1, \dots, v_n$  — ортонормированный набор векторов.

Свойства:

- $\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$
- Ортонормированный набор векторов линейно независим.

*Доказательство.*  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \iff$  из предыдущего  $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 0$ .  $\square$

**Теорема 3.2.2** (Ортогонализация по Граму — Шмидту). Для любого линейно независимого набора векторов  $v_1, \dots, v_n \in X \exists! \{e_1, \dots, e_n\} \subset X$  — ортонормированный набор векторов, такой, что

$$\forall k = 1..n : \text{Lin}(v_1, \dots, v_k) = \text{Lin}(e_1, \dots, e_k) \quad \text{и} \quad \langle e_k, v_k \rangle > 0$$

*Доказательство.* Докажем и существование, и единственность по индукции.

База:  $n = 1$ , можно принять  $e_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$ . Очевидно, других вариантов нет.

Переход: пусть для  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  выбран набор векторов  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  с необходимыми свойствами.

Выберем  $w_n = v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, e_j \rangle \cdot e_j$ . Это *ортогональная проекция*  $v_n$  на линейное пространство  $\text{Lin}(e_1, \dots, e_{n-1})$ .

Заметим, что  $\forall 1 \leq i < n : \langle w_n, e_i \rangle = \langle v_n, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, e_j \rangle \cdot \langle e_j, e_i \rangle = \langle v_n, e_i \rangle - \langle v_n, e_i \rangle = 0$ .

Таким образом,  $e_n = \frac{w_n}{|w_n|}$  подойдёт.

Единственность: пусть в качестве  $e_k$  был выбран другой вектор,  $\tilde{e}_k$ . По условию теоремы  $\tilde{e}_k \in \text{Lin}(e_1, \dots, e_k)$ . Но тогда есть всего два варианта. Либо  $\exists i \neq k : \langle \tilde{e}_k, e_i \rangle \neq 0$ , это запрещено от условием.. Либо  $\tilde{e}_k = \lambda e_k$  для некоего  $\lambda$  (откуда из нормированности следует  $|\lambda| = 1$  и знак равен 1: определяется исходя из  $\langle \tilde{e}_k, v_k \rangle$ ).  $\square$

$X$  — конечномерное пространство. Тогда в  $X$

- Есть ортонормированный базис.
- Любой ортонормированный набор можно дополнить до базиса.

**Определение 3.2.3** (Изоморфизм евклидовых пространств  $X$  и  $Y$ ). Существует изоморфизм  $f$ : линейное отображение  $f : X \rightarrow Y$ , такое, что  $f : X \rightarrow Y$  — биекция, сохраняющая скалярное произведение.

**Теорема 3.2.3.** Любой два евклидовых пространства одной размерности изоморфны.

*Доказательство.* Определим изоморфизм на ортонормированных базисах и продолжим по линейности.  $\square$

---

Ниже  $X$  всегда конечномерно.

**Определение 3.2.4** (Ортонормированное дополнение  $A \subset X$ ).  $A^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \langle x, a \rangle = 0, a \in A\}$ .

Свойства ортонормированного дополнения:

- $A^\perp$  — линейное пространство.
- $A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$ .
- $A^\perp = \text{Lin}(A)^\perp$ .

**Теорема 3.2.4.** Пусть  $V \subset X$  — линейное подпространство. Тогда  $X = V \oplus V^\perp$ .

**Теорема 3.2.5.** Пусть  $V \subset X$  — линейное подпространство. Тогда верны следующие условия:

1.  $X = V \oplus V^\perp$ .
2.  $(V^\perp)^\perp = V$ .

*Доказательство.* Выберем  $\{e_1, \dots, e_k\}$  — ортонормированный базис  $V$ .

Дополним его до  $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  — ортонормированного базиса  $X$ .

Проверим, что  $\text{Lin}(e_{k+1}, \dots, e_n) = V^\perp$ . Здесь верно включение в обе стороны.  $\square$

## Лекция XIII

16 марта 2023 г.

*Свойства* (Ортогональное подпространство).

