

Кластерные алгебры и кластерные категории. Неофициальный конспект

Лектор: Михаил Александрович Антипов
Конспектировал Леонид Данилевич

IV семестр, весна 2024 г.

Содержание

1 Примеры	2
1.0 Пентагональная рекуррента	2
1.2 Фризы Кокстера — Конвея	2
1.3 Координаты на грассманиане и триангulationи	4
1.4 Классификация фризов	6
2 Определения	7
2.1 Колчаны и кластерные матрицы	7
2.2 Кластерная алгебра	8

Лекция I

11 февраля 2026 г.

1 Примеры

1.0 Пентагональная рекуррента

Рассмотрим рекурренту $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ с начальными данными $x_1 = x$, $x_2 = y$, заданную соотношениями $x_{i-1}x_{i+1} = x_i + 1$ (где сами $x_i \in K(x, y)$ для некоторого поля K).

Посчитаем первые несколько членов:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= \frac{y+1}{x} \\ x_4 &= \frac{x+y+1}{xy} \\ x_5 &= \frac{x+1}{y} \\ x_6 &= x \\ x_7 &= y \\ &\vdots \end{aligned}$$

Рекуррента зациклилась за 5 шагов.

Можно пытаться рассматривать вариации рекуррентного соотношения вида $x_{i-1}x_{i+1} = x_i^a + 1$, где скажем $a \in \mathbb{N}$. Оказывается, она будет циклической только в случаях $a = 1, 2, 3$, и это соответствует тому, что в ранге 2 есть три системы корней — A_2 , $B_2 = C_2$ и G_2 .

1.2 Фризы Кокстера — Конвея

Фризы Кокстера — Конвея — частный случай SL_2 -tilings (SL_2 -замощения?).

Определение 1.1 (SL_2 -замещение). Отображение $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ с условием $f(i+1, j+1)f(i, j) - f(i, j+1)f(i+1, j) = 1$.

Определение 1.2 (Фриз Кокстера — Конвея ранга n). SL_2 -замещение f такое, что

$$f(i, j) = \begin{cases} 0, & i+j < 0 \\ 1, & i+j = 0 \\ 1, & i+j = n \\ 0, & i+j > n \end{cases}$$

Графически его изображают повёрнутым на 45° , вот так:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ \hline & a_0^1 & & a_1^1 & & a_2^1 & & a_3^1 & \\ & a_0^2 & & a_1^2 & & a_2^2 & & a_3^2 & \dots \\ \dots & a_0^3 & & a_1^3 & & a_2^3 & & a_3^3 & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \end{array} \quad \begin{matrix} b \\ a \\ c \\ d \end{matrix}$$

должно быть выполнено $ad - bc = 1$

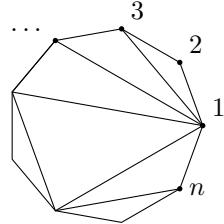
Пример (Фриз ранга 3).

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\frac{5}{3}$	2	1	1	4	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$
4		$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	3	$\frac{5}{3}$	2	1	1	$\frac{7}{3}$
5	5		$\frac{2}{3}$	1	3	1	1	1	5	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Как видно из картинки, фриз имеет ось скользящей симметрии со сдвигом на $\frac{n+3}{2}$ и переворотом (основания трапеции равны $n+1$ и 2). Позже это будет видно из классификации в 1.4. Ну, надо что-то ещё потребовать, например, положительности всех элементов фриза хватит. А то, кажется, можно при желании составить башню из нескольких фризов произвольного размера, поставленных друг на друга.

Упражнение 1.1 (Эффект лорановости). Построим фриз сверху вниз, заполнив верхнюю строку a_*^1 произвольно, и выражая элементы снизу через элементы сверху. Тогда если все $a_*^1 \in \mathbb{Z}$, то и все элементы снизу тоже (это верно даже в большей общности, тут неважно, что это фриз, то есть что на каком-то уровне снизу будет строка единиц, а потом начнутся нули).

