

Кластерные алгебры и кластерные категории. Неофициальный конспект

Лектор: Михаил Александрович Антипов
Конспектировал Леонид Данилевич

Весенний семестр 2026 г.

Содержание

1 Примеры	2
1.0 Пентагональная рекуррента	2
1.2 Фризы Кокстера — Конвея	2
1.3 Координаты на грассманиане и триангulationи	4
1.4 Классификация фризов	6
2 Определения	7
2.1 Колчаны и кластерные матрицы	7
2.2 Кластерная алгебра	8
2.3 Эффект лорановости для кластерной алгебры	9

Лекция I

11 февраля 2026 г.

1 Примеры

1.0 Пентагональная рекуррента

Рассмотрим рекурренту $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ с начальными данными $x_1 = x$, $x_2 = y$, заданную соотношениями $x_{i-1}x_{i+1} = x_i + 1$ (где сами $x_i \in K(x, y)$ для некоторого поля K).

Посчитаем первые несколько членов:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= y \\x_3 &= \frac{y+1}{x} \\x_4 &= \frac{x+y+1}{xy} \\x_5 &= \frac{x+1}{y} \\x_6 &= x \\x_7 &= y \\&\vdots\end{aligned}$$

Рекуррента зациклилась за 5 шагов.

Можно пытаться рассматривать вариации этого рекуррентного соотношения. Например, пусть $x_{i-1}x_{i+1} = \begin{cases} x_i^a + 1, & i \text{ чётно} \\ x_i + 1, & i \text{ нечётно} \end{cases}$, где $a \in \mathbb{N}$. Оказывается, такая рекуррента будет периодической только в случаях $a = 1, 2, 3$, и это соответствует тому, что в ранге 2 есть три системы корней — A_2 , $B_2 = C_2$ и G_2 .

Это простейший пример кластерной алгебры: в данном случае имеется кластер из двух переменных, которые по очереди мутируют:

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow (x_3, x_2) \rightsquigarrow (x_3, x_4) \rightsquigarrow (x_5, x_4) \leftrightarrow \dots$$

При этом две мутации одной и той же переменной подряд ничего не меняют.

Эта интерпретация показывает, почему рекуррентное соотношение разное в зависимости от чётности i : имеет значение, которая из двух переменных кластера меняется.

В общем случае вместо такого пути будет регулярное дерево степени n , полное определение мы дадим позже (подраздел 2.2).

1.2 Фризы Кокстера — Конвея

Фризы Кокстера — Конвея — частный случай SL_2 -tilings (SL_2 -замощения?).

Определение 1.1 (SL_2 -замощение). Отображение $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ с условием $f(i+1, j+1)f(i, j) - f(i, j+1)f(i+1, j) = 1$.

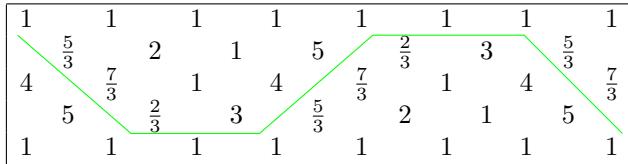
Определение 1.2 (Фриз Кокстера — Конвея ранга n). SL_2 -замощение f такое, что

$$f(i, j) = \begin{cases} 0, & i+j < 0 \\ 1, & i+j = 0 \\ 1, & i+j = n+1 \\ 0, & i+j > n+1 \end{cases}$$

Графически его изображают повёрнутым на 45° , вот так:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & & & \\
 a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & \dots & & \\
 \dots & a_0^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \dots & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 b \\
 a \\
 c \\
 d
 \end{array}
 \quad
 \text{должно быть выполнено } ad - bc = 1$$

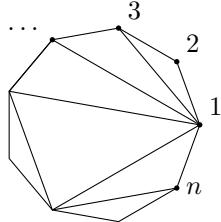
Пример (Фриз ранга 3).



Как видно из картинки, фриз имеет ось скользящей симметрии со сдвигом на $\frac{n+3}{2}$ и переворотом (основания трапеции равны $n+1$ и 2). Позже это будет видно из классификации в 1.4. Ну, надо что-то ещё потребовать, например, положительности всех элементов фриза хватит. А то, кажется, можно при желании составить башню из нескольких фризов произвольного размера, поставленных друг на друга.

