

# Кластерные алгебры и кластерные категории. Неофициальный конспект

Лектор: Михаил Александрович Антипов  
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2026 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Примеры</b>	<b>2</b>
1.0	Пентагональная рекуррента . . . . .	2
1.2	Фризы Кокстера — Конвея . . . . .	2
1.3	Координаты на грассманиане и триангуляции . . . . .	4
1.4	Классификация фризов . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Определения</b>	<b>7</b>
2.1	Колчаны и кластерные матрицы . . . . .	7
2.2	Кластерная алгебра . . . . .	8

# Лекция I

11 февраля 2026 г.

## 1 Примеры

### 1.0 Пентагональная рекуррента

Рассмотрим рекурренту  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  с начальными данными  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , заданную соотношениями  $x_{i-1}x_{i+1} = x_i + 1$  (где сами  $x_i \in K(x, y)$  для некоторого поля  $K$ ).

Посчитаем первые несколько членов:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= y \\x_3 &= \frac{y+1}{x} \\x_4 &= \frac{x+y+1}{xy} \\x_5 &= \frac{x+1}{y} \\x_6 &= x \\x_7 &= y \\&\vdots\end{aligned}$$

Рекуррента заиклилась за 5 шагов.

Можно пытаться рассматривать вариации рекуррентного соотношения вида  $x_{i-1}x_{i+1} = x_i^a + 1$ , где скажем  $a \in \mathbb{N}$ . Оказывается, она будет циклической только в случаях  $a = 1, 2, 3$ , и это соответствует тому, что в ранге 2 есть три системы корней —  $A_2$ ,  $B_2 = C_2$  и  $G_2$ .

Это простейший пример кластерной алгебры: в данном случае имеется кластер из двух переменных, которые по очереди мутируют:

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow (x_3, x_2) \rightsquigarrow (x_3, x_4) \rightsquigarrow (x_5, x_4) \leftrightarrow \dots$$

При этом две мутации одной и той же переменной подряд ничего не меняют.

В общем случае вместо такого пути будет регулярное дерево степени  $n$ , полное определение мы дадим позже (подраздел 2.2).

### 1.2 Фризы Кокстера — Конвея

Фризы Кокстера — Конвея — частный случай  $SL_2$ -tilings ( $SL_2$ -замощения?).

**Определение 1.1** ( $SL_2$ -замощение). Отображение  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$  с условием  $f(i+1, j+1)f(i, j) - f(i, j+1)f(i+1, j) = 1$ .

**Определение 1.2** (Фриз Кокстера — Конвея ранга  $n$ ).  $SL_2$ -замощение  $f$  такое, что

$$f(i, j) = \begin{cases} 0, & i + j < 0 \\ 1, & i + j = 0 \\ 1, & i + j = n + 1 \\ 0, & i + j > n + 1 \end{cases}$$

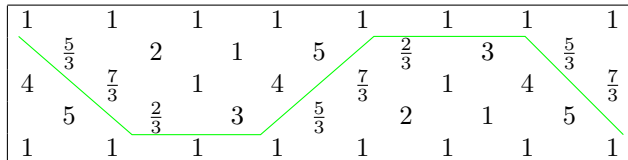
Графически его изображают повёрнутым на  $45^\circ$ , вот так:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & a_1^1 & & a_2^1 & & a_3^1 & \\
 a_0^2 & & & a_1^2 & & a_2^2 & & a_3^2 \\
 \cdots & & a_0^3 & & a_1^3 & & a_2^3 & \cdots \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

должно быть выполнено  $ad - bc = 1$

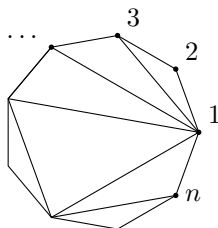
*Пример (Фриз ранга 3).*



Как видно из картинки, фриз имеет ось скользящей симметрии со сдвигом на  $\frac{n+3}{2}$  и поворотом (основания трапеции равны  $n + 1$  и  $2$ ). Позже это будет видно из классификации в 1.4. Ну, надо что-то ещё потребовать, например, положительности всех элементов фриза хватит. А то, кажется, можно при желании составить башню из нескольких фризов произвольного размера, поставленных друг на друга.

