Дифференциальные уравнения и динамические системы. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Юрьевич Пилюгин
Конспектировал Леонид Данилевич

III семестр, осень 2023 г.

Оглавление

Литература

1. Юрий Николаевич Бибиков, «Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений»
2. Владимир Игоревич Арнольд, «Обыкновенные дифференциальные уравнения»
3. Сергей Юрьевич Пилюгин, «Пространства динамических систем»

Глава 1

Интегрирование уравнений первого порядка

Лекция I

1 сентября 2023 г.

Обыкновенное дифференциальное уравнение — уравнение, в которой независимая переменная (в обыкновенных — скалярная) обычно обозначается x, а искомая функция — $y(x)$.

Дифференциальное уравнение порядка m — уравнение вида $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(m)}\right) = 0$.

Основателем теории дифференциальных уравнений (и современного анализа вообще) считается Исаак Ньютон. Важным примером дифференциального уравнения можно считать уравнение движения материальной точки по прямой — сила, действующая на точку как-то зависит от времени, координаты точки, и её скорости, получается уравнение $m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$.

Ищем функцию $y(x)$ из уравнения $y' = f(x, y)$.

В данном курсе всегда будем предполагать, что функция f (*правая часть дифференциального уравнения*) непрерывна.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ — *область* (открытое связное множество), причём $f \in C(G)$, то есть f непрерывна в данной области.

Функция $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется решением уравнения $y' = f(x, y)$ на промежутке (a, b), если

1. y дифференцируема.
2. $\{(x, y(x)) \mid x \in (a, b)\} \subset G$.
3. Выполняется равенство $y'(x) \equiv f(x, y(x))$ при $x \in (a, b)$.

Замечание. Две функции, заданные на разных промежутках — разные решения.

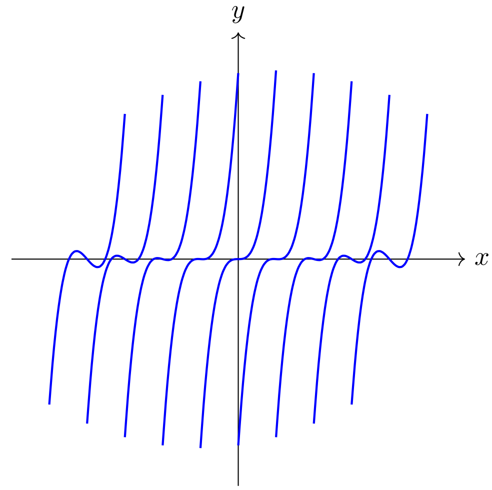
Примеры.

- $y' = ky$, где $k \in \mathbb{R}$. В качестве G естественно брать всю плоскость $\mathbb{R}^2_{x,y}$. Из анализа известно, что любая функция $y(x) = C \cdot e^{kx}$ является решением на любом промежутке.

  Замечание. В данном случае ни $C = 0$, ни $k = 0$ не являются проблемой.

  Определение 1.0.1 (Интегральная кривая). График произвольного решения.

  Если область — существования и единственности, то интегральные кривые данного уравнения покрывают её всю: через каждую точку проходит ровно одна из кривых.



- Рассмотрим уравнение $y' = \frac{1}{2y}$. Функция не определена при $y = 0$, естественно возникают две области $G_1 = \{(x, y) \mid y > 0\}$ и $G_2 = \{(x, y) \mid y < 0\}$. На каждой из них функция определена и непрерывна.

$$y'(x) = \frac{1}{2y(x)} \quad \Rightarrow \quad 2y(x)y'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad (y^2(x))' = 1$$

  Теперь уже из анализа понятно, что $y^2(x)$ имеет вид $x + C$ для некой константы C.

  В G_1 решением является $y(x) = \sqrt{x + C}$, в G_2 — $y(x) = -\sqrt{x + C}$. Эти решения определены не для всех значений x, а только для тех, где $x + C > 0$ (равенство нулю также недопустимо, необходимо существование производной).

Обычно у дифференциального уравнения бесконечно много решений, даже не принимая в расчёт, что они могут быть заданы на разных промежутках.

Естественно искать решения с некоторыми свойствами — ограниченные решения, периодические решения, так далее.

Основное время мы посвятим так называемой **задаче Коши**. В неё фиксирована точка $(x_0, y_0) \in G$, а функция $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *решением задачи Коши с начальными данными* (x_0, y_0), если y — решение на (a, b), причём $x_0 \in (a, b), y(x_0) = y_0$. Геометрический смысл задачи Коши — решение с интегральной кривой, проходящей через (x_0, y_0).

В вопросе о единственности решения Коши простое определение дать непросто — всякое решение на каком-то интервале можно сузить на меньший интервал, и никакое решение абсолютно единственным являться не может.

Определение 1.0.2 (Точка единственности решения задачи Коши)**.** Точка $(x_0, y_0) \in G$, такая, что для любых двух решений $y_1(x), y_2(x)$ задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) существует интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$, такой, что $y_1(x) \equiv y_2(x)$ при $x \in (\alpha, \beta)$.

Контрпример.

Рассмотрим уравнение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Здесь правая часть определена и непрерывна на всей плоскости.

Рассмотрим задачу Коши с начальными данными $(0, 0)$.

Есть очевидное решение $y'(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$.

Есть решение $y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$. Это тоже решение, так как функция дифференцируема всюду (в том числе в нуле), причём равенство выполняется.

Эти два решения не совпадают ни на каком интервале, содержащем 0, таким образом $(0,0)$ точкой единственности данной задачи Коши не является.

Тем не менее, вскоре мы увидим, что, например, точка $(1,1)$ — точка единственности соответствующей задачи Коши.

Теорема 1.0.1 (Теорема существования)**.** Если правая часть непрерывна в данной области G, то для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ существует решение задачи Коши.

Доказательство. Теорема Пеано с существовании решения: (теорема 2.2.1). □

Теорема 1.0.2 (Теорема единственности)**.** Если и f, и $\frac{\partial f}{\partial y}$ обе непрерывны в данной области G, любая точка $(x_0, y_0) \in G$ — точка единственности.

Доказательство. Любая из теорем существования и единственности: (теорема 2.2.2) или (теорема 2.2.4). □

Если выполнены оба условия, то G — область существования и единственности.

Рассмотрим уравнение $y' = f(x,y)$ на G. Рассмотрим точку (x_0, y_0), и проведём через эту точку соответствующую интегральную кривую. В точке (x_0, y_0) к ней можно провести касательную, её угловой коэффициент будет $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Определение 1.0.3 (Поле направлений)**.** Проведём через каждую точку (x_0, y_0) отрезок с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$.

Факт 1.0.1. *$y(x)$ — решение на промежутке (a,b) $\iff$ $\forall x \in (a,b) : y(x)$ касается отрезка из поля направлений (соответствующего точке $(x, y(x))$).*

Вопрос о решении уравнений достаточно сложный, сейчас мы будем рассматривать несколько типов уравнений, для которых решения можно находить «в более или менее явном виде».

1.1 Уравнения первого порядка, разрешённые относительно частных производных

Рассмотрим уравнение $y' = f(x,y), f \in C(G)$.

Функция $u : H \to \mathbb{R}$, где область $H \subset G$, называется *(первым) интегралом* уравнения в H, если

1. $u \in C^1(H)$.
2. $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ в H.
3. Для любого решения $y(x)$ на (a,b), такого, что $\forall x \in (a,b) : (x, y(x)) \in H$ функция $u(x, y(x))$ является постоянной на $x \in (a,b)$.

Вспомним точную формулировку теоремы о неявной функции.

Теорема 1.1.1 (О неявной функции)**.** Рассмотрим функцию $F : H \to \mathbb{R}$, где $H \subset \mathbb{R}^2$, такую, что $F \in C^1(H)$, $\exists (x_0, y_0) \in H : F(x_0, y_0) = 0$, причём $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существуют два интервала $I, J \subset \mathbb{R}$ ($I \ni x_0, J \ni y_0$), и существует функция $z \in C^1(I)$, такая, что

$$F(x,y) = 0, x \in I, y \in J \iff y = z(x)$$

Теорема 1.1.2 (Об интеграле)**.** Пусть $u(x,y)$ — интеграл в $H \subset G$. Тогда $\forall (x_0, y_0) \in H$ найдутся интервалы $I \ni x_0, J \ni y_0$, и $\exists Y \in C^1(I)$, такие что

1. Y — решение задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0)
2. $\forall (x,y) \in I \times J : u(x,y) = u(x_0, y_0) \iff y = Y(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $F(x,y) \coloneqq u(x,y) - u(x_0,y_0)$. Функция F удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции ($\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ по определению *интеграла*).

По теореме о неявной функции $\exists z(x)$, такая, что $F(\cdot,\cdot)$ на множестве $I \times J$ обнуляется ровно на точках вида $(x, z(x))$.

С другой стороны, по теореме существования найдётся решение $y(x)$ на промежутке $I_0 \ni x_0$. Можно сузить I_0 так, чтобы $I_0 \subset I, y(I_0) \subset J$. По определению интеграла $u(x, y(x))$ постоянно, то есть равно $u(x_0, y(x_0))$.

Отсюда видим, что сужение z на $I_0 \times J_0$ и является искомой функцией Y — неким сужением y. $\square$

Лекция II

8 сентября 2023 г.

$$y' = f(x), f \in C(a,b)$$

Из анализа известно, что для любой точки $(x_0,y_0) \in (a,b) \times \mathbb{R}$ существует и единственно решение, проходящее через данную точку

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = m(x)n(y)$$

где $m \in C(a,b), n \in C(\alpha,\beta)$.

Имеет смысл искать решение в области $G = (a,b) \times (\alpha,\beta)$.

Предположим, что $\exists y_0 \in (\alpha,\beta) : n(y_0) = 0$. Тогда в числе прочих решений есть $y(x) \equiv y_0$, определённая при $x \in (a,b)$.

Теперь что происходит в прочих местах? Пусть $I = (\alpha',\beta')$ выбрано так, что $\forall y \in I : n(y) \neq 0$. Обозначим $I_0 = (a,b)$. Выберем $x_0 \in I_0, y_0 \in I$.

При подстановке $y'(x) = m(x)n(y(x))$ получаем уравнение $\frac{y'(x)}{n(y(x))} = m(x)$, что можно проинтегрировать.

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{n(y(t))}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^{x} m(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\left\| y(t) = z \qquad y'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}z \right\|$$

$$\int\limits_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}z}{n(z)} = \int\limits_{x_0}^{x} m(s)\,\mathrm{d}s$$

Введём две первообразные $M(x) = \int m(x)\,\mathrm{d}x$ (определена на (a,b)) и $N(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{n(y)}$ (определена на I).

Тогда мы получаем равенство $N(y(x)) - M(x) = N(y(x_0)) - M(x_0)$. Отсюда мы получаем *интеграл* $U(x,y) = N(y) - M(x)$. В самом деле,

- $U \in C^1((a,b) \times (\alpha',\beta'))$.
- $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{n(y)} \neq 0$.

- Для всякого решения $y(x)$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x,y(x)) = \frac{\partial}{\partial x}U(x,y(x)) + \frac{\partial}{\partial y}U(x,y(x)) \cdot y'(x) = -m(x) + \frac{1}{n(y(x))}m(x)n(y(x)) = 0$$

1.3 Замена переменных

В уравнении $y' = f(x,y)$ можно ввести новую независимую переменную v, и новую искомую функцию w, связанные тождествами
$$x = V(v,w) \quad y = W(v,w)$$
Подставив, мы получим новое дифференциальное уравнение, которое может быть легче решить.

Примеры.

- $y' = f(ax+by)$. Будем считать, что $ab \neq 0$, иначе неинтересно. Оставив x независимой переменной, заменим $w = ax+by$. Теперь $w' = a + by' = a + bf(w)$, что есть уравнение с разделяющимися переменными.
- Ещё одним примером является уже знакомое нам уравнение с разделяющимися переменными $y' = m(x)n(y)$ при $n(y(x)) \neq 0$.

  Тут, заменив, $w = \int \frac{1}{n(y)}\,\mathrm{d}y = N(y)$ получаем уравнение $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{n(y)} \cdot y' = m(x)$.

1.4 Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = p(x)y + q(x)$$
где $p, q \in C(a,b)$. Обозначив $f(x,y) = p(x)y + q(x)$ на области $G = (a,b) \times \mathbb{R}$, видим, что $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, откуда G — область существования и единственности.

1. Рассмотрим *однородное уравнение* $y'(x) = p(x)y$, как бы заменив $q(x)$ на 0.
   - $y(x) \equiv 0$ — решение на $x \in (a,b)$.
   - Рассмотрим $G_+ = \{(x,y) \mid x \in (a,b), y > 0\}$. Пусть $(x_0,y_0) \in G_+$.
   $$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{y(t)} = \int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s$$
   $$\log(y(x)) - \log(y(x_0)) = \int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s$$
   $$y(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

     Это решение, проходящее через точку (x_0,y_0).
   - Для области G_- аналогичные рассуждения выдают тот же ответ $y(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)$.

   Таким образом, множество всех решений — это $\left\{y(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right) \mid (x_0,y_0) \in G\right\}$, причём здесь записано единственное решение, проходящее через (x_0,y_0). Тем не менее, пока то, что G — область существования и единственности даёт гарантии лишь локальной единственности, и то, что никаких других решений нет (кроме сужений данного), мы докажем позднее (теорема 2.3.2).

2. **Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)**. Будем искать решения неоднородного уравнения $y' = p(x)y + q(x)$ в виде $y(x) = c(x)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)$, где $c \in C^1(a,b)$.

   Продифференцировав, получим $y'(x) = c'(x)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right) + c(x)p(x)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)$.

   Хочется, чтобы выполнялось равенство $y'(x) = p(x)y + q(x)$, это эквивалентно равенству $c'(x)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right) = q(x)$, откуда получаем

$$c(x) = \int q(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x$$

3. Заметим, что если $y_1(x)$ — решение неоднородного уравнения ($y'(x) = p(x)y + q(x)$), $y_2(x)$ — решение соответствующего однородного ($y'(x) = p(x)y$), то $y_1 + y_2$ — тоже решение данного неоднородного уравнения.

   Получаем довольно громоздкую формулу для решения задачи Коши

$$y(x) = \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right)\cdot\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right)$$

1.5 Уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^m$$

При $m = 0, 1$ уравнение обращается в ранее рассмотренное линейное дифференциальное.

Если $m > 0$, то $y \equiv 0$ является решением, теперь ограничим уравнение на область $y > 0$.

$$\begin{gathered}
y' = p(x)y + q(x)y^m \\
\frac{y'}{y^m} = p(x)y^{1-m} + q(x) \\
\Big\|w = y^{1-m}\Big\| \\
w' = (1-m)y^{-m}\cdot y' \\
\frac{1}{1-m}w' = p(x)w + q(x)
\end{gathered}$$

1.6 Уравнение Рикатти

$$y' = ay^2 + bx^\alpha, \qquad ab \neq 0$$

Бернулли показал, что уравнение Рикатти можно проинтегрировать для $\alpha \in \left\{\frac{-4k}{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; а после этого (в 1841 году) Лиувилль показал, что при данных α (и ещё при $\alpha = -2$) уравнение интегрируется, а при всех остальных — **не интегрируется вообще**.

Рассмотрим класс элементарных функций — {степенные, показательные, суммы, произведения, логарифм...} и замкнём его относительно конечного числа взятий композиций, взятий обратных и взятий первообразных. Лиувилль показал, что ни одно решение уравнения Рикатти при α, не являющимся показателем Бернулли, не принадлежит данному классу, именно поэтому интегрированием никак не получить решение уравнения Рикатти.

После этого теория дифференциальных уравнений пошла по другому пути — перестали искать новые методы интегрировать решения, зато стали искать методы получать свойства решений, не получая их самих.

Лекция III

15 сентября 2023 г.

1.7 Дифференциальное уравнение 1 порядка в симметричной форме. Уравнение Пфаффа

Определение 1.7.1 (Дифференциальная 1-форма)**.** Выражение вида $F = m(x,y)\,\mathrm{d}x + n(x,y)\,\mathrm{d}y$, где $m, n \in C^1(G)$, причём $\forall (x,y) \in G : \left[\begin{array}{l} m(x,y) \neq 0 \\ n(x,y) \neq 0 \end{array}\right.$. Рассматривается пока как некий формальный объект.

Определение 1.7.2 (Интегральная кривая формы F)**.** Векторнозначная функция $\gamma : (a,b) \to G$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ — регулярная гладкая кривая, такая, что $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1(a,b)$, $(\dot{\gamma_1})^2 + (\dot{\gamma_2})^2 \neq 0$, и наконец $m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) \equiv 0$.

Сведём уравнение Пфаффа $F = 0$ к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Рассмотрим два уравнения
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{n(x,y)}{m(x,y)}$$
В первом y искомая функция, x — независимая переменная, во втором — наоборот.

Рассмотрим $t_0 \in (a,b)$. Здесь $\dot{\gamma}_1(t_0) \neq 0$ (или $\dot{\gamma}_2(t_0)$, несущественно). Значит, $\exists (\alpha, \beta) \subset (a,b) : \forall t \in (\alpha,\beta) : \dot{\gamma}_1(t) \neq 0$.

