

# Алгебра. Неофициальный конспект

Лектор: Алексей Владимирович Степанов  
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

# Оглавление

<b>1 Гомологическая алгебра</b>	<b>2</b>
1.1 Абелевы категории . . . . .	2
1.2 Комплексы . . . . .	4
1.2.1 Морфизмы комплексов . . . . .	5
1.3 Гомология . . . . .	6
1.3.1 Гомологии окружности . . . . .	7
1.3.2 Длинная точная последовательность гомологий . . . . .	8
1.4 Функторы между абелевыми категориями . . . . .	10
1.4.1 Точные и полуточные функторы . . . . .	10
1.4.2 Гомотопность морфизмов комплексов . . . . .	12
1.5 Проективные резольвенты . . . . .	13
1.6 Левый производный функтор . . . . .	14
1.6.1 Длинная точная последовательность левых производных функторов . . . . .	17
1.6.2 Связанные последовательности функторов . . . . .	19
1.7 Производные функторы для $\otimes$ . . . . .	20
1.8 Производные функторы для Hom . . . . .	21
1.8.1 Инъективные резольвенты . . . . .	21
1.8.2 О расширениях модулей и Ext <sup>1</sup> . . . . .	22
1.9 Гомологии и когомологии групп . . . . .	23
<b>2 Теория Галуа</b>	<b>25</b>
2.1 Базовые понятия про расширения полей . . . . .	25
2.1.1 Лемма о простых расширениях. Алгебраические и трансцендентные элементы . . . . .	25
2.1.2 Конечные и алгебраические расширения . . . . .	26
2.1.3 Алгебраическое замыкание одного поля в другом . . . . .	26
2.1.4 Базис трансцендентности . . . . .	27
2.2 Построение полей . . . . .	27
2.2.1 Поле разложения . . . . .	27
2.2.2 Конечные поля . . . . .	28
2.2.3 Алгебраическая замкнутость поля и алгебраическое замыкание . . . . .	29
2.3 Сепарабельность . . . . .	32
2.4 Расширения Галуа . . . . .	33
2.4.1 Теорема о количестве вложений . . . . .	33
2.4.2 Лемма Артина . . . . .	34
2.4.3 Теорема о характеризации расширений Галуа . . . . .	35
2.4.4 Характеризация сепарабельных расширений . . . . .	36
2.5 Соответствие Галуа . . . . .	36
2.6 Применения теории Галуа . . . . .	38
2.6.1 Разрешимые группы и субнормальные ряды . . . . .	38
2.6.2 Основная теорема алгебры . . . . .	39
2.6.3 Теорема Абеля — Руффини о разрешимости в радикалах . . . . .	40

# Глава 1

## Гомологическая алгебра

### Лекция I 12 февраля 2024 г.

#### 1.1 Абелевы категории

Напомним некоторые определения из предыдущей лекции.

**Определение 1.1.1** (Предаддитивная категория  $\mathcal{A}$ ).  $\forall A, B \in \mathcal{A} : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$  образует абелеву группу, и везде, где определена, выполнена дистрибутивность:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

**Определение 1.1.2** (Бипроизведение  $A, B \in \mathcal{A}$ ). Такая диаграмма  $A \xleftarrow[i_1]{\pi_1} C \xrightarrow[i_2]{\pi_2} B$ , что

1.  $\pi_1 i_1 = \text{id}_A$ .
2.  $\pi_2 i_2 = \text{id}_B$ .
3.  $i_2 \pi_2 + i_1 \pi_1 = \text{id}_C$ .
4.  $\pi_2 i_1 = 0$ .
5.  $\pi_1 i_2 = 0$ .

**Определение 1.1.3** (Аддитивная категория). Предаддитивная категория с финальным объектом и производениями (любых двух объектов).

Эквивалентно, существуют инициальный объект и копроизведения, эквивалентно существуют нулевой объект и бипроизведения.

**Определение 1.1.4** (Предабелева категория). Аддитивная категория, в которой у всех морфизмов есть ядро и коядро.

**Определение 1.1.5** ((Ко)нормальный мономорфизм (эпиморфизм)). Он является (ко)эквалайзером (какой-то, неважно какой, пары стрелок).

**Определение 1.1.6** (Абелева категория). Предабелева категория, в которой все мономорфизмы нормальны.

Пусть  $\mathcal{C}$  — категория. Вспомним про категорию стрелок  $\text{Arr}\mathcal{C}$ , в которой объекты — стрелки из  $\text{Mor}(\mathcal{C})$ , множество морфизмов между  $\phi, \psi$  — это

$$\text{Mor}_{\text{Arr}\mathcal{C}}(\phi, \psi) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha : \text{source}(\phi) \rightarrow \text{source}(\psi), \beta : \text{target}(\phi) \rightarrow \text{target}(\psi), \beta\phi = \psi\alpha\}$$

то есть множество коммутативных диаграмм следующего вида:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\phi} & \bullet \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \bullet & \xrightarrow{\psi} & \bullet \end{array}$$

Далее будем обозначать за  $\ker f$  ядро стрелки, как уравнитель стрелки и нуля, а за  $\text{Ker } f := \text{source}(\ker f)$  — объект (в конкретных категориях типа  $\text{mod-}R$  это докатегорное понятие ядра — подмодуль без стрелки-вложения).

**Лемма 1.1.1.**  $\ker, \text{coker}$  — функторы  $\mathcal{Arr}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Arr}\mathcal{A}$  (то есть лемма утверждает, что можно определить действие не только на объектах, но и на морфизмах).

*Доказательство.* Достаточно доказать для ядер, для коядер двойственno.

Определим действие  $\ker$  на морфизмах. Пусть  $(\alpha, \beta)$  — морфизм между  $f, f' \in \mathcal{Arr}\mathcal{A}$ :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \exists! \phi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \text{Ker } f' & \xrightarrow{\ker f'} & A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

Тогда  $f \cdot \ker f = 0$ , откуда  $\beta \cdot f \cdot \ker f = 0$ , а из коммутативности  $f' \cdot \alpha \cdot \ker f = 0$ . По универсальному свойству ядра  $\exists! \phi : \ker f' \cdot \phi = \alpha \cdot \ker f$ , положим  $\ker(\alpha, \beta) = (\phi, \alpha)$ .

Далее несложно проверить, что данное определение сохраняет композицию и  $\text{id}$ .  $\square$

**Определение 1.1.7** (Точный функтор). Функтор, сохраняющий ядра и коядра.

*Интересный факт* (Теорема Фрейда — Митчелла (Freyd — Mitchell)). Для любой малой абелевой категории  $\mathcal{A}$ :  $\exists R \in \mathcal{Ring}$  (необязательно коммутативное кольцо с единицей) и строгий, полный, точный функтор  $\mathcal{A} \rightarrow \text{mod-}R$ .

Иными словами, всякую абелеву категорию можно себе мыслить, как *полную подкатегорию* в категории  $\text{mod-}R$  (то есть категорию  $\mathcal{C}$ , в которой  $\text{Obj } \mathcal{C} \subset \text{Obj mod-}R$ , и  $\forall A, B \in \text{Obj } \mathcal{C} : \text{Mog}_{\mathcal{C}}(A, B) = \text{Mog}_{\text{mod-}R}(A, B)$ ) для некоторого кольца  $R$ . Неформально это означает, что все факты, которые можно доказать для категории модулей, будут верны и для данной абелевой категории. Мы часто будем использовать теорему Фрейда — Митчелла, чтобы доказать какой-то факт про все абелевые категории, используя конкретность категории модулей.

**Предложение 1.1.1.** Для всякого морфизма  $f : A \rightarrow B$  найдётся пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\text{coker } f} & \text{CoKer } f \\ & & \downarrow \text{coker ker } f & & & \uparrow \text{ker coker } f & \\ & & & & & & \\ & & \text{CoKer ker } f & \dashrightarrow^{\exists!} & \text{Ker coker } f & & \end{array}$$

Более того, в абелевой категории эта стрелка — изоморфизм.

*Доказательство.* Само построение пунктирной стрелки легко получается из универсальных свойств ядра и коядра, а доказательство того, что это — изо — непростое.

Из теоремы Фрейда — Митчелла это очевидно: для  $f : A \rightarrow B$ : с одной стороны,  $\text{CoKer ker } f = A / \text{Im}(\ker f) = A / \text{Ker } f$ , а с другой стороны  $\text{Ker coker } f = \text{Ker}(\text{coker } f) = \text{Im}(A)$ , и, конечно,  $\text{Im}(A) \cong A / \text{Ker}(f)$ .

Также это можно обосновать, исходя из эпи-моно разложения, полученного на прошлой лекции. Там было построено, что  $f = \varepsilon \cdot \ker \text{coker } f$  (для какого-то эпиморфизма  $\varepsilon$ ) — эпи-моно разложение.

Двойственno  $f = \mu \cdot \text{coker ker } f$  (для какого-то мономорфизма  $\mu$ ) — тоже эпи-моно разложение, и дальше можно воспользоваться функториальностью эпи-моно разложения:

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & \xrightarrow{\text{ker coker } f} & \bullet \\ & \xrightarrow{\varepsilon} & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \text{id} \uparrow & & \xi \uparrow & \downarrow \zeta & \downarrow \text{id} \\ \bullet & \xrightarrow{\text{coker ker } f} & \bullet & \xrightarrow{\mu} & \bullet \end{array}$$

В его силу найдутся такие стрелки  $\xi$  и  $\zeta$ , что все квадраты коммутативны. Значит,  $\xi$  подходит в качестве пунктирной стрелки в утверждении предложения. При этом  $\xi$  — изо, так как  $\xi\zeta = \text{id}$  (из коммутативности квадратов  $\xi \cdot \text{coker ker } f = \varepsilon$  и  $\zeta \cdot \xi \cdot \text{coker ker } f = \zeta \cdot \varepsilon = \text{coker ker } f$ , но  $\text{coker ker } f$  — эпиморфизм, поэтому  $\zeta \cdot \xi = \text{id}$ ) и  $\zeta\xi = \text{id}$  (аналогично)  $\square$

**Лемма 1.1.2.** *Пусть  $\mathcal{C}$  — полная подкатегория в абелевой категории  $\mathcal{A}$ . Следующие условия равносильны*

- $\mathcal{C}$  является абелевой.
- - $0_{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}$ , здесь, как обычно,  $0_{\mathcal{A}}$  — нулевой объект категории  $\mathcal{A}$ .
  - $\mathcal{C}$  содержит бипроизведение любых двух своих объектов.
  - Ядра и коядра (взятые в  $\mathcal{A}$ ) любых морфизмов из  $\mathcal{C}$  лежат в  $\mathcal{C}$ .

*Доказательство.*

- $\Leftarrow$ . Достаточно проверить все свойства определения абелевой категории. Они все сразу следуют, в частности, любой мономорфизм  $\mu$  в  $\mathcal{C}$  нормален, так как он является ядром  $\text{coker } \mu$  (что следует либо из леммы, доказанной при построении эпи-моно разложения, либо из теоремы Фрейда — Митчелла).
- $\Rightarrow$ . Чуть сложнее, доказывать не будем (и использовать тоже).  $\square$

## 1.2 Комплексы

Если противное не оговорено, то всё происходит в абелевой категории  $\mathcal{A}$ , большими буквами обозначены объекты данной категории, маленькими — морфизмы.

**Определение 1.2.1** (Комплекс). Такая диаграмма, что  $\forall k \in \mathbb{Z} : d_k \cdot d_{k+1} = 0$ .

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{d_n} C_n \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \dots$$

Альтернативно, комплекс можно рассматривать, как функтор из категории  $(\mathbb{Z}, \geq)$  (полученной из частично упорядоченного множества) в  $\mathcal{A}$  (при котором образ композиции любых двух нетождественных морфизмов нулевой). Таким образом, комплексы — полная подкатегория в категории этих функторов.

Ещё один, следующий, взгляд на комплексы работает только для конкретной категории, уже вложенной в  $R$ -модули: в абстрактной категории объекты не сравнимы на  $\leq$ .

**Определение 1.2.2** (Градуированный объект).  $C_{\bullet} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$  с морфизмом  $d : C_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$ , таким, что  $d(C_n) \subset C_{n+p}$  для некоторой фиксированной степени объекта  $p$  (чаще всего она равна  $\pm 1$ ).

Так же, как видно из определения, в данной категории должны быть счётные бипроизведения (прямые суммы), иначе градуированного объекта может не быть.

**Определение 1.2.3** (Дифференциальный модуль). Градуированный объект  $(C_{\bullet}, d)$  со свойством  $d^2 = 0$ .

**Определение 1.2.4** (Комплекс). Дифференциальный модуль степени  $-1$ .

При развороте стрелок получается дифференциальный модуль степени  $+1$ , также известный, как **кокомплекс**:

$$\dots \xleftarrow{d^{n+2}} C^{n+1} \xleftarrow{d^{n+1}} C^n \xleftarrow{d^n} C^{n-1} \xleftarrow{d^{n-1}} \dots$$

*Предостережение.* У кокомплекса несколько другая нумерация стрелок, но мы их практически не будем использовать.

**Определение 1.2.5** (Сдвиг комплекса  $(C_\bullet, d)$  на  $p \in \mathbb{Z}$ ). Комплекс  $(C[p]_\bullet, d[p])$ , где  $C[p]_n = C_{n+p}$  и  $d[p]_n = d_{n+p}$ .

Иногда при сдвиге комплекса определяют  $d[p]_n = (-1)^p d_{n+p}$ , но мы так делать не будем.

## Лекция II

19 февраля 2024 г.

### 1.2.1 Морфизмы комплексов

**Определение 1.2.6** (Морфизм дифференциальных модулей  $\bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$ ). Такое  $f : \bigoplus A_n \rightarrow \bigoplus B_n$ , что  $f(A_n) \subset B_n$ , и диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{d_n^A} & A_n \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ B_{n+1} & \xrightarrow{d_n^B} & B_n \end{array}$$

На языке абелевых категорий, надо рассматривать не одно отображение  $f$ , так как отношение  $f(A_n) \subset B_n$  не выражается, а серию морфизмов  $\{f_n : A_n \rightarrow B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Для всякого морфизма  $f$  коммутативна диаграмма в категории комплексов:

$$\begin{array}{ccc} A[1] & \xrightarrow{d^A} & A \\ \downarrow f[1] & & \downarrow f \\ B[1] & \xrightarrow{d^B} & B \end{array}$$

Если рассматривать комплексы, как функторы из категории  $(\mathbb{Z}, \geq)$ , то морфизмы между комплексами — естественные преобразования между функторами.

**Теорема 1.2.1.** Категория комплексов абелева.

*Доказательство.*

**Лемма 1.2.1.** Если  $\mathcal{C}$  — малая категория,  $\mathcal{A}$  — абелева, то  $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  — тоже абелева категория.

*Доказательство леммы.*

Морфизмы в данной категории — естественные преобразования между функторами, и их сложение устроено поточечно:  $\forall \eta, \zeta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}, \forall A \in \mathcal{A} : (\eta + \zeta)_A = \eta_A + \zeta_A$ .

Нулевой объект — функтор  $\emptyset$ , сопоставляющий каждому объекту  $0_{\mathcal{A}}$ , и каждой стрелке — нуль-стрелку.

Для двух функторов  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  имеется их бипроизведение:  $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(C) = \mathcal{F}(C) \oplus \mathcal{G}(C)$ .

Если  $\eta \in \text{Mor}_{\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  (то есть  $\eta$  — естественное преобразование  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ), то  $(\text{Ker } \eta)(C) = \text{Ker}(\eta_C)$ .

$\text{ker}$  определяется аналогично лемме (лемма 1.1.1). Аналогично с коядрами.

Далее по-хорошему надо проверить, что выполняются все универсальные свойства, и что любой мономорфизм нормален, но мы этого делать не будем.  $\square$

Ссылаемся на (лемма 1.1.2), рассматривая категорию комплексов, как полную подкатегорию в категории функторов. Нулевой объект — комплекс, состоящий из нулей — в категории комплексов имеется. Бипроизведением комплексов  $A_\bullet$  и  $B_\bullet$  является комплекс  $(A \oplus B)_\bullet$ , у которого  $(A \oplus B)_n = A_n \oplus B_n$ , и  $d_n^{A \oplus B} = d_n^A \oplus d_n^B$ :

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_n^A} A_n \xrightarrow{d_{n-1}^A} A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow B_{n+1} \xrightarrow{d_n^B} B_n \xrightarrow{d_{n-1}^B} B_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow A_{n+1} \oplus B_{n+1} \xrightarrow{d_n^{A \oplus B}} A_n \oplus B_n \xrightarrow{d_{n-1}^{A \oplus B}} A_{n-1} \oplus B_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Если  $d_{n-1}^A \cdot d_n^A = 0$ , и  $d_{n-1}^B \cdot d_n^B = 0$ , то (из теоремы Митчелла уж точно очевидно)  $d_{n-1}^{A \oplus B} \cdot d_n^{A \oplus B} = 0$ .

Ядра тоже являются комплексами, так как на языке конкретных категорий это просто подмодули. Двойственно с коядрами.  $\square$

### 1.3 Гомологии

Дифференциал  $d$  по совместительству является морфизмом комплексов  $d : C[1] \rightarrow C$  (по-хорошему,  $C[1]_\bullet \rightarrow C_\bullet$ , но точку будем опускать):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & C_n & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow d_n & & \downarrow d_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ниже мы по произвольному комплексу  $C$  строим новые комплексы.

**Определение 1.3.1** (Циклы). Комплекс  $Z = Z(C) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } d[-1]$ .

В конкретной категории в  $n$ -й компоненте комплекса циклов лежит подмодуль  $C_n$ , при взятии дифференциала обращающийся в нуль:  $Z(C)_n = \text{Ker } d[-1]_n = \text{Ker } d_{n-1} \subset C_n$ .

**Определение 1.3.2** (Границы). Комплекс  $B = B(C) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im } d$ .

В конкретной категории в  $n$ -й компоненте комплекса границ лежит подмодуль  $C_n$ , являющийся образом дифференциала:  $B(C)_n = \text{Im } d_n \subset C_n$ .

Определения циклов и границ имеют смысл и для абстрактных абелевых категорий. В них, *образ* — это ядро коядра:  $\text{Im } \phi \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(\text{coker } \phi)$ . В абелевой категории канонически  $\text{Im } \phi \cong \text{CoIm } \phi \stackrel{\text{def}}{=} \text{CoKer}(\ker \phi)$ , так что образ можно определять и так.

На языке конкретных категорий, так как  $d^2 = 0$ , то  $B_n \subset Z_n$ , и можно определить фактормодуль  $H_n := Z_n / B_n$  — гомологии.

То же самое можно сказать на языке универсальных свойств, хотя в будущем мы, ссылаясь на теорему Митчелла, будем всё писать исключительно в терминах элементов.

*Построение  $H$  в терминах универсальных свойств.* Пусть  $C$  — произвольный комплекс,  $Z = Z(C)$ ,  $B = B(C)$ . Изобразим следующую диаграмму в категории комплексов, где  $z : Z(C) \rightarrow C$  вкладывает ядра, а  $\text{coker } z = b : C[1] \rightarrow B$  — факторизация по этому вложению:

$$\begin{array}{ccccccc} Z[1] & \xrightarrow{z[1]} & C[1] & \xrightarrow{d} & C & \xrightarrow{d[-1]} & C[-1] \\ & & \downarrow b & \searrow \alpha & \uparrow z & & \\ & & B & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\text{coker } \beta} & H \xrightarrow{\quad} 0 \end{array}$$

Так как  $d[-1] \cdot d = 0$ , то можно пропуститься через ядро:  $\exists! \alpha : z \cdot \alpha = d$ .

