Кластерные алгебры и кластерные категории. Неофициальный конспект

Лектор: Михаил Александрович Антипов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2026 г.

Содержание

Лекция I

11 февраля 2026 г.

1 Примеры

1.0 Пентагональная рекуррента

Рассмотрим рекурренту $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ с начальными данными $x_1 = x$, $x_2 = y$, заданную соотношениями $x_{i-1}x_{i+1} = x_i + 1$ (где сами $x_i \in K(x, y)$ для некоторого поля K).

Посчитаем первые несколько членов:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \\
x_2 &= y \\
x_3 &= \frac{y+1}{x} \\
x_4 &= \frac{x+y+1}{xy} \\
x_5 &= \frac{x+1}{y} \\
x_6 &= x \\
x_7 &= y \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Рекуррента зациклилась за 5 шагов.

Можно пытаться рассматривать вариации рекуррентного соотношения вида $x_{i-1}x_{i+1} = x_i^a + 1$, где скажем $a \in \mathbb{N}$. Оказывается, она будет циклической только в случаях $a = 1, 2, 3$, и это соответствует тому, что в ранге 2 есть три системы корней — A_2, $\mathsf{B}_2 = \mathsf{C}_2$ и G_2.

Это простейший пример кластерной алгебры: в данном случае имеется кластер из двух переменных, которые по очереди мутируют:

$$(x_1, x_2) \leftrightsquigarrow (x_3, x_2) \leftrightsquigarrow (x_3, x_4) \leftrightsquigarrow (x_5, x_4) \leftrightarrow \dots$$

При этом две мутации одной и той же переменной подряд ничего не меняют.

В общем случае вместо такого пути будет регулярное дерево степени n, полное определение мы дадим позже (подраздел 2.2).

1.2 Фризы Кокстера — Конвея

Фризы Кокстера — Конвея — частный случай SL_2-tilings (SL_2-замощения?).

Определение 1.1 (SL_2-замощение)**.** Отображение $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Q}$ с условием $f(i+1, j+1)f(i, j) - f(i, j+1)f(i+1, j) = 1$.

Определение 1.2 (Фриз Кокстера — Конвея ранга n)**.** SL_2-замощение f такое, что

$$f(i,j) = \begin{cases} 0, & i+j < 0 \\ 1, & i+j = 0 \\ 1, & i+j = n+1 \\ 0, & i+j > n+1 \end{cases}$$

Графически его изображают повёрнутым на 45^o, вот так:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & & a_1^1 & & a_2^1 & & a_3^1 & & \\
 & a_0^2 & & a_1^2 & & a_2^2 & & a_3^2 & \\
\cdots & & a_0^3 & & a_1^3 & & a_2^3 & & \cdots \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & b & \\
a & & d \\
 & c &
\end{array}
$$

должно быть выполнено $ad - bc = 1$

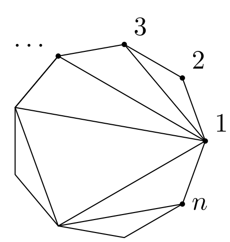
Пример (Фриз ранга 3).

$$
\begin{array}{|ccccccccccccccc|}
\hline
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & \frac{5}{3} & & 2 & & 1 & & 5 & & \frac{2}{3} & & 3 & & \frac{5}{3} & \\
4 & & \frac{7}{3} & & 1 & & 4 & & \frac{7}{3} & & 1 & & 4 & & \frac{7}{3} \\
 & 5 & & \frac{2}{3} & & 3 & & \frac{5}{3} & & 2 & & 1 & & 5 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Как видно из картинки, фриз имеет ось скользящей симметрии со сдвигом на $\frac{n+3}{2}$ и переворотом (основания трапеции равны $n+1$ и 2). Позже это будет видно из классификации в 1.4. Ну, надо что-то ещё потребовать, например, положительности всех элементов фриза хватит. А то, кажется, можно при желании составить башню из нескольких фризов произвольного размера, поставленных друг на друга.