Упражнение 1.1 (Эффект лорановости). Построим фриз сверху вниз, заполнив верхнюю строку единицами, следующую — числами a_*^1 произвольно, и выражая элементы снизу через элементы сверху. Тогда если все $a_*^1 \in \mathbb{Z}$, то и все элементы ниже тоже (это верно даже в большей общности: неважно, что это фриз, то есть что на каком-то уровне снизу будет строка единиц, а потом начнутся нули).

Теорема 1.1 (Фриз, построенный по триангуляции). Пусть T — триангуляция правильного n -угольника:



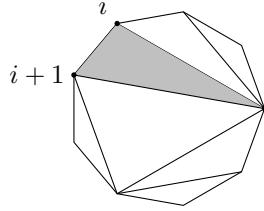
Строчка $a_i^1 \in \mathbb{Z}$ соответствует фризу (то есть через какая-то строчка снизу будет полностью состоять из единиц) тогда и только тогда, когда a_i^1 — количество треугольников, касающихся вершины i (индексы берутся по модулю n). Например, триангуляции на рисунке соответствует фриз

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	2	2	3	1	4	1	1	2	
9	4	1	3	5	2	3	3	1		
7	3	1	7	3	5	2	2	2	4	
3	5	2	2	4	7	3	1	7		
2	3	3	1	9	4	1	3	5		
3	1	4	1	2	5	1	2	2		
1	1	1	1	1	1	1	1	1		

Доказательство в более простую сторону. Рассмотрим двудольный граф Γ . В левой доле n вершин, соответствующих вершинам многоугольника, а в правой — $n+1$ вершина, соответствующая треугольнику. Проведём ребро, если вершина является вершиной треугольника.

Пусть m_{ij} — количество совершенных паросочетаний (из $n+1$ ребра), где в левой доле взяты все вершины, кроме i и j .

Ясно, что $m_{i,i+1} = 1$: это ребро какого-то треугольника, значит, этот треугольник берётся в паросочетание вместе с оставшейся третьей вершиной; после этого многоугольник разваливается на два, и дальше опять же все по индукции предопределено однозначно:



Аналогично проверяется, что $m_{i-1,i+1} = a_i^1$ (i -я вершина стоит в паре с любым из инцидентных ей треугольников, после чего остальное предопределено однозначно).

Осталось применить лемму о конденсации, доказательством которой мы утруждать себя не будем:

Лемма 1.1 (О конденсации). *Пусть Γ — плоский двудольный граф с левой долей V_1 и правой V_2 , причём $|V_1| = |V_2| + 2$. Пусть $i, j \in V_1$. Обозначим через m_{ij} количество совершенных паросочетаний между $V_1 \setminus \{i, j\}$ и V_2 . Если $a, b, c, d \in V_1$ лежат на грани данного графа в этом циклическом порядке (i , разумеется, между ними при обходе грани есть ещё какие-то вершины графа), то выполнено соотношение*

$$m_{ab}m_{cd} + m_{bc}m_{ad} = m_{ac}m_{bd}$$

□

Соотношение из леммы о конденсации напоминает теорему Птолемея из школьной планиметрии:

Интересный факт (Теорема Птолемея). У вписанного четырёхугольника произведение длин диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Также такой вид имеют соотношения в грассманиане.

1.3 Координаты на грассманиане и триангуляции

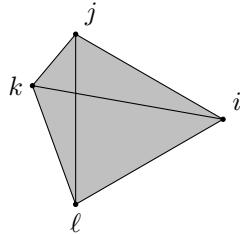
Пусть K — поле. Вспомним грассманиан $\text{Gr}(k, n)$ — многообразие, параметризующее k -мерные подпространства в n -мерии (например, в пространстве строк ${}^n K$).

Грассманиан удобно представлять себе, как множество матриц $M_{k \times n}(K)$ с точностью до действия $\text{GL}_k(K)$ умножениями слева.

