

# Матанализ. Неофициальный конспект

Лектор: Сергей Витальевич Кисляков  
Конспектировал Леонид Данилевич

III семестр, осень 2023 г.

# Оглавление

0.1	Литература . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Теория меры</b>	<b>4</b>
1.1	Меры . . . . .	5
1.2	Обобщения . . . . .	7
1.2.1	Область задания меры (системы множеств) . . . . .	7
1.3	Поговорим про интеграл . . . . .	8
1.3.1	Про счётную аддитивность . . . . .	10
1.3.2	Продолжение меры . . . . .	12
1.3.3	Предмера . . . . .	15
1.4	Структура измеримых множеств . . . . .	18
1.4.1	Множества меры нуль . . . . .	18
1.4.2	$\sigma$ -множества и $\delta\sigma$ -множества . . . . .	18
1.4.3	$\sigma$ -конечность . . . . .	19
1.4.4	Полнота . . . . .	20
1.4.5	Двоичные (диадические) кубы . . . . .	21
1.5	Поведение меры Лебега при линейных отображениях . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Интеграл Лебега</b>	<b>25</b>
2.1	Измеримые отображения . . . . .	26
2.2	Грани и предельные переходы . . . . .	28
2.3	Интеграл . . . . .	29
2.4	Применения теоремы Леви. Свойства интеграла . . . . .	30
2.5	Интегралы от знакопеременных функций . . . . .	31
2.5.1	Про линейность интеграла . . . . .	32
2.6	Виды сходимости . . . . .	34
2.7	Классы $L^p$ . . . . .	35
2.7.1	Приближение функций из класса $L^p$ . . . . .	36
2.7.2	Связь интегралов Лебега и Римана . . . . .	39
2.8	Теоремы Тонелли и Фубини . . . . .	40
2.8.1	Как применять . . . . .	43
2.9	Свёртки. Приближение функций с помощью свёрток . . . . .	43
2.9.1	Меры с плотностью . . . . .	44
2.9.2	Образ меры . . . . .	44
2.9.3	Свойства свёртки . . . . .	45
2.9.4	Слегка другой способ построения аппроксимативной единицы . . . . .	48
2.10	Преобразования меры при дифференцируемом отображении . . . . .	49
2.11	Мера Лебега на поверхностях . . . . .	52
2.11.1	Частный случай линейного $f$ . . . . .	52
2.11.2	$p$ -мера Хаусдорфа . . . . .	52
2.12	Некоторые конкретные интегралы . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Элементы общей теории меры</b>	<b>59</b>
3.1	Разложение Хана . . . . .	60
3.2	Интеграл комплексных функций . . . . .	61

3.2.1	Интеграл по комплексной мере . . . . .	63
3.3	Разложение Лебега . . . . .	64

## 0.1 Литература

1. Б. М. Макаров «Теория меры и интеграла»
2. ? «Интеграл Лебега»
3. Халмош «Теория меры»

# Глава 1

## Теория меры

### Лекция I

6 сентября 2023 г.

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная функция.

Для того, чтобы интеграл Римана — Дарбу существовал, нам надо, чтобы она была какой-то хорошей — с ограниченными колебаниями, часто просто требуется кусочная непрерывность. А как быть иначе?

Запишем такое, не совсем верное рассуждение.

*Рассуждение.* Пусть  $|f(x)| \leq M$  при  $x \in [a, b]$ . Разобьём отрезок  $[-M, M]$  в объединение промежутков  $[-M, M] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ , будем считать, что  $\forall k : |I_k| < \varepsilon$ .

Обозначим за  $e_j := f^{-1}(I_j)$ . Видно, что  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_k = [a, b]$  — прообразы отрезков  $I_j$  образуют разбиение  $[a, b]$ .

Оценим суммы Дарбу следующим образом:

$$S_{\Delta} f \leq \sum_{j=1}^k \beta_j |e_j| \quad s_{\Delta} f \geq \sum_{j=1}^k \alpha_j |e_j|$$

где  $|e|$  — «длина» множества  $e$ .

Заметим, что верхние и нижние суммы близки:  $S_{\Delta} f - s_{\Delta} f = \sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) |e_j| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^k |e_j| = \varepsilon(b-a)$ .

Таким образом, проинтегрировали любую ограниченную функцию. В чём проблема?  $\square$

Как естественным образом определить длину множества  $|e|$ ?

Надо, чтобы длина была аддитивной:  $|e \sqcup f| = |e| + |f|$ .

*Замечание.* Можно аддитивно определить длину на всех подмножествах  $[a, b]$ , но такое определение не конструктивно, и к тому же не единственно. Дальше мы определим *меру Лебега*, которая позволяет измерять многие, но всё же далеко не все множества — можно построить контрпримеры с помощью аксиомы выбора.

Пусть  $I$  — конечный промежуток,  $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$  — тоже конечные промежутки, такие, что  $I = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j$ .

Также хочется, чтобы предельные переходы выполнялись:  $|I| = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$ . Это называется *счётной аддитивностью*.

## 1.1 Меры

Пусть  $X$  — множество,  $\mathcal{A} \subset 2^X$  — система его подмножеств. Пока будем считать только, что  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .

**Определение 1.1.1** (Функция множества). *Вещественная функция множества  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , или комплексная функция множества  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ .*

Вещественная функция множества  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  называется *неотрицательной*.

Иногда также разрешают функции приобретать значения на расширенной прямой  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} = [0, +\infty]$ .

**Определение 1.1.2** (Мера). Аддитивная функция  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ .

Аддитивность означает, что в случае  $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{A}$ , если  $e := \bigsqcup_{j=1}^k e_j \in \mathcal{A}$ , то  $\phi(e) = \phi(e_1) + \dots + \phi(e_k)$ .

*Замечание.* Если  $\phi$  — аддитивная функция, то  $\phi(\emptyset) = \phi(\emptyset) + \phi(\emptyset)$ , откуда  $\phi(\emptyset) = 0$  (формально,  $\phi(\emptyset) = \infty$  тоже подходит, но тогда из аддитивности  $\phi \equiv +\infty$ , это скучный случай).

*Примеры.*

- Пусть  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$  — совокупность конечных промежутков,  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  — совокупность всех промежутков.

Тогда для обоих семейств можно ввести меру  $\phi(I) = |I|$ .

Заметим, что аддитивность действительно выполняется: если отрезок  $\langle a, b \rangle$  разбит на отрезки  $\langle a_0, a_1 \rangle, \dots, \langle a_{n-1}, a_n \rangle$ , где  $a_0 = a, a_n = b$ , то и правда

$$b - a = \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})$$

- То же самое можно сделать в  $\mathbb{R}^n$ : введём множества ограниченных и всех прямоугольных параллелепипедов.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) &= \{I_1 \times \dots \times I_n \mid \text{все } I_j \text{ — конечные промежутки}\} \\ \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) &= \{I_1 \times \dots \times I_n \mid \text{все } I_j \text{ — промежутки}\} \end{aligned}$$

Обозначим за  $V_n$  объём на  $\mathcal{P}$ :  $V_n(I_1 \times \dots \times I_n) = |I_1| \cdot \dots \cdot |I_n|$ , где бесконечность в произведении трактуется так: если есть хотя бы один ноль, то произведение равно нулю, иначе бесконечно.

Почему эта мера аддитивна?

Пусть  $Q, Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ , причём  $Q = \bigsqcup_{j=1}^k Q_j$ .

**Лемма 1.1.1.**  $V_n(Q) = \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$ .

*Доказательство.* Пусть  $f$  — функция на  $Q$ , определим

$$J(f) = \int_{I_n} \left( \dots \int_{I_2} \left( \int_{I_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots \right) dx_n$$

$J$ , правда, определён не всегда — иногда какая-то промежуточная функция может быть не интегрируема по Риману — Дарбу.

$J$  корректно определена для некоторой совокупности функций, которые образуют линейное пространство.

Рассмотрим  $K = \delta_1 \times \cdots \times \delta_n \subset Q$ . Тогда для  $\chi_K$  — характеристической функции  $K$  —  $J$  определён, причём  $J(\chi_K) = |\delta_1| \cdot \dots \cdot |\delta_n| = V_n(K)$ .

Отсюда видно, что так как  $\chi_Q = \sum_{j=1}^k \chi_{Q_j}$ , то  $V_n(Q) = \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$ .  $\square$

Пусть  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  — аддитивная функция множеств.  $\phi$  называется *счётно аддитивной*, если для  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$  верно  $a = \bigsqcup_{j=1}^\infty a_j \Rightarrow \phi(a) = \sum_{j=1}^\infty \phi(a_j)$ .

**Теорема 1.1.1.** Объём в  $\mathbb{R}^n$  — счётно аддитивная функция на  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  (и на  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  тоже, но пока не надо).

*Доказательство.*

**Лемма 1.1.2.** Пусть  $Q_1, \dots, Q_k, Q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

1. Если  $Q_1, \dots, Q_k$  попарно не пересекаются, и  $\forall j : Q_j \subset Q$ , то  $\sum_{j=1}^k V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$ .

2. Если  $Q \subset \bigcup_{j=1}^k Q_j$  (условий на дизъюнктность нет), то  $V_n(Q) \leq \sum_{j=1}^k V_n(Q_j)$ .

*Доказательство леммы.* 1.  $\sum_{j=1}^k \chi_{Q_j} \leq \chi_Q$  (поточечно), применяем ранее определённый функционал  $J$ .

2.  $\sum_{j=1}^k \chi_{Q_j} \geq \chi_Q$  (поточечно), применяем ранее определённый функционал  $J$ .  $\square$

Пусть  $Q, Q_j \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ , где  $j \in \mathbb{N}$ ,  $Q = \bigsqcup_{j=1}^\infty Q_j$ .

- Рассмотрим  $k$  параллелепипедов  $Q_1, \dots, Q_k \subset Q$ . Применяя лемму, получаем  $\sum_{j=1}^k V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$ . Это верно для каждого  $k$ , переходя к пределу сразу получаем  $\sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j) \leq V_n(Q)$ .

*Замечание.* Эта часть верна для любой аддитивной меры.

- Докажем обратное:  $\sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j) \geq V_n(Q)$ .

Пусть  $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ . Если  $\exists s : I_s = 0$ , то доказывать нечего.

Выберем  $\varepsilon > 0$ . Существуют замкнутые отрезки  $\overline{I}_1, \dots, \overline{I}_s$ , такие, что  $\overline{I}_j \subset I_j$ , причём для  $\overline{Q} = \overline{I}_1 \times \cdots \times \overline{I}_n$  его объём уменьшился несильно:  $V_n(Q) \leq V_n(\overline{Q}) + \varepsilon$ .

Аналогично раздуем составляющие параллелепипеды:  $\forall j \in \mathbb{N}$  построим  $\widetilde{Q}_j = \widetilde{I}_1 \times \cdots \times \widetilde{I}_n$ , так что открытый интервал  $\widetilde{I}_j \supset I_j$ , причём  $V_n(\widetilde{Q}_j) \leq V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ .

Теперь замкнутый параллелепипед покрывается открытыми, значит, можно выбрать конечное подпокрытие, сразу получив оценку (для некоего  $k \in \mathbb{N}$ )

$$V_n(Q) - \varepsilon \leq \sum_{j=1}^k \left( V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \leq \sum_{j=1}^\infty \left( V_n(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right)$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем требуемое  $V_n(Q) \leq \sum_{j=1}^\infty V_n(Q_j)$ .  $\square$

## 1.2 Обобщения

### 1.2.1 Область задания меры (системы множеств)

Пусть  $X$  — множество,  $\mathcal{A}$  — система его подмножеств ( $\emptyset \in \mathcal{A}$ ).

**Определение 1.2.1** (Кольцо). Система множеств  $\mathcal{A}$ , такая что  $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b), (a \cup b), (a \setminus b) \in \mathcal{A}$ .

*Пример* (Кольцо). Объединения конечного числа отрезков (или даже параллелепипедов (теорема 1.2.1)) ( $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  или  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ ).

**Определение 1.2.2** (Алгебра). Кольцо  $\mathcal{A}$ , такое что  $X \in \mathcal{A}$ .

*Замечание.* В алгебре  $\forall a \in \mathcal{A} : a^c \in \mathcal{A}$ . В частности, из-за законов де Моргана достаточно проверять только одно из  $(a \cup b), (a \cap b) \in \mathcal{A}$

**Определение 1.2.3** (Полукольцо). Система множеств  $\mathcal{A} \subset 2^X$ , такое что  $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a \cap b) \in \mathcal{A}$ , а разность  $(a \setminus b)$  есть объединение конечного числа попарно непересекающихся подмножеств из  $\mathcal{A}$ .

*Пример* (Полукольцо). Отрезки и конечные отрезки (или даже параллелепипеды (теорема 1.2.1)) ( $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  или  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ ).

Пусть  $X, Y$  — множества,  $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$  — полукольца.

**Определение 1.2.4** (Обобщённый прямоугольник). Произведение  $a \times b$ , где  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ .

**Теорема 1.2.1.** Множество обобщённых прямоугольников  $\mathcal{C} = \{a \times b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$  есть полукольцо в  $X \times Y$ .

*Доказательство.* •  $\emptyset \in \mathcal{C} : \emptyset \times \emptyset = \emptyset$ .

- $(a_1 \times b_1) \cap (a_2 \times b_2) = (a_1 \cap a_2) \times (b_1 \cap b_2)$ , поэтому  $\mathcal{C}$  замкнуто относительно пересечения.
- Рассмотрим  $u, v \in \mathcal{C}$ .  $u \setminus v = u \setminus (u \cap v)$ , поэтому можно считать, что  $v \subset u$ .

Пусть  $u = a_1 \times b_1, v = a_2 \times b_2$ . Так как  $v \subset u$ , то  $b_2 \subset b_1, a_2 \subset a_1$ . Пусть  $a_1 \setminus a_2 = \bigsqcup_{s=1}^n e_s$ ,  
 $b_1 \setminus b_2 = \bigsqcup_{t=1}^m f_t$ .

Несложно видеть, что  $u \setminus v = \left( a_2 \sqcup \bigsqcup_{s=1}^n e_s \right) \times \left( b_2 \sqcup \bigsqcup_{t=1}^m f_t \right) \setminus (a_2 \times b_2)$ , что есть объединение  $(n+1)(m+1) - 1$  попарно непересекающихся обобщённых прямоугольников.  $\square$

*Замечание.* Даже если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — кольца или алгебры, множества обобщённых прямоугольников могут всё равно образовывать лишь полукольцо.

**Определение 1.2.5** (Мера на полукольце). Неотрицательная аддитивная функция множества (возможно, принимающая значения  $+\infty$ ).

Пусть  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$  — полукольцо конечных отрезков,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — нестрогая возрастающая функция.

**Определение 1.2.6** (Квазидлина, порождённая  $f$ ).  $\mu_f(\langle a, b \rangle) \stackrel{\text{def}}{=} f(b) - f(a)$ .

Эта квазидлина, понятное дело, аддитивна, но не для всех функций она счётно аддитивна.

*Контрпример.* Пусть  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ . Тогда  $1 = f([0, 1)) \neq \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\left[1 - \frac{1}{2^i}, 1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)\right) = 0$

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$  — полукольца,  $\mu$  и  $\nu$  на них — (конечные) меры, определим меру на произведении

$$\gamma(u \times v) := \mu(u) \cdot \nu(v)$$

Утверждается, что  $\gamma$  аддитивна (теорема 1.3.1)



# Лекция II

8 сентября 2023 г.

Пусть  $\mathcal{A}$  — полукольцо подмножеств  $2^X$ .

**Определение 1.2.7** (Кольцо, порождённое  $\mathcal{A}$ ).  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigsqcup_{j=1}^k d_j \mid d_j \in \mathcal{A} \right\}$  — всевозможные конечные дизъюнктные объединения.

**Лемма 1.2.1.**  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  есть кольцо подмножеств  $2^X$ .

*Доказательство.* Пусть  $u = c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s; v = d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t$ .

- Проверим, что  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  замкнуто относительно пересечения. В самом деле,

$$u \cap v = \bigsqcup_{i,j} (c_i \cap d_j)$$

- Проверим, что  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  замкнуто относительно разности: индукция по  $t$ .

База:  $t = 1$ .

$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus d_1 = (c_1 \setminus d_1) \sqcup \dots \sqcup (c_s \setminus d_1)$$

Переход:

$$(c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_t) = \left( (c_1 \sqcup \dots \sqcup c_s) \setminus (d_1 \sqcup \dots \sqcup d_{t-1}) \right) \setminus d_t$$

- Проверим, что  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  замкнуто относительно объединения.

$$u \cup v = (u \setminus v) \sqcup (v \setminus u) \sqcup (u \cap v)$$

□

Пусть  $\mathcal{B} \subset 2^X$  — полукольцо. Среди всех колец,  $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$  есть наименьшее — это их пересечение.

**Факт 1.2.1.** Это кольцо  $\mathcal{C}$  получается, как  $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ .

## 1.3 Поговорим про интеграл

$\mathcal{A} \subset 2^X$  — полукольцо,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  — мера.

**Определение 1.3.1** (Простая функция (относительно  $\mathcal{A}$ )). Функция вида  $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i}$ , где  $e_i \in \mathcal{A}$ ,  $\forall 1 \leq i < j \leq k : e_i \cap e_j = \emptyset$ .

Определим «хиленький интеграл», который пока не будем обозначать  $\int$ :

**Определение 1.3.2** (Интеграл от простой функции по мере  $\mu$ ).  $I_\mu(f) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(e_j)$ , если это имеет смысл (считается, что  $0 \cdot \infty = 0$ , но  $(-\infty) + (+\infty)$  не определено).

**Лемма 1.3.1.** Интеграл от простой функции не зависит от её представления в виде суммы.

*Доказательство.* Пусть  $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{e'_j}$ , где  $\alpha_i, \beta_j \neq 0$ .

Обозначим  $A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  (кстати, носитель  $\text{supp } f \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ ). Очевидно,  $(e_1, \dots, e_k)$ , как и  $(e'_1, \dots, e'_m)$  — разбиения  $A$ . У них есть общее измельчение  $e''$ , причём на каждом

элементе  $e''_{i,j} := e_i \cap e'_j$  выполняется  $\alpha_i = \beta_j$ , откуда оба интеграла от простой функции — через  $e$  и через  $e'$  — совпадают с определением через  $e''$ :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(e_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^m e_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(e_{i,j}) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^k e_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(e'_j)$$

Если какой-то  $e_i$  бесконечен, то один из конечного числа кусочков, на которые мы его разобьём ( $e_i \cap e'_j$ ) тоже будет бесконечным, поэтому в случае бесконечностей (если обе суммы определены) обе суммы будут бесконечностями одного знака.  $\square$

*Свойства* (Интеграл от простой функции).

- $I_\mu(c \cdot f) = c \cdot I_\mu(f)$
- Если  $f, g$  — простые функции, то  $f + g$  — тоже простая, причём  $I_\mu(f + g) = I_\mu(f) + I_\mu(g)$  (если в сумме двух интегралов нет бесконечностей разных знаков).

*Доказательство.* Пусть  $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{e_i}$ ;  $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{e'_j}$ , где  $\alpha_i, \beta_j \neq 0$ .

Положим  $A := \bigsqcup_i e_i$ ;  $B := \bigsqcup_j e'_j$ . Рассмотрим  $(A \setminus B), (B \setminus A), (A \cap B)$  — все они лежат в  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ .

Будем считать, что  $(e_1, \dots, e_k)$ , как разбиение  $A$ , измельчено так, что оно уважает разбиение  $(A \setminus B) \sqcup (A \cap B) = A$ .

Аналогично считаем, что  $e'$  уважает разбиение  $(B \setminus A) \sqcup (B \cap A) = B$ .

Теперь  $\mathcal{E} := \{e_i \in \{e_i\}_{i=1}^k \mid e_i \subset A \cap B\}$  и  $\mathcal{E}' := \{e'_j \in \{e'_j\}_{j=1}^m \mid e_j \subset A \cap B\}$  — разбиения  $A \cap B$ . Измельчим те элементы, которые попали в  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$ , теперь ещё считаем, что  $e$  и  $e'$  уважают друг друга. Можно считать, что и  $f$ , и  $g$  определены на разбиениях  $\{e_i\}_{i=1}^k \cup \{e'_j\}_{j=1}^m$ , и теперь по определению  $f + g$  является простой функцией, и  $I(f + g) = I(f) + I(g)$ .  $\square$

- Для двух простых интегрируемых функций  $f \leq g \Rightarrow I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$ .

*Доказательство.* Если интегралы — бесконечности одного знака, то доказывать нечего.

Иначе  $I_\mu(g)$  и  $I_\mu(-f)$  не являются бесконечностями разного знака, то есть определено

$$I_\mu(g - f) = I_\mu(g) - I_\mu(f)$$

Но  $(g - f)$  — функция неотрицательная, по определению её интеграл неотрицателен.  $\square$

**Лемма 1.3.2.** Пусть  $\mathcal{A}$  — полукольцо с мерой  $\mu$ ;  $a, a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$ .

- Если  $a_j$  попарно дизъюнкты, причём  $a_j \subset a$ , то  $\sum_{j=1}^k \mu(a_j) \leq \mu(a)$ .
- Если  $a \subset \bigcup_{j=1}^k a_j$  (условий на дизъюнктность нет), то  $\mu(a) \leq \sum_{j=1}^k \mu(a_j)$ .

*Доказательство.* •  $I_\mu(\chi_{\bigcup a_j}) \leq I_\mu(\chi_a)$  так как  $\chi_{\bigcup a_j} \leq \chi_a$ .

- $I_\mu(\chi_{\bigcup a_j}) \geq I_\mu(\chi_a)$ , так как  $\chi_{\bigcup a_j} \geq \chi_a$ .  $\square$

**Теорема 1.3.1.** Пусть  $\mathcal{A} \subset 2^X, \mathcal{B} \subset 2^Y$  — полукольца обобщённых прямоугольников. Положим  $\mathcal{C} := \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , это полукольцо подмножеств  $X \times Y$ .

Пусть  $\mu$  — мера на  $\mathcal{A}$ ,  $\nu$  — мера на  $\mathcal{B}$ . Определим произведение мер  $(\mu \otimes \nu)(a \times b) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(a)\nu(b)$ .

Утверждается, что  $\mu \otimes \nu$  — мера на  $\mathcal{C}$ .

*Доказательство.* Докажем аддитивность. Пусть  $P = a \times b$ , причём  $P = \bigsqcup_{j=1}^k P_j$ , где  $P_j = a_j \times b_j$ .

Проверим, что  $(\mu \otimes \nu)(P) \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^k (\mu \otimes \nu)(P_j)$ .

Разделим переменные:  $\chi_{c \times d}(s, t) = \chi_c(s) \cdot \chi_d(t)$ .

Дано, что  $\chi_P = \sum_{j=1}^k \chi_{P_j}$ , то есть  $\chi_a(s)\chi_b(t) = \sum_{j=1}^k \chi_{a_j}(s)\chi_{b_j}(t)$ .

Интегрируем ( $I_{\nu, t}$  означает интеграл по мере  $\nu$  функции от переменной  $t$  при фиксированном  $s$ ):

$$\begin{aligned} I_{\nu, t}(\chi_a(s)\chi_b(t)) &= \sum_{j=1}^k I_{\nu, t}(\chi_{a_j}(s) \cdot \chi_{b_j}(t)) \Rightarrow \chi_a(s)\nu(b) = \sum_{j=1}^k \chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j) \\ I_{\mu}(\chi_a(s)\nu(b)) &= \sum_{j=1}^k I_{\mu}(\chi_{a_j}(s) \cdot \nu(b_j)) \Rightarrow \mu(a)\nu(b) = \sum_{j=1}^k \mu(a_j)\nu(b_j) \end{aligned}$$

Данное доказательство также допускает бесконечные меры. □

*Замечание.* Пусть  $\mu$  — мера на полукольце  $\mathcal{A}$ . Для  $e \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$  положим  $\bar{\mu}(e) = I_{\mu}(\chi_e)$ .

Введённая  $\bar{\mu}$  — мера на  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ , понятно, что это единственно возможное продолжение — единственная (аддитивная) мера на  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ , такая, что её сужение на  $\mathcal{A}$  совпадает с  $\mu$ .

*Замечание.* Если меру определять на кольце, а не на полукольце, то аддитивность достаточно проверять для двух множеств:  $e_1, e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \Rightarrow e_1 \cup e_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ .

### 1.3.1 Про счётную аддитивность

**Определение 1.3.3** (Регулярная мера  $\mu$ ). Мера, удовлетворяющая условиям:

1.  $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \inf \{ \mu(U) \mid U \supset a; U \text{ открыто}; U \in \mathcal{A} \}$ .
2.  $\forall a \in \mathcal{A} : \mu(a) = \sup \{ \mu(K) \mid K \subset a; K \text{ компактно}; K \in \mathcal{A} \}$ .

*Пример* (Регулярная мера). Мера Лебега на  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

*Предостережение.* Для полукольца возможно бесконечных параллелепипедов теорема Александера не применима:  $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  не регулярно сверху, всякий параллелепипед, содержащий  $\mathbb{R} \times \{0\}$  уже имеет бесконечную меру.

**Теорема 1.3.2** (А. Д. Александров). Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $\mathcal{A} \subset 2^X$  — полукольцо,  $\mu$  — регулярная мера на  $\mathcal{A}$ .

Утверждается, что  $\mu$  счётно аддитивна.

*Доказательство.* Рассмотрим  $a \in \mathcal{A}, \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ . Пусть  $a = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} a_j$ . Для доказательства  $\mu(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)$  покажем неравенства в обе стороны.

- $\forall k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^k \mu(a_j) \leq \mu(a)$  (лемма 1.3.2), производим предельный переход.
- Если  $\mu(a_j) = \infty$ , или  $\mu(a) = 0$ , то доказывать нечего.

Выберем  $\varepsilon > 0$ . Найдём такие  $U_j, K \in \mathcal{A}$ , что  $U_j$  открыты,  $K$  компактно,  $U_j \supset a_j, K \subset a$ , причём  $\mu(U_j) \leq \mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$  и  $\mu(K) \geq \mu(a) - \varepsilon$ .

Так как из открытого покрытия компакта можно выделить конечное подпокрытие (и пусть  $N$  — максимальный номер элемента подпокрытия), то

$$\mu(a) - \varepsilon \leq \mu(K) \leq \sum_{j=1}^N \mu(U_j) \leq \sum_{j=1}^N \left( \mu(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j) + \varepsilon$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем необходимое.  $\square$

*Примеры* (Счётно-аддитивные меры).