Далее,  $z \cdot \alpha \cdot z[1] = d \cdot z[1] = 0$ , а так как  $z$  — моно, то  $\alpha \cdot z[1] = 0$ . Значит, можно пропуститься через коядро, то есть  $\exists! \beta : \beta b = \alpha$ . Далее  $H$  определяется, как коядро  $\beta$ .  $\square$

Взятие циклов, границ и гомологий функториально (то есть циклы, границы и даже гомологии являются функторами, бывающими из категорий комплексов в ней же). Например, для морфизма комплексов образуется соответствующий морфизм комплексов их гомологий. Это сразу следует из функториальности взятия ядер и коядер.

**Следствие 1.3.1.** В комплексах  $Z, B, H$  нулевые дифференциалы.

*Доказательство.* Из диаграммы следует, что в комплексе  $Z$  нулевые дифференциалы. Это неудивительно —  $Z$ , как комплекс ядер, имеет дифференциалы, получаемые ограничением  $d_n$ , на при ограничении  $d_n$  на своё ядро получается нуль:

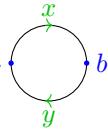
$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Ker}(d_n) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & C_n & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$B$  состоит из подмодулей в  $Z$ ,  $H$  — из фактормодулей, понятно, что там дифференциалы тоже нулевые.  $\square$

### 1.3.1 Гомологии окружности

- Рассмотрим окружность, как симплициальное множество, склеенное из двух нульмерных

клеток-точек  $\{a, b\}$ , и двух одномерных клеток-отрезков  $\{x, y\}$ :



Построим  $C_0 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$  — свободная абелева группа на  $\{a, b\}$ ,  $C_1 = \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$  — тоже свободная абелева группа, но на образующих  $\{x, y\}$ . Вместо  $\mathbb{Z}$  можно было взять любое другое кольцо.

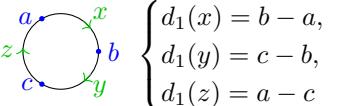
Получили так называемый *симплициальный комплекс* для данного разбиения окружности на клетки (все остальные элементы комплекса обявляются нулями):

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Определим  $d_1$ , как «конец минус начало»:  $\begin{cases} d_1(x) = b - a, \\ d_1(y) = a - b \end{cases}$ .

Теперь  $\begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y) \end{cases}$      $\begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) \\ B_1 = 0 \end{cases}$     и  $\begin{cases} H_0 = Z_0 / B_0 = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b) / \mathbb{Z}(b - a) \cong \mathbb{Z} \\ H_1 = Z_1 / B_1 = \mathbb{Z}(x + y) \cong \mathbb{Z} \end{cases}$ .

- Теперь триангулируем окружность по-другому:



Теперь  $\begin{cases} Z_0 = C_0 \\ Z_1 = \mathbb{Z}(x + y + z) \end{cases}$ ,  $\begin{cases} B_0 = \mathbb{Z}(b - a) + \mathbb{Z}(c - b) \\ B_1 = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} H_0 \\ H_1 = \mathbb{Z}(x + y + z) / 0 \end{cases} \cong \mathbb{Z}$ .

Ответ получился тот же самый, и это не случайно — есть теорема, что сингулярные/симплициальные гомологии (они равны для клеточных пространств) не зависят от триангуляции.

**Упражнение 1.3.1.** Триангулировать сферу, и вычислить гомологии. Дифференциал от треугольника  $ABC$  (ориентация — порядок вершин — важна) определяют, как его обход вдоль периметра:  $AB + BC + CA$ .

### 1.3.2 Длинная точная последовательность гомологий

Напомним, что комплекс называется *точным*, если не просто  $d_n \cdot d_{n+1} = 0$ , но и сразу  $\text{Im}(d_{n+1}) = \text{Ker}(d_n)$ . Часто встречаются *короткие точные последовательности* — последовательности вида  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$ . Точность в члене  $A$  означает, что  $i$  — моно, точность в члене  $C$  означает, что  $\pi$  — эпи, а в члене  $B$  — что  $\text{Im}(i) = \text{Ker}(\pi)$ , то есть (в элементах)  $\forall x \in B : \pi(x) = 0 \iff x \in \text{Im}(i)$ .

**Теорема 1.3.1** (Длинная точная последовательность гомологий). Пусть имеется точная последовательность комплексов  $0 \rightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A'' \rightarrow 0$ .

Тогда существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\pi} H'' \xrightarrow{\delta} H'[−1] \xrightarrow{i[−1]} H[−1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм  $\delta$  будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально: если есть другая короткая точная последовательность, и морфизм между ними, то по отношению к ним найдётся естественный морфизм полученных длинных точных последовательностей гомологий.

*Доказательство.* Для  $z \in Z''_n$ , обозначим за  $[z]$  класс  $z$  в  $H''_n$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{i_n} & A_n & \xrightarrow{\pi_n} & A''_n & \longrightarrow 0 \\ & & d'_n \downarrow & & d_n \downarrow & & d''_n \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & A_{n-1} & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & A''_{n-1} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Рассуждения ниже обычно называют *диаграммный поиск*. Кажется, это невозможно ни записывать, ни читать, но для полной картины пусть будет.

- Для начала построим  $\delta : H''_n \rightarrow H'_{n-1}$ .
  - Выберем  $z \in \text{Ker}(d''_n)$ , пусть  $y \in \pi_n^{-1}(z)$  — произвольный прообраз.  $\bar{y} := d_n(y)$  лежит в ядре  $\pi_{n-1}$  из коммутативности правого квадрата. Из точности нижней строки  $\exists \bar{x} \in i_{n-1}^{-1}(\bar{y})$  (и он единственен, так как  $i_{n-1}$  — моно), положим  $\delta([z]) := [\bar{x}]$ .
  - Убедимся, что определение не зависит от выбора  $y \in \pi_n^{-1}(z)$ . Для этого рассмотрим другой  $y' \in \pi_n^{-1}(z)$ . Так как  $\pi_n(y - y') = 0$ , то из точности верхней строки  $\exists x \in i_{n-1}^{-1}(y - y')$ . Из коммутативности левого квадрата:  $d'_n(x) = i_{n-1}^{-1}(d_n(y - y')) = i_{n-1}^{-1}(d_n(y)) - i_{n-1}^{-1}(d_n(y'))$ , то есть  $\bar{x}$  определён с точностью до  $\text{Im}(d'_n)$ , а его класс эквивалентности в гомологиях — однозначно.
  - Очевидно, что  $\delta$  линеен: его можно задать формулой  $i_{n-1}^{-1}(d(\pi_n^{-1}(\_)))$ , где берётся любой прообраз. Для всякого  $R$ -линейного  $f : x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2) \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in R : \alpha x_1 + \beta x_2 \in f^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$ , то есть прообразы можно выбирать линейно.
- Убедимся, что полученная длинная точная последовательность гомологических групп точна. Здесь используются определённые при построении  $\delta$  элементы  $y \in A_n$  и  $\bar{y} \in A_{n-1}, \bar{x} \in A'_{n-1}$ .
  - $\forall z \in \text{Ker}(d''_n) : \delta([z]) = 0 \iff \bar{y} = 0 \iff y \in \text{Ker}(d_n)$ . Отсюда  $\delta([z]) = 0 \iff z \in \pi_n(\text{Ker}(d_n))$ , что означает точность в члене  $H''_n$ .
  - С одной стороны,  $\forall \bar{x} \in \text{Ker}(d'_{n-1}) : i_{n-1}(\bar{x}) \in \text{Im}(d_n) \Rightarrow \exists y \in A_n : i_{n-1}(\bar{x}) = d_n(y) \Rightarrow \bar{x} = \delta([\pi_n(y)])$  ( $\delta$  определена, так как  $\pi_n(y) \in \text{Ker}(d''_n)$  — из коммутативности правого квадрата:  $d''_n(\pi_n(y)) = \pi_{n-1}(\bar{y})$ , а из точности нижней строки это нуль). С другой стороны,  $\forall z \in \text{Ker}(d''_n) : i_{n-1}(\delta([z])) = d_n(y) \in \text{Im}(d_n)$ . Это означает точность в члене  $H'_{n-1}$ .
  - С одной стороны,  $\forall \bar{x} \in \text{Ker}(d'_{n-1}) : \pi_{n-1}(i_{n-1}(\bar{x})) = 0$  из точности нижней строки. С другой стороны,  $\forall \bar{y} \in \text{Ker}(d_{n-1})$ : если  $\pi_{n-1}(\bar{y}) \in \text{Im}(d''_n)$ , то из сюръективности  $\pi$ :  $\exists y \in A_n : d''_n(\pi_n(y)) = \pi_{n-1}(\bar{y})$ . Обозначим  $\Delta := \bar{y} - d_n(y)$ , так как  $\pi_{n-1}(\Delta) = 0$ , то  $\Delta \in \text{Im}(i_{n-1})$ . Тем самым,  $[\bar{y}] = [\Delta]$  лежит в образе  $H''_{n-1}$ , и последовательность точна в члене  $H_n$ .

- Функториальность идёт без доказательства. □

## Лекция III

4 марта 2024 г.

Теперь приведём другое доказательство существования длинной точной последовательности гомологий, опирающееся на лемму о змее.

**Лемма 1.3.1** (О змее). *Пусть даны два точных комплекса  $A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$  и  $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B''$ , и морфизм между ними. Тогда имеется длинная точная последовательность из пунктирных стрелок.*

*Короткие стрелки получены из действия соответственных функторов (ядра и коядра), а связующий гомоморфизм определён δ определён в доказательстве, и естественен (функториален).*

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Ker } \phi' & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi & \dashrightarrow & \text{Ker } \phi'' & \dashrightarrow & \\
\downarrow \ker \phi' & & \downarrow \ker \phi & & \downarrow \ker \phi'' & & \\
A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & & \delta \\
0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \\
\downarrow \text{coker } \phi' & & \downarrow \text{coker } \phi & & \downarrow \text{coker } \phi'' & & \\
& \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi' & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi & \dashrightarrow & \text{CoKer } \phi'' 
\end{array}$$

*Доказательство.* Доказательство очень похоже на доказательство существования длинной точной последовательности гомологий.

Можно опять сказать, что это диаграммный поиск, и повторить доказательство, но проще вывести из доказательства (теорема 1.3.1). Для этого достаточно рассмотреть комплексы  $C_\bullet := [\dots \rightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \rightarrow 0 \rightarrow \dots]$ , и соответствующие  $C'_\bullet$  и  $C''_\bullet$  (где вместо  $A$  и  $B$  подставлены  $A'$  и  $B'$  либо  $A''$  и  $B''$  соответственно). После этого доказательство (теорема 1.3.1) строит искомую длинную точную последовательность, так как  $H(C_\bullet) = [\dots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Ker}(\phi) \rightarrow \text{CoKer}(\phi) \rightarrow 0 \rightarrow \dots]$ . При этом априори лемма о змее чуть сильнее, так как она не использует, что  $A' \rightarrow A$  — моно, а  $B \rightarrow B'$  — эпи, но можно проследить, что доказательство (теорема 1.3.1) в нужных членах это тоже не использует. □

**Теорема 1.3.2** (Длинная точная последовательность гомологий на бис). Пусть имеется точная последовательность комплексов  $0 \rightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A'' \rightarrow 0$ .

Существует длинная точная последовательность гомологических групп

$$\dots \longrightarrow H' \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\pi} H'' \xrightarrow{\delta} H'[-1] \xrightarrow{i[-1]} H[-1] \longrightarrow \dots$$

где связующий морфизм  $\delta$  будет построен в доказательстве.

Более того, это всё функториально.

*Доказательство.* Длинная точная последовательность комплексов означает наличие следующей

коммутативной диаграммы (где строки точки, и столбцы — комплексы)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A''_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\
 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A''_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

Пусть циклы, граници и гомологии в комплексе  $A$  обозначаются  $Z_\bullet, B_\bullet, H_\bullet$  соответственно, в  $A'$  —  $Z'_\bullet, B'_\bullet, H'_\bullet$ , в  $A''$  —  $Z''_\bullet, B''_\bullet, H''_\bullet$ . Из коммутативности диаграммы  $B'_n$  вправо уходит в  $B_n$ , а  $B_n$ , в свою очередь — в  $B''_n$ .

Чтобы воспользоваться леммой о змее, построим следующую диаграмму, взяв коядро верхней строки, ядро — нижней, и дорисовав сверху — ядра вертикальных стрелок, снизу — коядра:

$$\begin{array}{ccc}
 H'_n & H_n & H''_n \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 A'_n/B'_n & A_n/B_n & A''_n/B''_n \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \bar{d}'_n & \downarrow \bar{d}_n & \downarrow \bar{d}''_n \\
 0 \longrightarrow Z'_{n-1} & Z_{n-1} & Z''_{n-1} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 H'_{n-1} & H_{n-1} & H''_{n-1}
 \end{array}$$

Обоснуйте, каким образом получилась такая диаграмма. По определению  $d_n(B_n) = \{0\}$ , поэтому  $A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1}$  пропускается через фактор, и получается отображение  $\tilde{d}_n : A_n/B_n \rightarrow A_{n-1}$ . Так как  $A$  — комплекс, то  $d_n(A_n/B_n) \subset Z_{n-1}$ , можно сузить codomain, получая  $\bar{d}_n$ . По определению  $H_n = Z_n/B_n$ , поэтому действительно  $H_n = \text{Ker}(d_n)$ . В свою очередь,  $H_{n-1} = Z_{n-1}/B_{n-1}$ , и это действительно  $\text{CoKer}(d_n)$ .

Отображение  $A_n \rightarrow A''_n$  было эпиморфизмом, после взятия коядра эпиморфизмом оно и осталось. Двойственное,  $A'_{n-1} \rightarrow A_{n-1}$  было мономорфизмом, мономорфизмом оно и осталось.

Применяя лемму о змее, получаем утверждение теоремы. □

## 1.4 Функторы между абелевыми категориями

Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — абелевы категории.

**Определение 1.4.1** (Аддитивный функтор  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ). Такой функтор, что  $\forall \alpha, \beta \in \text{Mor}(\mathcal{A}) : \mathcal{F}(\alpha + \beta) = \mathcal{F}(\alpha) + \mathcal{F}(\beta)$  всегда, когда определено.

### 1.4.1 Точные и полуточные функторы

Рассмотрим произвольную короткую точную последовательность  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$  в  $\mathcal{A}$ . Подействовав на неё функтором  $\mathcal{F}$ , мы получим последовательность  $0 \rightarrow \mathcal{F}(A') \rightarrow \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A'') \rightarrow 0$ . Точность, вообще говоря, пропадёт, но если  $\mathcal{F}$  сохраняет точность в каком-то члене для всех таких коротких точных последовательностей, то функтор  $\mathcal{F}$  имеет соответствующее название:

1. Если всегда имеется точность в члене  $\mathcal{F}(A)$ , то  $\mathcal{F}$  — полуточный функтор.
2. Если всегда имеется точность в членах  $\mathcal{F}(A')$  и  $\mathcal{F}(A)$ , то  $\mathcal{F}$  — точный слева функтор.
3. Если всегда имеется точность в членах  $\mathcal{F}(A)$  и  $\mathcal{F}(A'')$ , то  $\mathcal{F}$  — точный справа функтор.
4. Если всякая короткая точная последовательность переходит в короткую точную последовательность, то  $\mathcal{F}$  — точный функтор.

**Лемма 1.4.1.** Пусть  $\mathcal{F}$  — аддитивный функтор. Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{F}$  точен справа.
2.  $\mathcal{F}$  сохраняет нуль и коядро:  $\mathcal{F}(0) = 0$ ,  $\mathcal{F}(\text{coker}(\phi)) = \text{coker}(\mathcal{F}(\phi))$ .
3.  $\mathcal{F}$  сохраняет конечные копределы.

*Доказательство.*

(3)  $\Rightarrow$  (2) Коядро — конечный копредел, поэтому очевидно.

(2)  $\Rightarrow$  (3) В свою очередь, копроизведение в абелевой категории — бипроизведение, а это «внутренний объект» (его определение не использует никакие универсальные свойства, только накладываются некоторые условия на стрелки, которые аддитивные функторы сохраняют), поэтому всякий аддитивный функтор сохраняет его. Предложение из предыдущего семестра о том, что существование инициального объекта и всех копроизведений влечёт существование всех копределов завершает доказательство.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Короткая точная последовательность  $A' \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\psi} A'' \rightarrow 0$  характеризуется свойствами  $\psi = \text{coker } \phi$ ,  $0 = \text{coker } \psi$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2) Проверим, что  $\mathcal{F}$  сохраняет коядра. Пусть  $\mu : A \rightarrow A'$  — мономорфизм. Тогда имеет место короткая точная последовательность  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\mu} A' \xrightarrow{\text{coker } \mu} \text{CoKer}(\mu) \rightarrow 0$ . Применим к ней  $\mathcal{F}$ , получим точную последовательность  $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(\mu)} \mathcal{F}(A') \xrightarrow{\mathcal{F}(\text{coker } \mu)} \mathcal{F}(\text{CoKer}(\mu)) \rightarrow 0$ . Это значит, что  $\text{coker}(\mathcal{F}(\mu)) = \mathcal{F}(\text{coker } \mu)$ , то есть  $\mathcal{F}$  сохраняет коядра мономорфизмов.

Теперь пусть  $\phi : A \rightarrow A'$  — произвольный морфизм, не обязательно моно. У него есть эпимоно разложение  $\phi = \mu\varepsilon$ . Так как  $\varepsilon$  — эпиморфизм, то  $\text{CoKer}(\mu) = \text{CoKer}(\mu\varepsilon) = \text{CoKer}(\phi)$ . При этом,  $\mathcal{F}$  точен справа, в частности, сохраняет эпиморфизмы, откуда  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  тоже эпиморфизм. Далее аналогично  $\text{CoKer}(\mathcal{F}(\mu)) = \text{CoKer}(\mathcal{F}(\mu)\mathcal{F}(\varepsilon)) = \text{CoKer}(\mathcal{F}(\phi))$ . В совокупности с предыдущим абзацем это показывает, что  $\mathcal{F}$  сохраняет произвольные коядра.

Также точный справа функтор сохраняет нуль:  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\text{id}} A \rightarrow 0 \rightarrow 0$  переходит в  $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(0) \rightarrow 0$ . По-видимому, любой аддитивный функтор сохраняет нуль: стрелка  $0 \rightarrow 0$  под действием  $\mathcal{F}$  переходит в стрелку  $\mathcal{F}(0) \rightarrow \mathcal{F}(0)$ , которая с одной стороны  $\text{id}_{\mathcal{F}(0)}$  (функторы сохраняют  $\text{id}$ ), а с другой стороны — нулевой морфизм, так как её сумма с собой равна самой себе. Но раз  $\text{id}_{\mathcal{F}(0)} = 0$ , то  $\mathcal{F}(0) \cong 0$ .  $\square$

**Следствие 1.4.1.** Левый сопряжённый функтор (к любому другому функтору) точен справа.

*Доказательство.* Он сохраняет копределы.  $\square$

Функтор копредела (который является левым сопряжённым к диагональному  $\Delta$ ) сохраняет копределы, значит, точен справа. Другими словами, копределы коммутируют.

Коядро, как конечный копредел, сохраняет коядра, значит, коядро — точный справа функтор. Двойственно, ядро — точный слева функтор — сохраняет ядра, значит, точный слева функтор.