Теорема 1.1 (Фриз, построенный по триангуляции). Пусть T — триангуляция правильного n -угольника:



Строка $a_i^1 \in \mathbb{Z}$ соответствует фризу (то есть через какая-то строчка снизу будет полностью состоять из единиц) тогда и только тогда, когда a_i^1 — количество треугольников, касающихся вершины i (индексы берутся по модулю n). Например, триангуляции на рисунке соответствует фриз

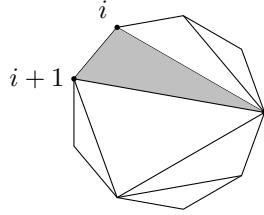
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	5	1	2	2	3	1	4	1	1	2
9	4	1	3	5	2	3	3	3	1	
7	3	1	7	3	5	2	2	2	4	
3	5	2	2	4	7	3	1	7		
2	3	3	1	9	4	1	3	5		
3	1	4	1	2	5	1	2	2		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Доказательство в более простую сторону. Рассмотрим двудольный граф Γ . В левой доле n вершин, соответствующих вершинам многоугольника, а в правой — $n+1$ вершина, соответствующая треугольнику. Проведём ребро, если вершина является вершиной треугольника.

Пусть m_{ij} — количество совершенных паросочетаний (из $n+1$ ребра), где в левой доле взяты все вершины, кроме i и j .

Ясно, что $m_{i,i+1} = 1$: это ребро какого-то треугольника, значит, этот треугольник берётся в паросочетание вместе с оставшейся третьей вершиной; после этого многоугольник разваливается

на два, и дальше опять же все по индукции предопределено однозначно:



Аналогично проверяется, что $m_{i-1,i+1} = a_i^1$ (i -я вершина стоит в паре с любым из инцидентных ей треугольников, после чего остальное предопределено однозначно).

Осталось применить лемму о конденсации, доказательством которой мы утруждать себя не будем:

Лемма 1.1 (О конденсации). *Пусть Γ — плоский двудольный граф с левой долей V_1 и правой V_2 , причём $|V_1| = |V_2| + 2$. Пусть $i, j \in V_1$. Обозначим через m_{ij} количество совершенных паросочетаний между $V_1 \setminus \{i, j\}$ и V_2 . Если $a, b, c, d \in V_1$ лежат на грани данного графа в этом циклическом порядке (и, разумеется, между ними при обходе грани есть ещё какие-то вершины графа), то выполнено соотношение*

$$m_{ab}m_{cd} + m_{bc}m_{ad} = m_{ac}m_{bd}$$

□

Соотношение из леммы о конденсации напоминает теорему Птолемея из школьной планиметрии:

Интересный факт (Теорема Птолемея). У вписанного четырёхугольника произведение длин диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Также такой вид имеют соотношения в грассманиане.

1.3 Координаты на грассманиане и триангуляции

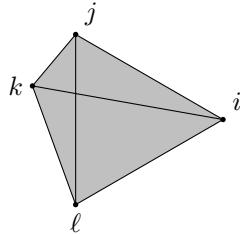
Пусть K — поле. Вспомним грассманиан $\text{Gr}(k, n)$ — многообразие, параметризующее k -мерные подпространства в n -мерии (например, в пространстве строк ${}^n K$).

Грассманиан удобно представлять себе, как множество матриц $M_{k \times n}(K)$ с точностью до действия $\text{GL}_k(K)$ умножениями слева.

Однородными координатами на грассманиане служат значения миноров $k \times k$, на которые накладываются соотношения Плюккера. В случае $k = 2$ эти соотношения выглядят следующим образом:

$$p_{ik}p_{j\ell} = p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell} \quad (\star)$$

где $i < j < k < \ell$, а $p_{ij} = p_{ji}$ равен значению квадратного минора из i -го и j -го столбца. Иными словами, для матрицы x : $p_{ij} = x_{1,\min(i,j)}x_{2,\max(i,j)} - x_{1,\max(i,j)}x_{2,\min(i,j)}$. Изображая это правило на картинке, получаем правило Птолемея:



Из картинки ясно, что на самом деле имеет значение только циклический порядок индексов $i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Размерность многообразия $\mathrm{Gr}(2, n)$ равна $2n - 4$, а размерность Крулля однородного координатного кольца $K[\mathrm{Gr}(2, n)] = K[p_{ij}]/(\star)$ на единицу больше, значит, $2n - 3$.

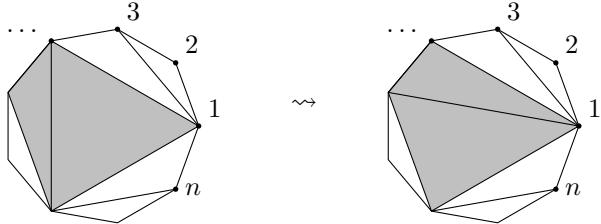
Определение 1.3 (Матрица $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ вполне положительна). Все миноры A положительны.

Занятересуемся схожим вопросом: когда все миноры 2×2 в матрице $2 \times n$ положительны? Более точно, сколько миноров надо проверить на положительность, чтобы положительность остальных последовала?