- Пусть  $X$  — (возможно бесконечное) множество,  $\mathcal{A}$  — семейство всех его конечных подмножеств. Можно определить  $\mu(a) = \#(a)$  — мощность множества  $a \in \mathcal{A}$ .

Она счётно-аддитивная, так как если  $a = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} a_j$ , причём  $a \in \mathcal{A}$ , то почти все (кроме конечного числа)  $a_j = \emptyset$ .

- Можно продолжить эту меру на  $2^X$ :

$$\mu(b) = \begin{cases} \#(b), & b \text{ конечно} \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Пусть  $\{\xi_x\}_{x \in X} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  — числовое семейство. Можно определить  $\nu : 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ ,  $\nu(e) = \sum_{x \in e} \xi_x$ .

Если семейство суммируемо, то мера конечна.

## Лекция III

20 сентября 2023 г.

Вспомним, что мы определяли квазидлину  $\mu_f(\langle a, b \rangle) = f(b) - f(a)$  для возрастающей функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (определение 1.2.6). Это функция может быть не счётно аддитивной, что случается, если  $f$  разрывна.

Поправим это определение, чтобы мера стала счётно-аддитивной. Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — возрастающая функция.

Рассмотрим  $\mathcal{P}(\langle a, b \rangle)$  — полукольцо промежутков, содержащихся в  $\langle a, b \rangle$ , и произвольно доопределим  $f$  на некотором открытом интервале, содержащем  $\langle a, b \rangle$  (скажем, если  $a \in \langle a, b \rangle$ , то есть  $\langle a, b \rangle$  замкнут слева, то положим  $f(a - \varepsilon) = f(a) - \varepsilon$  для  $\varepsilon \in (0, 1)$ ).

**Определение 1.3.4** (Стилтьесова длина). Длина, определённая по формуле

$$\mu_f(\langle c, d \rangle) = \begin{cases} f(d-) - f(c-), & \langle c, d \rangle = [c, d) \\ f(d-) - f(c+), & \langle c, d \rangle = (c, d) \\ f(d+) - f(c+), & \langle c, d \rangle = (c, d] \\ f(d+) - f(c-), & \langle c, d \rangle = [c, d] \end{cases}$$

где  $f(x_0+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  и  $f(x_0-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ .

**Предложение 1.3.1.** Стилтьесова длина счётно аддитивна.

*Доказательство.* Выполняется теорема Александрова. Проверим, например, что для полуинтервала  $[c, d)$  мера регулярна.

Рассмотрим  $\varepsilon > 0$ , для открытого подмножества, содержащего  $[c, d)$  выберем  $(c - \delta, d)$ . Для достаточно маленьких  $\delta$ :  $f((c - \delta)+) > f(c-) - \varepsilon$ . В качестве компактного подмножества, содержащегося в  $[c, d)$ , выберем  $[c, d - \delta]$ . При достаточно маленьких  $\delta$ :  $f((d - \delta)+) > f(d-) - \varepsilon$ .

Также можно проверить регулярность для бесконечных промежутков.  $\square$

### 1.3.2 Продолжение меры

Продолжать можно только счётно-аддитивные меры, иначе будет неоднозначно.

**Определение 1.3.5** ( $\sigma$ -алгебра). Такая алгебра множеств  $\mathcal{A} \subset 2^X$ , что она замкнута относительно счётных операций: если семейство  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  лежит в  $\mathcal{A}$ , то  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$  и  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Теорема 1.3.3.** Пусть  $\mathcal{C} \subset 2^X$  — система подмножеств  $X$ . Тогда в  $X$  есть наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{C}$ .

*Доказательство.* Пересечение любого множества  $\sigma$ -алгебр —  $\sigma$ -алгебра. Хотя бы одна есть — это  $2^X$ . Тогда в качестве наименьшей подойдёт пересечение всех  $\sigma$ -алгебр, содержащих  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Теорема 1.3.4.** Пусть  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  — полукольцо всех конечных прямоугольных параллелепипедов, а  $\mathcal{A}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

Тогда объём на  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  единственным образом продолжается до счётно аддитивной меры  $\lambda_n$  —  $n$ -мерной меры Лебега на  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Мы это докажем здесь (теорема 1.3.6). Сейчас приведём схему доказательства.

- Обозначим  $n$ -мерный объём на параллелепипедах из  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  за  $v_n$ . Построим  $v_n \rightsquigarrow v_n^*$ , заданную на  $2^{\mathbb{R}^n}$ , которая не будет даже аддитивной.

Тем не менее, для всякого  $P \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ :  $v_n^*(a) = v_n(P)$

- Теперь сузим  $v_n^*$  на некоторую  $\sigma$ -алгебру, содержащую  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ , причём там эта функция будет уже и аддитивной, и счётно аддитивной.  $\square$

**Факт 1.3.1.** Все открытые, а значит, и все замкнутые множества, лежат в наименьшей  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , содержащей  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ .

*Доказательство.* Открытое множество представимо, как объединение кубов с рациональными координатами вершин, содержащихся в нём.  $\square$

Пусть  $Y$  — топологическое пространство.

**Определение 1.3.6** (Борелевская  $\sigma$ -алгебра). Наименьшая  $\sigma$ -алгебра подмножеств множества  $Y$ , содержащая все открытые множества. Обозначают  $\mathcal{B}(Y)$ .

*Замечание.* Выше определённая  $\mathcal{A}$  совпадает с  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

**Факт 1.3.2.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра подмножеств множества  $X$ . Следующие утверждения эквивалентны.

1.  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра.
2. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$  верно, что  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .
3. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$  верно, что  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .
4. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}$ , таких что  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  верно, что  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .
5. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}$ , таких, что  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  верно, что  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .
6. Для всех  $A_i \in \mathcal{A}$ , таких, что  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для  $i \neq j$  верно, что  $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .

*Доказательство.*  $2 \iff 3$  Закон де Моргана.

$1 \iff (2 \wedge 3)$  По определению.

$2 \Rightarrow 4$  Очевидно.

$4 \Rightarrow 2$  Положим  $\bar{A}_i := A_1 \cup \dots \cup A_i$ . Тогда  $\bar{A}_i$  возрастают по включению, и  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{A}_i \in \mathcal{A}$ .

$4 \iff 5$  Тоже закон де Моргана.

$4 \Rightarrow 6$  Пусть  $A_i \in \mathcal{A}$ , причём  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ . Выберем  $\tilde{A}_i := A_1 \cup \dots \cup A_i$ . Согласно (4)  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i \in \mathcal{A}$ .

$6 \Rightarrow 4$  Пусть  $A_i \in \mathcal{A}$ , причём  $A_i \subset A_{i+1}$ . Положим  $e_1 = A_1$ ,  $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$  для  $j \geq 2$ . Тогда  $e_i \cap e_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ , и  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .  $\square$

**Факт 1.3.3.** Пусть  $\mathcal{A} \subset 2^X$  —  $\sigma$ -алгебра,  $\mu$  — мера на  $\mathcal{A}$ . Следующие условия эквивалентны.

1.  $\mu$  счётно аддитивна.

2. Если  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ , то  $\mu\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ .

3. Если  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , то  $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$ .

*Доказательство*  $\iff 2$  Так как  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра, то  $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  автоматически лежит в  $\mathcal{A}$ , и 1 тавтологично 2.

$2 \Rightarrow 3$  Пускай  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ . Введём  $e_1 = A_1$ ,  $e_j = A_j \setminus A_{j-1}$  для  $j \geq 2$ .  $e_i \cap e_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ . Тогда  $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

$3 \Rightarrow 2$  То же самое в обратном порядке.  $\square$

*Предостережение.* Монотонность по убывающим последовательностям не выполняется:

Рассмотрим на кольце  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  убывающие по включению множества  $A_n := (n, +\infty)$ . Несмотря на то, что  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , всё-таки  $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$ .

**Теорема 1.3.5.** Если  $B_i \in \mathcal{A}$ ,  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ , причём  $\mu(B_1) < +\infty$ , то  $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j)$ .

*Доказательство.* Положим  $A_i = B_1 \setminus B_i$ .

Тогда  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = B_1 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ , и  $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(B_1) - \mu(B_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$

Так как  $\mu(B_1)$  конечна, то все производимые вычитания справедливы — не происходит вычитания бесконечности из бесконечности.  $\square$

*Замечание.* Если мера конечна, то справедливо и обратное.

Пусть  $X$  — множество,  $\mathcal{P}$  — полукольцо его подмножеств,  $\mu$  — мера на  $\mathcal{P}$  (аддитивная, но не факт, что счётно-аддитивная).

**Определение 1.3.7** (Внешняя мера, построенная по  $\mu$ ). Функция  $\mu^*$ , заданная на  $2^X$ , определяемая по формуле

$$\mu^*(e) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(a_j) \mid a_j \in \mathcal{P}, e \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_j \right\}$$

*Свойства.*

- $\mu^*(\emptyset) = 0$ . Так, покрытие счётным количеством пустых множеств имеет суммарную меру 0.
- $e_1 \subset e_2 \Rightarrow \mu^*(e_1) \leq \mu^*(e_2)$  — монотонность.
- Внешняя мера совсем не факт, что является мерой (то есть аддитивна). Тем не менее, верна *счётная полуаддитивность*:  $e \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} e_i \Rightarrow \mu^*(e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(e_i)$ .

*Доказательство.* Если хотя бы одно из  $\mu^*(e_i)$  бесконечно, то доказывать нечего. Далее считаем, что  $\forall i : \mu^*(e_i)$  конечно.

Выберем  $\varepsilon > 0$ . По определению внешней меры  $\forall i, k \in \mathbb{N} : \exists a_{i,k} \in \mathcal{P}$ , такие, что  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} a_{i,k} \supset e_i$ , причём  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leq \mu^*(e_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ .

Тогда  $e \subset \bigcup_{i,k \in \mathbb{N}} a_{i,k}$  и  $\mu^*(e) \leq \sum_{i,k} \mu(a_{i,k}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(a_{i,k}) \leq \sum_i \mu^*(e_i) + \varepsilon$ .  $\square$

- Если  $\mu$  счётно аддитивна, то  $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$ .

*Доказательство.* Для  $b \in \mathcal{P} : \mu^*(b) \leq \mu(b)$ , так как можно выбрать покрытие из одного элемента.

Докажем, что  $\mu(b) \leq \mu^*(b)$ . Рассмотрим кольцо  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$  — совокупность дизъюнктивных объединений  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_s$ , где  $e_i \in \mathcal{P}$ . Мера  $\mu$  единственным образом продолжается до меры  $\bar{\mu}$  на  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ .

**Лемма 1.3.3.**  $\forall e \subset X : \mu^*(e) = \mu^\Delta(e) := \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(c_j) \mid \{c_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P} \text{ и } e \subset \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} c_i \right\}$

*Доказательство леммы.*  $\mu^*(e) \leq \mu^\Delta(e)$ , так как всякое дизъюнктивное покрытие является покрытием.

Если  $e \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i$ , то можно рассмотреть дизъюнктивное покрытие множествами  $\bar{a}_i := a_i \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_{i-1})$ .

Так как  $\bar{a}_j \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$  и  $\bar{a}_j \subset a_j$ , то  $\bar{\mu}(\bar{a}_j) \leq \mu(a_j)$ .

Согласно свойству  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ :  $\bar{a}_j = \bigsqcup_{s=1}^{k_j} e_{j,s}$ , где при данном  $j$  все  $e_{j,s}$  попарно не пересекаются. Но при разных  $j$  они тем более не пересекаются, они лежат в разных  $\bar{a}_j$ .

Таким образом,  $\bigsqcup_{j,s} e_{j,s} \supset e$ , откуда  $\mu^\Delta(e) \leq \sum_{j,s} \mu(e_{j,s}) = \sum_j \bar{\mu}(\bar{a}_j) \leq \sum_j \mu(a_j)$ . Переходя к инфимуму, получаем  $\mu^\Delta(e) \leq \mu^*(e)$ .  $\square$

Используя лемму, рассмотрим произвольное дизъюнктивное покрытие  $e_j \in \mathcal{P}$  такое, что  $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} e_j \supset e$ . Введём  $\tilde{e}_j := e_j \cap e$ . Для них  $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{e}_j = e$ .

Согласно счётной аддитивности  $\mu(e) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{e}_j) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(e_j)$ . Переходя к инфимуму, получаем искомое.  $\square$

*Контрпример* (Счётная аддитивность важна). Пусть  $l_f$  — квазидлина, порождённая функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Покажем, что внешняя мера  $l_f^*$  везде равна нулю. Рассмотрим счётное покрытие прямой  $\mathbb{R} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} [n, n+1) \sqcup \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} [-2^n, -2^{n-1})$ . Квазидлины всех составляющих полуинтервала равны 0, значит, внешняя мера прямой равна 0, но тогда по монотонности и внешние меры всех подмножеств тоже равны 0.

## Лекция IV

27 сентября 2023 г.

### 1.3.3 Предмера

Пусть  $X$  — множество.

Вещи, обладающие свойствами внешней меры будут возникать у нас разными способами, поэтому удобно уже сейчас обобщить это понятие, аксиоматизировав его.

**Определение 1.3.8** (Предмера). Функция  $\gamma : 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , обладающая свойствами

1.  $\gamma(\emptyset) = 0$ .
2. Монотонность  $a \subset b \Rightarrow \gamma(a) \leq \gamma(b)$ .
3. Счётная полуаддитивность  $a \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_j \Rightarrow \gamma(a) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a_j)$ .

*Замечание.* Из 3. следует 2., проверяется выбором  $a_i = \begin{cases} b, & i = 1 \\ \emptyset, & i > 1 \end{cases}$ . Более того, можно не требовать положительности, она следует из монотонности по отношению к пустому множеству.

**Определение 1.3.9** ( $\gamma$ -измеримое множество  $e \subset X$ ).

$$\forall a \subset X : \gamma(a) = \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e) = \gamma(a \cap e) + \gamma(a \cap e^c)$$

**Теорема 1.3.6** (Лебег — Каратеодори). Совокупность  $\Sigma$  всех  $\gamma$ -измеримых множеств образует  $\sigma$ -алгебру, на которой функция  $\gamma|_{\Sigma}$  счётно-аддитивна.

*Дополнение.* Если  $\gamma = \mu^*$ , где  $\mu$  — мера на полукольце  $\mathcal{P}$ , то все множества из  $\mathcal{P}$  автоматически  $\gamma$ -измеримы.

*Дополнение.* Если  $\mu$  счётно аддитивна на исходном полукольце  $\mathcal{P}$ , то  $\mu^*|_{\mathcal{P}} = \mu$ .

*Доказательство.* • Покажем, что  $\Sigma$  — алгебра множеств.

- Определение симметрично относительно  $e$  и  $e^c$ , поэтому  $e \in \Sigma \iff e^c \in \Sigma$ .
- $\emptyset \in \Sigma$  прямо из определения. Используя предыдущий пункт,  $X \in \Sigma$ .
- Пусть  $e_1, e_2 \in \Sigma$ . Проверим, что  $e_1 \cap e_2 \in \Sigma$ . Рассмотрим произвольное  $a \subset X$ . Запишем измеримость для  $e_1$  при пересечении с  $a$  и измеримость для  $e_2$  при пересечении с  $a \cap e_1$ .

$$\begin{aligned} \gamma(a) &= \gamma(a \cap e_1) + \gamma(a \cap e_1^c) \\ \gamma(a \cap e_1) &= \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c) \end{aligned}$$

Отсюда подстановкой получаем

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap e_1 \cap e_2) + \underbrace{\gamma(a \cap e_1 \cap e_2^c) + \gamma(a \cap e_1^c)}_{\text{хотим показать, что это } \gamma(a \cap (e_1 \cap e_2)^c)}$$



Записав измеримость  $e_1$  при пересечении с  $a \cap (e_1^{\mathbb{G}} \cup e_2^{\mathbb{G}})$ , получаем

$$\begin{aligned}\gamma(a \cap (e_1^{\mathbb{G}} \cup e_2^{\mathbb{G}})) &= \gamma(a \cap (e_1^{\mathbb{G}} \cup e_2^{\mathbb{G}}) \cap e_1) + \gamma(a \cap (e_1^{\mathbb{G}} \cup e_2^{\mathbb{G}}) \cap e_1^{\mathbb{G}}) = \\ &= \gamma(a \cap e_1 \cap e_2^{\mathbb{G}}) + \gamma(a \cap e_1^{\mathbb{G}})\end{aligned}$$

– Так как  $(e_1 \cup e_2) = (e_1^{\mathbb{G}} \cap e_2^{\mathbb{G}})^{\mathbb{G}}$  и  $(e_1 \setminus e_2) = e_1 \cap e_2^{\mathbb{G}}$ , то  $\Sigma$  — действительно алгебра.

- Проверим «усиленную аддитивность»: для произвольного  $a \subset X$ ,  $b_1, b_2 \in \Sigma$ ,  $b_1 \cap b_2 = \emptyset \Rightarrow$

$$\gamma(a \cap (b_1 \sqcup b_2)) = \gamma(a \cap b_1) + \gamma(a \cap b_2)$$

Данный факт потребуется для доказательства того, что  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра.

Доказательство напрямую следует из измеримости  $b_1$  при пересечении с  $a \cap (b_1 \cup b_2)$ .

Отсюда по индукции видно, что для попарно непересекающихся  $b_1, \dots, b_n \in \Sigma$ :

$$\gamma\left(a \cap \bigsqcup_{j=1}^n b_j\right) = \sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j)$$

- Проверим, что  $\Sigma$  является  $\sigma$ -алгеброй. Для этого достаточно проверить, что для счётного семейства  $b_i \in \Sigma$ :  $b := \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \in \Sigma$ .

Чтобы доказать измеримость множества  $e$ , достаточно проверить неравенство  $\gamma(a) \geq \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$ , потому что неравенство в другую сторону следует из счётной полуаддитивности. Дополнительно можно считать, что  $\gamma(a)$  конечно.

Выберем произвольное  $a \in X$ , для него

$$\gamma(a) = \gamma(a \cap (b_1 \sqcup \dots \sqcup b_n)) + \gamma(a \setminus (b_1 \sqcup \dots \sqcup b_n)) \geq \left( \sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j) \right) + \gamma(a \setminus b)$$

Переходя к пределу  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$\gamma(a) \geq \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j) \right) + \gamma(a \setminus b)$$

Так как  $a \cap b = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (a \cap b_j)$ , то из счётной полуаддитивности  $\gamma(a \cap b) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$ . Отсюда

$$\gamma(a) \geq \left( \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(a \cap b_j) \right) + \gamma(a \setminus b) \geq \gamma(a \cap b) + \gamma(a \setminus b)$$

- Проверим, что  $\gamma|_{\Sigma}$  — «усиленно счётно-аддитивная мера», то есть для счётного семейства дизъюнктивных  $b_j \in \Sigma$  ( $b := \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} b_j$ ) и произвольного  $\forall a \in X$ :

$$\gamma\left(a \cap \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} b_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$$

При  $a = X$  свойство обращается в обычную счётную аддитивность, но усиленная даётся даром, так что докажем и её тоже.

С одной стороны, из счётной аддитивности  $\gamma$ :  $\gamma(a \cap b) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(a \cap b_j)$ . С другой стороны,

$$\gamma(a \cap b) \geq \gamma(a \cap (b_1 \cup \dots \cup b_n)) = \sum_{j=1}^n \gamma(a \cap b_j)$$

и можно перейти к пределу по  $n$ .

- Докажем первое дополнение.

Достаточно показать, что для любого  $e \in \mathcal{P}, a \in X$ :  $\mu^*(a) \geq \mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e)$ , обратное следует из полуаддитивности внешней меры.

Рассмотрим произвольное счётное покрытие  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  множества  $a$  элементами множества  $\mathcal{P}$ .

- Во-первых, по определению внешней меры  $\mu^*(a \cap e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(c_i \cap e)$
- Во-вторых, оценим  $\mu^*(a \setminus e)$ .

Каждое  $b_i := c_i \setminus e$  представимо в виде конечного объединения  $b_i = \bigcup_{j=1}^{s_i} d_i^{(j)}$ , где  $d_i^{(j)} \in \mathcal{P}$  попарно дизъюнкты.

$\{d_i^{(j)}\}_{i,j}$  — счётная совокупность множеств из  $\mathcal{A}$ , покрывающая  $a \setminus e$ .

- Таким образом

$$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\left( \mu(c_i \cap e) + \sum_{j=1}^{s_i} \mu(d_i^{(j)}) \right)}_{\mu(c_i)}$$

Переходя к инфимуму по всем покрытиям, получаем

$$\mu^*(a \cap e) + \mu^*(a \setminus e) \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) = \mu^*(a)$$

- Наконец, для доказательства второго дополнения сошлёмся на четвёртый пункт свойств внешней меры (определение 1.3.7).  $\square$

**Определение 1.3.10** (Стандартное продолжение меры  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P} \subset 2^X$ ). Построенные данным образом  $\Sigma$ , и сужение  $\mu^*|_{\Sigma}$  — счётно-аддитивная мера на  $\sigma$ -алгебре.

*Примеры.*

- Пусть  $v_n$  — объём на системе конечных  $n$ -мерных прямоугольных параллелепипедов (со сторонами, параллельными координатным осям).

Стандартное продолжение данной меры — *мера Лебега*  $\lambda_n$ , полученное множество  $\Sigma \subset 2^X$  — множество *измеримых по Лебегу* множеств. Все Борелевские множества, разумеется, измеримы по Лебегу (определение 1.3.6), но обратное неверно — измеримых множеств сильно больше (предложение 1.4.1).

- Пусть  $\lambda_f$  — Стильесова длина, порождённая нестрого возрастающей функцией  $f$ . Она счётно аддитивна на полукольце промежутков. Её стандартное продолжение — *мера Лебега — Стильеса*. Здесь полученные измеримые множества — элементы  $\Sigma$  — вообще говоря, могут зависеть от  $f$  (при одной функции, порождающей меру, множество  $x \subset X$  измеримо, но не при другой)

## 1.4 Структура измеримых множеств

### 1.4.1 Множества меры нуль

**Факт 1.4.1.** Пусть  $\gamma$  — предмера на  $X$ , рассмотрим такое подмножество  $e \subset X$ , что  $\gamma(e) = 0$ . Тогда  $e$  является  $\gamma$ -измеримым. В частности, все подмножества  $e$  имеют меру 0 (в частности измеримы).

*Доказательство.* Проверим, что  $\forall a \subset X : \gamma(a) \geq \gamma(a \cap e) + \gamma(a \setminus e)$ .

Это так: по монотонности  $\gamma(a \cap e) \leq \gamma(e) = 0$  и  $\gamma(a \setminus e) \leq \gamma(a)$ .  $\square$

Пусть  $\gamma = \mu^*$ , где  $\mu$  — счётно-аддитивная мера на полукольце  $\mathcal{P}$ .

**Факт 1.4.2.** Множество  $e \subset X$  — множество меры нуль  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists$  счётное семейство  $b_i \in \mathcal{P}$ , таких, что  $\bigcup_i b_i \supset e$ , и  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(b_i) < \varepsilon$ .

*Примеры (Множества меры нуль).*

- Точка.
- Конечное или счётное число точек (например,  $\mathbb{Q}$ ).
- Канторово множество — на  $n$ -м шаге его мера равна  $(\frac{2}{3})^n$ .

**Предложение 1.4.1.** Так как канторово множество континуально, то все его подмножества (коих  $2^{|\mathbb{R}|}$ ) имеют меру нуль и измеримы по Лебегу. Отсюда получаем, что всего измеримых множеств на прямой  $2^{|\mathbb{R}|}$ , так как это уже мощность всех подмножеств прямой.

С другой стороны, Борелевских множеств всего континуум.

*Схема доказательства.* Пусть  $\mathcal{A}_0$  — все интервалы с рациональными границами. Их счётное число. Но это пока даже не алгебра.

Обозначим за  $\mathcal{A}_1$  все их счётные объединения, их континуально. Но это пока не  $\sigma$ -алгебра.

За  $\mathcal{A}_2$  обозначим все счётные пересечения множеств из  $\mathcal{A}_1$ . За  $\mathcal{A}_3$  обозначим все счётные объединения множеств из  $\mathcal{A}_2$ .

И так далее. Заведём трансфинитную индукцию, на первом несчётном ординале всё перестанет меняться. Объединение не более чем континуального числа континуальных множеств континуально.  $\square$

**Определение 1.4.1** (Свойство точек множества  $X$  выполняется почти всюду). Множество точек, где оно не выполняется, имеет меру нуль.

Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо подмножеств  $X$ ,  $\mu$  — счётно аддитивная мера на  $\mathcal{P}$ . Стандартное продолжение часто тоже будем обозначать через  $\mu$ , иногда через  $\bar{\mu}$ .

### 1.4.2 $\sigma$ -множества и $\delta\sigma$ -множества

**Определение 1.4.2** ( $\sigma$ -множество относительно  $\mathcal{P}$ ). Объединение счётного семейства элементов  $\mathcal{P}$ .

Все  $\sigma$ -множества измеримы.

**Предложение 1.4.2.** Если  $e \subset X$   $\mu$ -измеримо, то  $\mu(e) = \inf \{ \mu(b) \mid e \subset b, b — \sigma\text{-множество} \}$ .

*Доказательство.* Так как по определению  $\mu(e) = \mu^*(e) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) \mid c_i \in \mathcal{P}, \bigcup_i c_i \supset e \right\}$  то можно выбрать в качестве  $b := \bigcup_i c_i$ ,  $b$  —  $\sigma$ -множество.  $\square$

*Замечание.* Любое  $\sigma$ -множество  $b$  представимо в виде дизъюнктного объединения счётного числа элементов  $d_j \in \mathcal{P}$ .

Так как  $d_j$  дизъюнкты, то  $\mu(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(d_j)$ , вот такая простая формула меры  $\sigma$ -множества.

**Теорема 1.4.1.** Если  $c$  —  $\mu$ -измеримое множество, и  $\mu(c) < \infty$ , то  $\exists$  убывающая по включению последовательность  $\sigma$ -множеств  $b_k$ , таких, что  $\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k \supset c$  и  $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \mu(c)$ . Иначе говоря, если  $\tilde{c} := \bigcap_{k=1}^{\infty} b_k$ , то  $\mu(\tilde{c} \setminus c) = 0$ .

*Доказательство.* Положим  $\tilde{b}_k$  —  $\sigma$ -множество, такое, что  $\tilde{b}_k \supset c$ , причём  $\mu(\tilde{b}_k) < \mu(c) + \frac{1}{k}$ . Назначим  $b_k = \tilde{b}_1 \cap \dots \cap \tilde{b}_k$ .