**Упражнение 1.1** (Эффект лорановости). Построим фриз сверху вниз, заполнив верхнюю строку  $a_*^1$  произвольно, и выражая элементы снизу через элементы сверху. Тогда если все  $a_*^1 \in \mathbb{Z}$ , то и все элементы снизу тоже (это верно даже в большей общности, тут неважно, что это фриз, то есть что на каком-то уровне снизу будет строка единиц, а потом начнутся нули).

**Теорема 1.1** (Фриз, построенный по триангуляции). Пусть  $T$  — триангуляция правильного  $n$ -угольника:



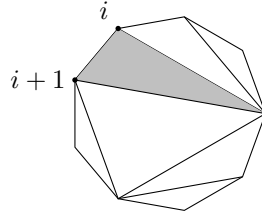
Строчка  $a_i^1 \in \mathbb{Z}$  соответствует фриз (то есть через какая-то строчка снизу будет полностью состоять из единиц) тогда и только тогда, когда  $a_i^1$  — количество треугольников, касающихся вершины  $i$  (индексы берутся по модулю  $n$ ). Например, триангуляции на рисунке соответствует фриз

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	5	1	2	2	3	1	4	1	2
7	4	1	3	5	2	3	3	1	
3	7	3	1	7	3	5	2	2	4
3	5	2	2	4	7	3	1	7	
3	2	3	3	1	9	4	1	3	5
3	1	4	1	2	5	1	2	2	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1

*Доказательство в более простую сторону.* Рассмотрим двудольный граф  $\Gamma$ . В левой доле  $n$  вершин, соответствующих вершинам многоугольника, а в правой —  $n + 1$  вершина, соответствующая треугольнику. Проведём ребро, если вершина является вершиной треугольника.

Пусть  $m_{ij}$  — количество совершенных паросочетаний (из  $n + 1$  ребра), где в левой доле взяты все вершины, кроме  $i$  и  $j$ .

Ясно, что  $m_{i,i+1} = 1$ : это ребро какого-то треугольника, значит, этот треугольник берётся в паросочетание вместе с оставшейся третьей вершиной; после этого многоугольник разваливается на два, и дальше опять же все по индукции предопределено однозначно:



Аналогично проверяется, что  $m_{i-1,i+1} = a_i^1$  ( $i$ -я вершина стоит в паре с любым из инцидентных ей треугольников, после чего остальное предопределено однозначно).

Осталось применить лемму о конденсации, доказательством которой мы утруждать себя не будем:

**Лемма 1.1** (О конденсации). Пусть  $\Gamma$  — плоский двудольный граф с левой долей  $V_1$  и правой  $V_2$ , причём  $|V_1| = |V_2| + 2$ . Пусть  $i, j \in V_1$ . Обозначим через  $m_{ij}$  количество совершенных паросочетаний между  $V_1 \setminus \{i, j\}$  и  $V_2$ . Если  $a, b, c, d \in V_1$  лежат на грани данного графа в этом циклическом порядке (и, разумеется, между ними при обходе грани есть ещё какие-то вершины графа), то выполнено соотношение

$$m_{ab}m_{cd} + m_{bc}m_{ad} = m_{ac}m_{bd} \quad \square$$

Соотношение из леммы о конденсации напоминает теорему Птолемея из школьной планиметрии:

*Интересный факт* (Теорема Птолемея). У вписанного четырёхугольника произведение длин диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Также такой вид имеют соотношения в грассманиане.

### 1.3 Координаты на грассманиане и триангуляции

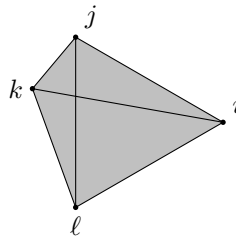
Пусть  $K$  — поле. Вспомним грассманиан  $\text{Gr}(k, n)$  — многообразие, параметризующее  $k$ -мерные подпространства в  $n$ -мерии (например, в пространстве строк  ${}^nK$ ).

Грассманиан удобно представлять себе, как множество матриц  $M_{k \times n}(K)$  с точностью до действия  $\text{GL}_k(K)$  умножениями слева.