Упражнение 1.1 (Эффект лорановости)**.** *Построим фриз сверху вниз, заполнив верхнюю строчку a_*^1 произвольно, и выражая элементы снизу через элементы сверху. Тогда если все $a_*^1 \in \mathbb{Z}$, то и все элементы снизу тоже (это верно даже в большей общности, тут неважно, что это фриз, то есть что на каком-то уровне снизу будет строка единиц, а потом начнутся нули).*

Теорема 1.1 (Фриз, построенный по триангуляции)**.** Пусть T — триангуляция правильного n-угольника:



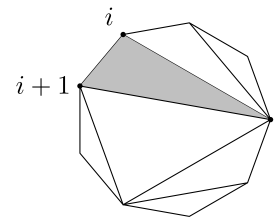
Строчка $a_i^1 \in \mathbb{Z}$ соответствует фризу (то есть через какая-то строчка снизу будет полностью состоять из единиц) тогда и только тогда, когда a_i^1 — количество треугольников, касающихся вершины i (индексы берутся по модулю n). Например, триангуляции на рисунке соответствует фриз

1		1		1		1		1		1		1		1		1	
	5		1		2		2		3		1		4		1		2
9		4		1		3		5		2		3		3		1	
	7		3		1		7		3		5		2		2		4
3		5		2		2		4		7		3		1		7	
	2		3		3		1		9		4		1		3		5
3		1		4		1		2		5		1		2		2	
	1		1		1		1		1		1		1		1		1

Доказательство в более простую сторону. Рассмотрим двудольный граф Γ. В левой доле n вершин, соответствующих вершинам многоугольника, а в правой — $n+1$ вершина, соответствующая треугольнику. Проведём ребро, если вершина является вершиной треугольника.

Пусть m_{ij} — количество совершенных паросочетаний (из $n+1$ ребра), где в левой доле взяты все вершины, кроме i и j.

Ясно, что $m_{i,i+1} = 1$: это ребро какого-то треугольника, значит, этот треугольник берётся в паросочетание вместе с оставшейся третьей вершиной; после этого многоугольник разваливается на два, и дальше опять же все по индукции предопределено однозначно:



Аналогично проверяется, что $m_{i-1,i+1} = a_i^1$ (i-я вершина стоит в паре с любым из инцидентных ей треугольников, после чего остальное предопределено однозначно).

Осталось применить лемму о конденсации, доказательством которой мы утруждать себя не будем:

Лемма 1.1 (О конденсации)**.** *Пусть* Γ *— плоский двудольный граф с левой долей* V_1 *и правой* V_2*, причём* $|V_1| = |V_2| + 2$*. Пусть* $i, j \in V_1$*. Обозначим через* m_{ij} *количество совершенных паросочетаний между* $V_1 \setminus \{i, j\}$ *и* V_2*. Если* $a, b, c, d \in V_1$ *лежат на грани данного графа в этом циклическом порядке (и, разумеется, между ними при обходе грани есть ещё какие-то вершины графа), то выполнено соотношение*

$$m_{ab}m_{cd} + m_{bc}m_{ad} = m_{ac}m_{bd}$$

□

Соотношение из леммы о конденсации напоминает теорему Птолемея из школьной планиметрии:

Интересный факт (Теорема Птолемея). У вписанного четырёхугольника произведение длин диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Также такой вид имеют соотношения в грассманиане.

1.3 Координаты на грассманиане и триангуляции

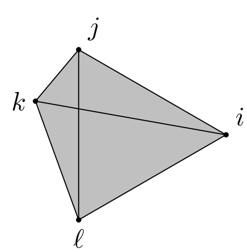
Пусть K — поле. Вспомним грассманиан $\mathrm{Gr}(k, n)$ — многообразие, параметризующее k-мерные подпространства в n-мерии (например, в пространстве строк ${}^nK$).