**Лемма 1.4.1.** Пересечение двух (а значит, и конечного числа)  $\sigma$ -множеств —  $\sigma$ -множество.

*Доказательство леммы.* Если  $u = \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i, v = \bigcup_{j=1}^{\infty} g_j$ , где  $e_i, g_j \in \mathcal{P}$ , то  $u \cap v = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (e_i \cap g_j)$   $\square$

Согласно лемме  $b_k$  —  $\sigma$ -множество. Так как  $\mu(b_k) \leq \mu(c) + \frac{1}{k}$ , то  $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(b_k) = \mu(c)$ .  $\square$

**Определение 1.4.3** ( $\delta\sigma$ -множество относительно  $\mathcal{P}$ ). Пересечение счётного семейства  $\sigma$ -множеств.

### 1.4.3 $\sigma$ -конечность

**Определение 1.4.4** ( $\sigma$ -конечная мера  $\mu$ ). Такая мера, что  $\exists E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , все  $E_i \in \Sigma$ , все  $\mu(E_i) < +\infty$ , причём  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ .

*Примеры.*

- Считаящая мера на несчётном множестве не является  $\sigma$ -конечной.
- Мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$   $\sigma$ -конечна.

## Лекция V

30 сентября 2023 г.

По-прежнему,  $\mathcal{A}$  — полукольцо,  $\mu$  — мера на  $\mathcal{A}$ , обозначим её стандартное продолжение тоже за  $\mu$ .

**Теорема 1.4.2.** Пусть стандартное продолжение меры  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P}$   $\sigma$ -конечно. Пусть  $d \subset X$  —  $\mu$ -измеримо. Тогда  $\exists \delta\sigma$ -множество  $D \supset d$ , такое, что  $\mu(D \setminus d) = 0$ .

*Доказательство.*

**Лемма 1.4.2.** Пространство  $X$   $\sigma$ -конечно, если и только если  $\exists e_1, e_2, \dots \subset X: \mu(e_i) < \infty$  и  $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i = X$ .

*Доказательство леммы.* Как обычно, если  $\sigma$ -конечно, то  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  в объединении дают  $X$ , рассмотрим  $e_i := E_{i+1} \setminus E_i$ . Наоборот, если даны  $e_i$ , то  $E_i := \bigcup_{j=1}^i e_j$ .  $\square$

Выберем  $\varepsilon > 0$ .

Пусть  $e_i \in \Sigma$  — измеримы, причём  $\mu(e_i) < \infty$  и  $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} e_i = X$ . Обозначим за  $d_i := d \cap e_i$ . Тогда  $\forall i : \mu(d_i) < \infty$ . Согласно (теорема 1.4.1):  $\exists \sigma$ -множество  $D_i : \mu(D_i \setminus d_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ . Тогда подойдёт  $D := \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i : \mu(D \setminus d) < \varepsilon$ .

Но отсюда пересечение  $D$  по всем  $\varepsilon = \frac{1}{N}$  даёт подходящее  $\delta\sigma$ -множество.  $\square$

#### 1.4.4 Полнота

Пусть  $\mathcal{C} \subset 2^X$  —  $\sigma$ -алгебра, на которой задана счётно-аддитивная мера  $\nu$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  — полукольцо, лежащее в  $\mathcal{C}$ ,  $\mu$  — счётно-аддитивная мера на  $\mathcal{A}$ ,  $\bar{\mu}$  — стандартное продолжение меры (на  $\mu$ -измеримые множества, пусть они составляют  $\Sigma$ ).

Пусть  $\nu$  — мера на  $\mathcal{C}$ , такая, что  $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$ , причём  $\mu$  —  $\sigma$ -конечна.

**Определение 1.4.5** (Полная мера). Такая счётно-аддитивная мера  $\nu$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{C}$ , что  $\forall b \in \mathcal{C} : \nu(b) = 0 \Rightarrow \forall a \subset b : a \in \mathcal{C}$ .

**Теорема 1.4.3.** Меры  $\nu$  и  $\bar{\mu}$  совпадают на  $\Sigma \cap \mathcal{C}$ , а если  $\nu$  полна, то  $\Sigma \subset \mathcal{C}$ .

*Доказательство.* • Пусть  $A \in \Sigma$  есть  $\sigma$ -множество относительно полукольца  $\mathcal{A}$ . Тогда  $A = a_1 \sqcup a_2 \sqcup \dots$ , где  $a_j \in \mathcal{A}$

$$\text{Отсюда } A \in \mathcal{C}, \text{ причём } \nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(a_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j) = \bar{\mu}(A).$$

- Пусть  $B \in \Sigma$  —  $\delta\sigma$ -множество относительно полукольца  $\mathcal{A}$ , то есть  $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ , где  $A_k$  —  $\sigma$ -множества (дополнительно считаем, что  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ).

Тогда  $B \in \mathcal{C}$ . Если  $\bar{\mu}(B) < \infty$ , то множества  $A_j$  тоже можно выбрать конечной меры.

$$\text{Тогда } \nu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mu}(A_k) = \bar{\mu}(B).$$

- Пускай  $E \in \mathcal{C} \cap \Sigma$ . Найдётся такое  $\delta\sigma$ -множество  $E_1 \supset E : \bar{\mu}(E_1 \setminus E) = 0$  (если  $E$  бесконечно, то это следует из  $\sigma$ -конечности  $\mu$ ), причём так как  $E_1$  —  $\delta\sigma$ -множество относительно  $\mathcal{A}$ , то про него уже известно, что  $\nu(E_1) = \bar{\mu}(E_1)$ . Тогда  $E_1 \setminus E$  тоже содержится в  $\mathcal{C} \cap \Sigma$ .

**Лемма 1.4.3.** Если  $b \in \mathcal{C} \cap \Sigma$ , причём  $\bar{\mu}(b) = 0$ , то  $\nu(b) = 0$ .

*Доказательство леммы.* Найдётся  $b_1$  —  $\delta\sigma$ -множество, такое, что  $b_1 \supset b$  и  $\bar{\mu}(b_1) = 0$ . Тогда  $\nu(b_1) = \bar{\mu}(b_1) = 0$ , откуда  $\nu(b) \leq \nu(b_1) = 0$ .  $\square$

Лемма влечёт  $\nu(E_1 \setminus E) = 0$ . Отсюда на всех множествах из  $\mathcal{C} \cap \Sigma$  меры  $\bar{\mu}$  и  $\nu$  совпадают.

- Проверим, что если  $\nu$  полна, то  $\Sigma \subset \mathcal{C}$ .

Если  $\bar{\mu}(e) = 0$ , то  $e \in \mathcal{C}$ , так как найдётся  $\delta\sigma$ -множество  $e_1 \supset e : \bar{\mu}(e_1) = 0$ . Из полноты меры  $\nu$  автоматически  $e \in \mathcal{C}$ .

Теперь рассмотрим  $D \in \Sigma$ . Найдётся  $\delta\sigma$ -множество  $\bar{D} \supset D$ , такое, что  $\bar{\mu}(\bar{D} \setminus D) = 0$ , то есть  $\bar{D} \setminus D \in \mathcal{C}$ . Таким образом,  $D \in \mathcal{C}$ , причём  $\nu(\bar{D} \setminus D) = 0$ .  $\square$

### 1.4.5 Двоичные (диадические) кубы

**Определение 1.4.6** (Двоичный отрезок ранга  $n$ ). Отрезок вида  $I_n^{(k)} := [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$  (здесь  $n, k \in \mathbb{Z}$ ).

Заметим, что  $\forall n \in \mathbb{Z} : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_n^{(k)} = \mathbb{R}$ , причём любые двоичные отрезки либо не пересекаются, либо вложены.

**Определение 1.4.7** (Двоичные кубы ранга  $n$ ). Произведения  $I_1 \times \dots \times I_d$ , где  $I_j$  — двоичные отрезки ранга  $n$ .

Любые двоичные кубы тоже либо не пересекаются, либо вложены.

**Теорема 1.4.4.** Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ .

Тогда  $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ , где  $Q_j$  — попарно не пересекающиеся двоичные кубы, (быть может, какие-нибудь  $Q_j = \emptyset$ ) (иными словами,  $G$  — дизъюнктное объединение не более чем счётного числа каких-то двоичных кубов).

*Доказательство.* Рассмотрим точки  $x \in G$ . Для каждой точки выберем двоичный куб  $Q \ni x$ , полностью содержащийся в  $G$ .

Объединение всех таких кубов даст  $G$ . Чтобы кубы не пересекались, мы оставим только кубы положительного ранга, а среди них — максимальные по включению. (Если множество неограниченное, то максимального включения среди **всех** кубов может не найтись, надо ограничить их размер, поэтому мы взяли только кубы положительного ранга)  $\square$

Вспомним про  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  — полукольцо ограниченных прямоугольных параллелепипедов, на котором есть мера —  $n$ -мерный объём  $v_n$ .  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу множеств (относительно  $v_n$ ),  $\lambda_n$  — стандартное продолжение  $v_n$ .

Теперь обозначим  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  — полукольцо всех двоичных кубов в  $\mathbb{R}^n$ . Положим  $\rho_n = v_n|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ . По теореме Лебега — Каратеодори получаем стандартное продолжение  $\mu$  на множество  $\Sigma_1 \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ .

Тогда  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C} = \Sigma$ , откуда  $\Sigma_1 \subset \Sigma$ ,  $\mu = \lambda_n|_{\Sigma_1}$ .

Также понятно, что все открытые множества являются счётными объединениями кубов из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , откуда  $\Sigma \subset \Sigma_1$ , то есть на самом деле  $\Sigma = \Sigma_1$ .

Наконец, так как обе меры совпадают на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , то они равны (теорема 1.4.3).

## Лекция VI

4 октября 2023 г.

**Теорема 1.4.5.** Пусть  $\lambda_n$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу множеств.

1. Мера Лебега инвариантна относительно сдвига: если  $e \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^n : e + t \in \Sigma, \lambda_n(e + t) = \lambda_n(e)$ .
2. Если  $\nu$  — мера, заданная на этой  $\sigma$ -алгебре  $\Sigma$ , и  $\nu$  инвариантна относительно сдвига ( $\forall e \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^n : \nu(e + t) = \nu(e)$ ), то тогда  $\exists c \geq 0 : \forall e \in \Sigma : \nu(e) = c\lambda_n(e)$ .

*Доказательство.* 1. Достаточно доказать, что внешняя мера  $\rho = v_n^*$  инвариантна относительно сдвига.

$\rho(a) = \inf \sum_j v_n(e_j)$  по всем  $e_j$ , таким, что их объединения покрывают  $a$ . Но

$$\bigcup_j e_j \supset a \iff \bigcup_j (e_j - t) \supset (a - t)$$

Измеримость по Лебегу тоже легко проверить:

$$\rho(a) = \rho(a \cap e) + \rho(a \setminus e) \iff \rho(a - t) = \rho((a - t) \cap (e - t)) + \rho((a - t) \setminus (e - t))$$

2. Обозначим за  $c := \frac{\nu(Q_0)}{\lambda_n(Q_0)}$ , где  $Q_0$  — какой-то фиксированный двоичный куб ранга 0. Тем самым,  $\nu(Q) = c\nu_n(Q)$  для любого двоичного куба ранга 1 (инвариантность при сдвиге).

Может так случиться, что  $c = 0$ . Тогда в силу счётной аддитивности и  $\sigma$ -конечности мера всего пространства равна 0.

Заметим, что  $2^n$  кубов ранга  $k$  дают в объединении куб ранга  $k - 1$ :

$$\left[0, \frac{1}{2^{k-1}}\right)^n = \left(\left[0, \frac{1}{2^k}\right) \sqcup \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right)^n$$

Тем самым, мы по индукции получаем, что на всех двоичных кубах меры  $\nu$  и  $\lambda_n$  отличаются в  $c$  раз.

Дальше применяя теорему о единственности для меры  $\rho = \frac{\nu}{c}$ , получаем, что  $\rho \equiv \lambda_n$  — объём можно задать на двоичных кубах.

Полнота  $\nu$  получается автоматически из того, что  $\nu$  задана на всей  $\Sigma$ . В самом деле, всякое множество меры нуль является подмножеством  $\delta\sigma$ -множества меры нуль.  $\square$

## 1.5 Поведение меры Лебега при линейных отображениях

Пусть  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейное отображение,  $e \in \Sigma$ . Чему равна  $\lambda_n(Te)$ ?

Пусть  $(X, \mathcal{A}_X)$  и  $(Y, \mathcal{A}_Y)$  — пары из множеств и  $\sigma$ -алгебр их подмножеств.

**Определение 1.5.1** (Измеримое отображение  $F : X \rightarrow Y$  (относительно данных  $\sigma$ -алгебр)). Такое отображение  $F$ , что  $\forall a \in \mathcal{A}_Y : F^{-1}(a) \in \mathcal{A}_X$ .

В частном случае  $\mathcal{A}_X = \mathcal{B}(X)$  и  $\mathcal{A}_Y = \mathcal{B}(Y)$  измеримое отображение называется *измеримым по Борелю*.

**Лемма 1.5.1.** *Всякое непрерывное отображение  $F : X \rightarrow Y$  измеримо по Борелю.*

*Доказательство.* Положим  $\mathcal{C} := \{e \in Y \mid F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)\}$ .  $\mathcal{C}$  —  $\sigma$ -алгебра, так как взятие прообраза коммутирует со всеми теоретико-множественными операциями (даже несчётными).

Так как прообраз открытого открыт, то  $\mathcal{C}$  содержит все открытые множества. Это сразу влечёт, что  $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(Y)$ , а тогда и подавно  $\forall e \in \mathcal{B}(Y) : F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X)$ .  $\square$

Для счётно-аддитивной меры  $\nu$ , заданной на  $\mathcal{A}_X$  можно ввести её образ.

**Определение 1.5.2** (Образ меры  $\mu$  при (измеримом) отображении  $F$ ). Мера  $\rho$ , заданная на  $\mathcal{A}_Y$  следующим образом:  $\rho(e) = \mu(F^{-1}(e))$ .

Пусть  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывно. Рассмотрим образ меры  $\mu(e) := \lambda_n(F^{-1}(e))$ . Если  $e \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , то  $F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , и формула имеет смысл:  $\mu(e)$  определена.

Иначе же, (если  $e$  — измеримое по Лебегу, но не борелевское (например,  $e$  — какое-то неприятное множество меры нуль)) может произойти что угодно. Его прообраз может быть вообще неизмеримым по Лебегу.

Образ же даже Борелевского множества необязательно измерим по Лебегу. Так,  $\eta(e) := \lambda_n(\Phi(e))$  для непрерывного (даже инъективного)  $\Phi$  может быть не определена на каком-то борелевском множестве. Чтобы таких проблем не было, надо требовать непрерывность обратного отображения.

**Факт 1.5.1.** *Пусть  $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченные открытые множества,  $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$  — гомеоморфизм. Введём меру  $\nu$  на  $G_1$ :  $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$ . Тогда  $\nu$  корректно определена на  $\mathcal{B}(G_1)$ .*

Пусть  $a \subset G_1$  — измеримое по Лебегу множество,  $\lambda_n(a) = 0$ . Тогда хочется, чтобы выполнялось  $\nu(a) = 0$ . В таком случае  $\nu(e) = \lambda_n(\Phi(e))$  будет определена на всех измеримых по Лебегу множествах (всякое измеримое по Лебегу множество — разность  $\delta\sigma$ -множества, и множества меры нуль).

Пусть  $G_1, G_2$  — открытые множества в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$  — гомеоморфизм. В терминах измеримости сказанное выше можно переформулировать в виде: тогда  $\Phi^{-1}$  измеримо по Борелю, и если  $\Phi$  липшицево, то  $\Phi^{-1}$  измеримо по Лебегу.

**Теорема 1.5.1.** Пусть  $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$  —  $C$ -липшицево отображение, пусть  $A \subset G_1$  — меры нуль. Тогда  $\Phi(A)$  тоже имеет меру нуль.

*Доказательство.*

**Лемма 1.5.2.** Пусть  $e \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда  $e$  есть множество меры нуль  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} : e \subset \bigcup_i a_i$ , причём

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } a_i)^n < \varepsilon$$

*Доказательство леммы.*  $\Rightarrow \lambda_n(e) = 0 \iff \lambda_n^*(e) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  — такое семейство двоичных кубов, что  $\sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon$ . Учитывая, что  $v_n(Q_i) = \left(\frac{\text{diam } Q_i}{\sqrt{n}}\right)^n$  сразу получаем  $\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } Q_i)^n < n^{n/2} \varepsilon$ .

$\Leftarrow$  Всякое множество  $a_i$  содержится в кубе (необязательно двоичном)  $Q_i$  со стороной  $\text{diam}(a_i)$  (проекция на любую координатную ось не больше  $\text{diam}(a_i)$ ).

□

Пусть открытое  $e \subset G_1$  имеет меру нуль, предположим, что  $\text{dist}(e, G_1^c) > 0$ . Тем самым,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists a_i \subset \mathbb{R}^n : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i \supset e, \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(a_i))^n < \varepsilon$ . Можно считать, что все  $a_i$  пересекают  $e$ , тогда при маленьких  $\varepsilon : a_i \subset G_1$ .

Тем самым,  $\text{diam}(\Phi(a_i)) \leq C \cdot \text{diam}(a_i)$ , и  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(\Phi(a_i))^n \leq C^n \cdot \varepsilon$

Если же  $\text{dist}(e, G_1^c) = 0$ , то воспользуемся теоремой об исчерпывающей последовательности компактов (теорема 1.5.2). Найдутся компактные  $K_i \subset G_1$ , в объединении дающие  $G_1$ . Для множества меры нуль  $a \subset G_1$  заметим, что оно является объединением счётного числа множеств  $a_i = a \cap K_i$ , отделённых от границы. □

**Теорема 1.5.2** (Об исчерпывающей последовательности компактов). Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открыто, тогда существует  $\exists \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}} : K_i \subset \text{Int}(K_{i+1})$ , причём  $\bigcup_i K_i = G$ .

*Доказательство.* Если  $G = \mathbb{R}^n$ , то выберем  $K_i = \overline{B_i}(0)$ .

Иначе положим  $\tilde{K}_i = \left\{x \in G \mid \text{dist}(x, G^c) \geq \frac{1}{i}\right\}$ . Несложно видеть, что  $\bigcup_i \tilde{K}_i = G$  — это следует из замкнутости  $G^c$ . Из непрерывности функции расстояния (она даже липшицева)  $\tilde{K}_i$  тоже замкнуто.

Наконец,  $\tilde{K}_i \subset \text{Int } \tilde{K}_{i+1}$ . Если  $G$  неограничено, то  $\tilde{K}_i$  может быть некомпактно хотя и замкнуто. Чтобы избежать этой проблемы, положим  $K_i = \tilde{K}_i \cap \overline{B_i}(0)$ . □

*Замечание.* В  $\mathbb{R}^n$  любая координатная гиперплоскость имеет лебегову меру нуль: например, она представима в виде объединения счётного числа гиперквадратиков меры нуль.

Итак, с чего мы начали. Пусть  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейное отображение.



**Теорема 1.5.3.**  $\forall e \in \Sigma : \lambda_n(Te) = |\det T| \cdot \lambda_n(e)$ , где определитель взят в каком-то ортонормированном базисе.

*Доказательство.* • Пусть  $T$  — невырожденное отображение,  $\det T \neq 0$ . Тогда это гомеоморфизм  $\mathbb{R}^n$  на себя. В любом случае,  $T$  липшицево, например, с константой  $\|T\|$ .

Таким образом, если положить  $\nu = \lambda_n \circ T$ , то окажется, что  $\nu$  — корректно определённая счётно-аддитивная мера на  $\sigma$ -алгебре измеримых по Лебегу множеств. Заметим, что  $\nu$  инвариантна относительно сдвига:  $\forall t \in \mathbb{R}^n. \lambda_n(Te + Tt) = \lambda_n(Te)$ . Таким образом (теорема 1.4.5):  $\exists c : \nu = c\lambda_n$ . Осталось проверить, что  $c = |\det T|$ .

– Если  $T$  — ортогональное преобразование, то оно сохраняет расстояния, и  $\det T = \pm 1$ . Выберем  $B$  — замкнутый шар положительного радиуса с центром в 0. Тогда  $TB = B$ , но мера шара не равна 0 (в него можно засунуть кубик положительного диаметра), откуда  $c = 1$ .

– **Следствия.** Если  $E$  — собственное линейное подпространство  $\mathbb{R}^n$ , то его мера  $\lambda_n$  равна 0. Ортогональным преобразованием его можно перевести в координатную гиперплоскость.

Другим следствие предыдущего пункта является то, что меру Лебега можно начинать строить с любого ортонормированного базиса в  $\mathbb{R}^n$ . Мера сохраняется при всяких поворотах и симметриях.

– Воспользуемся полярным разложением оператора. Это значит, что для невырожденного линейного  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ :  $\exists U, A : T = UA$ , где  $U$  — ортогональный оператор, а  $A$  — эрмитов (диагональный в каком-то базисе). Тогда посчитаем для измеримого  $a \in \mathbb{R}^n$   $\lambda_n(Ta) = \lambda_n(UAa) = \lambda_n(Aa)$  Будем считать, что мера Лебега построена в том базисе, в котором  $A$  диагонален.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Всякий куб  $Q \subset \mathbb{R}^n$  после применения  $A$  переходит в параллелепипед со сторонами  $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|$ . Действительно,  $\lambda_n(AQ) = |\alpha_1| \cdot \dots \cdot |\alpha_n| \cdot \lambda_n(Q) = |\det A| \cdot \lambda_n(Q)$ .

• Если  $T$  вырождено, то  $\text{Im}(T)$  — линейное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , так как  $Te \subset T(\mathbb{R}^n)$ , то мера  $Te$  тоже нуль.  $\square$

## Глава 2

# Интеграл Лебега

Пусть имеется тройка  $(X, \Sigma, \mu)$ , где  $X$  — множество,  $\Sigma \subset 2^X$  —  $\sigma$ -алгебра,  $\mu$  — счётно-аддитивная мера на  $\Sigma$ .

Определим для некоторых функций  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  интеграл  $\int_X f d\mu$ .

Раньше мы уже определяли интеграл от простой функции  $f = \sum_i c_i \chi_{e_i}$ , равный  $I(f) = \sum_i c_i \mu(e_i)$ . В качестве  $e_i$  теперь можно брать произвольные измеримые множества, что уже сильно увеличивает разнообразие простых функций.

**Определение 2.0.1** (Простая функция  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\Sigma$ ). Функция вида  $g(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{e_i}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $e_i \in \Sigma$ . Можно считать, что  $e_i \cap e_j = \emptyset$  для  $i \neq j$ .

## Лекция VII

18 октября 2023 г.

**Теорема 2.0.1** (Малая теорема Леви). Пусть  $g_1, g_2, \dots$  — счётное семейство неотрицательных простых функций; пусть  $g$  — ещё одна простая функция. Предположим, что  $\forall x \in X : g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots$ , причём  $g_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g(x)$  (можно записать  $g_n(x) \nearrow g(x)$ ). Тогда  $\lim_{j \rightarrow \infty} I(g_j) = I(g)$ .

*Доказательство.* Сложность заключается в том, что число ступенек у  $g_j$  может неограниченно расти.

Заметим, что так как  $g_j$  неотрицательны, то  $I(g_j)$  всегда определён (число из  $\mathbb{R}$  или  $+\infty$ ).

Если  $\exists j : I(g_j) = +\infty$ , то  $I(g) = +\infty$ , и доказывать нечего. Далее считаем, что  $\forall j : I(g_j) \in \mathbb{R}$ .

Так как  $g$  простая, то  $g = \sum_{s=1}^n c_s \chi_{e_s}$ , где  $e_s$  — попарно дизъюнктные множества из  $\Sigma$ . Положим  $g_j^s := g_j \cdot \chi_{e_s}$ . Эти функции тоже простые.

Зафиксируем  $s$  ( $1 \leq s \leq n$ ), зафиксируем  $x \in e_s$ , посмотрим на  $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j^s(x) = c_s \chi_{e_s}$ . Проверим предельное соотношение для интегралов: так как  $s$  пробегает конечное множество значений, то достаточно доказать только для одного значения. Далее считаем, что  $g = c \chi_e$ .

Тем самым, утверждение свелось к следующему: для  $e \in \Sigma$ , для последовательности простых функций  $g_j$ , таких, что поточечно  $0 \leq g_1 \leq \dots \leq g_j \leq g_{j+1} \leq \dots \leq c \chi_e = g$ , причём  $\forall x \in X : \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) = c \chi_e(x)$ , необходимо и достаточно показать, что  $I(g_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} I(c \chi_e) = c \mu(e)$ .

Рассмотрим  $d \in (0, c)$ . Положим  $E_n := \{x \mid g_n(x) > d\}$ . Понятно, что  $E_n \subset e$ , причём  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = e$ .

Обозначим  $h_n = d \cdot \chi_{E_n}$ . По определению  $E_n$ :  $h_n \leq g_n$ . Таким образом,

$$\underbrace{I(h_n)}_{d \cdot \mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d \cdot \mu(e)} \leq I(g_n) \leq \underbrace{I(g)}_{c \cdot \mu(e)}$$

Так как  $I(g_j) \leq I(g_{j+1})$ , то существует предел  $V = \lim_{j \rightarrow \infty} I(g_j)$ . Отсюда  $d \cdot \mu(e) \leq V \leq c \cdot \mu(e)$ , причём это верно для любого  $d < c$ .  $\square$

## 2.1 Измеримые отображения

Пусть  $(X, \mathcal{A}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{A}_Y)$  — множества и  $\sigma$ -алгебры соответствующих подмножеств.  $F : X \rightarrow Y$ .

Вспомним определение измеримости (определение 1.5.1):

**Определение 2.1.1** (Измеримое отображение  $F : X \rightarrow Y$  (относительно данных  $\sigma$ -алгебр)). Такое отображение  $F$ , что  $\forall c \in \mathcal{A}_Y : F^{-1}(c) \in \mathcal{A}_X$ .

Если в качестве  $X, Y$  рассмотреть топологические пространства без определённых  $\sigma$ -алгебр, то в качестве этих  $\sigma$ -алгебр в  $X, Y$  можно выбрать  $\sigma$ -алгебры борелевских множеств  $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)$ . В таком случае  $F$  называется *измеримой по Борелю*.