На данном промежутке γ_1 обратима, уравнение $\gamma_1(t) = x$ разрешимо единственным образом: $\exists \gamma_1^{-1}(x) =: t$.

Положим $y(x) = \gamma_2(\gamma_1^{-1}(x))$. Проверим, что это решение
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dot{\gamma}_2(\gamma_1^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\dot{\gamma}_1(\gamma_1^{-1}(x))} = \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = -\frac{m(\gamma(t))}{n(\gamma(t))} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$$
Таким образом, наличие интегральной кривой γ параметрически задаёт решение уравнения Пфаффа.

Замечание. Верно и обратное: пусть $y(x)$ — решение уравнения $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)}$. Здесь подойдёт $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t & y(t) \end{pmatrix}$. Теперь $\dot{\gamma}_1 = 1, \dot{\gamma}_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)} = -\frac{m(\gamma_1,\gamma_2)}{n(\gamma_1,\gamma_2)}$. Теперь несложно убедиться в равенстве $m(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t) + n(\gamma(t))\dot{\gamma}_2(t) \equiv 0$

Замечание. Уравнение Пфаффа стоит понимать, как совокупность двух вышеприведённых уравнений
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m(x,y)}{n(x,y)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{n(x,y)}{m(x,y)}$$
Деление на дифференциал можно формализовать, но лектор делать этого не собирается.

1.7.1 Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим такое уравнение Пфаффа
$$F = m(x,y)\,\mathrm{d}x + n(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

что существует $U(x,y), U \in C^2(G)$, такая, что $m = \frac{\partial U}{\partial x}, n = \frac{\partial U}{\partial y}$.

В этом случае F называется *точной формой*.

Теорема 1.7.1. Если F — точная форма, то $\forall (x_0, y_0) \in G : \exists$ окрестность $V \ni (x_0, y_0)$, такая, что U является интегралом одного из двух уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m}{n} \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{n}{m}$$

Доказательство. Предположим, что $n(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $\exists V \ni (x_0, y_0) : \forall (x,y) \in V : n(x,y) \neq 0$.

Рассмотрим уравнение $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m}{n}$ в V. Действительно, $U \in C^1$, частная производная по y не обнуляется, осталось проверить, что на неком промежутке (a,b) интеграл от решения постоянен.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) = m + n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = m + n \cdot \left(-\frac{m}{n}\right) \equiv 0$$

□

Это очень удобно, но как проверять, что форма точная?

Если F — точная форма, то выполнены условия

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

оказывается, данное условие не только необходимое, но и в некотором роде достаточное.

Теорема 1.7.2. Докажем достаточность для прямоугольника $(a,b) \times (\alpha, \beta)$.

Если условия выполнены на прямоугольнике, то F — точная форма.

Доказательство. Построим $U \in C^2(G)$ с заданными частными производными.

$$U := \int\limits_{x_0}^{x} m(s,y)\,\mathrm{d}s + \phi(y), \qquad \phi \in C^2$$

Найдём ϕ так, чтобы выполнялось второе равенство.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} m(s,y)\,\mathrm{d}s + \phi'(y) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial m}{\partial y}(s,y)\,\mathrm{d}s + \phi'(y) = \\ = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial n}{\partial s}(s,y)\,\mathrm{d}s + \phi'(y) = n(x,y) - n(x_0,y) + \phi'(y) \overset{\text{хотим}}{=} n(x,y)\end{aligned}$$

Значит, надо выбрать $\phi'(y) = n(x_0, y)$, откуда в качестве ϕ подходит $\int\limits_{y_0}^{y} n(x_0,t)\,\mathrm{d}t$.

Получившаяся формула не выглядит симметричной:

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} m(s,y)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{y_0}^{y} n(x_0,t)\,\mathrm{d}t$$

Тем, что F задана на прямоугольнике мы пользовались тогда, когда записали данный интеграл — путь интегрирования должен быть внутри области задания F. □

Если же F не является точной формой, то ищется *интегрирующий множитель* $\mu(x, y), \mu \in C^1, \mu \neq 0$, такая, что μF — точная форма.

Тогда уравнения $F = 0$ и $\mu F = 0$ эквивалентны.

Простой пример, когда можно найти интегрирующий множитель — уравнение с разделяющимися переменными $m(x)n(y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$.

Если $n(y) \neq 0$, то в качестве множителя подойдёт $\frac{1}{n(y)}$. Получится форма $m(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n(y)}\,\mathrm{d}y = 0$, которая уже точна.

Глава 2

Системы дифференциальных уравнений

Будем обозначать независимую переменную t, а производные по t — точкой: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$.

2.1 Системы, разрешённые относительно старших производных

Ищем n функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, фиксируем n натуральных чисел $m_1, \dots, m_n$.

Записаны n уравнений вида

$$\frac{\mathrm{d}^{m_j} x_j}{\mathrm{d}t^{m_j}} = f_j(t, x_1, \dots, x_1^{(m_1-1)}, x_2, \dots, x_2^{(m_2-1)}, \dots, \dots, x_n, \dots, x_n^{(m_n-1)})$$

Данная система называется системой порядка m, где $m = m_1 + \dots + m_n$.

Примеры (Важные частные случаи).

- Нормальная система. $m_1 = \dots = m_n = 1$. Здесь все уравнения упрощаются до

$$\dot{x}_j = f_j(t, x_1, \dots, x_n)$$

- Дифференциальное уравнение порядка m при $n = 1$.

$$x^{(m)} = f(t, x, \dots, x^{(m-1)})$$

На самом деле, любое уравнение несложно свести к нормальной системе. Покажем это на примере уравнения порядка m.

Рассмотрим нормальную систему с m искомыми функциями $y_0, \dots, y_{m-1}$ вида

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dots \\ \dot{y}_{m-2} = y_{m-1} \\ \dot{y}_{m-1} = f(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) \end{cases}$$

Тогда если $x(t)$ — решение уравнения порядка m, то в качестве решений системы подойдут $y_k = x^{(k)}$, и наоборот, если нашлись $\{y_k\}_{k=0}^{m-1}$ — решение системы, то $x = y_0$ является решением уравнения.

2.1.1 Векторная запись нормальной системы

Введём $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $\qquad f : (G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}$. Условимся за производные и интегралы векторов обозначать их покоординатно: $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$ $\qquad \int f \,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int f_1 \,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int f_n \,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$

Условимся в качестве нормы вектора считать максимум модуля его координат $|x| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

Определение 2.1.1 (Решение на (a,b))**.** Отображение $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, такое, что

1. $\exists \dot{x}(t)$ на (a,b).
2. $\forall t \in (a,b) : (t, x(t)) \in G$.
3. $\forall t \in (a,b) : \dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

Определение 2.1.2 (Решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) на (a,b))**.** Отображение $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, такое, что

- x — решение на (a,b),
- $x(t_0) = x_0$.

2.2 Существование и единственность решения задачи Коши

Введём *эквивалентное интегральное уравнение* $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \,\mathrm{d}s$.

Определение 2.2.1 (Решение интегрального уравнения на (a,b))**.** Отображение $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, такое что

1. x непрерывно,
2. $\forall t \in (a,b) : (t, x(t)) \in G$,
3. Выполнено равенство $\forall t \in (a,b) : x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \,\mathrm{d}s$.

Лемма 2.2.1 (Об эквивалентости интегрального уравнения)**.** *Функция $x(t)$ — решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0), если и только если $x(t)$ — решение эквивалентного интегрального уравнения.*

Доказательство.

$\Rightarrow$. Из (1) решение задачи Коши x непрерывно, значит из (3) его производная непрерывна. Теперь остальное доказывается интегрированием $\dot{x}(t) = f(t,x)$ по t на промежутке $\langle t_0, t_1 \rangle$: слева получается $x(t_1) - x(t_0)$, справа $\int\limits_{t_0}^{t_1} f(s, x(s)) \,\mathrm{d}s$.

$\Leftarrow$. Так как $f(t, x(t)) \in C((a,b))$, то $\exists \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \,\mathrm{d}s = f(t, x(t))$, откуда на самом деле $x \in C^1((a,b))$. Теперь остальное получается дифференцированием равенства $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))$: слева получится $\dot{x}(t)$, справа $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \,\mathrm{d}s \right) = f(t, x(t))$. $\square$

Лекция IV

22 сентября 2023 г.

2.2.1 Теорема Пеано о существовании решения

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$. Рассмотрим решение $x(t)$ с условием $\dot{x} = f(t, x)$.

Ранее мы рассматривали решения на интервале $x : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, такие, что уравнение обращается в верное равенство.

Позволим себе расширить множество решений, на концах отрезка вычисляя односторонние производные. Заметим, что $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$ — по-прежнему эквивалентное интегральное уравнение.

Теорема 2.2.1 (Пеано, о существовании решения)**.** Если $f \in C(G)$, то $\forall (x_0, t_0) \in G : \exists$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0).

Доказательство. Сведёмся к разрешимости эквивалентного интегрального уравнения. Зафиксируем $(t_0, x_0) \in G$, введём $\alpha, \beta > 0$ так, что параллелепипед $R = \Big\{(t, x)\Big||t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\Big\} \subset G$.

Выберем $M > 0 : |f(t, x)| \leqslant M$ в R. Пусть $h \coloneqq \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right)$. Докажем существование решения на замкнутом промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$ — *промежутке Пеано*. Для простоты докажем существование решения на $[t_0, t_0 + h]$, слева будет аналогично.

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$, разобьём $[t_0, t_0 + h]$ на N равных кусков точками $t_k \coloneqq t_0 + \frac{kh}{N}$. Построим на этом разбиении *ломаную Эйлера* $g(t)$. $g(t)$ будет определяться индуктивно: поочерёдно для $k = 1..N$ положим $g(t) = g(t_k) + f(t_k, g(t_k))(t - t_k)$ на $[t_k, t_{k+1}]$, что определено, если $(t_k, g(t_k)) \in G$. В частности, изначально положим $g(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$ на $[t_0, t_1]$.

У этой ломаной есть производные во всех внутренних точках звеньев. Определим также $\dot{g}(t_k)$. $\dot{g}(t_0) \coloneqq f(t_0, x_0)$ и $\dot{g}(t_k) = \lim\limits_{t \to t_k - 0} \dot{g}(t)$.

Лемма 2.2.2. *Докажем, по индукции для $k = 1..N$, что для $t \in [t_0, t_k]$*

1. *$g(t)$ определена*
2. *$|g(t) - x_0| \leqslant M(t - t_0)$*
3. *$g(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{g}(s)\,\mathrm{d}s$*

Доказательство леммы.

<u>База:</u> Для $k = 1$: g определена на $[t_0, t_1]$, как записано выше. $|g(t) - x_0| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(t_0, x_0)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant M(t - t_0) \leqslant Mh$, так как $(t_0, x_0) \in R$, откуда $|f(t_0, x_0)| \leqslant M$. Также (3) очевидно, так как на данном единственном звене g линейна.

<u>Переход:</u> Докажем для $k + 1$. По индукции $g(t_k)$ определена, причём $|g(t_k) - x_0| \leqslant M(t - t_0) \leqslant Mh \leqslant \beta$ и $|t_k - t_0| \leqslant h \leqslant \alpha$. Таким образом, $(t_k, g(t_k)) \in R \subset G$, откуда g определена и на $[t_k, t_{k+1}]$. (2) и (3) опять (как и в базе) следуют из того, что

$$g(t) = g(t_k) + f(t_k, g(t_k))(t - t_k) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_k} \dot{g}(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{t_k}^{t} \dot{g}(s)\,\mathrm{d}s = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{g}(s)\,\mathrm{d}s \qquad \square$$

Теперь устремим число точек N на ломаной к $+\infty$.

Последовательность функций $\Phi = \{\phi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$, бьющих из $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$ называется

- *равномерно ограниченной*, если $\exists H > 0 : |\phi_m(t)| \leqslant H$ для $t \in [a, b], m \in \mathbb{N}$.
- *равностепенно непрерывной*, если $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall m, t, t' : |t - t'| < \delta \Rightarrow |\phi_m(t) - \phi_m(t')| \leqslant \varepsilon$.

Интересный факт (Лемма Арцела — Асколи). В равномерно ограниченной равностепенно непрерывной последовательности функций можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Покажем, что $\{g_N(t)\}_{N=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, то есть к ней применима данная лемма.

Равномерная ограниченность следует из $\forall N, t \in [t_0, t_0 + h] : |g_N(t) - x_0| \leqslant M(t - t_0)$ и неравенства треугольника: $|g_N(t)| \leqslant |x_0| + Mh$. Равностепенная непрерывность следует из интегрального представления:

$$|g_N(t') - g_N(t)| = \left| \int\limits_{t'}^{t} \dot{g}_N(s) \, \mathrm{d}s \right|, \text{ причём } \dot{g}_N(s) \text{ — значение } f \text{ в какой-то точке } R$$

Таким образом, в g найдётся сходящаяся подпоследовательность, для краткости записи будем считать, что сама $g_N \underset{N \to \infty}{\rightrightarrows} g(t)$ на $[t_0, t_0 + h]$. Проверим, что g действительно является решением эквивалентного интегрального уравнения.

- $g(t)$ непрерывна, так как к ней равномерно сходятся g_N.
- $(t, g_N(t)) \in R$, а так как R замкнуто, и имеется и поточечная сходимость, то $(t, g(t)) \in R$.
- Осталось показать, что g удовлетворяет самому равенству

$$g(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, g(s)) \, \mathrm{d}s$$

Для этого запишем

$$g_N(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{g}_N(s) \, \mathrm{d}s = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, g_N(s)) \, \mathrm{d}s + \int\limits_{t_0}^{t} (\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))) \, \mathrm{d}s$$

Так как f равномерно непрерывна на R, то $f(s, g_N(s)) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f(s, g(s))$. Отсюда её можно заменить под интегралом, и осталось показать, что $\left| \int\limits_{t_0}^{t} (\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))) \, \mathrm{d}s \right|$ стремится к нулю.

Выберем $\varepsilon > 0$, для него найдётся такая δ, что

$$\forall (t, x), (t', x') \in R : |t - t'| < \delta, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(t', x') - f(t, x)| < \varepsilon$$

Рассмотрим достаточно большие N, такие, что

$$\forall t \in [t_0, t_0 + h] : \exists k : |t - t_k| < \frac{h}{N} < \delta \quad \text{и} \quad |g_N(t) - g(t)| < \delta$$

Так как $|g_N(t_k) - g_N(t)| \leqslant M|t_k - t| \leqslant M\frac{h}{N}$, то при достаточно больших N

$$\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s)) \, \mathrm{d}s \leqslant \varepsilon$$

Интегрируя по отрезку, чья длина ограничена, получаем, что весь интеграл $\left| \int\limits_{t_0}^{t} (\dot{g}_N(s) - f(s, g_N(s))) \, \mathrm{d}s \right|$ стремится к нулю при $N \to \infty$. □

Лекция V

29 сентября 2023 г.

2.2.2 Теорема Пикара о существовании и единственности решения

Пусть $f : (G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}) \to \mathbb{R}^n$.

Определение 2.2.2 (f липшицева в $H \subset G$). $\exists L \in \mathbb{R} : \forall (t,x),(t,x') \in H : |f(t,x) - f(t,x')| \leqslant L|x - x'|$. Пишут $f \in \mathrm{Lip}_x(H)$.

Определение 2.2.3 (f локально липшицева в G). $\forall (t_0, x_0) \in G : \exists V \ni (t_0, x_0) : f \in \mathrm{Lip}_x(V)$. Пишут $f \in \mathrm{Lip}_{x,loc}(G)$.

Запишем f в координатном виде $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, где f_i дифференцируема по x. Введём матрицу Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Определение 2.2.4 (Операторная норма $A \in M(n, \mathbb{R})$). $\|A\| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$. Здесь $|x| = 1$ по-прежнему значит $\max\limits_{i=1}^{n} |x_i| = 1$.

Свойства.

- Операторная норма произведения не превосходит произведения операторных норм: $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.
- Операторная норма степени не превосходит степени операторных норм: $\|A^m\| \leqslant \|A\|^m$.

Лемма 2.2.3. *Если* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(G)$ *(то есть матрица Якоби непрерывна в* G*), то* $f \in \mathrm{Lip}_{x,loc}(G)$.

Доказательство. Рассмотрим $(t_0, x_0) \in G$, найдутся такие $\alpha, \beta > 0$: $R = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} \subset G$. Пусть $V = \mathrm{Int}\, R$, $L = \max\limits_{(t,x) \in R} \left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right\|$.

Тогда для $(t, x_1), (t, x_2) \in V$ можно рассмотреть $g(s) = f(t, sx_1 + (1-s)x_2), s \in [0,1]$.

$$|g(1) - g(0)| = \left| \int\limits_0^1 \frac{\partial g}{\partial s}\, \mathrm{d}s \right| = \left| \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_1 + (1-s)x_2)\, \mathrm{d}s \right| |x_1 - x_2| \leqslant L\, |x_1 - x_2|$$

$\square$

Пусть $f \in C(G), \mathrm{Lip}_{x,loc}(G)$, пусть $K \subset G$ — компакт.

Лемма 2.2.4. *Тогда* $f \in \mathrm{Lip}_x(K)$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Выберем последовательность $\{L_k\}$, стремящуюся к бесконечности, для каждого k найдётся пара точек $(t_k, x_k), (t_k, x'_k) \in K$, для которых не выполнено условие Липшица.

