

# Кластерные алгебры и кластерные категории. Неофициальный конспект

Лектор: Михаил Александрович Антипов  
Конспектировал Леонид Данилевич

Весенний семестр 2026 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Примеры</b>	<b>2</b>
1.0	Пентагональная рекуррента . . . . .	2
1.2	Фризы Кокстера — Конвея . . . . .	2
1.3	Координаты на грассманиане и триангуляции . . . . .	4
1.4	Классификация фризов . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Определения</b>	<b>7</b>
2.1	Колчаны и кластерные матрицы . . . . .	7
2.2	Кластерная алгебра . . . . .	8
2.3	Эффект лорановости для кластерной алгебры . . . . .	9

# Лекция I

11 февраля 2026 г.

## 1 Примеры

### 1.0 Пентагональная рекуррента

Рассмотрим рекурренту  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  с начальными данными  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , заданную соотношениями  $x_{i-1}x_{i+1} = x_i + 1$  (где сами  $x_i \in K(x, y)$  для некоторого поля  $K$ ).

Посчитаем первые несколько членов:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= y \\x_3 &= \frac{y+1}{x} \\x_4 &= \frac{x+y+1}{xy} \\x_5 &= \frac{x+1}{y} \\x_6 &= x \\x_7 &= y \\&\vdots\end{aligned}$$

Рекуррента зациклилась за 5 шагов.

Можно пытаться рассматривать вариации этого рекуррентного соотношения. Например, пусть  $x_{i-1}x_{i+1} = \begin{cases} x_i^a + 1, & i \text{ чётно} \\ x_i + 1, & i \text{ нечётно} \end{cases}$ , где  $a \in \mathbb{N}$ . Оказывается, такая рекуррента будет периодической только в случаях  $a = 1, 2, 3$ , и это соответствует тому, что в ранге 2 есть три системы корней —  $A_2$ ,  $B_2 = C_2$  и  $G_2$ .

Это простейший пример кластерной алгебры: в данном случае имеется кластер из двух переменных, которые по очереди мутируют:

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow (x_3, x_2) \rightsquigarrow (x_3, x_4) \rightsquigarrow (x_5, x_4) \leftrightarrow \dots$$

При этом две мутации одной и той же переменной подряд ничего не меняют.

Эта интерпретация показывает, почему рекуррентное соотношение разное в зависимости от чётности  $i$ : имеет значение, которая из двух переменных кластера меняется.

В общем случае вместо такого пути будет регулярное дерево степени  $n$ , полное определение мы дадим позже (подраздел 2.2).

### 1.2 Фризы Кокстера — Конвея

Фризы Кокстера — Конвея — частный случай  $SL_2$ -tilings ( $SL_2$ -замощения?).

**Определение 1.1** ( $SL_2$ -замощение). Отображение  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$  с условием  $f(i+1, j+1)f(i, j) - f(i, j+1)f(i+1, j) = 1$ .

**Определение 1.2** (Фриз Кокстера — Конвея ранга  $n$ ).  $SL_2$ -замощение  $f$  такое, что

$$f(i, j) = \begin{cases} 0, & i+j < 0 \\ 1, & i+j = 0 \\ 1, & i+j = n+1 \\ 0, & i+j > n+1 \end{cases}$$

Графически его изображают повёрнутым на  $45^\circ$ , вот так:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & a_1^1 & & a_2^1 & & a_3^1 & \\
 a_0^2 & & & a_1^2 & & a_2^2 & & a_3^2 \\
 \dots & & a_0^3 & & a_1^3 & & a_2^3 & \dots \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & b \\ a & & d \\ & c \end{array}$$

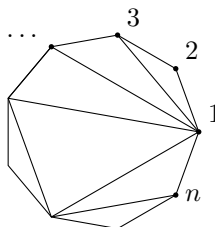
должно быть выполнено  $ad - bc = 1$

*Пример (Фриз ранга 3).*

Как видно из картинки, фриз имеет ось скользящей симметрии со сдвигом на  $\frac{n+3}{2}$  и поворотом (основания трапеции равны  $n+1$  и  $2$ ). Позже это будет видно из классификации в 1.4. Ну, надо что-то ещё потребовать, например, положительности всех элементов фриза хватит. А то, кажется, можно при желании составить башню из нескольких фризов произвольного размера, поставленных друг на друга.

