

# Основы теории множеств. Неофициальный конспект

Лектор: Виктор Львович Селиванов  
Конспектировал Леонид Данилевич

I семестр, осень 2022 г.

# Оглавление

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Наивная теория множеств</b>   | <b>3</b> |
| 1.1      | Множества. Отношения и операции . . . . .                                | 3        |
| 1.1.1    | Отношения . . . . .  | 3        |
| 1.2      | Мощность множества. Сравнение мощностей . . . . .                        | 5        |
| 1.2.1    | Свойства отношения равномощности . . . . .                               | 5        |
| 1.2.2    | Некоторые виды множеств по мощностям . . . . .                           | 6        |
| 1.3      | Числовые структуры в теории множеств . . . . .                           | 6        |
| 1.3.1    | Натуральные числа . . . . .  | 6        |
| 1.3.2    | Целые числа . . . . .  | 7        |
| 1.3.3    | Рациональные числа в теории множеств . . . . .                           | 7        |
| 1.3.4    | Вещественные числа в теории множеств . . . . .                           | 8        |
| 1.3.5    | Комплексные числа . . . . .  | 8        |
| <b>2</b> | <b>Аксиоматика Цермело — Френкеля с аксиомой выбора.</b>                 | <b>9</b> |
| 2.1      | Противоречивость наивной теории множеств . . . . .                       | 9        |
| 2.2      | Аксиомы Цермело — Френкеля с аксиомой выбора, ZFC . . . . .              | 9        |
| 2.3      | Вполне упорядоченные множества. Ординалы . . . . .                       | 11       |
| 2.3.1    | Свойства полных порядков . . . . .                                       | 12       |
| 2.3.2    | Ординалы . . . . .   | 13       |
| 2.4      | Эквивалентные формулировки аксиомы выбора . . . . .                      | 16       |
| 2.4.1    | О наибольшем и максимальном элементах в $(X, \sqsubset)$ . . . . .       | 16       |
| 2.4.2    | Формулировки . . . . .   | 16       |
| 2.5      | Сравнимость мощностей, шкала кардиналов, кумулятивная иерархия . . . . . | 17       |
| 2.5.1    | Шкала бесконечных кардиналов . . . . .                                   | 18       |
| 2.5.2    | Кумулятивная иерархия . . . . .  | 18       |
| 2.5.3    | Арифметика кардиналов . . . . .  | 19       |
| 2.5.4    | Арифметика ординалов . . . . .   | 19       |

# Лекция I

6 сентября 2022 г.

## Литература

1. Н. К. Верещагин, А. Шень. «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. ч. 1. Начала теории множеств». — М.: МЦНМО, 2012.
2. К. Куратовский, А. Мостовский. «Теория множеств». М.: Мир, 1970.
3. Т. Йех, «Теория множеств и метод форсинга». М.: Мир, 1973
4. И. А. Лавров, Л. Л. Максимова, «Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов». М.: Наука, 2001.

# Глава 1

## Наивная теория множеств

### 1.1 Множества. Отношения и операции

Множества бывают конечные (с  $n \in \mathbb{N}_0$  элементами) и бесконечные.

Конечные множества можно задать перечислением  $\{1, 3, 8, 21\}$  или свойством  $\{x | \phi(x)\}$ , например,  $\{x | x - \text{чётное натуральное}\}$ .

Равенство  $A = B \iff \forall x : (x \in A \iff x \in B)$ .

Включение  $A \subset B \iff \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$ .

Пересечение  $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ . Ассоциативно и коммутативно. Дистрибутивно относительно  $\Delta$ .

Объединение  $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ . Ассоциативно и коммутативно.

Разность  $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ .

Симметрическая разность  $A \Delta B \stackrel{def}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Ассоциативно и коммутативно.

Дополнение  $A^c \stackrel{def}{=} U \setminus A$ , если все рассматриваемые множества содержатся в универсуме  $U$ .

Булеан — множество всех подмножеств  $A$ . Обозначается  $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{X | X \subset A\}$ .

#### 1.1.1 Отношения

Декартово произведение  $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ . Подмножества  $R \subset A \times B$  называются бинарными отношениями между  $A$  и  $B$ . Запись  $(a, b) \in R$  иногда упрощают до  $aRb$ . Так, типичным отношением является « $<$ ». Тогда пишут  $a < b$ .

Композиция отношений  $R$  (между  $A$  и  $B$ ) и  $S$  (между  $B$  и  $C$ ):

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C | \exists b \in B : ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S)\}$$

$R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$ ;  $R^{-1} \subset B \times A$  — обратное отношение.  $(R^{-1})^{-1} = R$ .

$dom(R) = \{a | \exists b : (aRb)\}$  — область определения  $R$ .

$rng(R) = \{b | \exists a : (aRb)\}$  — область значений  $R$ .

Образ  $R(A') = \{b \in B | \exists a \in A' : aRb\}$  для  $A' \subset A$ .

Прообраз  $R^{-1}(B') = \{a \in A | \exists b \in B' : aRb\}$  для  $B' \subset B$ .

$R$  является функциональным отношением  $\iff \forall a, b, b' : ((aRb) \wedge (aRb')) \Rightarrow b = b'$ .

$R$  — функция, если оно функционально, и  $\text{dom}(R) = A$ . В таком случае пишут  $R(a) = b$  для того единственного  $b \in B : aRb$ .

Можно подчеркнуть, что  $R$  — тотальная функция, а если  $\text{dom}(R) \neq A$ , и  $R : \subset A \rightarrow B$ , то это частичная функция.

Функция называется инъекцией, если  $\forall a, a' \in A : a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$ .

Функция называется сюръекцией, если  $\text{rng}(f) = B$ .

Функция называется биекцией, если она одновременно является и сюръекцией, и инъекцией.

### Типы внутренних бинарных отношений $R \subset A \times A$

Рефлексивность  $\forall a \in A : aRa$ .

Антирефлексивность  $\forall a \in A : \neg(aRa)$ .

Симметричность  $\forall a, b \in A : aRb \iff bRa$ .

Антисимметричность  $\forall a, b \in A : ((aRb) \wedge (bRa)) \Rightarrow a = b$ .

Транзитивность  $\forall a, b, c \in A : (aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow aRc$ .

Предпорядок — отношение с рефлексивностью и транзитивностью. Обозначается  $\leq, \preceq, \subseteq, \sqsubseteq$ .

Частичный порядок — антисимметричный предпорядок.

Строгий порядок — антирефлексивность и транзитивность. Обозначается  $<, \prec, \subset, \sqsubset$ .

Эквивалентность — рефлексивность, симметричность, транзитивность.  $=, \equiv, \approx, \cong, \simeq$ .

### Классы эквивалентности

Рассмотрим некоторое множество  $A$  и отношение эквивалентности на нём  $\equiv$ .

Пусть  $[ ] : A \rightarrow 2^A, a \mapsto [a]$ , где  $[a] = \{x \in A | x \equiv a\}$  — класс эквивалентности, (порождённый элементом  $|$  элементом)  $a$ .

Предложение: классы эквивалентности образуют разбиение  $A$ , т. е.  $\forall a \in A : [a] \subset A \wedge [a] \neq \emptyset$ , а кроме того  $\forall x, y \in A : ([x] = [y]) \vee ([x] \cap [y] = \emptyset)$  и  $\bigcup_{a \in A} [a] = A$ .