Это можно понять и без высокой науки, но проверять точность в категории стрелок непросто, так как она не является конкретной категорией, и не вложена в  $\text{mod}\text{-}R$ . Видимо, удобнее всего

проверять второй пункт из (лемма 1.4.1), и он вырождается в следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & C \\
 \ker f \downarrow & I & \downarrow \ker g & \text{III} & \downarrow \ker h \\
 D & \xrightarrow{\ker \alpha} & E & \xrightarrow{\alpha} & F \\
 f \downarrow & \text{II} & \downarrow g & \text{IV} & \downarrow h \\
 G & \xrightarrow{\ker \beta} & H & \xrightarrow{\beta} & I
 \end{array}$$

Применяя к морфизму  $(\alpha, \beta)$  функтор  $\ker$ , свойственный категории стрелок, мы получим морфизм  $(\psi, \alpha)$ . Если же рассмотреть морфизм  $(\alpha, \beta)$ , как морфизм в произвольной абелевой категории, то его ядром будет  $(\ker \alpha, \ker \beta)$ . К ядру также можно применить функтор  $\ker$ , свойственный категории стрелок, получая морфизм  $(\phi, \ker \alpha)$ .

Чтобы проверить, что функтор ядра сохраняет ядра, надо убедиться, что  $\phi = \ker \psi$ . Используя коммутативность  $I$ , и то, что  $\ker \alpha \cdot \ker f$  — мономорфизм, получаем, что  $\phi$  — тоже мономорфизм. Проверим точность в члене  $B$ , рассмотрев  $x \in B$ , такой, что  $\psi(x) = 0$ .

- Во-первых,  $\ker h(\psi(x)) = 0 \xrightarrow{\text{III коммутативен}} \alpha(\ker g(x)) = 0 \xrightarrow{\text{точность в } E} \exists y \in D : \ker \alpha(y) = \ker g(x)$ .
- Во-вторых, из коммутативности  $\text{II}$ :  $\ker \beta(f(y)) = 0, \xrightarrow{\ker \beta \text{ моно}} f(y) = 0 \xrightarrow{\text{точность в } D} \exists z \in A : \ker f(z) = y$ .
- И наконец,  $\ker g(\phi(z)) = \ker g(x) \xrightarrow{\ker g \text{ моно}} \phi(z) = x$ .

К сожалению, в лемме о змее это не помогает в доказательстве того, что последовательность точна в члене  $\text{Ker } \phi$ , так как нет точной последовательности  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ .

При доказательстве существования длинной точной последовательности гомологий на бис, мы использовали, что коядро точно справа, ядро — точно слева.

## Лекция IV

11 марта 2024 г.

**Факт 1.4.1.** Если точный справа функтор сохраняет мономорфизмы, то функтор точен. Двойственно, точный слева функтор, сохраняющий эпиморфизмы, точен.

*Доказательство.* Условия как раз означают, что короткая точная последовательность отображается в короткую точную последовательность.  $\square$

### 1.4.2 Гомотопность морфизмов комплексов

Пусть имеются комплексы  $X_\bullet$  и  $X'_\bullet$ , и между ними морфизмы  $f, g$ .

**Определение 1.4.2** (Морфизмы  $f$  и  $g$  гомотопны). Существует семейство морфизмов  $s_k : X_{k-1} \rightarrow X'_k$ , таких, что  $f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1}$ . При этом диаграмма ниже **не обязана** быть коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & X_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & X_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots \xrightarrow{d_0} X_0 \\
 f_{n+1} \downarrow & \downarrow g_{n+1} & f_n \downarrow & \downarrow g_n & f_{n-1} \downarrow & \downarrow g_{n-1} & \downarrow \vdots & f_0 \downarrow & \downarrow g_0 \\
 X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_n} & X'_n & \xrightarrow{d'_{n-1}} & X'_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-2}} & \cdots \xrightarrow{d'_0} X'_0
 \end{array}$$

Пишут  $f \simeq g$ .

А почему вот такие диагональные стрелки — это то же самое, что и гомотопность в топологии?

**Теорема 1.4.1.** Если два морфизма комплексов  $f, g : X \rightarrow X'$  гомотопны, то  $H(f) = H(g)$  (здесь функтор гомологий применён не к объектам-комплексам, а к морфизмам комплексов).

*Доказательство.* Гомология — аддитивный функтор, докажем, что  $H(f - g) = 0$ .

Рассмотрим  $\bar{x} \in H_n(X)$ . У него имеется прообраз  $x \in Z_n(X)$ .

Заметим, что  $H(f_n - g_n)(\bar{x}) = \overline{(f_n - g_n)(x)} = \overline{d'_n(s_{n+1}(x))} + \overline{s_n(d_{n-1}(x))}$ . Первое слагаемое равно нулю, так как  $d'_n(\dots) \in B_n(X')$ , а второе — так как  $x \in \text{Ker } d_{n-1}$ .  $\square$

*Замечание.* Если  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  — аддитивный функтор, то ему соответствует функтор  $\text{Comp}(\mathcal{F})$ , действующий на комплексах с элементами из  $\mathcal{A}$  поэлементным применением к объектам и морфизмам функтора  $\mathcal{F}$ . Допуская вольность речи, можно обозначать этот функтор тоже  $\mathcal{F}$ . Используя эту вольность речи, можно отметить, что если  $f \simeq g$  — гомотопные морфизмы комплексов с объектами из  $\mathcal{A}$ , то  $\mathcal{F}(f) \simeq \mathcal{F}(g)$ .

**Факт 1.4.2.** Для морфизмов комплексов «быть гомотопными» — отношение эквивалентности.

*Доказательство.* Рефлексивность:  $\forall n : s_n = 0$ . Симметричность:  $s_n := -s_n$ . Транзитивность:

$$\begin{cases} f_n - g_n = d'_n s_{n+1} + s_n d_{n-1} \\ g_n - h_n = d'_n r_{n+1} + r_n d_{n-1} \end{cases} \Rightarrow f_n - h_n = d'_n(s_{n+1} + r_{n+1}) + (s_n + r_n)d_{n-1} \quad \square$$

**Определение 1.4.3** (Два комплекса  $X$  и  $X'$  гомотопически эквивалентны). Существуют морфизмы комплексов  $f : X \rightarrow X'$  и  $g : X' \rightarrow X$ , такие, что  $fg \simeq \text{id}_{X'}$  и  $gf \simeq \text{id}_X$ . Данные морфизмы  $f$  и  $g$  называют *гомотопическими эквивалентностями*.

**Факт 1.4.3.** Если  $X$  и  $X'$  гомотопически эквивалентны, то  $H(X) \cong H(X')$ .

**Определение 1.4.4** (Квазизоморфизм  $f : X \rightarrow X'$ ). Морфизм  $f$ , такой, что  $H(f)$  — изоморфизм.

**Факт 1.4.4.** Гомотопическая эквивалентность — квазизоморфизм.

**Определение 1.4.5** (Комплекс  $X$  ацикличен).  $X$  точен, то есть  $H(X) = 0$ .

**Определение 1.4.6** (Комплекс  $X$  стягиваем).  $\text{id}_X \simeq 0_X$ .

*Замечание.* Из (теорема 1.4.1) следует, что стягиваемый комплекс ацикличен.

Обратное, вообще говоря, неверно. Стягиваемый комплекс сохраняется под действием функторов, а ациклический — может и не сохраниться.

## 1.5 Проективные резольвенты

Пусть  $\mathcal{A}$  — абелева категория,  $P \in \mathcal{A}$ .

**Определение 1.5.1** (Объект  $P$  проективен).  $\forall \phi : A \rightarrow B : \phi$  — эпи  $\Rightarrow \forall \psi : P \rightarrow B : \exists \theta : P \rightarrow A$ , такое, что диаграмма коммутирует. При этом  $\theta$  должно быть какое-то, не факт, что оно единственno.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \exists \theta \swarrow & \downarrow \forall \psi & & \\ A & \xrightarrow{\forall \phi} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Факт 1.5.1.** В  $\text{Set}$  все множества — проективные объекты.

**Теорема 1.5.1.** Пусть  $\mathcal{A} = R\text{-mod}$ . Модуль  $P$  проективен  $\iff P$  является прямым слагаемым свободного модуля.

*Доказательство.*

- Свободный модуль проективен: пусть  $\{p_\alpha\}$  — базис  $P$ . Определим  $\theta(p_\alpha) = \phi^{-1}(\psi(p_\alpha))$ , где прообраз выбран произвольно, и продолжим по линейности.

2. Прямое слагаемое проективного модуля проективно. Рассмотрим каноническое вложение  $M \hookrightarrow M \oplus N$ , где  $M \oplus N$  — проективен.

$$\begin{array}{ccc} & M & \longrightarrow M \oplus N \\ & \downarrow \psi & \swarrow \\ A & \twoheadrightarrow B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Определим  $M \oplus N \rightarrow B$ ,  $(m, n) \mapsto \psi(m)$ . Так как  $M \oplus N$  проективен, то найдётся  $M \oplus N \rightarrow A$ , и композиция  $M \rightarrow M \oplus N \rightarrow A$  подходит в качестве морфизма, который должен находиться из определения проективного модуля.

3. Пусть  $P$  проективен. Возьмём свободный модуль  $F$ , сюръективно накрывающий  $P$  (например, подойдёт свободный модуль на всех элементах  $P$ , но на практике, конечно, удобно брать модуль поменьше).

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \exists \nearrow \text{id} \downarrow & \\ F & \xrightarrow{\pi} & P \end{array}$$

Так как модуль проективен, то найдётся пунктирная стрелка. Значит,  $F \cong P \oplus \text{Ker } \pi$  ( $\forall f \in F : \pi^{-1}(f) = P(f) + \text{Ker } \pi$ ).  $\square$

*Примеры.*

- Пусть  $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . Тогда  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  является  $R$ -модулем, но  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , значит, модули  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  все проективны над кольцом  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .
- Можно предъявить проективный модуль, исходя из топологического факта о том, что шар нельзя причесать. **А как?**

**Определение 1.5.2** (Проективная резольвента модуля  $M$ ). Ациклический (точный) комплекс вида  $\cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , где  $P_i$  — проективные модули.

В будущем докажем, что любые две проективные резольвенты гомотопически эквивалентны (следствие 1.6.1).

**Определение 1.5.3** (В категории  $\mathcal{A}$  достаточно много проективных объектов).  $\forall A \in \mathcal{A}$  найдётся проективный объект  $P \in \mathcal{A}$  вместе с эпиморфизмом  $P \twoheadrightarrow A$ .

Если в нашей категории  $\mathcal{A}$  достаточно много проективных объектов, то у всякого модуля  $M$  найдётся резольвента — надо просто подряд накрывать возникающие ядра.

## Лекция V

18 марта 2024 г.

### 1.6 Левый производный функтор

Зафиксируем некоторый аддитивный функтор  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , который обычно будет точен справа. Пусть у объекта  $A \in \mathcal{A}$  имеется проективная резольвента, которую я выделил стрелками  $\rightsquigarrow$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightsquigarrow & P_1 & \rightsquigarrow & P_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \rightsquigarrow & 0 \end{array}$$

Иными словами, проективная резольвента — это некоторый морфизм комплексов  $P$  и  $A_\bullet$ . Под комплексом  $A_\bullet$  подразумевается такой комплекс, в котором в нулевой градуировке сидит  $A$ , а в остальных — нули (следовательно, все дифференциалы — тоже нули).

Раз  $\mathcal{F}$  точен справа, то он сохраняет нуль. Применим  $\mathcal{F}$  к верхней строчке. Тогда получится комплекс вида

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow 0$$

Чуть ниже мы определим  $L_n\mathcal{F}(A) := H_n\mathcal{F}(P)$  — левый производный функтор, измеряющий неточность  $\mathcal{F}$  — но пока, например, неясна корректность (независимость от резольвенты) такого определения.

**Теорема 1.6.1.** Пусть  $P_i$  проективные, сверху комплекс (ноль в верхней строчке стоит для красоты, он там неважен), снизу — точный комплекс, и дан морфизм  $f$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \end{array} \longrightarrow 0$$

Тогда найдутся пунктирные стрелки, и они определены с точностью до гомотопии.

*Доказательство.*

- – Сначала построим  $f_i : P_i \rightarrow Q_i$ .

$Q_0 \rightarrow B$  сюръективно, значит, так как  $P_0$  проективен, то найдётся  $f_0 : P_0 \rightarrow Q_0$ , такое, что квадрат коммутативен.

- Далее по индукции: пусть построены  $f_0, \dots, f_n$ .

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{d_n^P} & P_n & \xrightarrow{d_{n-1}^P} & P_{n-1} \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{d_n^Q} & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1} \end{array}$$

Хочется заполучить стрелку  $P_{n+1} \rightarrow Q_{n+1}$ , воспользовавшись проективностью  $P_{n+1}$ . Для этого надо найти сюръективное отображение из  $Q_{n+1}$ .

Так как внизу — точная последовательность, то  $d_n^Q : Q_{n+1} \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^Q)$  подойдёт: во-первых,  $\text{Im}(d_n^Q) = \text{Ker}(d_{n-1}^Q)$  из точности  $Q_\bullet$ , а во-вторых,  $\text{Im}(f_n \circ d_n^P) \subset \text{Ker}(d_n^Q)$  — чтобы это увидеть, надо применить  $d_n^Q$  и воспользоваться коммутативностью правого квадрата, и тем, что  $P$  — комплекс. Тем самым, по определению проективного модуля  $\exists f_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow Q_{n+1}$ .

- – Теперь пусть имеются два морфизма комплексов, продолжающих  $f$ , это  $f_i$  и  $g_i$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \\ & & f_1 \downarrow g_1 & & f_0 \downarrow g_0 & & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & B \end{array} \longrightarrow 0$$

Распишем разность: пусть  $h_i := f_i - g_i$ . Построим гомотопию  $h \simeq 0$ . Понятно, что  $A \rightarrow Q_0$  надо взять нулевым.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \\ & & h_1 \swarrow s_0 & & h_0 \swarrow 0 & & 0 \swarrow 0 \\ \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \xrightarrow{d_{-1}^Q} & B \end{array} \longrightarrow 0$$

$s_0$  строится по основному свойству проективного модуля  $P_0$ : ведь  $h_0(P_0) \subset \text{Ker}(d_{-1}^Q) = \text{Im } d_0^Q$

– Далее индукция. Пусть построены  $s_0, \dots, s_{n-1}$ , строим  $s_n$ .

$$\begin{array}{ccccc}
& & P_n & \xrightarrow{d_{n-1}^P} & P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}^P} P_{n-2} \\
& \swarrow s_n & \downarrow h_n & \searrow s_{n-1} & \downarrow h_{n-1} \\
Q_{n+1} & \xrightarrow{d_n^Q} & Q_n & \xrightarrow{d_{n-1}^Q} & Q_{n-1}
\end{array}$$

Хочется, чтобы выполнялось  $h_n = d_n^Q s_n + s_{n-1} d_{n-1}^P$ , эквивалентно  $d_n^Q s_n = h_n - s_{n-1} d_{n-1}^P$ .

Надо проверить, что образ правой части лежит в  $\text{Im}(d_n^Q)$ , то есть  $\text{Ker}(d_{n-1}^Q)$ . Применим  $d_{n-1}^Q$ . Получим

$$d_{n-1}^Q h_n - d_{n-1}^Q s_{n-1} d_{n-1}^P = h_{n-1} d_{n-1}^P - (h_{n-1} - s_{n-2} d_{n-2}^P) d_{n-1}^P = 0$$

Тем самым,  $s_n$  действительно найдётся согласно свойству проективного модуля.  $\square$

**Следствие 1.6.1.** Любойые две проективные резольвенты одного и того же объекта гомотопически эквивалентны.

*Доказательство.* Пусть  $P, Q$  — две резольвенты объекта  $A$ . В силу (теорема 1.6.1), можно построить морфизмы этих резольвент  $f : P \rightarrow Q$  и  $g : Q \rightarrow P$ .

$$\begin{array}{ccc}
P & \longrightarrow & A \\
g \uparrow \quad \downarrow f & & \uparrow \text{id} \\
Q & \longrightarrow & A
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
P & \longrightarrow & A \\
\text{id} \downarrow \quad \downarrow g f & & \downarrow \text{id} \\
P & \longrightarrow & A
\end{array}$$

Получается, что  $gf : P \rightarrow P$  — эндоморфизм  $P$ , как резольвенты  $A$ . С другой стороны,  $\text{id}_P$  — тоже эндоморфизм  $P$ , как резольвенты  $A$ , и опять применяя (теорема 1.6.1), получаем, что  $gf \simeq \text{id}_P$ . Аналогично  $fg \simeq \text{id}_Q$ .  $\square$

Таким образом, определение левого производного функтора  $L_n \mathcal{F}(A) \stackrel{\text{def}}{=} H_n \mathcal{F}(P)$  корректно.

С некоторой точки зрения «правильно» рассматривать категорию комплексов с точностью до гомотопической эквивалентности, назовём её  $\mathcal{H}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M}\mathcal{P}(\mathcal{A})$ : там объекты —  $\text{Obj } \mathcal{A}$ , а группа морфизмов  $\text{Mor}_{\mathcal{H}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M}\mathcal{P}(\mathcal{A})}(P, Q) = \text{Mor}(\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M}\mathcal{P}(\mathcal{A})) / \text{Ho}(P, Q)$ , где  $\text{Ho}(P, Q)$  — группа морфизмов, гомотопных 0.

*Примеры* (Что такое  $L_0$  от точного справа функтора).

- Предположим, что  $\mathcal{F}$  точен справа. Тогда

$$\mathcal{F}(P_1) \longrightarrow \mathcal{F}(P_0) \longrightarrow \mathcal{F}(A) \longrightarrow 0$$

точна. Это видно из эпи-моно разложения: если  $P_1 \rightarrow P_0$  раскладывается в произведение  $\mu \cdot \varepsilon$ , где  $\mu$  — мономорфизм, а  $\varepsilon$  — эпиморфизм, то  $\bullet \xrightarrow{\mathcal{F}(\mu)} \mathcal{F}(P_0) \rightarrow \mathcal{F}(A) \rightarrow 0$  точна, а при дописывании эпиморфизма  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  слева точность останется.

Тем самым,  $L_0 \mathcal{F}(A) = H_0(\mathcal{F}(P)) = \text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0))$ . Получается  $\text{CoKer}(\mathcal{F}(P_1) \rightarrow \mathcal{F}(P_0)) = \mathcal{F}(A)$ , то есть  $L_0 \mathcal{F} = \mathcal{F}$ .

**Следствие 1.6.2.** Если  $P_A, P_B$  — проективные резольвенты  $A, B$  соответственно, и  $f : A \rightarrow B$ , то  $\exists \tilde{f} : P_A \rightarrow P_B$ , делающий диаграмму коммутативной. Он определён однозначно с точностью до гомотопии.

$$\begin{array}{ccc}
P_A & \longrightarrow & A_\bullet \\
\tilde{f} \downarrow & & f \downarrow \\
P_B & \longrightarrow & B_\bullet
\end{array}$$

Здесь  $A_\bullet$  — комплекс, где  $A$  сосредоточен в нулевом члене.

Таким образом, морфизму  $f$  объектов из  $\mathcal{A}$  сопоставляется морфизм резольвент  $\tilde{f}$ , а он, в свою очередь, индуцирует морфизм гомологий  $H_n(P_A) \rightarrow H_n(P_B)$ . Значит, конструкция  $L$  функториальна.

### 1.6.1 Длинная точная последовательность левых производных функторов

Зададим некоторый функтор  $\mathcal{F}$ . Далее мы исследуем  $L_n\mathcal{F}$ , для упрощения записи будем писать  $L_n := L_n\mathcal{F}$ .

Пусть имеется короткая точная последовательность  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  в  $\mathcal{A}$ . Построим длинную точную последовательность производных функторов, выглядящую так:

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

Для получения такой штуки было бы неплохо заполучить точную последовательность резольвент  $P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$ , причём не абы какую, а сохраняющую свою точность под действием любого аддитивного функтора. Оказывается, это сделать несложно, и в этом нам поможет лемма о подкове.