Выберем подпоследовательность, такую, что $(t_k, x_k, \widetilde{x}_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} (\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{x}')$.

- Если $\widetilde{x} = \widetilde{x}'$, то рассмотрим окрестность $V \ni (\widetilde{t}, \widetilde{x})$, такую, что $f \in \mathrm{Lip}_x(V)$. При достаточно больших k точки $(t_k, x_k), (t_k, x'_k) \in V$, противоречие.
- Если же $\widetilde{x} \neq \widetilde{x}'$, то мы рассмотрим $g(t,x,y) = \frac{f(t,x) - f(t,y)}{|x-y|}$. Эта функция определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $(\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{x}')$. Тогда $\exists W \ni (\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{x}'), L \in \mathbb{R}$: $|g(t,x,y)| \leqslant L$ в W.

  При достаточно больших $k : (t_k, x_k, x'_k) \in W$, противоречие.

$\square$

Лемма 2.2.5 (Gronwall (Гронуолл))**.** *Пусть* $\phi(t)$ *— неотрицательна и непрерывна на* (a, b)*. Пусть* $\exists t_0 \in (a,b), \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} : \phi(t) \leqslant \lambda + \mu \left| \int\limits_{t_0}^{t} \phi(s)\,\mathrm{d}s \right|$*. Утверждается, что тогда* $\phi(t) \leqslant \lambda e^{\mu|t-t_0|}$.

Доказательство. Рассмотрим $t \geqslant t_0$, при $t \leqslant t_0$ аналогично.

$$\phi(t) \leqslant \lambda + \mu \int\limits_{t_0}^{t} \phi(s)\,\mathrm{d}s =: \Phi(t)$$

$\dot{\Phi}(t) = \mu \cdot \phi(t) \leqslant \mu\Phi(t)$, откуда $\dot{\Phi} - \mu\Phi \leqslant 0$.

$$e^{-\mu(t-t_0)} \left(\dot{\Phi}(t) - \mu\Phi(t) \right) \leqslant 0 \quad \iff \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-\mu(t-t_0)}\Phi(t)) \leqslant 0$$

Таким образом, $e^{-\mu(t-t_0)}\Phi(t) \leqslant \lambda \iff \phi(t) \leqslant \Phi(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$. $\square$

Следствие 2.2.1. *Если* $\exists t_0 \in (a,b), \mu \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} : \phi(t) \leqslant \mu \left| \int\limits_{t_0}^{t} \phi(s)\,\mathrm{d}s \right|$*, то* $\phi(t) \equiv 0$

Теорема 2.2.2 (Picard (Пикар))**.** Если $f \in C(G), \mathrm{Lip}_{x,loc}(G) \Rightarrow G$ — область существования и единственности.

Доказательство. Для начала докажем, что $\forall (x_0, y_0) \in G$: задача Коши разрешима.

Рассмотрим $\alpha, \beta > 0$ такие, что $R = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} \subset G$. Выберем $M > 0 : |f| \leqslant M$ в R.

Согласно лемме (лемма 2.2.4) $f \in \mathrm{Lip}_x(R)$. Пусть $h = \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right)$.

Докажем существование решения на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$ методом *последовательных приближений Пикара*. Рассмотрим $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, определённые по правилу

$$\phi_0(t) \equiv x_0 \qquad \phi_{k+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s))\,\mathrm{d}s$$

Лемма 2.2.6. $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \phi_k(t)$ *определена и непрерывна на* $[t_0 - h, t_0 + h]$*, и её график лежит в* R*.*

Доказательство леммы.

База: При $k = 0$ утверждение верно.

Переход: Докажем для $k+1$. Так как $(t, \phi_k(t)) \in R \subset G$, то ϕ_{k+1} определена и непрерывна на $[t_0 - h, t_0 + h]$. Осталось проверить, что $|x - x_0| \leqslant \beta$, что следует из $\left| \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s))\,\mathrm{d}s \right| \leqslant M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant \beta$. $\square$

Лемма 2.2.7. $\phi_k(t) \rightrightarrows \phi(t)$ *равномерно на* $[t_0 - h, t_0 + h]$*.*

Доказательство леммы.

Рассмотрим $\psi_k(t) = \begin{cases}\phi_0(t), & k=0\\ \phi_k(t)-\phi_{k-1}(t), & k>0\end{cases}$. Тогда надо показать, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_k(t)$ сходится равномерно. Воспользуемся критерием Вейерштрасса: при

$$k \geqslant 1 : |\psi_k(t)| \leqslant \frac{M}{L}\frac{|L(t-t_0)|^k}{k!}$$

Докажем это по индукции для $t \geqslant t_0$ (для $t \leqslant t_0$ аналогично).

<u>База:</u> $|\psi_1(t)| = |\phi_1(t)-\phi_0(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(s,x_0)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant M(t-t_0) = \frac{M}{L}\frac{L(t-t_0)}{1}$

<u>Переход:</u>

$$|\psi_{k+1}(t)| = |\phi_{k+1}(t)-\phi_k(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t}[f(s,\phi_k(s))-f(s,\phi_{k-1}(s))]\,\mathrm{d}s\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t}|f(s,\phi_k(s))-f(s,\phi_{k-1}(s))|\,\mathrm{d}s \leqslant L\int\limits_{t_0}^{t}|\phi_k(s)-\phi_{k-1}(s)|\,\mathrm{d}s$$

Воспользовавшись индукционным предположением, получаем

$$|\psi_{k+1}(t)| \leqslant L\int\limits_{t_0}^{t}\frac{M}{L}\frac{L^k(s-t_0)^k}{k!}\,\mathrm{d}s = \frac{M}{L}\cdot L^{k+1}\int\limits_{0}^{t-t_0}\frac{s^k}{k!}\,\mathrm{d}s = \frac{M}{L}\frac{L^{k+1}(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

□

Отсюда моментально следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k\geqslant 0}|\psi_k(t)| \leqslant \sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{M}{L}\frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L}e^{Lh}$.

Вспомним, что $\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi_s(s))\,\mathrm{d}s$. Так как ϕ_k равномерно сходятся к некоторой функции ϕ, f равномерно непрерывна на своей области определения — компакте, значит, $f(t,\phi_k(t)) \rightrightarrows f(t,\phi(t))$, откуда ϕ — решение эквивалентного интегрального уравнения.

Теперь осталось доказать, что всякая точка — точка единственности. Рассмотрим $(t_0,x_0)\in G$, пусть есть два решения задачи Коши $x_1(t), x_2(t)$ с этими начальными данными.

Найдётся интервал $(a,b)\ni t_0$, такой, что графики x_1, x_2 на этом интервале лежат в параллелепипеде R; каждое из решений удовлетворяет уравнению

$$\phi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s$$

Вычитая одно решение из другого, получаем

$$|x_1(t)-x_2(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t}(f(s,x_1(s))-f(s,x_2(s)))\,\mathrm{d}s\right|$$

Аргументы лежат в компакте R, значит, можно оценить

$$|x_1(t)-x_2(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t}(f(s,x_1(s))-f(s,x_2(s)))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant L\int\limits_{t_0}^{t}|x_1(s)-x_2(s)|\,\mathrm{d}s$$

Применяя следствие леммы Гронуолла (следствие 2.2.1), получаем $x_1 - x_2 \equiv 0$. □

Теорема 2.2.3 (Об области единственности)**.** Предположим, что G — область единственности. Пусть $x_1(t), x_2(t)$ — два решения на (a, b). Предположим, что $\exists t_0 \in (a, b) : x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Утверждается, что тогда $x_1 \equiv x_2$.

Доказательство. Множество $\{t \in (a, b) \mid x_1(t) = x_2(t)\}$ замкнуто в (a, b), рассмотрим его граничную точку. Если она есть, то в ней нарушается условие единственности. $\square$

Лекция VI

6 октября 2023 г.

2.2.3 Теорема о существовании и единственности решения методом сжимающих отображений

Теорема 2.2.4 (О существовании решения. Метод сжимающих отображений)**.** Пусть $\dot{x} = f(t, x), f \in C(G), \mathrm{Lip}_{x,loc}(G)$, $(t_0, x_0) \in G$. Берём тот же самый параллелепипед $R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\}$, фиксируем $M > 0$, ограничивающее f на параллелепипеде, L — константа Липшица.

Вводим $h = \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right)$. Теперь ещё уменьшим h: $Lh_0 < 1$.

Докажем существование решения на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Рассмотрим пространство $X = \left\{\phi \in C^1\left([t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n\right) \mid \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] : (t, \phi(t)) \in R\right\}$. Введём на X метрику $\rho(\phi_1, \phi_2) = \max\limits_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|$.

Интересный факт. Данная метрика превращает X в полное метрическое пространство.

Определим оператор $\mathscr{L} : X \to X$:

$$\mathscr{L}(\phi)(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\,\mathrm{d}s$$

Очевидно, неподвижная точка данного оператора является решением эквивалентного интегрального уравнения.

- Проверим, что $\mathscr{L}$ бьёт в X. Пусть $\psi = \mathscr{L}(\phi)$. Тогда $|\psi(t) - x_0| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\,\mathrm{d}s\right|$. Поскольку график ϕ лежит в R, то $|f(s, \phi(s))| \leqslant M$, откуда величина интеграла не превосходит $Mh \leqslant \beta$.
- Проверим, что $\mathscr{L}$ — сжимающий оператор. Пусть $\phi_1, \phi_2 \in X$. Оценим

$$\rho(\mathscr{L}(\phi_1), \mathscr{L}(\phi_2)) = \max_{t \in I}\left|\int\limits_{t_0}^{t}\Big(f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))\Big)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t \in I} L\left|\int\limits_{t_0}^{t}\rho(\phi_1, \phi_2)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \max_{t \in I} L|t - t_0| \cdot \rho(\phi_1, \phi_2) < \rho(\phi_1, \phi_2)$$

- Согласно теореме Банаха $\mathscr{L}$ имеет единственную неподвижную точку, откуда решение интегрального уравнения существует и единственно.

Замечание. Если рассмотреть доказательство теоремы Банаха, то получится, что доказательство (теорема 2.2.4) по существу повторяет доказательство (теорема 2.2.2). Тем не менее, теорема Пикара чуть сильнее, в ней длина промежутка h не зависит от константы Липшица.

2.3 Продолжимость решений

$\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C(G)$, G — область единственности. Пусть $x(t)$ — решение на (a,b).

Определение 2.3.1 ($y(t)$ — продолжение $x(t)$ вправо за b). y — решение на (a,b'), где $b' > b$ и $\forall t \in (a,b) : x(t) = y(t)$.

Теорема 2.3.1. Решение $x(t)$ продолжается вправо на $(a,b) \iff \exists \lim\limits_{t \to b-0} x(t) = \beta$ и $(b,\beta) \in G$.

Доказательство.

⇒. Пусть y — продолжение на (a,b'). $b \in (a,b')$, и $\lim\limits_{t\to b-0} x(t) = \lim\limits_{t \to b-0} y(t) = y(b)$. Так как y — решение, то $(b, y(b)) \in G$.

⇐. Согласно теореме о существовании, для некоего h на промежутке $(b-h, b+h)$ $\exists z(t) : z(b) = \beta$. Рассмотрим $y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (a,b) \\ z(t), & t \geqslant b \end{cases}$, определённое на $(a, b+h)$. Покажем, что y — решение. Так как x не определено в b, то (лемма 2.3.1) здесь не работает. Применим следствие теоремы Лагранжа: если на (a,b) существует производная $\dot{y}(t)$, и $\exists \lim\limits_{t\to b-0} \dot{y}(t) = A$, то тогда A — производная слева $y(t)$ в точке b. Отсюда получаем, что производные у y в точке b слева и справа равна $\lim\limits_{t \to b} f(t, y(t)) = f(b, \beta)$. □

Определение 2.3.2 (Полное (непродолжимое) решение $x(t)$ на (a,b)). Решение, которое не продолжимо ни вправо за b, ни влево за a.

Полные решения являются самым естественным объектом для изучения в этой теории.

Теорема 2.3.2. Если $f \in C(G), G$ — область единственности, то $\forall (t_0, x_0) \in G : \exists!$ полное решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0).

Доказательство.

> **Лемма 2.3.1.** *Пусть z_1, z_2 — два произвольных решения уравнения $z' = f(x,z)$, пересекающихся в точке (x_0, z_0). Тогда решения можно склеить: например, $z_3(x) = \begin{cases} z_1(x), & x < x_0 \\ z_2(x), & x \geqslant x_0 \end{cases}$ тоже является решением.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> z_3 дифференцируема слева от x_0, так как там она совпадает с z_1, дифференцируема справа от x_0, так как там она совпадает с z_2, и дифференцируема в x_0, так как там её производные слева и справа равны $f(x_0, z_0)$. Также очевидно, что действительно $z_3' = f(x, z_3)$. □

$T = \{(a,b) \ni t_0 \mid \exists x(t)$ — решение задачи Коши на (a,b) с данными $(t_0, x_0)\}$. Положим $A = \inf\limits_{(a,b)\in T} a$; $B = \sup\limits_{(a,b)\in T} b$.

Пусть x_A — решение на (A, b') для некоего $b' > t_0$.

Пусть x_B — решение на (a', B) для некоего $a' < t_0$.

Определим $x(t) = \begin{cases} x_A(t), & t \leqslant t_0 \\ x_B(t), & t \geqslant t_0 \end{cases}$ на (A, B). Оно корректно определено (лемма 2.3.1), и оно полное из определения T.

Единственность решения также имеет место: если $x, \widetilde{x}$ — два решения, совпадающие в какой-то точке (x_0, t_0), то они равны на всех точках области определения, так как множество точек

$\{(t,y) \mid x(t) = y = \widetilde{x}(t)\}$ замкнуто, и к граничной точке можно применить теорему об единственности. $\square$

Замечание. Рассмотрим уравнение $y' = f(y)$, где для простоты $f(0) = 0, \forall y > 0 : f(y) > 0$. Область $G = \{(x,y) \mid y > 0\}$ — область единственности, что следует из существования интеграла.

Таким образом, имеется полное решение, утверждается, что при достаточно малых x оно достаточно близко к нулю. В самом деле, в противном случае производная положительна и отделена от нуля.

Теорема 2.3.3 (О полном решении и компакте)**.** Пусть $K \subset G$ — компакт. Тогда $\exists \Delta = \Delta(K) > 0$, такое, что для любого полного решения $x(t)$ на (a,b): если $b < \infty$, то $\forall t \in (b-\Delta, b) : (t, x(t)) \notin K$. Аналогично, если $a > -\infty$, то $\forall t \in (a, a+\Delta) : (t, x(t)) \notin K$.

Доказательство. $\exists \alpha, \beta > 0 : \forall (t_0, x_0) \in K : R_{\alpha,\beta}(t_0, x_0) \coloneqq \{(t,x) \mid |t - t_0| \leqslant \alpha, |x - x_0| \leqslant \beta\} \subset G$. Здесь (наверно) используется факт о том, что непрерывная функция на компакте достигает своего наименьшего значения.

Положим $R = \bigcup\limits_{(t_0,x_0)\in K} R_{\alpha,\beta}(t_0,x_0)$. Это тоже компакт. Например, это непрерывный образ произведения компактов при отображении $\begin{array}{ccc} K \times R_{\alpha,\beta}(0,0) & \to & G \\ x, y & \mapsto & x+y \end{array}$.

$\exists M > 0 : |f(t,x)| \leqslant M$ в R. Положим $h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$. Мы доказывали, что $\forall (t_0, x_0) \in K$: $\exists$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) на $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Положим $\Delta = \frac{h}{2}$, предположим, что $\exists t_0 \in (b - \Delta, b) : (t_0, x(t_0)) \in K$. Обозначим за $z(t)$ решение задачи Коши на промежутке $[t_0, t_0 + h]$. Склеив решения, получаем противоречие с тем, что x — полное решение. $\square$

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = f(t,x)$, $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$.

Определение 2.3.3 (Сравнимая с линейной система)**.** $\exists p(t), q(t) \in C^1((a,b) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0})$, такие, что в G выполнено неравенство:

$$|f(t,x)| \leqslant p(t)|x| + q(t)$$

Теорема 2.3.4. Любое полное решение системы, сравнимой с линейной, определено на (a,b).

Доказательство. От противного: пусть $x(t)$ — полное решение на $(a_1, b_1) \subsetneq (a,b)$. Для определённости $b_1 < b$. Выберем $t_0 \in (a_1, b_1)$, положим $x_0 = x(t_0)$.

Рассмотрим эквивалентное интегральное уравнение $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$. Здесь верно, что $[t_0, b_1] \subset (a,b)$, откуда p, q ограничены: $p(t) \leqslant P, q(t) \leqslant Q$

Оценим для $t \in [t_0, b_1)$:

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \right| \leqslant |x_0| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} (P|x(s)| + Q)\,\mathrm{d}s \right| \leqslant \underbrace{|x_0| + Q\,|t - t_0|}_{N} + P\int\limits_{t_0}^{t} |x(s)|\,\mathrm{d}s$$

Это условие леммы Гроноулла (лемма 2.2.5). Значит, на данном промежутке $|x(t)| \leqslant Ne^{P|t-t_0|} \leqslant Ne^{P(b_1 - t_0)}$.