*Доказательство.*  $[a] \neq \emptyset$ , так как  $a \in [a]$ . По этой же причине  $\left(\bigcup_{a \in A} [a]\right) \supset \left(\bigcup_{a \in A} a\right) \supset A$ , но так как  $\forall a \in A : [a] \subset A$ , то  $\bigcup_{a \in A} [a] = A$ .

Если  $a \equiv b$ , то  $\forall x \in [a] : x \in [b]$ , (так как раз  $a \equiv x$ , то по транзитивности  $b \equiv x$ ).

Если же  $a \not\equiv b$ , то  $[a] \cap [b] = \emptyset$ . От противного: пусть  $\exists x \in A : x \in [a] \wedge x \in [b]$ . Тогда по транзитивности  $a \equiv b$ , противоречие.  $\square$

Фактор множества  $A$  по отношению эквивалентности  $\equiv$  обозначается  $A_{/\equiv}$ .

$A_{/\equiv} \stackrel{\text{def}}{=} \{s \subset A | \exists a \in A : s = [a]\}$ .

## Лекция II

13 сентября 2022 г.

## 1.2 Мощность множества. Сравнение мощностей

О мощности множества можно думать, как о количестве его элементов. Однако непонятно, как быть с бесконечными множествами.

**Определение 1.2.1** (Равномощность).  $A$  и  $B$  равномощны —  $A \simeq B$  — если существует биекция  $f : A \rightarrow B$ .

### 1.2.1 Свойства отношения равномощности

Отношение рефлексивно, симметрично, транзитивно.

$A \simeq A$ , так как  $id$  — искомая биекция.

$A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$ , так как существование биекции  $f : A \rightarrow B$  влечёт существование обратной биекции  $f^{-1} : B \rightarrow A$ .

$$A \xrightarrow{f} B \wedge B \xrightarrow{g} C \Rightarrow A \xrightarrow{f \circ g} C.$$

Таким образом,  $\simeq$  является отношением эквивалентности, но ввести фактор множества всех множеств нельзя, так как множества всех множеств не существует.

**Определение 1.2.2.** Множество  $A$  не превосходит по мощности множество  $B$  ( $A \preceq B$ ), если существует инъекция  $f : A \rightarrow B$ .

**Теорема 1.2.1** (Теорема Кантора — Шрёдера — Бернштейна).  $A \preceq B \wedge B \preceq A \Rightarrow A \simeq B$ .

*Доказательство.* Пусть  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$  — две инъекции.

Пусть  $h = f \circ g$ . Как композиция инъекций, она является инъекцией.

$$\text{Пусть } \begin{cases} A_0 = A \\ A_1 = g(B) \\ A_2 = h(A) \end{cases} \quad \text{Заметим, что } A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0.$$

$A_1 \simeq B$ , потому что  $g : B \rightarrow A_1$  — биекция.

Аналогично  $h : A_0 \rightarrow A_2$  — биекция.

Утверждается, что достаточно доказать, что  $A_0 \simeq A_1$ .

Определим бесконечную последовательность  $A_{n+2} = h(A_n)$ . Из этого определения видно, что  $A_{n+1} \subseteq A_n$  и множества, равномощные  $A_0$  — с чётными номерами, а равномощные  $A_1$  — с нечётными.

Пусть  $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ . Нетрудно видеть, что  $h : C_0 \rightarrow C_2$  — биекция. Вообще говоря, все  $C_{2n}$  равномощны. После этого из картинки видно, что  $C_{2n}$  уплотняются, а остальные могут тождественно перейти в себя. Формальнее,

$$u : A_0 \rightarrow A_1 \quad u(a) = \begin{cases} h(a), & \exists n \in \mathbb{N} : a \in C_{2n} \\ a, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Можно увидеть, что  $u$  — искомая биекция.

□

**Определение 1.2.3.** Множество  $A$  меньше по мощности  $B$  ( $A \prec B$ ), если

$$\begin{cases} A \preceq B \\ B \not\preceq A \end{cases} \quad \text{здесь равносильно} \quad \begin{cases} A \preceq B \\ A \not\simeq B \end{cases}$$

**Теорема 1.2.2** (Теорема Кантора). Для любого множества  $A$ :  $A \prec 2^A$ .

*Доказательство.*

*Замечание.* Если  $A$  — конечно и имеет  $n$  элементов, то теорема верна, так как  $n < 2^n$  для любого  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$A \preceq 2^A$  — рассмотрим инъекцию  $a \in A \mapsto \{a\}$ . Теперь докажем, что  $A \not\preceq 2^A$ . Предположим противное:  $A \simeq 2^A$ . Тогда есть биекция  $g : A \rightarrow 2^A$ . Теперь, сходно с диагональным аргументом для  $\mathbb{N} \not\preceq \mathbb{R}$ , определим  $[B \subseteq A : B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}]$ . Очевидно,  $\nexists a \in A : B = g(a)$ . Однако  $B \subseteq A \Rightarrow B \in g(A)$ , противоречие.  $\square$

## 1.2.2 Некоторые виды множеств по мощностям

1. Конечные множества. *Комбинаторика*
2. Счётные множества — множества, равномощные  $\mathbb{N}$ . *Информатика*
3. Континуальные множества — множества, равномощные  $2^{\mathbb{N}}$ . *Матанализ*

$$\underset{\text{счётное}}{\mathbb{N}} \subset \underset{\text{счётное}}{\mathbb{Z}} \subset \underset{\text{счётное}}{\mathbb{Q}} \subset \underset{\text{континуальное}}{\mathbb{R}} \subset \underset{\text{континуальное}}{\mathbb{C}}$$

### Шкала мощностей

$$0, 1, 2, 3, \dots, (\omega = |\mathbb{N}|), \dots, (\mathbf{C} = |2^{\mathbb{N}}|), \dots,$$

**Предложение 1.2.1.** Для любого бесконечного множества  $A : \mathbb{N} \preceq A$ .

*Доказательство.* Пусть  $A$  — бесконечное множество. Тогда  $\exists a_0 \in A$ . Заметим, что  $A \setminus \{a_0\}$  тоже бесконечно. Далее по индукции мы можем найти  $a_n$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Таким образом, мы нашли инъекцию  $\mathbb{N} \rightarrow A$ .  $\square$

*Вопрос.* Существует ли множество  $A : \mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$ ?

Континуум гипотеза, CH, утверждает, что таких множеств не существует.

## Лекция III

20 сентября 2022 г.

*Вопрос.* Пусть даны множества  $A$  и  $B$ : 
$$\begin{cases} A \simeq B \\ A \prec B \\ B \prec A \end{cases}$$
 Правда ли, что другого исхода не бывает?

Наиболее популярная система аксиом утверждает, что всё исчерпывается этими тремя случаями.