- Можно определить ортогональную проекцию  $\text{Pr}_V : X \rightarrow V$  — ведь раз  $V \oplus V^\perp = X$ , то всякий вектор раскладывается в сумму элементов  $V$  и  $V^\perp$ .  $\text{Pr}_V$  — по определению тот вектор из прямой суммы, который лежит в  $V$ .
- $\text{Pr}_V$  непрерывна.
- $\forall x \in X : \text{Pr}_V(x)$  — ближайшая к  $x$  точка в  $V$ . Доказательство — применение теоремы Пифагора.
- Пусть  $H \leqslant X$  — подпространство размерности  $\dim H - 1$ , то есть гиперплоскость.

**Определение 3.2.5** (Нормаль к гиперплоскости  $H$ ). Вектор, перпендикулярный всем векторам гиперплоскости  $H$ .

Нормаль существует и единственна с точностью до домножения на скаляр: это вектор, порождающий  $H^\perp$ .  $\langle n \rangle = H^\perp$ .

**Лемма 3.2.1** (Конечномерная лемма Рисса). Пусть  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$  — линейное отображение, где  $X$  — евклидово пространство.  $\exists! v \in V : L(u) \equiv \langle u, v \rangle$ .

*Доказательство.* Выберем базис  $(e_1, \dots, e_n) \subset X$ . Тогда линейное отображение однозначно задаётся вот так:

$$\begin{aligned} L(u := e_1 u_1 + \dots + e_n u_n) &= L(e_1) u_1 + \dots + L(e_n) u_n \\ L(u) &= \langle (L(e_1) \dots L(e_n)), u \rangle \end{aligned}$$

$\square$

**Факт 3.2.1.** Для любого линейное отображение  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ , не равное нулю  $\not\equiv 0$ :  $\text{Ker}(L)$  — гиперплоскость. Любая гиперплоскость — ядро некой скалярной функции.

*Доказательство.*

- Теорема о размерности ядра и образа.
- Для  $v$  — нормали к гиперплоскости —  $L(x) \equiv \langle v, x \rangle$  подойдёт.  $\square$

**Факт 3.2.2.** Расстояние от точки  $x \in X$  до гиперплоскости  $H \leq X$  равно  $\frac{\langle x, v \rangle}{|v|} \equiv \left\langle x, \frac{v}{|v|} \right\rangle$ , где  $\langle v \rangle = H^\perp$ .

В самом деле,  $x$  раскладывается в сумму  $x = x^\perp + x^\parallel$ , а  $d(x, H) = \left\langle x^\perp + x^\parallel, \frac{v}{|v|} \right\rangle = |x^\perp|$ .

### 3.3 Ортогональные преобразования

Пусть  $X, Y$  — евклидовые пространства (не обязательно одной размерности).

**Определение 3.3.1** (Изометрическое отображение). Такое линейное отображение  $f : X \rightarrow Y$ , что  $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle f(x_1), f(x_2) \rangle$ . В случае равенства пространств  $X = Y$   $f$  называется *ортогональным преобразованием*  $X$ .

*Свойства* (Изометрические преобразования).

- Для всякого линейного отображения  $f$ : изометричность равносильна тому, что  $f$  сохраняет длины векторов.
- Изометрические преобразования инъективны (если  $f(x) = f(y)$ , то  $\|f(x) - f(y)\| = 0$ , то есть  $\|x - y\| = 0$ ).

Группа ортогональных преобразований для пространства  $\mathbb{R}^n$  называется  $\mathcal{O}(n)$ .

*Доказательство.*

**Задача 3.3.1.** Как выглядят ортогональные преобразования в  $\mathbb{R}^2$ ?

Посмотрим, куда перешёл один из ортогональных векторов: матрица перехода имеет вид  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & * \\ \sin \alpha & * \end{pmatrix}$ . Второй столбец должен быть нормирован и ортогонален первому, поэтому

матрица перехода имеет вид  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  (поворот на угол  $\alpha$ ), либо  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$  (какие-то поворот и отражение; главное, что раскладывается в прямую сумму  $\text{id}$  и  $-\text{id}$ ).

Положим  $X_+ := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ ,  $X_- := \{x \in X \mid f(x) = -x\}$ . Очевидно,  $X_+ \cap X_- = \{0\}$ .

Найдём в  $(X_+ \oplus X_-)^\perp$  плоскость поворота; тогда по индукции всё получится.

Формальнее, положим изначально  $V = X_+ \oplus X_-$ . Рассмотрим единичную сферу  $S$  в подпространстве  $V^\perp$ , проверим, что происходит при отображении  $f$  с точками сферы.