Из описания координатного кольца Грассмана ясно, что миноры матрицы — любые $p_{ij} \in K$, удовлетворяющие соотношениям (\star) . Так как $\dim \mathbb{R}[\mathrm{Gr}(2, n)] = 2n - 3$, то такова и степень трансцендентности его поля частных, откуда ответ хотя бы $2n - 3$. Это видимо не совсем строгое утверждение, так как \mathbb{R} не алгебраически замкнуто. С другой стороны, эта оценка достигается:

Предложение 1.1. Пусть T — триангуляция правильного n -угольника (множество неупорядоченных пар вершин, соединённых ребром, в том числе пары соседних вершин). Пусть $P := \{p_{ij} \mid (i, j) \in T\}$. Тогда любой p_{rs} выражается в виде некоторой рациональной функции от элементов P с положительными коэффициентами. В частности, положительность элементов P повлечёт положительность всех миноров 2×2 .

Доказательство. Рассмотрим граф, вершины которого — триангуляции n -угольника, а рёбра соответствуют флипам следующего вида:



А именно, любая хорда триангуляции является ребром двух смежных треугольников, в объединении дающих четырёхугольник. Назовём *флипом* замену данной хорды триангуляции на другую диагональ четырёхугольника. Кстати, этот граф является оствомом $(n - 3)$ -мерного ассоциэдра.

Ясно, что любая хорда n -угольника лежит в какой-то триангуляции. Без доказательства утверждается, что граф триангуляций связан. Начнём с триангуляции T , и, применяя флипы, дойдём до триангуляции, содержащей хорду $r - s$. Легко видеть, что p_{ik} , где $i - k$ — хорда, появляющаяся после флипа, выражается через остальные $p_{j\ell}$, отвечающие хордам, присутствовавшим до флипа:

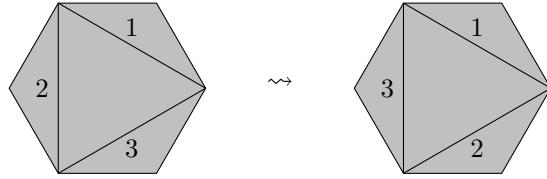
$$p_{ik} = \frac{p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell}}{p_{j\ell}}$$
□

Эту теорему можно пытаться обобщать на разные интересные случаи — рассматривать не только триангуляции, или скажем работать не на плоскости (или её компактификации — сфере), а на поверхности с большим числом ручек. Впрочем, начиная с некоторого места она уже перестаёт быть верной.

Ещё пару слов про флипы и триангуляции: можно считать, что диагонали пронумерованы от 1 до $n - 3$, и при флипе новая диагональ нумеруется тем числом, что было написано на стираемой. Тогда получается, что на множестве триангуляций действует свободное произведение $\underbrace{C_2 * \dots * C_2}_n$.

Действие разумеется не свободное. Например, флипы диагоналей, далеко друг от друга отстоящих, коммутируют. Сами пометки на диагоналях тоже могут перемещаться:

Упражнение 1.2. Получите последовательностью пяти флипов из одной триангуляции шестиугольника другую:

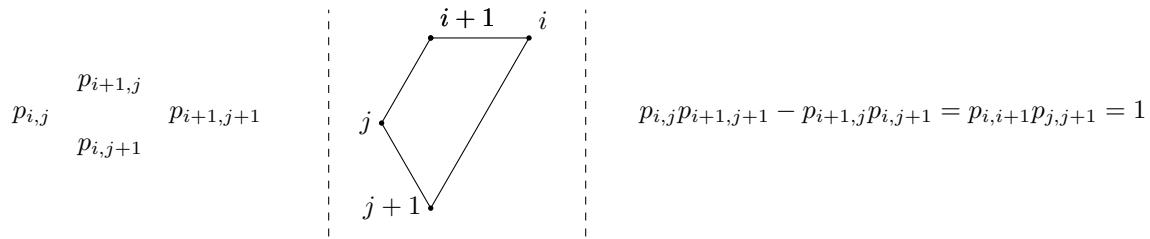


1.4 Классификация фризов

Пусть $p \in \mathrm{Gr}(2, n)$ — точка с однородными координатами p_{ij} ; предположим, что для всех $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $p_{i,i+1} = 1$. Можно составить фриз из координат этой точки следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ & & p_{1,3} & & p_{2,4} & & p_{3,5} & & \\ p_{n,3} & & p_{1,4} & & p_{2,5} & & p_{3,6} & & \\ \dots & & p_{n,4} & & p_{1,5} & & p_{2,6} & & \dots \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & p_{?,?-2} & & p_{?+1,?-1} & & p_{?+2,?} & & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

SL_2 -соотношения выполнены, так как в них превращается соотношение $(*)$:



Обратно, если есть некоторый фриз, то можно построить числа p_{ij} , удовлетворяющие соотношениям Плюккера: пройдём зигзагом вниз по фризу, и положим значения координат, соответствующим зигзаг-триангуляции, равными q_i , а остальные восстановим как в (предложение 1.1).