**Лемма 1.6.1** (О подкове). *Пусть  $P$  — проективный модуль, все строки и столбцы (состоящие из чёрных сплошных стрелок) точны.*

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{i} & Q \oplus P & \xrightarrow{\pi} & P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Утверждается, что диаграмму можно достроить до коммутативной, добавив зелёные пунктирные стрелки. Новые строки и столбцы также станут точны.

*Доказательство.* Так как  $P$  — проективен, а  $g$  — эпи, то найдётся сечение  $s$  такое, что  $gs = h_C$ .

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \xrightarrow{i} & Q \oplus P & \xrightarrow{\pi} & P \\ h_A \downarrow & & h_B \downarrow & & h_C \downarrow \\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

s

Определим стрелку  $h_B$  исходя из того, что квадраты должны в итоге получиться коммутативными. Из коммутативности левого квадрата  $h_B(u, 0) = f(h_A(u))$ . Из коммутативности правого треугольника  $gh_B(0, v) = h_C(v) = gs(v)$ . Тем самым, подойдёт  $h_B(u, v) := f(h_A(u)) + s(v)$ .

При таком определении правый квадрат будет коммутативен:  $g(s(v)) = h_C(\pi(u, v)) \stackrel{?}{=} g(h_B(u, v)) = g(s(v))$ , последнее равенство имеет место, так как  $gf = 0$ .

Также несложно убедиться, что построенный морфизм  $h_B$  — эпи, видимо, это делается в тупую при помощи диаграммного поиска:

Рассмотрим  $b \in B$ , пусть  $c := g(b)$  и  $\bar{b} := \pi^{-1}(h_C^{-1}(c))$  — произвольный прообраз. Из коммутативности правого квадрата  $h_B(\bar{b})$  и  $b$  под действием  $g$  уходят в  $g(b)$ , откуда  $g(b - h_B(\bar{b})) = 0$ . Из точности нижней строки  $\exists a \in A : f(a) = b - h_B(\bar{b})$ , а из эпиморфности  $h_A : \exists \bar{a} \in Q : h_A(\bar{a}) = a$ . Тем самым,  $h_B(i(\bar{a}) + \bar{b}) = b$ .  $\square$

**Теорема 1.6.2.** Для короткой точной последовательности  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  существует точная последовательность резольвент  $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$ , точность которой сохраняется под действием любого аддитивного функтора.

*Доказательство.* Возьмём произвольные резольвенты  $P_A, P_C$ . Резольвенту  $P_B$  будем строить пошагово, по индукции.  $(P_B)_0 := (P_A)_0 \oplus (P_C)_0$  строится прямым применением леммы о подкове.

Далее необходимо провести индукционный переход.

$$\begin{array}{ccccccc}
& (P_A)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}i\text{---}} & (P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} & \xrightarrow{\text{---}\pi\text{---}} & (P_C)_{n+1} \\
& \downarrow & & \downarrow d_n^B & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-1}^C) \xrightarrow{\text{---}0\text{---}} 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & (P_A)_n & \longrightarrow & (P_B)_n & \longrightarrow & (P_C)_n \longrightarrow 0 \\
& \downarrow d_{n-1}^A & & \downarrow d_{n-1}^B & & \downarrow d_{n-1}^C & \\
0 & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{n-2}^C) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Вычленим некоторый кусочек диаграммы, и попробуем применить лемму о подкове для получения  $d_n^B$ . Для этого необходимо потребовать от стрелки  $\text{Ker}(d_{n-1}^B) \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^C)$ , чтобы она была эпиморфизмом.

При  $n = 1$  это верно в силу леммы о змее:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^A) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^B) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{-1}^C) \xrightarrow{\text{---}0\text{---}} 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & P_A & \longrightarrow & P_B & \longrightarrow & P_C \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d_{-1}^A & & \downarrow d_{-1}^B & & \downarrow d_{-1}^C \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Если же  $n > 1$ , то воспользуемся тем, что  $(P_B)_n = (P_A)_n \oplus (P_C)_n$ . Это, в частности, значит, что у ретракции  $\pi_n : (P_B)_n \rightarrow (P_C)_n$  имеется односторонняя обратная — сечение  $s_n : (P_C)_n \rightarrow (P_B)_n$ , такая, что  $\pi_n \cdot s_n = \text{id}_{(P_C)_n}$ . Ввиду функциональности ядра односторонняя обратная будет иметься и у отображения ядер  $\text{Ker}(d_{n-1}^B) \rightarrow \text{Ker}(d_{n-1}^C)$ , что значит, что это эпиморфизм.

Так как прямая сумма проективных проективна, то  $(P_A)_{n+1} \oplus (P_C)_{n+1} \rightarrow \text{Ker } d_{n-1}^B$ , и определение резольвенты  $B$  по индукции корректно.

Точность  $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C$  под действием всякого аддитивного функтора, конечно, сохраняется, так как  $(P_B)_n = (P_A)_n \oplus (P_C)_n$ , а аддитивные функторы сохраняют бипроизведение.  $\square$

**Следствие 1.6.3** (Длинная точная последовательность производных функторов). Для короткой точной последовательности  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  имеет место длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow L_1(A) \rightarrow L_1(B) \rightarrow L_1(C) \rightarrow L_0(A) \rightarrow L_0(B) \rightarrow L_0(C) \rightarrow \cdots$$

*Доказательство.* Из (теорема 1.6.2) найдётся точная последовательность производных резольвент  $0 \rightarrow P_A \rightarrow P_B \rightarrow P_C \rightarrow 0$ . Применяя  $\mathcal{F}$ , получаем точную последовательность  $0 \rightarrow \mathcal{F}(P_A) \rightarrow \mathcal{F}(P_B) \rightarrow \mathcal{F}(P_C) \rightarrow 0$ .

Возьмём у  $\mathcal{F}(P_A), \mathcal{F}(P_B), \mathcal{F}(P_C)$  гомологию. Составленная из них длинная точная гомологическая последовательность как раз и сконструирует искомую длинную точную последовательность левых производных функторов.  $\square$

*Замечание.* Если  $\mathcal{F}$  точен справа, то длинная точная последовательность производных функторов обрывается эпиморфизмом:  $\mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(C) \rightarrow 0$ .

# Лекция VI

25 марта 2024 г.

## 1.6.2 Связанные последовательности функторов

Рассмотрим формальное обобщение производных функторов.

Пусть имеется семейство  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  функторов  $\mathcal{F}_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ .

**Определение 1.6.1** ((Левая) связанные последовательности функторов). Такая последовательность функторов  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ , что для любой точной последовательности  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  существует функториальная длинная точная последовательность

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_1(A) \rightarrow \mathcal{F}_1(B) \rightarrow \mathcal{F}_1(C) \rightarrow \mathcal{F}_0(A) \rightarrow \mathcal{F}_0(B) \rightarrow \mathcal{F}_0(C)$$

*Пример.* Последовательность  $\{L_i \mathcal{F}\}_{i \in \mathbb{N}_0}$  — связанные последовательность функторов.

Заметим, что  $\forall i > 0 : L_i \mathcal{F}(P) = 0$ , если  $P$  проективен. Это очевидным образом следует из существования резольвенты  $0 \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow 0$ . Если  $\mathcal{F}$  точен справа (а мы это предполагаем), то он сохраняет ноль. Тогда  $L_n \mathcal{F}$  — гомологии  $[\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}(P) \rightarrow 0]$ , которые в нулевом члене —  $\mathcal{F}(P)$ , а в остальных — нулевые.

Оказывается, этого условия достаточно, чтобы определить связанные последовательности по нулевому элементу:

**Теорема 1.6.3.** Пусть  $\{\mathcal{F}_i\}, \{\mathcal{G}_i\}$  — две связанные последовательности функторов, такие, что имеется естественный изоморфизм  $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{G}_0$ , и для любого проективного  $P : \forall i > 0 : \mathcal{F}_i(P) = \mathcal{G}_i(P) = 0$ .

Также предположим, что в  $\mathcal{A}$  достаточно много проективных объектов.

Тогда  $\forall i : \mathcal{F}_i \cong \mathcal{G}_i$  — естественный изоморфизм.

*Доказательство.* Пусть  $A \in \mathcal{A}$ . Накроем  $A$  проективным, возьмём ядро, получим точную последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

Так как последовательности функторов — связаны — то имеется длинная точная последовательность, нарисуем её кусок:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_0(P) \\ \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ 0 = \mathcal{G}_1(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_0(P) \end{array}$$

Значит, имеется естественный изоморфизм ядер,  $\mathcal{F}_1(A) \cong \mathcal{G}_1(A)$ , тем самым,  $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{G}_1$  (естественность — упражнение).

Теперь займёмся индукционным переходом:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \mathcal{F}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{F}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{i-1}(P) = 0 \\ \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ 0 = \mathcal{G}_i(P) & \longrightarrow & \mathcal{G}_i(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(M) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{i-1}(P) = 0 \end{array}$$

Зажав  $\mathcal{F}_i(A)$  и  $\mathcal{F}_{i-1}(M)$  между двумя нулями, мы доказали, что все четыре ненулевых объекта изоморфны (естественность, опять же, доказывается несложно).  $\square$

**Следствие 1.6.4.** Пусть  $\mathcal{F}$  точен справа (например  $\mathcal{F} = - \otimes M$ , где  $M$  — фиксированный модуль). Пусть  $\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{F}$ , где  $\{\mathcal{F}_i\}$  — связанные последовательности функторов, такая, что для любого проективного  $P : \mathcal{F}(P) = 0$ .

По-прежнему предполагаем, что в  $\mathcal{A}$  достаточно много проективных объектов.

Тогда  $\forall i \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_i \cong L_i \mathcal{F}$ .

## 1.7 Производные функторы для $\otimes$

Пусть  $R$  — необязательно коммутативное кольцо с единицей,  $M \in \text{mod-}R, N \in R\text{-mod}$ , напомним, что тогда  $M \otimes_R N \in \mathcal{A}$ .

Изучим производные функторов тензорного произведения (функтор тензорного произведения точен справа, так как он — левый сопряжённый к  $\text{Hom}$  (что верно в силу естественного изоморфизма  $\text{Hom}(A \otimes B, C) \cong \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C))$ )).

Обозначим  $\text{LTor}_i(M, \_) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(M \otimes \_)$ ,  $\text{RTor}_i(\_, N) \stackrel{\text{def}}{=} L_i(\_ \otimes N)$ .

*Примеры.*

- Изучим  $\text{Tor}_1(M, R/aR)$ , где  $R$  — коммутативная область целостности. Для  $R/aR$  несложно написать проективную резольвенту:  $0 \rightarrow R \xrightarrow{a} R \rightarrow R/aR \rightarrow 0$  ( $a(m) = am$ ).

Тензорно домножая на  $M$ , мы получаем  $0 \rightarrow M \xrightarrow{m \otimes r \mapsto m \otimes ar} M \rightarrow M \otimes R/aR \rightarrow 0$ . Так как кольцо коммутативное, то тензорное произведение —  $\text{mod-}R$ , поэтому  $m \otimes r \mapsto m \otimes ar$  — тоже просто отображение умножения на  $a$ .

Так как естественно  $M \otimes R/aR \cong M/aM \otimes R \cong M/aM$ , то гомологии в среднем члене — нуль, а в левом члене —  $a$ -кручение в  $M$ , то есть  $\{x \in M \mid ax = 0\}$ .

- Если же хочется изучить всё кручение  $M$ , то оказывается,  $\text{Tor}_1(M, F/R) = \{x \in M \mid \exists a \in R \setminus \{0\} : ax = 0\}$  (здесь  $F/R$  — фактор  $R$ -модулей). Здесь используется, что  $F/R = \varinjlim R/aR$ , значит,  $\text{Tor}_1(F/R, M) = \varinjlim \text{Tor}_1(R/aR, M)$ .

**Теорема 1.7.1.** Имеет место естественный изоморфизм:  $\forall i : \text{LTor}_i \cong \text{RTor}_i$ .

*Идея доказательства.* Пусть имеются резольвенты  $[ \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M ]$  и  $[ \dots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow N ]$ , нарисуем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longrightarrow & M \otimes Q_1 \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longrightarrow & M \otimes Q_0 \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & P_1 \otimes N & \longrightarrow & P_0 \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 & 0 & & & &
 \end{array}$$

Тензорное домножение на свободный объект — точный справа функтор — из дистрибутивности тензорного произведения. Тензорное домножение на проективный объект (прямое слагаемое свободного) — точный справа функтор — опять же из дистрибутивности.

Все строки точны, кроме нижней, и все столбцы точны, кроме правого, в которых мы и хотим посчитать гомологии, и доказать, что они равны.

Заведём тотальный комплекс  $\text{Tot}(M, N)_n := \bigoplus_{i=0}^n P_i \otimes Q_{n-i}$ , и теперь надо определить дифференциал  $D$ . Необходимо, чтобы выполнялось требование  $D^2 = 0$ , поэтому абы какой не подойдёт.

Пусть  $d_p : P_p \rightarrow P_{p-1}$ ,  $d_q : Q_q \rightarrow Q_{q-1}$  — дифференциалы резольвент, определим

$$\begin{aligned} D_{p,q} : P_p \otimes Q_q &\rightarrow \text{Tot}(M, N)_{p+q-1} \\ (x \otimes y) &\mapsto d_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_q(y) \end{aligned}$$

Теперь определим полный дифференциал  $D_n := \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q} : \text{Tot}(M, N)_n \rightarrow \text{Tot}(M, N)_{n-1}$ .

**Упражнение 1.7.1.**  $D_{n-1} \cdot D_n = 0$ .

Осталось показать, что гомологии нижней строки, как и гомологии правого столбца, совпадают с гомологиями тотального комплекса.  $\square$

## 1.8 Производные функторы для Ном

Теперь разберёмся с функторами Ном — эти функторы являются правыми сопряжёнными к  $\otimes$ , поэтому точны слева.

Таких функторов два: имеются ковариантный  $\text{Hom}(M, \underline{\phantom{x}})$ , и контравариантный  $\text{Hom}(\underline{\phantom{x}}, N)$ .

Для изучения точных слева функторов будем строить последовательность правых сопряжённых функторов.

### 1.8.1 Инъективные резольвенты

**Определение 1.8.1** (Инъективный модуль  $Q$ ). Такой модуль  $Q$ , что для любой инъекции  $A \hookrightarrow B$ , и для любого морфизма  $A \rightarrow Q$ , существует морфизм  $B \rightarrow Q$  такой, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & \swarrow \exists & \\ Q & & \end{array}$$

*Интересный факт.* Инъективный модуль — то же самое, что и делимый модуль, то есть  $\forall r \in R \setminus \{0\}, q \in M : \exists x \in M : rx = q$ . Скорее всего, это верно только над PID.

В одну сторону доказательство очевидно — чтобы убедиться, что инъективный модуль является делимым, надо в качестве  $A$  взять кольцо  $R$ , а в качестве  $B$  — поле частных  $R$ .

В категории  $\mathcal{C}$ , где достаточно много инъективных объектов (то есть  $\forall C \in \mathcal{C} : \exists$  проективный  $Q$  вместе с вложением  $C \hookrightarrow Q$ ), двойственno проективной, строится инъективная резольвента, в которой коядро предыдущего морфизма вкладывается в следующий инъективный модуль:

$$0 \rightarrow N \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots$$

Далее аналогично определяются правые производные функторы, в частности, имеется комплекс

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, Q_0) \rightarrow \text{Hom}(M, Q_1) \rightarrow \cdots$$

Гомологии такого комплекса обозначают  $\text{Ext}^i(M, N)$ .

Построим теперь проективную резольвенту для  $M$ :  $\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ . Применяя к этой последовательности контравариантный Ном, получаем  $0 \rightarrow \text{Hom}(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}(P_1, N) \rightarrow \cdots$  Гомологии этого комплекса обозначают  $\text{Ext}^i(M, N)$  (это уже другой Ext, но они, как и Тор, естественно изоморфны, доказательство абсолютно аналогично)

## 1.8.2 О расширениях модулей и $\text{Ext}^1$

Название  $\text{Ext}$  происходит от extensions, элементы  $\text{Ext}^1$  находятся в биекции с классами коротких точных последовательностей  $0 \rightarrow M \rightarrow ? \rightarrow N \rightarrow 0$  (теорема 1.8.1). В качестве среднего члена всегда подойдёт  $M \oplus N$ , но, может быть, и ещё что-то, и за это отвечает  $\text{Ext}^1$ .

Для функторов  $\text{Ext}$  более высокой степени надо брать более длинные последовательности.

# Лекция VII

1 апреля 2024 г.

Пусть  $M, N \in \text{mod-}R$ .

**Определение 1.8.2** (Расширение  $N$  при помощи  $M$ ). Точная последовательность  $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$ .

Морфизмы расширений  $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$  и  $0 \rightarrow M \rightarrow X' \rightarrow N \rightarrow 0$  — такая стрелка  $X \rightarrow X'$ , что два получившихся треугольника коммутативны.

**Теорема 1.8.1.**  $\text{Ext}^1(N, M)$  естественно изоморфен множеству классов изоморфизмов расширений  $N$  при помощи  $M$ .

*Доказательство.* Рассмотрим расширение  $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$ . Запишем кусок длинной точной последовательности правых производных функторов для  $\text{Hom}(\_, M)$  и данной короткой точной последовательности, заменяя  $\text{Ext}^0$  на  $\text{Hom}$ :

$$\text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(M, M) \longleftarrow \text{Hom}(X, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M) \longleftarrow 0$$

Построим  $x \in \text{Ext}^1(N, M)$ , как образ  $\text{id} \in \text{Hom}(M, M)$ .

Построим стрелку обратно, накрыв  $N$  проективным объектом, и взяв ядро:  $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$ . Для  $\text{Hom}(\_, M)$  и этой короткой точной последовательности можно тоже записать кусок длинной точной последовательности правых производных функторов:

$$0 = \text{Ext}^1(P, M) \longleftarrow \text{Ext}^1(N, M) \longleftarrow \text{Hom}(A, M) \longleftarrow \text{Hom}(P, M) \longleftarrow \text{Hom}(N, M)$$

Так как  $P$  — проективен, то (у него есть резольвента  $0 \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow 0$ )  $\text{Ext}^1(P, M) = 0$ . Значит,  $\text{Ext}^1(N, M) \twoheadleftarrow \text{Hom}(A, M)$  — эпиморфизм. Сопоставим элементу  $x \in \text{Ext}^1(N, M)$  его какой-то прообраз  $\beta \in \text{Hom}(A, M)$ . Теперь пусть  $X$  — пушаут диаграммы  $M \xleftarrow{\beta} A \rightarrow P$ .

Построим следующую диаграмму, получая отображение  $X \rightarrow N$  из универсального свойства пушаута, применённого к  $P \rightarrow N$  и нулевому  $M \rightarrow N$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Можно показать, что нижняя последовательность — короткая точная, и мы определим её, как образ элемента  $x \in \text{Ext}^1(N, M)$ .

Далее можно проверить, что в одну сторону эти отображения взаимно обратны — построим по диаграмме выше, как по паре коротких точных последовательностей, последовательность правых производных функторов, и в силу функториальности между ними будут следующие морфизмы:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = \text{Ext}^1(P, M) & \longleftarrow & \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(A, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(P, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) \\ & & \parallel ? & & \uparrow \neg\beta & & \uparrow & & \parallel \\ & & \text{Ext}^1(N, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(M, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(X, M) & \longleftarrow & \text{Hom}(N, M) \end{array}$$

Если я правильно понимаю, то стрелка, помеченная  $\beta$  — тождественное отображение просто-напросто из функториальности длинной точной последовательности, и того, что функторы сохраняют  $\text{id}$ .