$f$  ортогонально, поэтому  $f(S) = S$ , откуда для всякой точки  $x_0 \in S$  можно рассмотреть  $\angle(x_0, f(x_0))$ . Это функция от  $x_0$ , она достигает минимума на компактной сфере. Пусть  $z_0 \in S$  — точка минимума  $\angle(x_0, f(x_0))$ .

Так как  $S \cap X_+ = \{0\}$ , то  $\angle(z_0, f(z_0)) > 0$ . Проверим, что вектора  $z_0$  и  $f(z_0)$  действительно образуют плоскость, которая  $f$ -инвариантна. Это достаточно проверить на базовых векторах  $z_0$  и  $f(z_0)$ .

От противного:  $f(f(z_0)) \notin \langle z_0, f(z_0) \rangle$ . Рассмотрим середины сторон  $z_0 - f(z_0)$  и  $f(z_0) - f(f(z_0))$ , если  $f(f(z_0))$  не лежит в плоскости  $\langle z_0, f(z_0) \rangle$ , то угол между серединами строго меньше угла  $\angle(z_0, f(z_0)) = \angle(f(z_0), f(f(z_0)))$ .

Таким образом, плоскость  $f$  инвариантна, она не бьётся на прямую сумму  $\text{id}$  и  $-\text{id}$ , значит, в ней поворот, её можно прямо приложить к  $V$  и продолжить по индукции.  $\square$

### 3.3.1 Ориентация векторного пространства

**Определение 3.3.2** (Два базиса одинаково ориентированы). Матрица перехода между ними имеет положительный определитель.

**Теорема 3.3.1.** Одноковая ориентируемость базисов — отношение эквивалентности на множестве базисов данного пространства.

*Доказательство.* Детерминант мультиплекативен.  $\square$

**Определение 3.3.3** (Ориентированное векторное пространство). Векторное пространство, в котором один выделен один из классов эквивалентности ориентации базисов.

В таком случае базисы из данного класса эквивалентности называются положительно ориентированными, остальные — отрицательно ориентированными.

В пространстве  $\mathbb{R}^n$  стандартная ориентация базиса совпадает с ориентацией стандартного базиса  $(1 \ 0 \ \dots \ 0), \dots, (0 \ 0 \ \dots \ 1)$

**Определение 3.3.4** (Смешанное произведение). Пусть  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  — ориентируемое векторное пространство размерности  $n$ . Рассмотрим вектора  $v_1, \dots, v_n \in X$ .

Смешанное произведение  $[v_1, v_2, \dots, v_n] \stackrel{\text{def}}{=} \det A$ , где  $A$  — матрица разложения векторов  $v_1, \dots, v_n$  по произвольному ортонормированному базису.

Так как определитель матрицы перехода между двумя ортонормированными базисами равен 1, то определение корректно. Из свойств определителя сразу получаем следующее:

*Свойства* (Смешанное произведение).

- Линейность по каждому аргументу.
- Кососимметричность (транспозиция меняет знак).
- Равенство нулю эквивалентно линейной зависимости.
- $[v_1, \dots, v_n] > 0 \iff (v_1, \dots, v_n)$  — положительный базис.

**Определение 3.3.5** (Векторное произведение). Пусть  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  — **трёхмерное** ориентируемое векторное пространство. Рассмотрим вектора  $u, v \in X$ .

Их векторное произведение  $u \times v$  — такой вектор  $h \in X$ , что  $\forall x \in X : \langle h, x \rangle = [u, v, x]$ .

Существование и единственность такого  $h$  следует из леммы Рисса.

*Свойства* (Векторное произведение).

- По определению  $\langle u \times v, w \rangle = [u, v, w]$ .
- Из кососимметричности смешанного произведения  $u \times v = -v \times u$ .
- Билинейность.
- $u \times v = 0 \iff u$  и  $v$  линейно зависимы.

*Доказательство.*  $u$  и  $v$  линейно зависимы  $\iff [u, v, x] = 0$  всегда.  $\square$

- Для положительного ортонормированного базиса  $(e_1, e_2, e_3)$ :

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned}$$

**Теорема 3.3.2** (Геометрический смысл векторного произведения).

- Векторное произведение  $w := u \times v$  ортогонально каждому из векторов  $u, v$ .