Получили противоречие с предыдущей теоремой: b_1 — правый конец промежутка определённости полного решения, но график не покидает компакт. $\square$

2.4 Линейные системы дифференциальных уравнений

$\dot{x} = p(t)x + q(t)$, где $x(t), q(t) \in \mathbb{R}^n$, $p(t) \in M_{n\times n}$.

Раз и навсегда условимся, что $p(t) \in C(a,b)$ и $q(t) \in C(a,b)$ тоже. Область определения правой части G можно ввести, как $(a,b) \times \mathbb{R}^n$. $f \in C(G), \mathrm{Lip}_{x,loc}(G)$ (так как $\frac{\partial f}{\partial x} = p(t)$). Значит, G — область существования и единственности, причём $|f(t,x)| \leqslant \|p(t)\| \cdot |x| + |q(t)|$.

Согласно (теорема 2.3.4) всякое полное решение определено на (a,b).

Лекция VII

13 октября 2023 г.

Рассматриваем уравнение $\dot{x} = p(t)x + q(t)$, где $x \in \mathbb{R}^n, p, q \in C(a,b)$. Мы показали, что $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$ — область существования и единственности, и (применим теорему об уравнениях, сравнимых с линейными) что любое полное решение определено на (a,b).

Теорема 2.4.1 (О существовании и единственности)**.**

1. $\forall (t_0, x_0) \in G$: $\exists$ полное решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) на (a,b).
2. Если же $x_1(t), x_2(t)$ — решения на (a,b), и $\exists (t_0, x_0) : x_1(t_0) = x_0 = x_2(t_0)$, то тогда $x_1 \equiv x_2$.

2.4.1 Однородные линейные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим однородное уравнение $\dot{x} = P(t)x$.

Замечание. Теория, которая здесь излагается, применима на самом деле не только для вещественных, но и для комплексных решений — можно заменить $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{C}^n$.

Теорема 2.4.2. Множество решений $\dot{x} = P(t)x$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$ (или над $\mathbb{C}$).

Рассмотрим матрицы $\Phi \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}$$

где $x_i(t)$ — решения.

Определение 2.4.1 (Определитель Вронского (вронскиан))**.** $W(t) \overset{def}{=} \det \Phi(t)$.

Лемма 2.4.1. *Если* $\exists t_0 \in (a,b) : W(t_0) = 0$*, то* $W(t) \equiv 0$ *на* (a,b).

Доказательство. Из линейной алгебры известно, что $\exists c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq 0$, такой, что $\Phi(t_0)c = 0$.

Рассмотрим $y(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t)$. Это тоже решение, но так как $y(t_0) = 0$, то по теореме единственности $y \equiv 0$. Таким образом, $\Phi(t)c \equiv 0$, то есть $\det \Phi(t) \equiv 0$. □

Следствие 2.4.1. *Если* $\exists t_0 \in (a,b) : W(t_0) \neq 0$*, то* W *не обращается в нуль на* (a,b).

Определение 2.4.2 (Фундаментальная матрица системы)**.** Матрица $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}$ с ненулевым вронскианом.

Теорема 2.4.3. У любой системы существует фундаментальная матрица.

Доказательство. Фиксируем $t_0 \in (a,b)$. Пусть $x_1^0, \ldots, x_n^0$ — набор линейно независимых векторов. По теореме о существовании $\forall k = 1..n$: $\exists$ решение $x_k(t)$ задачи Коши с начальными данными (t_0, x_k^0).

Составим $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}$. В точке t_0 вронскиан ненулевой. □

Теорема 2.4.4 (Теорема об общем решении)**.** Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица. $\forall x(t)$ — решение линейной однородной системы $\exists! c \in \mathbb{R}^n : x(t) = \Phi(t)c$.

Доказательство. Фиксируем $t_0 \in (a, b)$. Обозначим $x_0 = x(t_0)$.

Так как $W(t_0) \neq 0$, то у системы $\Phi(t_0)c = x_0$ существует единственное решение $c \in \mathbb{R}^n$. Но тогда $y(t) = \Phi(t)c$ — тоже решение, по теореме о единственности $x \equiv y$. □

Следствие 2.4.2. *Множество решений системы является векторным пространством размерности n.*

Задача о нахождении фундаментальной матрицы, вообще говоря, неразрешима в размерности $n \geqslant 2$.

Так, рассмотрим уравнение $\ddot{y} + t^\alpha y = 0$. Оно сводится к линейной системе второго порядка

$$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -t^\alpha y \end{cases}$$

Если $y(t)$ — ненулевое решение, то функция $x(t) = \frac{1}{y}\dot{y}$ будет обладать свойством

$$\dot{x} = \frac{1}{y^2}(\dot{y})^2 + \frac{1}{y}\ddot{y} = -x^2 - t^\alpha$$

Мы получили уравнение Рикатти, про которое Лиувилль доказал, что оно в общем случае неразрешимо.

Теорема 2.4.5. Так как фундаментальная матрица $\Phi(t)$ — строка базисных векторов — то множество всех фундаментальных матриц — это $\Phi \cdot \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{\Phi \cdot g \mid g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\}$.

Теорема 2.4.6. Если $\Phi(t)$ — строка решений (необязательно образующих фундаментальную матрицу) системы $\dot{x} = P(t)x$. Тогда

$$\dot{\Phi} = P \cdot \Phi$$

Замечание (О комплексном случае). Если $P(t)$ — вещественная матрица, то $x(t) = y(t) + iz(t)$ является решением для $y, z \in C^1(\mathbb{R}^n)$ если и только если и y, и z являются решениями.

Предложение 2.4.1 (Об овеществлении фундаментальной матрицы)**.** *Пусть* $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots \end{pmatrix}$ *— вообще говоря, комплексная фундаментальная матрица, у которой* $x_2 = \overline{x_1}$.

Тогда $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \Re(x_1(t)) & \Im(x_1(t)) & x_3 & \cdots \end{pmatrix}$ *— тоже фундаментальная матрица.*

Доказательство.

$$\Psi = \Phi \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i & 0 \\ 1/2 & -1/2i & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

□

2.5 Линейные системы с постоянными коэффициентами

Пусть $A \in M(n, \mathbb{R})$, рассмотрим уравнение $\dot{x} = Ax$.

2.5.1 Метод Эйлера

Станем искать $x(t) \neq 0$ в виде $\gamma e^{\lambda t}$, где $\gamma \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Это является решением ровно в тех случаях, когда $\lambda \gamma e^{\lambda t} = A\gamma e^{\lambda t}$, то есть $\lambda\gamma = A\gamma$. Иными словами, λ — собственное число A.

Ограничимся случаем, когда все собственные числа λ_k вещественные, и A диагонализуема (нет блоков размера $\geqslant 2$ в нормальной жордановой форме).

$\Phi(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \gamma_n e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}$ является фундаментальной матрицей, так как векторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ линейно независимы.

Случаи комплексных собственных чисел или не диагонализуемой A здесь рассматривать не будем.

2.5.2 Матричная экспонента

Пусть $A \in M(n, \mathbb{C})$. Рассмотрим полное метрическое пространство $M(n, \mathbb{C})$ с расстоянием $\rho(A, B) = \|A - B\|$ — операторной нормой.

Определение 2.5.1 (Матричная экспонента)**.**

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Факт 2.5.1. *Матричная экспонента определена корректно; ряд e^A сходится.*

Доказательство. В силу полноты пространства достаточно доказать, что последовательность $\Sigma_m \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k$ фундаментальна. Для $m > l$ оценим

$$\|\Sigma_m - \Sigma_l\| = \left\| \sum_{k=l+1}^{m} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leqslant \sum_{k=l+1}^{m} \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

Если обозначить $\sigma_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \|A\|^k$, то $\|\Sigma_m - \Sigma_l\| \leqslant \sigma_m - \sigma_l$. Так как ряд для скалярной экспоненты сходится, то выполняется условие фундаментальной последовательности: $\sigma_m - \sigma_l \longrightarrow 0$ при $\min(l, m) \to \infty$. □

Свойства (Матричная экспонента).

- Пусть A и B сопряжены: $B = S^{-1}AS$. Тогда $e^B = S^{-1} e^A S$.

  Доказательство. Частичные суммы полностью совпадают: сопряжение — автоморфизм. □

- Для $a, b \in \mathbb{C} : e^a \cdot e^b = e^{a+b}$. Для **коммутирующих** матриц $A, B \in M(n, \mathbb{C})$:

  $$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

  Доказательство. Так как ряды для матричных экспонент сходятся абсолютно (достаточно требовать абсолютной сходимости только для одного ряда), то можно записать

  $$e^A \cdot e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{B^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+k)!} \binom{m+k}{k} A^k B^m$$

  Так как A и B коммутируют, то это $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (A+B)^s = e^{A+B}$. □

- Рассмотрим $A \in M(n, \mathbb{C}), t \in \mathbb{C}$. Тогда $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = A \cdot e^{At}$.

Доказательство. Рассмотрим $\Sigma_m \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k t^k$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma_m = A\Sigma_{m-1}$$

Так как ряд сходится абсолютно (этого достаточно? видимо да, теорема о дифференцировании ряда из матанализа), то его производная — предел производных частичных сумм. □

Лекция VIII

20 октября 2023 г.

Мы остановились на том, что рассматривалось уравнение $\dot{x} = Ax$, где $x \in \mathbb{R}^n$.

Так как $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = A \cdot e^{At}$, то несложно видеть, что $e^{At} = \big(x_1, \ldots, x_n\big)$ — фундаментальная матрица решений.

В частности, при $t = 0 : e^{\mathbb{0}} = E$, вронскиан не равен нулю при $t = 0$ (значит, всегда).

2.5.3 Вычисление матричной экспоненты

Рассмотрим матрицу $A \in M(n, \mathbb{R})$.

Согласно теореме Жордана (жорданова нормальная форма) $\exists S \in GL(n, \mathbb{R}) : S^{-1}AS = J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_p)$, где

$$J_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ — жорданова клетка некоего размера с неким собственным числом } \lambda$$

Разложим J в сумму диагональной и нильпотентной матрицы: $J = \lambda E + I$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Так как экспонента коммутирует с сопряжением ($S^{-1}e^{At}S = e^{S^{-1}AS \cdot t} = e^{Jt}$), то чтобы вычислить e^{At} достаточно вычислять экспоненту от жордановой нормальной формы.

$$(Jt)^k = \operatorname{diag}((J_1 t)^k, \ldots, \ldots, (J_p t)^k) \qquad e^{Jt} = \operatorname{diag}\left(e^{J_1 t}, \ldots, e^{J_p t}\right)$$

Научимся вычислять экспоненту от одного жорданового блока $J = J_n(\lambda)$: $e^{Jt} = e^{\lambda E t + It}$.

Так как λE и I коммутируют, то $e^{(\lambda E + I)t} = e^{\lambda E t} \cdot e^{It}$.

Дальше считается $e^{\lambda E t} = \operatorname{diag}(e^{\lambda t}, \ldots, e^{\lambda t})$ и $e^{It} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(It)^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$.

Если $S^{-1}e^{At}S = e^{Jt}$, то $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$ — фундаментальная матрица решений.

Так как S обратима, то в качестве фундаментальной матрицы можно взять и просто матрицу Se^{Jt}. Помимо того, что данное вычисление требует на одно матричное умножение меньше, есть ещё одно объяснение, почему фундаментальное решение правильно выражать в таком виде.

В методе Эйлера $\dot{x} = Ax$ и ищется решение в виде $\gamma e^{\lambda t}$, где λ — собственное число A, и γ — соответствующий собственный вектор.

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ — собственные числа A, и каждое — кратности 1, то жорданова форма — $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тогда $e^{Jt} = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right)$.

Жорданова форма была взята из сопряжения $S^{-1}AS = J \iff AS = SJ$. Обозначив $S = \begin{pmatrix}\gamma_1 & \dots & \gamma_n\end{pmatrix}$, получаем $A(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Таким образом, столбцы матрицы S — в точности собственные векторы, получаемые в методе Эйлера.

2.5.4 Оценка фундаментальной матрицы

Рассматриваем систему $\dot{x} = Ax$, ей соответствует фундаментальная матрица $\Phi(t) = e^{At}$.

Теорема 2.5.1. Предположим, что $\exists a \in \mathbb{R} : \forall k : a > \Re(\lambda_k)$.

Тогда $\exists C > 0 : \left\|e^{At}\right\| \leqslant Ce^{at}$ при $t \geqslant 0$.

Доказательство. $J = S^{-1}AS \Rightarrow e^{Jt} = S^{-1}e^{At}S \Rightarrow e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$.

Всякий элемент матрицы e^{Jt} — это либо нуль, либо функция от t вида $\frac{e^{\lambda_p \cdot t}}{k!} \cdot \operatorname{Poly}(t), k \leqslant n$. Если умножить каждый элемент на e^{-at}, то видно

$$\left|e^{-at}\frac{e^{\lambda_p t}}{k!}\right| \operatorname{Poly}(t) = \frac{1}{k!}e^{(\Re(\lambda_p) - a)t}\operatorname{Poly}(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Тогда для любого элемента матрицы $j_{l,m}$, стоящего на позиции (l, m) в матрице e^{Jt} : $\exists c_{l,m} > 0$: $|e^{-at} \cdot j_{l,m}| \leqslant c_{l,m}$ при $t \geqslant 0$, так как непрерывная функция, убывающая к нулю на $+\infty$, ограничена.

Тогда и норма $\left\|e^{-at}e^{Jt}\right\|$ ограничена некой константой C_0, откуда $\|e^{Jt}\| \leqslant C_0 e^{at}$ при $t \geqslant 0$. $\square$

2.6 Случай Лаппо-Данилевского

Хотя в общем случае системы $\dot{x} = A(t)x$ неразрешимы, можно ещё в одном случае выписать фундаментальную матрицу для системы $\dot{x} = A(t)x$ с непостоянными коэффициентами.

Пусть $A \in C(a, b)$.

Теорема 2.6.1 (Лаппо-Данилевский)**.** Пусть существует $t_0 \in (a, b) : A(t) \cdot \left(\int\limits_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s\right) = \left(\int\limits_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s\right) \cdot A(t)$. Тогда $\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s\right)$ — фундаментальная матрица.

Доказательство. Рассмотрим производную экспоненты $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{I(t)}$, где обозначили $I(t) \coloneqq \int\limits_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s$.

Частичная сумма для производной равна $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}(I(t))^k = \sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{(I(t) \cdot \ldots \cdot I(t))}_{k}$ Так как $I(t)$ коммутирует с $A(t)$, то данная сумма раскрывается в

$$A(t)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}I(t)^k \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} A(t)e^{I(t)}$$

$\square$

2.7 Неоднородные линейные системы

Теперь рассматриваем неоднородную систему $\dot{x} = p(t)x + q(t)$, где $p, q \in C(a, b)$, $p(t) \in M(n, \mathbb{R})$ — матрица, $q(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор.

Параллельно с этим рассмотрим соответствующую однородную систему $\dot{x} = p(t)x$, пусть $\Phi(t)$ — её фундаментальная матрица.

Теорема 2.7.1. Если $y(t)$ — некое решение неоднородной системы, то всякое решение представимо в виде $y(t) + \Phi(t)c$, где $c \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{y}(t)$ — какое-то решение неоднородной системы. Рассмотрим разность $\widetilde{y} - y$, она является решением однородной системы. □

Для поиска данного решения неоднородной системы $y(t)$ мы воспользуемся методом Лагранжа — вариации постоянной. Ищем $y(t)$ в виде $\Phi(t)\alpha(t)$, где $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывна ($\alpha \in C(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$).

$$\dot{y} = \Phi(t) \cdot \dot{\alpha} + \dot{\Phi}(t) \cdot \alpha = \Phi(t)\dot{\alpha} + p(t)\Phi(t)\alpha$$

Получается равенство $\Phi(t)\dot{\alpha} = q(t)$. $\dot{\alpha} = \Phi^{-1}(t)q(t)$ (Φ обратима и непрерывна, так как вронскиан ненулевой, и элементы обратной матрицы можно явно выразить).

Подойдёт $\alpha = \int \Phi^{-1}(t)q(t)\,\mathrm{d}t$. Тогда решением является

$$\boxed{y(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)q(t)\,\mathrm{d}t}$$

Лекция IX

27 октября 2023 г.

2.8 Периодические линейные системы

Периодические системы — системы вида $\dot{x} = p(t)x + q(t)$, где $x \in \mathbb{R}^n, p, q \in C(\mathbb{R})$, причём $\exists \omega > 0 : p(t + \omega) \equiv p(t), q(t + \omega) \equiv q(t)$.

Лемма 2.8.1. *Если $x(t)$ — решение системы, то его сдвиг на период $y(t) = x(t + \omega)$ — тоже решение.*

Рассмотрим однородную периодическую систему $\dot{x} = p(t)x$.

Теорема 2.8.1 (Флоке (Floquet))**.** Если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы, то $\exists G(t), R$ — матрицы, такие, что G — ω-периодична, R постоянна, и имеет место представление $\Phi(t) = G(t)e^{Rt}$.

Доказательство.