Элементу  $x \in \text{Ext}^1(N, M)$  сопоставляется  $\beta \in \text{Hom}(A, M)$ , полученная проходом против стрелки влево. Можно заметить, что образ  $\text{id}$  под действием  $-\cdot\beta$  тоже равен  $\beta$ , так что из коммутативности левого квадрата, если сопоставить  $x$  короткую точную последовательность, а потом обратно, то получится снова  $x$ .

Надо ещё проверить, что обратное отображение не зависит от выбора  $\beta$ , и что композиция в другую сторону тоже тождественна, но это вряд ли будет когда-нибудь написано.  $\square$

## 1.9 Гомологии и когомологии групп

Пусть  $G$  — группа,  $A$  — абелева группа, на которой действует  $G$ . Иными словами,  $A = \mathbb{Z}[G]$ -модуль.

Рассматриваем  $\mathbb{Z}$ , либо как кольцо, либо как  $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с тривиальным действием  $G$ .

Определим гомологии  $H_n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$  (верхний индекс  $\mathbb{Z}[G]$  указывает, что мы работаем в категории  $\mathbb{Z}[G]$ -модулей). Также определим когомологии  $H^n(G, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, A)$ .

Запишем проективную резольвенту по первому аргументу.

- Пусть  $P_n$  — свободный  $\mathbb{Z}$ -модуль с базисом  $\{(g_0, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$ . По совместительству  $P_n$  — свободный  $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с базисом  $\{(1, g_1, \dots, g_n) \mid g_i \in G\}$  и действием  $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$ .
- Теперь определим гомоморфизмы.

$$\cdots \longrightarrow P_0 = \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Границные гомоморфизмы определены так:  $d_n(g_0, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$ . Несложно проверить, что  $d_{n-1} \cdot d_n = 0$ .

- Посчитаем нулевые гомологии и когомологии группы  $G$ .  $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ .

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/I_G$ , где  $I_G = \text{Ker}(\phi)$ , здесь  $\phi : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$  —  $\mathbb{Z}$ -линейный гомоморфизм аугментации, определённый на базисе  $g \mapsto 1$ . Иными словами,  $I_G = \langle g - 1 \mid g \in G \rangle = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g \cdot g \mid \sum_{g \in G} \alpha_g = 0 \right\}$ , все суммы финитные.

Тем самым,  $H_0(G, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A/(I_G A)$  — коинварианты.  $I_G A = \langle ga - a \mid g \in G, a \in A \rangle$ .

- Теперь посчитаем когомологии.  $H^0(G, A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ . Всякому гомоморфизму  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$  можно  $\phi(1)$ . Из  $G$ -линейности  $\forall g \in G : \phi(g) = \phi(g \cdot 1) = g \cdot \phi(1)$ , значит,  $\phi(1) \in A^G \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \forall g \in G : ga = a\}$  — инварианты. Значит, нулевые когомологии — инварианты.

- $H_1(G, \mathbb{Z}) = G^{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} G/[G, G]$ .
- $H^1(G, A) = \text{Der}(G, A)$  — множество скрещённых гомоморфизмов.

Скрещенный гомоморфизм — это такое отображение  $\phi : G \rightarrow A$ , которое обладает свойством  $\phi(gh) = g \cdot \phi(h) + \phi(g)$ .

- $H_2(G, \mathbb{Z}) = ?$  Предположим, что имеется точная последовательность групп  $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$ , то есть  $G \cong F/R$ .

Тогда  $H_2(G, \mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}$ .

Если  $[G, G] = G$  ( $G$  совершенна), то существует универсальное центральное расширение  $\pi : S \twoheadrightarrow G$ , то есть  $\text{Ker}(\pi) \in C(S)$ , и

$$\begin{array}{ccc} S & \twoheadrightarrow & G \\ \exists! \searrow & \uparrow & \text{центрального расширения} \\ & H & \end{array}$$

В этом случае  $H_2(G, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \pi$ . Например, в случае  $G = SL_n(F) : S = \text{St}_n(F)$  — группа Стейнберга. Ядро  $\text{St}_n(F) \twoheadrightarrow SL_n(F)$  — это  $K_{2,n}(F) = H_2(G, \mathbb{Z})$ . Для  $n \geq 5$  от поля ничего не зависит.

## Глава 2

# Теория Галуа

## Лекция VIII

15 апреля 2024 г.

### 2.1 Базовые понятия про расширения полей

Мы будем изучать расширения полей, и базовое поле будем обозначать  $F$  (от английского Field), а расширенное —  $K$  (от немецкого Кёргег). Имеется теоретико-множественное включение  $F \subset K$ , и включение полей обозначается  $K/F$  (это не надо путать с факторкольцом, никаких факторов здесь не берётся, просто общепринятое обозначение).

$K$  является векторным пространством над  $F$ , и  $\dim_F K \stackrel{\text{def}}{=} [K : F]$  — степень расширения.

Для элемента  $\alpha \in K$  поле  $F(\alpha)$  — наименьшее подполе в  $K$ , содержащее  $F$  и  $\alpha$ .

#### 2.1.1 Лемма о простых расширениях. Алгебраические и трансцендентные элементы

**Лемма 2.1.1** (О простых расширениях). *Либо  $F(\alpha) \cong F(t)$  — поле дробно-рациональных функций, оно же поле частных  $F[t]$ , его общий элемент имеет вид  $\frac{p}{q}$  ( $p \in F[t]$ ,  $q \in F[t]^*$ ).*

Либо  $F(\alpha) \cong F[t]/(p)$ , где  $p \in F[t]$  — неприводимый. В этом случае  $\deg p$  — степень расширения.

*Доказательство.* Рассмотрим гомоморфизм  $F$ -алгебр  $\phi : F[t] \rightarrow F(\alpha)$ ,  $t \mapsto \alpha$ .

- Если  $\text{Ker } \phi = \{0\}$ , то  $\text{Im } \phi \cong F[t]$ . Тем самым,  $F(\alpha) \supset \text{Im } \phi$ , а раз  $F(\alpha)$  — поле, то оно содержит и поле частных  $Q(\text{Im } \phi) \cong Q(F[t])$ .

Так как  $F(\alpha)$  — наименьшее подполе, содержащее  $\alpha$ , то  $F(\alpha) \cong F(t)$ .

- Иначе, так как многочлены — PID — то  $\text{Ker } \phi = p \cdot F[t]$ , и  $\text{Im } \phi \cong F[t]/(p)$ . То, что  $p$  неприводим, легко видеть от противного: если  $p = rs$ , то один из  $r, s$  ассоциирован с  $p$ , иначе в кольце появляются делители нуля.

Тем самым, раз  $p$  неприводим, то  $(p)$  — максимальный идеал, откуда  $\text{Im } \phi \cong F[t]/(p)$  — уже поле. Базисом  $F[t]/(p)$  над  $F$  является, например,  $(1, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{\deg(p)-1})$ .  $\square$

В первом случае  $F(\alpha) \cong F(t)$  элемент  $\alpha \in K$  называется *трансцендентным*.

Во втором случае  $F(\alpha) \cong F[t]/(p)$  элемент  $\alpha \in K$  называется *алгебраическим*. В таком случае  $p \in F[t]$  — минимальный многочлен  $\alpha$ . Таким образом,  $F(\alpha) = F[\alpha]$ , где  $F[\alpha]$  — наименьшее кольцо в  $K$ , содержащее  $F$  и  $\alpha$ .

В случае расширений колец вместо слова алгебраический используют *целый* при дополнительном условии унитальности минимального многочлена.

**Определение 2.1.1** (Алгебраическое расширение  $K/F$ ). Такое расширение, что  $\forall \alpha \in K: \alpha$  — алгебраический. В противном случае ( $\exists \alpha \in K: \alpha$  — трансцендентный) расширение называют трансцендентным.

**Определение 2.1.2** (Конечное расширение  $K/F$ ). Расширение конечной степени:  $[K : F] < \infty$ .

**Лемма 2.1.2.** Пусть имеется композиция (ещё говорят башня) расширений  $L/K/F$ . Тогда  $[L : F] = [L : K] \cdot [K : F]$ .

*Доказательство.* Пусть  $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$  — базис  $K$  над  $F$ , и  $(b_\beta)_{\beta \in B}$  — базис  $L$  над  $K$ .

Тогда несложно видеть, что  $(a_\alpha \cdot b_\beta)_{\alpha \in A, \beta \in B}$  — базис  $L$  над  $F$ .  $\square$

## 2.1.2 Конечные и алгебраические расширения

Конечные и алгебраические расширения тесно связаны между собой, но, конечно, существует бесконечное алгебраическое расширение. Например,  $\mathbb{Q}(\sqrt{p}|p \in \mathbb{P})$  — имеет бесконечную степень над  $\mathbb{Q}$ , так как корни из простых чисел линейно независимы над  $\mathbb{Q}$  (что вообще говоря тоже надо обосновать, но это верный факт).

**Теорема 2.1.1.** Пусть  $K/F$  — расширение полей. Следующие условия равносильны:

1. Расширение  $K/F$  конечно.
2. Расширение  $K/F$  — алгебраическое и конечнопорождённое.
3.  $K = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ , где все  $\alpha_i$  алгебраичны над  $F$ .

*Доказательство.*

(3)  $\Rightarrow$  (1) Индукция по  $n$ .

База:  $n = 0 \Rightarrow K = F$ .

Переход:  $F[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = F[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}][\alpha_n]$ . Так как  $\alpha_n$  алгебраично над  $F$ , то оно алгебраично и над  $F[\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$  (впрочем, степень минимального многочлена при увеличении поля может стать меньше).

(1)  $\Rightarrow$  (2)

**Лемма 2.1.3.** Любой элемент конечного расширения  $K/F$  алгебраический.

*Доказательство леммы.*

Рассмотрим  $\alpha \in K$ . Так как расширение конечно, то  $1, \alpha, \alpha^2, \dots$  линейно зависимы. Выбрав линейную зависимость  $\beta_0 + \beta_1 \alpha + \dots + \beta_d \alpha^d = 0$ . Тогда  $\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_d t^d$  аннулирует  $\alpha$ , то есть ядро  $\phi$  из доказательства (лемма 2.1.1) ненулевое.  $\square$

Пусть  $[K : F] = d$ , значит,  $K$  имеет базис  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  над  $F$ . Тогда  $K$  порождено элементами  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  даже просто как векторное пространство, а не как  $F$ -алгебра.  $\square$

(2)  $\Rightarrow$  (3) Тавтологично.

## 2.1.3 Алгебраическое замыкание одного поля в другом

Пусть имеется расширение полей  $K/F$ , тогда  $\text{Int}_K F \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ алгебраичен над } F\}$  — целое (алгебраическое) замыкание  $F$  в  $K$ .

$\text{Int}_K F$  является полем:  $\forall \alpha, \beta \in \text{Int}_K F : \alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \frac{\alpha}{\beta}$  (последнее при  $\beta \neq 0$ ) лежат в  $F[\alpha, \beta]$ , а это — конечное расширение согласно (теорема 2.1.1).

## 2.1.4 Базис трансцендентности

Пусть  $X \subset K$  — произвольное подмножество, где по-прежнему  $K/F$  — расширение полей.

**Определение 2.1.3** ( $X$  алгебраически независим над  $F$ ).  $\forall f \in F[t_1, \dots, t_m], \forall x_1, \dots, x_m \in X$  (где  $x_i$  попарно различны):  $f(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ .

Иными словами, отображение из универсальной  $F$ -алгебры, порождённой элементами  $X$  в  $F[X]$  (определенное на образующих  $x \mapsto x$ ) имеет нулевое ядро.

**Определение 2.1.4** (Линейная оболочка  $X$  над  $F$ ).  $\langle X \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{Int}_K F(X)$  (где, как обычно,  $F(X)$  — наименьшее подполе в  $K$ , содержащее  $F$  и  $X$ ).

**Определение 2.1.5** ( $X$  — (алгебраический) базис расширения  $K/F$ ). Алгебраически независимое  $X$  такое, что  $\langle X \rangle = K$ . При этом  $|X|$  называется *степенью трансцендентности*  $K/F$

*Пример.* В кольце  $F(t)$ : одноэлементное множество  $\{t\}$  — базис трансцендентности.

Для алгебраического базиса  $X$  верны те же аксиомы, что и для базиса векторных полей:

1. todo
2. todo
3. todo

Я не смог найти эти аксиомы, а интересно, может кто-то другой подскажет, как они выглядят?

**Теорема 2.1.2.** Степень трансцендентности не зависит от выбора базиса.

*Доказательство.* Аналогично подобному факту из линейной алгебры. □

## 2.2 Построение полей

### 2.2.1 Поле разложения

Пусть  $F$  — поле,  $f \in F[t]$ .

**Определение 2.2.1** (Поле разложения  $f$  над  $F$ ). Расширение  $F_f/F$ , в котором  $f$  раскладывается на линейные множители, и вкладывающееся (не факт, что единственным образом) в любое другое поле, обладающее тем же свойством.

*Примеры.*

- $F = \mathbb{R}, f(t) = t^2 + 1$ . В этом случае  $F_f \cong \mathbb{C}$ .
- $F = \mathbb{Q}, f(t) = t^3 - 2$ . В этом случае  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  — не поле разложения, оно вкладывается в  $\mathbb{R}$ , а  $f$  в  $\mathbb{R}$  на линейные множители не раскладывается.

Надо присоединить ещё какой-то корень  $f$ , достаточно присоединить какой-то  $\sqrt[3]{1}$ , отличный от 1; это то же самое, что присоединить  $\sqrt{-3}$ , так как  $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1$ . Тем самым, поле разложения  $\mathbb{Q}_f \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$ .

**Теорема 2.2.1.** Для любого  $f \in F[t]$  существует его поле разложения.

*Доказательство.* Индукция по  $\deg f$ .

База:  $\deg f = 1 \Rightarrow F_f = F$ .

Переход: Пусть  $f = pg$ , где  $p$  — неприводим.

Пусть  $E := F[t]/(p)$ . В  $E$ :  $\alpha := \bar{t} = t + (p)$  — корень  $p$ .

Также в  $E$ :  $f(t) = (t - \alpha) \cdot h(t)$  для некоторого  $h : \deg h = \deg f - 1$ . Положим  $F_f := E_h$ ,  $E_h$  существует по индукционному предположению.

Теперь пусть  $K/F$  — другое поле, в котором  $f$  раскладывается на линейные множители. Сначала устроим вложение  $E \hookrightarrow K$ , отправив  $\alpha$  в любой корень  $p$ . Такой корень найдётся в  $K$ , так как  $F[t]$  — UFD, и раз уж  $f$  раскладывается на линейные множители в  $K$ , то  $p$  и подавно.

При этом  $h$  раскладывается в  $K$  на линейные множители, по индукции  $E_h$  вкладывается в  $K$ .  $\square$

Пусть  $K/F$  и  $L/F$  — расширения полей. Тогда гомоморфизм  $\phi : K \rightarrow L$  называется *гомоморфизмом полей над  $F$* , если он оставляет  $F$  на месте. Все гомоморфизмы полей по определению сохраняют 1, в частности, любой гомоморфизм полей инъективен ( $\phi(x) = \phi(y) \iff \phi(xy^{-1}) = \phi(1) \iff xy^{-1} = 1$ ).

**Теорема 2.2.2.** Пусть  $K$  — поле, в котором  $f \in F[t]$  раскладывается на линейные множители. Тогда  $K$  — поле разложения  $f \iff K \cong F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ , где  $\alpha_i$  — все корни  $f$  ( $\deg f = n$ ).

*Доказательство.*

- $\Leftarrow$ . Построенное в (теорема 2.2.1) поле разложения действительно порождено корнями  $f$ .
- $\Rightarrow$ . В поле разложения  $f$  по определению лежат все корни  $f$ . Более того, раз в  $F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$  многочлен  $f$  разложим на линейные множители, то имеется гомоморфизм  $K \rightarrow F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ . Он сюръективен (в образе лежит  $F$ , так как гомоморфизм — над  $F$ , и в образе лежат корни  $\alpha_i$ , так как в них отправятся корни многочлена  $f$ ) и инъективен (любой гомоморфизм полей инъективен).  $\square$

## Лекция IX

16 апреля 2024 г.

**Лемма 2.2.1.** Пусть  $K/F$  и  $L/F$  — конечные расширения, и  $K \rightarrow L, L \rightarrow K$  — гомоморфизмы над  $F$ . Тогда  $K \cong L$  (и оба отображения — изоморфизмы).

*Доказательство.* Достаточно убедиться, что оба гомоморфизма биективны, а это удобно проверять, рассматривая  $K$  и  $L$ , как векторные пространства над  $F$ . Так как гомоморфизмы полей — мономорфизмы, то  $\dim_F K = \dim_F L$ .  $\square$

### 2.2.2 Конечные поля

Пусть  $F$  — конечное поле ( $|F| < \infty$ ). В поле есть единница, и так как поле конечное, то его характеристика ненулевая: в конечной аддитивной группе поля любой элемент, в том числе 1, имеет конечный порядок. Пусть  $p$  — эта характеристика. Так как поле — область целостности, то  $p \in \mathbb{P}$ .

Тем самым, в  $F$  вкладывается поле из  $p$  элементов, изоморфное факторкольцу  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Обозначим поле из  $p$  элементов за  $\mathbb{F}_p$ .

**Лемма 2.2.2.** Любое конечное поле характеристики  $p$  содержит  $p^n$  элементов, где  $n \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Так как  $F$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}_p$ , то  $F \stackrel{\mathbb{F}_p\text{-Vect}}{\cong} \mathbb{F}_p^n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Теорема 2.2.3.** Для любого простого  $p$  и любого  $n \in \mathbb{N}$  существует поле из  $p^n$  элементов. При этом все такие поля изоморфны (но изоморфизмов может быть несколько).

*Доказательство.*

- Обозначим  $q := p^n \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим  $f \in \mathbb{F}_p[t], f(t) = t^q - t$ , и посмотрим на его поле разложения  $(\mathbb{F}_p)_f$ . Так как в  $\mathbb{F}_p$ :  $q = 0$ , то  $f'(t) = qt^{q-1} - 1 = -1$ , что показывает, что у  $f$  нет кратных корней. Тем самым,  $F := (\mathbb{F}_p)_f$  содержит по меньшей мере  $q$  элементов — корни  $f$ .

- Рассмотрим корни  $f$  в его поле разложения  $X := \{x \in F \mid x^q - x = 0\} \subset F$ . Заметим, что  $X$  замкнуто относительно сложения, умножения и взятия обратного:

$$\begin{cases} x^q = x \\ y^q = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (xy)^q = xy \\ (x+y)^q = x^q + y^q = x + y \\ \left(\frac{1}{x}\right)^q = \frac{1}{x^q} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Первое следует из коммутативности, второе — из того, что  $p$  делит все биномиальные коэффициенты  $\binom{q}{k}$ , кроме  $\binom{q}{0}$  и  $\binom{q}{q}$ ; иными словами,  $x \mapsto x^p$  — эндоморфизм Фробениуса из первого семестра, а  $x^q = ((x^p)^\cdot)^p$ .

Тем самым,  $X \leq F$  — подполе в  $F$ . Из замкнутости  $X$  относительно сложения  $\mathbb{F}_p \subset X$ , так как всякий элемент в  $\mathbb{F}_p$  — сумма единиц.

С другой стороны,  $X$  содержит все корни  $t^q - t$ , а  $F$  — поле разложения  $t^q - t$ , значит, имеется и гомоморфизм  $F \rightarrow X$ .  $X/\mathbb{F}_p$  и  $F/\mathbb{F}_p$  конечны, откуда (лемма 2.2.1)  $X = F$ .