- $(u, v, w)$  образуют положительный базис.
- $|w|$  — площадь параллелограмма, натянутого на  $u$  и  $v$ .

*Доказательство.* • По определению  $\langle u \times v, v \rangle = [u, v, v] = 0$ .

- Применим ортогонализацию Грама — Шмидта для  $u, v$ , получим вектора  $e_1 = a \cdot u, e_2 = b \cdot u + c \cdot v$ , где  $a, c > 0$ . Введём  $e_3$  так, что  $(e_1, e_2, e_3)$  — положительный ортонормированный базис. По определению  $u \times v = ace_3$ , откуда  $\square$

## Лекция XIV

23 марта 2023 г.

### 3.3.2 Формула в координатах

Пусть  $(e_1, e_2, e_3)$  — положительный ортонормированный базис, разложим по базису  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  и  $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ . Тогда

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

Иногда формально пишут

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

### 3.4 Матрицы Грама

Пусть  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  — евклидово пространство.

Матрица Грама  $G(v_1, \dots, v_k)$  — это матрица  $(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^n$ .

*Свойства.*

- $x_i x_j g_{i,j}$  — это что?
- $\det G = [v_1, \dots, v_k]$  или что-то типа
- $\det G = 0 \iff v_1, \dots, v_k$  линейно зависимы.

## Глава 4

# Аффинные пространства

**Определение 4.0.1** (Аффинное пространство). Тройка  $(X, \rightarrow, +)$ , где  $X$  — непустое множество,  $\vec{X}$  — векторное пространство (его называют *ассоциированное* или *присоединённое*), а операция *откладывания вектора*  $+ : X \times \vec{X} \rightarrow X$ , удовлетворяет свойствам:

- $\forall x, y \in X : \exists! u \in \vec{X} : y = x + u$ . Такой  $u$  обозначают  $\vec{x}y$ .
- Выполнена следующая ассоциативность:  $\forall x \in X, u, v \in \vec{X} : (x + u) + v = x + (u + v)$

*Пример* (Основной, и в некотором смысле единственный). Пусть  $X$  — векторное пространство. Выберем  $\vec{X} = X$ , операция сложения наследуется из  $X$ .

На самом деле всё сводится к этому примеру, в дальнейшем будем аффинные пространства  $(X, \vec{X}, +)$  обозначать  $X$ .

*Свойства.*

- $x + \vec{xy} = y$  по определению.
- Правило треугольника:  $\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$ .
- $\vec{xx} = \vec{0}$ : в самом деле,  $\vec{xx} + \vec{xx} = \vec{xx}$ .
- $x + \vec{0} = x$ : в самом деле,  $x + \vec{xx} = x$ .
- $\vec{yx} = -\vec{xy}$ .
- Если так получилось, что  $x + \vec{u} = y + \vec{u}$ , то  $(x + \vec{u}) - \vec{u} = (y + \vec{u}) - \vec{u} \Rightarrow x = y$ .
- Если так получилось, что  $\vec{xy} = \vec{0}$ , то  $y = x + \vec{xy} = x + \vec{0} = x$ .

Рассмотрим аффинное пространство  $(X, \vec{X}, +)$ , выберем произвольный элемент  $O \in X$  — *начало отсчёта*. Утверждается, что начало отсчёта создаёт биекцию между  $X$  и  $\vec{X}$ .

$$\phi_O : X \leftrightarrow \vec{X} \quad x \leftrightarrow \vec{Ox}$$

Проверка инъективности и сюръективности остаются, как упражнение читателю.

Отображение  $\phi_O : X \rightarrow \vec{X}$  называется *векторизацией* аффинного пространства  $X$ .

**Определение 4.0.2** (Линейная комбинация относительно начала отсчёта  $O$ ). Для коэффициентов  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{p}_i \in X$  — вектор  $\vec{v} = \sum_i t_i \vec{p}_i$  или точка  $O + \vec{v}$ .

- Барицентрические (аффинные) линейные комбинации — такие комбинации, что  $\sum_i t_i = 1$ .
- Сбалансированные — такие комбинации, что  $\sum_i t_i = 1$ .

**Теорема 4.0.1.** Барицентрическая линейная комбинация точек — точка, не зависящая от начала отсчёта.

Сбалансированная линейная комбинация векторов — вектор, не зависящий от начала отсчёта.