**Теорема 2.1.1.** Пусть в  $Y$  содержится счётная база топологии  $\mathcal{A}_Y$ ; пусть  $\mathcal{D}$  — какая-нибудь (даже необязательно счётная) база для топологии в  $Y$ .

Если  $\forall e \in \mathcal{D} : F^{-1}(e) \in \mathcal{A}_X$ , то  $F$  измеримо по Борелю.

*Доказательство.* Рассмотрим открытое  $G \subset Y$ , докажем, что  $F^{-1}(G) \in \mathcal{A}_X$ .

Представим  $G = \bigcup_{x \in G} a_x$ , где  $a_x \in \mathcal{D}$  содержит  $x$ .

Пусть  $\mathcal{A}_Y$  — счётная база топологии в  $Y$ . Для любого  $x \in G$ :  $\exists c_x \in \mathcal{A}_Y : x \in c_x \subset a_x$ , где  $a_x \in \mathcal{D}$ .  $\bigcup_{x \in G} c_x = G$ . Так как среди  $c_x$  всего счётное число различных, то можно выбрать представителей — счётное множество  $X \subset G : \bigcup_{x \in X} c_x = G$ . Тогда и подавно  $\bigcup_{x \in X} a_x = G$ .

Отсюда  $F^{-1}(G) \in \mathcal{A}_X$ , так как  $\sigma$ -алгебра выдерживает счётные операции.

Этого достаточно, так как  $\{E \subset Y \mid F^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X\}$  —  $\sigma$ -алгебра, и если в неё содержатся все открытые множества, то и все борелевские содержатся в ней тоже.  $\square$

Пусть  $(X, \Sigma_1), (Y, \Sigma_2), (Z, \Sigma_3)$  — множества со своими  $\sigma$ -алгебрами.

Рассмотрим композицию  $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$ .

**Теорема 2.1.2.** Композиция измеримых отображений измерима.

*Доказательство.*  $\forall e_3 \in \Sigma_3 : (\Phi \circ F)^{-1}(e) = F^{-1}(\Phi^{-1}(e))$ .  $\square$

**Факт 2.1.1.** Пусть  $X_1, X_2$  — топологические пространства,  $F : X_1 \rightarrow X_2$  — непрерывно. Пусть  $X_1, X_2$  наделены своими борелевскими  $\sigma$ -алгебрами. Тогда  $F$  измеримо.

*Доказательство.* Определим  $\mathcal{A} := \{e \in X_2 \mid F^{-1}(e) \in \mathcal{B}(X_1)\}$ .  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра, причём она содержит все открытые множества.  $\square$

**Следствие 2.1.1.** Рассмотрим композицию  $X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{\Phi} Z$ .  $X$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{A}$ ,  $Y, Z$  — топологические пространства с борелевскими  $\sigma$ -алгебрами,  $F$  измеримо,  $\Phi$  непрерывно. Тогда  $\Phi \circ F$  непрерывно.

---

$(X, \mathcal{A})$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй. Рассмотрим  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Предложение 2.1.1.**  $f$  измеримо, если выполнено любое из следующих условий.

1.  $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$ .
2.  $\forall a, b \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A}$ .
3.  $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ .
4.  $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Согласно предыдущей теореме (1) сразу влечёт измеримость.

Проверим (3)  $\Rightarrow$  (1). Так как  $(-\infty, d] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, d + 1/n)$ , то

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, b) \setminus (-\infty, a]) = f^{-1}\left((-\infty, b) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + 1/n)\right)$$

Всё остальное делается аналогично.  $\square$

**Определение 2.1.2** (Лебеговы множества функции  $f$ ). Для  $a \in \mathbb{R}$  это множества вида  $\{x \mid f(x) < a\}$ ,  $\{x \mid f(x) \leq a\}$ ,  $\{x \mid f(x) > a\}$ ,  $\{x \mid f(x) \geq a\}$ .

Таким образом, для проверки того, что  $f$  измерима, достаточно проверять измеримость только её Лебеговых множеств (достаточно какого-то одного типа).

Теперь рассмотрим отображение  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$  — столбец координатных функций.

**Предложение 2.1.2.**  $F$  измеримо  $\iff$  все  $f_j$  измеримы.

*Доказательство.*  $\Leftarrow$ . Пускай  $I_1, \dots, I_n$  — интервалы. Параллелепипеды  $P = I_1 \times \dots \times I_n$  образуют базу топологии в  $\mathbb{R}^n$ . Достаточно доказать на базе, что  $F^{-1}(P) \in \mathcal{A}$ .  $x \in F^{-1}(P) \iff$

$$F(x) \in P \iff \forall j : 1 \leq j \leq n \Rightarrow f_j(x) \in I_j. \quad F^{-1}(P) = \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(I_j).$$

$\Rightarrow$ . Рассмотрим координатную проекцию  $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\pi_j \circ F$  измеримо.  $\square$

**Предложение 2.1.3.** Пусть  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримы. Тогда измеримыми являются функции

- $\alpha f_1 + \beta f_2$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- $f_1 \cdot f_2$ .
- $\frac{f_1}{f_2}$ , если  $\forall x \in X : f_2(x) \neq 0$ .

*Доказательство.* Пускай  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ . Согласно предыдущей теореме, оно измеримо. Скомпонуем  $\psi \circ F$ , где  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \alpha x + \beta y \text{ или } xy \quad \text{Для частного: } \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \quad \square$$

Ниже нам будет удобно определять функцию  $f$ , принимающую бесконечные значения.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Про такую функцию говорят, что она *измерима*, если  $f^{-1}(+\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$  и  $f|_{f^{-1}(\mathbb{R})}$  измерима в обычном понимании.

К таким функциям можно применять примерно всё то, что уже доказано, только не надо складывать бесконечности разных знаков.

**Факт 2.1.2.** Если  $f$  (возможно) принимает значение  $+\infty$ , и все множества  $\{x \mid f(x) < a\}$  лежат в  $\mathcal{A}$ , то  $f$  измерима.

*Доказательство.*  $f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, n); \{x \mid f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus f^{-1}(\mathbb{R}).$  □

## 2.2 Грани и предельные переходы

**Теорема 2.2.1.** Пусть  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримые функции. Пусть  $f(x) = \inf_n f_n(x)$ . Для простоты считаем, что  $\forall x : f_n(x)$  ограничены снизу.

Тогда  $f$  измерима.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\{x \mid f(x) < a\} = \bigcup_n \{x \mid f_n(x) < a\}.$  □

**Следствие 2.2.1.** Если функция  $g(x) = \sup_n f_n(x)$  всюду конечна, то функция  $g$  измерима.

**Следствие 2.2.2.** Пусть  $f_n$  измеримы, и  $\forall x$ : числовая последовательность  $\{f_n(x)\}$  ограничена. Тогда  $\overline{\lim}_n f_n(x) = \underline{\lim}_n f_n(x)$  тоже измеримы.

*Доказательство.* Например,  $\overline{\lim}_n f_n(x) = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n(x).$  □

**Теорема 2.2.2.** Пусть  $f_n$  всюду конечны и измеримы, пусть  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ , где  $f(x)$  — тоже конечна. Тогда  $f$  измерима.

*Доказательство.* Это следствие из предыдущего. □

*Замечание.* Пусть  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ , но допустимо, чтобы  $f(x)$  принимало значения  $\pm\infty$ . (При этом  $\forall n : f_n$  конечна)

Тогда всё равно  $f$  измерима.

*Доказательство.* Пусть  $f(x_0) = +\infty$ . Тогда  $\forall N \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k : f_n(x_0) \geq N$ .

Тем самым,  $\{x_0 \mid f(x_0) = +\infty\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} \{x_0 \mid f_n(x_0) \geq N\}.$  □

**Определение 2.2.1** (Ступенчатая функция).  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $\exists E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A} : E_i \cap E_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $f|_{E_i}$  постоянна (скажем, равна  $c_i$ ).

Иными словами, ступенчатая функция — функция вида  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}$ .

*Замечание.* Всякая ступенчатая функция измерима.

**Теорема 2.2.3.** Если  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримая функция, то  $\exists$  последовательность ступенчатых функций  $f_n$ , такая, что  $f_n \rightrightarrows g$ .

Если же  $g \geq 0$ , то  $\exists$  простые функции  $f_n : f_n(x) \nearrow g(x)$  поточечно.

*Доказательство.*

1 Выберем  $n \in \mathbb{N}$ , рассмотрим двоичные интервалы  $I_{j,n} = [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$ . При фиксированном  $n$  :  
 $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I_{j,n} = \mathbb{R}$ .

Пусть  $E_{j,n} := g^{-1}(I_{j,n}) \in \mathcal{A}$ . Определим  $f_n(x) = \frac{j}{2^n}$  при  $x \in E_{j,n}$ . Иными словами, бьётся ось ординат, и если функция  $g$  принимает значение в некоем двоичном отрезке, то  $f_n(x)$  равно нижней границе этого отрезка.

Тогда  $\forall x : 0 \leq g(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$ .

Заметим, что  $\forall x : f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ .

2 Аналогично предыдущему пункту, берём полуинтервалы  $[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$ , и строим  $f_n$  точно так же. Они сходятся к  $g(x)$ , но, увы, не простые. Тогда положим  $\tilde{f}_n(x) = \min(f_n(x), n)$ . Здесь  $\tilde{f}_n(x)$  уже простые, по-прежнему возрастают монотонно, и всё ещё сходятся к  $g$ .

□

*Замечание.* Пусть  $g$  принимает ещё и значения  $\pm\infty$ . Тогда можно построить последовательность ступенчатых  $f_n$ , как в теореме, определённых на  $g|_{g(x) \text{ конечно}}$ .

$$\text{Доопределим } \hat{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & g(x) \in \mathbb{R} \\ +\infty, & g(x) = +\infty \\ -\infty, & g(x) = -\infty \end{cases}.$$

Тогда это всё ещё ступенчатые функции, и естественно считать, что они сходятся к  $g$  равномерно. На том множестве, где  $g(x)$  конечно,  $|f_n(x) - g(x)|$  равномерно сходится к нулю, а если  $g(x)$  бесконечно, то разность, конечно, не определена, но  $f_n(x) = g(x)$ .

Похожую вещь можно применить и ко второму пункту теоремы.

## 2.3 Интеграл

Сначала научимся интегрировать неотрицательные измеримые функции.

Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — пространство с мерой, то есть  $\mu$  — счётно-аддитивная мера, заданная на  $\Sigma$ .

Предположим, что  $\mu$  — полная мера (определение 1.4.5). Если это не так, то можно продолжить  $\mu$  по Лебегу — Каратеодори. Тогда в целом ничего особо не поменяется. Так, в предположении  $\sigma$ -конечности для продолжения меры  $\tilde{\mu}$  на  $\tilde{\Sigma}$ :  $\forall a \in \tilde{\Sigma} : \mu(a) < +\infty \Rightarrow \exists b \in \Sigma : b \supset a, \tilde{\mu}(b \setminus a) = 0$ .

Пусть  $f$  — неотрицательная измеримая функция на  $X$  (возможно, принимающая значения  $+\infty$ ).

Определим *интеграл*  $J(f) = \sup \{I(g) \mid g \text{ — простая, } 0 \leq g \leq f\}$ .

*Замечание.* Хотя  $f$  разрешается принимать бесконечные значения, по определению простые функции — суммы  $\sum_{j=1}^N c_j \chi_{e_j}$ , где  $c_j \in \mathbb{R}$  (множества  $e_j$  можно считать дизъюнктными).

**Определение 2.3.1** (Суммируемая (интегрируемая) функция  $f$ ).  $J(f) < +\infty$ .

*Свойства* (Совсем немного простых свойств).

- Если  $f$  неотрицательная простая функция, то  $J(f) = I(f)$ .
- Если  $f_1 \leq f_2$  — неотрицательные измеримые, то  $J(f_1) \leq J(f_2)$ .

## Лекция VIII

25 октября 2023 г.

Пусть  $a, b$  — два числа. Для их минимума и максимума иногда используются обозначения

$$a \vee b \stackrel{\text{def}}{=} \max(a, b) \quad a \wedge b \stackrel{\text{def}}{=} \min(a, b)$$

В частности, это используется для поточечного максимума или минимума функций:

$$(f \vee g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \vee g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max(f(x), g(x))$$

**Теорема 2.3.1** (Леви, для неотрицательных функций (теорема о монотонной сходимости)). Пусть  $f_n$  — измеримые функции,  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ . Пускай  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Тогда  $J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$ .

*Доказательство.* Если  $\exists n \in \mathbb{N} : J(f_n) = +\infty$ , то доказывать нечего: тогда начиная с этого места  $J(f_{\geq n}) = J(f) = +\infty$ . Отметим, что  $f$  измерима, как предел измеримых.

Теперь будем считать, что  $\forall n : J(f_n) < +\infty$ . Понятно, что  $J(f) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$ , так как

$$\{g \mid 0 \leq g \leq f, g \text{ — простая}\} \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{g_n \mid 0 \leq g_n \leq f_n, g_n \text{ — простая}\}$$

Далее мы доказываем, что  $J(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$ .

$\forall n : \exists$  простая функция  $\psi_n : 0 \leq \psi_n \leq f_n, I(\psi_n) \geq J(f_n) - \frac{1}{2^{2n}}$ . Сделаем так, чтобы  $\{\psi_n\}$  возрастали:  $\phi_n := \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$ . Отметим, что  $\phi_n$  — тоже простые функции.

**Лемма 2.3.1.** Почти всюду (для всех  $x$ , кроме множества меры нуль)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = f(x)$ .

*Доказательство леммы.* Обозначим  $e_n = \{x \mid \phi_n(x) < f_n(x) - \frac{1}{2^n}\}$ . Заметим, что тогда всё ещё  $\phi_n + \frac{1}{2^n} \chi_{e_n} \leq f_n$ . Слева стоит простая функция, откуда  $I\left(\phi_n + \frac{1}{2^n} \chi_{e_n}\right) \leq J(f_n)$ .  

$$\underbrace{I(\phi_n) + \frac{1}{2^n} \mu(e_n)}_{I(\phi_n) + \frac{1}{2^n} \mu(e_n)}$$

Так как  $I(\phi_n) \geq J(f_n) - \frac{1}{2^{2n}}$ , то  $\mu(e_n) \leq \frac{1}{2^n}$ .

Обозначим  $E_n = \bigcup_{k \geq n} e_k$ . Его мера тоже не очень большая:  $\mu(E_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(e_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$ . Так как имеется вложенность  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ , то  $E := \bigcap_{n \geq 0} E_n$  имеет меру нуль.

Осталось заметить, что  $\phi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  везде кроме  $E$ . □

Так как по определению  $J(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{I(g) \mid 0 \leq g \leq f, g \text{ — простая}\}$ , то достаточно доказать, что для всякой простой функции  $g \leq f$ :  $I(g) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n)$ .

Пусть  $E \subset X$  — множество меры нуль, на котором  $\phi_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ . Положим  $\tilde{g} = g \wedge \chi_{E^c}$  (занулим  $g(x)$  при  $x \in E$ ). Так как  $\mu(E) = 0$ , то  $I(g) = I(\tilde{g})$ .

Пусть  $\tilde{\phi}_n := \phi_n \wedge \tilde{g}$ . Согласно лемме,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_n(x) = \tilde{g}(x)$  всюду. Значит, согласно малой теореме Леви (теорема 2.0.1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\tilde{\phi}_n) = I(\tilde{g})$ . Но так как  $\tilde{\phi}_n \leq \phi_n$ , а  $I(\tilde{g}) = I(g)$ , то действительно  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\phi_n) \geq I(g)$ . □

## 2.4 Применения теоремы Леви. Свойства интеграла

**Факт 2.4.1.** Пусть  $f \geq 0$  — измеримая функция, положим  $A := \{x \mid f(x) \neq 0\}$ .

Тогда  $J(f) = 0 \iff \mu(A) = 0$ .

*Доказательство.*  $\Leftarrow$ .  $J(f) = \sup I(g)$ , где  $0 \leq g \leq f$ . Из монотонности меры всякая такая  $g$  сосредоточена на множестве меры нуль. Считая интеграл  $g$  по определению, получаем нуль.

$\Rightarrow$ .

**Лемма 2.4.1** (Неравенство Чебышёва). Пусть  $h \geq 0$  — неотрицательная измеримая функция,  $\lambda > 0$ . Тогда  $\mu\{x \mid h(x) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} J(h)$ .

*Доказательство леммы.* Пусть  $e = \{x \mid h(x) > \lambda\}$ . Заметим, что  $h \geq \lambda \chi_e$ , из монотонности интеграла  $J(h) \geq \lambda \mu(e)$ .  $\square$

Пусть  $A_n = \{x \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$ .  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ . Согласно неравенству Чебышёва  $\mu(A_n) \leq n J(f) = 0$ .

Таким образом,  $\mu(A) = 0$ .  $\square$

*Замечание.* Теорема Леви сохраняет силу, если неравенство  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  выполнено почти всюду (нарушаются на множестве меры нуль), и стремление  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$  тоже имеет почти всюду.

*Свойства* (Свойства интеграла).

- Линейность интеграла.

Пусть  $f, g \geq 0$  — измеримые функции,  $\alpha, \beta \geq 0$ . Тогда  $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$ .

*Доказательство.* Выбираем последовательность простых функций  $0 \leq u_n \nearrow f$  и  $0 \leq v_n \nearrow g$  почти всюду, воспользуемся линейностью предела и теоремой Леви:

$$J(\alpha f + \beta g) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\alpha u_n + \beta v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha I(u_n) + \beta I(v_n)) = \alpha J(f) + \beta J(g) \quad \square$$

- Счётная аддитивность по множеству. Пусть  $f \geq 0$  — измеримая функция, положим  $\nu(e) = J(f \cdot \chi_e)$  для  $e \in \Sigma$ . Тогда  $\nu$  — счётно аддитивная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\Sigma$ .

*Доказательство.* Аддитивность следует из линейности интеграла.

Для проверки счётной аддитивности удостоверимся в монотонной непрерывности: пусть  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , где  $E_j \in \Sigma$ .

Определим  $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ . Надо проверить, что  $J(f \cdot \chi_E) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f \cdot \chi_{E_n})$ .

$f \cdot \chi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} f \cdot \chi_{E_n}$ , значит, можно воспользоваться теоремой Леви.  $\square$

## 2.5 Интегралы от знакопеременных функций

Пусть  $f$  — измеримая функция на  $X$ , возможно, принимающая значения  $\pm\infty$ . Представим  $f = f_+ - f_-$ , где  $f_+ = f \vee 0$ ,  $f_- = -(f \wedge 0)$ . Тогда  $|f| = f_+ + f_-$ , причём  $f_+$  и  $f_-$  измеримы, и обе неотрицательны.

**Определение 2.5.1** ( $f$  обладает интегралом).  $J(f_+) < +\infty$ , или  $J(f_-) < +\infty$ . В таком случае  $J(f) \stackrel{\text{def}}{=} J(f_+) - J(f_-)$ .

**Определение 2.5.2** ( $f$  суммируема (интегрируема)). Она обладает конечным интегралом, то есть  $J(f_+), J(f_-) < +\infty$ .

**Предложение 2.5.1.**  $f$  суммируема  $\iff |f|$  суммируема.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ .  $J(|f|) = J(f_+) + J(f_-) < +\infty$ .

$\Leftarrow$ .  $f_+, f_- \leq |f|$ .  $\square$



### 2.5.1 Про линейность интеграла

Пусть  $f = g - h$ , где  $g, h \geq 0$ . Тогда во всяком случае  $g \geq f_+$  и  $h \geq f_-$ :

$$f = g - h \Rightarrow f \leq g, \text{ а так как } g \geq 0, \text{ то } f_+ \leq g \text{ тоже; } f_- = (-f)_+$$

**Предложение 2.5.2.** Если  $f = g - h$ , где  $g, h$  измеримы и неотрицательны, причём хотя бы одно из  $J(g), J(h)$  конечно, то  $f$  обладает интегралом  $J(f) = J(g) - J(h)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда  $J(g) < +\infty$ , в случае  $J(h) < +\infty$  всё аналогично.

Тогда  $J(f_+) < +\infty$ , и  $f$  по определению обладает интегралом.

$$f = f_+ - f_- = g - h \Rightarrow f_+ + h = g + f_-$$

Для неотрицательных функций известна аддитивность, откуда  $J(f_+) + J(h) = J(g) + J(f_-)$ . Перенос в противоположные части конечные слагаемые  $J(f_+)$  и  $J(g)$ , получаем

$$J(h) - J(g) = J(f_-) - J(f_+)$$

Умножая обе части на  $-1$ , получаем искомое.  $\square$

**Следствие 2.5.1.** Если  $f, g$  суммируемы (и, вообще говоря, знакопеременны), то  $f + g$  тоже суммируема, и  $J(f + g) = J(f) + J(g)$ .

*Доказательство.*

$$(f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

$\square$

**Факт 2.5.1.** Если  $f$  суммируема,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $J(\alpha f) = \alpha J(f)$ .

*Свойства* (Ещё свойства интеграла).

- Основная оценка интеграла: если  $f$  обладает интегралом, то  $|J(f)| \leq J(|f|)$ .
- Если  $f, g$  — измеримы, и обладают интегралами, причём  $f \leq g$ , то  $J(f) \leq J(g)$ .

Для  $e \in \Sigma$  и измеримой функции  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , имеющей интеграл, имеется обозначение

$$\int_e f d\mu = J(f \cdot \chi_e)$$

**Теорема 2.5.1** (Абсолютная непрерывность интеграла). Пускай  $f$  — суммируемая функция. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$ : если  $e \in \Sigma$ ,  $\mu(e) < \delta$ , то  $\int_e |f| d\mu < \varepsilon$ .

*Доказательство.* От противного: пусть  $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists e \in \Sigma : \mu(e) < \delta$ , но  $\int_e |f| d\mu \geq \varepsilon$ .

Рассмотрим последовательность  $\delta_n = \frac{1}{2^n}$ . Для каждого  $\delta_n$  найдётся  $e_n \in \Sigma$ :  $\mu(e_n) \leq \frac{1}{2^n}$ , но  $\int_{e_n} |f| d\mu \geq \varepsilon$ .

Пусть  $E_n = \bigcup_{k \geq n} e_k$ , тогда из монотонности  $\int_{E_n} |f| d\mu \geq \varepsilon$ . С другой стороны.  $\mu(E_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(e_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Таким образом,  $\mu(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , но с другой стороны  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ . Положим  $E := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . Из счётной аддитивности  $\int_E |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| d\mu$ , но левый интеграл равен нулю, как интеграл по множеству меры нуль, а правый предел — хотя бы  $\varepsilon$ .  $\square$

**Факт 2.5.2.** Если  $f$  — суммируемая функция, то  $\{x \mid f(x) \neq 0\}$   $\sigma$ -конечно.

*Доказательство.* Применить неравенство Чебышёва (лемма 2.4.1).

$$\{x \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n>0} \left\{x \mid |f|(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \quad \square$$

**Теорема 2.5.2** (Общая теорема Леви). Пускай  $f_1, f_2, \dots$  — измеримые функции, монотонно возрастающие:  $f_n \leq f_{n+1}$ .

Предположим, что  $f_1$  суммируема. Тогда  $J(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J(f)$ , где  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

*Доказательство.* Положим  $h_j(x) = f_j(x) - f_1(x)$ , и применим теорему Леви для неотрицательных функций.  $\square$

**Теорема 2.5.3** (Вариант теоремы Леви для рядов). Пусть  $u_n$  — неотрицательные суммируемые функции,  $u(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ . Тогда  $u$  суммируема  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n d\mu < +\infty$ .

В случае монотонной сходимости почти всегда почти всё можно делать, а если сходимость не монотонна, то есть следующая теорема.

## Лекция IX

1 ноября 2023 г.

**Теорема 2.5.4** (Лебег, о мажорируемой сходимости). Пусть  $f, g$  — измеримые функции,  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$ .

Предположим, что у  $f_n$  есть общая суммируемая мажоранта:  $|f_n(x)| \leq g(x)$  и  $\int_X g d\mu < +\infty$ . Тогда

$$\int_X f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu.$$

*Доказательство.* Так как  $g$  — мажоранта, то везде на  $X$ :  $|f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x)$ .

Положим  $h_k(x) := \sup_{n \geq k} |f_n(x) - f(x)|$ , заметим, что  $h_k \searrow 0$ . Так как  $0 \leq h_0(x) \leq 2g(x)$ , то  $h_0$  суммируема, откуда по теореме Леви:  $\int_X h_k(x) d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Осталось применить принцип двух полицейских для проинтегрированного неравенства:

$$0 \leq |f_k(x) - f(x)| \leq h_k(x) \quad \Rightarrow \quad \int_X 0 d\mu \leq \int_X |f_k(x) - f(x)| d\mu \leq \int_X h_k(x) d\mu \quad \square$$

*Контрпример.* Совсем без мажоранты ничего не получится. Если  $X = \mathbb{R}$ , и  $f_n = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ , то  $f$  сходится к нулю почти всюду, но интегралы у всех  $f_n$  единичные.

**Лемма 2.5.1** (Фату). Пусть  $f_n \geq 0$  — измеримые функции, тогда  $\int_X \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ .

*Доказательство.* Положим  $h_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x)$ . Заметим, что  $h_k(x) \nearrow h(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

$$\int_X h d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X h_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X h_k d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \quad \square$$

**Следствие 2.5.2.** Если измеримые  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} g$ , и  $\int_X |g_n| d\mu \leq C$ , то  $g$  суммируема, причём  $\int_X |g| d\mu \leq C$ .

## 2.6 Виды сходимости

- Сходимость почти всюду: мера множества, где сходимости нет, равна нулю.
- Сходимость по мере:  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 : \mu \left\{ x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

**Определение 2.6.1** (Последовательность Коши по мере). Последовательность измеримых функций  $f_n$ , такая, что  $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{(n,m) \rightarrow \infty} \mu \left\{ x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon \right\} = 0$ .

**Факт 2.6.1.**

1. Если  $\mu(X) < \infty$ , то из сходимости  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$  следует сходимость по мере  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ .
2. Из сходимости по мере  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$  следует, что найдётся сходящаяся подпоследовательность  $n_1 < n_2 < \dots : f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$ .

Докажем даже более сильное утверждение: для последовательности Коши по мере  $f_n$  найдутся измеримая  $f$ , и сходящаяся к ней подпоследовательность  $n_1 < n_2 < \dots : f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$ .