Грассманиан удобно представлять себе, как множество матриц $M_{k\times n}(K)$ с точностью до действия $\mathrm{GL}_k(K)$ умножениями слева.

Однородными координатами на грассманиане служат значения миноров $k \times k$, на которые накладываются соотношения Плюккера. В случае $k = 2$ эти соотношения выглядят следующим образом:

$$p_{ik}p_{j\ell} = p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell} \tag{$\star$}$$

где $i < j < k < \ell$, а $p_{ij} = p_{ji}$ равен значению квадратного минора из i-го и j-го столбца. Иными словами, для матрицы x: $p_{ij} = x_{1,\min(i,j)}x_{2,\max(i,j)} - x_{1,\max(i,j)}x_{2,\min(i,j)}$. Изображая это правило на картинке, получаем правило Птолемея:



Из картинки ясно, что на самом деле имеет значение только циклический порядок индексов $i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Лекция II

18 февраля 2026 г.

Размерность многообразия $\mathrm{Gr}(2,n)$ равна $2n-4$, а размерность Крулля однородного координатного кольца $K[\mathrm{Gr}(2,n)] = K[p_{ij}]/(\star)$ на единичку больше, значит, $2n-3$.

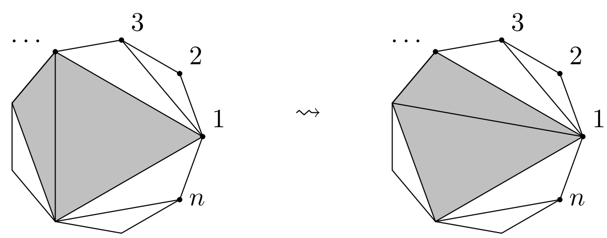
Определение 1.3 (Матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ вполне положительна)**.** Все миноры A положительны.

Заинтересуемся схожим вопросом: когда все миноры 2×2 в матрице $2\times n$ положительны? Более точно, сколько миноров надо проверить на положительность, чтобы положительность остальных последовала?

Из описания координатного кольца грассманиана ясно, что миноры матрицы — любые $p_{ij} \in K$, удовлетворяющие соотношениям $(\star)$. Так как $\dim \mathbb{R}[\mathrm{Gr}(2,n)] = 2n-3$, то такова и степень трансцендентности его поля частных, откуда ответ хотя бы $2n-3$. Это видимо не совсем строгое утверждение, так как $\mathbb{R}$ не алгебраически замкнуто. С другой стороны, эта оценка достигается:

Предложение 1.1. *Пусть T — триангуляция правильного n-угольника (множество неупорядоченных пар вершин, соединённых ребром, в том числе пары соседних вершин). Пусть $P \coloneqq \{p_{ij} \mid (i,j)\in T\}$ Тогда любой p_{rs} выражается в виде некоторой рациональной функции от элементов P с положительными коэффициентами. В частности, положительность элементов P повлечёт положительность всех миноров 2×2.*

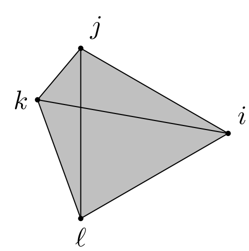
Доказательство. Рассмотрим граф, вершины которого — триангуляции n-угольника, а рёбра соответствуют *флипам* следующего вида:



А именно, любая хорда триангуляции является ребром двух смежных треугольников, в объединении дающих четырёхугольник. Назовём *флипом* замену данной хорды триангуляции на другую диагональ четырёхугольника. Кстати, этот граф является остовом $(n-3)$-мерного ассоциэдра.