*Доказательство.* Запишем две барицентрические координаты с началами отсчёта в  $O$  и в  $O'$ :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \sum_i t_i \cdot \overrightarrow{Op_i}; & \vec{v}' &= \sum_i t_i \cdot \overrightarrow{O'p_i} = \sum_i t_i \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'p_i}) = \underbrace{\left( \sum_i t_i \right) \overrightarrow{O'O}}_{0 \text{ для сбалансированной}} + \sum_i t_i \overrightarrow{O'p_i} \\ O + \vec{v} &= O' + \vec{v}' & \text{для барицентрической} &= O' + \overrightarrow{O'O} + \vec{v} = O + \vec{v} \end{aligned}$$

□

Пусть  $X$  — аффинное пространство.

**Определение 4.0.3** ( $Y \subset X$  — аффинное подпространство).  $\exists V \leqslant \vec{X}, p \in Y : Y = p + V$ . Подпространство  $V$  называется *направлением*  $Y$ .

*Свойства.*

- Если  $Y = p + V$  — аффинное подпространство  $X$ , то  $\forall q \in Y : Y = q + V$ .
- $Y$  — аффинное пространство с ассоциированным  $V$ .
- $\forall q \in Y$ : для отображения векторизации  $\phi_q : \phi_q(Y) = V$ .

**Определение 4.0.4** (Размерность ассоциированного пространства). Размерность соответствующего ассоциированного векторного пространства.  $\dim X \stackrel{\text{def}}{=} \dim \vec{X}$ .

**Определение 4.0.5** (Параллельный перенос на вектор  $v \in \vec{X}$ ). Отображение  $T_{\vec{v}} : X \rightarrow X$ ;  $x \mapsto z + \vec{v}$ .

*Свойства.*

- $T_{\vec{v} + \vec{u}} = T_{\vec{v}} + T_{\vec{u}}$ .
- $T_{\vec{0}} = \text{id}$ .
- $T_{(-\vec{v})} = (T_{\vec{v}})^{-1}$

**Следствие 4.0.1.** Параллельные переносы — подгруппа группы биекций множества  $X$ .

**Определение 4.0.6** (Аффинные подпространства параллельны). Их направления совпадают.

**Определение 4.0.7** (Прямая). Аффинное подпространство размерности 1.

**Определение 4.0.8** (Гиперплоскость в конечномерном пространстве  $X$ ). Аффинное подпространство размерности  $\dim X - 1$ .

**Теорема 4.0.2.** Пересечение любого множества аффинных подпространств — либо пустое множество, либо аффинное подпространство.

*Доказательство.* Обозначим пересекаемые подпространства за  $(Y_i, \vec{V}_i, +)$ .

Пусть пересечение непусто, рассмотрим  $p \in \bigcap_i Y_i$ . Всякое подпространство  $Y_i$  имеет вид  $Y_i = p + \vec{V}_i$ .

Пересечение имеет вид  $p + \bigcap_i \vec{V}_i$ .

□

**Определение 4.0.9** (Аффинная оболочка точек  $A \subset X$ ). Пересечение всех аффинных подпространств, содержащих  $A$ . Иначе говоря, наименьшее аффинное подпространство, содержащее  $A$ . Обозначается  $\text{Aff}(A)$ .

Обозначим за  $B_p(A)$  образ  $A$  при векторизации с началом отсчёта в произвольной точке  $p \in A$ :

$$B_p(A) := \phi_p(A) = \{\overrightarrow{pa} \mid a \in A\}$$

**Предложение 4.0.1.**  $A \subset Y$  для некоего аффинного подпространства  $Y = p + V \iff B_p(A) \subset V$ .

**Предложение 4.0.2.**  $\phi_p(\text{Aff } A) = \text{Lin}(B_p(A))$ .

*Замечание.* Мне откровенно лень писать доказательства здесь.

**Теорема 4.0.3.** Аффинная оболочка множества  $A$  совпадает с множеством барицентрических комбинаций точек множества  $A$ .

*Доказательство.* //todo

□

**Определение 4.0.10** (Множество точек  $\{p_1, \dots, p_n\} \subset X$  аффинно независимо). Существует нетривиальная сбалансированная комбинация:  $\sum_i t_i = 0$ , причём  $\sum_i t_i \overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{0}$ . Ранее было показано, что начало отсчёта можно выбрать произвольно.