Однородными координатами на грассманиане служат значения миноров  $k \times k$ , на которые накладываются соотношения Плюккера. В случае  $k = 2$  эти соотношения выглядят следующим образом:

$$p_{ik}p_{j\ell} = p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell} \quad (*)$$

где  $i < j < k < \ell$ , а  $p_{ij} = p_{ji}$  равен значению квадратного минора из  $i$ -го и  $j$ -го столбца. Иными словами, для матрицы  $x$ :  $p_{ij} = x_{1,\min(i,j)}x_{2,\max(i,j)} - x_{1,\max(i,j)}x_{2,\min(i,j)}$ . Изображая это правило на картинке, получаем правило Птолемея:



Из картинке ясно, что на самом деле имеет значение только циклический порядок индексов  $i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

# Лекция II

18 февраля 2026 г.

Размерность многообразия  $\text{Gr}(2, n)$  равна  $2n - 4$ , а размерность Крулля однородного координатного кольца  $K[\text{Gr}(2, n)] = K[p_{ij}]/(\star)$  на единицу больше, значит,  $2n - 3$ .

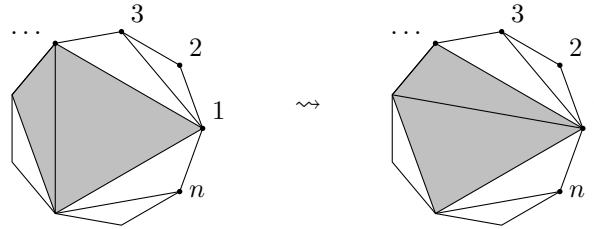
**Определение 1.3** (Матрица  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  вполне положительна). Все миноры  $A$  положительны.

Заинтересуемся схожим вопросом: когда все миноры  $2 \times 2$  в матрице  $2 \times n$  положительны? Более точно, сколько миноров надо проверить на положительность, чтобы положительность остальных последовала?

Из описания координатного кольца грассманиана ясно, что миноры матрицы — любые  $p_{ij} \in K$ , удовлетворяющие соотношениям  $(\star)$ . Так как  $\dim \mathbb{R}[\text{Gr}(2, n)] = 2n - 3$ , то такова и степень трансцендентности его поля частных, откуда ответ хотя бы  $2n - 3$ . **Это видимо не совсем строгое утверждение, так как  $\mathbb{R}$  не алгебраически замкнуто.** С другой стороны, эта оценка достигается:

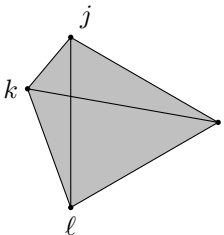
**Предложение 1.1.** Пусть  $T$  — триангуляция правильного  $n$ -угольника (множество неупорядоченных пар вершин, соединённых ребром, в том числе пары соседних вершин). Пусть  $P := \{p_{ij} \mid (i, j) \in T\}$  Тогда любой  $p_{rs}$  выражается в виде некоторой рациональной функции от элементов  $P$  с положительными коэффициентами. В частности, положительность элементов  $P$  повлечёт положительность всех миноров  $2 \times 2$ .

*Доказательство.* Рассмотрим граф, вершины которого — триангуляции  $n$ -угольника, а рёбра соответствуют флипам следующего вида:



А именно, любая хорда триангуляции является ребром двух смежных треугольников, в объединении дающих четырёхугольник. Назовём *флипом* замену данной хорды триангуляции на другую диагональ четырёхугольника. Кстати, этот граф является остовом  $(n - 3)$ -мерного ассоциэдра.

Ясно, что любая хорда  $n$ -угольника лежит в какой-то триангуляции. Без доказательства утверждается, что граф триангуляций связен. Начнём с триангуляции  $T$ , и, применяя флипы, дойдём до триангуляции, содержащей хорду  $r - s$ . Легко видеть, что  $p_{ik}$ , где  $i - k$  — хорда, появляющаяся после флипа, выражается через остальные  $p_{j\ell}$ , отвечающие хордам, присутствовавшим до флипа:

$$p_{ik} = \frac{p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell}}{p_{j\ell}}$$

□

Эту теорему можно пытаться обобщать на разные интересные случаи — рассматривать не только триангуляции, или скажем работать не на плоскости (или её компактификации — сфере), а на поверхности с большим числом ручек. Впрочем, начиная с некоторого места она уже перестает быть верной.