> **Лемма 2.8.2** (О существовании логарифма)**.** *Пусть $B \in M(n, \mathbb{C})$. Тогда $\det B \neq 0 \iff \exists A : e^A = B$.*
>
> *Доказательство леммы.*
>
> $\Leftarrow$. Можно сослаться на алгебру: собственные числа экспоненты — экспоненты собственных чисел A. Можно рассмотреть e^{At}, как фундаментальную матрицу, в ней столбцы линейно независимы.
>
> $\Rightarrow$. Докажем существование логарифма у жордановой клетки: в нормальной жордановой форме матрица является прямой суммой жордановых клеток.
>
> $$J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_s) \Rightarrow \log J = \operatorname{diag}(\log J_1, \ldots, \log J_s)$$

Лемма 2.8.3. *Пусть* $I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ *— нильпотентная матрица размера* $r \times r$. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Рассмотрим* $Z = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left(\frac{I_r}{\lambda}\right)^p$.

Тогда $e^Z = E + \frac{I_r}{\lambda}$.

Доказательство леммы.

На самом деле $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left(\frac{I_r}{\lambda}\right)^p$ — конечная сумма, так как начиная со слагаемого под номером r суммируются нули.

Из анализа известно, что при $z \in \mathbb{C}$: $\exp(\log(1+z)) = 1 + z$, то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p \right)^k = 1 + z$$

Определим $\sigma_m \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} z^p \right)^k$

Тогда видно, что $\sigma_{m+1} - \sigma_m = z^{m+1} \cdot$ (какая-то аналитическая функция). Написав $\sigma_m(z) = a_0^{(m)} + a_1^{(m)} z + \dots + a_m^{(m)} z^m + \dots$, получаем, что в частной сумме $\sigma_{m+1}(z)$ коэффициенты перед $z^0, \dots, z^m$ такие же.

Тогда при $k \geqslant m : \sigma_k(z) = 1 + z + z^m$(что-то).

Если же рассмотреть вместо z матрицу $\frac{I_r}{\lambda}$, то результат вычислений будет такой же, но большие степени обнуляются. Тогда

$$\sigma_m(e^Z) = E_r + \frac{I_r}{\lambda} + \mathbb{0} \qquad e^Z = E_r - \frac{I_r}{\lambda}$$

$\square$

Таким образом, при $\lambda \neq 0$: если $J_s = \lambda E_r + I_r$, то $\log(J_s) = \log(\lambda) E_r + Z$ (можно для проверки взять экспоненту, она раскроется в правильную вещь, так как E_r коммутирует с Z).

Так как сопряжение — автоморфизм, то показав существование логарифма у жордановой клетки, мы показали существование логарифма у произвольной матрицы.

Разумеется, логарифм не единственный.

$\square$

Возьмём фундаментальную матрицу $\Phi(t)$. Матрица $\Phi(t+\omega)$ — тоже фундаментальная матрица.

Значит, найдётся матрица $B \in GL(n, \mathbb{C}) : \forall t : \Phi(t+\omega) = \Phi(t)B$. Так как B невырождена, то можно рассмотреть $R = \frac{1}{\omega} \log B, G(t) = \Phi(t) e^{-Rt}$.

Тогда, конечно, $\Phi(t) = G(t) \cdot e^{Rt}$, покажем периодичность $G(t)$.

$$G(t+\omega) = \Phi(t+\omega) e^{-R(t+\omega)} = \Phi(t) B \cdot \underbrace{e^{-R\omega}}_{e^{-\log(B)} = B^{-1}} \cdot e^{-Rt} = \Phi(t) e^{-Rt} = G(t)$$

$\square$

Найденная в теореме Флоке матрица B — *матрица монодромии*. Пусть μ_i — собственные числа B. Их называют *мультипликаторы*, и они не зависят от выбранной фундаментальной матрицы $\Phi(t)$.

Доказательство. Выберем другую фундаментальную матрицу $\Phi_1(t)$. Её соответствует другая матрица монодромии $B_1 : \Phi_1(t+\omega) = \Phi_1(t)B_1$.

Но один базис можно выразить через другой: $\exists S : \Phi_1(t) = \Phi(t)S$. Тогда

$$\Phi(t)SB_1 = \Phi_1(t)B_1 = \Phi_1(t+\omega) = \Phi(t+\omega)S = \Phi(t)BS$$

Отсюда $B_1 = S^{-1}BS$, а у сопряжённых матриц спектры совпадают. □

Теорема 2.8.2 (О мультипликаторах)**.** Число μ является мультипликатором $\iff$ $\exists$ ненулевое решение $X(t)$, такое, что $X(t+\omega) = X(t)\mu$.

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Фиксируем фундаментальную матрицу $\Phi(t)$, такую, что $\Phi(0) = E$.

  Её матрица монодромии $B = \Phi(\omega)$. Значит, μ — собственное число $\Phi(\omega)$, ему соответствует собственный вектор $x_0 \neq 0$. Тогда заметим, что $x(t) = \Phi(t)x_0$ обладает искомым свойством.

  Так как $\Phi(t)$ невырождена, то $x(t) \neq 0$.

  $$\begin{aligned} x(t+\omega) = \Phi(t+\omega)x_0 = \\ &(\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\Phi(\omega), \text{ как фундаментальные матрицы, совпадающие в нуле}) \\ &= \Phi(t)\Phi(\omega)x_0 = \Phi(t)\mu x_0 = \mu x(t) \end{aligned}$$

- $\Leftarrow$. Примерно то же самое. □

2.9 Формула Остроградского — Лиувилля (формула Якоби)

Рассмотрим линейную однородную систему $\dot{x} = P(t)x$, где $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ — фундаментальная матрица.

Пусть $W(t) = \det\Phi(t)$ — вронскиан.

Теорема 2.9.1 (Формула Остроградского — Лиувилля (формула Якоби))**.** Тогда $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t) = \mathrm{tr}(P(t))W(t)$.

Доказательство. **Как дифференцируется определитель?**

Рассмотрим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix}$.

Тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta = \begin{vmatrix} \dot{a}_{1,1}(t) & \cdots & \dot{a}_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & \cdots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1}(t) & \cdots & a_{n-1,n}(t) \\ \dot{a}_{n,1}(t) & \cdots & \dot{a}_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

Здесь берётся сумма n определителей, в i-м в i-й строчке стоят производные функций.

Теперь запишем $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t) = W_1(t) + \cdots + W_n(t)$, где $W_i(t)$ — описанные выше компоненты.

Пусть $x_i(t) = \begin{pmatrix} x_i^{(1)} \\ \vdots \\ x_i^{(n)} \end{pmatrix}$ — решения из фундаментальной матрицы.

$$W_1 = \begin{vmatrix} \dot{x}_1^{(1)} & \cdots & \dot{x}_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Так как x_i — решение, то можно выразить $\dot{x}_i^{(1)} = p_{1,1}x_i^{(1)} + \cdots + p_{1,n}x_i^{(n)}$

В матрице W_1 вычтем из первой строчки все строчки с номерами $i \geqslant 2$, умноженные на $p_{1,i}$. Останется матрица

$$\begin{pmatrix} p_{1,1}x_1^{(1)} & \cdots & p_{1,1}x_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Тогда получается, что $W_1 = p_{1,1}W$, и $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W = W_1 + \cdots + W_n = (p_{1,1} + \cdots + p_{n,n})W$. □

2.10 Неоднородные линейные системы со специальной правой частью

Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + q(t)$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $q(t)$ имеет вид

$$q(t) = e^{\alpha t} \cdot \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$$

где $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ — многочлены.

Положим m — максимальная степень многочлена r_i, k — максимальный размер жордановых клеток (в жордановой форме матрицы A), соответствующих собственному числу α (если таких клеток нет, то $k = 0$).

Утверждение 2.10.1. *Существует решение в виде* $x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$, *где* p_i *— многочлены степени не больше* $k + m$.

Доказательство. Считаем, что A — в жордановой форме. При линейной замене степени многочленов увеличиться не могут.

Рассмотрим блок $J_s(\beta) = \begin{pmatrix} \beta & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \beta \end{pmatrix}$, пусть $\beta \neq \alpha$. Получаются уравнения

$$\dot{x}_1 = \beta x_1 + x_2 + e^{\alpha t} q_1(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_s = \beta x_s + e^{\alpha t} q_s(t)$$

Решая уравнения последовательно, снизу вверх, получаем $x_s = v(t)e^{\beta t}$, откуда

$$\dot{x}_s = \dot{v}(t)e^{\beta t} + \beta x_s \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = e^{(\alpha-\beta)t}q_s$$

При интегрировании произведения экспоненты (с ненулевым показателем) и многочлена получится произведение экспоненты и многочлена той же степени.

Таким образом, если $\alpha \neq \beta$, то все решения найдутся степени не выше m.

Если же $\alpha = \beta$, то рассматривается блок $J_s(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_2 + e^{\alpha t} q_1(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_s = \alpha x_s + e^{\alpha t} q_s(t)$$

Представив $x_s = v(t) \cdot e^{\alpha t}$ получаем на v уравнение без экспоненты: $\dot{v} = q_s$. При интегрировании степень вырастет на единичку.

Тогда степени многочленов в результате вырастут не больше, чем на k (от изначальной степени правой части m). $\square$

Глава 3

Линейные дифференциальные уравнения

Пусть t — независимая переменная, x — искомая функция. Линейное дифференциальное уравнение имеет вид
$$x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = q(t)$$
где предполагается, что функции $p_1, \dots, p_n, q \in C(a,b)$.

Решением является функция $x \in C^n(a,b)$, удовлетворяющая уравнению.

Сопоставим данному уравнению систему с неизвестными $y_1, \dots, y_n$.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = -p_n y_1 - \dots p_1 y_n + q \end{cases}$$

Если $y_1, \dots, y_n$ — решение данной системы, то функция $x(t) \equiv y_1$ — решение данного уравнения, причём $\dot{x} \equiv y_2, \dots, x^{(n-1)} \equiv y_n$.

При постановке задачи Коши для уравнения надо зафиксировать точку $t_0 \in (a,b)$ и n чисел $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}$, и ищем решение $x(t)$, такое, что

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Задача Коши разрешима, надо рассмотреть решение системы, такое, что

$$y(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Оно найдётся из теоремы о существовании и единственности.

Решение x лежит в классе C^n, так как его n-я производная выражается через производные меньших порядков и непрерывные функции.

3.1 Однородное линейное уравнение

Однородное — уравнение с нулевой правой частью $q(t)$.

Теорема 3.1.1. Множество решений — векторное пространство.

Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — решения. Сопоставим им вронскиан $W(t) = W(t, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$.

Рассмотрим линейную систему, соответствующую данному уравнению $\dot{y} = P(t)y$. Тогда для компонент вектора-решения $y_1, \dots, y_n$, полученных из решений $x_1, \dots, x_n$: $W(t, y_1, \dots, y_n) = W(t, x_1, \dots, x_n)$ — матрицы равны.

3.1.1 Линейная независимость решений

Решения $x_1(t), \dots, x_n(t)$ линейно независимы на (a, b), если из соотношения

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) = 0$$

следует, что $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Иначе они линейно зависимы.

Лемма 3.1.1. *Следующие три утверждения равносильны.*

1. $W(t) \equiv 0$
2. $\exists t_0 : W(t_0) = 0$
3. *Решения* $x_1, \dots, x_n$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Докажем (2) $\Rightarrow$ (3), остальное очевидно. Рассмотрим линейную алгебраическую систему $\begin{pmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$. Так как вронскиан равен нулю, то имеется ненулевой вектор-решение c.

Тогда $z(t) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ — решение, и в точке $t_0 : z(t_0) = 0$. Продифференцируем z. $\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \cdots & \dot{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, и в точке $t_0 : z(t_0) = 0$.

Далее получаем, что все производные до $n - 1$ включительно равны нулю, по теореме единственности: $z(t) \equiv 0$. □

Лекция X

3 ноября 2023 г.

//todo

Лекция XI

10 ноября 2023 г.

Уравнению $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ сопоставляется система порядка n:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = -p_n y_1 - \dots - p_1 y_n \end{cases}$$

Набору решений уравнения сопоставляется вронскиан $W(t, x_1, \dots, x_n) = W(t, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$. По формуле Остроградского — Лиувилля $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \operatorname{tr} P(t)W$.

Применяя формулу к уравнению $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$, видим, что матрица уравнения — это

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -p_n & \cdots & \cdots & -p_1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -p_1 W$.

Глава 4

Зависимость решений от начальных данных и параметров

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = f(t, x, \mu)$, где $x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m$, μ — какой-то параметр.

Здесь рассматривают задачу Коши с начальными данными (τ, ξ) с фиксированным параметром $\mu \in \mathbb{R}^m$. Будем его обозначать $x(t, \tau, \xi, \mu)$.

Далее считаем, что $f \in C, \mathrm{Lip}_{x,loc}(G \times M)$, где $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ — область, $M \subset \mathbb{R}^m_\mu$ — открытое множество.

Общая теория говорит, что для любых $(t, \xi, \mu) \in G \times M$ найдётся единственное непродолжимое решение, и обозначим за $I(\tau, \xi, \mu)$ максимальный промежуток, на котором данное решение определено.

Лемма 4.0.1 (Об оценке разности решений)**.** *Рассмотрим две системы $\dot{x} = f(t, x)$ и $\dot{y} = g(t, y)$. Пусть $f, g \in C(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область.*

Известно, что $f \in \mathrm{Lip}_x(G)$ с константой Липшица L, $\exists N, m$: $|f| \leqslant N$ и $|f(t, x) - g(t, x)| \leqslant m$ в G.

Пусть $x(t_0) = x_0, y(\tau_0) = y_0, t_0, \tau_0 \in (a, b)$, и графики данных решений лежат в G: $(t, x(t)), (\tau, y(\tau)) \in G$ при $t, \tau \in (a, b)$.

Тогда $|x(t) - y(t)| \leqslant \Big(|x_0 - y_0| + N|t_0 - \tau_0| + m(b - a)\Big)e^{L(b-a)}$.

Доказательство. Для каждого из решений можно написать эквивалентное интегральное уравнение:

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s = x_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau_0} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\tau_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \qquad \text{и} \qquad y(t) = y_0 + \int\limits_{\tau_0}^{t} g(s, y(s))\,\mathrm{d}s$$

Вычтем одно из другого и оценим.

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - y_0| + N|t_0 - \tau_0| + \left|\int\limits_{\tau_0}^{t} \big(f(s, x(s)) - g(s, y(s))\big)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant$$
$$\leqslant |x_0 - y_0| + N|t_0 - \tau_0| + \left|\int\limits_{\tau_0}^{t} \underbrace{\big(f(s, x(s)) - f(s, y(s))\big)}_{\leqslant L|x(s) - y(s)|}\,\mathrm{d}s\right| + \left|\int\limits_{\tau_0}^{t} \underbrace{\big(f(s, y(s)) - g(s, y(s))\big)}_{\leqslant m}\,\mathrm{d}s\right|$$

Это условия леммы Гроноулла (лемма 2.2.5):

$$|x(t)-y(t)| \leqslant |x_0-y_0|+N|t_0-\tau_0|+m(b-a)+L\left|\int\limits_{\tau_0}^{t}|x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\right|$$

Отсюда $|x(t)-y(t)| \leqslant \Big(|x_0-y_0|+N|t_0-\tau_0|+m(b-a)\Big)e^{L|t-\tau_0|}$. Далее чтобы получить равномерную оценку, можно оценить $|t-\tau_0| \leqslant |b-a|$. $\square$

Интересно заметить, что оценка линейно зависит от x_0-y_0 и от $t_0-\tau_0$, но экспоненциально — от константы Липшица L и длины промежутка $b-a$.

Теорема 4.0.1 (О непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров)**.** Пусть $\dot{x}=f(t,x,\mu), x\in\mathbb{R}^n, \mu\in\mathbb{R}^m, f\in C, \mathrm{Lip}_{x,loc}(G\times M)$.

Зафиксируем $(\tau_0,\xi_0,\mu_0)\in G\times M$. Утверждается, что $\forall\varepsilon>0, \forall[a,b]\subset I(\tau_0,\xi_0,\mu_0) : \exists\delta>0 : \forall(\tau,\xi,\mu)\in G\times M$:

$$\begin{cases}|\tau-\tau_0|<\delta\\|\xi-\xi_0|<\delta\\|\mu-\mu_0|<\delta\end{cases}\Rightarrow [a,b]\subset I(\tau,\xi,\mu) \text{ и } \forall t\in[a,b] : |x(t,\tau,\xi,\mu)-x(t,\tau_0,\xi_0,\mu_0)|<\varepsilon$$

Доказательство. Можно считать, что $\tau_0\in(a,b)$ — отрезок $[a,b]$ берётся любой, лежащий в $I(\tau_0,\xi_0,\mu_0)$, и его в случае надобности можно расширить.

Рассмотрим $R_0=\Big\{(t,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\Big||x-x(t,\tau_0,\xi_0,\mu_0)|\leqslant\varepsilon\Big\}$. При малых $\varepsilon : R_0\subset G$.

Также пусть ε настолько мал, что $\Big\{\mu\Big||\mu-\mu_0|\leqslant\varepsilon\Big\}\subset M$.

Положим $R\coloneqq R_0\times\Big\{\mu\Big||\mu-\mu_0|\leqslant\varepsilon\Big\}$.