Однородными координатами на грассманиане служат значения миноров $k \times k$, на которые накладываются соотношения Плюккера. В случае $k = 2$ эти соотношения выглядят следующим образом:

$$p_{ik}p_{j\ell} = p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell} \tag{*}$$

где $i < j < k < \ell$, а $p_{ij} = p_{ji}$ равен значению квадратного минора из i -го и j -го столбца. Иными словами, для матрицы x : $p_{ij} = x_{1,\min(i,j)}x_{2,\max(i,j)} - x_{1,\max(i,j)}x_{2,\min(i,j)}$. Изображая это правило на картинке, получаем правило Птолемея:



Из картинки ясно, что на самом деле имеет значение только циклический порядок индексов $i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Лекция II

18 февраля 2026 г.

Размерность многообразия $\mathrm{Gr}(2, n)$ равна $2n - 4$, а размерность Крулля однородного координатного кольца $K[\mathrm{Gr}(2, n)] = K[p_{ij}]/(\star)$ на единичку больше, значит, $2n - 3$.

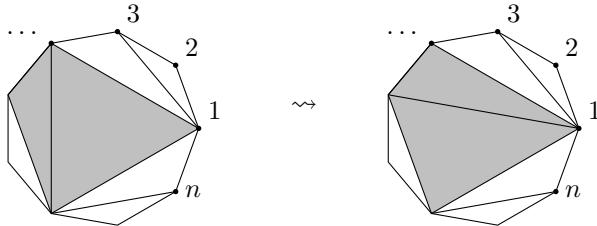
Определение 1.3 (Матрица $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ вполне положительна). Все миноры A положительны.

Заинтересуемся схожим вопросом: когда все миноры 2×2 в матрице $2 \times n$ положительны? Более точно, сколько миноров надо проверить на положительность, чтобы положительность остальных последовала?

Из описания координатного кольца грассмана ясно, что миноры матрицы — любые $p_{ij} \in K$, удовлетворяющие соотношениям (\star) . Так как $\dim \mathbb{R}[\mathrm{Gr}(2, n)] = 2n - 3$, то такова и степень трансцендентности его поля частных, откуда ответ хотя бы $2n - 3$. Это видимо не совсем строгое утверждение, так как \mathbb{R} не алгебраически замкнуто. С другой стороны, эта оценка достигается:

Предложение 1.1. Пусть T — триангуляция правильного n -угольника (множество неупорядоченных пар вершин, соединённых ребром, в том числе пары соседних вершин). Пусть $P := \{p_{ij} \mid (i, j) \in T\}$. Тогда любой p_{rs} выражается в виде некоторой рациональной функции от элементов P с положительными коэффициентами. В частности, положительность элементов P повлечёт положительность всех миноров 2×2 .

Доказательство. Рассмотрим граф, вершины которого — триангуляции n -угольника, а рёбра соответствуют флипам следующего вида:



А именно, любая хорда триангуляции является ребром двух смежных треугольников, в объединении дающих четырёхугольник. Назовём *флипом* замену данной хорды триангуляции на другую диагональ четырёхугольника. Кстати, этот граф является оствомом $(n - 3)$ -мерного ассоциэдра.

Ясно, что любая хорда n -угольника лежит в какой-то триангуляции. Без доказательства утверждается, что граф триангуляций связан. Начнём с триангуляции T , и, применяя флипы, дойдём до триангуляции, содержащей хорду $r - s$. Легко видеть, что p_{ik} , где $i - k$ — хорда, появляющаяся после флипа, выражается через остальные $p_{j\ell}$, отвечающие хордам, присутствовавшим до флипа:

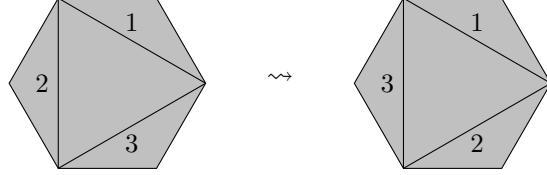
$$p_{ik} = \frac{p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell}}{p_{j\ell}}$$
□

Эту теорему можно пытаться обобщать на разные интересные случаи — рассматривать не только триангуляции, или скажем работать не на плоскости (или её компактификации — сфере), а на поверхности с большим числом ручек. Впрочем, начиная с некоторого места она уже перестаёт быть верной.

Ещё пару слов про флипы и триангуляции: можно считать, что диагонали пронумерованы от 1 до $n - 3$, и при флипе новая диагональ нумеруется тем числом, что было написано на стираемой. Тогда получается, что на множестве триангуляций действует свободное произведение $\underbrace{C_2 * \dots * C_2}_n$.