Ясно, что любая хорда n-угольника лежит в какой-то триангуляции. Без доказатеельства утверждается, что граф триангуляций связен. Начнём с триангуляции T, и, применяя флипы, дойдём до триангуляции, содержащей хорду $r-s$. Легко видеть, что p_{ik}, где $i-k$ — хорда, появляющаяся после флипа, выражается через остальные $p_{j\ell}$, отвечающие хордам, присутствовавшим до флипа:

$$p_{ik} = \frac{p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell}}{p_{j\ell}}$$



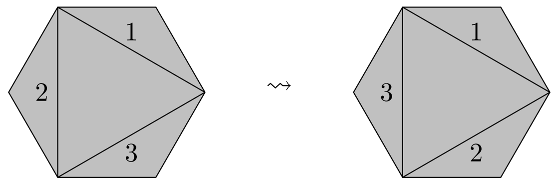
□

Эту теорему можно пытаться обобщать на разные интересные случаи — рассматривать не только триангуляции, или скажем работать не на плоскости (или её компактификации — сфере), а на поверхности с большим числом ручек. Впрочем, начиная с некоторого места она уже перестаёт быть верной.

Ещё пару слов про флипы и триангуляции: можно считать, что диагонали пронумерованы от 1 до $n-3$, и при флипе новая диагональ нумеруется тем числом, что было написано на стираемой. Тогда получается, что на множестве триангуляций действует свободное произведение $\underbrace{C_2 * \ldots * C_2}_{n}$.

Действие, разумеется, не свободное. Например, флипы диагоналей, далеко друг от друга отстоящих, коммутируют. Сами пометки на диагоналях тоже могут перемещаться:

Упражнение 1.2. *Получите последовательностью пяти флипов из одной триангуляции шестиугольника другую:*



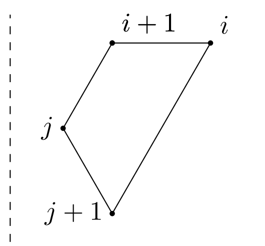
1.4 Классификация фризов

Пусть $p \in \mathrm{Gr}(2, n)$ — точка с однородными координатами p_{ij}; предположим, что для всех $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $p_{i,i+1} = 1$. Можно составить фриз из координат этой точки следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & & p_{1,3} & & p_{2,4} & & p_{3,5} & & \\
 & p_{n,3} & & p_{1,4} & & p_{2,5} & & p_{3,6} & \\
\dots & & p_{n,4} & & p_{1,5} & & p_{2,6} & & \dots \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & p_{?,?-2} & & p_{?+1,?-1} & & p_{?+2,?} & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

SL_2-соотношения выполнены, так как в них превращается соотношение $(\star)$:

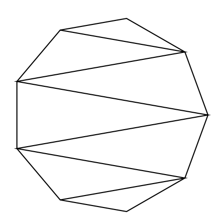
$$\begin{array}{ccc}
 & p_{i+1,j} & \\
p_{i,j} & & p_{i+1,j+1} \\
 & p_{i,j+1} &
\end{array}$$



$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = p_{i,i+1}p_{j,j+1} = 1$$

Обратно, если есть некоторый фриз, то можно построить числа p_{ij}, удовлетворяющие соотношениям Плюккера: пройдём зигзагом вниз по фризу, и положим значения координат, соответствующим зигзаг-триангуляции, равными q_i, а остальные восстановим как в (предложение 1.1).

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & & q_1 & & \square & & \square & & \\
 & q_2 & & \square & & \square & & \square & \\
\dots & & q_3 & & \square & & \square & & \dots \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & q_{n-3} & & \square & & \square & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$



Далее остальные значения во фризе восстанавливаются однозначно из SL_2-соотношений, и в силу выше построенного примера, они все будут иметь вид p_{ij}. Единственность на самом деле имеет место чуть более слабая — например, она есть если все $q_i > 0$ — тогда предложение 1.1 говорит, что все полученные координаты будут положительными. Значит, на самом деле фриз однозначно восстанавливается по q_i и на некотором открытом по Зарисскому множестве.