Для некоторого N на нём $|f(t,x,\mu)|\leqslant N, f\in\mathrm{Lip}_x(R)$, пусть L — константа Липшица f.

Выберем $\delta_1>0 : \delta_1(1+N+(b-a))e^{L(b-a)}<\varepsilon$.

Из равномерной непрерывности f получаем, что $\exists\delta\in(0,\delta_1) : |\mu-\mu_0|<\delta\Rightarrow\forall(t,x)\in R_0 : |f(t,x,\mu)-f(t,x,\mu_0)|<\delta_1$. Если потребуется, уменьшим δ так, что $|\tau-\tau_0|<\delta\Rightarrow\tau\in(a,b)$. А ещё потребуем от δ: $\delta(1+N)<\varepsilon$.

Утверждается, что δ — искомое.

- Определим $y(t)\coloneqq|\underbrace{x(t,\tau,\xi,\mu)}_{x(t)}-\underbrace{x(t,\tau_0,\xi_0,\mu_0)}_{x_0(t)}|$. Докажем, что $|y(t)|<\varepsilon$ для $t\in[a,b]\cap I(\tau,\xi,\mu)$.

  $|y(\tau)|=\left|x(\tau)-\xi_0-\int\limits_{\tau_0}^{\tau}f(s,x_0(s),\mu_0)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant|\xi-\xi_0|+\left|\int\limits_{\tau_0}^{\tau}f(s,x_0(s),\mu_0)\,\mathrm{d}s\right|<\delta+N\delta<\varepsilon$. Таким образом $(\tau,x(\tau))\in R_0$.

  От противного: пусть не всегда $|y(t)|<\varepsilon$. Выберем первый момент $t'\in[a,b]\cap I(\tau,\xi,\mu)$, когда $|y(t)|$ стал равен ε. Без потери общности $\tau<t'$.

  $$y(t')=\varepsilon, y(t)<\varepsilon \text{ при } t\in[\tau,t')$$

  Применим лемму об оценке разности решений для функций $f(t,x,\mu)$ и $f(t,x,\mu_0)$.

  $$|y(t)|<\Big(\delta+N\delta+\delta_1(b-a)\Big)\cdot e^{L(b-a)}<\varepsilon, \text{ это противоречие.}$$

- Покажем, что $I(\tau,\xi,\mu)\supset[a,b]$. Согласно теореме о максимальном решении $I(\tau,\xi,\mu)=(\alpha,\beta)$ — некий интервал.

Если $I(\tau,\xi,\mu) \not\supset [a,b]$, то, например, $\beta < b$. Тогда по теореме о полном решении на компакте при приближении к $t \to \beta$ решение $x(t,\tau,\xi,\mu)$ должно покинуть компакт R_0, но в предыдущем пункте доказано, что такого не происходит. $\square$

Следствие 4.0.1 (Теорема об интегральной непрерывности)**.** *Рассматривается нормальная система без параметров* $\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}, f \in C, \mathrm{Lip}_{x,loc}(G)$.

Зафиксируем $(\tau_0,\xi_0) \in G$*. Тогда* $\forall \varepsilon > 0, \forall [a,b] \in I(\tau_0,\xi_0)$*:* $\exists \delta > 0 : \forall (\tau,\xi) \in G : |\tau - \tau_0| < \delta, |\xi - \xi_0| < \delta \Rightarrow [a,b] \subset I(\tau,\xi)$ *и при* $t \in [a,b]$ $|x(t,\tau,\xi) - x(t,\tau_0,\xi_0)| < \varepsilon$

Лекция XII

17 ноября 2023 г.

4.1 Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам.

Рассмотрим нормальную систему $\dot{x} = f(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Предположим, $f, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \in C(G)$. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ — матрица Якоби f.

Рассмотрим $x(t,\tau,\xi_0)$ на $I(\tau,\xi_0)$. Обозначим матрицу Якоби решения за $\mathcal{F}(t) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\tau,\xi_0))$. Ещё рассмотрим линейную систему $\dot{y} = \mathcal{F}(t)y$ — *систему в вариациях на решении* $x(t,\tau,\xi_0)$.

Теорема 4.1.1 (О дифференцируемости по ξ)**.** Существует частная производная

$$v(t) \coloneqq \frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\xi_0}$$

на $I(\tau,\xi_0)$, и $v(t)$ — фундаментальная матрица системы в вариациях, причём $v(\tau) = E$.

Доказательство.

Лемма 4.1.1. *Назовём* $R \subset G$ *выпуклым по* x*, если для любых* $(t,x),(t,y) \in R$*:* R *содержит отрезок между ними.*

Пусть R *— выпуклый по* x *компакт в* G*. Тогда* $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall (t,x),(t,y) \in R$*:*

$$(y-x) < \delta \Rightarrow \left| f(t,y) - f(t,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) \cdot (y-x) \right| \leqslant \varepsilon |x-y|$$

Доказательство леммы.

Рассмотрим $(t,x),(t,y) \in R$, введём $u(s) = x + s(y-x)$ — параметризация второй координаты отрезка. Тогда

$$f(t,y) - f(t,x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f(t,u(s))}{\partial s}\,\mathrm{d}s = \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial f(t,u(s))}{\partial x}\,\mathrm{d}s\right)(y-x)$$

и

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(t,y)(y-x) = \int\limits_0^1 -\frac{\partial f}{\partial x}(t,y)(y-x)\,\mathrm{d}s$$

Складывая эти оценки, получаем

$$f(t,y) - f(t,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) \cdot (y-x) = (y-x)\int\limits_0^1 \frac{\partial f(t,u(s))}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)\,\mathrm{d}s$$

Далее надо воспользоваться компактностью R: так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна в R, то для данного $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| < \varepsilon$. Интегрируя по $[0,1]$ значение меньше ε, получим число меньше ε. $\square$

$$v(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим i-й столбец $v(t)$, покажем, что он существует, и является решением системы в вариациях.

Рассмотрим произвольный $[a,b] \subset I(\tau, \xi_0)$. Пусть $\tau \in (a,b), \varepsilon_0 > 0$. Определим

$$R = \{(t,x) \mid t \in [a,b], |x - x(t,\tau,\xi_0)| \leqslant \varepsilon\}$$

Пусть L — константа Липшица f по x в компакте R.

Рассмотрим $\xi = \xi_0 + he_i$, здесь e_i — i-й орт. По теореме об интегральной непрерывности $\exists h_0 > 0 :$ $|h| < h_0 \Rightarrow (t, x(t,\tau,\xi_0 + he_i)) \in R$ при $t \in [a,b]$. Такие h будут рассматриваться дальше.

Введём $g(t) \coloneqq x(t,\tau,\xi_0+he_i) - x(t,\tau,\xi_0)$. В лемме об оценке разности решений (лемма 4.0.1) возникала оценка $\left(\left|\xi - \widetilde{\xi}\right| + N\left|\tau - \widetilde{\tau}\right| + m(b-a)\right)e^{L(b-a)}$. В нашем случае второе и третье слагаемое равны нулю, получается $|g(t)| \leqslant |\xi - \xi_0|e^{L(b-a)} = |h|e^{L(b-a)}$.

$$\dot{g} = f(t, x(t,\tau,\xi_0+he_i)) - f(t,x(t,\tau,\xi_0)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\tau,\xi_0))}_{\text{матрица системы в вариациях}} g(t) + \underbrace{\Gamma(t,h)}_{\text{мало}}.$$

Утверждается, что $\frac{|\Gamma(t,h)|}{|h|} \underset{t\in[a,b]}{\rightrightarrows} 0$ при $h \to 0$. Это следует из леммы (лемма 4.1.1): $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$ $|g(t)| < \delta \Rightarrow |\Gamma(t,h)| \leqslant \varepsilon |g(t)|$. Иными словами, $\forall \varepsilon > 0 : \exists h_1(\varepsilon) : |g| < h_1(\varepsilon) \Rightarrow |\Gamma| \leqslant \varepsilon |g|$.

Но $|g| \leqslant |h|e^{L(b-a)}$, поэтому если $|h| < h_1(\varepsilon)$, то $|\Gamma| \leqslant \varepsilon|h|e^{L(b-a)}$, или же $\frac{|\Gamma|}{|h|} \leqslant \varepsilon e^{L(b-a)}$, и стремление $\frac{|\Gamma|}{|h|} \to 0$ действительно равномерно.

Теперь рассмотрим $\phi(t) = \frac{g(t)}{h}$. Если окажется, что $\exists \lim\limits_{h\to 0} \phi(t)$, то это и будет $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$.

Для этого вычтем предполагаемый предел следующим образом: рассмотрим решение $\psi(t)$ системы $\dot{y} = \mathcal{F}(t)y$ с начальным условием $\psi(\tau) = e_i$.

Так как $\dot{g} = \mathcal{F}(t)g + \Gamma$, то $\frac{\dot{g}}{h} = \mathcal{F}(t)\frac{g}{h} + \gamma$, где $|\gamma| \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0$ при $h \to 0$. Рассмотрим ещё систему $\dot{\phi}(\tau) = \mathcal{F}(t)\phi + \gamma$ с начальным условием $\phi(\tau) = \frac{1}{h}\underbrace{(\xi_0 + he_i - \xi_0)}_{g(\tau)} = e_i$.

Итак, у нас есть две системы

$$\psi(t) = e_i + \int\limits_\tau^t \mathcal{F}(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\phi(t) = e_i + \int\limits_\tau^t (\mathcal{F}(s)\phi(s) + \gamma)\,\mathrm{d}s$$

Пусть $N = \max\|\mathcal{F}(\tau)\|$ по $t \in [a,b]$. Оценим $|\phi(t) - \psi(t)|$.

$$|\phi(t) - \psi(t)| = \left|\int\limits_\tau^t \mathcal{F}(s)(\phi - \psi)\,\mathrm{d}s\right| + \left|\int\limits_\tau^t \gamma(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant N\left|\int\limits_\tau^t |\phi(s) - \psi(s)|\,\mathrm{d}s\right| + \max_{t\in[a,b]}|\gamma(t)|(b-a)$$

Это условия леммы Гроноулла, откуда $|\phi(t)-\psi(t)| \leqslant \max\limits_{t\in[a,b]} |\gamma(t)| \cdot e^{N(b-a)}$.

Действительно, мы доказали, что i-й столбец $v(t)$ стремится к решению системы в вариациях с начальными данными e_i в точке τ (да?). $\square$

Теорема 4.1.2 (О дифференцируемости по τ). Теперь рассматривается решение $x(t,\tau_0,\xi)$ на его максимальном промежутке $I(\tau_0,\xi)$.

Пусть $f, \frac{\partial f}{\partial x} \in C(G)$. Система в вариациях чуть-чуть поменялась: $\mathcal{F}(t) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\tau_0,\xi))$ а сама система по-прежнему $\dot{y} = \mathcal{F}(t)y$. Утверждается, что

$$\exists u(t) \coloneqq \frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=\tau_0}$$

и она является решением системы в вариациях с начальными данными $u(\tau_0) = -f(\tau_0,\xi)$.

Замечание. В отличие от предыдущей теоремы, u — не матрица, а всего лишь вектор $\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \tau} \end{pmatrix}$.

Доказательство. Существование $u(t)$ идёт без доказательства, так как оно практически дословно повторяет доказательство существования частной производной по ξ, и ничего нового там нет.

Обоснуем то, что начальное данное именно такое. При $t = \tau : x(\tau,\tau,\xi) = \xi$. Посчитаем частную производную обеих частей равенства по τ при $\tau = \tau_0$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t,\tau,\xi) = f(t, x(t,\tau,\xi))$$

то дифференцируя по обеим τ, мы получаем (при $t = \tau_0$)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} x(\tau,\tau,\xi) = \underbrace{f(\tau_0, x(\tau_0,\tau_0,\xi))}_{=f(\tau_0,\xi)} + \frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=\tau_0} = 0$$

$\square$

Вернёмся к параметризованной системе $\dot{x} = f(t,x,\mu)$, где $x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(G \times M), G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}, M \subset \mathbb{R}^m_\mu$.

Фиксируем $x(t,\tau,\xi,\mu_0)$, и задаёмся вопросом о существовании $z(t) \coloneqq \frac{\partial x(t,\tau,\xi,\mu)}{\partial \mu}\Big|_{\mu=\mu_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mu_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \mu_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \mu_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \mu_m} \end{pmatrix}$.

Вводится $\mathcal{F}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\tau,\xi,\mu_0), \mu_0)$.

Теорема 4.1.3. При этих условиях $\exists z(t)$ на $I(\tau,\xi,\mu_0)$, причём $\dot{z} = \mathcal{F}(t)z + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x(t,\tau,\xi,\mu_0),\mu_0)$ и $z(\tau) = \mathbb{0}$.

Доказательство. Введём вспомогательную переменную $y = \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix}$, и введём векторнозначную функцию $\widetilde{f}(t,y) = \begin{pmatrix} f(t,x,\mu) \\ 0 \end{pmatrix}$, бьющую в $\mathbb{R}^{n+m}$.

Если $x(t,\tau,\xi,\mu)$ — решение изначальной системы, то пара $\begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix}$ — решение системы $\dot{y} = \widetilde{f}(t,y)$.

Теперь можно пользоваться теоремой о дифференцируемости по начальным данным. Введём $\eta = \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \end{pmatrix}$, пусть $\zeta = \dfrac{\partial \eta}{\partial(\xi,\mu)}$.

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}\zeta, \text{ где } \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

С другой стороны, $\zeta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ 0 & E \end{pmatrix}, \dot{\zeta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Отсюда можно извлечь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

$z(\tau) = \mathbb{0}$ очевидно из определения. □

Лекция XIII

1 декабря 2023 г.

Рассмотрим систему $\dot{x} = f(t, x, \mu)$, где $x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C(G \times M)$, где $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ — область, задания самого уравнения, $M \subset \mathbb{R}^m$ — область парамеров.

Ранее мы получили $v(t) = \frac{\partial x(t,\tau,\xi,\mu)}{\partial \xi}$, и доказали $\dot{v}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi, \mu), \mu) \cdot v(t)$.

Кроме того, для $z(t) = \frac{\partial x(t,\tau,\xi,\mu)}{\partial \mu}$ было получено $\dot{z}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \tau, \xi, \mu), \mu) \cdot z(t) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x(t, \tau, \xi, \mu), \mu)$.

Обобщим эти результаты: пусть $f = \big(f_1, \cdots, f_n\big)$. Для $K = \big(k_1, \cdots, k_n, k_{n+1}, \cdots, k_{n+m}\big)$ $(k_i \in \mathbb{N}_0)$ введём

$$\frac{\partial^K f_i}{\partial (x,\mu)^K} \overset{def}{=} \frac{\partial^{|K|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n} \partial \mu_1^{k_{n+1}} \cdots \partial \mu_m^{k_{n+m}}}$$

Здесь, $|K| = \sum\limits_i k_i$. В частности, $f_i = \frac{\partial^0 f_i}{\partial (x,\mu)^0}$.

Теорема 4.1.4 (О производных высших порядков)**.** Пусть $\frac{\partial^K f_i}{\partial (x,\mu)^K} \in C(G \times M)$ для $|K| \leqslant p$ (где $p \leqslant \infty$). Тогда существует и непрерывна производная $\frac{\partial^K x}{\partial (\xi,\mu)^K}$ при $|K| \leqslant p$.

Доказательство. Индукция по $l = |K|$.

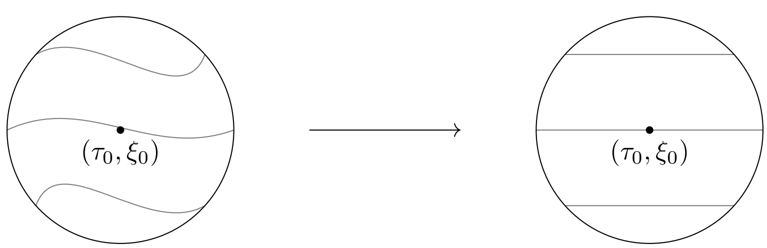
База: Случай $l = 1$ доказан на предыдущей лекции — теорема о дифференцируемости по параметру.

Переход: Чтобы посчитать K-ю производную от x, сначала продифференцируем 1 раз по одному из аргументов, а потом останется продифференцировать $|K| - 1$ раз $\frac{\partial f}{\partial (x,\mu)}$. По условию теоремы эти производные существуют и непрерывны. □

4.2 Теорема о выпрямлении для неавтономных систем

Рассматриваем систему $\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C, \mathrm{Lip}_{x,loc}(G)$.

Теорема 4.2.1 (О выпрямлении для неавтономных систем)**.** $\forall (\tau_0, \xi_0) \in G : \exists$ окрестность $U \ni (\tau_0, \xi_0)$, и $\exists$ гомеоморфизм $h : \overline{U} \to \mathbb{R}^{n+1}$ (гомеоморфизм на образ), переводящий пересечение интегральных кривых с $\overline{U}$ в отрезки параллельных прямых:



Доказательство. Рассмотрим $I(\tau_0, \xi_0)$, и выберем $[a, b] \subset I(\tau_0, \xi_0)$ $([a, b] \ni \tau_0)$. Пусть $\varepsilon > 0$, обозначим $R \coloneqq \{(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \mid |x - x(t, \tau_0, \xi_0)| \leqslant \varepsilon\} \subset G$.