Ещё пару слов про флипы и триангуляции: можно считать, что диагонали пронумерованы от 1 до  $n - 3$ , и при флипе новая диагональ нумеруется тем числом, что было написано на стираемой. Тогда получается, что на множестве триангуляций действует свободное произведение  $\underbrace{C_2 * \dots * C_2}_n$ .



По-видимому, если ещё подумать, отсюда следует, что вместо всех соотношений грассманиана достаточно проверить соотношения

$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = p_{i,i+1}p_{j,j+1},$$

но я не уверен.

## 2 Определения

### 2.1 Колчаны и кластерные матрицы

**Определение 2.1** (Колчан). Произвольный ориентированный граф  $Q = (V, E)$ , в котором всё разрешено: петли, кратные рёбра, может быть даже бесконечное число вершин или рёбер. . .

**Определение 2.2** (Кластерный колчан). Конечный колчан без петель и рёбер туда-обратно (пары рёбер вида  $i \rightarrow j$  и  $j \rightarrow i$ ).

Кластерные колчаны  $Q$  взаимно однозначно соответствуют кососимметрическим матрицам: колчану  $Q$  отвечает матрица  $B_Q \in M_n(\mathbb{Z})$  (где  $n = |V|$ ):

$$(B_Q)_{i,j} = \begin{cases} \#\{i \rightarrow j\}, & \text{есть стрелки } i \rightarrow j \\ \#\{j \rightarrow i\}, & \text{есть стрелки } j \rightarrow i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Определение 2.3** (Кластерный колчан с замороженными вершинами). Кластерный колчан на  $m$  вершинах, где первые  $n \leq m$  вершин называются *незамороженными*, а последние  $m - n$  вершин называются *замороженными*, и между ними нет рёбер.

На матричном языке кластерный колчан с замороженными вершинами изображают в виде матрицы  $\tilde{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ , где  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ , и  $B \in M_n(\mathbb{Z})$  кососимметрическая, а  $C \in M_{(m-n) \times n}(\mathbb{Z})$  — любая.

Теоретически можно было бы считать, что кластерному колчану с замороженными вершинами отвечает кососимметрическая матрица из  $M_m(\mathbb{Z})$ , где правый нижний квадрат  $(m - n) \times (m - n)$  нулевой, но так уже не поступить с обобщением данного понятия — *кластерными матрицами*, которые мы определим чуть позже.

Пусть  $Q$  — конечный кластерный колчан,  $1 \leq i \leq n$  — незамороженная вершина.

**Определение 2.4** (Мутация  $Q$  в вершине  $i$ ). На колчанном языке это новый колчан  $M_i(Q)$ , в котором множество вершин то же самое, а множество рёбер претерпевает следующие изменения:

1. Для каждой пары вершин  $k, \ell$ , таких, что есть рёбра  $k \rightarrow i \rightarrow \ell$ , добавляем ребро  $k \rightarrow \ell$  (если рёбер  $k \rightarrow i$  всего  $n_k$  штук, а рёбер  $i \rightarrow \ell$  всего  $n_\ell$  штук, то мы добавим  $n_k \cdot n_\ell$  рёбер).
2. Разворачиваем стрелки, инцидентные  $i$ .
3. Стираем всевозможные противонаправленные пары (если было  $n$  рёбер в одну сторону, и  $m$  в другую, то останется  $|n - m|$  понятно в какую сторону).

На матричном языке мутация выглядит так: из  $B_Q = (b_{ij})$  получается  $B_{M_i(Q)} =: M_i(B_Q) = (b'_{ij})$ :

$$b'_{pq} = \begin{cases} -b_{pq}, & i = p \text{ или } i = q \\ b_{pq} + b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} > 0 \\ b_{pq} - b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} < 0 \\ b_{pq}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (\Delta)$$

*Замечание.* Это инволюция: две мутации подряд в одной и той же вершине не меняют колчан.

*Пример.* Пусть  $v$  — сток или исток. Мутация в вершине  $v$  — разворот рёбер, инцидентных  $v$ .

**Упражнение 2.1.** Если  $Q$  — дерево на  $n$  вершинах, то мутациями в истоках и стоках можно получить любую ориентацию всех  $n - 1$  рёбер.

Этот факт известен даже среди алгебраистов, и отвечает следующему утверждению: категории модулей над некоторыми конечномерными алгебрами почти эквивалентны в некотором смысле, **вроде так**.