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ & q_1 & & \square & & \square & & \square & \\ q_2 & \square & & \square & & \square & & \square & \\ \dots & q_3 & & \square & & \square & & & \dots \\ & & \ddots & & & & & & \\ & q_{n-3} & & \square & & \square & & & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Далее остальные значения во фризе восстанавливаются однозначно из SL_2 -соотношений, и в силу выше построенного примера, они все будут иметь вид p_{ij} . Единственность на самом деле имеет место чуть более слабая — например, она есть если все $q_i > 0$ — тогда предложение 1.1 говорит, что все полученные координаты будут положительными. Значит, на самом деле фриз однозначно восстанавливается по q_i и на некотором открытом по Зарисскому множестве.

Замечание. Отсюда получается, что при условии $p_{i,i+1} = 1$ для всех $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ точка лежит на грассманнане, если выполнены уравнения

$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = 1.$$

По-видимому, если ещё подумать, отсюда следует, что вместо всех соотношений грассманана достаточно проверять соотношения

$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = p_{i,i+1}p_{j,j+1},$$

но я не уверен.

2 Определения

2.1 Колчаны и кластерные матрицы

Определение 2.1 (Колчан). Произвольный ориентированный граф $Q = (V, E)$, в котором всё разрешено: петли, кратные рёбра, может быть даже бесконечное число вершин или рёбер...

Определение 2.2 (Кластерный колчан). Конечный колчан без петель и рёбер туда-обратно (пары рёбер вида $i \rightarrow j$ и $j \rightarrow i$).

Кластерные колчаны Q взаимно однозначно соответствуют кососимметрическим матрицам: колчану Q отвечает матрица $B_Q \in M_n(\mathbb{Z})$ (где $n = |V|$):

$$(B_Q)_{i,j} = \begin{cases} \#\{i \rightarrow j\}, & \text{есть стрелки } i \rightarrow j \\ \#\{j \rightarrow i\}, & \text{есть стрелки } j \rightarrow i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Определение 2.3 (Кластерный колчан с замороженными вершинами). Кластерный колчан на m вершинах, где первые $n \leq m$ вершин называются *незамороженными*, а последние $m - n$ вершин называются *замороженными*, и между ними нет рёбер.

На матричном языке кластерный колчан с замороженными вершинами изображают в виде матрицы $\tilde{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$, где $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, и $B \in M_n(\mathbb{Z})$ кососимметрическая, а $C \in M_{(m-n) \times n}(\mathbb{Z})$ — любая. Теоретически можно было бы считать, что кластерному колчану с замороженными вершинами отвечает кососимметрическая матрица из $M_m(\mathbb{Z})$, где правый нижний квадрат $(m-n) \times (m-n)$ нулевой, но так уже не поступить с обобщением данного понятия — *кластерными матрицами*, которые мы определим чуть позже.

Пусть Q — конечный кластерный колчан, $1 \leq i \leq n$ — незамороженная вершина.

Определение 2.4 (Мутация Q в вершине i). На колчанном языке это новый колчан $M_i(Q)$, в котором множество вершин то же самое, а множество рёбер претерпевает следующие изменения:

1. Для каждой пары вершин k, ℓ , таких, что есть рёбра $k \rightarrow i \rightarrow \ell$, добавляем ребро $k \rightarrow \ell$ (если рёбер $k \rightarrow i$ всего n_k штук, а рёбер $i \rightarrow \ell$ всего n_ℓ штук, то мы добавим $n_k \cdot n_\ell$ рёбер).
2. Разворачиваем стрелки, инцидентные i .
3. Стираем всевозможные противонаправленные пары (если было n рёбер в одну сторону, и m в другую, то останется $|n - m|$ понятно в какую сторону).

На матричном языке мутация выглядит так: из $B_Q = (b_{ij})$ получается $B_{M_i(Q)} =: M_i(B_Q) = (b'_{ij})$:

$$b'_{pq} = \begin{cases} -b_{pq}, & i = p \text{ или } i = q \\ b_{pq} + b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} > 0 \\ b_{pq} - b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} < 0 \\ b_{pq}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (\Delta)$$

Замечание. Это инволюция: две мутации подряд в одной и той же вершине не меняют колчан.