По теореме об интегральной непрерывности $\exists \delta > 0 : \forall \xi : |\xi - \xi_0| \leqslant \delta \Rightarrow (t, x(t, \tau_0, \xi)) \in R$ при $t \in [a, b]$.

Положим $V = \{(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \mid |x - x(t,\tau_0,\xi_0)| < \varepsilon\}$ — это окрестность (τ_0,ξ_0). Построим $g : \overline{V} \to \mathbb{R}^{n+1}$ следующим образом:

$$g(t,\xi) = (t, x(t,\tau_0,\xi))$$

g непрерывна на $\overline{V}$:

$$|g(t,\xi) - g(t',\xi')| \leqslant |t-t'| + \underbrace{|x(t,\tau_0,\xi) - x(t',\tau_0,\xi)|}_{\left|\int\limits_t^{t'} f(s,x(s,\tau_0,\xi))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant M|t-t'|} + \underbrace{|x(t',\tau_0,\xi) - x(t',\tau_0,\xi')|}_{\text{по теореме об интегральной непрерывности } \to 0}$$

Инъективность g прямо следует из теоремы единственности: $g(t,\xi) = g(t',\xi') \Rightarrow t = t'$ и $x(t,\tau_0,\xi) = x(t,\tau_0,\xi') \Rightarrow \xi = \xi'$. Также несложно проверить, что $g(\tau_0,\xi_0) = (\tau_0,\xi_0)$.

Теперь построим обратное отображение h. Пусть $\overline{W} = g\left(\overline{V}\right)$, $U \coloneqq \operatorname{Int}\left(\overline{W}\right)$. Инъективное отображение компакта — гомеоморфизм на образ, поэтому $\exists h : \overline{U} \to \overline{V}$ — искомый гомеоморфизм. $\square$

Пусть мы всё ещё рассматриваем систему $\dot{x} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C, \mathrm{Lip}_{x,loc}(G)$.

Теорема 4.2.2 (О дифференциальном выпрямлении). $\forall (\tau_0,\xi_0) \in G : \exists$ окрестность $U \ni (\tau_0,\xi_0)$, и $\exists$ диффеоморфизм $h : \overline{U} \to \mathbb{R}^{n+1}$ (гомеоморфизм на образ h, такой, что h, h^{-1} дифференцируемы), переводящий пересечение интегральных кривых с $\overline{U}$ в отрезки параллельных прямых.

Доказательство. Параллельно доказательству предыдущей теоремы построим g. То, что $g \in C^1$ следует из того, что решение дифференцируемо по t и по начальным данным.

Дальше мы хотим применить теорему об обратной функции, для этого надо показать невырожденность $\det \frac{\partial g}{\partial(t,\xi)}\big|_{(\tau_0,\xi_0)}$. Расписав покомпонентно $g(t,\xi) = (t,x)$, получаем

$$\frac{\partial g}{\partial(t,\xi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}$$

Достаточно показать, что $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ невырождена, но это фундаментальная матрица системы в вариациях.

Значит, по теореме об обратной функции g — диффеоморфизм окрестности (τ_0,ξ_0) на окрестность (τ_0,ξ_0). $\square$

4.3 Теорема Коши

4.3.1 Кратные степенные ряды

Многомерное суммирование

В случае обычных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ мы работаем с частичными суммами $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k$, которые куда-то стремятся.

Случай многомерного индекса выглядит так: имеется набор чисел $a_{k_1,\ldots,k_n}$, где $k_i \in \mathbb{N}_0$.

Назовём суммой ряда $\sum\limits_{k_1=\cdots=k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\cdots,k_n}$ сумму семейства $\{a_{k_1,\cdots,k_n} \mid k_1,\cdots,k_n \in \mathbb{N}_0\}$.

Ещё это можно записать так: если A — сумма семейства, то по определению $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m_1,\cdots,m_n \geqslant N : \left|\sum\limits_{m_1,\cdots,m_n} a_* - A\right| < \varepsilon$, где $\sum\limits_{m_1,\cdots,m_n} a_* \coloneqq \sum\limits_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum\limits_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1,\cdots,k_n}$ — краткое обозначение для частичной суммы.

Работая с абсолютно сходящимися многомерными рядами, мы сможем выполнять все действия над ними, какие захотим (например, потому что можно всё перевести на язык суммируемых семейств).

Многомерные степенные ряды

Кратные степенные ряды определяются исходя из обычных кратных рядов: пусть $x = \big(x_1, \cdots, x_n\big)$, зафиксируем $x^0 = \big(x_1^0, \cdots, x_n^0\big)$, и рассмотрим ряд

$$\sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1, \cdots, k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - x_n^0)^{k_n}$$

Утверждение 4.3.1 (Радиус сходимости)**.** *Если ряд сходится для* $(x_1^*, \cdots, x_n^*)$*, то он сходится для любого* $(x_1, \cdots, x_n) : |x_i - x_i^0| < |x_i^* - x_i^0|$.

Утверждение 4.3.2 (Мажоратные ряды)**.** *Пусть есть ряд* $\sum\limits_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{\infty} b_{k_1, \cdots, k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - x_n^0)^{k_n}$*. Если все* $|a_{k_1, \cdots, k_n}| \leqslant b_{k_1, \cdots, k_n}$*, и ряд степенной ряд* b *сходится, то и степенной ряд* a *сходится.*

Утверждение 4.3.3 (Специальный ряд)**.** *При* $|x_i| < 1$ *следующий ряд (многомерная геометрическая прогрессия) сходится:*

$$\sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{\infty} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} = \frac{1}{(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n)}$$

Лекция XIV

2 декабря 2023 г.

Теорема 4.3.1 (Коши)**.** Рассматриваем нормальную систему $\dot{x} = f(t, x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, и при ней — задача Коши с начальными данными (t_0, x_0).

Пусть $x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$, и пусть компоненты векторнозначной функции $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ представляются рядами:

$$f_i(t, x) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} L^{(i)}_{k, k_1, \ldots, k_n} (t - t_0)^k (x_1 - x_1^0)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - x_n^0)^{k_n}$$

Предполагается, что $\exists r_0, \rho_0 > 0$, такие, что ряды сходятся при $|t - t_0| < r_0, |x_i - x_i^0| < \rho_0$.

Утверждается, что $\exists r_1 > 0$, такое, что решение задачи Коши имеет координаты $x_i(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} (t - t_0)^k$, и ряды сходятся при $|t - t_0| < r_1$.

Доказательство. Для упрощения записи предположим, что $t_0 = 0, x_0 = 0$. Теперь формулы упрощаются до $x_i(t) = \sum\limits_{k=1} a_k^{(i)} t^k$.

- Покажем существование формальных разложений, пока не заботясь о сходимости.

  $$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^{(i)} t^{k-1} = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} L^{(i)}_{k, k_1, \ldots, k_n} t^k \left(\sum_{l_1 = 1}^{\infty} a_{l_1}^{(1)} t^{l_1} \right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{l_n = 1}^{\infty} a_{l_n}^{(n)} t^{l_n} \right)^{k_n}$$

  Как обычно, рассматриваем степени t, начиная с наименьшей.

  - При $t = 0$ получается равенство $a_1^{(i)} = L^{(i)}_{0,0,\ldots,0}$ (иными словами, сравнили коэффициенты при t^0).
  - Сравнивая коэффициенты при t^1: $2a_2^{(i)} = L^{(i)}_{1,0,\ldots,0} + L_{0,1,0,\ldots,0} a_1^{(1)} + \cdots + L_{0,0,\ldots,0,1} a_1^{(n)}$. Заметим, что правая часть уже определена, откуда находится a_2.

– При t^{m-1} получится $ma_m^{(i)} = P_m\left(L_{k,k_1,\dots,k_n}^{(i)}, a_l^{(j)}\right)$, где $k + k_1 + \dots + k_n \leqslant m-1, j = 1,\dots,n, l \leqslant m-1$, и P_m — многочлен от аргументов с неотрицательными коэффициентами (сумма каких-то произведений). Отсюда однозначно находятся a_m для всех m.

• Теперь надо показать, что ряды с данными коэффициентами имеют положительный радиус сходимости.

Изначальные ряды сходились при $|t| < r_0, |x_i| < \rho_0$. В частности, при $r \in (0, r_0), \rho \in (0, \rho_0)$ ряды сходятся абсолютно при $|t| = r, |x_i| = \rho$.

$$\sum_{k,k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} |L_{k,k_1,\dots,k_n}| r^k \rho^{k_1} \cdot \ldots \cdot \rho^{k_n}$$

Раз ряд сходится абсолютно, то $\exists M > 0 : \forall k, k_1, \dots, k_n : |L_{k,k_1,\dots,k_n}| r^k \rho^{k_1} \cdot \ldots \cdot \rho^{k_n} \leqslant M$, или же $L_{k,k_1,\dots,k_n} \leqslant \frac{M}{r^k \rho^{k_1 + \dots + k_m}}$ — *оценка Коши*.

Теперь, чтобы показать, что ряд для x_i сходится, мы построим мажорирующий его ряд, а для этого сконструируем *мажорантную систему*.

– Мажорирующая система — это система с неизвестными $z_1, \dots, z_n$, и уравнениями

$$\dot{z}_i = \sum_{k,k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} \frac{M}{r^k \rho^{k_1+\dots+k_n}} t^k z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{k_n} =$$
$$= M \sum_{k,k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^k \left(\frac{z_1}{\rho}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{z_n}{\rho}\right)^{k_n} = \frac{M}{\left(1 - \frac{t}{r}\right)\left(1 - \frac{z_1}{\rho}\right) \dots \left(1 - \frac{z_n}{\rho}\right)}$$

– Рассмотрим решение задачи Коши при $z_i(0) = 0$. Обозначим $N_{k,k_1,\dots,k_n} \coloneqq \frac{M}{r^k \rho^{k_1+\dots+k_n}}$. Будем искать решение в виде

$$z_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} t^k$$

Как и при поиске рядов для x_i, приравняем коэффициенты при степенях t:

  * При t^0: $A_1^{(i)} = N_{0,0\dots,0} \geqslant \left|L_{0,\dots,0}^{(i)}\right| = |a_1^{(i)}|$.
  * При t^1: $2A_2^{(i)} = N_{1,0,\dots,0} + N_{0,1,0\dots,0} A_1^{(1)} + \dots + N_{0,0,\dots,0,1} A_1^{(n)} \geqslant \left|a_2^{(i)}\right|$
  * При t^{m-1}: $mA_m^{(i)} = P_m\left(N_{k,k_1,\dots,k_n}, A_l^{(j)}\right)$ (многочлен P_m прежний). При этом, так как все $N_{k,k_1,\dots,k_n} \geqslant L_{k,k_1,\dots,k_n}$, и все $A_m^{(i)} \geqslant a_m^{(i)}$ до данного места, то и по индукции вообще все $A_m^{(i)} \geqslant a_m^{(i)}$.

Таким образом, в формальных рядах, представляющих решение первоначальной системы, и решение мажорирующей системы: все коэффициенты первоначальной системы мажорируются коэффициентами мажорирующей системы.

Теперь достаточно доказать, что ряды решений мажорирующей системы имеют положительный радиус сходимости. Оказывается, решение мажорирующей системы можно просто найти.

– Рассмотрим скалярное уравнение $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{\left(1-\frac{t}{r}\right)\left(1-\frac{u}{\rho}\right)^n}$. Утверждается, что если $u(t)$ — решение с начальным данным $u(0) = 0$, то $z_i(t) = u(t)$ — решения мажорирующей системы.

Предостережение. Конечно, не все решения мажорирующей системы имеют такой вид.

– Осталось только решить это уравнение.

$$\left(1 - \frac{u}{\rho}\right)^n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{1 - \frac{t}{r}}$$

Обозначим $v := 1 - \frac{u}{\rho}$, тогда $\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}u}{\rho}$, теперь $-\rho v^n \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{1-\frac{t}{r}}$. Интегрируя, получаем $\frac{\rho}{n+1} v^{n+1} = rM \log\left(1 - \frac{t}{r}\right) + C$.

При $t = 0$ логарифм обнуляется, $C = \frac{\rho}{n+1}$. Извлечём теперь u следующим образом. Домножим на $\frac{n+1}{\rho}$, и извлечём корень степени $n+1$:

$$1 - \frac{u}{\rho} = \left[1 + \frac{rM(n+1)}{\rho} \log\left(1 - \frac{t}{r}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

Осталось выразить $u = \rho\left\{1 - \left[1 + \frac{rM(n+1)}{\rho} \log\left(1 - \frac{t}{r}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}\right\}$.

– Убедимся, что решение аналитично в круге некоторого радиуса.

На лекции явно проводилась цепочка размышлений для каждого из членов композиции, что не способствует пониманию. Напишу немного по-другому, введя следующую лемму.

Лемма 4.3.1. *Пусть $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $g : (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta) \to \mathbb{R}$ — аналиитичные функции. Тогда композиция $g \circ f$ определена и аналитична в некоторой окрестности x_0.*

Доказательство. f непрерывна, поэтому ε можно уменьшить настолько, что $f((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) \subset (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta)$. Теперь $g \circ f$ определена везде на $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, а композиция аналитичных функций аналитична. □

Решение является композицией нескольких аналитичных функций (чтобы увидеть аналитичность корня $(n+1)$-й степени, можно выразить $[\dots]^{\frac{1}{n+1}} = e^{\frac{1}{n+1}\log[\dots]}$). Достаточно заметить, что линейные преобразования аналитичны везде, $\log$ и корень $(n+1)$-й степени аналитичны в окрестности 1 (последнее — так как $\log$ аналитичен в окрестности 1, а $\exp$ — в окрестности 0 (разумеется, на самом деле $\exp$ аналитична везде на $\mathbb{R}$)).

Итак, u аналитична при $|t| < r_1$. Уменьшим r_1 ещё сильнее, чтобы выполнялись неравенство $r_1 \leqslant r_0$ и $|u(t)| < \rho_0$ при $|t| < r_1$. Теперь $\begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u \end{pmatrix}$ при $|t| < r_1$ — аналитическое решение мажорирующей системы, так как ряд сходится, и при подстановке сходятся также и ряды для коэффиицентов. □

Лекция XV

8 декабря 2023 г.

В прошлый раз была доказана теорема Коши: если f — аналитическая функция, то решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ тоже аналитическое.

Теорема 4.3.2 (Коши, для линейных систем)**.** Рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными данными $(t_0, x_0) = (0, 0)$ в рамках системы $\dot{x} = p(t)x + q(t)$, где $x \in \mathbb{R}^n, p \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), q \in \mathbb{R}^n$, причём коэффициенты аналитические: $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p^{(k)} t^k, q(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^{(k)} t^k$, и они сходятся при $|t| < r_0$, здесь $r_0 > 0$.

Тогда утверждается, что у решения x имеется тот же радиус сходимости r_0.

Доказательство. Пусть решение представимо в виде $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} t^k$.

Эти коэффициенты получены так: формально дифференцируя, получаем $\dot{x}_i = \sum\limits_{l=1}^{\infty} l a_l^{(i)} t^{l-1}$, значит

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} t^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,j}^{(k)} t^k \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(j)} t^l \right)}_{x_j} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k^{(i)} t^k$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях t, получаем

$$\begin{cases} t^0: & a_1^{(i)} = q_0^{(i)} \\ t^1: & 2a_2^{(i)} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}^{(0)} a_1^{(i)} + q_1^{(i)} \\ & \ddots \end{cases}$$

В общем виде, это записывается так: $t^{m-1}: m a_m^{(i)} = P_m \left(p_{i,j}^{(k)}, a_l^{(j)}, q_i^{(m-1)} \right)_{k \leqslant m-1, l \leqslant m-1}$, здесь P_m — некий многочлен с неотрицательными коэффициентами (они получены произведением и суммой членов).

Теперь надо построить мажорирующую систему. Берём $r \in (0, r_0)$. Трюк Коши говорит, что если подставить такое r, то члены будут ограничены, то есть $\exists M \in \mathbb{R}: \left| p_{i,j}^{(k)} r^k \right| \leqslant M$, или же $\left| p_{i,j}^{(k)} \right| \leqslant \frac{M}{r^k}$. Аналогично $\left| q_i^{(k)} \right| \leqslant \frac{M}{r^k}$.

В качестве мажорантной системы возьмём систему с искомыми функциями $z_1, \dots, z_n$, определёнными так: $\dot{z}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{M}{r^k} t^k z_j + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{M}{r^k} t^k$. Эти геометрические прогрессии можно просуммировать:

$$\dot{z}_i = \sum_{j=0}^{n} \frac{M}{1 - \frac{t}{r}} z_j + \frac{M}{1 - \frac{t}{r}}$$

Мажорирующая система линейна, её решение можно получить так: пусть $z_1 = \dots = z_n = u$, тогда $\dot{u} = \frac{M}{1 - \frac{t}{r}}(nu + 1)$. Это линейное уравнение первого порядка, коэффициенты аналитичны при $|t| < r$. В прошлой лекции была получена формула, в которой коэффициенты — тоже аналитические функции при $|t| < r$.

Получив оценку на сходимость мажорирующей системы, мы уже всё доказали. $\square$

Глава 5

Автономные системы

Автономные системы — системы, у которых правая часть не зависит от t.