## 1.3 Числовые структуры в теории множеств

### 1.3.1 Натуральные числа

Определим натуральное число, как мощность конечного множества.

$$0 := |\emptyset|; \quad 1 := |\{\emptyset\}|$$

Сложение: для непересекающихся множеств  $|A| + |B| = |A \sqcup B|$ , но так как множества могут пересекаться, то мы можем их сделать искусственно непересекающимися:

$$|A| + |B| = |(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)|$$

Умножение:

$$|A| \cdot |B| = |A \times B|$$

Степень не является основной операцией, но её можно определить красиво:

$$|A|^{|B|} = |A^B|$$

Упорядоченность:

$$|A| \leq |B| \stackrel{def}{\iff} A \prec B$$

После определения структуры надо доказать свойства (ассоциативность и коммутативность  $+$  и  $\cdot$ , дистрибутивность  $\cdot$  относительно  $+$ , нейтральность  $0$  и  $1$ ,  $0 < 1 < 2 < \dots$ , между соседними числами нет других чисел, аксиому индукции), но мы этого делать не будем.

Любая структура, удовлетворяющая этим свойствам, изоморфна  $\mathbb{N}$ .

### 1.3.2 Целые числа

Построим целые числа из натуральных —  $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ .

Определим  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ , где  $(a, b) \sim (c, d) \stackrel{def}{\iff} a + d = b + c$ . Пары  $(a, b)$ , неформально говоря, будет соответствовать  $a - b$ .

*Замечание.* Здесь и далее тильда над плюсом:  $\tilde{+}$  не имеет никакого отношения к отношению эквивалентности  $\sim$ , она лишь показывает, что данное сложение отличается от сложения в предыдущей структуре.

$$\begin{aligned} [a, b] \tilde{+} [c, d] &:= [a + c, b + d] \\ [a, b] \tilde{\cdot} [c, d] &:= [ac + bd, ad + bc] \\ [a, b] \tilde{\leq} [c, d] &:= (a + d) \leq (b + c) \\ \tilde{0} &:= [0, 0]; \quad \tilde{1} := [1, 0] \end{aligned}$$

После определения операций, и проверки, что эквивалентные пары после равных операций эквивалентны, надо проверить свойства целых чисел:

Это упорядоченное кольцо, то есть:

$\tilde{+}, \tilde{\cdot}$  ассоциативны и коммутативны;  $\tilde{\cdot}$  дистрибутивна относительно  $\tilde{+}$ ,  $\tilde{0}$  нейтрален относительно  $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$ ,

$$\begin{aligned} \forall x : \exists y : x + y &= 0 \\ \forall x, y, z : x \leq y &\Rightarrow x + z \leq y + z \\ \forall x, y, z : x \leq y \wedge z > 0 &\Rightarrow xz \leq yz \end{aligned}$$

### 1.3.3 Рациональные числа в теории множеств

Уже есть  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  — внутри  $\mathbb{Z}$  есть подмножество, изоморфное  $\mathbb{N}$ .

Рассмотрим  $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})) / \sim$ , где  $(a, b) \sim (c, d) \stackrel{def}{\iff} ad = bc$ .

Теперь введём операции:



$$\begin{aligned}
[a, b] \widetilde{+} [c, d] &\stackrel{def}{=} [ad + bc, bd] \\
[a, b] \widetilde{\cdot} [c, d] &\stackrel{def}{=} [ac, bd] \\
[a, b] \leq [c, d] &\stackrel{def}{\iff} ad \leq bc \\
\widetilde{0} &:= [0, 1]; \quad \widetilde{1} := [1, 1]
\end{aligned}$$

После определения операций, и проверки, что эквивалентные пары после равных операций эквивалентны, надо проверить свойства рациональных чисел:

Это упорядоченное поле, такое, что любой элемент получается делением целого числа на натуральное.

### 1.3.4 Вещественные числа в теории множеств

Уже определены  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

Определим  $\mathbb{R} := S / \sim$ , где  $S$  — множество всех последовательностей Коши  $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  рациональных чисел:  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : \forall i, j \in \mathbb{N} : i, j > m : (|q_i| - |q_j|) < 2^{-n}$ .

$$\begin{aligned}
\{q_i\} \sim \{r_i\} &\stackrel{def}{\iff} \lim_{i \rightarrow \infty} (q_i - r_i) = 0 \\
[\{q_i\}] \widetilde{+} [\{r_i\}] &\stackrel{def}{=} [\{q_i + r_i\}] \\
[\{q_i\}] \widetilde{\cdot} [\{r_i\}] &\stackrel{def}{=} [\{q_i \cdot r_i\}] \\
[\{q_i\}] \lesssim [\{r_i\}] &\stackrel{def}{=} \exists n, m \in \mathbb{N} : \forall i, j \in \mathbb{N} : i, j > m : q_i - r_j < -2^{-n} \\
\widetilde{0} &:= [\{0, 0, \dots\}]; \quad \widetilde{1} := [\{1, 1, \dots\}]
\end{aligned}$$

После определения операций, и проверки, что эквивалентные последовательности Коши после равных операций эквивалентны, надо проверить, что получилось полное упорядоченное поле, (то есть любое непустое ограниченное сверху множество имеет супремум).

### 1.3.5 Комплексные числа

Уже определены  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Из аксиом упорядоченного кольца  $R$  можно доказать  $\nexists i \in R : i^2 = -1$ . Поле комплексных чисел есть наименьшее расширение поля вещественных чисел, обладающее таким элементом.

Определим  $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Теперь введём операции

$$\begin{aligned}
(a, b) \widetilde{+} (c, d) &\stackrel{def}{=} [a + c, b + d] \\
(a, b) \widetilde{\cdot} (c, d) &\stackrel{def}{=} [ac - bd, ad + bc] \\
\widetilde{0} &:= (0, 0); \quad \widetilde{1} := (1, 0); \quad i = (0, 1)
\end{aligned}$$

Можно проверить, что полученная структура — поле, являющееся расширением  $\mathbb{R}$  (содержит подмножество, изоморфное  $\mathbb{R}$ ) и содержащее мнимую единицу.

## Глава 2

# Аксиоматика Цермело — Френкеля с аксиомой выбора.

### 2.1 Противоречивость наивной теории множеств

К сожалению, наивная теория множеств противоречива. Например, вот пример противоречия:  $y := \{x | x \notin x\}$ . Тогда  $y \in y \iff y \notin y$ .

## Лекция IV

21 сентября 2022 г.

### 2.2 Аксиомы Цермело — Френкеля с аксиомой выбора, ZFC

Множества обозначаются латинскими буквами, переменными:  $x, y, z, \dots$ . Для формул  $\phi, \psi$  определены также формулы  $(\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi), (\phi \Rightarrow \psi), ((\phi \iff \psi) \stackrel{def}{=} (\phi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \phi)), \neg\phi$ . Также для получения новых формул пишут  $\forall x\phi$  или  $\exists x\phi$ .

Запись  $A = \{x | \phi(x)\}$  определяет не множество, но новый класс, который может не быть множеством. Класс — неформальное понятие о формуле.

Для классов определены булевские операции  $A \cup B, A \cap B, \neg A$ , что на самом деле просто модифицирует задающие класс формулы. Так,  $A \cup B = \{x | \phi_A(x) \vee \phi_B(x)\}$ .

0. Существует хотя бы одно множество.  $\exists x : x = x$ . Аксиома не всегда приводится, иногда опускается.
1. Аксиома объёмности.  $\forall X, Y : (\forall u : (u \in X \iff u \in Y)) \iff X = Y$ .
2. Аксиома (неупорядоченной) пары.  $\forall u, v : (\exists \{u, v\} = X \text{ (это такое обозначение множества)} : \forall z : (z \in X \iff z = u \vee z = v))$ .