Замечание. Отсюда получается, что при условии $p_{i,i+1} = 1$ для всех $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ точка лежит на грассманиане, если выполнены уравнения

$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = 1.$$

По-видимому, если ещё подумать, отсюда следует, что вместо всех соотношений грассманиана достаточно проверять соотношения

$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = p_{i,i+1}p_{j,j+1},$$

но я не уверен.

2 Определения

2.1 Колчаны и кластерные матрицы

Определение 2.1 (Колчан)**.** Произвольный ориентированный граф $Q = (V, E)$, в котором всё разрешено: петли, кратные рёбра, может быть даже бесконечное число вершин или рёбер...

Определение 2.2 (Кластерный колчан)**.** Конечный колчан без петель и рёбер туда-обратно (пары рёбер вида $i \to j$ и $j \to i$).

Кластерные колчаны Q взаимно однозначно соответствуют кососимметрическим матрицам: колчану Q отвечает матрица $B_Q \in M_n(\mathbb{Z})$ (где $n = |V|$):

$$(B_Q)_{i,j} = \begin{cases} \#\{i \to j\}, & \text{есть стрелки } i \to j \\ \#\{j \to i\}, & \text{есть стрелки } j \to i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Определение 2.3 (Кластерный колчан с замороженными вершинами)**.** Кластерный колчан на m вершинах, где первые $n \leqslant m$ вершин называются *незамороженными*, а последние $m - n$ вершин называются *замороженными*, и между ними нет рёбер.

На матричном языке кластерный колчан с замороженными вершинами изображают в виде матрицы $\widetilde{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{Z})$, где $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, и $B \in M_n(\mathbb{Z})$ кососимметрическая, а $C \in M_{(m-n)\times n}(\mathbb{Z})$ — любая. Теоретически можно было бы считать, что кластерному колчану с замороженными вершинами отвечает кососимметрическая матрица из $M_m(\mathbb{Z})$, где правый нижний квадрат $(m-n)\times(m-n)$ нулевой, но так уже не поступить с обобщением данного понятия — *кластерными матрицами*, которые мы определим чуть позже.

Пусть Q — конечный кластерный колчан, $1 \leqslant i \leqslant n$ — незамороженная вершина.

Определение 2.4 (Мутация Q в вершине i)**.** На колчанном языке это новый колчан $M_i(Q)$, в котором множество вершин то же самое, а множество рёбер претерпевает следующие изменения:

1. Для каждой пары вершин k, ℓ, таких, что есть рёбра $k \to i \to \ell$, добавляем ребро $k \to \ell$ (если рёбер $k \to i$ всего n_k штук, а рёбер $i \to \ell$ всего n_ℓ штук, то мы добавим $n_k \cdot n_\ell$ рёбер.
2. Разворачиваем стрелки, инцидентные i.
3. Стираем всевозможные противонаправленные пары (если было n рёбер в одну сторону, и m в другую, то останется $|n - m|$ понятно в какую сторону).

На матричном языке мутация выглядит так: из $B_Q = (b_{ij})$ получается $B_{M_i(Q)} =: M_i(B_Q) = (b'_{ij})$:

$$b'_{pq} = \begin{cases} -b_{pq}, & i = p \text{ или } i = q \\ b_{pq} + b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} > 0 \\ b_{pq} - b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} < 0 \\ b_{pq}, & \text{иначе} \end{cases} \qquad (\triangle)$$

Замечание. Это инволюция: две мутации подряд в одной и той же вершине не меняют колчан.

Пример. Пусть v — сток или исток. Мутация в вершине v — разворот рёбер, инцидентных v.

Упражнение 2.1. *Если Q — дерево на n вершинах, то мутациями в истоках и стоках можно получить любую ориентацию всех $n-1$ рёбер.*

Этот факт известен даже среди алгебраистов, и отвечает следующему утверждению: категории модулей над некоторыми конечномерными алгебрами почти эквивалентны в некотором смысле, вроде так.