**Доказательство.** 1. Пусть  $\varepsilon > 0$ , обозначим  $A_n := \{x \in X \mid \exists k \geq n : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ . Они вложены:  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$

Отметим, что  $A_n$  измеримы, и пусть  $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . На множестве  $A$  нет сходимости:  $f_n \not\xrightarrow{} f$ . Но раз есть сходимость почти всюду, то  $\mu(A) = 0$ , то есть (так как мера конечна)  $\mu(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

2. Найдутся такие  $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ , что  $\mu \left\{ x \in X \mid \forall n, m \geq N_k : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \leq \frac{1}{2^k}$ .

Положим  $E_k := \left\{ x \in X \mid |f_{N_k}(x) - f_{N_{k+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^k} \right\}$ .  $\mu(X \setminus E_k) \leq \frac{1}{2^k}$ . Пусть  $\tilde{E}_k = \bigcap_{n \geq k} E_n$ ,

тогда  $\mu(X \setminus \tilde{E}_k) = \mu \left( \bigcup_{n \geq k} (X \setminus E_n) \right) \leq \sum_{n \geq k} \mu(X \setminus E_n) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ .

Если  $x \in \tilde{E}_k \Rightarrow \forall n \geq k : |f_{N_n}(x) - f_{N_{n+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ , то есть  $\forall x \in \tilde{E}_k : \sum_{j=1}^{\infty} |f_{N_j}(x) - f_{N_{j+1}}(x)|$  сходится.

А тогда эта сумма сходится и на  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$ . Это влечёт  $\forall x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} f_{N_k}(x)$ . К этому

пределу  $f_{N_k}$  сходятся почти всюду: мера  $X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (X \setminus \tilde{E}_k)$  равна нулю.  $\square$

**Факт 2.6.2.** Также для последовательности Коши по мере  $f_n$  найдётся измеримая  $f$ , такая, что  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ .

**Доказательство.** Выберем, как выше, подпоследовательность  $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{почти всюду}} f$ .

Зафиксируем  $\varepsilon, \delta > 0$ .

Так как подпоследовательность — тоже последовательность Коши, то  $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall m, l > N_1 : \mu \{x \in X \mid |f_{n_m} - f_{n_l}| > \varepsilon\} < \delta$ . Устремляя  $l \rightarrow \infty$ , получаем  $\forall m > N_1 : \mu \{x \in X \mid |f_{n_m} - f| > \varepsilon\} \leq \delta$ .

Далее из того, что исходная последовательность — тоже последовательность Коши, получаем, что  $\exists N_2 : \forall m, l > N_2 : \mu \{x \in X \mid |f_m - f_l| > \varepsilon\} < \delta$ .

Из неравенства треугольника  $\forall n > \max(n_{N_1}, N_2) : \mu \{x \in X \mid |f_n - f| > 2\varepsilon\} \leq \delta$ .  $\square$

*Контрпримеры.*

- Последовательность функций  $f_n := \chi_{[n, n+1]}$  сходится почти всюду к 0, но сходимости по мере нет (факт 2.6.1 не работает, так как мера бесконечна).
- Пусть  $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  — гармоническое число. Обозначим за  $\{x\}$  дробную часть числа  $x \in \mathbb{R}$ .

$f_n := \begin{cases} \chi_{\{H_n, \{H_{n+1}\}\}}, & \{H_n\} < \{H_{n+1}\} \\ \chi_{\{H_n, 1\}} + \chi_{[0, \{H_{n+1}\})}, & \{H_n\} > \{H_{n+1}\} \end{cases}$  — последовательность Коши по мере, которая сходится по мере к 0, но сходимости нет нигде на  $[0, 1]$ .

## 2.7 Классы $L^p$

Определим  $L^p(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — измерима, и } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$ . Как видно из первой буквы, класс назван в честь Лебега.

В дальнейшем мы будем считать, что  $p \geq 1$ .

Функции  $f \in L^p(\mu)$  отвечает норма  $\|f\|_{L^p} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ . По этой норме, как и по всякой другой, можно построить метрику  $d(., .)$ .

**Теорема 2.7.1.** В случае  $p \geq 1$ :  $d$  — реально метрика на  $L^p(\mu)$ . Чтобы выполнялась положительная определённость ( $\|f\| = 0 \iff f = 0$ ), будем рассматривать функции определённые с точностью до меры нуль на  $X$ . Иными словами  $\|f\| = 0 \iff f = 0$  почти всюду (факт 2.4.1).

*Доказательство.*

**Лемма 2.7.1** (Неравенство Гёльдера). Пусть  $p, q > 1$  — сопряжённые показатели ( $1/p + 1/q = 1$ ), тогда для  $f \in L^p, g \in L^q : fg \in L^1$ , и  $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

*Доказательство леммы.* Неравенство однородное, можно считать  $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$  — для этого надо заменить  $f \rightsquigarrow \frac{f}{\left(\int_X |f|^p\right)^{1/p}}$  и  $g \rightsquigarrow \frac{g}{\left(\int_X |g|^q\right)^{1/q}}$ .

Для  $a, b > 0$  имеется неравенство Юнга (доказывали через выпуклость  $\exp$ ):  $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$ . Применяя его, получаем  $|f(x)| \cdot |g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ . Интегрируя, получаем искомое  $\int_X |f(x)| \cdot |g(x)| d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  $\square$

Теперь проверим неравенство треугольника  $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ . Для данной нормы оно носит название *неравенства Минковского*.

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int_X |f + g|^p d\mu = \int_X |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu (\leq)$$

Применив к каждому слагаемому неравенство Гёльдера ( $|f + g|^{p-1} \in L^q$ , так как  $\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu = \int_X |f + g|^p d\mu \leq 2^p \int_X \max(f, g)^p d\mu \leq 2^p \int_X (|f|^p + |g|^p) d\mu$ ), получаем

$$(\leq) (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left( \int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left( \int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Далее делим обе части неравенства на  $\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ , и остаётся

$$\underbrace{\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}}}_{\|f+g\|_{L^p}} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad \square$$

**Теорема 2.7.2.**  $L^p(\mu)$  — полно.

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность Коши  $f_n \in L^p(\mu)$ , и пусть  $E_{k,l} := \{x \in X \mid |f_k(x) - f_l(x)| > \delta\}$ .

По определению последовательности Коши  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : k, l \geq N \Rightarrow \int_X |f_k - f_l|^p < \varepsilon^p$ .

Тогда  $\forall k, l \geq N : \mu(E_{k,l}) = \mu\{x \in X \mid |f_k(x) - f_l(x)|^p > \delta^p\} \leq \frac{\varepsilon^p}{\delta^p}$ . Значит,  $f_n$  — последовательность Коши по мере.

Пусть  $f_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$  почти всюду, тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j, s > N : \int_X |f_{k_j} - f_{k_s}|^p < \varepsilon$ . Устремляя  $s \rightarrow \infty$ , по лемме Фату получаем  $\int_X |f_{k_j} - f|^p \leq \varepsilon$ . Значит,  $f$  — предел подпоследовательности  $f_{k_j}$ , и из неравенства треугольника и фундаментальности можно показать, что  $f$  — предел.  $\square$

## Лекция X

8 ноября 2023 г.

### 2.7.1 Приближение функций из класса $L^p$

В дальнейшем часто будем обозначать меру множества  $X$  за  $|X|$ .

**Теорема 2.7.3.** Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — пространство с полной мерой. Тогда простые функции образуют плотное множество в  $L^p(\mu)$  при  $1 \leq p < +\infty$ .

*Доказательство.* Всякая простая функция имеет вид  $\phi = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{e_j}$ , дизъюнктные  $e_j \in \Sigma$ . Если  $\phi \in L^p(\mu)$ , то меры всех  $e_j$ , таких, что  $\alpha_j \neq 0$ , конечны.

Пусть  $f \in L^p(\mu)$ , разложим  $f = f_+ - f_-$ . Приближим  $f_+$  и  $f_-$  по отдельности. Тем самым, без потери общности  $f \geq 0$ .

Раз  $f$  измерима, то существует последовательность простых функций  $\phi_n \in L^p(\mu) : 0 \leq \phi_n \leq f$ ,  $\phi_n \nearrow f$  почти всюду.

Так как  $f - \phi_n \searrow 0$  почти всюду, то  $|f - \phi_n|^p \searrow 0$  почти всюду. Применяем теорему Леви, и действительно получаем, что  $\int_X |f - \phi_n|^p d\mu \rightarrow 0$ .  $\square$

Пусть мера  $\mu$  получена продолжением по Лебегу — Каратеодори из меры  $\nu$  на полукольце  $\mathcal{A} \subset \Sigma$ .

Простые функции, полученные из полукольца  $\mathcal{A}$  (то есть вида  $u = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{a_j}, a_j \in \mathcal{A}$ ) будем называть *элементарными*.

**Теорема 2.7.4.** При сделанных предположениях элементарные функции образуют плотное множество в  $L^p(\mu)$ .

*Доказательство.* Выберем  $\varepsilon > 0$ . Пускай  $f \in L^p(\mu)$ .  $\exists \phi = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{e_j}, e_j \in \Sigma$  — простая функция, хорошо приближающая  $f : \|f - \phi\|_{L^p} < \varepsilon$ . Теперь достаточно приблизить  $\phi$ , или даже каждое слагаемое  $\phi$  элементарными функциями.

Для всякого  $\delta > 0, e_j \in \Sigma$  найдём множество  $a_j \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) : \|\chi_{a_j} - \chi_{e_j}\|_{L^p} < \delta$ .

$\phi \in L^p(\mu) \Rightarrow \forall j : \mu(e_j) < \infty \Rightarrow \forall j : \exists A_j - \sigma\text{-множество, такое, что } \mu(A_j \setminus e_j) < \frac{\delta}{2}$ .

Как  $\sigma\text{-множество, } A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} b_k, b_k \in \mathcal{A}$ . Положим  $a_j^{(s)} = \bigcup_{k=1}^s b_k \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ .

Но тогда

$$\int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}|^p d\mu = \int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{e_j}| d\mu \leq \int_X |\chi_{a_j^{(s)}} - \chi_{A_j}| d\mu + \int_X |\chi_{A_j} - \chi_{e_j}| d\mu \underset{\text{при больших } s}{\leq} \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \quad \square$$

**Следствие 2.7.1.** *Линейные комбинации характеристических функций конечных прямоугольных параллелепипедов (или диадических кубов) образуют плотное множество в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ).*

**Следствие 2.7.2.** *Непрерывные функции с компактным носителем плотны в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .*

*Доказательство.* Достаточно доказать, что для любого двоичного куба  $K$ :  $\exists$  непрерывная функция  $v$  с компактным носителем  $\|\chi_K - v\|_{L^p} < \varepsilon$ . Приближим  $\chi_{[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]}$  ломаной, которая равна 1 на  $[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]$ , и равна нулю вне  $\varepsilon/2$ -окрестности  $[\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]$ .

Теперь если  $n$  — любое, то  $K = I_1 \times \dots \times I_n$ , перемножим функции, приближающие  $I_j$ .  $\square$

Пусть  $t \in \mathbb{R}^n, f$  — функция на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда *сдвиг*  $f$  на  $t$  — это  $f_t(x) = f(x+t)$  (иногда пишут минус).

**Теорема 2.7.5** (Непрерывность сдвига в среднем). Если  $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$ , то  $\|f - f_t\|_{L^p} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ . Найдём  $v$  — непрерывную функцию с компактным носителем, такую, что  $\|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ .

$$\|f - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \|f - v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_t - f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 2\varepsilon + \|v - v_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Осталось доказать ту же теорему для непрерывной функции с компактным носителем, а она очевидна из теоремы Кантора —  $v$  равномерно непрерывна.

Чуть подробнее: выберем  $\delta > 0$ , найдётся шар  $\overline{B}$ , такой, что он содержит  $\delta$ -окрестность  $\text{supp}(v)$ . На нём  $\forall \varepsilon' > 0 : \exists \delta' \in (0, \delta) : |x - y| < \delta' \Rightarrow |v(x) - v(y)| < \varepsilon'$ . Интегрируя по шару  $\overline{B}$  с конечной мерой, получаем  $\|v - v_t\| \leq |\overline{B}| \varepsilon'^{1/p}$  и  $\varepsilon'$  можно сделать сколь угодно малым.  $\square$

*Замечание* (Следствие неравенства Гёльдера).  $\mu(X) < +\infty \Rightarrow L^p(\mu) \subset L^s(\mu)$  для  $p \geq s$ .

*Доказательство.* При  $p = s$  доказывать нечего, считаем  $p > s$ . Положим  $r = \frac{p}{s} > 1$ , к нему есть сопряжённый показатель  $r'$ .

Пускай  $f \in L^p(\mu)$ .

$$\int_X |f|^s d\mu = \int_X |f|^s \cdot 1 d\mu \leq \left( \int_X (|f|^s)^r d\mu \right)^{1/r} \cdot \left( \int_X (1)^{r'} d\mu \right)^{1/r'} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/r} \cdot \mu(X)^{1/r'}$$

$\square$

Отсюда видно, что  $\|f\|_{L^s(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \mu(X)^{\frac{1}{sr'}}$ , это особенно красиво при *вероятностной мере* —  $\mu(X) = 1$ .

В случае бесконечной меры ( $\mu(X) = \infty$ ) следствие можно применять к функциям, сосредоточенных на множествах конечной меры.

Введём ещё пространство  $L^\infty(\mu)$  — множество функций, таких, что  $\exists A \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f| \leq A$  почти всюду.

$L^\infty(\mu)$  — класс всех *существенно ограниченных* функций.

Если  $f$  — существенно ограниченная функция, то среди всех существенных верхних границ  $\{K \mid |f(x)| \leq K \text{ почти всюду}\}$  найдётся инфимум: Назовём её

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \{K \mid K \text{ есть существенная верхняя грань для } f\}$$

**Теорема 2.7.6.** Пусть  $A = \operatorname{ess\,sup} f$ , тогда  $A$  — существенная граница  $f$ .

*Доказательство.* Пусть  $n \in \mathbb{N}$ , тогда  $A + \frac{1}{n}$  — существенная верхняя граница  $f$ . Тем самым,  $\exists E_n : |E_n| = 0, |f(x)| \leq A + \frac{1}{n}$  при  $x \notin E_n$ . Выберем  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Тогда  $|f(x)| \leq A$  при  $x \notin E$ , но  $\mu(E) = 0$ .  $\square$

*Замечание.* Пусть  $f$  существенно ограничена,  $A = \operatorname{ess\,sup} f$ . Тогда  $\exists E : \mu(E) = 0$  и  $\sup_{x \in X \setminus E} f(x) = A$ .

**Определение 2.7.1** (Норма  $f \in L^\infty(\mu)$ ).  $\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \operatorname{ess\,sup}_X |f|$ .

Если в пространстве  $L^\infty$  отождествить функции, отличающиеся на множестве меры нуль, то  $\|\cdot\|$  станет нормой.

Расстояние между функциями в данном пространстве  $d(f, g) = \|f - g\|$ , неравенство треугольника здесь очевидно:

$$\|u + v\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}$$

**Теорема 2.7.7.**  $L^\infty(\mu)$  полно.

*Доказательство.* Пусть  $\{f_n\}$  — последовательность Коши в  $L^\infty(\mu)$ , то есть  $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow{(n,m) \rightarrow \infty} 0$ .

Тогда найдутся множества  $E_{n,m} : \operatorname{ess\,sup} |f_n - f_m| = \sup_{x \notin E_{n,m}} |f_n(x) - f_m(x)|$ .

Положим  $E = \bigcup_{n,m} E_{n,m}$ ,  $\mu E = 0$ . Тогда  $\{f_n|_{X \setminus E}\}_n$  — последовательность Коши на пространстве ограниченных функций на  $X \setminus E$ . Тем самым,  $f_n \rightrightarrows f$  равномерно на  $X \setminus E$ . Доопределим  $f$  на  $E$  как угодно, её класс эквивалентности в  $L^\infty$  не поменяется.  $\square$

В неравенстве Гёльдера до сих пор рассматривались  $p, p' : \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  при  $1 < p, p' < \infty$ . Если же подставить одно из  $p, p'$  равным 1, то второе станет равным  $\infty$ . Естественно считать 1 и  $\infty$  сопряжёнными показателями.

Неравенство Гёльдера говорило, что  $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\mu)}$ .

**Факт 2.7.1.** Неравенство Гёльдера сохраняется при  $p = 1$  или  $p = \infty$ .

*Доказательство.* Пусть  $p = 1$ .  $|f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}$  почти всюду. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int_X |f| \cdot |g| d\mu \leq \int_X |f(x)| d\mu \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)} = \|f\|_{L^1(\mu)} \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)} \quad \square$$

**Факт 2.7.2.** Пусть  $\mu(X) = 1$ . Тогда  $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$  при любом  $p < \infty$ .

*Доказательство.*

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int_X \|f\|_{L^\infty(\mu)}^p d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_{L^\infty(\mu)} \cdot \mu(X)^{1/p}$$

В частности, из данного доказательства следует, что при  $\mu(X) < +\infty$ :  $L^p(\mu) \supset L^\infty(\mu)$ .  $\square$

Пусть  $\mu(X) = 1$ . Зафиксируем измеримую  $f$ , рассмотрим возрастающую функцию

$$p \mapsto \|f\|_{L^p(\mu)}$$

Если  $f \notin L^p(\mu)$ , то будем считать  $\|f\|_{L^p} = \infty$ .

**Упражнение 2.7.1.**  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$ .

## 2.7.2 Связь интегралов Лебега и Римана

**Теорема 2.7.8.** Пусть  $f$  — функция на отрезке  $\langle a, b \rangle$ , интегрируемая по Риману — Дарбу. Тогда  $f$  суммируема, и интеграл Лебега такой же.

*Доказательство.* В данной постановке простые функции — линейные комбинации характеристических функций отрезков,  $\phi = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{I_j}$ . В этой лекции они назывались элементарными.

Простые функции интегрируемы и по Риману, и по Лебегу, и интеграл у них один и тот же.

Пусть  $\langle a, b \rangle = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$  — разбиение  $\Delta = \{I_1, \dots, I_k\}$ .

Зададим  $\phi_\Delta = \sum_{j=1}^k \left( \sup_{I_j} f \right) \chi_{I_j}$ ,  $\psi_\Delta = \sum_{j=1}^k \left( \inf_{I_j} f \right) \chi_{I_j}$ . Тогда  $\int_{\langle a, b \rangle} \phi_\Delta$  — верхняя сумма Дарбу для  $f$  по отрезку  $\langle a, b \rangle$ ,  $\int_{\langle a, b \rangle} \psi_\Delta$  — нижняя сумма Дарбу.

Понятно, что  $\psi_\Delta \leq f \leq \phi_\Delta$  всюду на  $\langle a, b \rangle$ , причём для измельчения  $\Delta'$  верно, что

$$\psi_\Delta \leq \psi_{\Delta'} \leq f \leq \phi_{\Delta'} \leq \phi_\Delta$$

Критерием интегрируемости по Риману является то, что  $\text{osc}_{I_j} f$  могут быть сколь угодно малыми, то есть  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta : \int_{\langle a, b \rangle} (\phi_\Delta - \psi_\Delta) \leq \varepsilon$ .

Выберем последовательность  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ , построим разбиения  $\Delta_n$  так, что каждое следующее является измельчением предыдущего.

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{R}} (\phi_n - \psi_n) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |\phi_n - \psi_n| d\lambda < \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует, что существует последовательность индексов  $n_j$ , таких, что  $\phi_{n_j} - \psi_{n_j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  почти всюду. Таким образом,  $\psi_{n_j}$  и  $\phi_{n_j}$  стремятся к  $f$  почти всюду, тем самым  $f$  измерима!

Теперь  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_{n_j} \leq$  интеграл Лебега или Римана  $f \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi_{n_j}$ .  $\square$

*Интересный факт* (Теорема Лебега). Функция  $f$  на конечном отрезке интегрируема по Риману  $\iff$  множество точек разрыва  $f$  имеет меру нуль.

*Замечание.* Пусть  $f \geq 0$ ,  $f$  интегрируема в смысле Римана несобственным образом на конечном или бесконечном интервале  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Тогда  $f$  суммируема на  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

*Доказательство.* Например, пусть особенность на конце  $\beta$ :  $f$  интегрируема по Риману на любом интервале  $\langle \alpha, \beta - \delta \rangle$ , причём  $\exists \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta - \delta} f(x) dx$ . Пускай  $f_n = f \cdot \chi_{\langle \alpha, \beta - \frac{1}{n} \rangle}$ . Тогда  $f_n \nearrow f$ , по теореме Леви предельная функция тоже суммируема, причём её интеграл — предел интегралов  $f_n$ .  $\square$



*Замечание.* Если функция знакопеременна, то интегрировать всё ещё бывает полезно в несобственном смысле:  $\frac{\sin x}{x}$  не суммируема на  $[0, \infty)$ , но можно писать

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

## Лекция XI

15 ноября 2023 г.

### 2.8 Теоремы Тонелли и Фубини

Рассмотрим два пространства с мерой  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  ( $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебры,  $\mu, \nu$  — счётно-аддитивные меры на  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно).

Рассмотрим полукольцо  $\mathcal{P} = X \times Y$  обобщённых прямоугольников:  $c \in \mathcal{P} \iff c = a \times b$  для  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ .

**Предложение 2.8.1.** Мера  $\lambda := \mu \otimes \nu$  на  $\mathcal{P}$  ( $\lambda(a \times b) := \mu(a)\nu(b)$ ) счётно-аддитивна.

*Доказательство.* Выберем  $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, \{b_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}, \{c_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$  так, что  $c_j = a_j \times b_j$ . Пусть  $c_j$  дизъюнкты; положим  $c := \bigsqcup_{j=1}^{\infty} c_j$ , пусть  $c \in \mathcal{P}$ , то есть  $\exists a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B} : c = a \times b$ .

Надо проверить, что  $\lambda(c) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(c_j)$ .

Рассмотрим равенство  $\chi_a(x)\chi_b(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x)\chi_{b_j}(y)$ . При каждом фиксированном  $x$  обе части — измеримые функции от  $y$ .

Интегрируя, получаем по теореме Леви

$$\underbrace{\chi_a(x) \int_Y \chi_b(y) d\nu(y)}_{\nu(b)} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{a_j}(x) \underbrace{\int_Y \chi_{b_j}(y) d\nu(y)}_{\nu(b_j)}$$

Это равенство опять интегрируется, уже по  $x$ . В результате действительно получаем  $\mu(a)\nu(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(a_j)\nu(b_j)$ . □

Применяя теорему Лебега — Каратеодори, можно продолжить меру  $\lambda$ , результат тоже обозначают  $\mu \otimes \nu$ , и называют *произведением мер*  $\mu$  и  $\nu$ .

Пусть имеется несколько пространств с мерой  $(X_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mu_n)$ . Можно определить меру произведения  $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ . В произведении, вообще говоря, надо указать порядок, но оказывается, что произведение мер ассоциативно.

*Пример.* Рассмотрим  $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ . Пусть  $\lambda_n, \lambda_k$  — стандартные меры Лебега на  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^k$ . Тогда оказывается, что  $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$ .

Можно заметить, что на обобщённых прямоугольниках мера произведения одна и та же, и применяя теорему об единственности, получаем  $\lambda_n \otimes \lambda_k = \lambda_{n+k}$ . (причём на самом деле неважно, что обобщённые прямоугольники берутся из евклидова пространства, это проверяет ассоциативность в общем виде)

Пускай  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  — пространства со счётно-аддитивными мерами, обе меры полны и обе  $\sigma$ -конечны. В теоремах Тонелли и Фубини теоретически можно обойтись и без этих двух условий, но требуются дополнительные слова. Пусть  $\lambda = \mu \otimes \nu$ .

**Теорема 2.8.1** (Тонелли). Пусть  $f$  —  $\lambda$ -измеримая функция на  $X \times Y$ ,  $f \geq 0$ . Тогда

1. Для  $\mu$ -почти всех  $x \in X$ :  $f(x, \_)$  измерима на  $Y$ .
2. Функция  $\phi(x) := \int_Y f(x, \_) d\nu$  измерима на  $X$ .
3.  $\int_X \phi(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d\lambda$ .

*Доказательство.* Назовём измеримую функцию  $f \geq 0$  допустимой, если она определена на  $X \times Y$ , и удовлетворяет всем трём условиям.

1. Если  $a \in \mathcal{A}$ ,  $b \in \mathcal{B}$ , то  $\chi_{a \times b}$  допустима:  $\chi_{a \times b}(x, y) = \chi_a(x)\chi_b(y)$ .
2. Неотрицательные элементарные функции, построенные по полукольцу  $\mathcal{P}$ , допустимы:
  - Если  $f, g$  — допустимы,  $\alpha, \beta \geq 0$ , то  $\alpha f + \beta g$  тоже допустима.
  - Если  $f, g$  — допустимы и  $f$  суммируема, причём  $0 \leq g \leq f$ , то  $f - g$  тоже допустима.

*Доказательство.* Пусть  $\phi(x) = \int_X f(x, \_) d\nu$ . В силу 3. она суммируема, откуда  $\phi$  конечна почти всюду. Пусть  $\psi(x) = \int_X g(x, \_) d\nu$ . Так как  $\psi \leq \phi$ , то  $\psi$  тоже конечна почти всюду, тогда дальше всё хорошо.  $\square$

3. Пусть  $f_n$  — допустимые функции на  $X \times Y$ , пусть  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , пусть  $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$ . Автоматически  $f$  измерима. Тогда  $f$  тоже допустима.

*Доказательство.* Пускай  $E_n = \{x \in X \mid f_n(x, \_) \text{ не измерима}\}$ .  $\forall n : \mu E_n = 0$ , так как  $f_n$  допустимы. Положим  $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ ,  $\mu E = 0$ .

$x \notin E \Rightarrow$  все функции  $f_n(x, \_)$  измеримы на  $Y$ . Имеется монотонная сходимость  $f_n \nearrow f$ , значит  $f(x, \_)$  тоже измерима на  $Y$  при  $x \notin E$ .

Построим  $\phi(x) = \int_Y f(x, \_) d\nu$ ,  $\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, \_) d\nu$ . По теореме Леви (относительно меры  $\nu$ ) для  $x \notin E : \phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$ . Тем самым  $\phi$  измерима, как предел измеримых функций.

Более того,  $\phi_n \nearrow \phi$ , опять по теореме Леви (относительно меры  $\mu$ ):

$$\int_X \phi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \phi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} f_n d\lambda \stackrel{\text{теорема Леви относительно } \lambda}{=} \int_{X \times Y} f d\lambda \quad \square$$

4. Пусть  $f_n$  — допустимые функции на  $X \times Y$ , пусть  $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ , пусть  $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$ . Автоматически  $f$  измерима. Если  $f_1$  суммируема, то  $f$  тоже допустима.