**Определение 2.2.1** (Упорядоченная пара). Упорядоченной парой из элементов  $x, y$  называется множество  $(x, y) \stackrel{def}{=} \{x, \{x, y\}\}$ .

**Определение 2.2.2** (Одноэлементное множество).  $\{x\} \stackrel{def}{=} \{x, x\}$ .

**Предложение 2.2.1.**  $(x, y) = (x', y') \iff x = x' \wedge y = y'$ .

3. Аксиома выделения.  $\forall X, \phi(u)$  ( $\phi(u)$  — формула от свободной переменной) :  $(\exists \{x \in X | \phi(x)\} = Y : u \in Y \iff (u \in X \wedge \phi(u)))$ . Пересечение класса со множеством — множество.

**Теорема 2.2.1.** Существует пустое множество

*Доказательство.* Рассмотрим множество из Аксиомы 0, назовём его  $x$ , рассмотрим

$\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in x \mid \neg(u = u)\}$ . Видно, что  $\forall x : x \in \emptyset \iff x \neq x$ , откуда получаем  $\forall x : \neg(x \in \emptyset)$ .  $\square$

**Теорема 2.2.2.** Существует разность множеств  $X \setminus Y$ .

*Доказательство.* Определим её, как  $\{u \in X \mid u \notin Y\}$ .  $\square$

4. Аксиома объединения.  $\forall X : \exists Y : (\forall z : u \in z \wedge z \in X \Rightarrow u \in Y)$ . Аксиома говорит, что существует множество, содержащее объединение элементов  $X$ .

**Теорема 2.2.3.** Существует объединение элементов  $X$ , обозначаемое  $\left(\bigcup_{z \in X} z\right)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим для данного  $X$   $Y$  из данной аксиомы. Используя аксиому выделения, получим  $\left(\bigcup_{z \in X} z\right) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in Y \mid \exists z \in X : u \in z\}$ .  $\square$

**Теорема 2.2.4.** Существует пересечение элементов  $X$ , обозначаемое  $\left(\bigcap_{z \in X} z\right)$

*Доказательство.* Рассмотрим для данного  $X$   $Y$  из данной аксиомы. Используя аксиому выделения, получим  $\left(\bigcap_{z \in X} z\right) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in Y \mid \forall z \in X : u \in z\}$ .  $\square$

5. Аксиома степени.  $\forall X : \exists \mathcal{P}(X) = 2^X : (u \in 2^X \iff u \subseteq X)$ .

**Определение 2.2.3** (Подмножество).  $Y \subseteq X \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall u : (u \in Y \Rightarrow u \in X)$ .

**Теорема 2.2.5.** Для множеств  $A, B$  существует множество  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ .

*Доказательство.* •  $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$

•  $\{x, y\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$

•  $(x, y) = \{x, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$ .

•  $X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \in X, y \in Y : z = (x, y)\}$   $\square$

6. Аксиома замены.

$\forall \phi(u, v) : (\forall x, y, y' : \phi(x, y) \wedge \phi(x, y') \Rightarrow y = y') \Rightarrow \forall X : (\exists Y : (\forall u, v : u \in X \wedge \phi(u, v) \Rightarrow v \in Y))$ .  
Неформальнее, если  $\phi$  — функциональное отношение (быть может не везде определённая функция), то существует множество, содержащее образ  $\phi(X)$ .

Используя аксиому выделения, можно доказать существование множества, являющегося образом  $\phi(X)$ .

7. Аксиома бесконечности.  $\exists Y : (\emptyset \in Y \wedge (\forall y : y \in Y \Rightarrow (y \cup \{y\}) \in Y))$ .

Несложно видеть, что  $\emptyset \in Y, \{\emptyset\} \in Y, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in Y, \dots$

8. Аксиома фундирования (иногда называется аксиомой регулярности).

$\forall X : (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x : (x \in X \wedge \forall u \in x : u \notin X))$ .

Неформально говоря, для бинарного отношения  $\in$  на непустом множестве  $X$  существует минимальный элемент внутри  $X$ .

**Предложение 2.2.2.**  $\nexists X : X \in X$ .

*Доказательство.* Предположим, что существует  $X \in X$ . Для противоречия рассмотрим  $\{X\}$ . Из определения  $\{X\}$  единственный  $Y \in \{X\}$  — это  $X$ . Но тогда противоречие с аксиомой фундирования, ведь  $X \in X$ .  $\square$

9. Аксиома выбора.  $\forall X : \exists f : (2^X \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow X : \forall Y \subseteq X : (Y = \emptyset \vee f(Y) \in Y)$ .

*Замечание.* Функция  $f$  — особое множество пар.

Часто использование аксиомы выбора подчёркивается отдельно, так как она неконструктивна и из неё подчас следуют странные, контринтуитивные вещи.

**Факт 2.2.1.** В ZF AC равносильна следующему:  $\forall$  бесконечного  $A : A \simeq A \times A$ .

**Теорема 2.2.6.**  $A \prec B \vee B \prec A \vee A \simeq B$  в ZFC

*Доказательство.* Будет подальше (раздел 2.5)  $\square$

## Лекция V

22 сентября 2022 г.

### 2.3 Вполне упорядоченные множества. Ординалы

Пусть  $(P; \leq)$  — частичный порядок: антирефлексивность ( $x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y$ ), транзитивность.

Можно писать и  $(P; \leq)$ , и  $(P; <)$ , так как понятно, как из  $<$  получить  $\leq$ , и наоборот (равенство считаем уже заданным на множестве).

**Определение 2.3.1** (Фундированный порядок).  $P$  — фундированный порядок, если любое подмножество имеет минимальный элемент:  $\forall X \subseteq P : \exists x \in P : \nexists y : y < x$ .

**Определение 2.3.2** (Линейный порядок). Любые два элемента сравнимы:  $\forall x, y \in P : \begin{cases} x < y \\ y < x \\ x = y \end{cases}$

**Определение 2.3.3** (Верхняя граница для множества  $X \subseteq P$ ). Такое число  $y \in P : \forall x \in X : x \leq y$ .

**Определение 2.3.4** (Точная (наименьшая) верхняя граница, supremum). Наименьшее число в множестве верхних границ.  $y = \sup X$ .

Рассмотрим множество  $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$  в каком-то порядке. Тогда  $\sup_{(\mathbb{R}; \leq)} M = \sqrt{2}$ ;  $\nexists \sup_{(\mathbb{Q}; \leq)} M$ .

**Определение 2.3.5** (Начальный сегмент, задаваемый элементом  $p$ ).  $\hat{p} = \{x \in P \mid x < p\}$ .

Пусть  $(P, <)$  и  $(Q, <)$  — частичные порядки.

**Определение 2.3.6** (Изоморфизм из  $P$  на  $Q$ ). Биекция  $f : P \rightarrow Q$ , такая, что  $\forall x, y \in P : x < y \iff f(x) < f(y)$ .

**Определение 2.3.7** (Изоморфность частичных порядков  $P$  и  $Q$ ). Существование изоморфизма из  $P$  в  $Q$ .

**Факт 2.3.1.** Изоморфизм — отношение эквивалентности.

**Определение 2.3.8** (Вложение). Инъекция  $f : P \rightarrow Q$ , сохраняющая порядок:  $\forall x, y \in P : x < y \iff f(x) < f(y)$ .

