

Матанализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков
Конспектировал Леонид Данилевич

II семестр, весна 2023 г.

Оглавление

| | | |
|----------|--|-----------|
| 0.1 | Вокруг формулы Тейлора | 3 |
| 0.1.1 | Достаточное условие существования локального экстремума | 3 |
| 0.1.2 | Ряд Ньютона | 3 |
| 0.1.3 | Формула Тейлора с остатком в интегральной форме | 4 |
| 1 | Введение в многомерный анализ | 6 |
| 1.0.1 | О геометрии пространства \mathbb{R}^n | 6 |
| 1.0.2 | О скалярных функциях $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ | 12 |
| 1.0.3 | Замечания про градиент | 16 |
| 1.1 | Теорема об обратной функции | 17 |
| 1.2 | Гладкие многообразия | 19 |
| 1.2.1 | Касательные векторы | 19 |
| 1.2.2 | Многообразия, вложенные в n -мерное евклидово пространство | 21 |
| 1.2.3 | Теорема о неявной функции | 22 |
| 1.3 | Длина пути | 25 |
| 1.3.1 | Длина гладкого пути | 28 |
| 1.4 | Естественная параметризация | 29 |
| 1.5 | Про комплексные числа | 30 |
| 1.5.1 | Простое вращение | 31 |
| 1.5.2 | Формулы Тейлора и ряд Тейлора для функций Γ, \sin, \cos | 32 |
| 1.5.3 | Обратные тригонометрические функции | 33 |
| 1.5.4 | Формула Эйлера | 34 |
| 1.6 | Дифференцирование высших порядков | 34 |
| 1.7 | Формула Тейлора функции нескольких переменных | 35 |
| 1.7.1 | Независимость частных производных от порядка дифференцирования | 37 |
| 2 | Несобственные интегралы и компания | 39 |
| 2.1 | Одна из ситуаций | 39 |
| 2.2 | Сравнение рядов и интегралов | 40 |
| 2.2.1 | Частичные суммы гармонического ряда и постоянная Эйлера — Маскерони | 41 |
| 2.2.2 | Формула Стирлинга | 41 |
| 2.3 | Суммируемые семейства | 42 |
| 2.3.1 | Применения | 45 |
| 2.4 | Степенные ряды | 46 |
| 2.4.1 | Признак Коши сходимости ряда | 46 |
| 2.4.2 | Аналитические функции | 47 |
| 2.5 | Дифференцировании по комплексному аргументу. Голоморфные функции | 48 |
| 2.5.1 | Связь комплексного дифференцирования и двумерного дифференцирования | 48 |
| 2.6 | Суммирование последовательностей и рядов | 50 |
| 2.6.1 | Метод Чезаро | 50 |
| 2.6.2 | Матричные методы суммирования. Метод Тёплица | 51 |
| 2.6.3 | Метод Абеля — Пуассона | 52 |
| 2.7 | Перестановка предельных переходов | 53 |
| 2.7.1 | Применение | 55 |

| | | |
|----------|--------------------------------------|-----------|
| 3 | Выпуклые и вогнутые функции | 59 |
| 3.1 | Бесконечные произведения | 63 |
| 3.1.1 | О сходящихся произведениях | 64 |

Лекция I

14 февраля 2023 г.

0.1 Вокруг формулы Тейлора

В данном разделе будет небольшое количество фактов, касающихся формулы Тейлора.

0.1.1 Достаточное условие существования локального экстремума

Пусть $I = \langle a, b \rangle$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$.

Как известно, если у f в x_0 локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$ (если производная в x_0 вообще существует).

Иногда непонятно, экстремум является локальным максимумом или минимумом.

Теорема 0.1.1. Если функция f дифференцируема в некоторой окрестности $x_0 \in (a, b)$, причём $\exists f'(x_0) = 0$ и $\exists f''(x_0)$, то

- если $f''(x_0) > 0$, то f имеет локальный минимум в x_0 ;
- если $f''(x_0) < 0$, то f имеет локальный максимум в x_0 .

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для f в точке x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_0(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \alpha(x)$$

Запишем определение о-маленького:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : |\alpha(x)| < \varepsilon \cdot (x - x_0)^2$$

Рассмотрим случай $f''(x_0) > 0$. Получаем $f(x) \geq f(x_0) + (\frac{1}{2}f''(x_0) - \varepsilon)(x - x_0)^2$ при $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. Приняв $\varepsilon = \frac{1}{4}f''(x_0)$ получаем, что $f(x)$ в достаточно маленькой проколотой окрестности x_0 больше $f(x_0)$, откуда x_0 — действительно точка локального минимума. \square

0.1.2 Ряд Ньютона

Рассмотрим формулу Тейлора для $h(x) := (1 + x)^r$ в окрестности 0, где $r \in \mathbb{R}$. Можно считать, что h определена на всех $x > -1$.

$$h^{(n)}(x) = r \cdot (r - 1) \cdot \dots \cdot (r - n + 1)(1 + x)^{r-n} \Rightarrow h^{(n)}(0) = r \cdot \dots \cdot (r - n + 1)$$

Запишем формулу Тейлора до x^k с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$h(x) = \sum_{n=0}^k \frac{r \cdot \dots \cdot (r - n + 1)}{n!} x^n + \frac{r \cdot \dots \cdot (r - k)}{(k + 1)!} (1 + \xi)^{r-k-1} \cdot x^{k+1}, \text{ где } \xi \in [0, x]$$

Для краткости обозначим $\binom{r}{n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r \cdot \dots \cdot (r - n + 1)}{n!} x^n$, что согласуется с определением биномиальных коэффициентов для натуральных чисел.

В таком случае формула упрощается до

$$h(x) = \sum_{n=0}^k \binom{r}{n} x^n + \binom{r}{k+1} (1 + \xi)^{r-k-1} \cdot x^{k+1}$$

Откинув остаточный член, получим *ряд Ньютона* — ряд Тейлора для функции $(1 + x)^r$ в окрестности 0: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$.

Факт 0.1.1. Если $|x| < 1$, то ряд Ньютона сходится (к какому-то числу). Более того, для произвольного $b \in (0, 1)$, ряд сходится равномерно при $x \in [-b, b]$.

Доказательство. Оценим числа $\left| \binom{r}{n} \right|$. Из определения видно, что

$$\binom{r}{n+1} = \binom{r}{n} \cdot \frac{r-n}{n+1} = \binom{r}{n} \left(\frac{r+1}{n+1} - 1 \right)$$

1. $n \leq r$. Первые несколько слагаемых ряда, на сходимость не влияют.
2. $n > r \geq 0$. Здесь $\left| \frac{r+1}{n+1} - 1 \right| < 1$, откуда $\left| \binom{r}{n} \right| \leq C_r^+$, где C_r^+ — максимальный биномиальный коэффициент $\binom{r}{n}$ для $n \leq r$.
3. $r < 0$. Для любого $\delta > 0$: $\left| \frac{r+1}{n+1} - 1 \right| < 1 + \delta$ при достаточно большом n . Зафиксируем δ и назовём эту границу n_0 . В этом случае, обозначив за C_r^- максимальный биномиальный коэффициент $\binom{r}{n}$ при $n \leq n_0$, получаем

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \binom{r}{n} \right| \cdot |x|^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} C_r^- (1 + \delta)^{n-n_0} \cdot b^n$$

Выбрав настолько маленькое δ , что $(1 + \delta)b < 1$, получаем равномерную сходимость — ряд оценивается сверху геометрической прогрессией. \square

0.1.3 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Теорема 0.1.2. Пусть I — отрезок, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $n + 1$ раз непрерывно дифференцируема на I . Для произвольных $l, h \in I$:

$$f(h) = \underbrace{f(l) + \frac{f^{(1)}(l)}{1!}(h-l) + \frac{f^{(2)}(l)}{2!}(h-l)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(l)}{n!}(h-l)^n}_{\text{стандартные слагаемые}} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^n dt}_{\text{остаток в интегральной форме}}$$

Доказательство. Индукция по n .

База: $n = 0$, f 1 раз непрерывно дифференцируема. Формула Тейлора обращается в $f(h) = f(l) + \int_l^h f'(t) dt$ — очевидно верно.

Переход: Доказываем для $n + 1$, считая, что для n уже доказано. $f \in C^{(n+2)}(I)$. Запишем остаток в интегральной форме для формулы Тейлора порядка n .

$$s := \frac{1}{n!} \int_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^n dt = -\frac{1}{n!} \int_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot d\left((h-t)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}\right) =$$

проинтегрируем по частям

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^{n+1} \Big|_{t=l}^{t=h} + \frac{1}{(n+1)!} \int_l^h (h-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

Видим, что если подставить пределы интегрирования, то как раз и получится необходимое:

$$s = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(l) \cdot (h-l)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_l^h (h-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \quad \square$$

Оценим остаток в интегральной форме, заменив переменную под интегралом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_l^h f^{(n+1)}(t) \cdot (h-t)^n dt = \\ & \left\| t = l + (h-l)w = hw + l(1-w); \quad h-t = (h-l)(1-w) \right\| \\ & = \frac{(h-l)^n}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(hw + l(1-w)) \cdot (1-w)^n dw \end{aligned}$$

В частности, при $l = 0$, формула упрощается до $s = \frac{h^n}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(hw)(1-w)^n dw$.

Теорема 0.1.3. Ряд Ньютона сходится к $(1+x)^r$ на $(-1, 1)$. Если $r > 0$, то в точке $x = 1$ сходимость тоже наблюдается.

Доказательство. Применим формулу Тейлора с интегральным остатком к $(1+x)^r$:

$$(1+x)^r = \left(\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} x^k \right) + s \quad \text{где } s = \frac{1}{n!} \cdot (r \cdot \dots \cdot (r-n)) \int_0^1 (1+xw)^{r-n-1} (1-w)^n dw$$

Для доказательства теоремы необходимо и достаточно показать $s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

1. Пусть $x \in [0, 1], n > r$. В таком случае $(1+xw)^{r-n-1} < 1$ и интеграл можно оценить сверху:

$$\int_0^1 (1+xw)^{r-n-1} (1-w)^n dw \leq \int_0^1 (1-w)^n dw = -\frac{1}{n+1} (1-w)^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

(a) Если здесь $r \geq 0$, то $\left| \frac{r \cdot \dots \cdot (r-n)}{n!} \right| \leq C_r^+$, и действительно $s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

(b) Если здесь $r < 0$, то считаем, что $x \in [0, 1)$, тогда $\left| \frac{r \cdot \dots \cdot (r-n)}{n!} \right| \leq C_r^- \cdot (1+\delta)^n$, где $\delta > 0$ можно выбирать сколь угодно близким к нулю. Выбрав δ так, что $x(1+\delta) < 1$, мы тоже увидим, что $s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2. Теперь пусть $x \in (-1, 0]$.

$$\text{Обозначим } I = \int_0^1 (1+xw)^{r-n-1} (1-w)^n dw = \int_0^1 (1+xw)^{r-1} \cdot \left(\frac{1-w}{1+xw} \right)^n dw.$$

Для данного r оценим $|(1+xw)^{r-1}| \leq C_r(x)$. Тогда $|I| \leq C_r(x) \cdot \int_0^1 \left(\frac{1-w}{1+xw} \right)^n dw$. Воспользуемся тем, что $\left(\frac{1-w}{1+xw} \right) \leq 1 - w(1-|x|)$ (проверка раскрытием скобок):

$$1-w \leq (1-|x|w)(1-w(1-|x|)) = 1-|x|w - w + |x|w^2 + w|x| - w^2|x|^2 = 1-w + |x|(1-|x|)w^2$$

Таким образом

$$\begin{aligned} |I| & \leq C_r(x) \int_0^1 (1-w(1-|x|))^n dw = C_r(x) \cdot \frac{-1}{1-|x|} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (1-w(1-|x|))^{n+1} \Big|_{w=0}^{w=1} = \\ & = \frac{1}{n+1} \cdot C_r(x) \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|} \end{aligned}$$

Опять получаем $s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

□

Глава 1

Введение в многомерный анализ

Лекция II 17 февраля 2023 г.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, дана некоторая функция

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Рассмотрим некую точку $x \in G$.

Определение 1.0.1 (f дифференцируема в точке x). $\exists L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейное отображение (оператор), такое, что

$$f(y) - f(x) = L(y - x) + o(|y - x|)$$

1.0.1 О геометрии пространства \mathbb{R}^n

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R}\}$ — состоит из *точек* или *векторов*. Сумма векторов, умножение вектора на число понятны; рассмотрим скалярное произведение двух элементов $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x, y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Свойства:

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- Линейность по каждому аргументу: $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$.
- $\langle x, x \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Число не меньше 0, равенство достигается, когда все координаты нулевые.

Определение 1.0.2 (Длина вектора).

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

- Неравенство Коши — Буняковского — Шварца (КБШ)

$$\langle x, y \rangle \leq |x| \cdot |y|$$

Доказательство. Рассмотрим $t \in \mathbb{R}$. Запишем $\langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0$.

$$\langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geq 0$$

Если $y = 0$, то исходное неравенство очевидное; иначе выше написан квадратный трёхчлен, который неотрицателен, то есть его дискриминант не превышает 0: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$. \square

Следствие 1.0.1 (Неравенство треугольника для длины). $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x + y| \leq |x| + |y|$.

Доказательство.

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$

□

- Введём метрику: $d(x, y) = |x - y|$. Несложно проверить всё три свойства, которым функция должна удовлетворять, чтобы быть метрикой. В том числе неравенство треугольника:

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$$

- Метрика инвариантна относительно сдвига; при домножении всех координат на одно и то же число, метрика тоже умножается на это число.

Факт 1.0.1. Пусть $u, u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ (где $k \in \mathbb{N}$).

Условие

$$\left| u - u^{(k)} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

означает покомпонентную сходимость.

Доказательство. Несложно оценить из неравенства $x - y \leq |x_i - y_i|$ — расстояние хотя бы разность координатных проекций. □

Стандартный базис векторов в \mathbb{R}^n : $e_j = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0)$.

Определение 1.0.3 ($x, y \in \mathbb{R}^n$ ортогональны). $\langle x, y \rangle = 0$.

Лемма 1.0.1. Если $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ все ненулевые и попарно ортогональны, то они линейно независимы.

Доказательство. Рассмотрим вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

$$x := \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

Заметим, что $\langle u_i, x \rangle = \alpha_i |u_i|^2$.

Таким образом, если $x \in \langle u_1, \dots, u_m \rangle$, то его коэффициенты в линейной комбинации равны $\frac{\langle x, u_j \rangle}{|u_j|^2}$. □

Если векторы u_j имеет единичную длину, то эти коэффициенты равны $\langle x, u_j \rangle$.

Определение 1.0.4 (Система векторов называется ортонормированной). $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Теорема 1.0.1. Пусть E — линейное подпространство в \mathbb{R}^n , $d = \dim(E)$. Тогда в E существует ортонормированная система из d векторов.

Доказательство. Будем действовать по индукции. Пусть на k -м шаге построена ортонормированная система из k векторов u_1, \dots, u_k .

Если $k < d$, то $\exists v \in E \setminus E_k$, где $E_k = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

Тогда вектор $\tilde{v} = v - (\langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k) \in E \setminus E_k$ тоже; несложно проверить, что \tilde{v} ортогонален всякому вектору из u_1, \dots, u_k .

Теперь возьмём пропорциональный ему вектор, длины 1, и добавим в ортонормированную систему. □

Построенная система — линейно независима, называется ортонормированным базисом пространства.

Если рассмотреть разложение векторов x, y по ортонормированному базису, то скалярное произведение будет вычисляться по прежней формуле. *Линейное подпространство евклидова пространства евклидово.*

Пусть L_1, L_2 — линейные пространства. Отображение $T : L_1 \rightarrow L_2$ называется линейным оператором, если оно линейно.

Ортогональный проектор на подпространство

Теорема 1.0.2. Пусть E — линейное подпространство в \mathbb{R}^n . Для всякого $x \in \mathbb{R}^n : \exists! a, b \in \mathbb{R}^n : a \in E, b \perp E \wedge x = a + b$.

Доказательство. • Единственность: вычтем соответствующие разложения, если они вдруг не единственны. Получим с одной стороны вектор из E , а с другой стороны — ему перпендикулярный.

• Разложим по ортонормированному базису с помощью скалярных произведений. □

Определение 1.0.5 (Ортогональный проектор). Отображение, сопоставляющее вектору x этот самый вектор $a \in E$.

Лекция III

21 февраля 2023 г.

Можно рассмотреть такое определение проектора: линейное отображение $T : L \rightarrow L$, такое что $T(L) = R$ и $T|_R = \text{id}_R$.

Отсюда сразу получается $T^2 = T$, что тоже можно взять за определение, а не за свойство.

Таким свойствам удовлетворяет, например, ортогональный проектор $P : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, такой, что $(x - Px) \perp Px$.

Для подпространства $E \subset \mathbb{R}^n$ можно определить ортогональное дополнение $E^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \perp E\} = \text{Ker } P$.

Очевидно, что $(I - P)$ — ортогональный проектор на E^\perp , где I — тождественный оператор.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ — произвольное отображение.

Для точки $x \in G$ говорят, что F дифференцируема в точке x , если $\exists T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор, такой, что $F(y) - F(x) = T(x - y) + o(|x - y|)$.

Для пущей строгости можно записать

$$F(y) - F(x) = T(x - y) + \alpha(x - y)$$

где $\alpha : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ для некой окрестности нуля U_0 , причём $|\alpha(v)| = o(|v|)$. Так как теперь $|\alpha(v)|$ и $|v|$ — скалярные величины, то записывать o -малое точно корректно.

Оператор T называют дифференциалом (дифференциальным отображением) F и записывают $dF(x, \cdot) = dF_x(\cdot)$. Заметим, что определение полностью согласуется с определением одномерного дифференциала.

Прежде всего рассмотрим несколько свойств линейных операторов.

Пусть $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линеен. Обозначим $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированный базис пространства \mathbb{R}^n , а $\{g_k\}_{k=1}^m$ — ортонормированный базис \mathbb{R}^m .

По определению базиса $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, откуда конечно же по линейности $Tx = \sum_{j=1}^n x_j \cdot T e_j$.

С другой стороны $Te_j = \sum_{k=1}^m a_{k,j} g_k$, как разложения Te_j по стандартному базису g .

Итого получаем $Tx = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \right) g_k$, где $a_{k,j}$ — матрица отображения T .

Следствие 1.0.2. T — непрерывное (покомпонентная сходимость) отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

На самом деле выполняется условие, намного более сильное, чем просто непрерывность:

Предложение 1.0.1. T удовлетворяет условию Липшица: $\exists A \in \mathbb{R} : \forall u, v \in \mathbb{R}^n : |Tu - Tv| \leq A|u - v|$.

Эквивалентная запись: $\forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \leq A|x|$.

Доказательство. $|Tx|^2 = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \right)^2 \leq_{\text{КБШ}} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{k,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right) = |x|^2 \sum_{k,j} a_{k,j}^2$.

Теперь видно, что условие Липшица действительно выполняется, для $A = \sqrt{\sum_{k,j} a_{k,j}^2}$. \square

Полученная константа A редко бывает самой плотной оценкой, а плотная оценка очень интересна, хотя и сложно вычислима.

Определим её. Пусть $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор.

Определение 1.0.6 (Норма оператора T). $\|T\| \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \leq A|x| \right\}$.

Предложение 1.0.2. $\|T\| = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| \leq 1 \right\} = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| = 1 \right\}$.

Доказательство. Очевидно, супремумы достигаются из компактности и теоремы Вейерштрасса. Обозначим $\alpha = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| \leq 1 \right\}$; $\beta = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| = 1 \right\}$; $\gamma = \|T\|$.

Заметим, что в определении нормы можно \inf заменить на \min , так как в нестрогом неравенстве можно перейти к пределу.

Несложно видеть из определения, что $\beta \leq \alpha \leq \gamma$. Докажем, что $\gamma \leq \beta$.

Докажем, что $\forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \leq \beta|x|$.

- Если $x = 0$, то неравенство очевидно верно.
- Если $x \neq 0$, то $\left| \frac{x}{|x|} \right| = 1$, и можно применить к нему определение β :

$$T \left(\frac{x}{|x|} \right) \leq \beta \Rightarrow Tx \leq \beta|x|$$

\square

Факт 1.0.2. Из линейности T можно брать супремум (но он уже не будет достигаться) и по открытому шару тоже: $\|T\| = \sup \left\{ |Tx| \mid |x| < 1 \right\}$.

Доказательство. Рассмотрим точку x на сфере, где равенство выполняется с точностью до ε , немного отступим от неё. \square

Теорема 1.0.3 (Свойства нормы).

1. $\|T\| = 0 \iff \forall x : Tx = 0$.
2. $\|aT\| = |a| \cdot \|T\|$
3. $\|T_1\| + \|T_2\| \geq \|T_1 + T_2\|$.

Доказательство.

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{|x| \leq 1} |(T_1 + T_2)(x)| = \sup_{|x| \leq 1} |T_1(x) + T_2(x)| \leq \sup_{|x| \leq 1} |T_1(x)| + |T_2(x)| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

□

Введём метрику $\rho(T_1, T_2) = \|T_1 - T_2\|$.

Эта метрика задаёт отнюдь не новую топологию на пространстве линейных операторов. Чтобы это увидеть, перейдём к матрицам линейных отображений.

Воспользовавшись оценкой $\|T\| \leq \sqrt{\sum_{k,j} (a_{k,j})^2}$ мы сразу видим, что поэлементная сходимость матриц влечёт стремление $\sqrt{\sum_{k,j} (a_{k,j} - b_{k,j})^2} \rightarrow 0$, то есть нормы близких матриц близки. Обратное тоже верно — если норма разности операторов стремится к нулю, то их матрицы покомпонентно сходятся.

$Te_j = \sum_{k=1}^m a_{k,j} g_k$, откуда можно извлечь коэффициенты матрицы: $a_{k,j}(T) = \langle Te_j, g_k \rangle$.