А именно, рассматривается система $\dot{x} = f(x)$, где предполагается, что $f \in \mathrm{Lip}_{x,loc}(H), H \subset \mathbb{R}^n_x$ — область. Так как f локально липшицева по аргументу, то она непрерывна. Пространство, где ищутся решения — $\mathbb{R}^n_x$ — *фазовое пространство*.

Можно применить общую теорию к области $G = \mathbb{R} \times H \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$, получается, H — область существования и единственности.

Теорема 5.0.1. Если $x(t)$ — решение на (a, b), то $\forall c \in \mathbb{R}$: сдвиг решения $x(t+c)$ — решение на $(a-c, b-c)$.

Определение 5.0.1 (Траектория)**.** Проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

Траектория не зависит от сдвига, и, вообще говоря (кроме вырожденных случаев), это — гладкая кривая, по которой можно понять и направление движения решения.

Пусть $x_0 \in H$, выберем главным решением $\phi(t, x_0) \coloneqq x(t, 0, x_0)$ — решение задачи Коши с начальным данным $x(0) = x_0$. По определению $\phi(0, x_0) = x_0$. Максимальный промежуток решения $\phi(t, x_0)$ будет обозначаться за $I(x_0)$.

Теорема 5.0.2 (Групповое свойство автономных систем)**.** Если $s, t+s \in I(x_0)$, то $\phi(t+s, x_0) = \phi(t, \phi(s, x_0))$.

Доказательство. Рассмотрим обе части, как функции от t. Левая часть — сдвиг какого-то решения, правая часть — какое-то решение, и при $t = 0$ части равны друг другу. ☐

5.1 Виды траекторий

5.1.1 Точка покоя

Определение 5.1.1 (Точка покоя)**.** Такая точка x_0, что $\phi(t, x_0) \equiv x_0$ — решение.

Несложно видеть, что точки покоя автономной системы — это $\{x_0 \in H \mid f(x_0) = 0\}$.

5.1.2 Замкнутая траектория

Пусть x_0 — не точка покоя, причём нашлись $t_1 < t_2 : \phi(t_1, x_0) = \phi(t_2, x_0)$. Можно считать, что при $t \in (t_1, t_2) : \phi(t, x_0) \neq \phi(t_1, x_0)$. Это в частности следует из того, что если x_0 — не точка покоя, то любая точка траектории — не точка покоя.

Обозначим $\omega \coloneqq t_2 - t_1$.

Факт 5.1.1. *$\phi(t, x_0)$ — ω-периодическая функция (по t).*

Доказательство. Рассмотрим $\psi(t) = \phi(t+\omega, x_0)$. Это решение, как сдвиг. Оно определено хотя бы на отрезке $[t_1 - \omega, t_2 - \omega]$.

$$\psi(t_1) = \phi(t_1 + \omega, x_0) = \phi(t_2, x_0) = \phi(t_1, x_0)$$

Значит, по единственности $\psi(t) \equiv \phi(t, x_0)$. $\square$

Определение 5.1.2 (Замкнутая траектория)**.** Траектория периодического решения.

Понятно, что замкнутая траектория — замкнутая несамопересекающаяся регулярная (касательный вектор не нулевой) кривая в фазовом пространстве.

5.1.3 Обыкновенная траектория

Пусть $\forall t_1, t_2 \in I(x_0) : \phi(t_1, x_0) \neq \phi(t_2, x_0)$ при $t_1 \neq t_2$.

В таком случае траектория — просто непрерывный образ $I(x_0)$.

Пример. Рассмотрим систему $\dot{x} = 1 + x^2$. Тогда $\phi(t, 0) = \operatorname{tg} t$, $I(0) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, траектория — вся ось $\mathbb{R}$. Однако эта траектория — образ ограниченного интервала, что может быть неудобно. Поборемся несколько искусственным способом с этим ниже.

Пусть f определена на всём пространстве $\mathbb{R}^n_x$.

Рассмотрим вместе с системой $\dot{x} = f(x)$ другую систему $\dot{y} = g(y)$, где $g(y) = \frac{f(y)}{1 + \|f(y)\|^2_{\text{euclid}}}$. У новой системы $|g(y)| < 1$, и из теоремы об уравнениях, сравнимых с линейными (теорема 2.3.4), любое решение y продолжимо на всю ось $\mathbb{R}$.

Пусть $y(t)$ — решение системы $\dot{y} = g(y)$ с начальным условием $y(0) = x_0$. Рассмотрим $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(\tau) = \int\limits_0^\tau \frac{\mathrm{d}s}{1 + \|f(y(s))\|^2_{\text{euclid}}}$. h — непрерывная функция, $\dot{h} > 0$. Пусть $\operatorname{Im} h = I$.

Значит, имеется обратная функция $\theta = h^{-1} : I \to \mathbb{R}$. Тогда $\theta(h(\tau)) = \tau$, и, дифференцируя это равенство, получаем $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(h(\tau)) \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} = 1$. То есть

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(h(\tau)) = 1 + \|f(y(\tau))\|^2_{\text{euclid}} = 1 + \|f(y(\theta(t)))\|^2_{\text{euclid}}$$

Утверждается, что $z(t) = y(\theta(t))$ — решение первой системы $\dot{z} = f(z)$. В самом деле,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}(\theta(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{f(\theta(t))}{1 + \|f(y(\theta(t)))\|^2_{\text{euclid}}}(1 + \|f(y(\theta(t)))\|^2_{\text{euclid}}) = f(z(t))$$

Таким образом получается, что решению $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ системы $\dot{y} = f(y)$ с начальным данным $y(0) = x_0$ соответствует некоторое решение $z : I \to \mathbb{R}^n$ системы $\dot{z} = f(z)$ с тем же начальным данным $z(0) = x_0$, причём их траектории одинаковы.

Значит, если мы хотим исследовать возможные траектории автономных уравнений, нам достаточно исследовать траектории решений, определённых на всей оси.

5.2 Классификация Пуанкаре

Пуанкаре задавался вопросом о траекториях: все ли траектории примыкают к началу координат, и есть ли предельное положение касательных.

В случае положительного ответа на оба вопроса траектории называются *узел*, и в зависимости от количества предельных положений касательных, он называется *обыкновенный* (2), *дикритический* (∞), вырожденный (1).

Если же часть касательных примыкает к нулю, а часть нет, то это — *седло*.

Далее ниже приводится классификация всевозможных траекторий уравнения $\dot{z} = Bz$, где $z \in \mathbb{R}^2$, $B \in GL(2, \mathbb{R})$.

Введём новую переменную u, связанную со старой равенством $z = Su$, где $S \in GL(2, \mathbb{R})$ — неособая замена координат плоскости. Уравнение преобразуется к виду $\dot{u} = S^{-1}BSu$, и, конечно, хочется, чтобы $A \coloneqq S^{-1}BS$ было жордановой формой матрицы B.

Перейдём к привычным координатам $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, и рассмотрим разные возможные виды A.

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ — собственные числа A, причём $\lambda \neq \mu$. Тогда уравнение сводится к

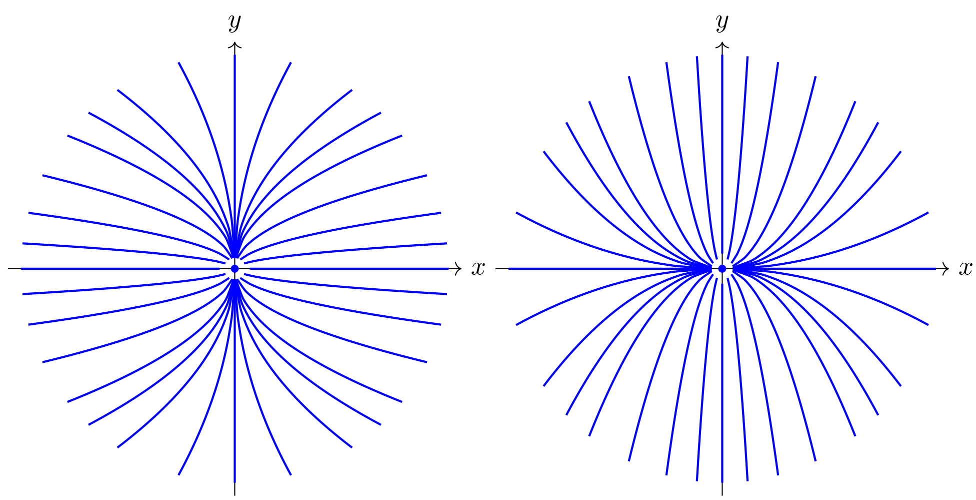
$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases}$$

  У системы есть симметрии: решению $(x(t), y(t))$ соответствуют другие решения $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$.

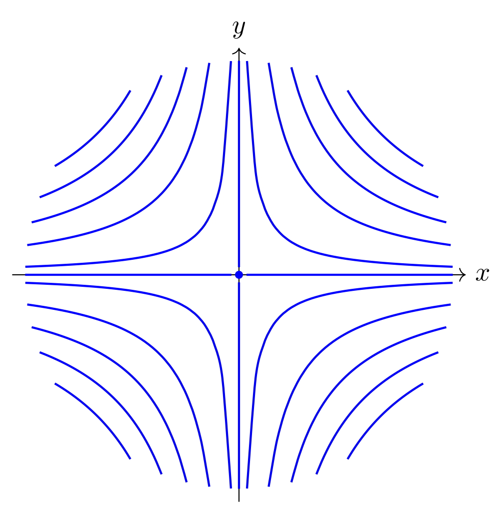
  Имеется точка покоя $(0, 0)$. Далее, открытые полуоси тоже являются траекториями решений $(x_0 e^{\lambda t}, 0)$ и $(0, y_0 e^{\mu t})$.

  Теперь изобразим траекторию, лежащую внутри первой четверти. $x(t) = x_0 e^{\lambda t}, y(t) = y_0 e^{\mu t}$, и несложные преобразования дают $t = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{x}{x_0}\right)$ и $y = Cx^{\frac{\mu}{\lambda}}$.

  - Если μ, λ одного знака, то будут выпуклые или вогнутые возрастающие из нуля координат функции. Такое расположение траекторий называется *обыкновенный узел*.



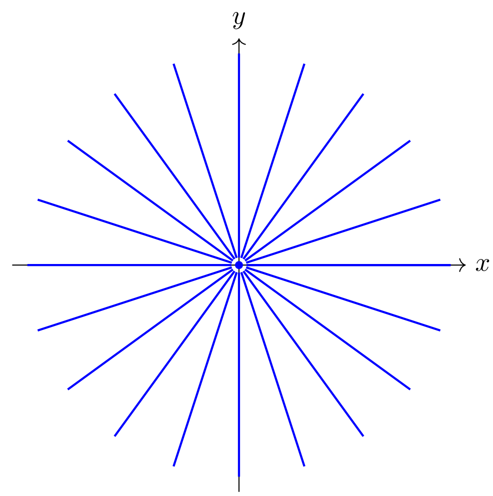
  - Если μ, λ разных знаков, то будут своеобразные гиперболы. В сечении гиперболического параболоида получатся такие кривые, поэтому семейство траекторий называется *седло*.



Лекция XVI

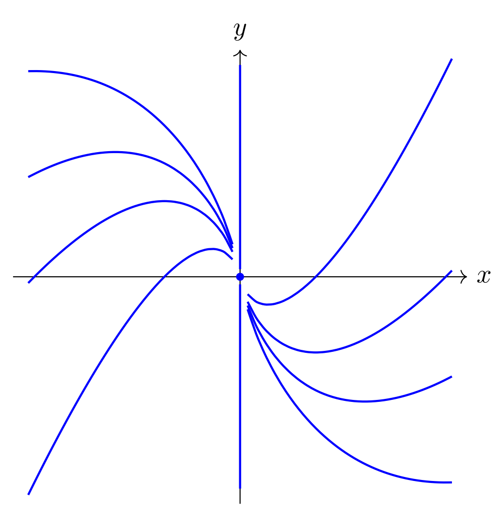
15 декабря 2023 г.

- Теперь пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ — собственные числа A, причём $\lambda = \mu$. Здесь жорданова форма может иметь два разных вида.
  - Пусть $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Тогда все траектории — всевозможные лучи, исходящие из нуля координат. Такое расположение Пуанкаре назвал *дикритический узел*.



  - Пусть $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$. Тогда решение системы $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases}$. Здесь симметрий меньше — есть только центральная $(x, y) \leftrightsquigarrow (-x, -y)$, но нет осевых.
    - ∗ Имеется траектория $\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$, делящая плоскость на две половинки, и картинку можно рисовать только в правой полуплоскости, а потом отражать.
    - ∗ Пусть $x = x_0 e^{\lambda t}$. Тогда на y получается линейное уравнение $\dot{y} = \lambda y + x_0 e^{\lambda t}$. Решая его, получаем $y = (x_0 t + C) e^{\lambda t}$
    - ∗ Выражая $t = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{x}{x_0} + C\right)$, получаем уравнение кривых $y = x\left(\frac{1}{\lambda}\log(x) + \widetilde{C}\right)$. $y(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, зато $y'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \infty$, и знак бесконечности противоположен знаку λ.

      Эта траектория называется *вырожденный узел*.



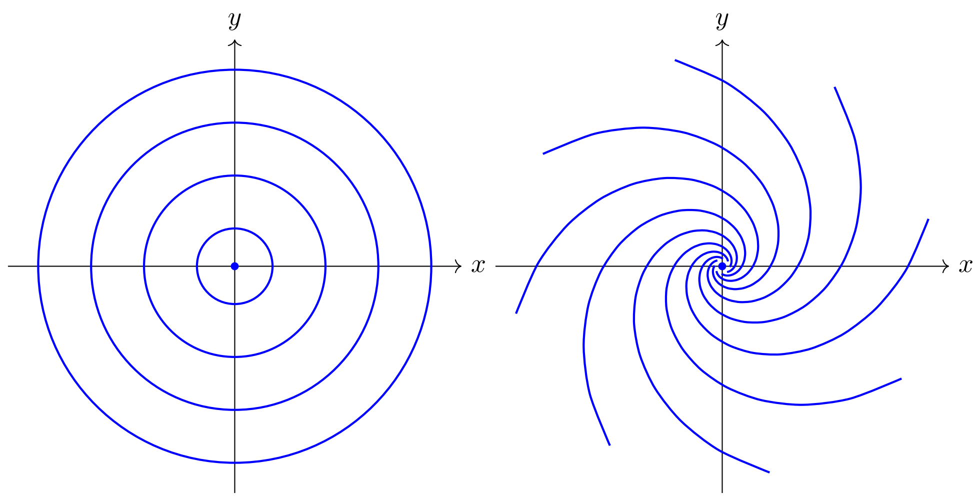
- Теперь пусть собственные числа B комплексные: $\lambda_{1,2} = a \pm bi$. Тогда можно сопряжением привести B к виду $A \coloneqq S^{-1}BS = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

  Тогда система имеет вид $\begin{cases} \dot{x} = ax - by \\ \dot{y} = bx + ay \end{cases}$. Переходя к полярным координатам, получаем $\begin{cases} \dot{r}\cos\phi - r\sin\phi \cdot \dot{\phi} = ar\cos\phi - br\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\cos\phi \cdot \dot{\phi} = br\cos\phi + ar\sin\phi \end{cases}$. Выражая отдельно $\dot{r}$ и $\dot{\phi}$, получаем $\begin{cases} \dot{r} = ar \\ r\dot{\phi} = br \end{cases}$.

  Теперь данную систему несложно решить $\begin{cases} r(t) = r_0 e^{at} \\ \phi(t) = bt + \phi_0 \end{cases}$, и выразить, например, как функцию $r(\phi) = r_0 e^{\frac{a}{b}(\phi - \phi_0)}$, или $r = \widetilde{r}_0 e^{\frac{a}{b}\phi}$.

  - При $a = 0$ показатели экспоненты чисто мнимые, и траектории — концентрические окружности с центром в нуле. Здесь кроме точки покоя никакая траектория к нулю не примыкает, Пуанкаре дал название *центр* этому виду траекторий.

  - Наконец, если $a \neq 0$, то получаются логарифмические спирали, образующие *фокус* — все траектории примыкают к нулю, но ни одна не имеет предельного положения касательной.



В дополнение к данной классификации мы приведём упрощённую формулировку теоремы, которая рассматривает нелинейные системы.

Интересный факт (Теорема Пуанкаре). Рассматривается уравнение $\dot{z} = Bz + F(z)$, где $B \in GL(2, \mathbb{R})$, $F(0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(0) = \mathbb{0}$, причём в некоторой окрестности нуля $U : F \in C^2(U)$.

Если собственные числа B не чисто мнимые, то существует диффеоморфизм h, переводящий окрестность нуля в окрестность нуля, такой, что $h \in C^1, h(0) = 0, \frac{\partial h}{\partial z}(0) = E$, и h отображает траектории $\dot{z} = Bz$ на траектории $\dot{z} = Bz + F(z)$.

Иными словами, если траектории $\dot{z} = Bz$ образуют не центр, то локально в нуле расположение решений линейных и нелинейных систем схожи.

Замечание (Проблема центра и фокуса). Даже для полиномиальных систем и на сей день не найдены необходимые и достаточные условия, при которых малое возмущение центр оставляет центром.