Действие, разумеется, не свободное. Например, флипы диагоналей, далеко друг от друга отстоящих, коммутируют. Сами пометки на диагоналях тоже могут перемещаться:

Упражнение 1.2. Получите последовательностью пяти флипов из одной триангуляции шестиугольника другую:

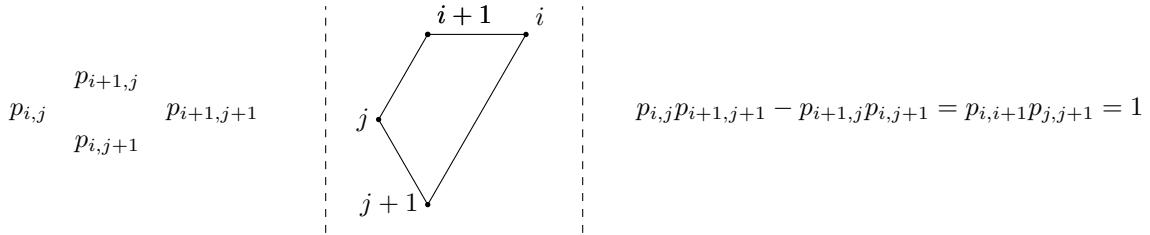


1.4 Классификация фризов

Пусть $p \in \text{Gr}(2, n)$ — точка с однородными координатами p_{ij} ; предположим, что для всех $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $p_{i,i+1} = 1$. Можно составить фриз из координат этой точки следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & p_{1,3} & & p_{2,4} & & p_{3,5} & & \\ p_{n,3} & & p_{1,4} & & p_{2,5} & & p_{3,6} & \\ \dots & & p_{n,4} & & p_{1,5} & & p_{2,6} & \dots \\ & & & & \ddots & & & \\ & p_{?,?-2} & & p_{?+1,?-1} & & p_{?+2,?} & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

SL_2 -соотношения выполнены, так как в них превращается соотношение (*):



Обратно, если есть некоторый фриз, то можно построить числа p_{ij} , удовлетворяющие соотношениям Плюккера: пройдём зигзагом вниз по фризу, и положим значения координат, соответствующим зигзаг-триангуляции, равными q_i , а остальные восстановим как в (предложение 1.1).

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & q_1 & \square & \square & \square & \square & & \\ q_2 & \square & \square & \square & \square & \square & & \\ \dots & q_3 & \square & \square & \square & & \dots & \\ & & \ddots & & & & & \\ & q_{n-3} & \square & \square & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \end{array} \quad \text{Diagram of a hexagon with a zigzag triangulation corresponding to the values } q_i.$$

Далее остальные значения во фризе восстанавливаются однозначно из SL_2 -соотношений, и в силу выше построенного примера, они все будут иметь вид p_{ij} . Единственность на самом деле имеет место чуть более слабая — например, она есть если все $q_i > 0$ — тогда предложение 1.1 говорит, что все полученные координаты будут положительными. Значит, на самом деле фриз однозначно восстанавливается по q_i и на некотором открытом по Зарисскому множестве.

Замечание. Отсюда получается, что при условии $p_{i,i+1} = 1$ для всех $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ точка лежит на грассманнане, если выполнены уравнения

$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = 1.$$

По-видимому, если ещё подумать, отсюда следует, что вместо всех соотношений грассмана достаточно проверять соотношения

$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = p_{i,i+1}p_{j,j+1},$$

но я не уверен.

2 Определения

2.1 Колчаны и кластерные матрицы

Определение 2.1 (Колчан). Произвольный ориентированный граф $Q = (V, E)$, в котором всё разрешено: петли, кратные рёбра, может быть даже бесконечное число вершин или рёбер...

Определение 2.2 (Кластерный колчан). Конечный колчан без петель и рёбер туда-обратно (пары рёбер вида $i \rightarrow j$ и $j \rightarrow i$).