Обозначим $|||T||| = \sqrt{\sum_{k,j} a_{k,j}(T)^2}$.

Факт 1.0.3. $|a_{k,j}(T)| \leq \|T\| \leq |||T|||$.

Теорема 1.0.4. $T_s, T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (где $s \in \mathbb{N}$) — линейные операторы. Следующие условия эквивалентны:

- $|||T_s - T||| \rightarrow 0$.
- $\|T_s - T\| \rightarrow 0$.
- $\forall k, j : a_{k,j}(T_s - T) \rightarrow 0$.

Доказательство. Собрать факты выше. □

Так как $|||T|||$ — длина вектора в \mathbb{R}^{nm} , то можно считать, что пространство операторов тоже евклидово.

Предложение 1.0.3. Пусть $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^l$, где T, S — линейные операторы. Тогда $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

Доказательство. $\forall x \in \mathbb{R}^n : |(S \circ T)(x)| \leq \|S\| \cdot |Tx| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot |x|$. □

Замечание. В будущем часто при композиции линейных операторов будет записываться, как произведение, в том числе слитно (ST) .

Оценим снизу норму инъективных линейных операторов.

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор — инъективен, если $\text{Ker } T = \{0\}$. Очевидно, необходимым условием является $m \geq n$.

Теорема 1.0.5. Следующие условия эквивалентны:

1. $\text{Ker } T = \{0\}$.
2. $\exists m > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n : |Tx| \geq m|x|$.

Доказательство. \Leftarrow . Очевидно.

\Rightarrow . Рассмотрим единичную сферу $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Она компактна, так как ограничена и замкнута.

Введём непрерывную функцию $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}; \phi(x) = |Tx|$. Очевидно, $\forall x \neq 0 : \phi(x) > 0$.

По теореме Вейерштрасса ϕ где-то достигает своё наименьшее значение. Пусть $m = \min_{x \in S} \phi(x)$, причём $m = \phi(x_0)$. Тогда $\left|T\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \geq m \Rightarrow |Tx| \geq m|x|$. \square

Другой вариант доказательства. Пусть $E = T(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ — евклидово подпространство.

E само евклидово, можно считать, что $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — биекция. Тогда обратное к T — тоже линейный оператор, значит, у него есть норма, то есть $\forall y \in E : \exists C \in \mathbb{R} : |T^{-1}y| \leq C|y|$.

Собственно, это и требовалось доказать. \square

Лекция IV

28 февраля 2023 г.

В терминах ε и δ дифференцируемость можно записать так:

Для функции $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданной на открытом множестве U и точки $x_0 \in U$:

$\exists A$ — линейный оператор, такой, что $\forall x \in U : F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$

Определим $\phi(x) = F(x) - F(x_0) - A(x - x_0)$, определённую на U .

Необходимым и достаточным условием является $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x \in U : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\phi(x)| \leq \varepsilon \cdot |x - x_0|$.

Факт 1.0.4. Если F дифференцируема в точке x_0 , то F непрерывна в точке x_0 . Более того, выполняется локальное условие Липшица:

$$\exists C \in \mathbb{R} : |F(x) - F(x_0)| \leq C|x - x_0| \text{ при достаточно малом } x - x_0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= A(x - x_0) + \phi(x) \Rightarrow \\ |F(x) - F(x_0)| &\leq \|A\| \cdot |x - x_0| + \varepsilon \cdot |x - x_0| = (\|A\| + \varepsilon) \cdot |x - x_0| \end{aligned} \quad \square$$

Предложение 1.0.4. У данной функции $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ в данной точке $x_0 \in U$ существует не более одного дифференциала.

Доказательство. От противного: нашлись $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — дифференциалы F в x_0 .

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= A(x - x_0) + o(|x - x_0|) \\ F(x) - F(x_0) &= B(x - x_0) + o(|x - x_0|) \\ &\Downarrow \\ (B - A)(x - x_0) &= o(|x - x_0|) \end{aligned}$$

Положим $C = B - A$. Если $C \neq 0$, то $\exists h \in \mathbb{R}^n : C(h) \neq 0$.

Рассмотрев $t \in \mathbb{R}$, получаем $C(h) = \frac{C(th)}{t \cdot |h|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, противоречие. \square

Примеры (Простейшие дифференцируемые отображения).

- Постоянное отображение (дифференциал — 0).
- Линейное отображение (дифференциал совпадает с самим отображением).

Теорема 1.0.6 (О композиции дифференцируемых отображений). Пусть $U \in \mathbb{R}^n, V \in \mathbb{R}^m$ — открытые множества.

При данных отображениях $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $G : V \rightarrow \mathbb{R}^k$, таких, что $F(U) \subset V$, выберем точки $x_0 \in U$ и $y_0 = F(x_0)$.

При сделанных предположениях, если F дифференцируема в x_0 с дифференциалом A , G дифференцируема в y_0 с дифференциалом B , то $G \circ F$ дифференцируема в x_0 с дифференциалом BA .

Доказательство.

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + A(x - x_0) + \phi(x), & |\phi(x)| &= o(|x - x_0|) \\ G(y) &= G(y_0) + B(y - y_0) + \psi(y), & |\psi(y)| &= o(|y - y_0|) \\ \text{подставим } y &:= F(x), y_0 := F(x_0) & (\text{область определения позволяет}) \\ (G \circ F)(x) &= (G \circ F)(x_0) + B(F(x) - F(x_0)) + \psi(F(x)) \\ (G \circ F)(x) &= (G \circ F)(x_0) + BA(x - x_0) + B(\phi(x)) + \psi(F(x)) \end{aligned}$$

Покажем, что $\gamma(x) := B(\phi(x)) + \psi(F(x)) = o(|x - x_0|)$.

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\leq \underbrace{|B(\phi(x))|}_{\leq \|B\| \cdot |\phi(x)| = o(|x - x_0|)} + \underbrace{|\psi(F(x))|}_{o(|x - x_0|) \text{ из-за локальной липшицевости } F} \\ &\leq o(|x - x_0|) + o(|x - x_0|) = o(|x - x_0|) \end{aligned}$$

□

Теорема 1.0.7. Если $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а $F_1, F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ — дифференцируемы в точке x_0 , то для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$d(\alpha F_1 + \beta F_2)(x_0, \cdot) = \alpha \cdot dF_1(x_0, \cdot) + \beta \cdot dF_2(x_0, \cdot)$$

Пусть $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение.

Определение 1.0.7 (Координатные проекции F). Разложим $F(x)$ по стандартному базису: $F(x) = \sum_{i=1}^m a_i e_i$.

Тогда координатными проекциями называются функции $F_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $F_j(x) = a_j$.

Теорема 1.0.8. Пусть $U \in \mathbb{R}^n$ открыто. Утверждается, что $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в $x_0 \in U$ если и только если $\forall j = 1..m : F_j$ дифференцируема в x_0 .

Более того, $dF(x_0, h) = (dF_1(x_0, h), \dots, dF_m(x_0, h))$

Доказательство. \Rightarrow . Рассмотрим линейный оператор $T_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющий $y \in \mathbb{R}^m$ его j -ю координату в разложении по стандартному базису. $F_j = T_j \circ F$ — дифференцируема, как композиция. Утверждение про матрицу дифференциала F следует из того, что матрица дифференциала T_j — это $(0, \dots, 1_j, \dots, 0)$

\Leftarrow . Если все F_j дифференцируемы, то $F_j(x) - F_j(x_0) = A_j(x - x_0) + o(|x - x_0|)$, откуда

$$F(x) - F(x_0) = (A_1(x - x_0), \dots, A_m(x - x_0)) + (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))$$

Несложно видеть, что это дифференцируемость F по определению. □

1.0.2 О скалярных функциях $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

Замечание. Пусть $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярная функция, дифференцируемая в $x_0 \in U$, то есть

$$G(x) - G(x_0) = A(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

где $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный функционал.

Разложим $A(y) = A(y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = y_1 A(e_1) + \dots + y_n A(e_n)$. Положим $\xi_j = A(e_j) \in \mathbb{R}$, тогда $A(y) = \langle y, \xi \rangle$.

Пусть F дифференцируема в $x_0 \in U$, тогда $\exists \xi : F(x) - F(x_0) = \langle x - x_0, \xi \rangle + o(|x - x_0|)$. Таким образом, дифференциальный оператор для F — скалярное произведение $\langle x - x_0, \xi \rangle$, где ξ называется *градиентом* F в точке x_0 . Обозначается $\text{grad}_{x_0} f$, или (иногда) $\text{grad} f(x_0)$ (имея в виду $(\text{grad} f)(x_0)$).

Лекция V

3 марта 2023 г.

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый отрезок $I = (a, b)$.

Рассмотрим $g : I \rightarrow U$, дифференцируемую в точке $t_0 \in (a, b)$. Как и раньше, $U \subset \mathbb{R}^n$. Функцию g такого вида называют *векторнозначная функция*.

Рассмотрим координатные функции $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$. g дифференцируема в $t_0 \in (a, b) \iff$ все g_j дифференцируемы в t_0 .

Но $g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема, если $\exists g'_j(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g_j(t) - g_j(t_0)}{t - t_0}$.

Найдём дифференциал функции g :

$$g(t) - g(t_0) = (g_1(t) - g_1(t_0), \dots, g_n(t) - g_n(t_0)) = (g'_1(t_0), \dots, g'_n(t_0)) (t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

Таким образом

$$(g'_1(t_0), \dots, g'_n(t_0)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$$

Определение 1.0.8 (Производная векторнозначной функции g). Соответствующий вектор $(g'_1(t_0), \dots, g'_n(t_0))$.

В частности, если $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — координата частицы в зависимости от времени, то её производная — трёхмерный вектор, вектор скорости частицы.

В случае функции g такого вида её дифференциал $dg(t_0, h) = g'(t_0) \cdot h$.

Теперь рассмотрим композицию $F = f \circ g$, где $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : I \rightarrow U$ рассмотрены выше.

Пусть g дифференцируема в t_0 , $x_0 = g(t_0)$, f дифференцируема в x_0 . Тогда согласно (теорема 1.0.6) F дифференцируема в t_0 , её дифференциал равен композиции дифференциалов f и g .

$$\begin{aligned} df(x_0, u) &= \langle u, \text{grad}_{x_0} f \rangle \\ dg(t_0, h) &= g'(t_0) \cdot h \\ \Downarrow \\ dF(t_0, h) &= \langle g'(t_0) \cdot h, \text{grad}_{x_0} f \rangle = \langle g'(t_0), \text{grad}_{x_0} f \rangle \cdot h \end{aligned}$$

Но $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ — одномерная функция, дифференцируемость означает существование одномерного предела. Отсюда $F'(t_0) = \langle g'(t_0), \text{grad}_{x_0} f \rangle$.

Пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $g : I \rightarrow U$. Определим $g(t) = x_0 + t \cdot e$, где I — настолько маленький интервал (содержащий 0), что $g(I) \subset U$.

В таком случае $F'(0)$ записывается более явно: $F'(0) = \langle e, \text{grad}_{x_0} f \rangle$. С другой стороны, $F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$.

Мы проверили, что если f дифференцируема, то предел выше существует (и равен $\langle e, \text{grad}_{x_0} f \rangle$). Этот предел называется *производной f по направлению e* .

Выберем в качестве e стандартный орт: $e \in \{e_j\}_{j=1}^n = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$

Определение 1.0.9 (Частная производная f по j -й координате). Производная f по направлению e_j . Обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$

Тем самым,

$$\text{grad}_{x_0} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим более общий случай: $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в $x_0 \in U$. Как известно, $h = (h_1, \dots, h_m)$, где h_j — соответствующие координатные функции.

Запишем дифференциал h в виде столбца:

$$dh(x_0, u) = \begin{pmatrix} dh_1(x_0, u) \\ \vdots \\ dh_m(x_0, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \text{grad}_{x_0} h_1, u \rangle \\ \vdots \\ \langle \text{grad}_{x_0} h_m, u \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Получили следующий результат: матрицы дифференциала отображения h в точке x_0 выглядит так:

$$\left(\frac{\partial h_k}{\partial x_j}(x_0) \right)_{j=1..n}^{k=1..m} \text{ где } k \text{ — номер строки, а } j \text{ — номер столбца}$$

При этом, если h дифференцируема в x_0 , то существуют все частные производные.

Контрпример (Если частные производные в x_0 в направлении всех ортов существуют, то совсем не обязательно отображение дифференцируемо). Например,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Очевидно, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, но сужение функции на прямую $y = x$ претерпевает в нуле разрыв: $f(t, t) = \frac{1}{2}$ при $t \neq 0$.

Также можно найти недифференцируемую функцию, у которой есть частные производные по всем направлениям.

«Но жить-то как-то надо»

Теорема 1.0.9. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, где $U \subset \mathbb{R}^n$.

При условии, что в некоторой окрестности точки $x_0 \in U$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ существуют, причём непрерывны в точке x_0 , f дифференцируема в x_0 .

Доказательство. Для удобства доказательства выберем $n = 2$. Утверждается, что при больших n всё то же самое, но писанины больше.

При $n = 2$ обозначим $x_0 = (u_0, v_0)$, $x = (u, v)$.

Из непрерывности производных

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \right| < \varepsilon, \quad j = 1, 2$$

Запишем

$$f(x) - f(x_0) = f(u, v) - f(u_0, v_0) = (f(u, v) - f(u_0, v)) + (f(u_0, v) - f(u_0, v_0))$$

Применим к данным двум разностям формулу Лагранжа.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(\theta_v, v) \cdot (u - u_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, \eta) \cdot (v - v_0) \text{ где } \theta_v \text{ между } u \text{ и } u_0, \eta \text{ между } v \text{ и } v_0$$

Преобразуем выражение, прибавив и вычтя ожидаемое изменение функции — произведение производной и изменение аргумента.

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot (v - v_0) \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\theta_v, v) - \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \right) (u - u_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \right) (v - v_0)}_R$$

Первая пара скобок содержит $\langle \text{grad}_{x_0} f, x - x_0 \rangle$, докажем, что остальное мало.

Зафиксируем некий $\varepsilon > 0$, выберем $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, где δ — функция от ε из непрерывности производных.

Тогда все точки $(u_0, v_0), (u_0, \eta), (\theta_v, v)$ находятся на расстоянии меньше δ друг от друга.

Применяя КБШ, получаем, что $|R| \leq \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} \cdot |x - x_0| \leq \sqrt{2} \cdot \varepsilon |x - x_0|$. \square

Определение 1.0.10 (Путь). Непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Образ пути $\gamma([a, b])$ называется *носителем* пути.

Интересный факт. Кривая Пеано — путь, у которого носитель — квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$.

Пусть γ дифференцируема на (a, b) , и U — открытое множество, такое, что $\gamma([a, b]) \subset U$.

Рассмотрим скалярную функцию $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемую везде на U .

Зададим $\phi = f \circ \gamma$. Несложно видеть, что ϕ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) .

Запишем производную ϕ :

$$\phi'(t) = \langle \text{grad}_{\gamma(t)} f, \gamma'(t) \rangle$$

Применим формулу Лагранжа: $c, d \in [a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [\min(c, d), \max(c, d)]$:

$$\phi(d) - \phi(c) = \phi'(\xi)(d - c)$$

Обозначим $y = \gamma(c), x = \gamma(d)$, тогда $f(y) - f(x) = \langle \text{grad}_{\gamma(\xi)}(f), \gamma'(\xi) \rangle (d - c)$

Получился многомерный вариант формулы Лагранжа.

Лекция VI

7 марта 2023 г.

Рассмотрим частный вариант формулы выше: $[\alpha, \beta] = [0, 1], U$ — шар с центром в a , содержащий b . Зададим путь прямолинейно: $\gamma(t) = a + t(b - a), t \in [0, 1]$.

Запишем:

$$f(b) - f(a) = \langle \text{grad}_u f, b - a \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(u)(b_j - a_j)$$

Факт 1.0.5. Если функция f дифференцируема на всём открытом множестве G , а точки a, b — концы некоего отрезка, содержащегося в G целиком, то на этом отрезке найдётся точка u , удовлетворяющая условиям.

Следствие 1.0.3. $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{u \in [a, b]} |\text{grad}_u f| \cdot |b - a|$, где $[a, b] = \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$.

Теорема 1.0.10 (Векторный вариант предыдущей). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо во всех точках U .

Если $[a, b] \subset U$, то $\exists u \in [a, b] : |F(b) - F(a)| \leq |dF(u, b - a)|$.

Доказательство.

Лемма 1.0.2 (О двойственности). Пусть $x \in \mathbb{R}^k$, тогда $|x| = \max \{ \langle x, y \rangle \mid y \in \mathbb{R}^k, |y| \leq 1 \}$.

Доказательство леммы. Согласно КБШ $\langle x, y \rangle \leq |x|$.

Если $x = 0$, то доказывать нечего, иначе при $y = \frac{x}{|x|}$ достигается равенство. \square

Согласно лемме, $\exists e \in \mathbb{R}^m : |e| = 1$, причём $|F(b) - F(a)| = \langle F(b) - F(a), e \rangle$.

Рассмотрим скалярную функцию $f : U \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \langle F(x), e \rangle$. f дифференцируема, как линейная комбинация координатных функций F .

Применив для f формулу Лагранжа, получаем: $\exists u \in [a, b] : f(b) - f(a) = \langle \text{grad}_u f, b - a \rangle$.

Совместив всё полученное:

$$|F(b) - F(a)| = \langle F(b) - F(a), e \rangle = |f(b) - f(a)| = |\langle \text{grad}_u f, b - a \rangle|$$

Посчитаем градиент. Для этого разложим F, e по базису: $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), e = (e_1, \dots, e_m)$. Тогда получаем явное представление $f(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x)e_j$. Отсюда $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \cdot e_j$.

Продолжим оценку:

$$|\langle \text{grad}_u f, b - a \rangle| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(u) \cdot (b_k - a_k) \right| = \left| \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(u) (b_k - a_k) e_j \right| = |\langle dF(u, b - a), e \rangle| \leq |dF(u, b - a)|$$

\square

Контрпример (Равенства, вообще говоря, может не быть). $n = 1, m = 2$ — отображение из прямой в плоскость.

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

Рассмотрим $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = (0, 1) - (1, 0) = (-1, 1)$.

$$|f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)| = \sqrt{2}$$

Предположим, что нашлась точка $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) : \sqrt{2} = |f'(\theta)\frac{\pi}{2}|$. Но $|f'(\theta)| = |(-\sin \theta, \cos \theta)| = 1$, и равенство не выполняется: всегда $\frac{\sqrt{2}}{\approx 1.41} < \frac{\pi}{2} \approx 1.57$

Следствие 1.0.4. $|F(b) - F(a)| \leq \|dF(u, \cdot)\| \cdot |b - a|$.

1.0.3 Замечания про градиент

1. Необходимое условие существования локального экстремума.

Пусть X — топологическое пространство, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, $x_0 \in X$;

Определение 1.0.11 (g имеет локальный максимум в точке x_0). Существует окрестность $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) : g(x) \leq g(x_0)$.

Также бывают *строгие локальный минимум и максимум*.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}$, причём f имеет локальный экстремум в точке $x_0 \in U$.

Теорема 1.0.11. Если f дифференцируема в точке x_0 , то $\text{grad}_{x_0} f = (0, \dots, 0)$.

Доказательство. Пусть $v = \text{grad}_f(x_0) \neq (0, \dots, 0)$, то есть $\langle v, v \rangle > 0$. Рассмотрим малое t , при котором в частности $x_0 + tv \in U$, при нём $f(x_0 + tv) - f(x_0) = \langle v, tv \rangle + \phi(tv)$, где $|\phi(h)| = o(h)$. Таким образом, если $v \neq (0, \dots, 0)$, то найдётся малое t , такое, что $f(x_0 + tv) > f(x_0)$. \square

Условие, разумеется, не является достаточным (даже в одномерной теории).

2. Про скорость роста в разных направлениях. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Если f дифференцируема в $x_0 \in U$, то для единичного вектора e определена в окрестности 0 одномерная функция $\phi_e(t) = f(x_0 + te)$.

По определению $\frac{\partial f}{\partial e} = \phi'_e(0) = \langle \text{grad}_f(x_0), e \rangle$.

Замечание. Из КБШ видно, что f растёт быстрее всего в направлении $e_0 = \frac{\text{grad}_f(x_0)}{|\text{grad}_f(x_0)|}$ (если $\text{grad}_f(x_0) \neq 0$).

Кроме того, f убывает быстрее всего в направлении против градиента.

Лекция VII

10 марта 2023 г.

1.1 Теорема об обратной функции

Докажем теорему, аналогичную одномерной теореме про производную обратного отображения.

Пусть G — открытое множество в \mathbb{R}^n , а $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение, дифференцируемое во всех точках G .

Выберем $x_0 \in G$, такую, что F непрерывно дифференцируема в x_0 , то есть $\|dF(x_0, \cdot) - dF(x, \cdot)\| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Иными словами, $\forall j, k : \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)$.

Положим A — матрица $dF(x_0, \cdot)$ — матрица линейного отображения. Пусть $\text{Ker } dF(x_0, \cdot) = \{0\}$, то есть $\det A \neq 0$. Здесь существенно, что F действует из пространства размерности n в пространство той же размерности.

Теорема 1.1.1 (Об обратной функции). При сделанных предположениях $\exists U$ — окрестность точки x_0 , такая, что $F|_U$ — биекция между U и $F(U)$.

Утверждается, что $F(U)$ содержит V — некоторую окрестность точки $y_0 := F(x_0)$, причём на V существует обратное к F отображение.

Утверждается, что F^{-1} дифференцируема в точке y_0 и $dF^{-1}(y_0, \cdot) = A^{-1}$.

Доказательство.

Лемма 1.1.1 (Лемма о билипшицевости). Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, $H : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение.

Предположим, что H дифференцируема в G , причём в $x_0 \in G$ дифференцируемость непрерывная.