**Определение 2.3.9** (Полный порядок или вполне упорядоченное множество  $(P; <)$ ). Линейный фундированный порядок  $(P; <)$ : в любом подмножестве есть минимум, все элементы сравнимы.

### 2.3.1 Свойства полных порядков

$(P; <)$  и  $(Q; <)$  ниже — полные порядки.

1. Для любого вложения в себя  $f : P \rightarrow P$  верно:  $\forall p : p \leq f(p)$ .

*Доказательство.* От противного:  $\exists p \in P : p \not\leq f(p)$ . Тогда  $\{p \in P \mid f(p) < p\} \neq \emptyset$ , а ещё в этом множестве есть минимальный элемент  $p_0$ . Минимальность означает следующее:

$$\forall x \in P : x < p \Rightarrow x \leq f(x)$$

Но вложение сохраняет порядок, из  $f(x) < f(p_0)$  и транзитивности следует  $\forall x \in \hat{p}_0 : x < f(p_0)$ . Тогда  $f(p_0)$  — верхняя грань  $\hat{p}_0$ . В то же время  $p_0 = \sup \hat{p}_0$ , откуда  $p_0 \leq f(p_0)$   $\square$

2. Никакой полный порядок не может быть изоморфен своему начальному сегменту  $\forall p \in P : P \not\cong \hat{p}$ .

*Доказательство.* Допустим, для некоего  $p$  существует вложение  $f : P \rightarrow \hat{p}$ . Тогда  $f(p) < p$ , противоречие.  $\square$

3. Для любых  $P, Q$  : 
$$\left[ \begin{array}{l} P \cong Q \\ \exists p \in P : \hat{p} \cong Q, \text{ причём выполняется ровно одно.} \\ \exists q \in Q : P \cong \hat{q} \end{array} \right.$$

*Доказательство.* • Если выполняются одновременно первое и ещё какое-то, то вполне упорядоченное множество изоморфно своему начальному сегменту.

- Если одновременно выполняются второе и третье, то тоже существует вложение из  $P$  в некое несобственное подмножество — композиция изоморфизмов.
- Докажем, что выполняется хотя бы одно.

— Введём отношение  $f \stackrel{\text{def}}{=} \{(p, q) \in P \times Q \mid \hat{p} \cong \hat{q}\}$ . Это отношение функционально: если  $f(p, q)$  и  $f(p, q')$ , то  $\hat{q} \cong \hat{q}'$ , откуда если  $q \neq q'$ , то больший из  $q$  и  $q'$  порождает полный порядок, изоморфный своему начальному сегменту (порождённому меньшим из  $q$  и  $q'$ ). Аналогично это инъекция. Будем писать  $f(p) = q$ ;  $f^{-1}(q) = p$ .

— Утверждается, что либо  $\text{dom } f = P$ , либо  $\text{rng } f = Q$ .

— Заметим, что если  $p \in \text{rng } f$ , то  $\forall x < p : x \in \text{rng } f$ . Рассмотрим некий  $x < p$  и покажем, что действительно  $\exists y \in Q : \hat{x} \cong \hat{y}$ .

Известно, что  $\hat{p} \stackrel{f_p}{\cong} \hat{q}$ . Пусть данный изоморфизм переводит  $x$  в  $y = f_p(x)$  ( $y \in Q$ ). Утверждается, что  $\hat{x} \cong \hat{y}$ . Ну, в самом деле,  $\forall a < x : f_p(a) < f_p(x)$  — изоморфизм сохраняет порядок;  $\forall b < y : f_p^{-1}(b) < f_p^{-1}(y)$  — обратный изоморфизм тоже сохраняет порядок.

— Аналогично если  $q \in \text{dom } f$ , то  $\forall y < q : y \in \text{dom } f$ .

— Предположим противное:  $\text{dom } f \subsetneq P$ . Пусть  $p$  — наименьший элемент  $P \setminus (\text{dom } f)$  (существует из-за фундированности). Аналогично,  $q$  — наименьший элемент, такой, что  $q \notin \text{rng}(f)$ . Заметим, что  $\hat{p} = \text{dom } f$ ;  $\hat{q} = \text{rng } f$ .

Утверждается, что  $f : \hat{p} \rightarrow \hat{q}$  — изоморфизм, так как для любых  $p_1, p_2 : p_1 < p_2 < p$  изоморфизм, переводящий  $\hat{p}_2$  в  $\hat{q}_2$ , переводит  $p_1$  в некий  $q_1 : q_1 < q_2$ . Значит, порядок сохраняется.

Но тогда получается  $\hat{p} \cong \hat{q}$ , противоречие.

— Итак,  $\text{dom } f = P \wedge \text{rng } f = Q$ . В любом случае мы нашли изоморфизм между одним порядком, и подмножеством другого. А подмножество — начальный сегмент: уже доказано, что  $\text{dom } f$  и  $\text{rng } f$  каждый если не совпадают с порядком, то являются начальными сегментами.

□

# Лекция VI

4 октября 2022 г.

Комментарии к пункту 3 из предыдущей лекции: Для доказательства достаточно рассмотреть три случая: *Хотя я пока не очень понимаю, почему недостаточно того, что написано выше*

1.  $P, Q$  не имеют наибольшего элемента. Этот случай, как сказано на лекции, полностью покрывается приведённым выше доказательством
2. Ровно один порядок, без потери общности,  $P$  — содержит наибольший элемент. Тогда у него есть несколько, из-за фундированности — конечное число — предшественников  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , таких, что  $\widehat{p_n}$  не имеет наибольшего элемента.
3. И  $P$ , и  $Q$  содержат наибольший элемент. . . .

*Замечание.* Фундированное множество — именно то множество, на котором можно использовать метод математической индукции. Для полного порядка  $(P; <)$  определим множество  $A \subseteq P$ , такое, что

$$\forall p \in P : (\widehat{p} \subseteq A \Rightarrow p \in A) \Rightarrow A = P$$

*Доказательство.* От противного — найти минимальный элемент в  $P \setminus A$ . □

## 2.3.2 Ординалы

**Определение 2.3.10** (Транзитивное множество  $S$ ).  $\forall x, y : (x \in y \wedge y \in S) \Rightarrow x \in S$ .

**Определение 2.3.11** (Ординал или порядковое число). Такое транзитивное множество  $S$ , что

$$\forall x, y \in S : \begin{cases} x \in y \\ y \in x \\ x = y \end{cases} \quad (2.1)$$

Несложно видеть, что из-за аксиомы фундированности (регулярности) возможно лишь одно из трёх.

Обозначим ординалы греческими буквами  $\alpha, \beta, \dots$ , и класс ординалов обозначим  $\text{Ord}$ .

Пусть  $<$  — сужение отношения  $\in$  на  $\text{Ord}$ . Иначе говоря, для  $a, b \in \text{Ord}$  вместо  $a \in b$  будем (иногда) писать  $a < b$ .

### Свойства ординалов

1.  $x \in \alpha \Rightarrow x \in \text{Ord}$

*Доказательство.*  $\forall u \in v \in x$  : так как  $\alpha$  — ординал, то  $u, v \in \alpha$ , и для  $u, v$  выполняется конъюнкция (2.1). Кроме того, она выполняется для  $u$  и  $x$ , откуда  $u \in x$  (остальные альтернативы —  $x \in u \vee x = u$  — вызывают противоречие с фундированностью). □

2.  $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ .

*Доказательство.* Оставлю, как упражнение. □

3. Вполне упорядоченные множества изоморфны  $(\alpha, <) \cong (\beta, <)$ , если и только если они равны  $\alpha = \beta$ .

*Доказательство.*  $\Leftarrow$ . Очевидно

$\Rightarrow$ .  $(\alpha, <) \cong (\beta, <) \Rightarrow \exists$  биекция  $f : \alpha \rightarrow \beta$ . Докажем, что  $\forall x \in \alpha : x = f(x)$ .

Пусть, это не так. Возьмём наименьшее  $x \neq f(x)$ . Тогда  $\forall z < x : f(z) = z$ .  
 $x = \{z \in \alpha \mid z < x\}$ . С другой стороны,  $f(x) = \{f(z) \mid z \in \alpha \wedge z < x\}$ , откуда  
 $x = f(x)$ , противоречие.

Но тогда получается, что  $\alpha \subseteq \beta$ , а по симметрии —  $\alpha = \beta$ .  $\square$

4.  $\alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha = \beta$ .

*Доказательство.* Вытекает из теоремы о вполне упорядоченных множествах и предыдущего свойства.  $\square$

5.  $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$

*Доказательство.* Докажем, что  $\alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$ . В правую сторону очевидно,  $\forall x \in \alpha : x \in \beta$  из транзитивности. Но  $\alpha \neq \beta$ , откуда  $\alpha \subsetneq \beta$ . В левую сторону —  $\alpha \in (\beta \setminus \alpha)$ , минимальный элемент разности.  $\square$

**Определение 2.3.12** (Наименьший ординал, больший  $\alpha$ ).  $\alpha + 1 \stackrel{def}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$ . Несложно показать, что  $\alpha \cup \{\alpha\}$  — ординал, проверить транзитивность и конъюнкцию (2.1).

6.  $\nexists \beta \in \text{Ord} : \alpha < \beta < \alpha + 1$ .

*Доказательство.* От противного:  $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$ . Либо  $\alpha = \beta$ , либо противоречие с аксиомой фундированности, так как  $\alpha \in \beta$ .  $\square$

7. Любое множество ординалов  $A$  вполне упорядочено отношением  $<$  (из п. 4), причём  $\bigcup A = \sup A$ .

*Доказательство.* • Любые два ординала сравнимы, причём если ординалы  $x, y, z \in A$  и  $x \in y \in z$ , то  $x \in z$ .

- $\bigcup A$  — ординал. Проверим транзитивность:  $x \in y \in \bigcup A$ . Но тогда  $\exists \alpha \in A : y \in \alpha$ . Тогда  $x \in \alpha$  по транзитивности, откуда  $x \in \bigcup A$ .
- Покажем, что  $\bigcup A$  — верхняя граница  $A$  по отношению  $<$ .  $\forall \alpha \in A : \alpha \leq \bigcup A$ . Это всё равно, что  $\alpha \subseteq \bigcup A$ .
- Покажем, что  $\bigcup A = \sup A$  — наименьшая верхняя граница. Покажем, что для любой верхней границы  $\beta : \bigcup A \leq \beta$ . Это верно, так как  $\forall \alpha \in A : \alpha \subseteq \beta$ .  $\square$

8. Класс  $\text{Ord}$  не является множеством.

*Доказательство.* Пусть, является. Тогда  $\alpha := \bigcup \text{Ord} = \sup \text{Ord}$  — наибольший ординал. Но тогда рассмотрим  $\alpha + 1$ .  $\square$

9. Любое вполне упорядоченное множество изоморфно единственному ординалу.

*Доказательство.* Единственность очевидна, так как изоморфные ординалы равны.

Рассмотрим вполне упорядоченное множество  $(P; \sqsubset)$ . Сначала заметим, что  $\forall p \in P : \exists \alpha \in \text{Ord} : \hat{p} \cong \alpha$ . Это верно из принципа наименьшего элемента во вполне упорядоченных множествах — для минимального  $p$  такого, что  $\nexists \alpha \cong \hat{p}$  подойдёт ординал  $\bigcup \{\alpha \in \text{Ord} \mid \exists q \in \hat{p} : \alpha \cong \hat{q}\}$ .

Теперь рассмотрим  $M = \{\alpha \mid \exists p \in P : \alpha \cong \hat{p}\}$ . Это множество по аксиоме замены. Но тогда  $\bigcup M \cong P$ .  $\square$

# Лекция VII

11 октября 2022 г.

## Типы ординалов

0. Нулевой ординал  $\emptyset$ .
1. Последовательные ординалы (последователи) — ординалы вида  $\{\alpha\} + 1$
2. Предельные ординалы — все остальные ординалы

**Определение 2.3.13** (Натуральное число). Непредельный ординал, все элементы которого также не являются предельными. Множество натуральных чисел обозначается  $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Предложение 2.3.1.** *Множество  $\omega$  существует.*

*Доказательство.* По аксиоме бесконечности  $\exists X : (\emptyset \in X \wedge \forall x \in X : (x \cup \{x\}) \in X)$ .

Заметим, что  $0 = \emptyset \in X$ .

Теперь заметим, что  $1 = \{0\} \cup \emptyset \in X$ .

Можно доказать по индукции, что любое натуральное число содержится в  $X$ .

Теперь воспользуемся аксиомой выделения, получим множество натуральных чисел

$$\omega = \{x \in X \mid x \text{ — натуральное}\}$$

□

**Определение 2.3.14** (Конечное множество). Множество, равномощное некоторому натуральному числу.

## Шкала ординалов

$$0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, (\omega + 2 = (\omega + 1) + 1), \dots, (\omega \cdot 2 = \omega + \omega), \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega, \dots$$

**Теорема 2.3.1** (О рекурсивных определениях по ординалам). Для любой функции-класса  $G : V \rightarrow V$ , где  $V$  — класс всех множеств,  $\exists!$  функция-класс  $F : \text{Ord} \rightarrow V : F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ , где  $F|_\alpha$  — функция, ограниченная на  $\alpha$ , а именно,  $F|_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{(\beta, y) \in F \mid \beta < \alpha\}$ . Напоминание:  $F(x) = y \stackrel{\text{def}}{\iff} (x, y) \in F$

*Доказательство.* • Единственность: пусть существуют две такие функции  $F, F'$ . Утверждается, что  $\forall \alpha \in \text{Ord} : F(\alpha) = F'(\alpha)$ . Предположим, что это не так, возьмём наименьшее  $\alpha$  такое, что это не так. Тогда  $F|_\alpha = F'|_\alpha$ , откуда  $F(\alpha) = F'(\alpha) = G(F|_\alpha)$ , противоречие.