**Теорема 4.0.4.** Для множества точек  $A \subset X$  следующие условия равносильны:

- Аффинно независимы
- Векторы  $p_1 p_k$  независимы
- $\dim \text{Aff } A = n - 1$ .
- Всякая точка из  $\text{Aff } A$  представима в барицентрическом виде единственным образом.

## Лекция XV

30 марта 2023 г.

$$\text{Доказательство} \iff 2 \sum_i t_i p_i = 0 \iff \sum_i t_i \overrightarrow{p_1 p_i}$$

$$2 \iff 3 \dots$$

$1 \Rightarrow 4$  От противного: две барицентрические комбинации быть не могут, ноль — тоже по предыдущей теореме.

$4 \Rightarrow 1$  Пусть аффинно зависимы, найдём два барицентрических представления какой-то точки. □

Рассмотрим аффинное пространство  $(X, \overrightarrow{X}, +)$  размерности  $n$ .

**Определение 4.0.11** (Аффинный точечный базис). Линейно независимое множество  $\{p_1, \dots, p_{n+1}\} \in X$

**Определение 4.0.12** (Аффинный базис). Фиксированный нуль  $O \in X$ , линейно независимое множество векторов  $e_1, \dots, e_n \in \overrightarrow{X}$ .

В аффинном точечном базисе любая точка представима единственным образом, как барицентрическая комбинация базиса. Коэффициенты в разложении точки по этому базису называют *барицентрическими координатами*.

Если же рассматривается разложение по аффинному базису, то коэффициенты — *аффинные координаты*.

## 4.1 Аффинные отображения

$(X, \vec{X}, +), (Y, \vec{Y}, +)$  — аффинные пространства.

$\forall \mathcal{F} : X \rightarrow Y$  определим соответствующее отображение  $\tilde{\mathcal{F}}_p : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}; \quad \tilde{\mathcal{F}}_p(\vec{v}) = \overrightarrow{\mathcal{F}(p)\mathcal{F}(p+\vec{v})}$ .

**Определение 4.1.1** (Аффинное отображение  $\mathcal{F} : X \rightarrow Y$ ). Для некоторой точки  $p \in X$ : отображение  $\tilde{\mathcal{F}}_p$  линейно.

**Лемма 4.1.1.** Если для некоторой точки  $p : \tilde{\mathcal{F}}_p$  аддитивно, то  $\forall q \in X : \tilde{\mathcal{F}}_q \equiv \tilde{\mathcal{F}}_p$ .

*Замечание.* Получили переформулировку:  $\mathcal{F}$  аффинное, если  $\exists L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ , такое, что  $\overrightarrow{\mathcal{F}(p)\mathcal{F}(q)} = L(\vec{pq})$ .

**Факт 4.1.1.** Для фиксированных точек  $x \in X, y \in Y$  и линейного отображения  $L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$  существует и линейное аффинное отображение  $\mathcal{F} : X \rightarrow Y$ , такое, что  $\mathcal{F}(x) = y, \tilde{\mathcal{F}} = L$ .

**Определение 4.1.2** (Коллинеарные точки). Точки, лежащие на одной прямой; аффинное зависимые точки.

**Теорема 4.1.1.** Пусть  $X, Y$  — аффинные пространства,  $\mathcal{F}$  — инъективное отображение, переводящее прямые  $l \subset X$  в прямые  $\mathcal{F}(l) \subset Y$ .

*Доказательство.* Назовём отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  хорошим, если это биекция, переводящая прямые в прямые.

**Лемма 4.1.2.** Хорошее  $f$  переводит неколлинеарные точки в неколлинеарные.

*Доказательство.* От противного: три неколлинеарные точки  $A, B, C$  перешли в прямую  $l$ . Тогда  $AB, BC, AC$  как прямые, тоже перешли в  $l$ .

Дальше любая прямая плоскости пересекает хотя бы 2 из трёх прямых среди  $AB, BC, AC$ , значит, вся плоскость перешла в  $l$ . Противоречие с биективностью.  $\square$

**Лемма 4.1.3.** Хорошее отображение переводит параллельные прямые в параллельные прямые.

*Доказательство.* Параллельные  $\equiv$  непересекающиеся.  $\square$

$\square$