Тогда $\exists U \ni x_0$, $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in U : |H(x_1) - H(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$.

Более того, если $\text{Ker } dF(x_0, \cdot) = \{0\}$, то можно выбрать эту окрестность U вместе так, что ещё и $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in U : |H(x_1) - H(x_2)| \geq c|x_1 - x_2|$.

Доказательство леммы. Обозначим $A = dF(x_0, \cdot)$ — матрица дифференциала. Положим $H_1(x) = H(x) - Ax$. Тогда $dH_1(x, \cdot) = dH(x, \cdot) - A$.

Из непрерывности дифференциала в x_0 следует $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \|dH(x, \cdot) - A\| \leq \varepsilon$.

Таким образом, $\forall u, v \in \overline{B}_\delta(x_0) : \underbrace{|H_1(u) - H_1(v)|}_{|(H(u) - H(v)) - A(u - v)|} \leq \varepsilon \cdot |u - v|$ — здесь мы пользуемся

неравенством Коши — Лагранжа для дифференциала на пути.

Раскрыв модуль, получаем $|A(u - v)| - \varepsilon|u - v| \leq |H(u) - H(v)| \leq |A(u - v)| + \varepsilon|u - v|$.

Выбрав $\varepsilon = 1$ получаем оценку сверху — липшицевость функции H . Теперь надо доказать билипшицевость — липшицевость H^{-1} .

Это правда, так как (теорема 1.0.5) $\exists m > 0 : \forall w \in \mathbb{R}^n : |Aw| \geq m|w|$, выберем $\varepsilon = m/2$. \square

Лемма 1.1.2. Рассмотрим матрицы линейных отображений A и $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Предположим, что A обратима, и $\|A_k - A\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Тогда для достаточно больших k : A_k обратима, причём $\|A_k^{-1} - A^{-1}\| \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$.

Доказательство леммы. Согласно (теорема 1.0.5) $\exists m > 0 : \forall w \in \mathbb{R}^n : |Aw| \geq m|w|$.

Заметим, что

$$|A_k w| \geq |Aw| - |(A - A_k)w| \geq (m - \|A - A_k\|) \cdot |w|$$

Так как A_k стремится к A по норме, то при достаточно больших k : $m - \|A - A_k\| > \frac{m}{2}$.

Это показывает, что A_k обратимы, начиная с некоторого места. Сходимость A_k^{-1} к A^{-1} можно показать покомпонентно, можно следующей выкладкой:

$$\|A^{-1} - A_k^{-1}\| = \|A^{-1} \cdot (A_k - A) \cdot A_k^{-1}\| \leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\|A_k - A\|}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \cdot \underbrace{\|A_k^{-1}\|}_{\leq 3m/2}$$

\square

Из леммы о билипшицевости получаем $\exists \rho, c, C > 0 : \forall u, v \in \overline{B}_\rho(x_0)$:

$$c|u - v| \leq |F(u) - F(v)| \leq C|u - v|$$

В частности, F инъективна.

Найдём такое η , что $\overline{B}_\eta(y_0) \subset F(\overline{B}_\rho(x_0))$.

Рассмотрим $y \in \overline{B}_\eta(y_0)$, решим уравнение $F(x) = y$, где x надо найти в $\overline{B}_\rho(x_0)$. Для решения заведём $\Phi : \overline{B}_\rho(x_0) \rightarrow \mathbb{R} : \Phi(x) := |F(x) - y|^2$. По теореме Вейерштрасса она где-нибудь достигает своего наименьшего значения, пусть в точке $z \in \overline{B}_\rho(x_0)$.

Покажем, что для достаточно малого η решение лежит не на границе: $|x_0 - z| < \rho$. Докажем это от противного.

Пусть $|z - x_0| = \rho$, оценим

$$\Phi(z) \underset{\text{по определению } z}{\leq} \Phi(x_0) = |y_0 - y|^2 \leq \eta^2$$

Ещё оценим

$$|F(z) - y| \geq |F(z) - F(x_0)| - |y_0 - y| \geq c|z - x_0| - \eta = c\rho - \eta$$

Выберем η настолько маленьким, что $c\rho - \eta > \eta$. Тогда $|F(z) - y|^2 \geq \eta^2$, противоречие.

А раз решение лежит не на границе шара, то $F(z) = y$ — иначе можно пойти против градиента и уменьшиться ещё сильнее. Получается, градиент нулевой.

Для любого $\varepsilon > 0$ при выборе достаточно маленького $\rho : \forall z \in \overline{B}_\rho(x_0) : \|dF(z, \cdot) - A\| \leq \varepsilon$, то есть $dF(z, \cdot)$ обратимо. Запишем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(z) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(z) \cdot (f_j(z) - y_j)$$

Из обратимости $dF(z, \cdot)$ следует невырожденность матрицы $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ (это та же, но транспонированная), откуда при домножении матрицы на вектор $f(z) - y$ не получится нуля — единственным решением зануления градиента является $f(z) = y$.

Таким образом, при $\eta < \frac{\varepsilon \rho}{2}$ все решения уравнений $F(x) = y$ лежат внутри $\overline{B}_\rho(x_0)$. Часть про выбор окрестности $V \subset F(U)$ доказана.

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= A \cdot (x - x_0) + \phi(x), \text{ где } |\phi(x)| = o(|x - x_0|) \\ \forall y \in \overline{B}_\eta(y_0) : \exists x \in \overline{B}_\rho(x_0) : F(x) &= y \\ y - y_0 &= A(F^{-1}(y) - F^{-1}(y_0)) + \phi(F^{-1}(y)) \\ B &:= A^{-1} \\ F^{-1}(y) - F^{-1}(y_0) &= B(y - y_0) - B\phi(F^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Осталось показать, что $B\phi(F^{-1}(y)) = o(|y - y_0|)$. Применение линейного оператора B на маленькую не влияет, он билипшицев. Также билипшицевы F и F^{-1} , так как $\phi(x) = o(|x - x_0|)$, то $B\phi(F^{-1}(y)) = o(|y - y_0|)$. \square

Лекция VIII

14 марта 2023 г.

В предыдущей лекции мы показали следующее. Рассмотрим открытое $G \subset \mathbb{R}^n$, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, такие, что F непрерывно дифференцируема всюду.

Если в некой точке $x_0 \in G$ наблюдается невырожденный оператор $dF(x_0, \cdot)$, то при x , близких к x_0 , $dF(x, \cdot)$ тоже невырождены, функция F^{-1} существует и дифференцируема вблизи $F(x_0)$.

В частности, использовалась лемма, близкая к следующей.

Лемма 1.1.3. Пусть $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор, такой, что $\text{Ker } T = \{0\}$.

Тогда $\exists \varepsilon > 0$, такой, что для любого линейного оператора $\forall S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \|S - T\| < \varepsilon \Rightarrow \text{Ker } S = \{0\}$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\exists m > 0 : |Tx| \geq m|x|$. Тогда $|Sx| \geq |Tx| - |(S - T)x| \geq (m - |\varepsilon|)|x|$. \square

Следствие 1.1.1. Если $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение, такое, что $dF(x, \cdot)$ невырождено для $x \in U$, то $F(U)$ открыто в \mathbb{R}^n .

1.2 Гладкие многообразия

1.2.1 Касательные векторы

Пусть $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$, где A — произвольное множество.

Определение 1.2.1 (Касательный к A вектор $e \in \mathbb{R}^n$). Для $t \in \mathbb{R} : \text{dist}(x_0 + te, A) = o(|t|)$ при $t \rightarrow 0$.

Замечание. Для x_0 — внутренней точки A — все векторы — касательные.

Теорема 1.2.1. Пусть $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема, $x_0 \in U$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $F|_{A \cap U}$ имеет локальный экстремум в x_0 . Тогда для касательного к A вектора $e \in \mathbb{R}^n : dF(x_0, e) = 0$.

Доказательство. Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ — касательный вектор к A в x_0 . Пойдём от противного: $d := dF(x_0, e) \neq 0$.

Посмотрим на $F(x_0 + te) - F(x_0)$. Для любого $t \in \mathbb{R} : \exists x_t \in A : |x_0 + te - x_t| \leq 2 \operatorname{dist}(x_0 + te, A)$ по определению расстояния.

Запишем определение дифференцируемости F в x_0 .

$$F(x_t) - F(x_0) = dF(x_0, x_t - x_0) + \underbrace{\phi(t)}_{o(|t|)} = dF(x_0, te) + dF(x_0, x_t - x_0 - te) + \underbrace{\phi(t)}_{o(|t|)}$$

Так как $|dF(x_0, x_t - x_0 - te)| \leq \|dF(x_0, \cdot)\| \cdot |x_t - x_0 - te| \leq 2\|dF(x_0, \cdot)\| \cdot |\operatorname{dist}(x_0 + te, A)| = o(t)$, то

$$F(x_t) - F(x_0) = dF(x_0, te) + o(|t|) = t \cdot d + o(|t|)$$

Получили, что $F|_{A \cap U}$ не имеет локального экстремума в x_0 , противоречие. \square

Пускай $\Phi : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $m \geq n$.

Предположим, что Φ дифференцируема в U и непрерывно дифференцируема в $x_0 \in U$. Также предположим, что Φ билипшицева на своей области определения.

Положим $A = \Phi(U)$, предположим, что $\operatorname{Ker} d\Phi(x_0, \cdot) = \{0\}$ (что следует из билипшицевости).

Теорема 1.2.2. При сделанных предположениях множество касательных векторов к A в точке $y_0 := \Phi(x_0)$ есть $d\Phi(x_0, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Обозначим $L := d\Phi(x_0, \cdot)$.

\Rightarrow . Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, назовём $e = Lx$, докажем, что e — касательный вектор. Ну, в самом деле, $\operatorname{dist}(A, y_0 + te) \leq |\Phi(x_0 + tx) - (y_0 + te)| = |\Phi(x_0 + tx) - \Phi(x_0) - tLx|$. Точка $\Phi(x_0 + tx)$ была подобрана таким хитрым образом, что

$$\Phi(x_0 + tx) - \Phi(x_0) - tLx = L(tx) + \psi(t) - tLx = \psi(t), \quad \text{где } |\psi(t)| = o(|t|)$$

\Leftarrow . Пусть e — касательный вектор A в точке x_0 . Найдём $x \in \mathbb{R}^n : e = Lx$.

По определению касательного вектора.

$$\alpha(t) := \operatorname{dist}(y_0 + te, A) = o(|t|)$$

Выберем $y_t \in A : |y_0 + te - y_t| \leq 2 \operatorname{dist}(y_0 + te, A) = 2\alpha(t)$. Отсюда $|y_t - y_0| \leq C_1|t|$ для некой константы $C_1 \in \mathbb{R}$.

$y_t = \Phi(x_t)$ для некоего x_t вблизи x_0 . Ввиду билипшицевости

$$|y_t - y_0| = |\Phi(x_t) - \Phi(x_0)| \geq C_2|x_t - x_0| \quad \Rightarrow \quad |x_t - x_0| \leq C_3|t|$$

Запишем

$$te + y_t - (y_0 + te) = y_t - y_0 = \Phi(x_t) - \Phi(x_0) = L(x_t - x_0) + \beta(x_t)$$

где $|\beta(x_t)| = o(|x_t - x_0|)$, или же (см. C_3) $\beta(x_t) = o(|t|)$. Поделим равенство на t :

$$e + \underbrace{\frac{y_t - (y_0 + te)}{t}}_{o(1)} = L\left(\frac{x_t - x_0}{t}\right) + \underbrace{\frac{\beta(x_t)}{t}}_{o(1)}$$

Заметим, что $\left|\frac{x_t - x_0}{t}\right| \leq C_3$ — точки $\frac{x_t - x_0}{t}$ лежат в замкнутом шаре. Выбрав последовательность $t_n \rightarrow 0$, так, что будет сходимость (всегда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность), получим $\frac{x_{t_n} - x_0}{t_n} \xrightarrow{t \rightarrow 0} x$, где вектор $x \in \mathbb{R}^n$ — искомый: переходя к пределу сразу получаем $e = L(x)$. \square

1.2.2 Многообразия, вложенные в n -мерное евклидово пространство

Определение 1.2.2 (n -мерное многообразие). Хаусдорфовое, со счётной базой, топологическое пространство X , у каждой точки которого есть окрестность, гомеоморфная B^n .

Пускай $F : (U \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение.

Определение 1.2.3 (F непрерывно дифференцируема k раз). Все частные производные всех координатных функций до порядка k включительно существуют и непрерывны.

Пишут $F \in C^{(k)}$.

Определение 1.2.4 (Карта (локальная)). Отображение $h : B^n \rightarrow X$, являющееся гомеоморфизмом на свой образ.

Определение 1.2.5 (Атлас). Семейство локальных карт $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, таких, что $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} h_\alpha(B_n) = X$

Такое семейство карт позволяет в каждой маленькой области X ввести свои *координаты*, *параметризовать* X .

Пусть $U_\alpha = h_\alpha(B^n)$, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Если $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, то возникает дилемма — координаты какого шара использовать?

Функцию $\phi_{\alpha\beta} = h_\beta^{-1} \circ h_\alpha$, переводящую координаты h_α в координаты h_β , называют *отображением перехода*.

Определение 1.2.6 (X — гладкое многообразие класса $C^{(k)}$). Многообразие с фиксированным атласом, в котором все отображения перехода принадлежат классу $C^{(k)}$.

Пример. Рассмотрим в качестве X график модуля $X := \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

X гомеоморфно \mathbb{R} . Если рассмотреть атлас, состоящий из $(a, b) \mapsto ((a, |a|), (b, |b|))$, то все функции перехода будут тождественными, то есть $X \in C^{(\infty)}$.

Это противоречит интуиции (ведь модуль далеко не гладок в нуле), скоро мы определим гладкость многообразия в соответствии с объемлющим пространством.

Лекция IX

17 марта 2023 г.

Пусть $F : (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $m > n$ (можно также рассматривать случай $m = n$, но в таком случае ничего интересного не будет). По-прежнему дифференцируема в некоторой окрестности x_0 , непрерывно дифференцируема в x_0 .

Рассмотрим $x_0 \in G$, считаем, что F — билипшицева на всём множестве G .

Обозначим $D = dF(x_0, \cdot)$, предположим, что он невырожден. Параметризуем множество $F(G)$.

$L := D(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ — касательное подпространство к $F(G)$ в точке $y_0 := F(x_0)$. Заметим, что $\dim L = n$.

Положим $N := L^\perp$. Таким образом, $\mathbb{R}^m = L \oplus N$. Введём ортогональный проектор $P : \mathbb{R}^m \rightarrow L$.

Выделим из F составляющую $F_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow L$; $F_1(x) = PF(x)$. Её дифференциал $dF_1(x_0, \cdot) = PD$, что равно D , так как $D(\mathbb{R}^n) = L$ — проектор ничего не меняет.

В V — некоторой окрестности точки Py_0 — существует обратное отображение $\phi = F_1^{-1}$; $\phi : V \rightarrow G$.

Введём $H : V \rightarrow \mathbb{R}^m$; $H(u) = (F \circ \phi)(u)$. $H(V)$ — кусок множества $F(G)$, H — его локальная карта.

Произвольный вектор $u \in V$ после применения H раскладывается в пару $H(u) = (a, b)$, где \mathbb{R}^m рассматривается, как $L \oplus N$ и $a \in L, b \in N$. $a = PH(u) = PF\phi(u) = u$, так как ϕ — обратная к PF . Таким образом, первая компонента вектора $H(u)$ — просто u . Вторая компонента вектора $\psi(u) := (\text{id} - P)H(u)$, какая-то гладкая функция.

Получили «новую параметризацию» $F(G)$. Локальной картой $y_0 \in F(G)$ является $H(u) = (u, \psi(u))$, где $u \in V$.

Таким образом, локально многообразие F — график какого-то непрерывного отображения ψ . Найдём его дифференциал: $d\psi(y_0, \cdot) = (\text{id} - P)dH(y_0, \cdot) = (\text{id} - P)d(F \circ \phi)(y_0, \cdot) = (I - P)Dd\phi(y_0, \cdot)$. Получается 0, так как $(I - P)D = 0$ — D проектирует на L , после чего $I - P$ отображает в нуль.

Таким образом, L — касательное подпространство (иногда говорят касательная плоскость) к $F(G)$ в точке y_0 . Любопытно заметить, что чтобы найти обратную к H функцию, надо спроектировать $H(u)$ на касательную плоскость.

1.2.3 Теорема о неявной функции

Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Оно задаёт сферу в \mathbb{R}^3 , которая является многообразием: $\forall (x_0, y_0, z_0) \in S$. Если x близок к $x_0 > 0$, то $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ и получаем локальную карту. Аналогично для $x_0 < 0$. Если же x_0 неотделим от нуля, то надо выражать другую координату.

Обобщим.

Пусть задано отображение $f : (U \subset \mathbb{R}^{n+m}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируемое всюду в U . В продолжении теоремы векторы $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ будем раскладывать на две компоненты $(x, y) \in X \oplus Y$, где $\dim X = n, \dim Y = m$ (необязательно $X \perp Y$).

Пусть $c \in \mathbb{R}^n$. Для примера со сферой выше $m + n = 3, n = 1$.

Рассмотрим множество точек $\{(a, b) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \mid f(a, b) = c\}$ — найдём подпространства уровня f . Пусть оно непусто: $\exists a_0, b_0 : f(a_0, b_0) = c$.

Найдём функцию $h : \left(\overset{\circ}{U}_\delta(b_0) \subset \mathbb{R}^m \right) \rightarrow \mathbb{R}^n$, такую, что $\forall y \in \overset{\circ}{U}_\delta(b_0) : f(h(y), y) = c$.

Обозначим $D = df((a_0, b_0), \cdot)$. Обозначим $D|_X = A, D|_Y = B$. Предположим, что $D|_X$ невырожден.

Теорема 1.2.3 (О неявной функции). При сделанных предположениях $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(b_0) \subset \mathbb{R}^m : \exists ! h : \overset{\circ}{U}_\delta(b_0) \rightarrow \mathbb{R}^n : f(h(y), y) = c$.

Более того, полученная функция h непрерывно дифференцируема.

Доказательство. Введём $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$; $F(x, y) = (f(x, y), y)$. Найдём дифференциал:

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(a_0, b_0) &= (f(x, y) - f(a_0, b_0), y - b_0) = \\ &= (D(x, y) + \underbrace{\phi(x, y)}_{o(|b_0 - y|)}, y - b_0) = (a_0(x - a_0) + b_0(y - b_0), y - b_0) + o(|b_0 - y|) \end{aligned}$$

Таким образом $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^{n+m} : dF((a_0, b_0), (u, v)) = L(u, v) = (Au + Bv, v)$.

Если $L(u, v) = 0$, то $v = 0$, откуда $Bv = 0$, откуда $Au = 0 \Rightarrow u = 0$, так как A невырожден. Таким образом, L невырожден, к F применима теорема об обратном отображении.

$$F(a_0, b_0) = (f(a_0, b_0), b_0) = (c_0, b_0)$$

Рассмотрим W — окрестность (a_0, b_0) , такую, что $\exists G = F^{-1}$, заданная на W , причём G непрерывно дифференцируема в этой окрестности.

Так как $G(u, v) = (*, v)$, то $\exists \psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, ψ непрерывно дифференцируема на W . Таким образом $\forall (u, v) \in W : F(\psi(u, v), v) = (u, v)$.

Определим $h(v) := \psi(c, v)$. В самом деле, видим, что h определена на некоторой окрестности b_0 , причём $h(y) = c$. \square

Лекция X
21 марта 2023 г.

Продолжим теорему, доказанную на предыдущей лекции: найдём дифференциалы.

Мы показали, что существует формула для отображения ϕ в точке b . $D = d\phi(b, \cdot)$. Так как $f(\phi(y), y) \equiv c$ при y , близких к b , то

$$0 = d(f(\phi(y), y)) = AD + B$$

Так как A обратима, то $D = -A^{-1}B$.

Пример. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. На плоскости задана кривая соотношением $f(x, y) = c$, где $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Если $f(a, b) = c$, то (при условии $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$) $\exists \phi(y) : f(\phi(y), y) \equiv c$ при $|y - b| < \delta$.

Производная этой функции $\phi'(b) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$; $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$; $(a, b) \in U$, где $k > n$. Предположим, что $\forall u \in U$ ранг матрицы Якоби равен n , то есть максимально возможный.

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(u) \end{pmatrix} = n$$

Рассмотрим множество решений относительно u уравнения $f(u) = c$. Решения называются *множествами уровня* отображения f . $L_c = \{u \mid f(u) = c\}$.

Пусть $f(u_0) = c$.

Выберем минор матрицы порядка n с ненулевым определителем. Переупорядочим столбцы так, чтобы первые n были линейно независимы.

Обозначим за X пространство, натянутое на первые n координат, за Y — последние $k - n$ координат.

$\mathbb{R}^k = X \oplus Y$, окрестность точки u_0 описывается локальной картой вида $H(y) := (\phi(y), y)$, $y \in Y$, причём y близко к проекции u_0 на Y .

V — окрестность точки u_0 на L_c , которая покрывается локальной картой H . $H^{-1}(z) = Qz$, где Q — ортогональный проектор на Y .

Покажем гладкость отображения переходами между картами. $H_1(y) = (\phi_1(y), y)$, $H_2(y) = (\phi_2(y), y)$.

Посмотрим на $H_2^{-1}H_1$, где задано. Это QH_1 , что несомненно является гладким отображением, как композиция.

Таким образом, L_c — $(k - n)$ мерное гладкое многообразие.

Займёмся описанием касательной плоскости — $\text{Im } d\phi(u_0, \cdot)$ не очень удобно, так как ϕ вполне может не быть задана явно.