Кластерные колчаны Q взаимно однозначно соответствуют кососимметрическим матрицам: колчану Q отвечает матрица $B_Q \in M_n(\mathbb{Z})$ (где $n = |V|$):

$$(B_Q)_{i,j} = \begin{cases} \#\{i \rightarrow j\}, & \text{есть стрелки } i \rightarrow j \\ \#\{j \rightarrow i\}, & \text{есть стрелки } j \rightarrow i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Определение 2.3 (Кластерный колчан с замороженными вершинами). Кластерный колчан на N вершинах, где первые $n \leq N$ вершин называются *незамороженными*, а последние $N - n$ вершин называются *замороженными*, и между ними нет рёбер.

На матричном языке кластерный колчан с замороженными вершинами изображают в виде матрицы $\tilde{B} \in M_{N \times n}(\mathbb{Z})$, где $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, и $B \in M_n(\mathbb{Z})$ кососимметрическая, а $C \in M_{(N-n) \times n}(\mathbb{Z})$ — любая.

Теоретически можно было бы считать, что кластерному колчану с замороженными вершинами отвечает кососимметрическая матрица из $M_N(\mathbb{Z})$, где правый нижний квадрат $(N - n) \times (N - n)$ нулевой, но так уже не поступить с обобщением данного понятия — *кластерными матрицами*, которые мы определим чуть позже.

Пусть Q — конечный кластерный колчан, $1 \leq i \leq n$ — незамороженная вершина.

Определение 2.4 (Мутация Q в вершине i). На колчанном языке это новый колчан $M_i(Q)$, в котором множество вершин то же самое, а множество рёбер претерпевает следующие изменения:

1. Для каждой пары вершин k, ℓ , таких, что есть рёбра $k \rightarrow i \rightarrow \ell$, добавляем ребро $k \rightarrow \ell$ (если рёбер $k \rightarrow i$ всего n_k штук, а рёбер $i \rightarrow \ell$ всего n_ℓ штук, то мы добавим $n_k \cdot n_\ell$ рёбер).
2. Разворачиваем стрелки, инцидентные i .
3. Стираем всевозможные противонаправленные пары (если было m рёбер в одну сторону, и ℓ в другую, то останется $|m - \ell|$ понятно в какую сторону).

На матричном языке мутация выглядит так: из $B_Q = (b_{ij})$ получается $B_{M_i(Q)} =: M_i(B_Q) = (b'_{ij})$:

$$b'_{pq} = \begin{cases} -b_{pq}, & i = p \text{ или } i = q \\ b_{pq} + b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} > 0 \\ b_{pq} - b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} < 0 \\ b_{pq}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (\Delta)$$

Замечание. Это инволюция: две мутации подряд в одной и той же вершине не меняют колчан.

Пример. Пусть v — сток или исток. Мутация в вершине v — разворот рёбер, инцидентных v .

Упражнение 2.1. Если Q — дерево на n вершинах, то мутациями в истоках и стоках можно получить любую ориентацию всех $n - 1$ рёбер.

Этот факт известен даже среди алгебраистов, и отвечает следующему утверждению: категории модулей над некоторыми конечномерными алгебрами почти эквивалентны в некотором смысле, [вроде так](#).

Однако если делать мутации не в источниках и стоках, то даже какой-нибудь путь может претерпевать очень значительные изменения. Тем не менее, верен следующий факт:

Интересный факт. Пусть Q_1 и Q_2 — два кластерных колчана без ориентированных циклов на одном множестве вершин. Предположим, что они эквивалентны: существует последовательность мутаций, превращающих один в другой. Тогда Q_2 получается из Q_1 только при помощи мутаций в источниках и стоках. В частности, они изоморфны как неориентированные графы.

Что любопытно, комбинаторное доказательство этой теоремы неизвестно, а вот с помощью кластерных категорий доказательство существует уже давно.

Определение 2.5 (Матрица $B' \in M_n(\mathbb{Z})$ кососимметризуема). Существуют $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ при $d_i > 0$ и кососимметричная $B \in M_n(\mathbb{Z})$: $B'D = DB$.

Определение 2.6 (Кластерная матрица). $\tilde{B} \in M_{N,n}(\mathbb{Z})$, такая что верхний квадрат $n \times n$ — кососимметризуемая матрица, а нижний прямоугольник — любая.

Мутацию в незамороженной вершине $1 \leq i \leq n$ кластерной матрицы определим по формуле (Δ) .