- Пусть  $E$  — произвольное поле порядка  $p^n$ . Его характеристика равна  $p$ , значит, в него вкладывается  $\mathbb{F}_p$ .  $|E^*| = q - 1$ , значит по теореме Лагранжа (о порядке элемента в группе)  $\forall x \in E : x^{q-1} = 1$ . Тем самым,  $f$  раскладывается на линейные множители и в  $E$ , откуда опять же имеется вложение  $F \hookrightarrow E$ . Но  $|F| = |E| = q$ , значит,  $F \cong E$ .  $\square$

### 2.2.3 Алгебраическая замкнутость поля и алгебраическое замыкание

**Лемма 2.2.3.** *Пусть  $F$  — поле. Следующие условия эквивалентны:*

1.  $\forall f \in F[t] \setminus F : f$  раскладывается на линейные множители в  $F$ .
2.  $\forall f \in F[t] \setminus F : f$  имеет корень в  $F$ .
3.  $\forall f \in F[t] \setminus F : (f \text{ неприводим} \iff \deg f = 1)$ .
4. Любое алгебраическое расширение  $F$  совпадает с  $F$ .
5. Любое конечное расширение  $F$  совпадает с  $F$ .

*Доказательство.* Тривиально.

(1)  $\Rightarrow$  (2) Тавтологично.

(2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  следует из теоремы Безу ( $\alpha$  корень  $\iff t - \alpha$  — делитель),  $\Leftarrow$  следует из того, что все многочлены степени 1 неприводимы.

(3)  $\Rightarrow$  (4) Пусть  $E/F$  — алгебраическое расширение, выберем  $\theta \in E$ , и найдём его минимальный многочлен. Он неприводим  $\Rightarrow \deg f = 1$ , то есть  $\theta \in F$ .

(4)  $\Rightarrow$  (5) Тавтологично.

(5)  $\Rightarrow$  (1) Рассмотрим  $f \in F[t]$ .  $F_f = F \Rightarrow$  все корни  $f$  лежат в  $F$ . Так как  $f$  неприводим, то  $\deg f = 1$ .  $\square$

**Определение 2.2.2** (Алгебраически замкнутое поле). Поле  $F$ , удовлетворяющее условиям из предыдущей леммы (лемма 2.2.3).

**Лемма 2.2.4.** *Пусть  $K/F$  — алгебраическое расширение, и любой многочлен из  $F[t]$  раскладывается на линейные множители в  $K[t]$ . Тогда  $K$  алгебраически замкнуто.*

*Доказательство.* Пусть  $f$  — неприводимый в  $K[t]$ . Без потери общности  $f$  — унитальный:  $f(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_0$ . Построим поле  $E := F[\alpha_0, \dots, \alpha_n]$ , расширение  $E/F$  конечно.

$f$  тем более неприводим в  $E$ , значит, можно рассмотреть поле  $L := E[t]/(f)$ , расширение  $L/E$ , а

$$\begin{array}{ccc} & K & L \\ \text{алгебраично} & | & \\ \text{стало быть и } L/F \text{ тоже конечны.} & E & \text{конечно} \\ & | & \\ & F & \end{array}$$

$f$  имеет корень в  $L$ , назовём его  $\beta$ . В силу конечности  $\beta$  алгебраично над  $F$ , то есть  $\exists g \in F[t] : g(\beta) = 0$ . Согласно посылке леммы,  $g$  разложим на множители в  $K[t]$ , значит, имеется вложение  $\phi : F_g \hookrightarrow K$  над  $E$ . Но  $f(\beta) = 0 \Rightarrow f(\phi(\beta)) = \phi(f(\beta)) = \phi(0) = 0$ , то есть  $f$  имеет корень в  $K$ .  $\square$

*Интересный факт.* Можно ослабить посылку: если  $K/F$  — алгебраическое расширение, и любой многочлен из  $F[t]$  имеет корень в  $K$ , то  $K$  алгебраически замкнуто.

**Лемма 2.2.5.** *Пусть  $L/F$  — расширение полей, причём  $L$  алгебраически замкнуто. Тогда  $\text{Int}_L F$  тоже алгебраически замкнуто.*

*Доказательство.* Рассмотрим  $f \in F[t]$ . В  $L$  он раскладывается на линейные множители  $f(t) = (t - \alpha_1) \cdots (t - \alpha_n)$ , где  $\alpha_i \in L$ . По определению алгебраического замыкания  $F$  в  $L$ ,  $\alpha_i \in \text{Int}_L F$ . Применяя (лемма 2.2.4), получаем, что  $\text{Int}_L F$  алгебраически замкнуто.  $\square$

*Пример.* Рассмотрим расширение  $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ . Целые алгебраические числа  $\mathbb{A} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Int}_{\mathbb{C}} \mathbb{Q}$  — алгебраически замкнутое подполе в  $\mathbb{C}$ . Оно не совпадает с  $\mathbb{C}$ , так как  $\mathbb{C}$  континуально, а  $\text{Int}_{\mathbb{C}} \mathbb{Q}$  счётно.

**Определение 2.2.3** (Алгебраическое замыкание поля  $F$ ). Алгебраическое расширение  $F$ , являющееся алгебраически замкнутым полем. Обозначается  $F^{\text{alg}}$ .

**Теорема 2.2.4.** У любого поля  $F$  существует алгебраическое замыкание.

*Доказательство.* Рассмотрим множество многочленов  $F[t]$ , как множество индексов, и введём множество переменных  $X := \{x_f \mid f \in F[t]\}$ . Далее рассмотрим кольцо многочленов от этих переменных  $F[X]$ , и профакторизуем его по идеалу  $J := (f(x_f) \mid f \in F[t])$ .

**Лемма 2.2.6.** *Этот идеал не совпадает со всем кольцом:  $J \neq F[X]$ .*

*Доказательство леммы.*

Пойдём от противного:  $J = F[X] \Rightarrow 1 \in J$ , то есть существует конечная линейная комбинация

$$g_1 f_1(x_{f_1}) + \cdots + g_m f_m(x_{f_m}) = 1, \text{ где } f_i, g_i \in F[t] \quad (\Delta)$$

Корни конечного множества многочленов мы умеем присоединять: введём  $f := f_1 \cdots f_m$ , в  $F_f$  у каждого из  $f_i$  есть корень, назовём его  $\beta_i$ . Теперь устроим гомоморфизм  $F$ -алгебры  $\phi : F[X] \rightarrow F_f$ ,  $\begin{cases} x_{f_i} \mapsto \beta_i \\ x_g \mapsto 0 \end{cases}$ , он определён согласно универсальному свойству кольца многочленов.

В образе  $(\Delta)$  обращается в равенство  $0 = 1$ , но в  $F_f$  это, конечно, неверно.  $\square$

Раз  $J \not\subseteq F[X]$  не совпадает со всем кольцом, то можно взять максимальный идеал  $\mathfrak{m}$ , содержащий  $J$ , и не совпадающий со всем кольцом (лемма Цорна). Факторкольцо  $E_1 := F[X]/\mathfrak{m}$  является полем, в котором образ переменной  $x_f$  — корень многочлена  $f$ .

К сожалению, не факт, что  $E_1$  алгебраически замкнуто, (лемма 2.2.4) неприменима, так как неизвестно, что всякий многочлен из  $F[t]$  раскладывается в  $E_1[t]$  на линейные множители.

Обозначим  $E_0 := F$ , и устроим итерации, по  $E_i$  получая  $E_{i+1}$  согласно вышеописанной процедуре. Для цепочки вложений полей  $E_0 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow E_2 \hookrightarrow \dots$  можно рассмотреть объединение с понятно

определенными операциями. Поле  $\overline{F} := \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$  уже является алгебраически замкнутым полем (любой многочлен из  $\overline{F}[t]$  имеет конечное количество коэффициентов, которые все лежат в каком-то  $E_N$ , а корень можно найти в  $E_{N+1}$ ).

Теперь осталось положить  $F^{\text{alg}} := \text{Int}_{\overline{F}} F$ , оно алгебраически замкнуто, согласно (лемма 2.2.5).  $\square$

## Лекция X

22 апреля 2024 г.

**Предложение 2.2.1.** Пусть  $E/F$  — алгебраическое расширение, и  $L/F$  — такое расширение, что  $\forall f \in F[t]: f$  раскладывается на линейные множители в  $L[t]$ . Обозначим  $K := \text{Int}_L F$ . Тогда

1. Существует вложение  $\phi: E \hookrightarrow L$  над  $F$ .
2. Для всякого вложения  $\phi$ :  $\phi(E) \subset K$ .
3. Если  $E$  алгебраически замкнуто, то  $\phi(E) = K$ .

*Доказательство.*

1. Образуем множество  $\mathcal{X} := \left\{ (\tilde{F}, \phi) \mid F \subset \tilde{F} \subset E, \phi: \tilde{F} \hookrightarrow L \right\}$ . На  $\mathcal{X}$  введём частичный порядок:  $(F', \phi') \preceq (F'', \phi'') \iff F' \subset F''$  и  $\phi''|_{F'} = \phi'$ .

$\mathcal{X}$  непусто, так как  $(F, F \hookrightarrow L) \in \mathcal{X}$ .

Убедимся, что здесь применима лемма Цорна: если  $(F_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$  — цепь, то  $\tilde{F} := \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$  вместе с  $\tilde{\phi}$  — верхняя грань (где  $\tilde{\phi}$  определено так: и  $\forall x \in \tilde{F}: \tilde{\phi}(x) := \phi_\alpha(x)$  для произвольного  $\alpha$ , такого, что  $x \in F_\alpha$ ).

Тем самым, имеется максимальный элемент  $(\tilde{F}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{X}$ . Предположим, что  $\tilde{F} \neq E$ , то есть  $\exists \theta \in E \setminus \tilde{F}$ . Пусть  $f \in F[t]$  — минимальный многочлен  $\theta$  в  $F$ , и  $g \in \tilde{F}[t]$  — минимальный многочлен  $\theta$  над  $\tilde{F}$ .

Отождествим  $\tilde{F}$  с его образом  $\tilde{\phi}(\tilde{F}) \subset L$  ( $\phi$  инъективно, как гомоморфизм полей).

В  $L$  многочлен  $f$  раскладывается на линейные множители. Так как  $g \mid f$ , то  $g \in L[t]$  тоже раскладывается на линейные множители, то есть  $\exists \alpha \in L: g(\alpha) = 0$ . Согласно универсальному свойству простого расширения:  $\tilde{F}[\theta] \cong \tilde{F}[t]/(g)$ , то есть  $\exists! \psi: \tilde{F}[\theta] \rightarrow \tilde{F}[\alpha]$  — гомоморфизм полей над  $\tilde{F}$ , такой, что  $\psi(\theta) = \alpha$ . Пара  $(\tilde{F}[\theta], \psi)$  строго больше пары  $(\tilde{F}, \tilde{\phi})$ , противоречие. Тем самым,  $\tilde{F} = E$ , и имеется полностью определённое  $E \rightarrow L$ .

2. Корень  $f \in F[t]$  переходит в корень, поэтому  $\phi$  сохраняет множество алгебраических элементов, откуда  $\phi(E) \subset K$ .
3. Рассмотрим  $\beta \in K$ , это корень некоторого унитального многочлена  $f \in F[t]$ . В  $E$  многочлен  $f$  раскладывается на линейные множители  $f(t) = (t - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (t - \alpha_n)$ , где  $\alpha_i \in E$ . Применяя индуцированный  $\phi: E[t] \rightarrow L[t]$  к данному разложению, получаем  $f(t) = (t - \phi(\alpha_1)) \cdot \dots \cdot (t - \phi(\alpha_n))$ . Подставляя  $\beta$ , получаем, нуль. Значит,  $\beta = \phi(\alpha_i)$  для некоторого  $i$ .  $\square$

**Следствие 2.2.1.** Любое алгебраическое расширение  $F$  вкладывается в алгебраическое замыкание  $F$ .

**Следствие 2.2.2.** Алгебраическое замыкание  $F$  вкладывается в любое алгебраически замкнутое поле, содержащее  $F$ .

**Следствие 2.2.3.** Алгебраическое замыкание единственно с точностью до не единственного изоморфизма.

## 2.3 Сепарабельность

Пусть  $F$  — поле,  $f \in F[t]$ .

**Определение 2.3.1** (Сепарабельный многочлен  $f$ ).  $f$  не имеет кратных корней в  $F^{\text{alg}}$ .

Так как кратные корни — это корни  $\gcd(f, f')$ , то условие сепарабельности эквивалентно условию  $\gcd(f, f') = 1$ .

Если  $f = \prod_{i=1}^n f_i$ , где  $f_i$  неприводимы, то  $f$  сепарабелен  $\iff$  все  $f_i$  различны и сепарабельны.

Неприводимый же многочлен на сепарабельность проверять легко:  $\deg f' < \deg f$ , поэтому при  $\deg f > 0$ :  $\gcd(f, f') \neq 1 \iff f' = 0$  (что бывает только в конечной характеристике).

Теперь пусть  $E/F$  — алгебраическое расширение полей.

**Определение 2.3.2** ( $\alpha \in E$  сепарабелен над  $F$ ). Минимальный многочлен  $\alpha$  сепарабелен.

**Определение 2.3.3** (Расширение  $E/F$  сепарабельно).  $\forall \alpha \in E: \alpha \in E$  сепарабелен над  $F$ .

*Интересный факт.*  $F = E^{\text{Aut}(E/F)} \iff E/F$  — сепарабельное расширение. Здесь  $\text{Aut}(E/F)$  — автоморфизмы  $E$ , тождественные над  $F$ , и для  $G \subset \text{Aut}(E/F)$ :  $E^G \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \forall g \in G: gx = x\}$  — множество точек, оставляемых под действием  $G$  на месте.

*Примеры* (Сепарабельные и несепарабельные расширения).

- Любое расширение поля характеристики нуль сепарабельно.
- Пусть  $E := \mathbb{F}_p(t)$ ,  $F := \mathbb{F}_p(t^p)$  (подполе в  $E$ , содержащее только степени  $t$ , кратные  $p$ ). Рассмотрим многочлен  $x^p - t^p \in F[x]$ . Над  $E$ :  $x^p - t^p = (x - t)^p$ , то есть он раскладывается на кратные линейные множители. Но над  $F$  многочлен неприводим, так как легко перечислить все его делители в  $E[t]$ , и убедиться, что в  $F$  они не лежат.

Получается,  $x^p - t^p \in F[x]$  неприводим и несепарабелен. И действительно,  $(x^p - t^p)' = px^{p-1} = 0$ .

**Определение 2.3.4** (Совершенное поле  $F$ ). Любое алгебраическое расширение  $F$  сепарабельно.

**Упражнение 2.3.1.** Верно ли, что  $F$  совершенно  $\iff$  эндоморфизм Фробениуса  $\text{Frob} : F \rightarrow F, x \mapsto x^p$  сюръективен?

*Примеры.*

- Если  $\text{char } F = 0$ , то  $F$  совершенно.
- Если  $|F| < \infty$ , то  $F$  совершенно.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\theta \in F^{\text{alg}}$ .  $|F[\theta]| = q^n$ , где  $q := |F|$ . Тогда  $\theta^{q^n-1} = 1$  (теорема Лагранжа для мультиплкативной группы  $F[\theta]^*$ ), то есть  $\theta$  — корень  $t^{q^n-1} - 1$ .

Этот многочлен взаимно прост со своей производной:  $(t^{q^n-1} - 1)' = (q^n - 1)t^{q^n-2} = -t^{q^n-2}$ , и  $\gcd(-t^{q^n-2}, t^{q^n-1} - 1) = 1$ .

Минимальный многочлен  $\theta$  делит  $t^{q^n-1} - 1$ , значит, он тоже не имеет кратных корней.  $\square$

## Лекция XI 29 апреля 2024 г.

**Предложение 2.3.1.** Пусть  $E/F$  — алгебраическое расширение полей. Следующие условия эквивалентны:

1.  $E/F$  несепарабельно.
2. Минимальный многочлен некоторого  $\theta \in E$  несепарабелен над  $F$ .
3.  $\exists f \in F[t] — неприводимый в F[t], такой, что f' = 0, причём f имеет корень в E.$

4.  $\exists f \in F[t]$  — неприводимый в  $F[t]$ , такой, что  $f$  имеет кратный корень в  $E$ .
5.  $\exists f \in F[t]$  — неприводимый в  $F[t]$ , такой, что  $\exists g \in F[t] : f(t) = g(t^p)$ , причём  $f$  имеет корень  $E$ .

*Доказательство.* (1)  $\iff$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\iff$  (4) и (3)  $\Rightarrow$  (5) очевидно (эквивалентность (3)  $\iff$  (4) соблюдена, так как для неприводимого многочлена  $f : \gcd(f, f') \neq 1 \iff f' = 0$ ).

Докажем (5)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $\theta \in E$  — корень  $f$ . Подставим:  $f(\theta) = g(\theta^p) = 0$ . Получили  $(t - \theta^p) \mid g \Rightarrow (t - \theta)^p = t^p - \theta^p \mid f$ .  $\square$

На самом деле, данное предложение говорит, что кратность любого корня неприводимого несепарабельного многочлена делится на  $p$ . Используя его, несложно доказать эквивалентность из (упражнение 2.3.1):

*Доказательство.* Если  $E/F$  несепарабельно, то найдётся неприводимый многочлен  $f = (\alpha_n t^{pn} + \alpha_{n-1} t^{p(n-1)} + \dots + \alpha_0) \in F[t]$ . Но так как автоморфизм Фробениуса сюръективен, то  $\forall \alpha_j \in F : \exists \beta_j \in F : \beta_j^p = \alpha_j$ . Получаем

$$\alpha_n t^{pn} + \alpha_{n-1} t^{p(n-1)} + \dots + \alpha_0 = (\beta_n t^{pn} + \beta_{n-1} t^{p(n-1)} + \dots + \beta_0)^p$$

что противоречит неприводимости  $f$ .  $\square$

**Упражнение 2.3.2.** Сепарабельное расширение сепарабельного расширения сепарабельно.

## 2.4 Расширения Галуа

**Определение 2.4.1** (Расширение  $E/F$  нормально). Любой неприводимый многочлен из  $F[t]$ , имеющий корень в  $E$ , раскладывается на линейные множители в  $E$

*Пример.*  $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] / \mathbb{Q}$  не нормально, так как  $t^3 - 2$  не раскладывается на линейные множители даже в  $\mathbb{R}$ .

Любое расширение несложно сделать нормальным, присоединив все корни всех неприводимых многочленов из  $F[t]$ , имеющих корни в  $E$ .

**Определение 2.4.2** (Расширение Галуа). Конечное сепарабельное нормальное расширение.

Условие конечности в определении иногда отсутствует, но мы другими заниматься не будем.

**Определение 2.4.3** (Группа Галуа расширения Галуа  $E/F$ ). Группа автоморфизмов  $E$ , тождественных на  $F$ :  $\text{Gal}(E/F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(E/F)$ .

Группа автоморфизмов расширения  $E/F$  имеет смысл и не для расширения Галуа, но там не используется запись  $\text{Gal}$ .

### 2.4.1 Теорема о количестве вложений

**Теорема 2.4.1.** Пусть имеются расширения  $K/F$  и  $E/F$ , и  $f \in F[t]$ . При этом  $K$  порождено некоторыми корнями многочлена  $f$ , а в  $E$ :  $f$  раскладывается на линейные множители. Пусть  $n$  — количество вложений  $K \hookrightarrow E$  над  $F$ .

1.  $0 < n \leq [K : F]$
2. Если  $f$  сепарабелен, то  $n = [K : F]$ .
3. Если  $f$  несепарабелен, свободен от квадратов в  $F[t]$ , и любой неприводимый в  $F[t]$  сомножитель  $f$  имеет корень в  $K$ , то  $n < [K : F]$ .