Теорема 1.2.4. При сделанных предположениях об f (матрица Якоби — максимального ранга), если $L_c \neq \emptyset$, то

$$\forall u_0 : f(u_0) = c \Rightarrow \text{Ker}(df(u_0, \cdot)) — \text{касательное подпространство к } L_c \text{ в точке } u_0$$

Доказательство. Пусть N — касательное подпространство к L_c в точке u_0 . $\dim N = k - n = m$.

Обозначим оператор $D := df(u_0, \cdot)$. $D : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ — сюръекция. Тогда $\dim \text{Ker } D = m$.

Покажем, что $N \subset \text{Ker } D$. Так как их размерности совпадают, то мы докажем совпадение.

Пусть $x \in N$, то есть $\alpha(t) := \text{dist}(u_0 + tx, L_c) = o(|t|)$. Для всякого достаточно маленького $t > 0$: $\exists x_t \in L_c : \text{dist}(u_0 + tx, x_t) \leq 2\alpha(t)$.

Запишем

$$0 = f(x_t) - f(u_0) = D(x_t - u_0) + \phi(x_t), \text{ где } \phi(y) = o(|y - u_0|)$$

Так как $|x_t - u_0| \leq |tx + x_t - u_0| + |tx| \leq C|t|$ при t , близких к 0. Тем самым, $\phi(y) = o(|t|)$.

$$0 = D(x_t + tx - u_0) - D(tx) + \phi(x_t)$$

Так как $D(x_t + tx - u_0) \leq \|D\| \cdot |x_t + tx - u_0| \leq 2\|D\|\alpha(t) = o(|t|)$, то поделив на t последнее равенство, получаем

$$0 = \frac{D(x_t + tx - u_0)}{t} - Dx + \frac{\phi(x_t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -Dx$$

Отсюда действительно получается $Dx = 0$. □

Теорема 1.2.5 (О множителях Лагранжа). Пусть $f_1, \dots, f_n : (U \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$, где по-прежнему $k \geq n$. Пусть все f_j непрерывно дифференцируемы.

Рассмотрим L — множество тех $x \in U : f_1(x) = c_1, f_2(x) = c_2, \dots, f_n(x) = c_n$.

Пусть $x_0 \in L$, а ещё произвольная функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — тоже непрерывно дифференцируема.

Пусть векторы $\text{grad}_{f_i}(x_0)$ линейно независимы, а $f|_L$ имеет локальный экстремум в точке x_0 .

При сделанных предположениях $\exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n$ — множители Лагранжа, такие, что $\text{grad}_f(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{grad}_{f_i}(x_0)$

Доказательство. Положим $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$. Матрица Якоби F получается $J := \begin{pmatrix} \text{grad}_{f_1}(x) \\ \vdots \\ \text{grad}_{f_n}(x) \end{pmatrix}$. Линейная независимость строчек при $x = x_0$ означает, что матрица имеет ранг n .

Для $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ получается $L = \{x \mid F(x) = c\}$.

Для N — касательного подпространства к L в точке x_0 выполнено условие $\text{grad}_{x_0} f \perp N$, $\text{grad}_{x_0} f \in N^\perp$.

Заметим, что $Ju = 0 \iff \forall j : \langle u, \text{grad}_{f_j}(x_0) \rangle = 0 \iff u \in \text{Lin}\{\text{grad}_{f_j}(x_0)\}^\perp$.

Так как $\text{grad}_f(x_0) \perp N = \text{Ker } J$, то $\text{grad}_f(x_0) \in \text{Lin}\{\text{grad}_{f_j}(x_0)\}$. □

Пусть $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ — промежуток общего вида, $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторнозначная функция.

Если g дифференцируема в точке x_0 , $g = (g_1 \dots g_n)^t$, то $dg(x_0, h) = (g'_1(x_0) \dots g'_n(x_0))^t \cdot h$.

Функцию g можно рассматривать, как описание движения материальной точки, например.

Вектор $g'(x_0) = (g'_1(x_0), \dots, g'_n(x_0))$ называют *производной* функции g . Заметим, что определение $g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$ по-прежнему выполняется.

Также выполняется неравенство Лагранжа: $\forall t_1, t_2 : \exists c$ между $t_1, t_2 : |g(t_1) - g(t_2)| \leq |g'(c)| \cdot |t_1 - t_2|$.

Определение 1.2.7 (Определённый интеграл векторнозначной функции). Для $\alpha, \beta \in (a, b)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dt \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\alpha}^{\beta} g_1(x) dt \quad \dots \quad \int_{\alpha}^{\beta} g_n(x) dt \right)$$

Факт 1.2.1 (Основная оценка интеграла).

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt \quad \text{или} \quad \left(\sum_{j=1}^n \left(\int_{\alpha}^{\beta} g_j(t) dt \right)^2 \right)^{1/2} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^n (g_j(t))^2 \right)^{1/2} dt$$

Доказательство. Докажем в предположении, что все g_j кусочно-непрерывны на $[\alpha, \beta]$. В общем случае надо обосновывать, почему $|g|$ интегрируема по Риману, это останется в качестве упражнения.

Пусть $y = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим $e \in \mathbb{R}^n$, такой, что $|e| = 1, |y| = \langle y, e \rangle = |y|$.

Введём $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \phi(t) = \langle g(t), e \rangle = \sum_{j=1}^n g_j(t) \xi_j$, где $e = (\xi_1 \dots \xi_n)$. Запишем

$$\left| \left\langle \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt, e \right\rangle \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\phi(t)| dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt$$

□

1.3 Длина пути

Пусть задана кривая. Как найти её длину? Приближим её ломаной, длина ломаной — сумма длин отрезков. Если приближения разными ломаными имеют тенденцию куда-то стремиться, то это число называют длиной ломаной.

Кривую, вообще говоря, можно определить как множество точек, а можно — как отображение.

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Рассмотрим $T := \{t_i\}_{i=0}^k \subset \mathbb{R} : a \leq t_1 < \dots < t_k \leq b$.

Определим приближение длины ломаной $S(\gamma, T) = |\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| + \dots + |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)|$.

Определение 1.3.1 (Спрямолинейная кривая γ). Числа $S(\gamma, T)$ ограничены сверху. В таком случае супремум этих чисел называют длиной пути γ .

Для $[c, d] \subset [a, b]$ у прямолинейного пути определена *длина сужения* $l(\gamma, [c, d])$ — длина пути $\gamma|_{[c, d]}$.

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение. Здесь определим такую же, как для пути, функцию $S(f, T) = |f(t_1) - f(t_0)| + \dots + |f(t_{k-1}) - f(t_k)|$.

Определение 1.3.2 (f имеет ограниченную вариацию). Все суммы $S(f, T)$ ограничены сверху. В таком случае их супремум называют *вариацией* $V(f, [a, b])$.

1. Пусть T_1, T_2 — два набора точек на $[a, b]$. Если $T_1 \subset T_2$, то $S(f, T_1) \leq S(f, T_2)$. Достаточно понять, что эту выполняется, если $T_2 = T_1 \cup \{pt\}$. В самом деле, $|f(t_j) - f(t_{j+1})|$ заменяется на $|f(t_j) - f(pt)| + |f(pt) - f(t_{j+1})|$, что не меньше.
2. Можно ослабить условия на точки, считая, что $t_j \leq t_{j+1}$.
3. Если f, g — функции ограниченной вариации, $c, d \in \mathbb{R}$, то $cf + dg$ — тоже функция ограниченной вариации.

Конкретнее, $V(cf + dg, [a, b]) \leq |c|V(f, [a, b]) + |d|V(g, [a, b])$.

$$\sum_{j=1}^k |(cf + dg)(t_j) - (cf + dg)(t_{j-1})| \leq |c| \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |d| \sum_{j=1}^k |g(t_j) - g(t_{j-1})|$$

4. Если f — функция ограниченной вариации на $[\alpha, \beta]$ и на $[\beta, \gamma]$, то f — функция ограниченной вариации на $[\alpha, \gamma]$.

$$V(f, [\alpha, \gamma]) = V(f, [\alpha, \beta]) + V(f, [\beta, \gamma])$$

Пусть T — набор точек в $[\alpha, \gamma]$, причём $T_1 = T \cap [\alpha, \beta]$, а $T_2 = T \cap [\beta, \gamma]$. Считаем, что $\beta \in T$. Тогда $S(f, T) = S(f, T_1) + S(f, T_2)$. Переходя к супремуму по T , получаем $V(f, [\alpha, \gamma]) \leq V(f, [\alpha, \beta]) + V(f, [\beta, \gamma])$.

Обратное неравенство получается примерно так же.

Замечание. f ограниченной вариации $\Rightarrow f$ ограничена.

Замечание. f постоянна $\iff V(f, [a, b]) = 0$.

Теорема 1.3.1.

- Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Рассмотрим координатные функции $f = (f_1 \dots f_n)$. Следующие условия эквивалентны:
 - f — ограниченной вариации.
 - Все f_j — ограниченной вариации.
- Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:
 - f — ограниченной вариации.
 - $f = \phi_1 - \phi_2$, где ϕ_1, ϕ_2 — возрастают на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

- \Rightarrow . Пусть $t, s \in [a, b]$. $|f_j(t) - f_j(s)| \leq |f(t) - f(s)|$. Таким образом, для всякого конечного набора $T \subset [a, b] : S(f_j, T) \leq S(f, T) \leq V(f, [a, b])$.
 \Leftarrow . $f(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t)e_j$. Таким образом, f — сумма функций ограниченной вариации.
- \Leftarrow . Возрастающая функция есть функция ограниченной вариации:

$$S(\phi, T) = \sum_{j=1}^k |\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^k (\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})) = \phi(t_k) - \phi(t_0) \Rightarrow V(\phi, [a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

Значит, f — конечной вариации, как сумма двух функций конечной вариации.

\Rightarrow . Обозначим $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; u(t) = V(f, [a, t])$. Докажем, что $v(t) := u(t) - f(t)$ возрастает.

Рассмотрим $s < t \in [a, b]$. Заметим, что $f(t) - f(s) \leq |f(t) - f(s)| \leq V(f, [s, t]) = u(t) - u(s)$. Отсюда $u(t) - f(t) \geq u(s) - f(s)$, действительно, $v(t)$ возрастает.

Осталось заметить, что v тоже возрастает, $f = u - v$.

□

Замечание. Если f — непрерывная скалярная функция, то получившиеся в доказательство ϕ_1, ϕ_2 тоже непрерывны.

Лекция XI

24 марта 2023 г.

Теорема 1.3.2. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторнозначная функция, имеющая ограниченную вариацию.

Введём функцию $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, V(t) = V(f, [a, t])$. Утверждается, что $\forall x_0 \in [a, b] : f$ непрерывна в $x_0 \Rightarrow V$ непрерывна в x_0 .

Доказательство. Докажем, что V непрерывна слева в точке t_0 , где $t_0 > a$. V возрастающая функция. Выберем $\varepsilon > 0$, найдём точку $s < t$, такую, что $V(s) > V(t) - \varepsilon$.

Так как $V(t)$ — супремум сумм, участвующих в определении вариации $V(f, [a, t])$, то найдётся последовательность точек $s_0 < \dots < s_k, s_j \in [a, t_0]$, такая, что $\sum_{j=1}^k |f(s_{j-1}) - f(s_j)| > V(t) - \varepsilon/2$.

Из непрерывности: $\exists \delta : \forall u \in (t_0 - \delta; t_0) : |f(u) - f(t_0)| < \varepsilon/2$. Добавим точек так, чтобы выполнялись условия $s_k = t_0, s_{k-1} \in (t_0 - \delta, t_0)$. $\sum_{j=1}^k |f(s_{j-1}) - f(s_j)| > V(t) - \varepsilon/2$ по-прежнему выполнено.

Теперь заметим, что $V(f, [a, s_{k-1}]) \geq \sum_{j=1}^{k-1} |f(s_{j-1}) - f(s_j)|$. Комбинируя неравенства, получаем $V(f, [a, s_{k-1}]) \geq V(f, [a, t_0]) - \varepsilon$. Точка s_{k-1} подходит в качестве s . \square

Замечание. Если f — непрерывная скалярная функция, то во всех точках непрерывности f функций ϕ_1 и ϕ_2 тоже непрерывны.

Вспомним, что *носитель пути* $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — его образ ($\text{Im } \gamma$). *Начало пути* — точка $\gamma(a)$, *конец пути* — точка $\gamma(b)$.

Предположим, что $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — путь, $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ — гомеоморфизм подотрезков \mathbb{R} . Иными словами, непрерывная, строго монотонная функция.

Утверждается, что $f \circ \phi$ имеет ограниченную вариацию $\iff f$ имеет ограниченную вариацию. Более того, в этом случае вариации совпадают.

Доказательство. Всякой сумме $\sum_{j=1}^k |(f \circ \phi)(s_{j-1}) - (f \circ \phi)(s_j)|$ соответствует сумма $\sum_{j=1}^k |(f)(\phi(s_{j-1})) - (f)(\phi(s_j))|$. Их супремумы равны, а если точки s_0, \dots, s_k образуют монотонную последовательность отрезка $[a, b]$ (либо $a \leq s_0 < \dots < s_k \leq b$, либо $a \leq s_k < \dots < s_0 \leq b$). Их образ — точки $\phi(s_0), \dots, \phi(s_k)$ — тоже образуют монотонную последовательность отрезка, причём ϕ обратимо, все разбиения отрезка достигаются. \square

Определение 1.3.3 (Простая дуга). Такой путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, что γ — инъекция.

Тогда γ — гомеоморфизм между отрезком $[a, b]$ и своим носителем $\gamma([a, b])$. Это следует из того, что компактность прообраза влечёт компактность образа, а замкнутость образа влечёт замкнутость прообраза (плюс и $[a, b]$, и $\gamma([a, b])$ ограничены).

Пусть $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow L, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow L$ — простые дуги, причём $\gamma_1([a, b]) = \gamma_2([c, d]) = L$.

Тогда оказывается, что длины путей γ_1 и γ_2 равны: для $\phi : \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ — гомеоморфизма — $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$.

Таким образом, о длине носителя простой дуги можно говорить вне зависимости от пути, параметризующего его.

Рассмотрим простую дугу — верхнюю полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, где $y \geq 0$. Это простая дуга, так как можно параметризовать в виде $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \gamma : x \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2})$.

Определение 1.3.4 (Число π). Длина данной дуги полуокружности.

Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — изометрическое отображение. Тогда $V(A \circ f, [a, b]) = V(f, [a, b])$ — это видно из взаимнооднозначного соответствия между суммами при подсчёте вариации.

Отсюда следует, что длина нижней полуокружности $x^2 + y^2 = 1, y \leq 0$ — тоже π .

1.3.1 Длина гладкого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — путь, причём $\gamma \in C^{(1)}$. А именно: запишем его через координатные функции, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$, все производные $\gamma'_j(t)$ существуют и непрерывны при $t \in [a, b]$. Такой путь называется *гладким*.

Теорема 1.3.3. Всякий гладкий путь спрямляем, причём его длина равна

$$l(\gamma, [a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\gamma'_j(t))^2} dt$$

Доказательство. Пусть $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$. Запишем сумму, получающуюся при вычислении вариации: $\sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$.

Пусть I_1, \dots, I_k — попарно непересекающиеся (за исключением, быть может, концов) замкнутые отрезки, $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. Видим, что всякому разбиению из точек $\{t_i\}_{i=0}^k$ соответствует разбиение из отрезков $\{I_i\}_{i=1}^k$.

Согласно неравенству Лагранжа: $|\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \leq |\gamma'(\xi)| \cdot |t_i - t_{i-1}|$, где $\xi \in [t_i, t_{i+1}]$.

Продолжим неравенство:

$$|\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \leq |\gamma'(\xi)| \cdot |t_{i-1} - t_i| \leq \sup_{u \in [t_i, t_{i+1}]} |\gamma'(u)| \cdot |t_{i-1} - t_i|$$

В правой части неравенства получилось слагаемое из верхней суммы Дарбу для γ' .

Положим $\varepsilon > 0$, выберем такое разбиение $\{t_i\}_{i=0}^k$, что $\sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \geq l(\gamma, [a, b]) - \varepsilon$.

Измельчим соответствующее разбиение $\{I_i\}_{i=1}^k$, превратив его в разбиение $\{J_j\}_{j=1}^s$, такое, что $\sum_{j=1}^s \sup_{t \in J_j} |\gamma'(t)| \cdot |J_j| \leq \int_a^b \gamma'(t) dt + \varepsilon$.

Теперь в качестве точек $\{t_i\}_{i=1}^k$ рассмотрим концы отрезков $\{J_j\}_{j=1}^s$. $\sum_{j=1}^s |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \geq l(\gamma, [a, b]) - \varepsilon$ по-прежнему верно.

Таким образом, мы доказали, что $l(\gamma, [a, b]) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ — с точностью до ε , где ε можно выбрать сколь угодно малым.

Рассмотрим произвольные $x < y \in [a, b]$. Для них верны неравенства

$$|\gamma(y) - \gamma(x)| \leq l(\gamma, [x, y]) \leq \int_x^y |\gamma'(t)| dt$$

Поделив это на $y - x$, получим

$$\left| \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x} \right| \leq \frac{l(\gamma, [a, y]) - l(\gamma, [a, x])}{y - x} \leq \frac{1}{y - x} \int_x^y \gamma'(t) dt$$

Обозначим $L(u) := l(\gamma, [a, u])$. Устремим $y \rightarrow x_+$, получим $|\gamma'(x)| \leq \liminf_{y \rightarrow x_+} \frac{L(y) - L(x)}{y - x} \leq \limsup_{y \rightarrow x_+} \frac{L(y) - L(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{L(y) - L(x)}{y - x} = L'(x)$, то есть по принципу о двух полицейских наступает равенство. Аналогичным образом получается $L'(u)$.

Тогда очевидно $L(u) = \int_a^u |\gamma'(t)| dt + C$ для некой константы C . Так как $L(a) = 0$, то $C = 0$. \square

«Если всё хорошо», то для скалярной функции $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ должно выполняться $V(g, [a, b]) = \int_a^b |g'(t)| dt$.

Пример (Когда не совсем всё хорошо). Вариация возрастающей функции $g(t) = \sqrt{t}$ равна $g(1) - g(0) = 1$. При подсчёте по формуле, получаем $V(g, [0, 1]) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$. Интеграл этот не существует, производная в нуле не определена.

Если посчитать $V(g, [\varepsilon, 1]) = \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$, то получится $2 - 2\sqrt{\varepsilon}$. Здесь возникает понятие о несобственном интеграле — при стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лекция XII

31 марта 2023 г.

1.4 Естественная параметризация

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь.

Выберем $t_0 \in [a, b]$, обозначим $\phi(t) = \begin{cases} l(\gamma, [t_0, t]), & t \geq t_0 \\ -l(\gamma, [t, t_0]), & t < t_0 \end{cases}$. Функция ϕ возрастает и непрерывна.

Обозначим $\phi([a, b]) = [\alpha, \beta]$.

Определение 1.4.1 (Движение без задержек). Такой путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $\forall [c, d] \subset [a, b] : c < d \Rightarrow l(\gamma, [c, d]) > 0$.

При движении без задержек ϕ строго возрастает, значит, есть биекция $\psi = \phi^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$.

Введём $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n; \tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$.

Рассмотрим $[\delta, \rho] \subset [\alpha, \beta]$. Положим $c = \psi(\delta), d = \psi(\rho)$.

Заметим, что $\rho - \gamma = \phi(d) - \phi(c) = l(\gamma, [c, d]) = l(\tilde{\gamma}, [\delta, \rho])$.

При такой параметризации для любого отрезка $I : l(\tilde{\gamma}, I) = |I|$. Отображение ψ называется *естественной параметризацией пути* γ ; $\tilde{\gamma}$ — тот же путь, *параметризованный естественным образом*.

Пусть теперь γ — гладкий путь, то есть $\gamma \in C^{(1)}$. Тогда для ϕ имеется формула:

$$\phi(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt$$

Было бы удобно, чтобы путь γ был движением без задержек. Предположим ещё больше: $\gamma'(s) \neq 0$ для любого $s \in [a, b]$. Это называется *безостановочным движением*.

Отсюда видим $\phi'(t) = |\gamma'(t)|$ по теореме Ньютона — Лейбница, откуда $\psi'(\tau) = \frac{1}{\phi'(\psi(\tau))}$ и наконец

$$\tilde{\gamma}'(\tau) = \gamma'(\psi(\tau)) \cdot \psi'(\tau) = \frac{\gamma'(\psi(\tau))}{\phi'(\psi(\tau))} = \frac{\gamma'(\psi(\tau))}{|\gamma'(\psi(\tau))|}$$

Таким образом, $|\tilde{\gamma}'(\tau)| = 1$, что и стоило ожидать при условии $\forall I : l(\tilde{\gamma}, I) = |I|$.

Замечание. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь, предположим, что γ' существует и непрерывна на интервале (a, b) . Тогда тоже есть функция $\phi(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt$, определённая при $t, t_0 \in (a, b)$.

Более того, у функции ϕ есть пределы при $t \rightarrow a$ или $t \rightarrow b$.

$$l(\gamma, [a, b]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0} l(\gamma, [a + \varepsilon, b - \delta]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\delta}$$

Пример. Рассмотрим путь $\kappa(t) = [t, \sqrt{t}]$. Для него $\kappa'(t) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$; $|\kappa'(t)| = \sqrt{1 + \frac{1}{4t}}$.

Тогда

$$l(\kappa, [0, 1]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(\kappa, [\varepsilon, 1]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt$$

Об интеграле $\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt$ говорят, что он существует в *несобственном смысле*; в данном случае он очевидно существует, так как обе координаты пути монотонны, то есть путь — ограниченной вариации.

1.5 Про комплексные числа

Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$; $x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Я буду обозначать вещественную часть $\Re(x + iy) = x$ и мнимую часть $\Im(x + iy) = y$.

Всякую функцию $g : (\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ можно рассматривать, как векторнозначную функцию со значением в \mathbb{R}^2 ; в частности, их можно дифференцировать.