Утверждение 2.1. Мутация по-прежнему инволюция; кососимметризуемость верхнего квадрата сохраняется после мутации; M_i коммутирует с транспонированием $B \mapsto B^t$ и разворотом всех рёбер $\tilde{B} \mapsto -\tilde{B}$. Если $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то $M_i(M_j(\tilde{B})) = M_j(M_i(\tilde{B}))$.

Доказательство. Не совсем очевидно, но проверяется в лоб. □

2.2 Кластерная алгебра

Обозначим через T_n регулярное дерево степени n с неориентированными рёбрами, покрашенными числами $1, \dots, n$. Иными словами, граф Кэли для $\underbrace{C_2 * \dots * C_2}_n$. Отметим некоторую вершину t_0 .

Теперь пусть K — поле, $\tilde{B} \in M_{N \times n}(\mathbb{Z})$ — кластерная матрица. Для определения кластерной алгебры нам потребуется следующий набор данных:

- Отображение \tilde{B} , сопоставляющее каждой вершине T_n по кластерной матрице $N \times n$, такое что для любых вершин t_1 и t_2 , соединённых ребром цвета i , выполнено соотношение $\tilde{B}(t_2) = M_i(\tilde{B}(t_1))$. Ясно, что задать такое отображение — всё равно, что задать *начальную кластерную матрицу* $\tilde{B}(t_0)$, остальные определяются однозначно.
- Отображение $x : V(T_n) \rightarrow K(x_1, \dots, x_N)^N$. Вектор $x(t) = (x_1^t, \dots, x_N^t)$ называется *расширенным кластером* в вершине t , а совокупность всех элементов всех векторов зовётся *кластерными переменными*. Первые n переменных расширенного кластера формируют обычный *кластер*. При этом $x(t_0) = (x_1, \dots, x_N)$ — *начальный кластер*, и опять же имеется связь между значениями в соседних вершинах: если вершины t и t' соединены ребром цвета i , $x(t) = y, x(t') = y'$, и в вершине i стоит матрица $B(t) = (b_{ij})$ то при $j \neq i$: $y_j = y'_j$, а при $j = i$ выполнено соотношение:

$$y_i y'_i = \prod_{b_{ki} > 0} y_k^{b_{ki}} + \prod_{b_{ki} < 0} y_k^{-b_{ki}}. \quad (\leftrightarrow)$$

Так как при мутации в вершине i элементы соответствующих строки и столбца кластерной матрицы меняют знаки, это соотношение не зависит от того, какой из концов ребра мы назначаем в качестве t , а какой — в качестве t' .

Пару $(x(t_0), \tilde{B}(t_0))$ называют *кластерным зерном* (cluster seed).

Определение 2.7 (Кластерная алгебра $A(B)$). Подалгебра в $K(x_1, \dots, x_N)$, порождённая кластерным переменными.

И это ещё не самое общее определение, здесь мы определили так называемую *кластерную алгебру геометрического типа*. Но других у нас, вероятно, не будет.

Этот тип называется геометрическим, так как однородное кольцо грассмана и некоторых других интересных многообразий — такие кластерные алгебры.

Лекция III

25 февраля 2026 г.

На самом деле, условие кососимметризуемости не особо существенно, мы будем использовать только кососимметричность по знаку: $\text{sgn}(b_{ij}) = -\text{sgn}(b_{ij})$. На кососимметризуемые матрицы можно смотреть, как на класс кососимметричных по знаку матриц, замкнутых относительно мутаций.

2.3 Эффект лорановости для кластерной алгебры

Замечание. Соотношение (\leftrightarrow) ещё можно переписать в виде

$$y_i y'_i = \prod_{b_{ki} > 0} y_k^{b_{ki}} \left(1 + \prod_k y_k^{-b_{ki}} \right).$$

Замечание. В кластерную алгебру A , задаваемую зерном (X, \tilde{B}) , можно добавлять или убирать (подставляя $x_i := 1$) замороженные переменные. При этом для согласованности надо также добавлять или убирать строки в \tilde{B} .

Замечание. Также можно замораживать ранее незамороженные переменные, стирая при этом соответствующий столбец матрицы \tilde{B} .