Пример. Пусть v — сток или исток. Мутация в вершине v — разворот рёбер, инцидентных v .

Упражнение 2.1. Если Q — дерево на n вершинах, то мутациями в истоках и стоках можно получить любую ориентацию всех $n - 1$ рёбер.

Этот факт известен даже среди алгебраистов, и отвечает следующему утверждению: категории модулей над некоторыми конечномерными алгебрами почти эквивалентны в некотором смысле, *вроде так*.

Однако если делать мутации не в источниках и стоках, то даже какой-нибудь путь может претерпевать очень значительные изменения. Тем не менее, верен следующий факт:

Интересный факт. Пусть Q_1 и Q_2 — два кластерных колчана без ориентированных циклов на одном множестве вершин. Предположим, что они эквивалентны: существует последовательность мутаций, превращающих один в другой. Тогда Q_2 получается из Q_1 только при помощи мутаций в источниках и стоках. В частности, они изоморфны как неориентированные графы.

Что любопытно, комбинаторное доказательство этой теоремы неизвестно, а вот с помощью кластерных категорий доказательство существует уже давно.

Определение 2.5 (Матрица $B' \in M_n(\mathbb{Z})$ кососимметризуема). Существуют $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ при $d_i > 0$ и кососимметричная $B \in M_n(\mathbb{Z})$: $B'D = DB$.

Говоря русским языком, кососимметричная матрица с точностью до перемасштабирования строк
 Что? Вроде же с точностью до сопряжения...

Определение 2.6 (Кластерная матрица). $\tilde{B} \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$, такая что верхний квадрат $n \times n$ — кососимметризуемая матрица, а нижний прямоугольник — любая.

Мутацию в незамороженной вершине $1 \leq i \leq n$ кластерной матрицы определим по формуле(Δ).

Утверждение 2.1. *Мутация по-прежнему инволюция; кососимметризуемость верхнего квадрата сохраняется после мутации; M_i коммутирует с транспонированием $B \mapsto B^t$ и разворотом всех рёбер $B \mapsto -B$. Если $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то мутации M_i и M_j коммутируют при действии на даунную кластерную матрицу.*

Доказательство. Не совсем очевидно, но проверяется в лоб. \square

2.2 Кластерная алгебра

Обозначим через T_n регулярное дерево степени n с неориентированными рёбрами, покрашенными числами $1, \dots, n$. Иными словами, граф Кэли для $\underbrace{C_2 * \dots * C_2}_n$. Отметим некоторую вершину t_0 .

Теперь пусть K — поле, $\tilde{B} \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ — кластерная матрица. Для определения кластерной алгебры нам потребуется следующий набор данных:

- Отображение, сопоставляющее каждой вершине T_n по кластерной матрице $m \times n$, такое что для любых вершин t_1 и t_2 , соединённых ребром цвета i , выполнено соотношение $B(t_2) = M_i(B(t_1))$. Ясно, что задать такое отображение — всё равно, что задать кластерную матрицу для t_0 , остальные определяются однозначно.
- Отображение $x : V(T_n) \rightarrow K(x_1, \dots, x_m)^m$. Вектор $x(t) = (x_1^t, \dots, x_m^t)$ называется *расширенным кластером* в вершине t , а совокупность всех элементов всех векторов зовётся *кластерными переменными*. Первые n переменных расширенного кластера формируют обычный *кластер*. При этом $x(t_0) = (x_1, \dots, x_m)$, и опять же имеется связь между значениями в соседних вершинах: если вершины t и t' соединены ребром цвета i , $x(t) = y, x(t') = y'$, и в вершине i стоит матрица $B(t) = (b_{ij})$ то при $j \neq i$: $y_j = y'_j$, а при $j = i$ выполнено соотношение:

$$y_i y'_i = \prod_{b_{ki} > 0} y_j^{b_{ki}} + \prod_{b_{ki} < 0} y_j^{-b_{ki}}.$$

Определение 2.7 (Кластерная алгебра $A(B)$). Подалгебра в $K(x_1, \dots, x_m)$, порождённая кластерным переменными.

И это ещё не самое общее определение, здесь мы определили так называемую *кластерную алгебру геометрического типа*. Но других у нас, вероятно, не будет.

Этот тип называется геометрическим, так как однородное кольцо гравитации и некоторых других интересных многообразий — такие кластерные алгебры.