*Доказательство.* Аналогично предыдущему пункту.  $\square$

5. Если  $A \subset X \times Y$  —  $\sigma$ -множество, то  $\chi_A$  допустима.

*Доказательство.* Представим  $A$  в виде  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ .  $\sum_{j=1}^N \chi_{A_j} \nearrow \chi_A$ .  $\square$

6. Если  $A \subset X \times Y$  —  $\delta\sigma$ -множество конечной меры  $\lambda$ , то  $\chi_A$  допустима.

*Доказательство.* Представим  $A$  в виде  $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ , где  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ,  $A_j$  —  $\sigma$ -множества конечной меры.  $\chi_{A_j} \searrow \chi_A$ .  $\square$

7. Если  $e \subset X \times Y$  измеримо, и  $\lambda(e) = 0$ , то  $\chi_e$  допустимо.

*Доказательство.* Пусть  $\bar{e}$  —  $\delta\sigma$ -множество, такое, что  $\bar{e} \supset e$ , и  $\lambda(\bar{e}) = 0$ .

Тогда  $\chi_e \leq \chi_{\bar{e}}$ .  $\chi_{\bar{e}}$  допустима, в частности,  $\chi_{\bar{e}}(x, \_)$  измерима на  $Y$  для почти всех  $x \in X$ . Обозначив  $\bar{\phi}(x) = \int_Y \chi_{\bar{e}}(x, \_) d\nu$  видим, что  $\bar{\phi}$  измерима на  $X$ , а так как

$$\int_X \bar{\phi} d\mu = \int_{X \times Y} \chi_{\bar{e}} d\lambda = 0$$

то  $\bar{\phi}(x) = 0$  для почти всех  $x \in X$ .

Пусть  $E = \{x \in X \mid \bar{\phi}(x) \neq 0\}$ . Для  $x \notin E : \int_Y \chi_{\bar{e}}(x, \_) d\nu = 0$ . Иными словами,  $\nu\{y \in Y \mid (x, y) \in \bar{e}\} = 0$ .

Но тогда из полноты меры (здесь мы ей пользуемся в первый раз)  $\nu\{y \in Y \mid (x, y) \in e\} = 0$ . Тогда любая функция, сосредоточенная на  $e$ , измерима, в частности,  $\chi_e(x, \_)$  измерима на  $Y$ .

Зная измеримость  $\chi_e$  уже несложно доказать, что в пунктах 2 и 3 все интегралы равны нулю: в частности,  $\phi(x) = \int_Y \chi_e(x, \_) d\nu$  равна нулю всюду кроме  $E$ .  $\square$

8. Если  $A \subset X \times Y$  — измеримое множество относительно меры  $\lambda$ , причём  $\lambda(A) < +\infty$ , то  $\chi_A$  допустима.

*Доказательство.*  $\exists \delta\sigma$ -множество  $\bar{A} \supset A$ , такое, что  $\lambda(\bar{A} \setminus A) = 0$ . Применим второй  $\bullet$  из 2.  $\chi_A = \chi_{\bar{A}} - \chi_{\bar{A} \setminus A}$ .  $\square$

9. Пусть  $f$  — простая функция относительно  $\sigma$ -алгебры  $\lambda$ -измеримых множеств,  $f \geq 0$ . Иными словами,

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{e_j}, \alpha_j \geq 0, e_i \cap e_j = \emptyset \text{ (при } i \neq j)$$

Если  $\forall j : \lambda e_j < +\infty$ , то  $f$  допустима.

10. Пусть  $f$  — неотрицательная измеримая функция на  $X \times Y$ ,  $\lambda\{(x, y) \mid f(x, y) \neq 0\} < +\infty$ . Тогда  $f$  допустима.

*Доказательство.*  $\exists f_n$  — простые функции,  $0 \leq f_n \leq f$ ,  $f_n \nearrow f$ . Все  $f_n$  допустимы, значит и  $f$  допустима.  $\square$

11. Все неотрицательные измеримые функции допустимы.

*Доказательство.*  $\exists X_1 \subset X_2 \subset \dots$ , такие, что  $X = \bigcup_i X_i$ , и все  $\mu(X_i) < +\infty$ . Аналогично  $\exists Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ , такие, что  $Y = \bigcup_i Y_i$ , и все  $\mu(Y_i) < +\infty$ . (Здесь мы пользуемся  $\sigma$ -конечностью в первый раз).

Положим  $f_n(x, y) = f(x, y) \chi_{X_n}(x) \chi_{Y_n}(y)$ .  $f_n$  из пункта 10, значит,  $f$  допустима, так как  $f_n \nearrow f$ .  $\square$

$\square$

**Теорема 2.8.2** (Фубини). Пусть  $(X, \mu), (Y, \nu)$  — два пространства с мерой,  $\lambda = \mu \otimes \nu$ .

Если  $f \in L^1(\lambda)$ , то

- Для почти всех  $x \in X : \phi(x) := \int_Y f(x, \_) d\nu$  суммируема на  $X$ .
- $\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} f d\lambda$ .

*Доказательство.*  $f$  суммируема  $\Rightarrow f_+, f_-$  суммируемы по  $\lambda$ . К каждой из них применима теорема Тонелли. Вычитаем заключения теоремы Тонелли для  $f_+$  и  $f_-$ .  $\square$

**Задача 2.8.1.** Придумать функцию  $f$ , такую, что  $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu$  суммируема, но  $f \notin L^1(\lambda)$ .

## 2.8.1 Как применять

Пусть  $f$  —  $\lambda$ -измеримая функция (про знак ничего не известно).

Чтобы доказать, что  $f$  суммируема, надо доказать, что  $|f|$  суммируема.

По теореме Тонелли  $|f|$  суммируема  $\iff \int_X \int_Y |f|(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$  конечен. Если интеграл сошёлся, то  $f$  тоже суммируема, и для исходной функции тоже можно сводить интеграл к повторному.

## 2.9 Свёртки. Приближение функций с помощью свёрток

Пусть  $f, g$  — измеримые функции на  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.9.1** (Свёртка  $f * g$ ).  $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy$ . Свёртка определена в тех точках, где интеграл определён.

Рассмотрим  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto (y, x - y)$ .  $L$  линейно, значит,  $L, L^{-1}$  измеримы по Лебегу. Определив  $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto f(u)g(v)$ , видим, что  $T$  измерима, откуда  $(T \circ L)(x, y) = f(y)g(x - y)$  тоже измерима.

**Теорема 2.9.1.** Если  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , то  $(f * g)$  определена почти всюду, и  $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\phi(x, y) = |f(x)| \cdot |g(x - y)|$ . Она неотрицательна, применяем теорему Тонелли:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \phi d\lambda_{2n} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dx \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

По теореме Тонелли  $\phi$  суммируема, тем самым,  $(x, y) \mapsto f(y)g(x - y)$  тоже суммируема. По теореме Фубини  $(f * g)(x)$  определена для почти всех  $x$ , причём она суммируема.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x - y)| dy dx \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \quad \square$$

*Замечание.* Неформально говоря, если сворачивать  $f$  с какими-то хорошими свойствами, и  $g$  с какими-то другими хорошими свойствами, то свёртка обладает всеми хорошими свойствами каждой из них. В этом мы убедимся на некоторых примерах.

**Утверждение 2.9.1.**  $f * g = g * f$  всегда, когда существует:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy = \left\| \begin{array}{l} z = x - y \\ y = x - z \end{array} \right\| = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - z) dz$$

**Упражнение 2.9.1.** Свёртка ассоциативна:  $f * (g * h) = (f * g) * h$  всегда, когда существует.

## Лекция XII

22 ноября 2023 г.

## 2.9.1 Меры с плотностью

Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — пространство с мерой. Пусть  $\phi \geq 0$  — измеримая функция на  $X$ .

Можно определить меру, индуцированную функцией  $\phi$ :  $\nu(e) = \int_e \phi d\mu$  для  $e \in \Sigma$ . Тогда  $\phi$  называется плотностью меры  $\nu$  относительно  $\mu$ .

**Куда должна бить  $\phi$ ?**

1. Можно считать, что  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , но, возможно, меняет знак. Надо предположить, что либо  $\phi_+$ , либо  $\phi_-$  суммируемы.

Тогда сохраняется счётная аддитивность:  $e = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} e_i \Rightarrow \nu(e) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(e_i)$ . Тем не менее, всякие монотонности могут перестать выполняться, так как функция перестала быть неотрицательной.

2. Можно считать, что  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Комплексный интеграл берётся отдельно по вещественной и мнимой частям:

$$\int_e (\alpha + \beta i) d\mu = \int_e \alpha d\mu + i \int_e \beta d\mu$$

В обоих случаях  $\nu$  перестаёт быть мерой в заявленном определении, это просто какая-то счётно-аддитивная функция множества, и  $\phi$  во всех случаях называется её плотностью.

### Интегрирование по мере $\nu$

Пусть  $\nu$  определена, как выше.

**Факт 2.9.1.** Если  $g \geq 0$  — измеримая функция на  $X$ , то  $\int_X g d\nu = \int_X g \phi d\mu$ .

*Доказательство.* Формула верна для  $g = \chi_e$ :

$$\int_X \chi_e d\nu = \nu(e) = \int_X \chi_e \phi d\mu$$

Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Теперь пусть  $g$  — произвольная измеримая. Существуют неотрицательные простые  $g_n \nearrow g$ , применяем теорему Леви (два раза, в левой и правой частях равенства).  $\square$

**Следствие 2.9.1.** Неотрицательная функция  $g$   $\nu$ -суммируема  $\iff g\phi$   $\mu$ -суммируема.

**Следствие 2.9.2.**  $h$  (возможно, меняющая знак)  $\nu$ -суммируема  $\iff h\phi$   $\mu$ -суммируема, причём  $\int_X h d\nu = \int_X h\phi d\mu$ .

## 2.9.2 Образ меры

Пусть  $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  — два пространства,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебры подмножеств в  $X$  и  $Y$  соответственно.

Пусть  $F : X \rightarrow Y$  измеримо относительно  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

Пускай  $\mu \geq 0$  — счётно-аддитивная мера на  $(X, \mathcal{A})$ . Её образ  $F^0(\mu) =: \nu$  — счётно-аддитивная мера на  $(Y, \mathcal{B})$ , такая, что  $\nu(b) = \mu(F^{-1}(b))$ . Счётная аддитивность следует из того, что прообраз уважает все теоретико-множественные операции.

## Интегрирование по мере $\nu$

Пусть  $\nu$  определена, как выше.

$$\int_Y \chi_e d\nu = \nu(b) = \int_X \chi_{F^{-1}(b)} d\mu$$

Заметим, что  $\chi_{F^{-1}(b)} = \chi_b \circ F$ .

**Факт 2.9.2.** Если  $g \geq 0$  — измеримая функция на  $X$ , то  $\int_X g d\nu = \int_X g \circ F d\mu$ .

*Доказательство.* Формула верна для  $g = \chi_e$ . Значит, формула верна для неотрицательных простых функций.

Теперь пусть  $g$  — произвольная измеримая. Существуют неотрицательные простые  $g_n \nearrow g$ , применяем теорему Леви (два раза, в левой и правой частях равенства).  $\square$

Все замечания из предыдущего раздела повторяются:

**Следствие 2.9.3.** Неотрицательная функция  $g$   $\nu$ -суммируема  $\iff g \circ F$   $\mu$ -суммируема.

**Следствие 2.9.4.**  $h$  (возможно, меняющая знак)  $\nu$ -суммируема  $\iff h \circ F$   $\mu$ -суммируема, причём  $\int_X h d\nu = \int_X h \circ F d\mu$ .

Данная формула очень полезна при замене переменной в интеграле.

Например, ранее записанное равенство  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) d\xi$  видно из данной формулы при  $F(y) = x-y$  — здесь образ меры будет ей самой.

## 2.9.3 Свойства свёртки

Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Теорема 2.9.2.** Если  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , то  $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ .

*Доказательство.* Пусть  $p = \infty$ . Тогда это следует из оценки

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \leq \underbrace{\|f\|_{L^\infty}}_{\text{ess sup}(f)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

При  $p = 1$  доказано выше (теорема 2.9.1).

Теперь пусть  $1 < p < \infty$ ,  $q$  — сопряжённый к  $p$  показатель.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \right)^p dx \stackrel{(\circledast)}{=}$$

Определим из меры Лебега новую меру с плотностью  $|g(y)|$ :  $\nu(e) := \int_e |g(y)| dy$ . Это конечная мера на  $\mathbb{R}^n$ , так как  $g \in L^1$ .

$$\stackrel{(\circledast)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot 1 d\nu(y) \right)^p dx \stackrel{(\circledast)}{\leq}$$

Теперь применим неравенство Гёльдера относительно данной меры  $\nu$ .

$$\begin{aligned} & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} 1^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p dx = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right) dx \cdot \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \stackrel{\text{теорема 2.9.1}}{\leq} \|f\|_{L^p}^p \cdot \|g\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Тем самым,  $\|f * g\|_{L^p}^p \leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p$  и  $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$ .  $\square$

**Упражнение 2.9.2** (Неравенство Юнга). Пусть  $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^t(\mathbb{R}^n)$ , где  $s, t > 1$ . Предположим, что  $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} - 1$ , и пусть  $r \geq 1$ . Тогда  $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^s} \|g\|_{L^t}$ .

**Упражнение 2.9.3.** Если  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , и  $1 < p, q < \infty$ , то  $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ , и при этом  $f * g$  непрерывна и стремится к нулю на  $\infty$ . *Что? Не верится, что свёртка двух произвольных функций непрерывна.*

**Факт 2.9.3.** Пусть  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$ . Тогда для  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  при  $1 \leq p < \infty$ :

$$\|f * g - f\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g(y) dy dx$$

*Доказательство.*  $(f * g)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))g(y) dy$

Возьмём модуль, возведём в степень  $p$ , и проинтегрируем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| g(y) dy \right)^p dx$$

Далее вводим меру  $\nu(e) = \int_e g(y) dy$ , и опять применяем неравенство Гёльдера к  $|f(x-y) - f(x)| \cdot 1$  (применяем к выражению внутри скобок):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x-y) - f(x)| \cdot 1) d\nu(y) & \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^n} 1^q d\nu(y) \right)^{\frac{1}{q}}}_1 = \\ & = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Далее, подставляя внутрь скобок полученную оценку, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dx$$

$\square$

Будем обозначать пространство бесконечно дифференцируемых функций на  $\mathbb{R}^n$  с компактным носителем значком  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Теорема 2.9.3.** Пусть  $u$  — непрерывна, с компактным носителем,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Тогда  $f * u$  непрерывна. Если  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , то  $f * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

*Доказательство.*

$$(f * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)u(x-y) dy \quad (\equiv)$$

Проверим непрерывность в  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , рассмотрим  $B_r(x_0)$ . Пусть  $S := \text{supp } u$ . Можно считать, что интегрирование берётся по компакту  $K := \overline{B_r(x_0)} - S$ .

$$(\equiv) \int_K f(y)u(x-y) dy$$

при  $x \in B_r(x_0)$

Заметим, что для всякой последовательности  $x_j \rightarrow x_0 : u(x_j - y) \rightarrow u(x_0 - y)$ , откуда при  $x_j$ , близких к  $x_0$ :  $\exists C: |f(y)u(x_j - y)| \leq C|f(y)|$ , и можно применить теорему Лебега о мажоранте:

**Лемма 2.9.1.** Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  — компактное множество,  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  — интервал,  $v : K \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $\exists \frac{\partial}{\partial t} v(x, t)$ , и она непрерывна на  $(a, b)$  при всяком фиксированном  $x \in K$ . Также предположим наличие суммируемой мажоранты  $w$  на  $K$ : для всех  $t \in (a, b) : \left| \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \right| \leq w(x)$ .

Определим  $\phi(t) := \int_K v(x, t) dx$  (предполагаем, что  $v(x, t)$  суммируема при всяком  $t$ ). Тогда  $\phi$  дифференцируема на  $(a, b)$ , и

$$\phi'(t_0) = \int_K \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) dx$$

*Доказательство леммы.* Выберем последовательность  $t_n \rightarrow t_0$ , запишем разностное отношение  $\frac{\phi(t_n) - \phi(t_0)}{t_n - t_0} = \int_K \frac{v(x, t_n) - v(x, t_0)}{t_n - t_0} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi'(t_0)$ . По формуле Лагранжа  $\frac{v(x, t_n) - v(x, t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial}{\partial t} v(x, \xi)$  для некой  $\xi \in (t_n, t_0)$ .  $\left| \frac{\partial}{\partial t} v(x, \xi) \right| \leq w(x)$ , значит, у подынтегральной функции есть мажоранта, и можно перейти к пределу.  $\square$

Заметим, что  $(f * u)(x) = \int_K f(y)u(x-y) dy$ , и её действительно можно дифференцировать бесконечно много раз:

$$(f * u)^{(k)}(x) = \int_K f(y)u^{(k)}(x-y) dy \quad \square$$

*Замечание.* Пусть  $\text{supp } f = A, \text{supp } g = B$ . Тогда  $\text{supp}(f * g) \subset A + B$ .

**Определение 2.9.2** (Аппроксимативная единица для  $\mathbb{R}^n$ ). Последовательность функций  $g_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g_j \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} g_j = 1, \forall \delta > 0 : \int_{|y| \geq \delta} g_j(y) dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

**Теорема 2.9.4.** Пусть  $g_j$  — аппроксимативная единица,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Тогда  $f * g_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ , то есть  $\|f * g_j - f\|_{L^p} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ .

Если  $f$  непрерывна с компактным носителем (достаточно потребовать равномерной непрерывности и ограниченности), то  $f * g_j \rightrightarrows f$

*Доказательство.* При  $1 \leq p < \infty$ :

$$\begin{aligned} \|f * g_j - f\|_{L^p}^p &\stackrel{\text{факт 2.9.3}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p g_j(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \cdot g_j(y) dy = \\ &= \int_{|y| < \delta} g_j(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx dy + \int_{|y| \geq \delta} g_j(y) \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|^p}_{\leq 2^p(|f(x-y)|^p + |f(y)|^p)} dx dy \end{aligned}$$



$2^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p + |f(y)|^p dx \leq 2^{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$ , и это конечно. Значит, по определению аппроксимативной единицы второе слагаемое мало при больших  $j$ .

Для первого слагаемого применим непрерывность сдвигов для  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ :  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |y| < \delta \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx < \varepsilon$ . Значит, оно тоже маленькое.

Теперь проверим равномерную сходимость. Так как  $f$  имеет компактный носитель, то она равномерно непрерывна:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . Пусть  $K = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ .

$$(f * g_j)(x) - g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g_j(y) dy - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))g_j(y) dy$$

$$\begin{aligned} |(f * g_j)(x) - g(x)| &\leq \\ &\leq \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)|g_j(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} (|f(x-y)| + |f(x)|)g_j(y) dy \leq \\ &\leq \varepsilon + 2K \int_{|y| \geq \delta} g_j(y) dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

**Факт 2.9.4.** Пространство  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  плотно в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  для  $1 \leq p < +\infty$ .

*Доказательство.* Построим специальную аппроксимативную единицу.

1. Пускай  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция с компактным носителем,  $\phi = 0$  вне  $(-1, 1)$ .

$$\text{Например, } \phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

2. Положим  $a := \int_{\mathbb{R}} \phi dx$ . Положим  $\psi := \frac{\phi}{a}$ . Это функция с единичным интегралом.
3.  $\Psi(x_1, \dots, x_n) := \psi(x_1) \cdot \dots \cdot \psi(x_n)$ . Это функция с единичным интегралом, сосредоточенная в кубе со стороной 2 и центром в нуле.
4. В качестве аппроксимативной единицы выберем  $\Psi_j(x) = j^n \Psi(jx)$ . Интеграл по-прежнему равен единице, так как якобиан скалярного умножения на  $j$  в  $\mathbb{R}^n$  равен  $j^n$ .

Теперь выберем  $\varepsilon > 0$ , и функции  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  сопоставим  $g$  с компактным носителем, такую, что  $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$ . При больших  $j$ :

$$\|g * \Psi_j - g\|_{L^p} < \varepsilon$$

□

## Лекция XIII

6 декабря 2023 г.

### 2.9.4 Слегка другой способ построения аппроксимативной единицы

Этот способ практически повторяет способ с предыдущей лекции, но тут не требуется уметь строить бесконечно дифференцируемую функцию с компактным носителем.

Пусть  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — суммируемая функция, отнормируем её так, что  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) dx = 1$ . Теперь положим в качестве аппроксимативной единицы  $\Phi_j(t) = j^n \Phi(jt)$ . Интеграл по всему пространству

$\Phi_j$  равен 1, так как якобиан домножения на  $j$  в  $\mathbb{R}^n$  — это  $j^n$ . Наконец,

$$\int_{|x|>\delta} \Phi_j(x) dx = \int_{|x|>\delta} j^n \Phi(jx) dx = \int_{|x|>j\delta} \Phi(x) dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

Также можно вместо дискретного параметра  $j$  выбрать непрерывный параметр  $t$ . Пусть  $t$  мало, и пусть  $\phi_t = \frac{1}{t^n} \Phi\left(\frac{x}{t}\right)$  — аппроксимативные единицы.

Тогда для  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ :  $g * \phi_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{L^p} g$  — разумеется правда, так как вместо обычной сходимости можно рассматривать сходимости по последовательностям, стремящимся к нулю.

Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  — компактное множество положительной меры ( $|K| > 0$ ). Можно также положить  $\phi = \frac{\chi_K}{|K|}$ , и  $\phi_t(x) = \frac{1}{t} \phi\left(\frac{x}{t}\right)$ . Это ещё один пример аппроксимативной единицы.

## 2.10 Преобразования меры при дифференцируемом отображении

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открыто, пусть  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывно дифференцируемая инъекция, и пусть дифференциал невырожден везде в  $G$ .

Пусть  $e \subset G$  — измеримое множество. Научимся вычислять  $|F(e)|$ .

**Теорема 2.10.1.**  $|F(e)| = \int_e |J_F(x)| dx$ , где  $J_F(x)$  — якобиан отображения  $F$  в точке  $x$ .

Прежде чем приступить к доказательству данной теоремы, вспомним несколько вещей.

Так, в условиях теоремы (можно рассмотреть исчерпывающую последовательность компактов для  $G$ , на них производная ограничена и  $F$  липшицева) для всякого измеримого  $e \subset G$ :  $F(e)$  измеримо по Лебегу, и  $|e| = 0 \Rightarrow |F(e)| = 0$ .

Рассмотрим некоторое расширение понятия меры. Пусть  $(S, \Sigma)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.

**Определение 2.10.1** (Знакопеременная мера). Счётно-аддитивная (необязательно положительная) функция  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Счётная аддитивность понимается в обычном смысле: для непересекающихся

$$e_j \in \Sigma : \nu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(e_j).$$

Из определения сразу следует, что сходимость должна быть абсолютной: формула верна с любой перестановкой.

Иногда такую меру называют *зарядом* — если обычная мера является аналогом массы, распределённой по всему пространству, то знакопеременная — аналог заряда, который сокращается при разных знаках.

*Примеры* (Знакопеременная мера).

- Пусть  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Можно определить  $\nu(e) = \int_e g(x) dx$ . Интеграл счётно-аддитивен, значит,  $\nu$  — знакопеременная мера.
- Есть и другие меры (например,  $\delta_0$  — мера всякого множества равна 1, если оно содержит 0, и 0 иначе.)

Пусть  $(S, \Sigma, \lambda)$  — пространство с мерой  $\lambda \geq 0$ ; предположим, что  $\lambda$  —  $\sigma$ -конечна. Пусть  $\nu$  — знакопеременная мера на  $\Sigma$ .

**Определение 2.10.2** ( $\nu$  абсолютно непрерывна относительно  $\lambda$ ).  $\forall e \in \Sigma : \lambda(e) = 0 \Rightarrow \nu(e) = 0$ .

*Интересный факт* (Теорема Радона — Никодима). Следующие два условия эквивалентны.

- $\nu$  абсолютно непрерывна относительно  $\lambda$ .
- $\exists g \in L^1(\lambda) : \forall e \in \Sigma : \nu(e) = \int_e g d\lambda$ .

Это весьма фундаментальная теорема, и у неё довольно длинное непростое доказательство. Нам эту теорему докажут в курсе функционального анализа, так как там есть некий трюк с гильбертовыми пространствами, позволяющий существенно упростить доказательство.

Если такая  $g$  существует, то она называется *плотностью* меры  $\mu$  относительно меры  $\lambda$ . Также  $g$  зовут *производная Радона — Никодима*, причины к чему мы увидим ниже.

*Замечание.* Плотность абсолютно непрерывной меры  $\nu$  единственна.

*Доказательство.* Если  $g_1, g_2$  — две различные плотности, то  $\forall e : \nu(e) = \int_e g_1 d\lambda = \int_e g_2 d\lambda$ , и значит  $\int_e (g_1 - g_2) d\lambda = 0$ . Рассматривая положительные и отрицательные части этой разности, получим, что она равна нулю почти всюду, что и требовалось.  $\square$

*Замечание.*  $\nu \geq 0 \iff$  плотность  $g \geq 0$ .

*Доказательство.*  $g$  не может быть отрицательной на множестве положительной меры  $e$ , иначе бы было  $\nu(e) < 0$   $\square$

Вернёмся к ситуации дифференцируемого отображения  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Определим  $\nu(e) = |F(e)|$  — образ меры Лебега  $\lambda_n$  на  $F(G)$  при отображении  $F^{-1}$ .  $\nu$  — мера на  $G$ , определённая на той же алгебре  $\lambda_n$ -измеримых подмножеств  $\Sigma \subset 2^G$  (да?).

Факт  $|e| = 0 \Rightarrow \nu(e) = 0$  как раз и говорит, что  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега  $\lambda_n$  на  $G$ .

Рассмотрим  $U = F(G)$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $K_j$  — исчерпывающая последовательность компактов для  $U$ , и положим  $L_j := F^{-1}(K_j)$ . Тогда  $L_j$  — исчерпывающая последовательность компактов для  $G$ , но нам важно даже не то, что они компактны, а то, что  $\forall j : \nu(L_j) < \infty$ .

Теперь рассмотрим *сужение меры*  $\nu$  на  $L_j$  — это не совсем сужение в теоретико-множественном смысле, а просто мера, определённая на подмножествах  $L_j$ . Это сужение конечно, и тогда по теореме Радона — Никодима  $\exists g \in L^1(L_j)$ , такая, что  $\forall e \in L_j : \nu(e) = \int_e g_j d\lambda$ .