Теорема 2.1 (Эффект лорановости). Пусть $M = \left\{ \prod_{a_i \geq 0} x_i^{a_i} \right\}$ — мультипликативная система всех мономов кольца многочленов. Утверждается, что $A \subset L := M^{-1}K[x_1, \dots, x_N]$. Иными словами, любая кластерная переменная — ряд Лорана относительно переменных начального (отсюда ясно, что на самом деле любого) кластера.

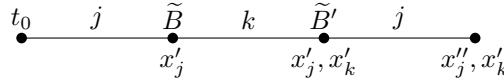
Доказательство. Доказательство не особо идейное, надо просто проверить, что все детали определения хорошо придуманы.

Пусть $X = (x_1, \dots, x_N)$ — начальный кластер. Любой другой кластер имеет вид $M_{i_s} \cdot \dots \cdot M_{i_1}(X)$. Доказывать будем индукцией по s .

База: $s = 1$ ясно, и на самом деле ясно даже $s = 2$: $M_j(M_i(X))$ при $j \neq i$ — рациональная функция от переменных начального кластера с делением только на мономы от них самих.

Переход: Рассмотрим несколько случаев.

- Пусть $s = 3$, $i_1 = i_3 = j$, $i_2 = k$:



Для некоторых мономов M_i

$$x'_j = \frac{M_1 + M_2}{x_j}, \quad x'_k = \frac{M_3 + M_4}{x_k}, \quad x''_j = \frac{M_5 + M_6}{x'_j} = \frac{M_5 + M_6}{M_1 + M_2} x_j.$$

Значит, достаточно проверить, что в L : $M_5 + M_6$ делится на $M_1 + M_2$.

Без потери общности $b_{jk} > 0$ (если одновременно поменять все знаки элементов \tilde{B} , то кластерные переменные останутся прежними; если же $b_{jk} = 0$, то M_j и M_k коммутируют, и доказывать нечего).

В L имеет место ассоциированность $x'_j \sim M_1 + M_2 \sim \prod_i x_i^{b_{ij}} + 1 =: P$. Далее работаем по модулю P , так как нас интересует делимость на P .

$$x'_k = \frac{1}{x_k} \left((x'_j)^{b_{jk}} \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}} \right) \equiv \frac{1}{x_k} \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}} \pmod{P}$$

Далее

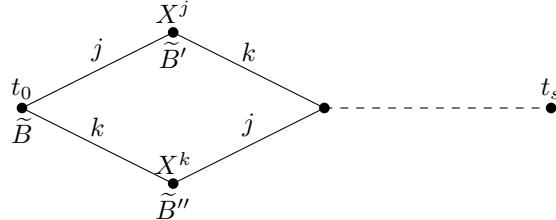
$$\begin{aligned} M_5 + M_6 &\sim (x'_k)^{b'_{kj}} \left(\prod_{i \neq k} x_i^{b'_{ij}} + 1 \right) \equiv \\ &\quad \text{подставляем определение } x'_k \text{ и } b'_{*,j} \\ &\equiv \left(\frac{1}{x_k} \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}} \right)^{b'_{kj}} \left(\prod_{i \neq k} x_i^{b'_{ij}} + 1 \right). \end{aligned}$$

В правой части получилось в точности $\frac{x'_k}{x_k} \equiv 0 \pmod{P}$, так как из-за условия $b_{kj} < 0$ по определению мутации $b'_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - b_{ik}b_{kj}, & b_{ik} < 0 \\ b_{ij}, & b_{ik} \geq 0 \end{cases}$ при $i \neq k$ (ну, и $b'_{kj} = -b_{kj}$).

- Теперь общий случай. Индукционное предположение говорит, что меньше чем за s шагов эффект лорановости сохраняется для **любой** кластерной алгебры.

Пусть по-прежнему $i_1 = j$, $i_2 = k$.

- Если $b_{jk} = b_{kj} = 0$, то первые две мутации коммутируют:



Применяя индукционное предположение для двух путей, стартующих в соседях t_0 с рисунка, получаем два представления для любой переменной x в кластере t_s вида

$$x = \ell_j(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_N) = \ell_k(x_1, \dots, x'_k, \dots, x_N),$$

где ℓ_j, ℓ_k — некоторые лорановские многочлены. Пусть $x'_j = M_1 + M_2$ и $x'_k = M_3 + M_4$. Получается,

$$x = \frac{\ell'_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{(M_1 + M_2)^{n_j}} = \frac{\ell'_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_N)}{(M_3 + M_4)^{n_k}}.$$

Кольцо многочленов факториально, значит достаточно проверить взаимную простоту $M_1 + M_2$ и $M_3 + M_4$. Однако в общем случае это ничуть неверно: например, вполне может статься $M_1 = M_3$ и $M_2 = M_4$.