Пусть $g(x) = (g_1(x) \quad g_2(x)) = g_1(x) + ig_2(x)$. Тогда $g'(x) = (g'_1(x) \quad g'_2(x)) = g'_1(x) + ig'_2(x)$.

Комплекснозначные функции наследуют все свойства векторнозначных функций, но вдобавок тут появляются некоторые дополнительные операции. Так, комплексные числа можно перемножать.

Пусть $g_1, g_2 : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ — обе дифференцируемы. Сохраняется формула

$$(g_1 \cdot g_2)'(t) = g_1(t)g'_2(t) + g'_1(t)g_2(t)$$

Это можно видеть, либо проверив вручную, что при перемножении комплексные производные перемножаются соответствующим образом, либо просто повторив доказательство производной произведения:

$$\frac{g_1(t)g_2(t) - g_1(s)g_2(s)}{t - s} = \frac{(g_1(t) - g_1(s))g_2(t) + g_1(s)(g_2(t) - g_2(s))}{t - s} \xrightarrow{s \rightarrow t} \lim_{s \rightarrow t} \left[\frac{g_1(t) - g_1(s)}{t - s} + g_2(s) \frac{g_1(t) - g_1(s)}{t - s} \right]$$

То, что комплексное произведение непрерывно, следует из покоординатной непрерывности, получаем искомое равенство.

Определим для $z = a + bi$ его длину как вектор в \mathbb{R}^2 — *модуль* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Определим для $z = a + bi$ его *комплексно-сопряжённое* $\bar{z} = a - bi$. Можно заметить, что $z\bar{z} = |z|^2$. Также можно заметить, что для $z \neq 0$: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Теперь изучим производные комплекснозначных функций. $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$. $(\bar{g})'(t) = \overline{g'(t)}$.

Для $g(t) \neq 0$: $(g'^{-1})(t) = -\frac{g'(t)}{g(t)^2}$. Для доказательства опять же повторим вещественное доказательство:

$$\frac{1}{t - s} \left(\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(s)} \right) = \frac{1}{t - s} \cdot \frac{g(s) - g(t)}{g(s)g(t)}$$

Введём на комплексной плоскости единичную окружность $\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ и единичный круг $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Замкнутый комплексный круг обозначают $\overline{\mathbb{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, что не следует путать с комплексным сопряжением.

Факт 1.5.1. \mathbb{T} — подгруппа в \mathbb{C}^* по умножению.

Доказательство. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, что следует из прямой проверки. $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$ для $z \in \mathbb{T}$. \square

Замечание. Заметим, что для $z = a + bi, w = c + di$ верно:

$$z\bar{w} = (a + bi)(c - di) = ac + bd + i(bc - ad)$$

Таким образом, для точек-векторов комплексной плоскости z, w их скалярное произведение равно $\Re(z\bar{w})$. В частности, $z \perp w \iff z\bar{w}$ чисто мнимое число.

1.5.1 Простое вращение

Определение 1.5.1 (Простое вращение). Отображение $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ со следующими свойствами:

1. γ всюду дифференцируема (и всюду непрерывна).
2. $\forall t \in \mathbb{R} : |\gamma'(t)| = 1$.
3. $\gamma(0) = 1, \gamma'(0) = i$.

Теорема 1.5.1. Простое вращение существует и единственно.

Замечание. Пусть $\phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{T}$ — гладкое отображение (класса $C^{(1)}$). Продифференцируем равенство $\phi(t) \cdot \overline{\phi(t)} = 1$:

$$\phi(t)\overline{\phi'(t)} + \phi'(t)\overline{\phi(t)} = 0$$

Получили сумму двух комплексносопряжённых чисел, равную 0. Значит, $2\Re(\phi'(t)\overline{\phi(t)}) = 0$, то есть $\phi(t) \perp \phi'(t)$.

Таким образом, $\exists w : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\phi'(t)\overline{\phi(t)} = w(t)i$.

Пусть $\forall t : \phi'(t) \neq 0$. Тогда w — непрерывная не обнуляющаяся функция, значит, она сохраняет знак.

Определение 1.5.2 (Движение против часовой стрелки). Движение ϕ по окружности, такое, что $w(t) > 0$. Также говорят о *движении в положительном направлении* (при движении *круг остаётся слева*).

Если $|\phi'(t)| = 1$, то $|w(t)| = 1$. Так как $w(t)$ не меняет знак, то на самом деле $w(t)$ — константа, не зависит от t : всегда либо $+1$, либо -1 .

Из определения простого вращения извлекаем, что $w(0) = 1$. Таким образом, простое вращение происходит против часовой стрелки.

Так как $w = 1$, то $\phi'(t) = i\phi(t)$.

Если $\phi_1, \phi_2 : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{T}$ и удовлетворяют выше написанному, то «более-менее они одинаковые».

Лекция XIII

4 апреля 2023 г.

... Пропущена первая пара, доказали $\exists!$ простое вращение, посмотрели на него внимательно.

$$i = \Gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 2i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Так как $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, то уравнение имеет единственное решение $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.5.2 Формулы Тейлора и ряд Тейлора для функций Γ , \sin , \cos

Используя основное тождество, получаем $\Gamma^{(n)}(t) = i^n \Gamma(t)$. Значит, записывая формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получаем в нуле

$$\Gamma(t) = 1 + it + \frac{1}{2!} i^2 t^2 + \frac{1}{3!} i^3 t^3 + \dots + \frac{1}{n!} i^n t^n + o(t^n)$$

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторнозначная функция, непрерывно дифференцируемая $n+1$ раз. Как можно записать для неё формулу Тейлора?

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_j(t) \end{pmatrix}$$

Выбрав $t_0 \in (a, b)$, можем записать $f_j(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f_j^{(n+1)}(\xi_j) (t - t_0)^{n+1}$. Эти точки ξ_j зависят от j , поэтому записать формулу Лагранжа прямо не получится.

Для оценки того, сходится ли ряд Тейлора к соответствующей функции, можно оценить $f^{(n+1)}$ по модулю независимо от точки, на всём промежутке (t_0, t) .

Можно пойти по-другому: $\exists \xi \in (t_0, t) : \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi) (t - t_0)^{n+1}|$.

Доказательство. Такое же, как и в формуле Лагранжа: рассмотрим $u \in \mathbb{R}^n$, такой, что $|u| = 1$ и

$$\left\langle u, f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \right\rangle = \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \right|$$

Введём функцию $g(\tau) := \langle u, f(\tau) \rangle$ и запишем формулу Лагранжа для неё:

$$g(t) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k = \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi) (t - t_0)^{n+1}, \quad \text{для } \xi \in (t_0, t)$$

\Downarrow

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} |u| \cdot |t - t_0|^{n+1} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

□

Итак,

$$\left| \Gamma(t) - \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{k!} t^k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} |t|^{n+1} \cdot |\Gamma^{(n+1)}(\xi)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |t|^{n+1}, \quad \text{для некой } \xi \in (0, t)$$

Если $|t| \leq R$ для некой константы $R \in \mathbb{R}$, то остаточный член равномерно стремится к нулю: $\frac{t^n}{(n+1)!} \leq \frac{R^n}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Значит, ряд Тейлора сходится для $\Gamma(t)$ на всей вещественной оси: $\Gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k$. Вспомним, что

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k.$$

Взяв вещественную и мнимую часть разложения в ряд Тейлора $\Gamma(t)$, получим разложение в ряд Тейлора косинуса и синуса соответственно:

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \Re \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Re \left(\frac{i^k}{k!} t^k \right) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \\ \sin(t) &= \Im \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Im \left(\frac{i^k}{k!} t^k \right) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Определение 1.5.3 (Тангенс). Функция $\operatorname{tg}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, заданная везде, где знаменатель не обращается в ноль.

Замечание. Период тангенса — π : $\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \operatorname{tg}(x)$.

Тангенс строго возрастает на промежутках определённости:

$$\operatorname{tg}'(t) = \left(\frac{\sin t}{\cos t} \right)' = \frac{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}{(\cos t)^2} = \frac{1}{(\cos t)^2}$$

1.5.3 Обратные тригонометрические функции

Арксинус

$\sin' x = \cos x$, что больше нуля на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Значит, $\sin x$ возрастает на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, обозначим $\arcsin \stackrel{\text{def}}{=} \sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \text{ так как на } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ косинус положительный} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Арктангенс

tg возрастает на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, определим $\operatorname{arctg} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tg}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \dots = \frac{1}{1 + x^2}$$

Очевидным следствием является $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, t \in \mathbb{R}$.

Запишем $\frac{1-t^{n+1}}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n$. Таким образом, $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}$.

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

Считаем, что $|x| \leq 1$, оценим

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3} |x|^{2n+3}$$

Таким образом, получаем ряд Тейлора для арктангенса:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \dots$$

Запишем $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ для $|x| \leq 1$.

Ряд Ньютона для $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ сходится равномерно при $|t| \leq x < 1$. Равномерно сходящийся ряд можно проинтегрировать и получить ряд Тейлора для арксинуса.

Ещё раз посмотрим на сходство: $\Gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k$; $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$. Если в ряд для экспоненты формально подставить $t \leftarrow it$, то получится простое вращение.

Простое вращение ещё называют *мнимой экспонентной*. $e^{ix} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$. В частности, $e^{i\pi} = -1 \iff \Gamma(\pi) = 1$.

Покамест e^{ix} — это только обозначение, не имеющее обозначение к e^x для $x \in \mathbb{R}$, потом мы увидим ещё причины, по которым эта запись естественна.

1.5.4 Формула Эйлера

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \cos x + i \sin x; & \Gamma(-x) &= \overline{\Gamma(x)} = \cos x - i \sin x \\ &\Downarrow \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; & \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

Определим $e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^a \cdot e^{ib} = e^a \Gamma(b)$. Основное свойство экспоненты $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ сохраняется.

Для комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ определим $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ и $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Заметим также, что $(e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$, а $(e^{ibx})' = \Gamma(bx)' = ib\Gamma(bx) = ib \cdot e^{ibx}$, согласованность полная.

1.6 Дифференцирование высших порядков

Рассмотрим скалярную функцию $f : (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$. Для векторнозначных функций это тоже можно делать, но получится много индексов, и в любом случае можно разобрать векторнозначную функцию на координатные скалярные функции.

Пусть $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны для $j = 1..n$. При дифференцировании один раз получаем $df(x, h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot h_j =: \phi_h(x)$, где $h = (h_1 \dots h_n)$.

Предположим, что возможно продифференцировать $\phi_h(x)$ по x ещё раз: $\frac{\partial}{\partial x_j} \phi_h(x) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_s} f(x) \cdot h_s$.

Предположим, что все производные $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_s} f$ существуют и непрерывны. Тогда

$$d\phi_h(x, k) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_s} f(x) h_s k_j = D^2 f(x, h, k)$$

При каждом x полученный дифференциал $D^2 f(x, \cdot, \cdot)$ — билинейная функция.

По определению $D^r f(x, h^{(1)}, \dots, h^{(r)})$ — при фиксированном x это r -линейная форма по $h^{(1)}, \dots, h^{(r)}$.

Раскрыв, получим r -ый дифференциал f — r -линейную форму:

$$D^r f(x, h^{(1)}, \dots, h^{(r)}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_r \leq n} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{j_r}} f(x) h_{j_1}^{(1)} \dots h_{j_r}^{(r)} = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_r \leq n} \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}}(x) h_{j_1}^{(1)} \dots h_{j_r}^{(r)}$$

Разумеется, для существования дифференциала мы предполагаем, что существуют и непрерывны все производные вплоть до r -й.

Лекция XIV

11 апреля 2023 г.

Определение 1.6.1 (Полилинейная функция порядка s). Линейное по каждому из s аргументов отображение $L : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_s \rightarrow \mathbb{R}$. Она же — s -линейная функция.

Пусть в функцию L подставили $h^{(1)}, \dots, h^{(s)}$. Разложим их по базису $h^{(j)} = \sum_{k=1}^n h_k^{(j)} e_k$ и воспользуемся линейностью:

$$L(h^{(1)}, \dots, h^{(s)}) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n} h_{j_1}^{(1)} \dots h_{j_s}^{(s)} \cdot a_{j_1, \dots, j_s}$$

Все полилинейные функции имеют такой вид, причём всякая функция, имеющая такой вид — полилинейна.

s -линейной функции L соответствует s -форма $T(h) = L(h, \dots, h)$ — сужение L на диагональ. В частности, для $s = 2$: T — квадратичная форма.

Определение 1.6.2 (Симметричная s -линейная форма L). Такая, что она не зависит от перестановки векторов-аргументов.

Теорема 1.6.1. Если все частные производные порядка r от f непрерывны, то они не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Позднее. □

Теорема 1.6.2. Пусть L — s -линейная функция, T — соответствующая s -форма. Если L симметрична, то L однозначно восстанавливается по T .

Пример (Объяснение). Рассмотрим $s = 2$.

$$\begin{aligned} T(x+y) &= L(x+y, x+y) = L(x, x) + L(x, y) + L(y, x) + L(y, y) = L(x, x) + 2L(x, y) + L(y, y) \\ T(x-y) &= L(x-y, x-y) = L(x, x) - L(x, y) - L(y, x) + L(y, y) = L(x, x) - 2L(x, y) + L(y, y) \\ L(x, y) &= \frac{1}{4}(T(x+y) - T(x-y)) \end{aligned}$$

Доказательство.

$$L(h^{(1)}, \dots, h^{(s)}) = \frac{1}{2^s s!} \left(\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = \pm 1} (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s) \cdot T(\varepsilon_1 h^{(1)} + \dots + \varepsilon_s h^{(s)}) \right)$$

Проверим истинность формулы: раскроем $T(\varepsilon_1 h^{(1)} + \dots + \varepsilon_s h^{(s)})$ в сумму s^s слагаемых вида $(\prod \varepsilon_i) \cdot L(\sum \varepsilon_j h^{(j)})$. При фиксированных i_1, \dots, i_s , рассмотрим все слагаемые $\pm L(h^{(i_1)}, \dots, h^{(i_s)})$. Если i_1, \dots, i_s — перестановка, то слагаемое входит со знаком $1 = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_s)^2$, иначе найдётся $j \neq i_1, \dots, i_s$, тогда $\varepsilon_j = \pm 1$ нейтрализуют друг друга, в сумме останется 0. □

Дифференциалом порядка r от f обычно считают r -форму

$$d^{(r)} f(x, h) = D^{(r)} f(x, \underbrace{h, \dots, h}_r)$$

В дальнейшем все упоминания дифференциала будут относиться к $d^{(r)}$.

1.7 Формула Тейлора функции нескольких переменных

$f : G \rightarrow \mathbb{R}$ — $r+1$ раз непрерывно дифференцируема (нам придётся использовать $r+1$ -ю производную для записи остатка).

Рассмотрим $x_0 \in G, \overline{B_r(x_0)} \subset G, x \in B_r(x_0)$.

Выберем настолько маленький $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$. Тогда $x_0 + t(x - x_0) \in B_r(x_0)$ для $t \in (-1, 1 + \varepsilon)$.

Продифференцируем $\phi : (-1, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$.

Обозначим $p = x - x_0$, при новом обозначении $\phi(t) = f(x_0 + tp)$.

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + tp) p_j \underset{\langle \text{grad}_f(x_0), p \rangle}{=} \text{d}f(x_0 + tp, p) \\ \phi^{(2)}(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0 + tp) p_k p_j = \text{d}^2 f(x_0 + tp, p)\end{aligned}$$

В общем случае $\phi^{(s)}(t) = \text{d}^{(s)} f(x_0 + tp; p)$.

$$f(x) - f(x_0) = \phi(1) - \phi(0) = \frac{\phi'(0)}{1!} + \frac{\phi^{(2)}(0)}{2!} + \dots + \frac{\phi^{(r)}(0)}{r!} + \frac{\phi^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}, \text{ где } \xi \in [0, 1].$$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{\text{d}^{(1)} f(x_0, x - x_0)}{1!} + \frac{\text{d}^{(2)} f(x_0, x - x_0)}{2!} + \dots + \frac{\text{d}^{(r)} f(x_0, x - x_0)}{r!}}_{r\text{-й многочлен Тейлора для } f \text{ в точке } x_0} + \frac{\text{d}^{(r+1)} f(u, x - x_0)}{(r+1)!}$$

где u лежит на отрезке с концами в точках x_0 и x . Заведомо $u \in B_r(x_0)$.

Предложение 1.7.1. Пусть L — s -линейная функция на \mathbb{R}^n . Тогда $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$\left| L(h^{(1)}, \dots, h^{(s)}) \right| \leq C \cdot |h^{(1)}| \cdot \dots \cdot |h^{(s)}|$$

Для соответствующей s -формы: $|T(h)| \leq C \cdot |h|$.

Доказательство. Вспомним формулу $L(h^{(1)}, \dots, h^{(s)}) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n} a_{j_1, \dots, j_s} h_j^{(1)} \cdot \dots \cdot h_{j_s}^{(s)}$. Существует такое $A : \forall j_1, \dots, j_s : |a_{j_1, \dots, j_s}| \leq A$, так как a — конечно.

$$\left| \sum_{a_{j_1, \dots, j_s}} a_{j_1, \dots, j_s} h_j^{(1)} \cdot \dots \cdot h_{j_s}^{(s)} \right| \leq A \sum_{a_{j_1, \dots, j_s}} |h_1^{(1)}| \cdot \dots \cdot |h_s^{(s)}| = A \left(|h_1^{(1)}| + \dots + |h_n^{(1)}| \right) \cdot \dots \cdot \left(|h_1^{(s)}| + \dots + |h_n^{(s)}| \right)$$

i -й множитель оценивается $\sqrt{n} \cdot |h^i|$ согласно КБШ. \square

Замечание. Пусть $\exists h : T(h) \neq 0$. Тогда $T(th) = t^s T(h)$, то есть оценка в некотором смысле плотная.

Таким образом, в многочлене Тейлора k -е слагаемое оценивается по модулю $\frac{1}{k!} |x - x_0|^k$

Оценим остаточный член в формуле Тейлора: $\text{d}^{(r+1)} f(u, x - x_0)$ есть $\frac{\partial^{r+1}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}} f(u)$. В этом шаре все производные существуют и непрерывны, значит, ограничены некой константой.

Так как $u \in \overline{B_r(x_0)}$, то $|\text{d}^{(r+1)} f(u, x - x_0)| \leq C |x - x_0|^{r+1}$.

Теорема 1.7.1. Пусть f — $r+1$ раз непрерывно дифференцируема в $G \subset \mathbb{R}^n$, причём $\overline{B_r(x_0)} \subset G, x \in B_r(x_0)$. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^r \frac{\text{d}^{(j)} f(x_0, x - x_0)}{j!} + \mathcal{O}(|x - x_0|^{r+1})$$

или $o(|x - x_0|^r)$

Доказательство. Написано выше. \square

Теорема 1.7.2 (Единственность многочлена Тейлора). Пусть f — $r+1$ раз непрерывно дифференцируема в $G \subset \mathbb{R}^n$, причём $\overline{B_r(x_0)} \subset G, x \in B_r(x_0)$.

Пусть $f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^r T_j(x - x_0) + o(|x - x_0|^r)$, где T_j — некоторая j -форма.

Тогда непременно $\forall j : T_j(h) = \frac{\text{d}^{(j)} f(x_0, h)}{j!}$.

Доказательство. Аналогично одномерному случаю:

Пусть есть два представления — формула Тейлора, и ещё одно, такое: $f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^r S_j(x - x_0) + o(|x - x_0|^r)$, где S_j — j -форма.

Вычтем одно из другого. Получим функцию $r : G \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = \sum_{j=1}^r R_j(x - x_0) = o(|x - x_0|^r)$, где R_j — j -форма.

Пусть k — наименьший индекс, такой, что $R_k \neq 0$, то есть найдётся вектор v , такой, что $R_k(v) \neq 0$.

Рассмотрим $t \in \mathbb{R}$ в такой окрестности 0, что $x + tv \in G$. Для них $r(tv) = t^k R_k(v) + o(t^{k+1})$. Получили противоречие. \square

Лекция XV

14 апреля 2023 г.

Лекция XVI

18 апреля 2023 г.

Упс, была лекция в пятницу, а ещё я опоздал минут на 5. To be deployed. . .

3. Форма $V|_L$ неопределённая. $\exists u_1, u_2 \in L : V(u_1) > 0, V(u_2) < 0$. Так как $u_1, u_2 \in L$, то $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}^m : u_1 = d\Phi(t_0, a_1), u_2 = d\Phi(t_0, a_2)$, где $\Phi(x_0) = t_0 \in B$.

Запишем

$$F(\Phi(t_0 + \tau u_1)) - F(\Phi(t_0))$$

где $\tau \in (-\delta, \delta)$.

Вычисления с прошлой лекции показывают, что $\tau \mapsto F(\Phi(t_0 + \tau a_1))$ имеет локальный минимум при $t = 0$. При замене a_1 на a_2 получаем локальный максимум.

Значит, нет ни максимума, ни минимума.

1.7.1 Независимость частных производных от порядка дифференцирования

Понятно, что достаточно научиться переставлять два оператора дифференцирования.

Теорема 1.7.3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество плоскости, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ существуют и непрерывны.

Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ существует и совпадает с $\psi := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Докажем в одной точке $(x_0, y_0) \in U$.

Выберем $\rho > 0 : K := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq \rho, |y - y_0| \leq \rho\} \subset U$.

Выберем последовательность $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}, (0 < h_n \leq \rho)$, стремящуюся к нулю. $\phi(x) = \frac{f(x, y_0 + h_n) - f(x, y_0)}{h_n}$.
 $\phi_n(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y_0)$ (1).

$\phi'_n(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(\cdot, y_0) = \psi(x, y_0)$ (2) поточечно.

Была теорема, что при некоторых условиях тогда что?

Достаточно доказать, что сходимость в (1) и (2) равномерная.