Однако если делать мутации не в источниках и стоках, то даже какой-нибудь путь может претерпевать очень значительные изменения. Тем не менее, верен следующий факт:

Интересный факт. Пусть Q_1 и Q_2 — два кластерных колчана без ориентированных циклов на одном множестве вершин. Предположим, что они эквивалентны: существует последовательность мутаций, превращающих один в другой. Тогда Q_2 получается из Q_1 только при помощи мутаций в источниках и стоках. В частности, они изоморфны как неориентированные графы.

Что любопытно, комбинаторное доказательство этой теоремы неизвестно, а вот с помощью кластерных категорий доказательство существует уже давно.

Определение 2.5 (Матрица $B' \in M_n(\mathbb{Z})$ кососимметризуема)**.** Существуют $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ при $d_i > 0$ и кососимметричная $B \in M_n(\mathbb{Z})$: $B'D = DB$.

Говоря русским языком, кососимметричная матрица с точностью до перемасштабирования строк Что? Вроде же с точностью до сопряжения...

Определение 2.6 (Кластерная матрица)**.** $\widetilde{B} \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$, такая что верхний квадрат $n \times n$ — кососимметризуемая матрица, а нижний прямоугольник — любая.

Мутацию в незамороженной вершине $1 \leqslant i \leqslant n$ кластерной матрицы определим по формуле($\triangle$).

Утверждение 2.1. *Мутация по-прежнему инволюция; кососимметризуемость верхнего квадрата сохраняется после мутации; M_i коммутирует с транспонированием $B \mapsto B^t$ и разворотом всех рёбер $B \mapsto -B$. Если $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то мутации M_i и M_j коммутируют при действии на дауную кластерную матрицу.*

Доказательство. Не совсем очевидно, но проверяется в лоб. $\square$

2.2 Кластерная алгебра

Обозначим через T_n регулярное дерево степени n с неориентированными рёбрами, покрашенными числами $1, \ldots, n$. Иными словами, граф Кэли для $\underbrace{C_2 * \ldots * C_2}_{n}$. Отметим некоторую вершину t_0.

Теперь пусть K — поле, $\widetilde{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ — кластерная матрица. Для определения кластерной алгебры нам потребуется следующий набор данных:

- Отображение, сопоставляющее каждой вершине T_n по кластерной матрице $m \times n$, такое что для любых вершин t_1 и t_2, соединённых ребром цвета i, выполнено соотношение $B(t_2) = M_i(B(t_1))$. Ясно, что задать такое отображение — всё равно, что задать кластетрную матрицу для t_0, остальные определяются однозначно.
- Отображение $x : V(T_n) \to K(x_1, \ldots, x_m)^m$. Вектор $x(t) = \left(x_1^t, \ldots, x_m^t\right)$ называется *расширенным кластером* в вершине t, а совокупность всех элементов всех векторов зовётся *кластерными переменными*. Первые n переменных расширенного кластера формируют обычный *кластер*. При этом $x(t_0) = (x_1, \ldots, x_m)$, и опять же имеется связь между значениями в соседних вершинах: если вершины t и t' соединены ребром цвета i, $x(t) = y, x(t') = y'$, и в вершине i стоит матрица $B(t) = (b_{ij})$ то при $j \neq i$: $y_j = y'_j$, а при $j = i$ выполнено соотношение:
$$y_i y'_i = \prod_{b_{ki} > 0} y_j^{b_{ki}} + \prod_{b_{ki} < 0} y_j^{-b_{ki}}.$$

Определение 2.7 (Кластерная алгебра $A(B)$)**.** Подалгебра в $K(x_1, \ldots, x_m)$, порождённая кластерным переменными.

И это ещё не самое общее определение, здесь мы определили так называемую *кластерную алгебру геометрического типа*. Но других у нас, вероятно, не будет.

Этот тип называется геометрическим, так как однородное кольцо грассманиана и некоторых других интересных многообразий — такие кластерные алгебры.