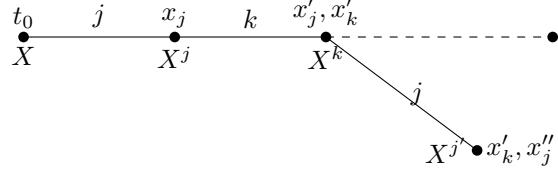
Придётся немного изменить аргумент: введём новую замороженную переменную x_{N+1} , добавляя в \tilde{B} строчку $e^j = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)$ (на j -м месте единичка, остальные нули).

Теперь $M_1 + M_2 = x_{N+1} \tilde{M}_1 + M_2$, и $M_3 + M_4$ прежний. Значит, $M_1 + M_2$ линеен по x_{N+1} , следовательно это произведение какого-то неприводимого многочлена и монома. Однако

$M_3 + M_4$ не содержит x_{N+1} , откуда получается $\gcd(M_1 + M_2, M_3 + M_4)$ — какой-то моном (или просто 1, если смотреть с точностью до ассоциированности в кольце лорановских многочленов)

Осталось специализировать $x_{N+1} := 1$.

- Теперь считаем, что $b_{jk} \neq 0$ (без потери общности $b_{jk} < 0$). Изобразим помимо основного пути ещё ответвление цвета j от t_2 :



Может статься, что $i_3 = j$, это ничему не помешает.

Применим дважды индукционное предположение, для путей меньшей длины, исходящих из вершин с начальными кластерами X^j и $X^{j'}$, получим $x = \frac{\ell_j(x_1, \dots, x_N)}{(x'_j)^{n_j}} = \frac{\ell_k(x_1, \dots, x_N)}{(x'_k)^{n_k} \cdot (x''_j)^{n_j}}$.

Аналогично предыдущему пункту, введём новые переменные x_q и x_r , и добавим соответствующие им строки: q -ю равной e^j и r -ю равной e^k . Докажем, что после добавления новых переменных $\gcd(x'_j, x'_k) = \gcd(x'_j, x''_j) = 1$.

$$\begin{array}{c} j \quad k \\ j \quad \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{M_j} \quad \begin{pmatrix} j & k \\ 0 & b \\ -c & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{M_k} \quad \begin{pmatrix} j & k \\ 0 & -b \\ c & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ x'_j = \frac{(x_k)^c x_q M_1 + M_2}{x_j} \quad x'_k = \frac{(x'_j)^b x_r M_3 + M_4}{x_k} \quad x''_j = \frac{x_q M_5 + x_k^c M_6}{x'_j} \end{array}$$

x'_k линеен по x_r , значит неприводим в кольце лорановских многочленов. x'_j не содержит переменной x_r , значит, $x'_j x'_k \not\in x'_k$, откуда $\gcd(x'_j, x'_k) = 1$. Ранее доказали, что x''_j — лорановский многочлен. Если предположить, что он не взаимно прост с (неприводимым с точностью до монома) x'_j , то получится, что числитель $x_q M_5 + x_k^c M_6$ делится как минимум на квадрат x'_j . Но они оба линейны по x_q , противоречие. \square

Упражнение 2.2. На самом деле, $A \subset \widetilde{M}^{-1} K[x_1, \dots, x_N]$, где \widetilde{M} — мономы от незамороженных переменных.

Указание: хватит простой индукции: надо проверить, что степень вхождения замороженных переменных в кластерные нулевая.

Можно задать вопрос, какого вида будут соответствующие лорановские многочлены. Некоторое время стояла гипотеза, что все коэффициенты положительны (в определении кластерной алгебры вычитаний никаких нет, но есть сокращение дробей; скажем, $\frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2 - xy + y^2$). Ради этого ввели кластерные категории, но в данном случае мощь алгебры оказалась неоправданной: теперь есть и комбинаторное доказательство.