Касательно (2): $\exists \xi_n(x)$ между $y_0 + h_n$ и $y_0 : \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0 + h_n) - \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0)}{h_n} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \xi_n(x))$. По теореме Кантора $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |t - t_1| \leq \delta, |s - s_1| \leq \delta, (t, s), (t_1, s_1) \in K \Rightarrow |\phi(t, s) - \phi(t_1, s_1)| < \varepsilon$.

Заметим, что $|y_0 - \xi_n(x)| \leq h_n < \delta$ при достаточно больших n . Значит, $\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, \xi_n(x)) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y_0) \right| < \varepsilon$ при таких n . \square

Глава 2

Несобственные интегралы и компания

2.1 Одна из ситуаций

$(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ — возможно бесконечный отрезок. $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$. $\forall [a, b] \subset (\alpha, \beta)$ пускай f интегрируема на $[a, b]$ по Риману — Дарбу.

Если f не интегрируема по Риману — Дарбу на (α, β) , но $\exists \lim_{a \rightarrow \alpha, b \rightarrow \beta} \int_a^b f(x) dx$, то говорят, что f интегрируема по отрезку (α, β) в *несобственном смысле*.

Определение 2.1.1 (Несобственный интеграл). Выше предложенный предел $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow \alpha, b \rightarrow \beta} \int_a^b f(x) dx$.

Обозначение такое же, как и у обычного интеграла, но следует говорить, что интеграл *несобственный*.

1. Предел существует — «(несобственный) интеграл сходится».
2. Предела нет — «(несобственный) интеграл расходится».
3. Есть предел $\lim_{b \rightarrow \beta-0} \int_a^b |f(x)| dx$ — «интеграл сходится абсолютно».

Применение критерия Коши: $\forall \varepsilon > 0 : \exists c < \beta : u, v \in [c, \beta) \Rightarrow \left| \int_u^v f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Теорема 2.1.1. $f, g : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, $\forall b < \beta$ обе интегрируемы по Риману на $[\alpha, b]$ и $|f| \leq g$. Если $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ сходится, то $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ сходится абсолютно.

Доказательство. $\forall u < v \in [\alpha, \beta) : \left| \int_u^v f(x) dx \right| \leq \int_u^v |f(x)| dx \leq \int_u^v g(x) dx$. □

Следствие 2.1.1. *Интеграл сходится абсолютно \Rightarrow интеграл сходится.*

Примеры.

- $\int_1^{\infty} x^{\gamma} dx$ сходится $\iff \gamma < -1$.
- $\int_1^{\infty} x^{\rho} dx$ сходится $\iff \rho > -1$.

Пусть нас интересует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx$, при f, g непрерывных на $[\alpha, \beta)$, f' непрерывна на (α, β) .

Нас интересует предел $b \rightarrow \beta$ выражения:

$$\int_{\alpha}^b f(x)g(x) dx = \left\| G(x) = \int_{\alpha}^x g(t) dt \right\| = \int_{\alpha}^b f(x) dG(x) = G(x)f(x) \Big|_{\alpha}^b - \int_{\alpha}^b G(x)f'(x) dx$$

Сформулируем условия на функции f, g . Предположим, что

1. G ограничена константой A .
2. $\lim_{\beta-0} f = 0$.
3. f монотонно убывает на $[\alpha, \beta)$. Тогда производная неположительна, интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} G(x)f'(x) dx$ сходится абсолютно: $|G(x)f'(x)| \leq A|f'(x)| = -Af'(x)$.

Теорема 2.1.2. При данных условиях интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx$ сходится.

Пример. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится.

Заметим, что особенность есть только в ∞ , будем рассматривать $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Положим $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$. Тогда все условия выполнены.

2.2 Сравнение рядов и интегралов

Пусть $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонная функция. Тогда

$$\sum_{j=1}^n f(j) \quad \text{и} \quad \int_1^n f(x) dx$$

вещи близкие.

Лекция XVII

21 апреля 2023 г.

Итак, пусть $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — убывающая положительная функция. Предположим (хотя на самом деле для убывающей функции это всегда правда), что для любого $R < \infty$: f интегрируема по Риману — Дарбу на $[0, R]$.

Пусть $A_1 < A_2 < \dots < A_j$ — возрастающая последовательность. Тогда оцениваем

$$\sum_{j=1}^k f(A_{j+1})(A_{j+1} - A_j) \leq \int_{A_1}^{A_{k+1}} f(x) dx \leq \sum_{j=1}^k f(A_j)(A_{j+1} - A_j)$$

В частном случае $A_j = j$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k f(j+1) &\leq \int_1^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{j=1}^k f(j) \\ \int_1^{k+1} f(x) dx &\leq \sum_{j=1}^k f(j) \leq \int_1^{k+1} f(x) dx + f(1) - f(k+1) \end{aligned}$$

Пусть $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, тогда при сделанных предположениях ряд $\sum_{j=1}^k f(j)$ сходится $\iff \int_1^{k+1} f(x) dx$ сходится при $k \rightarrow \infty$.

Замечание. Пусть $\int_1^{\infty} f(x) dx$ расходится. Тогда, поделив неравенство, получаем

$$1 \leq \frac{\sum_{j=1}^k f(j)}{\int_1^{k+1} f(x) dx} \leq 1 + \frac{f(1) - f(k+1)}{\int_1^{k+1} f(x) dx}$$

Таким образом, по принципу двух полицейских, получаем, что $\int_1^{k+1} f(x) dx$ и $\sum_{j=1}^k f(j)$ — эквивалентные бесконечно большие при $k \rightarrow \infty$.

Следствие 2.2.1. $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \sim \log(k+1)$. Кстати, так как $\log(k+1) - \log(k) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, то можно написать и $\log(k)$ вместо $\log(k+1)$.

Давайте теперь возьмём $A_j = 2^j$, где $\{A_j\}_{j=0}^k$. Так как $A_{j+1} - A_j = 2^j$, то получаем, что сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} f(2^j)2^j$ эквивалентна сходимости интеграла $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Забавным следствием получается формулирующееся без интегралов утверждение из первого семестра о том, что ряды $\sum_{j=1}^{\infty} f(2^j)2^j$ и $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ сходятся (или расходятся) одновременно.

Замечание. Аналогичные соображения для возрастающих функций, например, можно получить, что для $s > 0$: $\sum_{n=1}^N n^s \sim \frac{1}{s+1} N^{s+1}$.

2.2.1 Частичные суммы гармонического ряда и постоянная Эйлера — Маскерони

Оказывается, есть более сильное условие, чем $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \sim \log(k)$.

$$\log(k+1) = \int_1^{k+1} \frac{dx}{x} = \sum_{j=1}^k \int_j^{j+1} \frac{dx}{x} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^k \int_j^{j+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{j} \right) dx$$

Оценив $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{j} \right| = \left| \frac{x-j}{xj} \right| \leq \frac{1}{j^2}$, получаем, что ряд этих штук сходится и разность

$$\log(k+1) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} C$$

стремится к некой постоянной C — *постоянной Эйлера — Маскерони* (на самом деле, постоянная Эйлера — Маскерони $\gamma \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log(n)$. Так как $\log(k+1) - \log(k) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, то $\gamma = -C$).

2.2.2 Формула Стирлинга

Получим асимптотическую оценку для факториала.

$\log(n!) = \sum_{i=1}^n \log i$, сравним эту штуку с $\int_1^{n+1} \log x dx$. Как известно, $\int \log x dx = x \log x - x + \text{const}$.

$$\int_1^{n+1} \log x \, dx = (n+1) \log(n+1) - (n+1) + 1 = (n+1) \log(n+1) - n$$

Оценим по формуле Тейлора $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\xi)^2}$, $\xi \in [0, x]$, откуда $\log(1+x) = x + \phi(x)$, $|\phi(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$.

$$\int_1^{n+1} \log x \, dx = \sum_{j=1}^n \int_1^{j+1} \log x \, dx = \sum_{j=1}^n \int_j^{j+1} (\log x - \log j) \, dx + \sum_{j=1}^n \log j$$

Для $x \in [j, j+1]$ получаем $\log x - \log j = \log\left(1 + \left(\frac{x-j}{j}\right)\right) = \frac{x-j}{j} + \phi\left(\frac{x-j}{j}\right)$, где $\left|\phi\left(\frac{x-j}{j}\right)\right| \leq \frac{1}{2} \frac{|x-j|^2}{j^2}$.

Итак,

$$\begin{aligned} (n+1) \log(n+1) - n &= \sum_{j=1}^n \log j + \sum_{j=1}^n \int_j^{j+1} \phi\left(\frac{x-j}{j}\right) \, dx + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \underbrace{\int_j^{j+1} (x-j) \, dx}_{1/2} \sum_{j=1}^n \log j + \frac{1}{2} \log(n+1) + \underbrace{v_n}_{\text{сходится}} \\ \left(n + \frac{1}{2}\right) \log(n+1) - n &= \log(1) + \dots + \log(n) + v_n \\ (n+1)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} &= n! \cdot e^{v_n} \\ n^{n+\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}_{\text{стремится к } e} e^{-n} &= n! \cdot e^{v_n} \\ n! &\sim C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \end{aligned}$$

Интересный факт. Появившаяся в последней строчке константа $C = \sqrt{2\pi}$.

2.3 Суммируемые семейства

Пусть есть множество проиндексированных (быть может комплексных) чисел $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A — множество любой природы.

Число a называется суммой этого семейства, если $\forall \varepsilon > 0 : \exists$ конечное подмножество $B \subset A$, такое, что $\forall B \subset C \subset A : \left|a - \sum_{\alpha \in C} \xi_\alpha\right| < \varepsilon$, где рассматриваются конечные надмножества C .

Определение 2.3.1 (Суммируемое семейство). Семейства, у которого есть сумма. Пишут $a = \sum_{\alpha \in A} \xi_\alpha$.

Замечание. Семейство $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ суммируемо $\iff \{\Re(\xi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ и $\{\Im(\xi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ оба суммируемы.

Теорема 2.3.1. Следующие условия эквивалентны:

1. Семейство $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ суммируемо.
2. Суммы $\sum_{\alpha \in C} |\xi_\alpha|$ ограничены по всем конечным $C \subset A$.

Лекция XVIII

25 апреля 2023 г.

Ниже все множества E, e, \bar{e} — конечны.

Теорема 2.3.2. Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — числовое семейство. Следующие условия эквивалентны:

1. Семейство суммируемое.
2. Множество $\left\{ \left| \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \right| \mid e \subset A, e — \text{конечно} \right\}$ ограничено.
3. Множество $\left\{ \sum_{\alpha \in e} |a_\alpha| \mid e \subset A, e — \text{конечно} \right\}$ ограничено.

Доказательство $1 \Rightarrow 2$. Положим a — сумма семейства. Выберем $\varepsilon = 1$, по определению суммируемого семейства $\exists E \subset A : \forall e \supset E : \left| \sum_{\alpha \in e} a_\alpha - a \right| \leq 1$.

Рассмотрим произвольное $\bar{e} \subset A$, положим $e = \bar{e} \cup E$.

$$\left| \sum_{\alpha \in \bar{e}} a_\alpha \right| = \left| \sum_{\alpha \in e} a_\alpha - \sum_{\alpha \in E \setminus \bar{e}} a_\alpha \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \right| + \sum_{\alpha \in E} |a_\alpha|}_{\text{ограничено}}$$

$3 \Rightarrow 2$ Очевидно.

$2 \Rightarrow 1, 3$.

Лемма 2.3.1. Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — множество положительных чисел. Следующие условия эквивалентны:

- Семейство суммируемое.
- Множество $\left\{ \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \mid e \subset A, e — \text{конечно} \right\}$ ограничено.

Если любое из условий выполнено, то $\sum_{\alpha \in e} a_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \mid e \subset A \right\}$.

Доказательство леммы. $1 \Rightarrow 2$ уже доказали.

Положим $a = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \mid e \subset A \right\}$.

По определению супремума $\exists E \subset A : \sum_{\alpha \in E} a_\alpha > a - \varepsilon$. Тогда $\forall \bar{e} \supset E : a - \varepsilon \leq \sum_{\alpha \in E} a_\alpha \leq \sum_{\alpha \in \bar{e}} a_\alpha \leq a$.

Значит, множество суммируемо по определению. \square

Разложим $a_\alpha = b_\alpha + ic_\alpha$. Понятно, что $\{b_\alpha\}, \{c_\alpha\}$ удовлетворяют условию (2).

Для $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ рассмотрим $u_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-$, теперь $\{u_\alpha\}$ разложимо в разность двух неотрицательных семейств $\{u_\alpha^+\}$ и $\{u_\alpha^-\}$.

Если $\{u_\alpha\}$ удовлетворяет условию (2), то так же удовлетворяют условию и $\{u_\alpha^+\}$ вместе с $\{u_\alpha^-\}$ — можно выбирать в конечное множество только положительные или только отрицательные числа.

Тогда $a_\alpha = b_\alpha^+ - b_\alpha^- + i(c_\alpha^+ - c_\alpha^-) \Rightarrow \{a_\alpha\}$ суммируемо согласно лемме. Доказали $2 \Rightarrow 1$.

Чтобы доказать, $2 \Rightarrow 3$ покажем, что $|a_\alpha| \leq b_\alpha^+ + b_\alpha^- + c_\alpha^+ + c_\alpha^-$. \square

Замечание. Если $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — числовое семейство, $u_\alpha \geq 0$, то

$$\sum_{\alpha \in A} u_\alpha = \begin{cases} \text{сумма семейства,} & \text{если оно суммируемо} \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема 2.3.3. Если семейство $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ суммируемо, то $\{\alpha \in A \mid a_\alpha \neq 0\}$ не более, чем счётно.

Доказательство. Так как семейство суммируемо, то множество $\left\{ \sum_{\alpha \in e} |a_\alpha| \mid e \subset A, e \text{ — конечно} \right\}$ ограничено неким числом C .

Выберем $n \in \mathbb{N}$, предположим, что нашлось k элементов $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_k} : |a_{\alpha_i}| \geq \frac{1}{n}$.

Тогда $\sum_{i=1}^k |a_{\alpha_i}| \geq \frac{k}{n}$. Но так как эти суммы ограничены константой C , то $k \leq nC$, то есть $A_n := \{\alpha \mid |a_\alpha| \geq \frac{1}{n}\}$ конечно.

Тогда $\{\alpha \mid |a_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ счётно. \square

Теорема 2.3.4 (О перестановках). Пусть $\phi : A \rightarrow A$ — биекция. Тогда семейство $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ суммируемо \iff семейство $\{a_{\phi(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$ суммируемо, причём их суммы совпадают, если есть.

Предложение 2.3.1. Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.
2. Семейство $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ суммируемо.

При этом если условия верны, то суммы равны.

Доказательство. Для всякого конечного $e \subset \mathbb{N}$ найдётся $N := \max e$, тогда $\sum_{i \in e} |a_i| \leq \sum_{i=1}^N |a_i|$.

Обратно — для всякого $N \in \mathbb{N}$ найдётся $e := \{1, \dots, N\}$, тогда $\sum_{i=1}^N |a_i| \leq \sum_{i \in e} |a_i|$.

То, что суммы равны, тоже можно доказать, рассмотрев хвосты с суммой меньше ε . \square

Следствие 2.3.1. Абсолютно сходящийся ряд сходится к той же сумме после любой его перестановки.

Теорема 2.3.5 (Лейбниц). Пусть $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, причём $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится лишь условно: $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = +\infty$.

Пусть $-\infty \leq r \leq s \leq +\infty$. Тогда $\exists \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — биекция, такая, что

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_{\phi(j)} = r \quad \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_{\phi(j)} = s$$

Схема доказательства. Пусть — для удобства доказательства — $-\infty < r \leq s < +\infty$. Упорядочим $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots$. Так как $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$ и $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^-$ оба расходятся, то можно брать поочерёдно положительные, то отрицательные числа, бегая от границы к границе. \square

Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — числовое семейство, $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ — разбиение A на непустые множества.

Теорема 2.3.6. Если семейство $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ суммируемо (с суммой a), то все частичные семейства $\{a_\alpha\}_{\alpha \in B_\gamma}$ суммируемы (с суммой b_γ), причём семейство их сумм $\{b_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ тоже суммируемо — с суммой a .

Если все $a_\alpha \geq 0$ (но необязательно семейство суммируемо), то $\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(\sum_{\alpha \in B_\gamma} a_\alpha \right)$

Доказательство. Докажем только последнюю строчку, остальное из неё следует, так как семейство можно разбивать на линейную комбинацию неотрицательных составляющих.

Если одно из $b_\gamma = +\infty$, то обе суммы равны $+\infty$. Дальше считаем, что все b_γ конечны. Покажем, что

$$\underbrace{\sup \left\{ \sum_{\alpha \in e} a_\alpha \mid e \subset A \right\}}_V = \underbrace{\sup \left\{ \sum_{\gamma \in \bar{e}} b_\gamma \mid \bar{e} \subset \Gamma \right\}}_W$$

Можно показать, что $V \leq W$, а ещё для любого $\varepsilon > 0$: $W - \varepsilon \leq V$ — для доказательства второго неравенства суммируем лишь конечное число групп. \square

Лекция XIX

28 апреля 2023 г.

2.3.1 Применения

Пусть $\sum_{n \geq 1} a_n$ и $\sum_{n \geq 1} b_n$ — два (быть может условно) сходящихся ряда с суммами a и b соответственно.

Рассмотрим последовательность, проиндексированную парами $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a_n \cdot b_k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$.

Теорема 2.3.7. Если оба ряда сходятся абсолютно, то полученное семейство $(a_n \cdot b_k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ суммируемо, причём его сумма — ab .

Доказательство. Докажем суммируемость $(a_n \cdot b_k)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$. Для этого рассмотрим семейство модулей $(|a_n \cdot b_k|)_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$. Разобьём его на группы $B_i = \{(i, j) \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Сумма модулей в каждой группе B_i — это $|a_i| \cdot B$, где $B = \sum_{n \geq 1} |b_i|$.

Тогда семейство суммируемо, так как сумма сумм групп — это AB , где $A = \sum_{n \geq 1} |a_i|$.

Чтобы показать, что сумма семейства — AB , повторим вычисление уже без модулей. \square

Теорема 2.3.8. Пары (n, k) всегда можно расположить в последовательность так, чтобы соответствующий ряд сходил к ab .

Доказательство. Подойдёт такой порядок суммирования:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 b_1 & & a_1 b_2 & \longrightarrow & a_1 b_3 & & a_1 b_4 & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ a_2 b_1 & \longrightarrow & a_2 b_2 & & a_2 b_3 & & a_2 b_4 & & \bullet \\ & & & & \downarrow & & \uparrow & & \vdots \\ a_3 b_1 & \longleftarrow & a_3 b_2 & \longleftarrow & a_3 b_3 & & a_3 b_4 & & \bullet \\ \downarrow & & & & \uparrow & & & & \\ a_4 b_1 & \longrightarrow & a_4 b_2 & \longrightarrow & a_4 b_3 & \longrightarrow & a_4 b_4 & & \end{array}$$

\square

Другим популярным порядком является суммирование по диагонали: $\sum_{N=2}^{\infty} \sum_{k+j=N} a_k b_j$. Как ни странно, если ряды сходились абсолютно, то сумма в таком порядке даёт ab , а если сходились условно — то необязательно сойдётся (но если сойдётся, то к ab : (факт 2.6.2)).

Вспомним, что для комплексного числа $z = x + iy$ по определению $e^z = e^x \cdot e^{iy}$, где $e^{iy} = \Gamma(y)$ — простое вращение.

Экспоненту можно представить рядом: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$. Ряды сходятся абсолютно, запишем

$$e^z = \sum_{k,n} \frac{x^k \cdot (iy)^n}{k!n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \underbrace{\sum_{k+n=N} \binom{N}{k} x^k \cdot (iy)^n}_{(x+iy)^N} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!}$$

Доказали, что формула для экспоненты комплексного числа верна для любого $z \in \mathbb{C}$, необязательно вещественного или чисто мнимого.

2.4 Степенные ряды

Определение 2.4.1 (Степенной ряд). Ряд вида $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$, z — переменная из \mathbb{C} .

При каких z ряд сходится? Абсолютно сходится?

Теорема 2.4.1. Пусть степенной ряд $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ сходится при значении w переменной z .

Обозначим $r = |w - z_0|$.

Тогда ряд сходится абсолютно при $|z - z_0| < r$. Более того, для всякого $r' < r$: в круге $|z - z_0| \leq r'$ сходимость равномерная.

Доказательство. Из сходимости ряда $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n(w - z_0)^n| \leq A$. Если $|z - z_0| < r$, то

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(w - z_0)^n| \cdot \left| \frac{(z - z_0)^n}{r^n} \right| \leq A \left| \frac{(z - z_0)^n}{r^n} \right|$$

Для $|z - z_0| < r$ получаем, что ряд мажорируется убывающей геометрической прогрессией, значит, сходится абсолютно. Если дополнительно $|z - z_0| \leq r'$, то можно оценить независимо от z :

$$|a_n(w - z_0)^n| \cdot \left| \frac{(z - z_0)^n}{r^n} \right| \leq |a_n(w - z_0)^n| \cdot \left| \frac{r'^n}{r^n} \right|$$

□

Выберем $R := \sup \{w \in \mathbb{C} \mid \text{ряд сходится при значении } w \text{ переменной } z\}$. Из условия теоремы следует, что ряд сходится в открытом круге с центром в z_0 и радиусом R и расходится — за границей круга.

Если $R = 0$, то ряд сходится в одной точке $z = z_0$, если $R = \infty$, то ряд сходится на всей \mathbb{C} .

2.4.1 Признак Коши сходимости ряда

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — числовой ряд ($a_n \in \mathbb{C}$).

Обозначим за $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Теорема 2.4.2 (Признак Коши).

1. Если $\sigma > 1$, то ряд расходится.
2. Если $\sigma < 1$, то ряд сходится абсолютно.