*Доказательство.* Индукция по степени расширения  $[K : F]$ .

База:  $[K : F] = 1 \iff K = F$ . Все три пункта очевидны.

Переход: разложим  $f = f_1 \cdots f_n$ , где неприводимые  $f_i \in F[t]$ .  $K \neq F \Rightarrow$  не все  $f_i$  не имеют корней в  $K \setminus F$ . Без потери общности  $f_1$  имеет корень в  $K \setminus F$ . Дополнительно, если такой существует, то выберем  $f_1$ , как несепарабельный множитель, имеющий корень в  $K \setminus F$ .

Зафиксируем какое-то вложение  $F[t]/(f_1) \hookrightarrow K$ , отождествим  $F[t]/(f_1)$  со своим образом  $\tilde{F} \leq K$ . Используя универсальное свойство простого расширения, получаем, что количество вложений  $\tilde{F} \hookrightarrow E$  (назовём это количество  $k$ ) равно количеству корней  $f_1$  в  $E$ .

Если  $f_1$  сепарабелен, то в  $E$  он имеет  $\deg f_1$  корней, иначе — строго меньше.

Пусть  $\phi : \tilde{F} \hookrightarrow E$  — фиксированное вложение. Отождествим  $\tilde{F}$  и  $\phi(\tilde{F})$ . Расширение  $K/\tilde{F}$  порождено корнями  $f$ , он по-прежнему раскладывается на линейные множители в  $E$ .

$[K : \tilde{F}] \cdot [\tilde{F} : F] = [K : F] \Rightarrow [K : \tilde{F}] < [K : F]$ . По индукционному предположению существует  $m$  вложений  $K \hookrightarrow E$  над  $\tilde{F}$ , где  $m \leq [K : \tilde{F}]$ .

Так как столько вложений имеется для каждого  $\phi$ , то  $n = km \leq [\tilde{F} : F] \cdot [K : \tilde{F}] = [K : F]$ . При этом, если  $f$  сепарабелен и свободен от квадратов, то несепарабельный  $f_1$ , имеющий корень в  $K$ , найдётся, тогда  $k < [\tilde{F} : F]$  и  $n < [K : F]$ .  $\square$

**Следствие 2.4.1.** Пусть  $K/F$  и  $E/F$  — конечные расширения.

1. Количество вложений  $K \hookrightarrow E$  над  $F$  не превосходит  $[K : F]$ .
2. Существует расширение  $L/E$ : имеется вложение  $K \hookrightarrow L$  над  $F$ .
3. Если  $E/F$  — расширение Галуа, то количество вложений  $K \hookrightarrow E$  над  $F$  равно либо  $[K : F]$ , либо 0.

*Доказательство.* Пусть  $K = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ , пусть  $f_1, \dots, f_n$  — минимальные многочлены  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  соответственно.

Избавимся от ассоциированных, оставив только уникальные, и положим  $f$  равному их произведению.

Положим  $L := E_f$ . Теперь выполнена посылка (теорема 2.4.1), откуда количество вложений  $K \hookrightarrow L$  над  $F$  не 0, но и не более  $[K : F]$ .

Если существует вложение  $K \hookrightarrow E$  над  $F$ , то все  $f_i$  имеют корни в  $E$ . Если дополнительно  $E/F$  — расширение Галуа, то и подрасширение  $E/F$  — сепарабельно. Тогда  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  сепарабельны над  $F$ , то есть  $f$  сепарабелен над  $F$ . А из нормальности расширения  $E/F$  все  $f_i$  раскладываются на линейные множители в  $E$ . Тем самым,  $L = E$ , и (теорема 2.4.1) завершает доказательство.  $\square$

**Следствие 2.4.2.** Для расширения Галуа:  $|\text{Gal}(E/F)| = [E : F]$ .

## 2.4.2 Лемма Артина

**Теорема 2.4.2** (Лемма Артина). Пусть  $E$  — поле, и  $G \leq \text{Aut}(E)$ ,  $|G| < \infty$ . Обозначим  $F := E^G \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in E \mid \forall g \in G : g\alpha = \alpha\}$ .

Тогда  $[E : F] = |G|$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать, что  $[E : F] \leq |G|$ , обратное неравенство следует из (следствие 2.4.1).

Пусть  $G = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ , где  $\phi_1 = 1_G = \text{id}_E$ . Пусть  $m > n, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in E$ , докажем, что  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  линейно зависимы над  $F$ , то есть что имеет место линейная зависимость  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$ .

Заведём систему линейных уравнений  $\left\{ \sum_{i=1}^m \phi_j(\alpha_i)x_i = 0 \right\}_{j=1}^n$  относительно переменных  $x_1, \dots, x_m$ .

В ней уравнений меньше, чем неизвестных, поэтому по теореме о размерности пересечения имеется ненулевое решение  $\beta_1, \dots, \beta_m \in E$ . Дальше надо доказать, что найдётся решение, где все  $\beta_i \in F$ .

Выберем набор  $\beta_1, \dots, \beta_m$  с наименьшим количеством ненулевых элементов. Пусть  $\beta_i \neq 0$  для некоторого  $i$ , отнормируем решение, поделив на  $\beta_i$ . Теперь  $\beta_i = 1$ . Утверждается, что все  $\beta_i \in F$ .

От противного: если  $\exists k : \beta_k \notin F$ , то  $\exists l : \phi_l(\beta_k) \neq \beta_k$ . Тогда не только  $\beta_1, \dots, \beta_m$  — решение, но и  $\phi_l(\beta_1), \dots, \phi_l(\beta_m)$  — тоже решение, причём их поэлементная разность имеет меньшее количество ненулевых элементов. Получаем противоречие.  $\square$

## Лекция XII

6 мая 2024 г.

**Следствие 2.4.3.** Для любой группы  $G \leqslant \text{Aut}(E)$ :  $\text{Aut}(E/E^G) = G$ .

*Доказательство.* Очевидно,  $G \leqslant \text{Aut}(E/E^G)$ . По лемме Артина  $|G| = [E : E^G] \geqslant |\text{Aut}(E/E^G)| \geqslant |G|$ , и равенство достигается только при  $G = \text{Aut}(E/E^G)$   $\square$

### 2.4.3 Теорема о характеристизации расширений Галуа

**Теорема 2.4.3** (Характеризация расширений Галуа). Пусть  $E/F$  — расширение полей. Следующие условия эквивалентны:

1.  $E/F$  — расширение Галуа.
2.  $E$  — поле разложения некоторого сепарабельного  $f \in F[t]$ .
3.  $F = E^{\text{Aut}(E/F)}$  и  $[E : F] < \infty$ .
4. Для некоторой конечной  $G \leqslant \text{Aut}(E)$ :  $F = E^G$ .

*Доказательство.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) Аналогично доказательству (следствие 2.4.1). Так как  $E/F$  — расширение Галуа, то оно порождено конечным множеством элементов:  $E = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ . Пусть  $f_i \in F[t]$  — минимальные многочлены  $\alpha_i$ , и пусть  $f := f_{i_1} \cdot \dots \cdot f_{i_k}$ , где перемножаются уникальные среди  $f_i$ .

$f$  сепарабелен, как произведение взаимно простых сепарабельных многочленов,  $E$  порождено корнями  $f$ , и так как  $E/F$  нормально, то  $f$  разложим на линейные множители в  $E$ . Согласно (теорема 2.2.2),  $E = F_f$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Согласно (следствие 2.4.1),  $|\text{Aut}(E/F)| = [E : F]$ . Ясно, что  $F \subset \tilde{F} := E^{\text{Aut}(E/F)}$ . С другой стороны, по лемме Артина,  $[E : \tilde{F}] = |\text{Aut}(E/F)|$ , откуда  $[\tilde{F} : F] = 1$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) Согласно (теорема 2.4.1),  $[E : F] < \infty \Rightarrow |\text{Aut}(E/F)| < \infty$ , тем самым,  $G := \text{Aut}(E/F)$  подойдёт.

(4)  $\Rightarrow$  (1) По лемме Артина,  $[E : F] = |G|$ , тем самым, расширение конечно. Пусть  $f \in F[t]$  — неприводимый, имеющий корень  $\alpha \in E$ . Рассмотрим орбиту  $\alpha$  под действием  $G$ :  $G\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ . Пусть  $h(t) := (t - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (t - \alpha_m) \in E[t]$ . Раскрыв скобки (по теореме Виета)

$$h(t) = t^m - s_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m)t^{m-1} + s_2(\alpha_1, \dots, \alpha_m)t^{m-2} + \dots + (-1)^m s_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

где  $s_k(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  —  $k$ -й основной симметрический многочлен, то есть сумма всевозможных произведений вида  $\alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_k}$  по всем кортежам  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ . Эти коэффициенты инвариантны под действием  $G$ , значит, они лежат в  $F$ . Под действием  $G$  коэффициенты  $h$  остаются на месте, а корни  $h$  переходят в корни.

Таким образом,  $\forall g \in G : \exists \sigma \in S_m : g(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)}$ . Но раз  $h$  раскладывается на различные линейные множители в  $E[t]$ , то минимальный многочлен  $\alpha$  (который делит  $h$ ) тоже раскладывается на различные линейные множители в  $E[t]$ . Так как  $\alpha \in E$  был произвольным, то  $E/F$  по определению сепарабельно и нормально.  $\square$

#### 2.4.4 Характеризация сепарабельных расширений

**Следствие 2.4.4.** *Расширение  $E/F$ , порождённое конечным числом сепарабельных элементов, вкладывается в расширение Галуа (и, следовательно, сепарабельно).*

*Доказательство.* Аналогично доказательству (следствие 2.4.1). Пусть  $E = F[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ , где  $\alpha_i$  сепарабельны. Пусть  $f_i \in F[t]$  — минимальные многочлены  $\alpha_i$ , и пусть  $f := f_{i_1} \cdots f_{i_k}$ , где перемножаются уникальные среди  $f_i$ .

$f$  сепарабелен, можно устроить вложение  $E \hookrightarrow F_f$  (оно есть, например, согласно (следствие 2.4.1)), а  $F_f$  — расширение Галуа согласно (теорема 2.4.3).  $\square$

**Следствие 2.4.5.** *Пусть  $K/F$  — расширение полей. Множество элементов  $K$ , сепарабельных над  $F$ , образует поле.*

*Доказательство.*  $\forall \alpha, \beta \in K : F[\alpha, \beta]$  сепарабельно (следствие 2.4.4), значит,  $\alpha + \beta, \alpha\beta$  и даже  $\frac{\alpha}{\beta}$  (при  $\beta \neq 0$ ) тоже сепарабельны.  $\square$

Это поле называется *сепарабельным замыканием*  $F$  в  $K$ . Если опускают  $K$ , то подразумевается сепарабельное замыкание в  $F^{\text{sep}} \subset F^{\text{alg}}$ .

**Определение 2.4.4** (Чисто несепарабельное расширение  $K/E$ ).  $\forall \alpha \in K \setminus E$ :  $\alpha$  не сепарабелен над  $E$ .

**Следствие 2.4.6.** *Любое алгебраическое расширение  $K/F$  раскладывается в башню сепарабельного расширения  $E/F$  и чисто несепарабельного  $K/E$ .*

*Доказательство.* Выберем за  $E$  сепарабельное замыкание  $F$  в  $K$ . Дальше надо проверить, что элементы в  $K$ , несепарабельные над  $F$ , остались несепарабельными над  $E$ , упражнение читателю.  $\square$

### 2.5 Соответствие Галуа

**Следствие 2.5.1.** *Пусть имеется башня расширений  $E/K/F$ , и  $E/F$  — расширение Галуа. Тогда  $E/K$  — расширение Галуа.*

*Доказательство.* Раз  $E/F$  — расширение Галуа, то  $\exists f \in F[t] : E = F_f$ , где  $f$  сепарабелен. Тогда  $E = K_f$ , значит,  $E/K$  — действительно расширение Галуа.  $\square$

Теперь у нас всё готово, чтобы установить соответствие Галуа.

$E/F$  — расширение Галуа,  $G := \text{Gal}(E/F) = \text{Aut}(E/F)$ . Пусть  $\mathcal{F} := \{K \leqslant E \mid F \leqslant K \leqslant E\}$ , и  $\mathcal{G} := \{H \leqslant G\}$ . Тогда имеется биекция  $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$ : подполю  $K \in \mathcal{F}$  сопоставляется  $\text{Gal}(E/K) \leqslant G$ . Обратно, подгруппе  $H \in \mathcal{G}$  сопоставляется подполе  $E^H$ .

**Теорема 2.5.1** (Соответствие Галуа). Указанные выше отображения  $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$  — взаимно обратные биекции, удовлетворяющие следующим свойствам:

- Монотонность по включению:  $H \leqslant H' \leqslant G \Rightarrow E^{H'} \leqslant E^H$ .
- При  $H \leqslant H' \leqslant G : |H : H'| = [E^H : E^{H'}]$ .
- $\forall \sigma \in G : \sigma(E^H) = E^{\sigma H \sigma^{-1}}$ .
- $E^H/F$  — расширение Галуа  $\iff H \trianglelefteq G$ . В этом случае  $\text{Gal}(E^H/F) \cong G/H$ .

*Доказательство.*

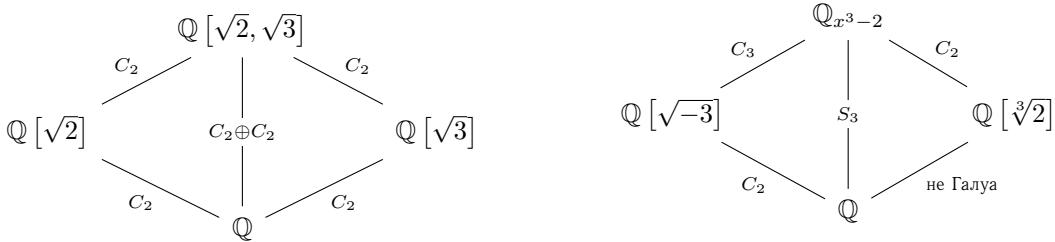
- $\text{Gal}(E/E^H) = H$  — следствие из леммы Артина (следствие 2.4.3).
- $E^{\text{Gal}(E/K)} = K$  согласно теореме о характеризации расширений Галуа (теорема 2.4.3).  $E/K$  — расширение Галуа согласно ей же (точнее, (следствие 2.5.1)).
- Монотонность по включению очевидна.
- По лемме Артина  $\forall H' \leqslant H \leqslant G : |H : H'| = \frac{|H|}{|H'|} = \frac{[E : E^H]}{[E : E^{H'}]} = [E^{H'} : E^H]$ .
- Запишем цепочку равносильностей  $\alpha \in E^H \iff \forall h \in H : h(\alpha) = \alpha \iff \forall h \in H : \sigma h \sigma^{-1}(\sigma\alpha) = \sigma\alpha \iff \sigma\alpha \in E^{\sigma H \sigma^{-1}}$ .
- $H \trianglelefteq G \iff \forall \sigma \in G : \sigma H \sigma^{-1} = H \iff \forall \sigma \in G : \sigma(E^H) = E^H$ . Рассмотрим гомоморфизм  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(E^H/F), \sigma \mapsto \sigma|_{E^H}$ . Очевидно,  $\text{Ker}(\theta) = H$ . Покажем, что  $\theta$  сюръективно. Пусть  $\eta \in \text{Aut}(E^H/F)$ , покажем, что  $\eta \in \text{Im}(\theta)$ .

Расширение  $E/F$  нормально, значит,  $\exists f \in F[t] : E = F_f$ . Тогда и подавно  $(E^H)_f = E$ . Так как  $E = (E^H)_f \cong \eta(E^H)_f$ , то по теореме о количестве вложений  $\exists$  хотя бы одно вложение  $E \rightarrow E$  над  $\eta$  (то есть продолжение  $\eta$ , как отображения полей). Итого  $\theta$  сюръективно.

Тем самым,  $\text{Aut}(E^H/F) \cong G/H$ . Теперь заметим, что  $F = E^G = (E^H)^{G/H} \Rightarrow E^H/F$  — расширение Галуа, и  $\text{Gal}(E^H/F) \cong G/H$ .

Обратно: пусть  $E^H/F$  нормально,  $\alpha \in E^H$  — корень некоторого многочлена  $f \in F[t]$ . Тогда  $\forall \sigma \in G : \sigma(\alpha)$  — корень  $f$ , то есть  $\sigma(E^H) = E^H$ . С другой стороны,  $\sigma(E^H) = E^{\sigma H \sigma^{-1}}$ , и так как соответствие Галуа биективно, то  $\forall \sigma \in G : \sigma H \sigma^{-1} = H$ , то есть  $H \trianglelefteq G$ .  $\square$

Теперь можно нарисовать некоторые картинки:



Здесь одно поле находится над другим, если верхнее — расширение нижнего. Их обычно соединяют просто чертой, а не стрелкой, и на черте написана группа Галуа расширения.

## Лекция XIII

20 мая 2024 г.

**Определение 2.5.1** (Решётка). Частично упорядоченное множество, в котором есть все конечные инфимумы (наибольший элемент, меньший данных) и супремумы (наименьший элемент, больший данных).

Соответствие Галуа устанавливает антиизоморфизм решёток подгрупп и подполей, где порядок индуцирован с включениями.

Пусть  $K$  и  $L$  — подполия большого поля  $E$ . Наименьшее подполе в  $E$ , содержащее и  $K$ , и  $L$ , обозначают  $K \cdot L$ .

**Предложение 2.5.1.** Пусть  $E/F$  — расширение Галуа,  $G := \text{Gal}(E/F)$ . Выберем подгруппы  $P, Q \leqslant G$ , и соответствующие им поля  $K := E^P, L := E^Q$ , и рассмотрим следующую башню

полей:

$$\begin{array}{c}
 E \\
 | \\
 K \cdot L = E^{P \cap Q} \\
 / \quad \backslash \\
 K = E^P \quad L = E^Q \\
 | \\
 K \cap L = E^{\langle P \cup Q \rangle} \\
 | \\
 F
 \end{array}$$

Если  $K/(K \cap L)$  нормально, то и  $(K \cdot L)/L$  нормально, причём  $\text{Gal}(K \cdot L/L) \cong \text{Gal}(K/K \cap L)$ .

**Доказательство.** Так как  $K/K \cap L$  нормально, то  $P \trianglelefteq \langle P \cup Q \rangle$ . Тем самым,  $\langle P \cup Q \rangle = PQ \stackrel{\text{def}}{=} \{pq \mid p \in P, q \in Q\}$ , и  $P \cap Q \trianglelefteq Q$ , откуда из соотношения Галуа  $K \cdot L/L$  нормально.

Согласно теореме Нётер об изоморфизме

$$\text{Gal}(K \cdot L/L) \cong \frac{Q}{Q \cap P} \cong \frac{PQ}{P} \cong \text{Gal}(K/K \cap L)$$

□

Пусть  $f \in F[t]$  — сепарабельный.

**Определение 2.5.2** (Группа Галуа многочлена  $f$ ).  $\text{Gal}(f/F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(F_f/F)$ . Если поле  $F$  не указано, то логично в качестве него брать наименьшее поле, содержащее коэффициенты многочлена. В частности характеристике нуль выбирается  $F := \mathbb{Q}$  (коэффициенты многочлена  $f$ ).

Пусть имеется расширение  $E/F$ , и  $f \in F[t] \subset E[t]$ . Из определения видно, что  $E_f = E \cdot F_f$ , так как  $F_f$  содержит все корни  $f$ , а  $E_f$  порождено ими над  $E$ .