Теперь рассмотрим  $g_k$  для  $k > j$ .  $\nu(e) = \int_e g_k d\lambda$ . Понятно, что  $g_k|_{L_j}$  — плотность меры  $\nu$  на  $L_j$ , и получается, что эти плотности согласованы: из единственности плотности  $g_k|_{L_j} = g_j$  почти всюду. Тогда они «склеиваются» в одну измеримую функцию  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой всё верно:  $\forall e \in G : |F(e \cap L_j)| = \int_{e \cap L_j} g d\lambda$ , и можно перейти к пределу. Не исключено, что полученная  $g$  не суммируема, что естественно — образ маленького множества даже при дифференцируемом отображении может очень сильно растянуться.

**Следствие 2.10.1** (Вывод из теоремы Радона — Никодима).  $\exists g : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , измеримая по Лебегу, такая, что  $|F(e)| = \int_e g(x) dx$ .

Таким образом, такая функция  $g$  найдётся, осталось её как-то найти, а точнее, доказать, что это  $|J_F(x)|$ .

*Вопрос.* Как искать плотность  $h$  у (вообще говоря знакопеременной) меры  $\nu$  на  $G$ , если известно, что такая плотность есть?

Известно, что  $\nu(e) = \int_e h(x) dx$ . Предположим, что данная функция  $h$  локально суммируема:  $\forall x \in G : \exists U \ni x : \int_U |h(x)| dx < \infty$ . Функция, полученная из теоремы Радона — Никодима, именно такая.

Значит, плотность можно искать по кусочкам:  $\forall e \in U \cap G : \nu(e) = \int_e h(x) \chi_U(x) dx$ .

*Интересный факт* (Теорема о дифференцировании). Пусть  $B_r$  — шар (или куб) радиуса  $r$  с центром в  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда в этих условиях ( $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ) — локально суммируема,  $\nu(e) = \int_e h(x) dx$  почти всюду  $h(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \nu(x + B_r)$ .

В случае одномерного пространства  $n = 1$  это оказывается теоремой Ньютона — Лейбница. Если  $h$  непрерывна в  $x$ , то доказательство работает то же самое, но оказывается, что это правда не только в случае непрерывной  $h$ .

**Теорема 2.10.2** (Слабая теорема о дифференцировании).  $\forall h \in L^1(\mathbb{R}^n) : \exists$  последовательность  $r_n : r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , и почти всюду

$$\frac{1}{|B_{r_n}|} \int_{x+B_{r_n}} h(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(x)$$

*Доказательство.* Это, конечно, частный случай теоремы о дифференцировании, но зато доказывається проще.

Построим аппроксимативную единицу по функции  $\phi := \frac{1}{|B_1|} \chi_{B_1}$ .

Она будет иметь вид  $\phi_r(x) = \frac{1}{r^n} \phi\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r^n |B_1|} \phi\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{|B_r|} \chi_{B_r}(x)$ . Известно, что  $h * \phi_r \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{L^1(\mathbb{R}^n)} h$ .

Запишем

$$h * \phi_r = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \phi_r(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) \frac{1}{|B_r|} \chi_{B_r}(x - y) dy = \frac{1}{|B_r|} \int_{|x-y| < r} h(y) dy$$

Справа как раз стоит выражение, про которое мы хотим показать, что стремится к  $h(x)$ . Сходимость в  $L^1$  означает сходимость по мере, а раз имеется сходимость по мере, то имеется последовательность  $r_n$ , стремящаяся к нулю, такая что  $h * \phi_{r_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$  почти всюду.  $\square$

Осталось доказать, что всюду

$$\frac{|F(x + B_r)|}{|B_r|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} |J_F(x)| \quad (*)$$

Доказав это, мы получим, что так как левая часть почти всюду сходится к плотности  $h$ , и тогда окажется, что плотность как раз равна модулю якобиана.

**Лемма 2.10.1** (Об искажении). Пусть  $H : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , выберем  $x_0 \in U$ , пусть  $H$  непрерывно дифференцируемо и  $d_H(x_0, \_) = E$ , тождественный оператор. Положим  $y_0 := H(x_0)$ . Утверждается, что  $\forall \varepsilon \in (0, 1) : \exists \delta > 0 : r \in (0, \delta) \Rightarrow B_{r(1-\varepsilon)}(y_0) \subset H(B_r(x_0)) \subset B_{r(1+\varepsilon)}(y_0)$ .

*Доказательство.* Выберем маленький  $u \in \mathbb{R}^n$ . По определению дифференцируемости  $H(x_0 + u) = y_0 + \underbrace{d_H(x_0, u)}_u + v(u)$ , где  $v(u) = o(|u|)$ .

Выберем  $\varepsilon \in (0, 1)$ , по определению  $o$ -маленького:  $\exists \delta > 0 : |u| < \delta \Rightarrow |v(u)| < \varepsilon|u|$ . Тогда, действительно,  $r < \delta \Rightarrow |H(x_0 + u) - y_0| \leq |u| + |v(u)| \leq (1 + \varepsilon)|u| \leq (1 + \varepsilon)r$ . Это доказывает правое включение.

Для доказательства левого включения возьмём  $H^{-1}$ , определённое в некоторой окрестности  $y_0$ , причём  $d_{H^{-1}}(y_0, \_) = E$ . Здесь уже доказано  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \rho < \delta \Rightarrow H^{-1}(B_\rho(y_0)) \subset B_{\rho(1+\varepsilon)}(x_0)$ .

Применяя  $H$  ко включению, получаем  $B_\rho(y_0) \subset H(B_{\rho(1+\varepsilon)}(x_0))$ . Обозначив  $r = \rho(1 + \varepsilon)$ , получаем искомое включение, так как  $B_{r(1-\varepsilon)} \subset B_{\frac{r}{1+\varepsilon}}$ .  $\square$

Приступим к доказательству (\*). Пусть  $A = d_F(x_0, \_)$ .

$$\frac{\nu(B_r(x_0))}{|B_r(x_0)|} = \frac{|F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} = \frac{|AA^{-1}F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} = |\det A| \frac{|A^{-1}F(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} = \left\| \phi := A^{-1}F \right\| = |J_F(x_0)| \frac{|\phi(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|}$$

Но раз  $\det d_\phi(x_0, \_) = E$ , то по лемме об искажении и принципу двух полицейских  $\frac{|\phi(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1$ :

$$\frac{r^n(1-\varepsilon)^nv}{r^nv} = \frac{|B_{r(1-\varepsilon)}(y_0)|}{|B_r(x_0)|} \leq \frac{|\phi(B_r(x_0))|}{|B_r(x_0)|} \leq \frac{|B_{r(1+\varepsilon)}(y_0)|}{|B_r(x_0)|} = \frac{r^n(1+\varepsilon)^nv}{r^nv}$$

## Лекция XIV

9 декабря 2023 г.

### 2.11 Мера Лебега на поверхностях

Пусть теперь  $m \leq n$ , и для  $U \subset \mathbb{R}^m$  имеется гладкое инъективное  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  со всюду невырожденным дифференциалом.

Тогда  $\forall e \subset U : f(e)$  — какая-то  $m$ -мерная поверхность в  $\mathbb{R}^n$ , и её  $n$ -мерная мера равна нулю, но есть же у поверхности какая-то площадь, и хочется уметь её вычислять.

#### 2.11.1 Частный случай линейного $f$

Пусть  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейный оператор. Тогда  $A(\mathbb{R}^m)$  — линейное подпространство размерности  $m$  в  $\mathbb{R}^n$ , и в нём есть какая-то своя  $m$ -мерная мера Лебега.

Пусть  $e \subset \mathbb{R}^m$  — измеримо. Как вычислить  $A(e)$ ?

Выберем ортонормированные базисы  $e_1, \dots, e_m$  — в  $\mathbb{R}^m$  и  $g_1, \dots, g_m$  — в  $A(\mathbb{R}^m)$ . Пусть  $T$  — матрица оператора в этих базисах:  $T_{i,j} = \langle Ae_i, g_j \rangle$ . Тогда  $\lambda(Ae) = |\det T| \cdot |e|$ .

В этой формуле есть тот недостаток, что при определении  $T$  используется произвольно выбранный базис  $g_1, \dots, g_m$  в  $A(\mathbb{R}^m)$ . От этой проблемы можно избавиться так:  $(\det T)^2 = \det(T^t T)$ . Оказывается, матрица  $T^t T$  выглядит приятно:

$$(T^t T)_{i,k} = \sum_{j=1}^m \langle Ae_i, g_j \rangle \langle Ae_k, g_j \rangle$$

Так как  $g_j$  — ортонормированный базис, то выше написано скалярное произведение  $\langle Ae_i, Ae_k \rangle$ .

Обозначим эту матрицу за  $\Gamma(A)$ :  $\Gamma(A)_{i,k} = \langle Ae_i, Ae_k \rangle$ . Эта  $\Gamma(A)$  называется *матрицей Грама* для оператора  $A$ . В частности,  $\det \Gamma(A)$  — *определитель Грама* для оператора  $A$ .

Тем самым, для линейного  $f = A : \lambda(Ae) = (\det \Gamma(A))^{1/2} |e|$ . Несложно догадаться, что для нелинейного  $f$  формула будет такая (хотя мы ещё не определили меру  $f(e)$ , но догадаться-то можно):

$$\lambda(f(e)) = \int_e (\det \Gamma(df(x, \_)))^{1/2} dx$$

Самым главным вопросом является — как определить меру Лебега на такой поверхности.

#### 2.11.2 $p$ -мера Хаусдорфа

Здесь произвольное  $p > 0$ . Нам понадобятся только случаи  $p \in \mathbb{N}$ , но теорию удобнее развивать для всех положительных  $p$ . Также всё это можно проверить в произвольном метрическом пространстве.

Пусть  $e \subset \mathbb{R}^n$  — любое (необязательно измеримое) подмножество. Пусть  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим всевозможные не более, чем счётные, покрытия этого множества системой множеств  $\{a_j\}$  ( $e \subset \bigcup_j a_j$ ),

таких, что  $\forall j : \text{diam}(a_j) \leq \varepsilon$ . Назовём любое такое покрытие  $\varepsilon$ -покрытием.

Положим  $\mu_p(e, \varepsilon) = \inf \sum_j \left( \frac{\text{diam } a_j}{2} \right)^p$ , где инфимум берётся по всем таким покрытиям  $\{a_j\}$ . Двойка в знаменателе стоит «по традиции», чтобы  $\mu_p$  было больше похоже на меру Лебега.

**Факт 2.11.1.**  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow \mu_p(e, \varepsilon_1) \geq \mu_p(e, \varepsilon_2)$ .

*Доказательство.* Все покрытия диаметра не более  $\varepsilon_2$  являются и покрытиями диаметра не более  $\varepsilon_1$ .  $\square$

Раз так, то  $\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_p(e, \varepsilon) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_p(e, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_p^*(e)$  (где-то супремум конечен, где-то бесконечен).

**Факт 2.11.2.**  $\mu_p^*$  — предмера на  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* •  $\mu_p^*(\emptyset) = 0$ .

- $e_1 \subset e_2 \Rightarrow \mu_p^*(e_1) \leq \mu_p^*(e_2)$ , так как при уменьшении множества  $\varepsilon$ -покрытий становится больше, то есть  $\forall \varepsilon > 0 : \mu_p(e_1, \varepsilon) \leq \mu_p(e_2, \varepsilon)$ .
- Осталась счётная полуаддитивность: пусть  $e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} e_k$ , тогда надо проверить, что  $\mu_p^*(e) \leq \sum_k \mu_p^*(e_k)$ .

*Доказательство.* Можно считать, что  $\forall k : \mu_p^*(e_k) < \infty$ , иначе доказывать нечего.

Возьмём  $\varepsilon > 0, \delta > 0$ , для каждого  $k$  выберем  $\varepsilon$ -покрытие  $\{a_{k,j}\}_j$  множества  $e_k$ , такое, что  $\sum_j \left(\frac{\text{diam } a_{k,j}}{2}\right)^p < \mu_p(e_k, \varepsilon) + \frac{\delta}{2^k}$ . Так как мера Хаусдорфа больше каждого из этих чисел, то они все конечны.

Таким образом,  $\{a_{k,j}\}_{k,j}$  —  $\varepsilon$ -покрытие  $e$ , откуда  $\mu_p(e, \varepsilon) \leq \sum_{j,k} \left(\frac{\text{diam } a_{k,j}}{2}\right)^p \leq \sum_k \mu_p(e_k, \varepsilon) + \delta$ .

Устремляя  $\delta \rightarrow 0$ , получаем  $\mu_p(e, \varepsilon) \leq \sum_k \mu_p(e_k, \varepsilon)$ .  $\square$

$\square$

Теперь можно применить теорему Лебега — Каратеодори, и получить настоящую меру. Хочется узнать, какие множества будут измеримыми после данной процедуры.

**Факт 2.11.3.** Если  $\text{dist}(e_1, e_2) > 0$ , то  $\mu_p^*(e_1 \sqcup e_2) = \mu_p^*(e_1) + \mu_p^*(e_2)$ .

*Доказательство.* В определении  $\mu_p(e, \varepsilon)$  можно ограничиться  $\varepsilon$ -покрытиями  $\{a_j\}$ , такими, что  $\forall j : a_j \cap e \neq \emptyset$ .

В силу счётной полуаддитивности  $\mu_p^*(e_1 \sqcup e_2) \leq \mu_p^*(e_1) + \mu_p^*(e_2)$ .

Пусть  $\delta = \text{dist}(e_1, e_2)$ , рассмотрим  $\varepsilon < \delta$ . Пусть  $\{a_j\}$  —  $\varepsilon$ -покрытие объединения, такое, что  $\forall j : a_j \cap (e_1 \cup e_2) \neq \emptyset$ . Тогда для каждого  $j : a_j \cap e_1 = \emptyset$  либо  $a_j \cap e_2 \neq \emptyset$ . Стало быть

$$\begin{aligned} \mu_p(e_1 \sqcup e_2, \varepsilon) &= \sum_j \left(\frac{\text{diam}(a_j)}{2}\right)^p = \\ &= \sum_{j: a_j \cap e_1 \neq \emptyset} \left(\frac{\text{diam}(a_j)}{2}\right)^p + \sum_{j: a_j \cap e_2 \neq \emptyset} \left(\frac{\text{diam}(a_j)}{2}\right)^p \geq \mu_p(e_1, \varepsilon) + \mu_p(e_2, \varepsilon) \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 2.11.1.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство, пусть  $\eta$  — предмера на  $X$ , причём  $\forall e_1, e_2 \subset X : \text{dist}(e_1, e_2) > 0 \Rightarrow \eta(e_1 \sqcup e_2) = \eta(e_1) + \eta(e_2)$ . Тогда все замкнутые множества в  $X$   $\eta$ -измеримы.

*Доказательство.* Пусть  $F \subset X$  замкнуто, проверим, что  $\forall a \in X : \eta(a) = \eta(a \cap F) + \eta(a \setminus F)$ . Из полуаддитивности достаточно проверять  $\eta(a) \geq \eta(a \cap F) + \eta(a \setminus F)$ .

Пусть  $F_n := \{x \in X \mid \text{dist}(x, F) < \frac{1}{n}\}$ . Из замкнутости  $F$ :  $\bigcap_{n \geq 1} F_n = F$ . Пусть  $C_n := a \setminus F_n$ .

Если  $x \in a \cap F$ , а  $y \in C_n$ , то разумеется  $\text{dist}(x, y) \geq 1/n$ . Таким образом, заведомо  $\eta(a) \geq \eta(a \cap F) + \eta(C_n)$ . Так как  $C_n$ , возрастая, в объединении дают  $a \setminus F$ , то хочется проверить, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta(C_n) = \eta(a \setminus F)$ . Запишем

$$a \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C_n \sqcup \bigsqcup_{j \geq n} (C_{j+1} \setminus C_j)$$

Из счётной полуаддитивности  $\eta(a \setminus F) \leq \eta(C_n) + \sum_{j \geq n} \eta(C_{j+1} \setminus C_j)$ , но с другой стороны  $\eta(a \setminus F) \geq \eta(C_n)$ . Значит, необходимо и достаточно доказать, что  $\sum_{j \geq n} \eta(C_{j+1} \setminus C_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ . Но это просто значит, что ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} \eta(C_{j+1} \setminus C_j)$  сходится.

Разобьём ряд на два:  $\sum_{j=2k} \eta(C_{j+1} \setminus C_j) + \sum_{j=2k+1} \eta(C_{j+1} \setminus C_j)$ . Теперь все подряд идущие слагаемые отстоят друг от друга на положительное расстояние:  $\text{dist}(C_{2k+1} \setminus C_{2k}, C_{2k-1} \setminus C_{2k-2}) > 0$ .

Стало быть,  $\forall n : \sum_{j=2k}^{j \leq n} \eta(C_{j+1} \setminus C_j) \leq \eta\left(\bigcup_{j=1}^n C_j\right) \leq \eta(a)$ . Аналогично сходится ряд  $\sum_{j=2k+1} \eta(C_{j+1} \setminus C_j)$ .  $\square$

**Следствие 2.11.1.** Все борелевские множества  $\mu_p^*$ -измеримы.

**Предложение 2.11.1.** Пусть  $E_1, E_2$  — два евклидовых пространства (возможно, разных размерностей). Пусть  $a \subset E_1$ ,  $\Phi : a \rightarrow E_2$  —  $C$ -липшицево отображение.

Тогда  $\mu_p^*(\Phi(a)) \leq C^p(\mu_p^*(a))$ .

*Доказательство.* Пусть  $\{b_j\}$  —  $\varepsilon$ -покрытие  $a$ . Тогда  $\text{diam}(\Phi(b_j)) \leq C\varepsilon$ . Иными словами,  $\{\Phi(b_j)\}_j$  —  $C\varepsilon$ -покрытие множества  $\Phi(a)$ . Таким образом,  $\mu_p(\Phi(a), C\varepsilon) \leq C^p \cdot \mu_p(a, \varepsilon)$ .  $\square$

**Следствие 2.11.2.** Мера Хаусдорфа не меняется при изометриях.

**Теорема 2.11.2.** Пусть  $a \subset \mathbb{R}^n$  — какое-то. Пусть  $\exists p > 0 : \mu_p^*(a) < \infty$ . Тогда  $\forall s > p : \mu_s^*(a) = 0$ .

*Доказательство.* Выберем  $\varepsilon > 0$ , так как  $\mu_p^*(a) < \infty$ , то  $\exists \varepsilon$ -покрытие  $\{b_j\}$  множества  $a$ , такое, что  $\sum_j \left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^p \leq \mu_p^*(a) + 1$ . Тогда  $\sum_j \left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^s = \sum_j \left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^p \underbrace{\left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^{s-p}}_{\leq \varepsilon/2}$ . Тем самым,

$$\sum_j \left(\frac{\text{diam } b_j}{2}\right)^s \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s-p} (\mu_p^*(a) + 1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$\square$

**Следствие 2.11.3.** Пусть  $\alpha := \inf \{p > 0 \mid \mu_p^*(a) < \infty\}$ . Тогда  $\mu_s^*(a) = \begin{cases} 0, & s > \alpha \\ +\infty, & s < \alpha \\ \text{что-то}, & s = \alpha \end{cases}$ .

**Определение 2.11.1** (Хаусдорфова размерность  $a \subset \mathbb{R}^n$ ). Вот это число  $\alpha$ , отвечающее  $a$ . Обозначается  $\dim_H(a)$ .

*Интересный факт.* Хаусдорфова размерность стандартного Канторова множества равна  $\frac{\log 2}{\log 3}$ .

**Теорема 2.11.3.**  $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$ .

*Доказательство.* Пусть  $K = [0, 1]^n$  — куб в  $\mathbb{R}^n$ . Докажем, что  $\mu_n^*(K) \in (0, \infty)$  (или что  $\mu_n(K) \in (0, \infty)$ , куб — борелевское множество, поэтому неважно). Так как счётное число кубов покрывает всё  $\mathbb{R}^n$  (и при сдвиге мера не меняется), то легко показать, что размерность  $\mathbb{R}^n$  такая же, как и размерность куба.

Пусть  $\{e_j\}$  — произвольное  $\varepsilon$ -покрытие куба  $K$ , и пусть  $b_j$  — шар радиуса  $\text{diam}(e_j)$ , содержащий  $e_j$ . Тогда  $\{b_j\}$  — тоже покрытие, откуда  $\sum_j |b_j| \geq |K|$ .  $n$ -мерная мера Лебега шара  $B_r \subset \mathbb{R}^n$  пропорциональна  $r^n$ . Для конкретики положим, что она равна  $cr^n$ .

$$1 = |K| \leq c \sum_j (\text{diam}(e_j))^n = 2^n c \cdot \sum_j \left( \frac{\text{diam}(e_j)}{2} \right)^n$$

В другую сторону пойдём так: разобьём куб  $K$  на диадические кубы ранга  $s$ , пусть  $K_i$  — диадические кубы ранга  $s$ , содержащиеся в  $K$ . Тогда  $\{\bar{K}_i\}_i$  образуют  $\varepsilon$ -покрытие  $K$  при  $\varepsilon = 2^{-s}\sqrt{n}$ . Отсюда получаем оценку

$$\mu_n^*(K, 2^{-s}\sqrt{n}) \leq \sum_i \left( \frac{\text{diam } K_i}{2} \right)^n = 2^{sn} \cdot \left( \frac{2^{-s}\sqrt{n}}{2} \right)^n = \left( \frac{\sqrt{n}}{2} \right)^n \quad \square$$

Размерность  $m$ -мерного подпространства в  $\mathbb{R}^n$  равна  $m$ , например, потому что оно изометрично  $\mathbb{R}^m$ .

Обозначим за  $\mu_p$  результат продолжения предмеры  $\mu_p^*$  по теореме Лебега — Каратеодори.

**Факт 2.11.4.**  $\exists C_{(m)} : C_{(m)}\mu_n = \lambda_m$ .

*Доказательство.*  $\mu_n$  не меняется при изометриях, в частности, при сдвиге. Значит, по теореме единственности, они пропорциональны.  $\square$

Пусть  $m \leq n$  (нас интересует на самом деле случай  $m < n$ , если равно, то всё и так известно), посмотрим на  $\mu_m$ .

Понятно, что  $C_{(m)}\mu_m$  совпадает с  $m$ -мерной мерой Лебега на всех  $m$ -мерных подпространствах в  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим её за  $\lambda_m$ , что имеет смысл, так как оно везде совпадает с  $\lambda_m$ , где  $\lambda_m$  определено.

Теперь научимся вычислять  $\lambda_m(f(e))$ , где  $e \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : \underbrace{U}_{\supset e} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкая инъекция.

## Лекция XV

13 декабря 2023 г.

**Теорема 2.11.4.** При сделанных предположениях  $\lambda_m(f(e)) = \int_e |\det \Gamma(d_f(x, \_))|^{1/2} dx$ .

*Доказательство.* • Сначала обоснуем вообще, что  $\dim_H(f(e)) = m$ .

**Теорема 2.11.5** (Регулярность меры Лебега).  $\forall$  измеримого по Лебегу  $e \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists$  открытое  $U \supset e : |U \setminus e| < \varepsilon$ . Кроме того,  $|e| = \sup_{K \subset e} |K|$ , где  $K$  — компакты (запись другая, так как мера любого компактного множества конечна).

*Доказательство.* — Пусть  $|e| < \infty$ . Так как оно измеримо, то  $\exists$  параллелепипеды  $\{P_j\}_j$ , такие, что  $\bigcup_j P_j \supset e$ ,  $\left| \bigcup_j P_j \right| < |e| + \varepsilon$ . Можно считать, что они открыты: параллелепипед с номером  $j$  можно раздуть так, что  $\tilde{P}_j \supset P_j$  открыт, и  $|\tilde{P}_j| < \frac{\varepsilon}{2^j} + |P_j|$ . Положим  $U := \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{P}_j$ , тогда  $U$  открыто, и  $|U| < |e| + 2\varepsilon$ .

Теперь если  $|e| = \infty$ , то воспользуемся  $\sigma$ -конечностью: пусть  $\mathbb{R}^k = \bigcup_{s=1}^{\infty} B_s$ , тогда подберём открытые  $U_s \supset (e \cap B_s) : |U_s \setminus (e \cap B_s)| < \frac{\varepsilon}{2^s}$ . Объединение  $U := \bigcup_s U_s$  подходит:  $U \supset e$ , и  $|U \setminus e| < \varepsilon$ .



- Из предыдущего пункта можно найти подходящее замкнутое множество: пусть  $a := \mathbb{R}^k \setminus e$ , найдётся открытое  $U \supset a, |U \setminus a| < \varepsilon$ , тогда для замкнутого  $F := \mathbb{R}^k \setminus U : |e \setminus F| = |U \setminus a| < \varepsilon$ .

Чтобы сделать  $F$  компактным, возьмём пересечения  $F_s := F \cap \overline{B_s}$ , где  $\mathbb{R}^k = \bigcup_{s=1}^{\infty} B_s$ . Тогда легко видеть, что  $|e| = \sup_s |F_s|$ .  $\square$

Возьмём исчерпывающую последовательность компактов  $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^m$  ( $K_i \subset \text{Int } K_{i+1}$ ).

Рассмотрим измеримое  $E \subset K_j$ .  $|E| = C_{(m)} \mu_m^*(E) < +\infty$ . Тем самым, согласно регулярности, найдутся вложенные компакты  $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots \subset E$ , такие, что  $|\Phi_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |E|$ . Положим

$$\Phi := \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi_j.$$

А раз так, то  $f(E) = f(E \setminus \Phi) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} f(\Phi_j)$ . Значит,  $f(E)$  измеримо — это объединение множества меры нуль  $f(E \setminus \Phi)$ , и счётного числа компактов  $f(\Phi_j)$ .

Получается, на измеримых подмножествах  $K_j$  корректно определена мера  $\rho := \lambda_m(f)$  ( $\rho(e) := \lambda_m(f(e))$ ).

- Пусть  $\rho(e) = \lambda_m(f(e))$  — мера на  $U$ .

**Лемма 2.11.1.**  $\rho$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега  $\lambda_m$  на  $U$ .

*Доказательство леммы.* Пусть  $\lambda_m(e) = 0$ . Тогда  $\mu_m(e) = 0$ , и так как  $f$  — локально липшицева, то  $\lambda_m(f(e)) = 0$ .  $\square$

По теореме Радона — Никодима:  $\exists g_j : K_j \rightarrow \mathbb{R}$  — неотрицательные измеримые функции, такие, что

$$\forall e \subset K_j : \rho(e) = \lambda_m(f(e)) = \int_e g_j(x) dx \quad (*)$$

Далее, как и раньше,  $g_{j+1}$  почти всюду совпадает с  $g_j$ , поэтому  $\exists g : U \rightarrow \mathbb{R}$  — искомая плотность меры.