- Существование: рассмотрим некоторый класс функций

$$C = \left\{ f : \alpha \rightarrow V \mid \alpha \in \text{Ord} \wedge (\forall \beta < \alpha : f(\beta) = G(f|_\beta)) \right\}$$

Заметим, что если  $f, f' \in C$ , то  $f \subseteq f' \vee f' \subseteq f$ . Утверждается, что искомая функция-класс

$$F = \bigcup C$$

В самом деле, можно заметить, что если некое  $\alpha \notin \text{dom } F$ , то найдётся функция  $H$ , такая,

$$\text{что } \text{dom } H = \alpha + 1, \text{ определённая так: } H(\beta) = \begin{cases} F(\beta), & \beta < \alpha \\ G(F|_\beta), & \beta = \alpha \end{cases}$$

□



## 2.4 Эквивалентные формулировки аксиомы выбора

### 2.4.1 О наибольшем и максимальном элементах в $(X, \sqsubset)$

**Определение 2.4.1** (Наибольший элемент). Элемент  $x \in X$  такой, что  $\forall y \in X : y \sqsubseteq x$ .

**Определение 2.4.2** (Максимальный элемент в  $(X, \sqsubset)$ ). Элемент  $x \in X$  такой, что  $\nexists y : x \sqsubset y$ .

В слове *наибольший* есть подстрока «большой», этот элемент, в отличие от максимального, действительно больше остальных.

### 2.4.2 Формулировки

**Теорема 2.4.1** (Лемма Цорна, принцип максимального элемента). Если в частичном порядке  $(X, \sqsubset)$  любое линейно-упорядоченное множество (любая цепь) имеет верхнюю границу, то в  $X$  имеется максимальный элемент.

**Теорема 2.4.2** (Теорема Цермело, принцип полного упорядочивания). Любое множество  $A$  можно вполне упорядочить:

$\exists$  бинарное отношение  $R \subseteq A \times A : (A, R) —$  вполне упорядоченное множество

**Теорема 2.4.3.** Из аксиом  $ZF$  следует эквивалентность следующих утверждений:

1. Аксиома выбора,  $AC$ .
2. Лемма Цорна,  $ZL$ .
3. Теорема Цермело,  $ZT$ .

*Доказательство.* •  $AC \Rightarrow ZL$ .

Рассмотрим некоторое частично-упорядоченное множество  $(X, \sqsubset)$ , в котором любая цепь ограничена сверху. Докажем, что есть максимальный элемент от противного.

$\forall x \in X : \exists y \in X : x \sqsubset y$ . Рассмотрим  $\mathcal{L} = \{L \subseteq X \mid (L, \sqsubset) — \text{лум}\}$ . Определим  $B(L) = \{y \mid \forall x \in L : (x \sqsubset y)\}$ . Из посылки теоремы:  $\{y \mid \forall x \in L : (x \sqsubset y)\} \neq \emptyset$ ; пусть его элемент  $y$ . Тогда  $B(L) \neq \emptyset$  тоже, так как для  $y$  существует  $y' : y \sqsubset y'$ , такой  $y'$  уже строго больше всех элементов из  $L$ .

Заметим, что  $B : \mathcal{L} \rightarrow (2^X \setminus \{\emptyset\})$ . Также, по аксиоме выбора, есть функция  $f : (2^X \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow X$ . Рассмотрим композицию этих функций  $g = f \circ B : g(L) = f(B(L))$ . Тогда заметим, что  $\forall L \in \mathcal{L}, \forall x \in L : x \sqsubset g(L)$ .

Пусть  $x_0 = g(\emptyset); x_0 \in X$ . Фактически,  $x_0$  — любой элемент из  $X$ . Построим некоторую функцию  $F$  по рекурсии. Для этого сначала скажем, что

$$G : V \rightarrow V, G(z) = \begin{cases} g(\text{rng}(z)), & z — \text{бинарное отношение (множество пар)}, \text{ и } \text{rng}(z) \in \mathcal{L} \\ x_0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь определим  $F : \text{Ord} \rightarrow X$ ;  $F(\alpha) = g(\text{rng}(F|_\alpha)) = g(\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\})$ . Здесь я пишу первую строчку из определения  $G$ , так как доказуемо для всех  $\alpha \in \text{Ord} : F(\alpha) \in \mathcal{L}$ . Заметим, что  $F$  — инъекция, так как разные ординалы переходят в разные элементы. Отсюда  $F^{-1} : X \rightarrow \text{Ord}$  — сюръекция. Тогда по аксиоме замены класс  $\text{Ord}$  является множеством, противоречие.

- $ZL \Rightarrow ZT$ .

Пусть  $A$  — любое множество. Рассмотрим множество

$$X = \{f : \alpha \rightarrow A \mid (\alpha \in \text{Ord}) \wedge (f — \text{инъекция})\}$$

Удостоверимся, что  $X$  — множество: рассмотрим другое множество

$$Y = \{(P; \sqsubset) \mid P \subseteq A \text{ и } (P; \sqsubset) \text{ — полный порядок}\}$$

$Y$  является множеством, так как  $Y \subseteq 2^A \times (A \times A)$ . Тогда утверждается, что всякому элементу  $Y$  соответствует ровно один ординал  $\alpha_p$ . Несложно видеть, что тогда только множество этих  $\{\alpha_p\}$  может быть областью определений функций из  $X$ .

Утверждается, что для  $(X, \subseteq)$  применима лемма Цорна: любое линейно-упорядоченное подмножество в  $X$  ограничено сверху. В самом деле, для  $L \in X : \bigcup L \in X$  и  $\bigcup L$  — верхняя граница. Значит, существует максимальный элемент в  $X$ . Обозначим  $(u : \alpha \rightarrow A)$  — максимальный элемент в  $(X, \subseteq)$ .

Докажем, что  $u$  — ещё и сюръекция: пусть существует  $y \in X$ , такой, что  $u^{-1}(y) = \emptyset$ . Но тогда рассмотрим  $u' : (\alpha + 1) \rightarrow A$ ;  $u'(\beta) = \begin{cases} u(\beta), & \beta < \alpha \\ y, & \beta = \alpha \end{cases}$ , противоречие с максимальной  $u$ . Отсюда  $u : \alpha \rightarrow A$  — биекция. Тогда определим полный порядок на множестве  $A$  следующим образом:  $a < b \iff u^{-1}(a) < u^{-1}(b)$ .

- $ZT \Rightarrow AC$

Докажем, что для любого  $X : \exists f : (2^X \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow X$ , такая, что  $f(S) \in S$ . Для этого всего лишь найдём полный порядок по теореме Цермело, после чего возьмём минимальный элемент, пользуясь нашей операцией сравнения.  $\square$

## Лекция VIII

18 октября 2022 г.

### 2.5 Сравнимость мощностей, шкала кардиналов, кумулятивная иерархия

**Теорема 2.5.1.** Для любых множеств  $A$  и  $B$  выполняется ровно одно из условий:  $\begin{cases} A \cong B \\ A \prec B \\ B \prec A \end{cases}$

*Доказательство.* Мы уже удостоверились, что любые два условия не могут выполняться одновременно.

По теореме Цермело, любое множество можно вполне упорядочить. Тогда рассмотрим полные порядки  $(A; \sqsubset_A)$  и  $(B; \sqsubset_B)$ .

Но тогда выполняется ровно одно из следующих условий:  $\begin{cases} A \simeq B \\ \exists! q \in B : A \simeq \hat{q} \\ \exists! p \in A : B \simeq \hat{p} \end{cases}$

Отсюда очевидно, что есть либо инъекция из  $A$  в  $B$ , либо — наоборот — инъекция из  $B$  в  $A$ , либо вдруг даже биекция.  $\square$

**Определение 2.5.1 (Мощность).** Мощность  $|A|$  множества  $A$  — наименьший ординал, изоморфный  $A$ .

**Определение 2.5.2 (Кардинал).** Ординал, не равномощный никакому меньшему ординалу. Класс всех кардиналов обозначается  $\text{Card}$ .