Таким образом, имеет место башня полей

$$\begin{array}{c}
 E_f \\
 / \quad \backslash \\
 F_f \quad E \\
 / \quad \backslash \\
 E \cap F_f \\
 | \\
 F
 \end{array}$$

Согласно (предложение 2.5.1),  $\text{Gal}(E_f/E) \cong \text{Gal}(F_f/E \cap F_f) \leq \text{Gal}(F_f/F)$ .

## 2.6 Применения теории Галуа

### 2.6.1 Разрешимые группы и субнормальные ряды

**Определение 2.6.1** (Разрешимая группа  $G$ ). Такая группа  $G$ , что существует субнормальный ряд с абелевыми факторами  $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \dots \trianglelefteq G_n = G$  (факторы ряда — факторгруппы  $G_{i+1}/G_i$ ).

**Лемма 2.6.1.** Группа разрешима  $\iff$  существует нормальный ряд с абелевыми факторами, то есть ряд  $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \dots \trianglelefteq G_n$ , где все  $G_i \trianglelefteq G$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . Очевидно.

$\Rightarrow$ . Согласно посылке, у группы  $G$  есть субнормальный ряд с абелевыми факторами  $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$ . Построим ряд по алгоритму  $\tilde{G}_{i-1} := [\tilde{G}_i, \tilde{G}_i]$ .

**Лемма 2.6.2.** Если  $H \trianglelefteq G$ , то  $[H, H] \trianglelefteq G$ .

*Доказательство леммы.*

На образующих:  $\forall h_1, h_2 \in H : {}^g[h_1, h_2] = [{}^g h_1, {}^g h_2] \in [H, H]$ .  $\square$

Согласно лемме, это будет нормальный ряд с абелевыми факторами.

Теперь убедимся, что  $[G_{i+1}, G_{i+1}] \trianglelefteq G_i$ . Профакторизуем обе части предполагаемого исключения по  $G_i$ . Слева будет  $[G_{i+1}, G_{i+1}]/G_i = [G_{i+1}/G_i, G_{i+1}/G_i] = \{1\}$ , так как фактор абелев. Тем самым, включение выполнено.

По индукции легко видеть, что  $\tilde{G}_i \trianglelefteq G_i$ , откуда нормальный ряд  $\tilde{G}_n \trianglerighteq \tilde{G}_{n-1} \trianglerighteq \dots$  обрывается на шаге с номером не больше  $n$ .  $\square$

**Определение 2.6.2** (Композиционный ряд). Неуплотняемый субнормальный ряд без повторений. Неуплотняемость означает, что любой фактор — простая (без нормальных подгрупп) группа.

В самом деле, если  $H \trianglelefteq G_{i+1}/G_i$ , то  $\pi_{G_i}^{-1}(H)$  можно вставить в ряд между  $G_i$  и  $G_{i+1}$ .

**Лемма 2.6.3.** Любые два композиционных ряда эквивалентны. Любые два субнормальных ряда обладают эквивалентными уплотнениями. Факторы композиционного ряда изоморфны циклическим группам простого порядка.

*Доказательство.* Аналогично теореме Жордана — Гёльдера.  $\square$

## 2.6.2 Основная теорема алгебры

**Лемма 2.6.4.** Пусть  $|G| = p^n$ . Тогда  $\exists H \trianglelefteq G : |G : H| = p$ .

*Доказательство.* Пусть  $n \geq 1$ . Центр  $C \trianglelefteq G$   $p$ -группы нетривиален, значит,  $\pi_C(G) = G/C$  имеет порядок строго меньше  $p^n$ . По индукции в ней есть подгруппа  $\tilde{H} \trianglelefteq G/C$  индекса  $p$ , тогда  $|G : \pi_C^{-1}(\tilde{H})| = p$ .  $\square$

**Теорема 2.6.1** (FTHA, основная теорема алгебры).  $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-1}]$  алгебраически замкнуто.

*Доказательство.* Рассмотрим конечное расширение  $E/\mathbb{C}$ , тогда расширение  $E/\mathbb{R}$  тоже конечно. Вложим его в нормальное расширение  $E'/\mathbb{R}$  (в расширение Галуа).

$G := \text{Gal}(E'/\mathbb{R})$ , пусть  $|G| = 2^k \cdot m$ , где  $m$  нечётно. Пусть  $P$  — силовская 2-подгруппа в  $G$ :  $|G : P| = m$ . Так как  $[E' : \mathbb{R}] = 2^k \cdot m$  и  $[E' : E'^P] = |P| = 2^k$ , то  $[E'^P : \mathbb{R}] = m$ .

Рассмотрим  $\alpha \in E'^P$ , пусть  $f \in \mathbb{R}[t]$  — минимальный многочлен  $\alpha$ . Тогда  $[\mathbb{R}[\alpha] : \mathbb{R}] = \deg f \mid m$ , откуда  $\deg f$  нечётна. Но  $f$  неприводим над  $\mathbb{R}$ , а он нечётной степени. Используя соображения полноты  $\mathbb{R}$  и непрерывности ( $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ), получаем, что у  $f$  есть корень. Значит,  $\deg f = 1$ , то есть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тем самым,  $E'^P = \mathbb{R}$ , соответствие Галуа говорит, что  $P = G$ .

$\text{Gal}(E'/\mathbb{C}) \trianglelefteq \text{Gal}(E'/\mathbb{R})$ , откуда  $\text{Gal}(E'/\mathbb{C})$  — тоже 2-группа. Согласно (лемма 2.6.4), найдётся  $H \trianglelefteq \text{Gal}(E'/\mathbb{C})$  индекса 2.

Тогда  $[E'^H : \mathbb{C}] = 2$ , но у  $\mathbb{C}$  нет расширений степени 2 — любой квадратный многочлен над  $\mathbb{C}$  разложим в  $\mathbb{C}$  на линейные множители. Тем самым,  $\text{Gal}(E'/\mathbb{C})$  тривиальна, откуда  $E' = \mathbb{C}$ , и получается, что у  $\mathbb{C}$  нет никаких конечных расширений.  $\square$

# Лекция XIV

21 мая 2024 г.

### 2.6.3 Теорема Абеля — Руффини о разрешимости в радикалах

**Теорема Дирихле о независимости характеров. Группа Галуа, как базис  $\text{End}(E/F)$**

**Теорема 2.6.2** (Дирихле, о линейной независимости характеров). Пусть  $H$  — группа,  $E$  — поле, и  $\sigma_1, \dots, \sigma_n : H \rightarrow E^*$  — различные групповые гомоморфизмы. Утверждается, что  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  линейно независимы над  $E$  в пространстве всех функций  $H \rightarrow E$ .

*Доказательство.* Предположим наличие линейной зависимости:

$$\forall h \in H : \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i(h) = 0, \text{ где } \alpha_i \in E \quad (\diamond)$$

Выберем самую короткую такую (с наименьшим  $n$ ), в ней в частности все  $\alpha_i \neq 0$ .

Пусть  $g \in H$  таков, что  $\sigma_n(g) \neq \sigma_{n-1}(g)$ . Запишем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i(g) \sigma_i(h) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \sigma_n(g) \sigma_i(h) = 0 \end{cases}$$

где первое получено подстановкой  $h \leftarrow gh$  в  $(\diamond)$ , а второе — домножением  $(\diamond)$  на  $\sigma_n(g)$ . Вычитая, получаем линейную зависимость меньшей длины:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\sigma_i(g) - \sigma_n(g)) \sigma_i(h) = 0$$

При этом зависимость нетривиальна, так как  $\alpha_{n-1}(\sigma_{n-1}(g) - \sigma_n(g)) \neq 0$ .  $\square$

Часто эту теорему применяют для  $H = E^*$ ,  $\sigma_i \in \text{Gal}(E/F)$ : пусть  $E/F$  — расширение Галуа, пусть  $n := [E : F]$ ,  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \text{Gal}(E/F) \leq \text{End}(E/F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{End}_F(E)$ .

Тогда  $\dim_E(\langle \text{Gal}_F(E) \rangle) = n$  — по теореме Дирихле (теорема 2.6.2) все эндоморфизмы вида  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i$  различны. С другой стороны,  $\dim_F(\text{End}_F(E)) = n^2$ , так как  $\dim_F(E) = n$ , откуда  $\langle \text{Gal}_F(E) \rangle = \text{End}_F(E)$ , то есть  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  —  $E$ -базис пространства  $\text{End}_F(E)$ .

#### Первообразный корень и круговой многочлен

Расширение называется тем же словом, что и его группа — так, бывают, *абелевы*, *циклические*, *разрешимые* расширения, и тому подобное.

**Определение 2.6.3** ( $\varepsilon \in F$  — первообразный корень  $n$ -й степени из 1).  $\begin{cases} \varepsilon^n = 1 \\ \varepsilon^k \neq 1, \quad 0 < k < n. \end{cases}$

Если в поле есть первообразный корень степени  $n$ , то  $p := \text{char } F \nmid n$ : если  $n = pm$ , то  $0 = \varepsilon^{pm} - 1 = (\varepsilon^m - 1)^p$ , откуда  $\varepsilon$  — не первообразный.

Несложно видеть, что  $\varepsilon^k = \varepsilon^m \iff k \equiv m \pmod{n}$ , откуда  $\varepsilon^0, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$  — корни  $n$ -й степени из единицы, и многочлен  $t^n - 1$  раскладывается на линейные множители. Обозначим множество корней этого многочлена  $\mu_n(F)$ .

**Лемма 2.6.5.** Пусть  $E/F$  — расширение полей, и в базовом поле  $F$  есть первообразный корень степени  $n$  из 1. Следующие условия эквивалентны.

1.  $E = F[\alpha]$ , где  $\alpha^n \in F$ , и  $\alpha^k \notin F$  при  $0 < k < n$ .
2.  $E/F$  — циклическое расширение Галуа (то есть  $\text{Gal}(E/F) \cong C_n$ ).

*Доказательство.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) Многочлен  $f(t) = t^n - \alpha^n \in F[t]$  имеет  $n$  различных корней  $\{\alpha\varepsilon^k \mid 0 \leq k < n\}$ , откуда  $E = F_f$  для сепарабельного  $f$ , то есть  $E/F$  — расширение Галуа.

- Устроим отображение  $\theta : \text{Gal}(E/F) \rightarrow E^*$ ,  $\sigma \mapsto \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$ . Так как  $\left(\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\right)^n = \frac{\sigma(\alpha)^n}{\alpha^n} = \frac{\sigma(\alpha^n)}{\alpha^n} = 1$ , то  $\text{Im } \theta \subset \mu_n(F)$ .
- Проверим, что это гомоморфизм групп.

$$\theta(\tau\sigma) = \frac{\tau\sigma(\alpha)}{\alpha} = \frac{\sigma(\tau(\alpha))}{\tau(\alpha)} \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha} \stackrel{(\exists)}{=} \theta(\sigma)\theta(\tau) = \theta(\tau)\theta(\sigma)$$

Так как  $\tau(\alpha)$  — корень  $f$ , то  $\tau(\alpha) = \varepsilon^m\alpha$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ . Сокращая на  $\varepsilon^m \in F$ , получаем

$$\stackrel{(\exists)}{=} \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha} = \theta(\sigma)\theta(\tau) = \theta(\tau)\theta(\sigma)$$

- Проверим сюръективность. Любая собственная подгруппа  $\mu_n$  имеет вид  $\mu_k$ , где  $k \mid n$ , и если  $\exists k \in \mathbb{N} : \forall \sigma \in \text{Gal}(E/F) : \frac{\sigma(\alpha)^k}{\alpha^k} = 1$ , то  $\forall \sigma \in \text{Gal}(E/F) : \sigma(\alpha^k) = \alpha^k$ , то есть  $\alpha^k \in F$ . Получаем, что  $k \geq n$ .
- С одной стороны,  $|\text{Gal}(E/F)| \geq n$  из сюръективности, с другой стороны,  $[E : F] \leq n$ , откуда  $|\text{Gal}(E/F)| = [E : F] = n$ , и из количественных соображений  $\theta$  — изоморфизм.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Пусть  $\sigma$  — образующая группы Галуа ( $\text{Gal}(E/F) = \{1, \sigma, \dots, \sigma^{n-1}\}$ ). По теореме Дирихле (теорема 2.6.2),  $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \sigma^k \neq 0$ , тем самым,  $\exists \beta \in E : \alpha := \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \sigma(\beta)^k \neq 0$ .

- Посчитаем

$$\sigma(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \sigma(\beta)^{k+1} = \sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} \sigma(\beta)^i = \varepsilon^{-1} \alpha$$

Тем самым,  $\sigma(\alpha^k) = \sigma(\alpha)^k = (\varepsilon^{-1}\alpha)^k = \varepsilon^{-k}\alpha^k$ . В частности,  $\alpha^n$  неподвижен под действием  $\text{Gal}(E/F)$ , и  $\alpha^n \in F$ .

- Покажем линейную независимость  $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$  над  $F$ , из количественных соображений будет следовать, что это базис  $E$  над  $F$ . Пусть  $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k x_k = 0$  для некоторых  $x_k \in F$ .

Применяя  $\sigma^j$  к данному равенству, получаем  $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj} \alpha^k x_k = 0$ . При  $j = 0, \dots, n-1$  получаются  $n$  линейных уравнений с переменными  $\alpha^k x_k$ . Матрица коэффициентов системы  $(\varepsilon^{-kj})_{\substack{k=0..n-1 \\ j=0..n-1}}$  невырождена, так как её определитель — определитель Вандермонда — не нуль.  $\square$

**Лемма 2.6.6.** Пусть  $E := F[\varepsilon]$ , где  $\varepsilon$  — первообразный корень степени  $n$ . Тогда  $E/F$  — расширение Галуа, и  $\text{Gal}(E/F) \hookrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  (в частности, расширение  $E/F$  абелево).

*Доказательство.* Так как  $\mu_n = \langle \varepsilon \rangle$ , то  $t^n - 1$ , раскладывается на линейные множители в  $F[\varepsilon]$ , то есть  $F[\varepsilon] = F[t^n - 1]$ . Всякий элемент  $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$  однозначно определён значением  $\sigma(\varepsilon)$  (так как  $E = F[\varepsilon]$ ), при этом так как  $\sigma$  оставляет  $F$  на месте, то  $\sigma(\varepsilon)$  — тоже первообразный корень степени  $n$  из 1.

Устроим  $\pi : \text{Gal}(E/F) \hookrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , сопоставляя элементу  $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$  такой показатель  $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , что  $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon^k$ . Инъективность  $\sigma$  очевидна:  $\sigma(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \Rightarrow \sigma = \tau$ . Очевидно, это гомоморфизм мономорфизмов, и так как образ обратимых элементов обратим, то  $\pi : \text{Gal}(E/F) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  — гомоморфизм групп.  $\square$

**Определение 2.6.4** (Круговой многочлен степени  $n$ ).  $\Phi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varepsilon} (t - \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  пробегает все первообразные корни степени  $n$  из 1 по одному разу.

Так как любой корень степени  $n$  из 1 — первообразный степени  $k \mid n$ , то  $\prod_{k \mid n} \Phi_k(t) = \prod_{\varepsilon^n=1} (t - \varepsilon) = t^n - 1$ .

*Интересный факт.* Для любого поля с первообразным корнем степени  $n$  из единицы  $\Phi_n \in \mathbb{Z}[t] \leq \mathbb{Q}[t]$ , и там он неприводим, степени  $\phi(n)$  (где  $\phi$  — euler totient function).

### Теорема Абеля — Руффини

Пусть  $f \in F[t]$  — ненулевой многочлен.

**Определение 2.6.5** (Уравнение  $f = 0$  разрешимо в радикалах). Все корни  $f$  (лежащие в алгебраическом замыкании  $F$ ) выражаются через элементы  $F$  при помощи арифметических операций и извлечений корня. Иными словами, существуют цепочка полей  $F = F_0 \hookrightarrow F_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow F_m$ , где в  $F_m$  многочлен  $f$  раскладывается на линейные множители, и  $F_i = F_{i-1}[\alpha_i]$ , где  $\beta := \alpha_i^k \in F_{i-1}$ . В таком случае ещё пишут  $F_i = F_{i-1} \left[ \sqrt[n]{\beta_i} \right]$ .

**Теорема 2.6.3** (Абель — Руффини). Пусть  $F$  поле,  $\text{char } F = 0$ ; ненулевой  $f \in F[t]$ . Следующие условия эквивалентны:

1. Уравнение  $f = 0$  разрешимо в радикалах.
2.  $\text{Gal}(F_f/F)$  разрешима.

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ . Сначала присоединим к  $F$  первообразный корень из 1 достаточно большой степени — посторонний первообразный корень  $\varepsilon$  степени  $(\deg f)!$ . Положим  $F_1 := F[\varepsilon]$ . Иными словами,  $F_1 := F_{t^{(\deg f)!}-1}$ . Это расширение Галуа, так как  $\text{char } F = 0$ .

В силу рассуждения после (определение 2.5.2),  $\text{Gal}(f/F_1) \leq \text{Gal}(f/F)$ , поэтому  $G := \text{Gal}(f/F_1)$  тоже разрешима. По определению у неё существует субнормальный ряд, и так как  $G$  конечна, то его можно уплотнить до композиционного  $\{1\} = G_m \trianglelefteq G_{m-1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_1 = G$ . Факторгруппы  $G_i/G_{i+1}$  — простые абелевы группы, то есть циклические, простого порядка. Положим  $F_i := ((F_1)_f)^{G_i}$ .

Согласно (лемма 2.6.5),  $F_i$  имеет вид  $F_{i-1}[\alpha_i]$ , что по определению означает разрешимость в радикалах.

$\Rightarrow$ . По условию существует башня полей  $F \hookrightarrow F_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow F_m$ , где  $f$  раскладывается на линейные множители в  $F_m$ , и  $F_i = F_{i-1}[\alpha_i]$ , где  $\alpha_i^{k_i} \in F_{i-1}$ . Для применения (лемма 2.6.5) недостаёт первообразного корня.

Добавим его:  $F_{m+1} := (F_m)_{t^k-1}$ , где  $k := k_1 \cdot \dots \cdot k_m$ . Далее хотим получить, что  $\text{Gal}(f/F)$  разрешима. Понятно, что  $F_f \subset F_m$ , поэтому достаточно доказать, что  $\text{Aut}(F_m/F)$  разрешима, или даже  $\text{Aut}(F_{m+1}/F)$  разрешима — факторгруппа разрешимой группы разрешима. В доказательстве будет использоваться соответствие Галуа, для этого дополним  $F_{m+1}/F$  до нормального: пусть  $E/F$  нормально, и  $F_{m+1} \subset E$  (например,  $E$  — поле разложения минимального многочлена, аннулирующего все элементы  $\varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ ).

Пусть  $\text{Gal}(E/F) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ . Поле  $\tilde{E} = F[\varepsilon, \sigma_i(\alpha_j)] \subset E$  тоже нормально над  $F$ , так как оно устойчиво под действием  $\text{Gal}(E/F)$ . А для этого поля есть хорошая цепочка (порождающие присоединяются по одному, все образы  $\alpha_{j+1}$  добавляются после всех образов  $\alpha_j$ ):

$$F \subset F[\varepsilon] \subset F[\sigma_1(\alpha_1)] \subset F[\sigma_1(\alpha_1), \sigma_2(\alpha_1)] \subset \dots \subset \tilde{E}$$

Все промежуточные расширения абелевы (первое вкладывается в  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  согласно (лемма 2.6.6), остальные циклические согласно (лемма 2.6.5)). Соответствие Галуа говорит, что этой башне полей соответствует субнормальный ряд группы  $\text{Gal}(\tilde{E}/F)$  с абелевыми факторами, то есть  $\text{Gal}(\tilde{E}/F)$  разрешима. Её факторгруппа  $\text{Gal}(F_f/F)$  тоже разрешима.  $\square$