Однако если делать мутации не в источниках и стоках, то даже какой-нибудь путь может претерпевать очень значительные изменения. Тем не менее, верен следующий факт:

*Интересный факт.* Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  — два кластерных колчана без ориентированных циклов на одном множестве вершин. Предположим, что они эквивалентны: существует последовательность мутаций, превращающих один в другой. Тогда  $Q_2$  получается из  $Q_1$  только при помощи мутаций в источниках и стоках. В частности, они изоморфны как неориентированные графы.

Что любопытно, комбинаторное доказательство этой теоремы неизвестно, а вот с помощью кластерных категорий доказательство существует уже давно.

**Определение 2.5** (Матрица  $B' \in M_n(\mathbb{Z})$  кососимметризуема). Существуют  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  при  $d_i > 0$  и кососимметричная  $B \in M_n(\mathbb{Z})$ :  $B'D = DB$ .

Говоря русским языком, кососимметричная матрица с точностью до перемасштабирования строк **Что? Вроде же с точностью до сопряжения...**

**Определение 2.6** (Кластерная матрица).  $\tilde{B} \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ , такая что верхний квадрат  $n \times n$  — кососимметризуемая матрица, а нижний прямоугольник — любая.

Мутацию в незамороженной вершине  $1 \leq i \leq n$  кластерной матрицы определим по формуле( $\Delta$ ).

**Утверждение 2.1.** Мутация по-прежнему инволюция; кососимметризуемость верхнего квадрата сохраняется после мутации;  $M_i$  коммутирует с транспонированием  $B \mapsto B^t$  и разворотом всех рёбер  $B \mapsto -B$ . Если  $b_{ij} = b_{ji} = 0$ , то мутации  $M_i$  и  $M_j$  коммутируют при действии на даунную кластерную матрицу.

*Доказательство.* Не совсем очевидно, но проверяется в лоб. □

## 2.2 Кластерная алгебра

Обозначим через  $T_n$  регулярное дерево степени  $n$  с неориентированными рёбрами, покрашенными числами  $1, \dots, n$ . Иными словами, граф Кэли для  $\underbrace{C_2 * \dots * C_2}_n$ . Отметим некоторую вершину  $t_0$ .

Теперь пусть  $K$  — поле,  $\tilde{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$  — кластерная матрица. Для определения кластерной алгебры нам потребуется следующий набор данных:

- Отображение, сопоставляющее каждой вершине  $T_n$  по кластерной матрице  $m \times n$ , такое что для любых вершин  $t_1$  и  $t_2$ , соединённых ребром цвета  $i$ , выполнено соотношение  $B(t_2) = M_i(B(t_1))$ . Ясно, что задать такое отображение — всё равно, что задать кластерную матрицу для  $t_0$ , остальные определяются однозначно.
- Отображение  $x : V(T_n) \rightarrow K(x_1, \dots, x_m)^m$ . Вектор  $x(t) = (x_1^t, \dots, x_m^t)$  называется *расширенным кластером* в вершине  $t$ , а совокупность всех элементов всех векторов зовётся *кластерными переменными*. Первые  $n$  переменных расширенного кластера формируют обычный *кластер*. При этом  $x(t_0) = (x_1, \dots, x_m)$ , и опять же имеется связь между значениями в соседних вершинах: если вершины  $t$  и  $t'$  соединены ребром цвета  $i$ ,  $x(t) = y, x(t') = y'$ , и в вершине  $i$  стоит матрица  $B(t) = (b_{ij})$  то при  $j \neq i$ :  $y_j = y'_j$ , а при  $j = i$  выполнено соотношение:

$$y_i y'_i = \prod_{b_{ki} > 0} y_j^{b_{ki}} + \prod_{b_{ki} < 0} y_j^{-b_{ki}}.$$

**Определение 2.7** (Кластерная алгебра  $A(B)$ ). Подалгебра в  $K(x_1, \dots, x_m)$ , порождённая кластерными переменными.



И это ещё не самое общее определение, здесь мы определили так называемую *кластерную алгебру геометрического типа*. Но других у нас, вероятно, не будет.

Этот тип называется геометрическим, так как однородное кольцо грассманиана и некоторых других интересных многообразий — такие кластерные алгебры.