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0$: найдётся сколь угодно большое n : $\sqrt[n]{|a_n|} > \sigma - \varepsilon$. Тогда $|a_n| > (\sigma - \varepsilon)^n > 1$, общий член ряда не стремится к нулю.

2. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\sigma + \varepsilon < 1$. Начиная с некоторого места $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sigma + \varepsilon$ и ряд мажорируется геометрической прогрессией. \square

Замечание. Признак довольно грубый: $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ признак оценить не сможет — тут $\sigma = 1$.

Тем не менее, для степенных рядов получается неплохо: для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n : \sigma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0|$.

Таким образом, для радиус сходимости R верно равенство $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Примеры.

- Ряд $\sum_{n \geq 0} n^n z^n$ сходится в единственной точке: $R = 0$.
- Ряд $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ сходится на всей $\mathbb{C} : R = \infty$.
- Все ряды вида $\sum_{n \geq 0} n^\alpha z^n$ сходятся в круге радиуса 1.

2.4.2 Аналитические функции

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — открытое множество.

Рассмотрим функцию $f : G \rightarrow \mathbb{C}$.

Определение 2.4.2 (f — аналитическая функция). $\forall z_0 \in G : \exists B_r(z_0) \subset G : \forall z \in B_r(z_0) : f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$, то есть функция представима некоторым степенным рядом в окрестности любой точки.

Пример (Аналитическая функция). Экспонента: $e^z = e^{z_0} \cdot e^{z-z_0} = e^{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$.

Теорема 2.4.3. Сумма степенного ряда в открытом круге сходимости есть аналитическая функция в том же круге.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости. Определим

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

Рассмотрим $w_0 \in D$, докажем, что найдутся коэффициенты, такие, что $f(z) = \sum_{n \geq 0} b_n(z - w_0)^n$ при условии $|z - w_0| < R - |w_0 - z_0|$. (Считаем, что R конечно) Запишем

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n(z - w_0 - (w_0 - z_0))^n = \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k+j=n} \binom{n}{k} (z - w_0)^k (w_0 - z_0)^j$$

Проверим, что можно переставить знаки суммирования, что семейство суммируемое. Ну, в самом деле,

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| \sum_{k+j=n} \binom{n}{k} |z - w_0|^k |w_0 - z_0|^j = \sum_{n \geq 0} |a_n| (|z - w_0| + |w_0 - z_0|)^n$$

что сходится при данных $z : |z - w_0| < R - |w_0 - z_0|$. Значит, можно раскрыть скобки, для некоторых коэффициентов получится требуемое. \square

Лекция XX

2 мая 2023 г.

Определение 2.4.3 (Область). Связное открытое множество

Теорема 2.4.4. Если $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция $f \not\equiv 0$ и G — область, то множество нулей функции не имеет предельных точек внутри G .

Доказательство. Обозначим $Z(f) = \{z \in G \mid f(z) = 0\}$.

Пусть степенной ряд $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n(z - z_0)$ сходится в круге $D := D_r(z_0), 0 < r \leq \infty$.

Из равномерной сходимости степенного ряда получаем, что g непрерывна на D . Заметим, что $c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$. Если $c_0 \neq 0$, то у g нет других нулей вблизи z_0 .

Иначе $c_0 = 0$, но ряд тривиальный $g(z) \not\equiv 0$. Выберем наименьшее $k \in \mathbb{N}$: $c_k \neq 0$. Получаем

$$g(z) = (z - z_0)^k \underbrace{(c_k + c_{k+1}(z - z_0) + c_{k+2}(z - z_0)^2 + \dots)}_{h(z)}$$

$h(z)$ сходится в то же круге D , так как $h(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$, поделили на константу.

Получается, $h(z) \neq 0$ вблизи z_0 , значит и домноженная на $(z - z_0)^k$ — тоже.

Итак, если у функции f есть нуль в точке w , то либо эта точка изолирована, либо $f(z) \equiv 0$ в окрестности w .

Обозначим $A = \{w \in G \mid f(z) \equiv 0 \text{ в некоторой окрестности } w\}$. A , понятно, открыто.

Мы доказали, что любая предельная точка для $Z(f)$ лежит в A , в частности, любая предельная точка A лежит в A . Тем самым, A замкнуто в G . $f(z) \not\equiv 0$, значит, $A \neq G \Rightarrow A = \emptyset$. \square

2.5 Дифференцировании по комплексному аргументу. Голomorphic функции

Пусть $\phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, t_0 \in \langle a, b \rangle$. Тогда по определению $\phi'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}$.

Пусть G — открытое множество в \mathbb{C} , $f : G \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in G$.

Определение 2.5.1 (f дифференцируема в z_0 в комплексном смысле). $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Данный предел называется *производной*, обозначается $f'(z_0)$. Если предел существует, то ещё говорят, что f голоморфна в z_0 .

2.5.1 Связь комплексного дифференцирования и двумерного дифференцирования

- Пусть $h : (G \subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$. И область аргументов, и область значений можно отождествить с \mathbb{C} (с его подмножеством). По определению, h дифференцируема в z_0 , если $\exists A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейный оператор:

$$h(z) - h(z_0) = A(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Запишем $h = (h_1 \ h_2)$, h_1, h_2 — координатные функции. Если A существует, то $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix}$.

- Теперь пусть $f : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$. Для неё координатные функции — $u, v : (G \subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = u(z) + i f(z)$.

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Умножение на комплексное число — частный случай линейного оператора.

- Таким образом, если f дифференцируема в комплексном смысле, то и в вещественном смысле (как отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) тоже: $df(z_0, h) = f'(z_0)h$.

- Обратное неверно: пусть $f'(z_0) = \alpha + i\beta$, $h = t + is$, где $\alpha, \beta, t, s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f'(z_0)h = (\alpha + i\beta)(t + is) = (\alpha t - \beta s) + i(\beta t + \alpha s)$$

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

и мы видим, что при комплексном дифференцировании матрица линейного оператора имеет специальный вид, для матриц не такого вида это неверно.

- Если f дифференцируема в z_0 в комплексном смысле, то (считая $z = x_0 + iy_0$) необходимо и достаточно условий

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Эти условия называются *уравнения Коши — Римана*.

Примеры (Безобидные функции, которые не голоморфны).

- $h(z) = \Re(z)$; $h(x + iy) = x$. Здесь матрица Якоби $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, не удовлетворяет условиям Коши — Римана. Также несложно видеть, что предела $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\Re(z)}$ не существует.
- $h(z) = \bar{z}$; $h(x + iy) = x - iy$. Здесь матрица Якоби $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, не удовлетворяет условиям Коши — Римана.

Факт 2.5.1. Пусть G, U открыты в \mathbb{C} , $f : G \rightarrow U, h : U \rightarrow \mathbb{C}$ — функции, f голоморфна в z_0 , h голоморфна в $w_0 := f(z_0)$.

Тогда $h \circ f$ голоморфна в z_0 и $(h \circ f)'(z_0) = h'(w_0)f'(z_0)$.

Доказательство. Оператор дифференцирования — домножение на комплексное число. □

Факт 2.5.2. Пусть $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфны в z_0 , тогда $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

Доказательство. Всякая голоморфная функция ϕ непрерывна по определению:

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \phi'(z)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \phi(z_0)$$

Тем самым, ϕ ограничена вблизи z_0 .

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}g(z) + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}f(z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0)$$

□

Факт 2.5.3. $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. $1' = 0$; $z' = 1 : \frac{z-z_0}{z-z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 1$. Далее индукция. □

Тем самым, дифференцируемы все комплексные многочлены $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, где $a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$. А именно,

$$p'(z_0) = a_1 + 2a_2z_0 + \dots + na_nz_0^{n-1}$$

Интересный факт (Теорема Коши). Следующие условия эквивалентны:

1. f голоморфна в G (в каждой точке).
2. f аналитична в G .

Доказательство. Докажем сильно более простую импликацию $2 \Rightarrow 1$. Обратную докажем в IV семестре.

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$, пусть его радиус сходимости $R > 0$. Положим $D := D_R(z_0)$.

Докажем, что $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Вспомним определение радиуса сходимости $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Для продифференцированного ряда $\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n a_{n-1}|}$, это то же самое, значит, $R = \rho$.

Степенной ряд в круге радиуса $R' < R$ сходится равномерно: $S_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n(z - z_0)^n$ сходятся равномерно к $f(z)$. Более того, $S'_N(z) := \sum_{n=1}^N n a_n(z - z_0)^{n-1}$ сходится равномерно к продифференцированному ряду.

Разобьём функцию на координатные функции, изучим вещественные и мнимые части. Частные производные сходятся согласно вещественной теореме, значит, условия Коши — Римана в пределе выполняются, получается, степенной ряд голоморфен. \square

Рассмотрим ряд $\log(1+z) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$. Он сходится при $x \in (-1, 1)$, значит, сходится в круге радиуса 1.

Обозначим $\phi(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$ — голоморфная функция при $|z| < 1$.

Интересно, верно ли, что $e^{\phi(z)} = 1 + z$? Да.

Доказательство. $e^{\phi(z)}$ голоморфна. По теореме Коши она аналитична. Тогда разность данных функций аналитична, так как это 0 на $(-1, 1)$, то это 0 везде. \square

Факт 2.5.4. Если f, g голоморфны в точке z_0 , $g(z_0) \neq 0$, то для $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ верно:

$$h'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Факт 2.5.5. Частное комплексных многочленов $\frac{p(z)}{q(z)}$ голоморфно там, где $q(z) \neq 0$.

Лекция XXI

5 мая 2023 г.

2.6 Суммирование последовательностей и рядов

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n \geq 0}$ — не сходится.

Сопоставим ей последовательность $\{b_n\}_{n \geq 0}$ согласно некоему правилу. Если оказалось, что $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, то говорят, что $\{a_n\}$ суммируется к b данным методом.

2.6.1 Метод Чезаро

$b_n = \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$ — метод средних арифметических.

Определение 2.6.1 (Регулярный метод суммирования). Сумма сходящейся последовательности данным методом — её предел.

Факт 2.6.1. Метод Чезаро регулярен.

Доказательство. См. (следствие 2.6.1). □

Замечание. Метод Чезаро, хотя и регулярен, суммирует и расходящиеся последовательности, например, $0, 1, 0, 1, 0, \dots$ суммируется методом Чезаро к $1/2$.

2.6.2 Матричные методы суммирования. Метод Тёплица

Пусть $T = \{t_{i,j}\}_{i,j \geq 0}$ — матрица с неотрицательными коэффициентами — *матрица Тёплица*.

Предположим, что $\forall i : \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} < \infty$.

Положим $b_i := \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} a_j$.

На данном месте предположим, что $\{a_j\}$ ограничена. Если последовательность сходится, то она уж точно ограничена, а мы хотим немного расширить понятие сходящихся последовательностей. В случае $|a_j| < A$ все b_i корректно определены.

Определение 2.6.2 (Последовательность $\{a_j\}$ суммируется T -методом к b). $b_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$.

Для метода Чезаро

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Теорема 2.6.1 (Тёплиц). Следующие условия эквивалентны:

1. T -метод регулярен.
2. $\forall j : \lim_{i \rightarrow \infty} t_{i,j} = 0 \quad \wedge \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} = 1$.

Доказательство. \Rightarrow . Зафиксируем j , рассмотрим последовательность $\{t_{i,j}\}_{i \geq 0}$. Она сходится к нулю, но $b_i = t_{i,j}$. Значит, $t_{i,j} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ — необходимое условие.

Теперь рассмотрим $\{1\}_{i \geq 0}$. Она сходится к нулю, но $b_i = \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j}$. Значит, $\sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 1$ — тоже необходимое условие.

\Leftarrow . Пусть $a_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a$. Докажем, что b_i сходится туда же.

$$b_i - a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t_{i,j} - a = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j - a) t_{i,j} + \underbrace{a \left(\sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} - 1 \right)}_{\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0}$$

Докажем, что и первое слагаемое стремится к нулю.

Так как суммы сходятся $\sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 1$, то они ограничены некой константой A . Выберем $\varepsilon > 0, \exists N : \forall j > N : |a_j - a| < \varepsilon$.

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_j - a) t_{i,j} = \sum_{j=0}^N (a_j - a) t_{i,j} + \sum_{j=N+1}^{\infty} (a_j - a) t_{i,j}$$

Теперь устремим $i \rightarrow \infty$, первое слагаемое для достаточно больших i меньше ε — конечная сумма произведений ограниченных и бесконечно малых.

Второе оценивается как εA , получаем оценку $\varepsilon(1 + A)$, её можно сделать сколь угодно малой. \square

Следствие 2.6.1. *Метод Чезаро регулярен.*

Замечание. Суммирование рядов устроено так же, как и последовательностей — суммируем частичные суммы.

Если в матрице Тёплица бывают отрицательные коэффициенты или даже произвольные комплексные, то что?

Хочется оставить формулу $b_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t_{i,j}$. Для этого надо наложить условие $S_i := \sum_{j=0}^{\infty} |t_{i,j}| < \infty$.

Необходимость понятна: рассмотреть в $a_j := \frac{\overline{t_{i,j}}}{|t_{i,j}|}$.

Теорема Тёплица в таком случае звучит так:

Интересный факт (Общая теорема Тёплица). Следующие условия эквивалентны:

1. T -метод регулярен.
2.
 - $\forall j : \lim_{i \rightarrow \infty} t_{i,j} = 0$.
 - $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j} = 1$.
 - $\sup_i S_i < +\infty$.

(2) \Rightarrow (1) доказывается примерно так же, как доказать, что $\sup_i S_i < +\infty$ — необходимое условие?

Это можно доказать методом скользящего горба или теоремой Штейнгауза — последнее из функционального анализа.

2.6.3 Метод Абеля — Пуассона

Рассмотрим необязательно сходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с ограниченными частичными суммами $S_n := a_0 + \dots + a_n$.

Выберем $r \in [0, 1)$, составим ряды $\phi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k$. Они сходятся.

Если r устремить к единице, то $\phi(r)$ «как бы стремится к исходному ряду, что бы это не значило».

Определение 2.6.3 (Суммируемый методом Абеля — Пуассона ряд). Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, для которого $\exists \lim_{r \rightarrow 1_-} \phi(r)$.

Пример. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ имеет сумму $1/2$ и методом Абеля — Пуассона тоже: $\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - \dots$

Теорема 2.6.2. Если исходный ряд сходится, то он суммируем методом Абеля — Пуассона с той же суммой.

Доказательство. Перепишем метод для последовательностей: рассмотрим $\{d_j\}_{j \geq 0}$. Ей соответствует ряд

$$d_0 + (d_1 - d_0) + (d_2 - d_1) + \dots$$

Запишем для $r \in [0, 1)$ ряд

$$\phi(r) = d_0 + r(d_1 - d_0) + r^2(d_2 - d_1) + \dots \stackrel{\text{абсолютная сходимость}}{=} d_0(1 - r) + d_1(r - r^2) + d_2(r^2 - rr^3) + \dots$$

Получили некоторый аналог методу Тёплица, но не дискретный, а непрерывный: в качестве $t_{i,j}$ выступает $r^j - r^{j+1}$.

Докажем, что если $d_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} d$, то $\phi(r) \xrightarrow{r \rightarrow 1-} d$.

Достаточно доказать, что $\phi(r_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} d$ для любой последовательности $r_i \in [0, 1)$, стремящейся к 1. Это верно из теоремы Тёплица. \square

Интересный факт. Всё суммируемое методом Чезаро суммируется методом Абеля — Пуассона, но не наоборот.

О произведении рядов

Пусть $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j = \alpha$; $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = \beta$, быть может, сходящихся условно. Рассмотрим семейство $\{\alpha_i \beta_j\}_{i,j}$ и «просуммируем по диагонали». Положим $\gamma_n := \sum_{i+j=n} \alpha_i \beta_j$.

Факт 2.6.2. Если $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ сходится к γ , то обязательно $\gamma = \alpha\beta$.

Доказательство. Рассмотрим для $r \in [0, 1)$ два абсолютно сходящихся ряда $\phi(r) := \sum_{i=0}^{\infty} r^i \alpha_i$ и $\psi(r) := \sum_{j=0}^{\infty} r^j \beta_j$.

Запишем

$$\phi(r)\psi(r) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i+j=n} r^i \alpha_i r^j \beta_j \right) = \sum_{n \geq 0} r^n \left(\sum_{i+j=n} \alpha_i \beta_j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \gamma_n \xrightarrow{r \rightarrow 1-} \gamma \quad \square$$

Лекция XXII

12 мая 2023 г.

2.7 Перестановка предельных переходов

Вспомним теорему Стокса — Зайделя: $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций, $\forall x : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

Хочется, чтобы f была непрерывной, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Так как $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, то мы хотим, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x_0)$$

С другой стороны, при переставленных пределах

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0)$$

очевидно верно. Теорема Стокса — Зайделя говорит о том, что пределы можно переставлять, если сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x)$ равномерна.

Запишем этот результат общо.

Теорема 2.7.1. Пусть X, Y — хаусдорфовы топологические пространства, $A \subset X, B \subset Y$. Введём также Z — полное метрическое пространство (с метрикой ρ).

Пусть $a \in \text{Cl } A, b \in \text{Cl } B$, причём $a \notin A, b \notin B$. Пускай $F : A \times B \rightarrow Z$ — отображение.

Предположим, что $\forall x \in A : \exists \lim_{y \rightarrow b} F(x, y) =: \phi(x)$, сходимость не предполагается равномерной.

Предположим, что $\forall y \in B : \exists \lim_{x \rightarrow a} F(x, y) =: \psi(y)$, причём сходимость равномерна по y :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U \text{ — окрестность точки } a : \forall y \in B, \forall x \in U \cap A : \rho(F(x, y), \psi(y)) < \varepsilon$$

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \phi(x), \exists \lim_{y \rightarrow b} \psi(y)$, причём они равны.

Более того, $(a, b) \in \text{Cl}(A \times B)$, и функция F имеет предел (в топологии произведения) в (a, b) .

Доказательство.

Лемма 2.7.1 (Критерий Коши для функций). Пусть W — хаусдорфово, Z — полное метрическое. $C \subset W; h : C \rightarrow Z$, пусть $c \in \text{Cl } C \setminus C$.

Если $\forall \varepsilon > 0 : \exists U \ni c : \forall u_1, u_2 \in U \cap C : \rho(h(u_1), h(u_2)) < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{u \rightarrow c} h(u)$.

Доказательство леммы. Выберем $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ для $n \in \mathbb{N}$, подберём $U_n \ni c$, как в условии леммы. Можно считать, что $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Выберем $u_n \in C \cap U_n$.

Так как пространство Z полное, то $\exists z = \lim_{n \rightarrow \infty} h(u_n)$. Эта точка и будет пределом h — согласно определению предела z , посылке леммы и неравенству треугольника. \square

Выберем $\varepsilon > 0$, для него найдётся $U \ni a$ согласно равномерной сходимости:

$$\forall x_0 \in U \cap A : \forall y \in B : \rho(F(x_0, y), \psi(y)) < \varepsilon$$

Зафиксируем произвольный $x_0 \in U \cap A$.

Найдётся окрестность $V \ni b : \forall y \in V \cap B : \rho(F(x_0, y), \phi(x_0)) < \varepsilon$. Рассмотрим $y, y' \in V \cap B$:

$$\begin{aligned} \rho(\psi(y), \psi(y')) &\leq \rho(\psi(y), F(x_0, y)) + \rho(F(x_0, y), F(x_0, y')) + \rho(F(x_0, y'), \psi(y')) \leq \\ &2\varepsilon + \rho(F(x_0, y), F(x_0, y')) \leq 2\varepsilon + \rho(F(x_0, y), \phi(x_0)) + \rho(\phi(x_0), F(x_0, y')) \leq 4\varepsilon \end{aligned}$$

то есть отображение ψ удовлетворяет условию Коши.

По лемме $\exists \lim_{y \rightarrow b} \psi(y) =: u$.

Перейдём к пределу $y \rightarrow b$ в неравенстве $\rho(F(x_0, y), \psi(y)) < \varepsilon$:

$$\rho(\phi(x_0), u) \leq \varepsilon$$

Так как x_0 — произвольная точка из $U \cap A$, то $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = u$.

Теперь докажем существование двойного предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U \ni a : \forall x \in U \cap A, \forall y \in B : \rho(F(x, y), \psi(y)) < \varepsilon$$

$$\exists V \ni b : \forall y \in V \cap B : \rho(\psi(y), u) < \varepsilon$$

\Downarrow

$$(x, y) \in (U \times V) \cap (A \times B) \Rightarrow \rho(F(x, y), u) \leq \rho(F(x, y), \psi(y)) + \rho(\psi(y), u) < 2\varepsilon$$

\square

Замечание. Хаусдорфовость тут наверно и не нужна, но в анализе нехаусдорфовы пространства крайне редко встречаются. Предположим на всякий случай.

2.7.1 Применение

Возьмём интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Как мы уже знаем (раздел 2.1), у него есть особенность на бесконечности, и он сходится лишь условно.

Рассмотрим $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$; $F(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$.

Запишем несколько фактов, которые вскоре и докажем.

1. $F(a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$.
2. $F(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} F(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
3. F дифференцируема при $a > 0$, $F'(a) = -\frac{1}{1+a^2}$.

$$\frac{d}{da} \left(\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \right) \underset{\text{неформально}}{=} \int_0^{\infty} \frac{d}{da} \left(e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right) dx = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx \underset{\text{дважды по частям}}{=} \dots = -\frac{1}{1+a^2}$$

Тем самым, $F(a) = -\arctg(a) + C$. Из первого пункта получаем $C = \frac{\pi}{2}$, из второго получаем

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство. Обоснуем пункты. Для начала возьмём интеграл $\int_c^d e^{-at} \sin t dt$ для $0 \leq c < d, a > 0$.

$$\begin{aligned} \int_c^d e^{-at} \sin t dt &= - \int_c^d e^{-at} d \cos t = (-e^{-at} \cos t) \Big|_c^d - a \int_c^d e^{-at} \cos t dt = \\ &= (-e^{-at} \cos t) \Big|_c^d - a \int_c^d e^{-at} d \sin t = (-e^{-at} \cos t) \Big|_c^d - (ae^{-at} \sin t) \Big|_c^d + a^2 \int_c^d e^{-at} \sin t dt \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\int_c^d e^{-at} \sin t dt = \frac{e^{-ac} \cos c - e^{-ad} \cos d - ae^{-ad} \sin d + ae^{-ac} \sin c}{1+a^2}$$

Эта штука замечательна тем, что ограничена по всем a, c, d .