- Осталось показать, что  $g(x) = |\det \Gamma(d_f(x, \_))|^{1/2}$ , а это делается с помощью слабой теоремы о дифференцировании.

А именно, из слабой теоремы о дифференцировании  $\exists r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 : g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_{r_n}(x)|} \int_{B_{r_n}(x)} g(y) dy$  почти всюду.

Теперь достаточно показать  $\forall x \in U : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda_m(f(B_r(x)))}{|B_r(x)|} = |\det \Gamma(d_f(x, \_))|^{1/2}$ .

Пусть  $x_0 \in U, y_0 := f(x_0)$ , тогда  $\Pi := d_f(x_0, \mathbb{R}^m)$  —  $m$ -мерная касательная плоскость к  $f$  в точке  $x_0$ . Для удобства будем считать  $y_0 = 0$  (заменяем  $f \rightsquigarrow f - y_0$ ).

В предыдущем семестре была доказана теорема о том, что  $\exists V \ni 0$ , такая, что  $A := f(U) \cap V$  задаётся в виде  $A = \{h(u) := (u, \phi(u)) \mid u \in W\}$ , где  $W \subset \Pi$  — окрестность нуля,  $\phi : \Pi \rightarrow \Pi^\perp$  — некоторое непрерывно дифференцируемое отображение, причём  $d_\phi(x_0, \_) = 0$ .

Пусть  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi$  — ортогональный проектор. Тогда  $P$  и  $h$  взаимно обратны ( $P \circ h = \text{id}$ ).

Из непрерывной дифференцируемости  $\phi$ :  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \rho > 0 : |u| \leq \rho \Rightarrow h$  — липшицево с константой не выше  $1 + \varepsilon$ :

$$h(u_1) - h(u_2) \leq |u_1 - u_2| + \underbrace{|\phi(u_1) - \phi(u_2)|}_{\leq |d_\phi(v, u_1 - u_2)|}, \text{ где некая точка } v \in [u_1, u_2].$$

Устроим  $\tilde{f} : U \rightarrow \Pi$ ,  $\tilde{f}(x) = Pf(x)$ . Заметим, что меры  $f(B_r(x_0))$  и  $\tilde{f}(B_r(x_0))$  близки. В самом деле, из 1-липшицевости  $P$ : всегда  $\mu_m(Pf(B_r(x_0))) \leq \mu_m(f(B_r(x_0)))$ , и при  $r \leq \rho$ :  $\mu_m(f(B_r(x_0))) = \mu_m(h(\tilde{f}(B_r(x_0)))) \leq (1 + \varepsilon)^m \mu_m(\tilde{f}(B_r(x_0)))$ . Отсюда видно, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_m(\tilde{f}(B_r(x_0)))}{|B_r(x_0)|} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_m(f(B_r(x_0)))}{|B_r(x_0)|}$$

Но так как  $\tilde{f}$  — отображение между двумя  $m$ -мерными евклидовыми пространствами, то можно записать  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_m(f(B_r(x_0)))}{|B_r(x_0)|} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_m(\tilde{f}(B_r(x_0)))}{|B_r(x_0)|} = |J_{\tilde{f}}(x)|$ .

Осталось заметить, что образом  $d_f(x_0, -)$  является  $\Pi$ . Значит,  $P$  не меняет дифференциал,  $d_{\tilde{f}}(x_0, -) = d_f(x_0, -)$ .  $\square$

Рассмотрим оператор  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $m < n$ . Пусть  $e_j$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^m$ , тогда  $Ae_j$  — столбцы матрицы  $A$ .

Можно посчитать определитель Грама матрицы  $A$ :  $\det(\langle Ae_i, Ae_j \rangle)_{i,j}$  по формуле Бине — Коши:  $\det(A^t A) = \sum_{I \subset [n], |I|=m} \det((A^t)_I) \det(A^I) = \sum_{I \subset [n], |I|=m} \det(A^I)^2$ .

*Примеры (Меры поверхностей).*

- Пусть  $m = 1$ . Рассмотрим путь  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ . Тогда  $d_\gamma(x_0, -) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(x_0) \\ \vdots \\ \gamma'_n(x_0) \end{pmatrix}$ , и

$|\Gamma(d_\gamma(x_0, -))| = \sqrt{|\gamma'_1(x_0)|^2 + \dots + |\gamma'_n(x_0)|^2}$ . Если  $\gamma$  инъективна, то получается формула длины пути  $\int_a^b \sqrt{|\gamma'_1(x)|^2 + \dots + |\gamma'_n(x)|^2} dx$ .

- Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$ , и отображение представляет собой график:  $F(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$ , где  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Здесь матрица Якоби  $J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 \phi(x, y) & \partial_2 \phi(x, y) \end{pmatrix}$ , где  $\partial_i$  — производная по  $i$ -му аргументу. Тем самым,  $\mu_2(F(e)) = \int_e \sqrt{1 + (\partial_1 \phi)^2 + (\partial_2 \phi)^2} d\lambda_2$ .

## 2.12 Некоторые конкретные интегралы

1. Заинтересуемся сходимостью  $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |x|^\alpha dx$ . Сделаем полярную замену  $r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ . Интеграл обращается в  $\int_1^\infty r^{n-1} r^\alpha dr \cdot \Psi(\phi_1, \dots, \phi_n)$ . Отсюда видно, что так как  $\Psi(\phi_1, \dots, \phi_n)$  интегрируемо, то интеграл сходится  $\iff n - 1 + \alpha < -1 \iff \alpha < -n$ .
2. Вычислим  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ . Разумеется, интеграл суммируем. Пусть  $I := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ .

$$I^2 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \quad (\equiv)$$

Так как функция  $e^{-x^2} e^{-y^2}$  суммируема на плоскости, то по теореме Фубини он равен двойному интегралу:

$$(\equiv) \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} dt d\phi = \pi$$

Тем самым,  $I = \sqrt{\pi}$ , и из чётности функции  $e^{-x^2}$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

## Глава 3

# Элементы общей теории меры

Пусть  $(X, \Sigma)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй, на которой мы будем рассматривать разные меры.

Так как у этих мер могут быть разные множества меры нуль, то при пополнении одной меры могут появиться новые элементы  $\Sigma$ , на которые непонятно, как продолжать другую. Поэтому здесь никаких предположений о полноте мер скорее не будет.

Здесь *мера* — счётно-аддитивная и, вообще говоря, комплексная функция  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ . Вспомним, что счётная аддитивность означает  $\nu\left(\bigsqcup_j e_j\right) = \sum_j \nu(e_j)$ .

В силу технических соображений мы запретим мере принимать бесконечные значения, хотя на самом деле их можно и разрешить.

Пусть  $\nu = \alpha + i\beta$ , где  $\alpha, \beta$  — вещественные меры ( $\alpha = \Re(\nu), \beta = \Im(\nu)$ ). Понятно, что  $\nu$  счётно-аддитивна  $\iff \alpha, \beta$  каждая счётно-аддитивна.

**Предложение 3.0.1.** Для всяких непересекающихся  $e_j$ : ряд  $\sum_j \nu(e_j)$  сходится абсолютно.

*Доказательство.* По определению сумма не зависит от перестановок слагаемых. □

**Теорема 3.0.1.** Множество значений любой комплексной (**конечной**) меры ограничено.

*Доказательство.* В пределах данного доказательства назовём множество  $a \in \Sigma$  «плохим», если  $\sup\{|\nu(b)| \mid b \subset a, b \in \Sigma\} = +\infty$ . Пусть наше пространство —  $(X, \Sigma)$ .

**Лемма 3.0.1.** Если  $e$  — плохое множество, и  $e = e_1 \sqcup e_2$ , то хотя бы одно из  $e_1$  и  $e_2$  — плохое.

*Доказательство леммы.* От противного: если оба хорошие, то и  $e$  хорошее, так как  $\forall b \subset e : b = (b \cap e_1) \cup (b \cap e_2)$ , и меры  $(b \cap e_1)$  и  $(b \cap e_2)$  ограничены. □

**Лемма 3.0.2.** Если  $e$  — плохое множество, то  $\exists F, G : F \sqcup G = e$ , такие, что  $|\nu(F)|, |\nu(G)| \geq 1$ .

*Доказательство леммы.* Так как  $e$  — плохое, то  $\exists F : |\nu(F)| \geq |\nu(e)| + 1$ . Но тогда для  $G := e \setminus F : |\nu(G)| = |\nu(e) - \nu(F)| \geq |\nu(F)| - |\nu(e)| \geq 1$ . □

От противного: пусть  $X$  — плохое. Тогда  $\exists a, b : a \sqcup b = X$ , где  $|\nu(a)|, |\nu(b)| \geq 1$ . Одно из них плохое, обозначим его через  $F_1$ , а второе обозначим  $G_1$ . Применяя ту же самую конструкцию к  $F_1$ , получим  $F_1 = F_2 \sqcup G_2$ , где  $|\nu(F_2)|, |\nu(G_2)| \geq 1$ , причём  $F_2$  — плохое.

И так далее, в итоге  $X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} G_j \sqcup \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$ .

Тогда  $\nu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} G_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(G_j)$ , ряд не сходится (члены не стремятся к нулю, например), противоречие.  $\square$

## Лекция XVI

20 декабря 2023 г.

### 3.1 Разложение Хана

Сужение меры можно определить так  $\mu|_E(a) \stackrel{def}{=} \mu(a \cap E)$ .

Иногда сужение определяют немного по-другому:  $\mu|_E(a)$  — мера, заданная как  $\mu$ , но теоретико-множественно суженная на  $\{b \in \Sigma \mid b \subset E\}$ .

Разницы особой нет (конечно, предполагается, что  $E \in \Sigma$ ), можно считать и так, и так: для множеств  $a \subset E$  оба определения идентичны.

**Теорема 3.1.1** (Хан). Пусть  $\mu$  — **конечная** вещественная мера на  $(X, \Sigma)$ . Тогда  $\exists E, F \in \Sigma : E \sqcup F = X$ , такие, что  $\mu|_E \geq 0, \mu|_F \leq 0$ . Такое  $E$ , что  $\mu|_E \geq 0$  называется *множеством положительности* (аналогично,  $F$  — *множество отрицательности*).

*Доказательство.*  $\{\mu(b) \mid b \in \Sigma\}$  ограничено (теорема 3.0.1), пусть  $M = \sup_{b \in \Sigma} \mu(b)$ . Так как  $\mu(\emptyset) = 0$ , то  $M \geq 0$ . Рассмотрим два случая.

- $M = 0$ . Тогда  $\mu \leq 0$ , и  $F := X, E := \emptyset$  подходят.
- $M > 0$ . По определению супремума  $\exists b_k \in \Sigma : M - \frac{1}{2^k} \leq \mu(b_k) \leq M$ .

**Лемма 3.1.1.** Пусть  $b \subset X$ ,  $\mu(b) = M - \varepsilon$ . Если измеримое  $e \subset b$ , то  $\mu(e) \geq -\varepsilon$ .

*Доказательство леммы.* От противного: пусть  $\exists e \subset b_k : \mu(e) < -\varepsilon$ . Тогда мера  $b_k \setminus e$  больше супремума  $M$ .  $\square$

Положим  $\overline{b_k} = \bigcup_{n \geq k} b_n$ . Оценим  $\mu(\overline{b_k})$  снизу:

$$\begin{aligned} \mu(b_k \cup b_{k+1} \cup \dots \cup b_n) &= \mu(b_k) + \mu(b_{k+1} \setminus b_k) + \mu(b_{k+2} \setminus (b_k \cup b_{k+1})) + \dots + \mu(b_n \setminus (\dots)) \geq \\ &\geq \left(M - \frac{1}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}} - \dots - \frac{1}{2^n} \geq M - \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Переходя к пределу в силу счётной аддитивности, получаем  $\mu(b_k \cup b_{k+1} \cup \dots) \geq M - \frac{1}{2^{k-1}}$ .

Теперь заметим, что  $\overline{b_1} \supset \overline{b_2} \supset \dots$ . Положим  $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{b_k}$ . В силу монотонной непрерывности  $\mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\overline{b_k}) = M$  (формально, хотя бы  $M$ , но так как  $M$  — супремум всех мер, то больше быть не может).

Теперь в силу леммы все подмножества  $E$  имеют неотрицательную меру. Положим  $F := X \setminus E$ , все подмножества  $F$  имеют неположительную меру (от противного: если  $f \subset F$  имеет положительную меру, то  $\mu(E \cup f) > M$ ).  $\square$

Такие  $E, F \subset X$  из теоремы — *разложение Хана*. Оно единственно с точностью до множества меры нуль — если  $A \subset E$  имеет меру нуль, то все его измеримые подмножества тоже имеют меру нуль, и  $(E \setminus A, F \cup A)$  — тоже разложение Хана.

Теперь можно определить *положительную* и *отрицательную части меры*  $\mu^+(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(a \cap E)$  и  $\mu^-(a) \stackrel{\text{def}}{=} -\mu(a \cap F)$ . Тогда  $\mu(a) = \mu^+(a) - \mu^-(a)$ , тем самым любая конечная вещественная мера есть разность двух неотрицательных.

**Определение 3.1.1** (Модуль меры).  $|\mu|(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mu^+(a) + \mu^-(a)$ .

Введём естественный частичный порядок на мерах:  $\mu \leq \nu \iff \forall e \in \Sigma : \mu(e) \leq \nu(e)$ .

**Предложение 3.1.1.**  $\mu^+$  есть наименьшая из неотрицательных мер  $\nu : \nu \geq \mu$ .

*Доказательство.* Пусть  $E, F$  — разложение Хана для  $\mu$ . Пусть неотрицательная  $\nu \geq \mu$ . Тогда  $\nu(a) = \nu(a \cap E) + \nu(a \cap F) \geq \mu(a \cap E) = \mu^+(a)$ .  $\square$

*Замечание.*  $\mu^- = (-\mu)^+$ .

*Замечание.* Пусть  $g : X \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ -1, & x \in F \end{cases}$ . Тогда  $\mu(e) = \int_e g d|\mu|$ .

*Доказательство.*

$$\int_e g d|\mu| = \int_{e \cap E} d|\mu| - \int_{e \cap F} d|\mu| = \int_{e \cap E} d\mu^+ - \int_{e \cap F} d\mu^- = \mu^+(e) - \mu^-(e) = \mu(e) \quad \square$$

## 3.2 Интеграл комплексных функций

Пусть  $(X, \Sigma)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй, и  $\rho$  — неотрицательная счётно-аддитивная мера.

Пусть  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$  является  $\Sigma$ -измеримым (прообраз любого борелевского множества измерим). Разложим  $\phi = \alpha + i\beta$ , где  $\alpha, \beta$  — вещественные измеримые функции.

Определим  $\int_a \phi d\rho \stackrel{\text{def}}{=} \int_a \alpha d\rho + i \int_a \beta d\rho$ . Данный интеграл обладает всеми свойствами, которые от него ожидаются — аддитивность,  $\mathbb{C}$ -линейность, счётная аддитивность по множеству, счётная аддитивность по функции.

Основную оценку интеграла удобно доказывать так:

$$\begin{aligned} \exists \theta \in \mathbb{R} : e^{i\theta} \int_a \phi d\rho &\in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \left| \int_a \phi d\rho \right| &= \Re \int_a e^{i\theta} \phi d\rho = \left| \int_a \Re(e^{i\theta} \phi) d\rho \right| \leq \int_a |e^{i\theta} \phi| d\rho = \int_a |\phi| d\rho \end{aligned}$$

Многие комплексные меры (как счётно-аддитивные функции множеств) как раз происходят из таких интегралов.

Пусть  $\mu$  — комплексная мера на  $\Sigma$ .

**Определение 3.2.1** (Полная вариация  $\mu$  на  $a \in \Sigma$ ).  $|\mu|(a) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |\mu(e_j)| \mid e_1 \sqcup \dots \sqcup e_N = a \right\}$

**Теорема 3.2.1.**  $|\mu|$  есть неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на  $\Sigma$ .

*Доказательство.* См. (теорема 3.2.2)  $\square$

*Замечание.* Если  $\mu$  вещественна, то  $|\mu|(a) = \mu^+(a) + \mu^-(a)$ , где  $|\mu|$  понимается, как полная вариация.

Иными словами, не зря модуль меры и её полную вариацию обозначают одинаково.

*Доказательство.* Если  $a \in \Sigma$ , и  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n = a$ , то  $\sum_{j=1}^n |\mu(e_j)| \leq \sum_{j=1}^n (\mu^+(e_j) + \mu^-(e_j)) = \mu^+(a) + \mu^-(a)$ .

Обратно, разобьём  $a = (a \cap E) \cup (a \cap F)$  (где  $E, F$  — разложение Хана). Тогда  $|\mu|(a) \geq |\mu(a \cap E)| + |\mu(a \cap F)| = \mu^+(a) + \mu^-(a)$ .  $\square$

**Лемма 3.2.1.** Пусть  $\rho_1, \rho_2$  — комплексные меры на  $\Sigma$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Тогда  $\forall a \in \Sigma : |(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)|(a) \leq |\alpha||\rho_1|(a) + |\beta||\rho_2|(a)$ .

*Доказательство.* Пусть  $a = e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n$ . Оценим

$$\sum_{j=1}^n |(\alpha\rho_1 + \beta\rho_2)(e_j)| \leq |\alpha| \sum_{j=1}^n |\rho_1(e_j)| + |\beta| \sum_{j=1}^n |\rho_2(e_j)| \leq |\alpha||\rho_1|(a) + |\beta||\rho_2|(a)$$

и перейдём к супремуму по всем разбиениям  $a = e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n$ .  $\square$

**Следствие 3.2.1.** Если  $\rho$  — комплексная мера, то  $\forall a : |\rho|(a) < +\infty$ .

*Доказательство.* Разложим  $\rho = \rho_1 + i\rho_2$ .  $\rho_1, \rho_2$  — вещественные меры, их модули принимают конечные значения.  $\square$

**Предложение 3.2.1.** Пусть  $\nu$  — неотрицательная (необязательно конечная) мера на  $\Sigma$ , пусть  $g$  — комплексная суммируемая (относительно  $\nu$ ) функция. Определим  $\mu(e) := \int_e g d\nu$ .

Тогда  $|\mu|(a) = \int_a |g| d\nu$ .

*Доказательство.* 0. Пусть  $g \in L^1(\nu)$ . Тогда  $|\mu|(a) \leq \int_a |g| d\nu$ . Действительно, пусть  $e_1 \sqcup \dots \sqcup e_n =$

$$a. \text{ Тогда } \sum_{j=1}^n |\mu(e_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{e_j} g d\nu \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{e_j} |g| d\nu = \int_a |g| d\nu.$$

1. Пусть  $g = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{e_j}$  — простая функция, где мы считаем, что  $e_j \in \Sigma$  попарно не пересекаются.

Рассмотрим разбиение  $a = (a \cap e_1) \sqcup \dots \sqcup (a \cap e_k) \sqcup \left( a \setminus \bigcup_{j=1}^k e_j \right)$ .

$$|\mu|(a) \geq \sum_{j=1}^k |\mu(a \cap e_j)| + \underbrace{\left| \mu \left( a \setminus \bigcup_{j=1}^k e_j \right) \right|}_{=0} = \sum_{j=1}^k \left| \int_{a \cap e_j} g d\nu \right| = \sum_{j=1}^k |c_j| \nu(a \cap e_j) = \int_a |g| d\nu$$

2. Пусть  $g \in L^1(\nu)$  ( $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ ). Выберем  $\varepsilon > 0$ . Тогда так как простые функции плотны в  $L^1$ , то  $\exists h : X \rightarrow \mathbb{C}$  — простая функция, такая, что  $\int_X |g - h| d\nu < \varepsilon$  (отдельно приблизим вещественную и мнимую части).

Пусть  $\mu_1(a) = \int_a h d\nu$ , и положим  $\mu_2 := \mu - \mu_1$ .

$$\mu(a) = \int_a h d\nu + \int_a (g - h) d\nu = \mu_1(a) + \mu_2(a)$$

$$\begin{cases} |\mu|(a) \leq |\mu_1|(a) + |\mu_2|(a) \\ |\mu_1|(a) \leq |\mu|(a) + |\mu_2|(a) \end{cases} \Rightarrow |\mu_1|(a) - |\mu_2|(a) \leq |\mu|(a) \leq |\mu_1|(a) + |\mu_2|(a)$$

Оценим  $\mu_2(a)$ :

$$|\mu_2|(a) \leq \int_a |g - h| d\nu \leq \int_X |g - h| d\nu \leq \varepsilon$$

Отсюда получается

$$\int_a |h| d\nu - \varepsilon \leq |\mu|(a) \leq \int_a |h| d\nu + \varepsilon$$

И наконец можно заменить  $h$  на  $g$ , при этом мы ошибёмся не больше, чем на  $\varepsilon$ .

$$\int_a |g| d\nu - 2\varepsilon \leq |\mu|(a) \leq \int_a |g| d\nu + 2\varepsilon$$

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

Теперь докажем теорему, сформулированную ранее.

**Теорема 3.2.2.**  $|\mu|$  есть неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на  $\Sigma$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mu$  — комплексная мера на  $\Sigma$ , разложим  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ , где  $\mu_1, \mu_2$  — вещественные меры. Пусть  $\nu = \mu_1^+ + \mu_2^+ + \mu_1^- + \mu_2^-$ . Все четыре слагаемых — абсолютно непрерывные меры относительно  $\nu$ , то есть по теореме Радона — Никодима они представляются через плотность:  $\exists g_{1,2}^\pm \in L^1(\nu) : \mu_{1,2}^\pm(e) = \int_e g_{1,2}^\pm d\nu$ .

Тогда  $|\mu|(e) = \int_e |g| d\nu$ , и действительно получаем, что  $|\mu|$  — неотрицательная конечная счётно-аддитивная мера на  $\Sigma$ . □

### 3.2.1 Интеграл по комплексной мере

Пусть  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  измерима относительно комплексной меры  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ .

$$\text{Определим } \int_a g d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_a g d\mu_1^+ - \int_a g d\mu_1^- + i \left( \int_a g d\mu_2^+ - \int_a g d\mu_2^- \right)$$

В данном определении предполагается, что  $g$  суммируема относительно всех четырёх мер. Оказывается,  $g \in L^1(\mu_{1,2}^\pm) \iff g \in L^1(|\mu|)$ , так как  $\mu_{1,2}^\pm \leq |\mu|$ .

**Лемма 3.2.2** (Линейность по мере). Пусть  $\rho, \sigma$  — две комплексные меры на  $\Sigma$ , пусть  $g$  суммируема относительно  $|\rho|$  и  $|\sigma|$ . Утверждается, что

$$\int_a g d(\rho + \sigma) = \int_a g d\rho + \int_a g d\sigma$$

*Доказательство.* Утверждается, что  $\exists \lambda$  — положительная мера на  $\Sigma$ , относительно которой  $\rho, \sigma$  абсолютно непрерывны:  $\exists u, v : X \rightarrow \mathbb{C}$ , такие, что  $\rho(e) = \int_e u d\lambda$  и  $\sigma(e) = \int_e v d\lambda$ . Например, в качестве  $\lambda$  можно взять  $\rho_1^+ + \rho_1^- + \rho_2^+ + \rho_2^- + \sigma_1^+ + \sigma_1^- + \sigma_2^+ + \sigma_2^-$ .

Разложим на вещественную и мнимую части  $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$ .

$$\int_a g d\rho = \int_a g u_1^+ d\lambda - \int_a g u_1^- d\lambda + i \left( \int_a g u_2^+ d\lambda - \int_a g u_2^- d\lambda \right) = \int_a g u d\lambda$$

Аналогично  $\int_a g d\sigma = \int_a g v d\lambda$ .

$$\int_a g d\rho + \int_a g d\sigma = \int_a g(u + v) d\lambda = \int_a g d(\rho + \sigma)$$



□

### 3.3 Разложение Лебега

Пусть  $(X, \Sigma, \lambda)$  — пространство с неотрицательной  $\sigma$ -конечной мерой  $\lambda \geq 0$ .

Пусть  $\rho$  — комплексная мера на  $\Sigma$ .

**Определение 3.3.1** ( $\rho$  абсолютно непрерывна относительно  $\lambda$ ).  $\lambda(e) = 0 \Rightarrow \rho(e) = 0$ .

**Определение 3.3.2** ( $\rho$  сингулярна относительно  $\lambda$ ).  $\exists a \in \Sigma : \lambda(a) = 0$  и  $\forall e \subset X \setminus a : |\rho|(e) = 0$ .

*Пример.* Стандартная мера Лебега  $\lambda_1$  на  $\mathbb{R}$  взаимно сингулярна точечной  $\delta$ -мере  $\delta_0$ .

**Теорема 3.3.1** (Лебег). Для произвольной комплексной меры  $\rho$  на  $\Sigma$  существует и единственно представление  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ , где  $\rho_1$  абсолютно непрерывна относительно  $\lambda$ , а  $\rho_2$  сингулярна относительно  $\lambda$ .

*Доказательство.* Положим  $A := \sup \{|\rho|(e) \mid e \in \Sigma, \lambda(e) = 0\}$ . Тогда  $\exists e_n \in \Sigma : |\rho|(e_n) > A - \frac{1}{n}$ .

Положим  $\overline{e_n} = e_n \cup e_{n+1} \cup \dots$ . Тогда  $\overline{e_1} \supset \overline{e_2} \supset \dots$ , и положим  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{e_n}$ .

В силу монотонной непрерывности  $|\rho|(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\rho|(\overline{e_n}) = A$ . Так как  $\forall n : \lambda(\overline{e_n}) = 0$ , то  $\lambda(E) = 0$ .

Разложим  $\rho_1(e) := \rho(e \setminus E), \rho_2(e) := \rho(e \cap E)$ . В таком представлении  $\rho_2$  очевидно сингулярна относительно  $\lambda$ . Абсолютную непрерывность  $\rho_1$  относительно  $\lambda$  докажем от противного.

Пусть  $\exists b \in \Sigma, b \subset X \setminus E : |\rho_1|(b) > 0, \lambda(b) = 0$ . Тогда определим  $E_1 = E \cup b$ , и окажется, что  $|\rho|(E_1) = |\rho|(E) + |\rho|(b) \geq A + |\rho_1|(b) > A$ , противоречие. □