*Замечание.*  $\omega + 1 \simeq \omega \cup \{\omega\}$  — тоже счётное множество;  $\omega + 1$  — не является кардиналом. Более того,  $\omega + \omega$  и даже  $\omega \cdot \omega$  не являются кардиналами, они все счётны.

$\omega_1$  — наименьший несчётный ординал. Из аксиом  $ZFC$  не ясно, континуален ли  $\omega_1$ .

**Определение 2.5.3** (Следующий кардинал). Для кардинала  $\kappa$  существует  $\kappa^+$  — наименьший ординал, больший  $\kappa$ .

Определим  $F$ , используя рекурсию по ординалам: 
$$F(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ F(\beta)^+, & \alpha = \beta + 1 \\ \sup_{\gamma < \alpha} F(\gamma), & \alpha \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Несложно видеть, и несложно доказать по индукции, что  $F(\alpha) = \alpha$  для любого конечного  $\alpha \in \omega$ .  $F(\omega) = \omega$ ,  $F(\omega + 1) = \omega^+ = \omega_1$ ,  $F(\omega + \omega) = \sup\{\omega, \omega^+, (\omega^+)^+, \dots\} \dots$

**Предложение 2.5.1.** Функция  $F$  — функция-класс, устанавливающая изоморфизм между классом ординалов  $(\text{Ord}, <)$  и классом кардиналов  $(\text{Card}, <)$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $F$  возрастает, а именно,  $\forall \alpha < \beta : F(\alpha) < F(\beta)$ . Это несложно проверить.

- Докажем по индукции, что  $F(\alpha)$  — кардинал для всякого  $\alpha \in \text{Ord}$ . Достаточно убедиться про  $F(\alpha)$ , где  $\alpha$  — предельный, остальное очевидно. От противного: пусть  $F(\alpha) \cong \delta$ , где  $\delta$  — кардинал, меньший  $F(\alpha)$ . Есть два случая:

- $\forall \psi < \alpha : F(\psi) < \delta$ . В таком случае  $F(\alpha) = \sup_{\psi < \alpha} F(\psi) \leq \delta$  и никак не может быть больше  $\delta$ .
- $\exists \psi < \alpha : F(\psi) \geq \delta$ . Так как  $\alpha$  — предельный, то  $\psi + 1 < \alpha$  тоже. Но  $F(\psi) < F(\psi + 1)$ , откуда  $F(\alpha) < F(\psi + 1)$ . Тогда получаем противоречие, ведь очевидно, что мощность  $|F(\dots)|$  возрастает по мере возрастания аргумента.

- Теперь проверим, что всякий ординал лежит в образе  $F$ . Опять же пойдём от противного: пусть наименьший ординал, не достигающийся функцией, равен  $\delta$ .

Все меньшие достигались, обозначим  $\mathcal{M}$  за прообраз всех меньших ординалов.

Покажем, что  $F(\sigma) = \delta$ , где  $\sigma$  — наименьший элемент, не лежащий в  $\mathcal{M}$ .

- Если  $\sigma$  — предельный, то  $F(\sigma) = \sup_{\xi < \sigma} F(\xi)$ , что не больше  $\delta$ .
- Иначе  $\sigma = \xi + 1$  для некоего ординала  $\xi$ .  $F(\xi) < \delta$ , значит по определению  $F(\sigma) \leq \delta$ .

Но  $\sigma \notin \mathcal{M}$ , значит,  $F(\sigma) = \delta$ .

□

## 2.5.1 Шкала бесконечных кардиналов

$$\{\aleph_\alpha\}_{\alpha \in \text{Ord}} \stackrel{\text{def}}{=} F(\omega + \alpha).$$

**Определение 2.5.4** (Сумма ординалов). Сумма ординалов  $\alpha + \beta$  — ординал, изоморфный полному порядку  $(P; <)$ , где  $P = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$  и

$$(x, i) < (y, j) \iff \begin{cases} x < y, & i = j \\ i < j, & i \neq j \end{cases}$$

По сути, мы пририсовали к  $\alpha$  справа  $\beta$  и рассмотрели это как новый полный порядок.

## 2.5.2 Кумулятивная иерархия

Определим рекурсией по ординалам  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \text{Ord}}$ :

$$V_\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ 2^{F(\beta)}, & \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\gamma < \alpha} V_\gamma, & \alpha \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Эта последовательность  $V_\alpha$  — кумулятивная иерархия

**Теорема 2.5.2** (Фон Нейман). Всякое множество встретится в  $V : \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha = V$ , где  $V$  — множество всех множеств.

### 2.5.3 Арифметика кардиналов

$\aleph^+$  — наименьший кардинал, больший  $\aleph$

$$\aleph + \lambda \stackrel{\text{def}}{=} |\{0\} \times \aleph \cup \{1\} \times \lambda|$$

$$\aleph \cdot \lambda \stackrel{\text{def}}{=} |\aleph \times \lambda|$$

$$\aleph^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} |\{f : \aleph \rightarrow \lambda\}|$$

#### Свойства

1. Сложение и умножение коммутативны и ассоциативны
2. Умножение дистрибутивно относительно сложения
3. 0, 1 — нейтральны относительно понятия чего
4.  $(\aleph \cdot \lambda)^\mu = \aleph^\mu \cdot \lambda^\mu$
5.  $(\aleph^\lambda)^\mu = \aleph^{(\lambda \cdot \mu)}$
6. Нетривиальное свойство, с доказательством от Хаусдорфа:  $(\aleph^+)^{\aleph} = \aleph^+ \cdot \aleph^\aleph$
7.  $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$ . Часть про произведение равносильно аксиоме выбора.
8.  $\alpha \leq \beta \iff \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$

Видимо, первые 5 считаются очевидными, остальные — нетривиальными. Как бы то ни было, на лекции не было ни одного доказательства. . .

### 2.5.4 Арифметика ординалов

Сумма ординалов уже определена выше.

Произведение ординалов:  $\alpha \cdot \beta = (P, \sqsubset)$ , где  $P = \alpha \times \beta$  и

$$(a, b) \sqsubset (a', b') \iff (b < b') \vee (b = b' \wedge a < a')$$

Также операции можно определить рекурсивно:

$$\alpha + \beta = \begin{cases} \alpha, & \beta = 0 \\ (\alpha + \gamma) + 1, & \beta = \gamma + 1 \\ \sup_{\gamma < \beta} \alpha + \gamma, & \beta \text{ — предельный} \end{cases}$$

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0, & \beta = 0 \\ (\alpha \cdot \gamma) + \alpha, & \beta = \gamma + 1 \\ \sup_{\gamma < \beta} \alpha \cdot \gamma, & \beta \text{ — предельный} \end{cases}$$

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \beta = 0 \\ (\alpha^\gamma) \cdot \alpha, & \beta = \gamma + 1 \\ \sup_{\gamma < \beta} \alpha^\gamma, & \beta \text{ — предельный} \end{cases}$$

### Свойства

1.  $+$ ,  $\cdot$  не коммутативны, но ассоциативны.
2.  $\cdot$  дистрибутивно слева относительно  $+$  (но не справа).
3.  $0, 1$  нейтральны относительно  $\cdot, +$ .
4.  $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ .
5.  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$ .