Заметим, что при $c \rightarrow 0, d \rightarrow \infty$ получается $\frac{1}{1+a^2}$, то есть несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \sin t dt = \frac{1}{1+a^2}$$

Лемма 2.7.2. Пусть $G : A \times [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, такая, что $\forall u \in A; G(u, \cdot)$ интегрируема по Риману на всех отрезках $[\alpha, \beta']$ для $\beta' \in [\alpha, \beta)$. А здесь играет роль индексного множества.

Пусть $g : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ существует в несобственном смысле. Ещё пусть $\forall x \in [\alpha, \beta), u \in A : |G(u, x)| \leq g(x)$. Тогда

$$\lim_{\beta' \rightarrow \beta-} \int_{\alpha}^{\beta'} G(u, x) dx \text{ существует равномерно по } u \in A$$

Доказательство. Пусть $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta)$, для определённости считаем, что $t_1 < t_2$.

$$\left| \int_{\alpha}^{t_1} G(u, x) dx - \int_{\alpha}^{t_2} G(u, x) dx \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} G(u, x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{t_1} g(x) dx$$

При $t_1 \rightarrow t_2$ эта штука стремится к 0. □

Лекция XXIII

13 мая 2023 г.

1. Выберем $g(x) = e^{-x}$. При $a \geq 1$ действительно $|e^{-ax} \frac{\sin x}{x}| \leq g(x)$. Значит, предел $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ существует равномерно по $a \geq 1$, и $\forall R : \exists \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$. Значит, пределы можно переставить, получаем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

Подпредельное выражение $\int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = 0$, так как подынтегральная функция на отрезке равномерно стремится к нулю.

2. Из равномерной сходимости на отрезке получаем $\int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx$.

$$\int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

Чтобы применить теорему о перестановке пределов надо показать, что один из пределов равномерен: например, при $R \rightarrow \infty$ — равномерно по a .

Факт 2.7.1. $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ существует равномерно по $a \in (0, 1)$.

Доказательство. $\int_0^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^R e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$, считаем, что $R > 1$. Первое слагаемое от R не зависит, на равномерность сходимости не влияет. Вторую проинтегрируем по частям:

Положим $h_a(x) = \int_1^x e^{-at} \sin t \, dt$, заметим, что $\exists C : \forall a, x : |h_a(x)| \leq C$.

$$\int_1^R \frac{1}{x} dh_a(x) = \underbrace{\frac{1}{x} h_a(x) \Big|_1^R}_{\rightarrow -h_a(1) \text{ равномерно по } a} + \underbrace{\int_1^R \frac{h_a(x)}{x^2} dx}_{\text{существует равномерно по } a \text{ согласно лемме}}$$

□

Значит, опять же, можно переставить пределы.

3. Теперь докажем, что можно дифференцировать под знаком интеграла, что

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{d}{da} \left(e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

Обозначим для краткости производную по второму аргументу ∂_2 .

Лемма 2.7.3. Пусть $I = [\alpha, \beta]$, а ещё есть интервал (c, d) . Пусть $H : I \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, причём $\forall x \in I, t \in (c, d) : \exists \partial_2 H(x, t) =: \phi(x, t)$, и данная производная тоже непрерывна на $I \times (c, d)$.

Определим $h(t) := \int_\alpha^\beta H(x, t) dx$ — существует, так как $H(x, t)$ непрерывна (и непрерывна при фиксированном втором аргументе).

$$\text{Тогда } h'(t) = \int_\alpha^\beta \partial_2 H(x, t) dx.$$

Доказательство. Пусть $t_0 \in (c, d)$, $t_0 \in \text{Int } \Delta$, $\Delta \subset (c, d)$. На $\Delta \partial_2 H(x, t) = \phi(x, t)$ равномерно непрерывна.

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \int_\alpha^\beta \frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} dx$$

Давайте применим формулу Лагранжа, но ни в коем случае не под интегралом: если подставить $\frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} = \phi(x, \xi_x)$, то под интегралом может оказаться вообще неинтегрируемая (даже неизмеримая, что бы это не значило) функция.

Воспользуемся равномерной непрерывностью: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\phi(x, t_1) - \phi(x, t_2)| < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon > 0$, считаем, что $t - t_0 < \delta$ — всё равно придётся переходить к пределу. Теперь $|\phi(x, \xi_x) - \phi(x, t_0)| < \varepsilon$, откуда

$$\left| \frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} - \phi(x, t_0) \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \int_\alpha^\beta \left(\frac{H(x, t) - H(x, t_0)}{t - t_0} - \phi(x, t_0) \right) dx \right| < (\beta - \alpha) \varepsilon$$

Значит, при $t \rightarrow t_0$ интегралы становятся равны, что и требовалось. □

К сожалению, у нас промежутки бесконечный, теорема неприменима.

Нас интересует интеграл

$$\lim_{a \rightarrow a_0} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-a_0x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx$$

Согласно только что доказанной лемме

$$\forall R > 0 : \lim_{a \rightarrow a_0} \int_0^R \frac{e^{-ax} - e^{-a_0x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_0^R e^{-a_0x} \sin x dx$$

$$\forall a \neq a_0 : \exists \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{e^{-ax} - e^{-a_0x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-a_0x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx$$

Докажем, что во втором равенстве предел достигается равномерно по $a \in (U \ni a_0)$. Рассмотрим $a < a_0$.

$$\int_0^R e^{-a_0x} \cdot \frac{e^{-(a-a_0)x} - 1}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx$$

Подынтегральная функция оценивается по модулю как Ce^{-a_0x} , интеграл сходится равномерно, где $|e^{-\xi} - 1| < C|\xi|$ или что-то вроде того. При $a > a_0$ тоже что-то пишется, надо понять, как это покороче расписать.

□

Глава 3

Выпуклые и вогнутые функции

Пусть $a < b \in \mathbb{R}$, все точки отрезка $[a, b]$ имеют вид $a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]$.

Определение 3.0.1 (Выпуклая функция $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$). $\forall \alpha < a < b < \beta, \forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Например, $f(x) = x^2$.

Определение 3.0.2 (Строго выпуклая функция $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$). $\forall \alpha < a < b < \beta, \forall \lambda \in (0, 1)$:

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) < (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Например, $f(x) = -x^2$.

Определение 3.0.3 (f вогнутая). $-f$ выпуклая.

Рассмотрим хорду, соединяющую точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Её угловой коэффициент равен $k(a, b) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Теорема 3.0.1. Следующие условия эквивалентны

1. Функция $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла.
2. $\forall a < c < b \in (\alpha, \beta) : k(a, c) \leq k(c, b)$.
3. $\forall a < c < b \in (\alpha, \beta) : k(a, b) \leq k(c, b)$.
4. $\forall a < c < b \in (\alpha, \beta) : k(a, c) \leq k(a, b)$.
5. Пусть $u < v$. Если $a \leq u, b \leq v, a < b$, то $k(a, b) \leq k(u, v)$.

Доказательство. 2, 3, 4 Частные случаи.

1 \Rightarrow 2 Пусть $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$. Тогда

$$f(c) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda)(f(c) - f(a)) \leq \lambda(f(b) - f(c))$$

Выразив $\lambda = \frac{c - a}{b - a}$ получаем необходимое неравенство. Заметим, что вычисления обратимы, значит, доказали ещё и $2 \Rightarrow 1$.

1 \Leftrightarrow 3, 1 \Leftrightarrow 4 Аналогично.

2, 3, 4 \Rightarrow 5 $k(a, b) \leq k(a, v) \leq k(u, v)$. □

Следствие 3.0.1. Выпуклая функция на (α, β) непрерывна.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$, x близко к x_0 . Пусть $a < b < x, x_0 < c < d$.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

Значит, $\exists C : |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|$, то есть функция липшицева, если она задана где-то на большем замкнутом отрезке. \square

Следствие 3.0.2. У выпуклой функции $\forall x_0 \in (\alpha, \beta)$ существует односторонняя производная: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ монотонна по x и ограничена. Более того, $\forall x_0 \in (\alpha, \beta) : f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ и $\forall x_0, x_1 \in (\alpha, \beta) : f'_+(x_0) \leq f'_-(x_1)$.

Лекция XXIV

16 мая 2023 г.

Следствие 3.0.3. Если $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема, то f выпукла $\iff f'$ возрастает.

Доказательство. В одну сторону уже доказано, в другую следует из теоремы Лагранжа:

$$\forall u < v < w \in (\alpha, \beta) : \frac{f(v) - f(u)}{v - u} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(w) - f(v)}{w - v} \quad \text{для неких } \xi_1 \in (u, v), \xi_2 \in (v, w)$$

\square

Следствие 3.0.4. Если f выпукла на (α, β) , то $\forall x, y \in (\alpha, \beta)$ функция лежит выше касательных:

$$f(x) \geq f'_\pm(y)(x - y) + f(y)$$

Доказательство. Неравенство равносильно следующему

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \geq f'_\pm(y), \quad \begin{matrix} x > y \\ x < y \end{matrix}$$

\square

Верно и обратное, мы для простоты докажем лишь частичное обращение:

Лемма 3.0.1. Если f дифференцируема на (α, β) и $\forall x, y \in (\alpha, \beta) : f(x) \geq f'(y)(x - y) + f(y)$, то f выпукла.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\phi(x) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ возрастает при $x < y$.

$$\phi'(x) = \frac{-f'(x)(y - x) + f(y) - f(x)}{(y - x)^2}$$

\square

Примеры.

- $f(x) = \sin(x)$, определённая на $[0, \pi/2]$. Производная убывает, функция вогнута (граничные точки отрезка добавляем по непрерывности).

Так как график лежит под любой касательной и над любой секущей, то получаем оценку

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, \quad x \in [0, \pi/2]$$

- e^x — выпуклая функция, производная возрастает. Получается, по определению

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1) : e^{(1-\alpha)u + \alpha v} \leq (1 - \alpha)e^u + \alpha e^v$$

Заменим переменные: $e^{(1-\alpha)u} = A, e^{\alpha v} = B, p = \frac{1}{1-\alpha}, q = \frac{1}{\alpha}$. Замена обратима при условии $A, B > 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ — такие $p, q \in (1, \infty)$ называются сопряжёнными. Неравенство превращается в *неравенство Юнга*:

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

У неравенства Юнга есть красивый геометрический смысл. Светло серая площадь — площадь под $y = x^{p-1}$, равна $\frac{A^p}{p}$. Тёмно серая площадь — площадь под (ну, точнее слева) кривой $x = y^{q-1}$, равна $\frac{B^q}{q}$ — здесь мы пользуемся тем, что $\frac{1}{p-1} = q - 1$.



Рис. 3.1: Геометрический смысл неравенство Юнга

Из рисунка видно, что действительно $AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$.

Факт 3.0.1 (Неравенство Гёльдера). Пусть $1 < p, q$ — сопряжённые показатели ($1/p + 1/q = 1$). Тогда $\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$:

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Усилим неравенство (докажем частный случай $a_j, b_j \geq 0$):

$$\sum_{j=1}^n |a_j| |b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Можно считать, что $\sum_{j=1}^n |a_j|^p = \sum_{j=1}^n |b_j|^q = 1$: неравенство однородно, можно все a_j домножить на одно и то же λ . Применим неравенство Юнга к каждому слагаемому, получаем

$$\sum_{j=1}^n |a_j| |b_j| \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{p} |a_j|^p + \frac{1}{q} |b_j|^q = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n |a_j|^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^n |b_j|^q = 1 \quad \square$$

Следствие 3.0.5. При $p = q = 2$ неравенство Гёльдера обращается в КБШ.

Факт 3.0.2 (Неравенство Минковского).

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Если $p = 1$, то очевидно.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p &= \sum_{j=1}^n |a_j + b_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^n |a_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |b_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $(p-1)q = p$, поделив обе части неравенства на $\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{q}}$ получим требуемое неравенство. \square

Замечание. Неравенства Гёльдера и Минковского также применимы для интегралов, упражнение читателю — подумать, как они выглядят.

Следствие 3.0.6. $d_p(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ — метрика в \mathbb{R}^n (неравенство треугольника — неравенство Минковского).

Факт 3.0.3 (Неравенство Йенсена). Пусть $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $x_1, \dots, x_k \in (\alpha, \beta)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$, причём $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$. Тогда

$$f\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j f(x_j)$$

Доказательство. Индукция по k .

База: $k = 2$, определение выпуклости.

Переход: Если $\lambda_k = 0$, то работает индукционное предположение. Если $\lambda_k = 1$, то остальные коэффициенты — нули, неравенство обращается в $f(x_k) \leq f(x_k)$.

Положим $y := \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k-1} x_{k-1}}{1 - \lambda_k}$, запишем выпуклость:

$$f((1 - \lambda_k)y + \lambda_k x_k) \leq (1 - \lambda_k)f(y) + \lambda_k f(x_k)$$

Применив индукционное предположение $f(y) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_k} f(x_j)$, получаем искомое неравенство. \square

Следствие 3.0.7. Логарифм — вогнутая функция, так как производная убывает. Применим неравенство Йенсена для $\lambda_j = \frac{1}{k}$, $x_j > 0$:

$$\log\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right) \geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{k} \log(x_j)$$

Взяв экспоненту от обеих частей, получаем неравенство о средних арифметическом и геометрическом:

$$\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot \dots \cdot x_k}$$

Лекция XXV

19 мая 2023 г.

Факт 3.0.4 (Неравенство Йенсена для интегралов). Пусть $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция ($|h| \leq M$) интегрируемая по Риману — Дарбу. Пусть $f : (-M - \varepsilon, M + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция ($\varepsilon > 0$ — произвольный).

Обозначив $[a, b] = \Delta$, утверждаем, что

$$f\left(\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} h(x) dx\right) \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} (f \circ h)(x) dx$$

Доказательство.

Лемма 3.0.2. Пусть $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция ($|h| \leq M$) интегрируемая по Риману — Дарбу (всё так же), $\phi : [-M, M]$ — C -липшицева функция. Тогда $\phi \circ h$ тоже интегрируема по Риману.

Доказательство леммы. Пусть $I \subset \Delta$ — отрезок.

$$\operatorname{osc}_I(\phi \circ h) = \sup_{x,y \in I} |\phi(h(x)) - \phi(h(y))| \leq C \sup_{x,y \in I} |h(x) - h(y)| \leq C \operatorname{osc}_I h$$

Дальше применяем критерий интегрируемости по Риману — Дарбу. \square

Так как f задана на большем интервале, то на $[-M, M]$ она липшицева. Тогда согласно лемме существуют оба интеграла.

Выберем $\varepsilon > 0$, так как f равномерно непрерывна, то $\exists \delta > 0 : t_1, t_2 \in [-M, M]$ и $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$.

Напишем суммы Дарбу, не особо важно, верхние или нижние, начиная с некоторого места они все близки. Пусть верхние. $\exists \Delta_1, \dots, \Delta_k$ — разбиение Δ , такое, что $\left| \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} h(x) dx - \sum_{j=1}^k \sup_{x \in \Delta_j} h(x) |\Delta_j| \right| < \delta$ (давайте считать, что колебания $f(h(x))$ по данному разбиению тоже ε). Таким образом, можно применить f к обеим частям (и неравенство Йенсена), совершив ошибку не более, чем на ε :

$$f \left(\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} h(x) dx \right) - \varepsilon \leq f \left(\sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_j|}{|\Delta|} \sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_j|}{|\Delta|} f \left(\sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right)$$

Так как супремума может не существовать, то давайте сделаем оценку: $\exists t_j \in \Delta_j : \sup_{x \in \Delta_j} h(x) \geq$

$$h(t) \geq \sup_{x \in \Delta_j} h(x) - \delta. \text{ Теперь запишем } \left| f \left(\sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right) - f(h(t)) \right| < \varepsilon, \text{ то есть } f \left(\sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right) \leq f(h(t)) + \varepsilon \leq \sup_{x \in \Delta_j} f(h(x)) + \varepsilon.$$

Теперь можно продолжить неравенство

$$\sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_j|}{|\Delta|} f \left(\sup_{x \in \Delta_j} h(x) \right) \leq \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^k |\Delta_j| \sup_{x \in \Delta_j} f(h(x)) + \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^k |\Delta_j| \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем искомое неравенство. \square

3.1 Бесконечные произведения

Пусть $a_1, \dots, \in \mathbb{C}$. Что логично считать под $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ — «бесконечным произведением»?

Если бы числа были положительными, то можно было бы их прологарифмировать и просуммировать ряд.

Положим $\sigma_n = \prod_{j=1}^n a_j$.

Если $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то говорят, что *произведение расходится к нулю* — ведь гипотетический ряд логарифмов действительно расходится к $-\infty$.

Если $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma \neq 0$, то говорят, что *произведение сходится к σ* .

Вспомним, что $e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$. Отсюда видно, что $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Логарифм хочется определить, как обратную функцию к $z \mapsto e^z$. Есть одна проблема: $z \mapsto e^z$ не инъективно. А именно, оно периодически с периодом $2\pi i$.

Заметим, что

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = e^z$$

Таким образом, $\text{dexp}(z_0, h) = e^{z_0} \cdot h$.

Таким образом, $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists \varepsilon, \exists \phi : \forall |z - z_0| < \varepsilon : e^{\phi(z)} = z$. Это отображение дифференцируемо, как обратное к невырожденно дифференцируемому: $\phi'(z_0) = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z}$, где $w_0 = \phi(z_0)$.

Пусть $w = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Каким должно быть w , чтобы $e^w = z_0$?

$$e^a \cdot e^{ib} = z_0 \Rightarrow \begin{cases} e^a = |z_0| \\ e^{ib} = \frac{z_0}{|z_0|} =: \zeta \end{cases}$$

Первое уравнение мы умеем решать с помощью вещественного логарифма, решениями второго уравнения являются $\{b + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где b — какое-нибудь решение. Все такие решения называются аргументами.

Множество всех аргументов $\text{Arg}(\zeta)$ пишется с большой буквы. Множество всех обратных к экспоненте обозначают $\text{Log}(z_0) = \log |z_0| + i \text{Arg} \frac{z_0}{|z_0|}$

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область.

Определение 3.1.1 (Ветвь логарифма). Непрерывная функция $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$, такая, что $e^{\phi(z)} = z$.

Давайте найдём какие-нибудь большие области, в которых есть ветви логарифма. Например, подойдёт $\{x \in \mathbb{C} \mid x \leq 0\}$ — (запись $x \leq 0$ может быть истинна только если $x \in \mathbb{R}$).

Тогда в качестве $\arg(z)$ (z нормируем делением на $|z|$) выбираем значения аргумента из $(-\pi, \pi)$. Понятно, что определённая таким образом функция будет непрерывна. Определённая функция $\arg(z)$ — *главная ветвь аргумента*, ей соответствует *главная ветвь логарифма* $\log z = \log |z| + i \arg z$.

Вообще говоря, $\log(ab) \neq \log a + \log b$ — сумма значений аргументов a и b может лежать вне $(-\pi, \pi)$.

Замечание. Достаточным условием равенства $\log(ab) = \log a + \log b$ является $\Re a, \Re b > 0$.

3.1.1 О сходящихся произведениях

По определению, произведение сходится, если $\exists \sigma : \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : |\sigma_n - \sigma| < \varepsilon$. Согласно тривиальной части критерия Коши

$$\forall k > n : |a_1 \cdot \dots \cdot a_k - \sigma| < \varepsilon \Rightarrow |a_1 \cdot \dots \cdot a_n - a_1 \cdot \dots \cdot a_k| < 2\varepsilon \Rightarrow |1 - a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_k| < \frac{2\varepsilon}{|a_1 \cdot \dots \cdot a_n|}$$

Пусть $\varepsilon < \frac{|\sigma|}{2}$, тогда $|1 - a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_k| < \frac{2\varepsilon}{\sigma - \frac{|\sigma|}{2}} \leq 4 \frac{\varepsilon}{|\sigma|}$.

Таким образом, $\forall \rho > 0 : \exists N : \forall k > n > N : |1 - a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_k| < \rho$.

Выбрав $\rho < \frac{1}{2}$ видим, что если произведение сходится, то начиная с некоторого места все конечные произведения лежат в круге $B_{1/2}(1)$, в частности, лежат в полуплоскости $\Re z > 0$.

Пускай $n > N, k > n$. Сходимость исходного произведения $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ эквивалентна сходимости $\prod_{j=n}^{\infty} a_j$ (разумеется, если среди a_1, \dots, a_{n-1} нет нулей). А это эквивалентно тому, что $\exists \tilde{\sigma} : a_n \cdot \dots \cdot a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \tilde{\sigma}$.

Произведение $a_n \cdot \dots \cdot a_k$, как и все его 2^k сомножителей лежат в полуплоскости $\Re z > 0$, значит, можно расписать $\log(a_n \cdot \dots \cdot a_k) = \log(a_n) + \dots + \log(a_k)$. Таким образом, сходимость произведения эквивалентна сходимости ряда $\sum_{j=n}^{\infty} \log a_j$.

Но можно добавить и первые слагаемые, которых конечное число.

Теорема 3.1.1. Пусть $a_j \notin (\infty, 0]$. Тогда $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится $\iff \sum_{j=1}^{\infty} \log a_j$ сходится.

Замечание. Пусть ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится к s , а $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится к σ .

Тогда $e^s = \sigma$, но равенство $\log \sigma = s$ вполне может не выполняться.