**Упражнение 1.1** (Эффект лорановости). Построим фриз сверху вниз, заполнив верхнюю строку единицами, следующую — числами  $a_*^1$  произвольно, и выражая элементы снизу через элементы сверху. Тогда если все  $a_*^1 \in \mathbb{Z}$ , то и все элементы ниже тоже (это верно даже в большей общности: неважно, что это фриз, то есть что на каком-то уровне снизу будет строка единиц, а потом начнутся нули).

**Теорема 1.1** (Фриз, построенный по триангуляции). Пусть  $T$  — триангуляция правильного  $n$ -угольника:



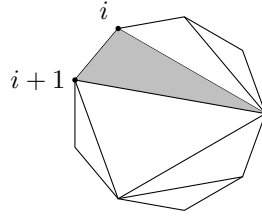
Строчка  $a_i^1 \in \mathbb{Z}$  соответствует фриз (то есть через какая-то строчка снизу будет полностью состоять из единиц) тогда и только тогда, когда  $a_i^1$  — количество треугольников, касающихся вершины  $i$  (индексы берутся по модулю  $n$ ). Например, триангуляции на рисунке соответствует фриз

1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	5	1	2	2	3	1	4	1
7	4	1	3	5	2	3	3	1
3	7	3	1	7	3	5	2	2
3	5	2	2	4	7	3	1	7
3	2	3	3	1	9	4	1	3
3	1	4	1	2	5	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1

*Доказательство в более простую сторону.* Рассмотрим двудольный граф  $\Gamma$ . В левой доле  $n$  вершин, соответствующих вершинам многоугольника, а в правой —  $n + 1$  вершина, соответствующая треугольнику. Проведём ребро, если вершина является вершиной треугольника.

Пусть  $m_{ij}$  — количество совершенных паросочетаний (из  $n + 1$  ребра), где в левой доле взяты все вершины, кроме  $i$  и  $j$ .

Ясно, что  $m_{i,i+1} = 1$ : это ребро какого-то треугольника, значит, этот треугольник берётся в паросочетание вместе с оставшейся третьей вершиной; после этого многоугольник разваливается на два, и дальше опять же все по индукции предопределено однозначно:



Аналогично проверяется, что  $m_{i-1,i+1} = a_i^1$  ( $i$ -я вершина стоит в паре с любым из инцидентных ей треугольников, после чего остальное предопределено однозначно).

Осталось применить лемму о конденсации, доказательством которой мы утруждать себя не будем:

**Лемма 1.1** (О конденсации). Пусть  $\Gamma$  — плоский двудольный граф с левой долей  $V_1$  и правой  $V_2$ , причём  $|V_1| = |V_2| + 2$ . Пусть  $i, j \in V_1$ . Обозначим через  $m_{ij}$  количество совершенных паросочетаний между  $V_1 \setminus \{i, j\}$  и  $V_2$ . Если  $a, b, c, d \in V_1$  лежат на грани данного графа в этом циклическом порядке (и, разумеется, между ними при обходе грани есть ещё какие-то вершины графа), то выполнено соотношение

$$m_{ab}m_{cd} + m_{bc}m_{ad} = m_{ac}m_{bd} \quad \square$$

Соотношение из леммы о конденсации напоминает теорему Птолемея из школьной планиметрии:

*Интересный факт* (Теорема Птолемея). У вписанного четырёхугольника произведение длин диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Также такой вид имеют соотношения в грассманиане.

### 1.3 Координаты на грассманиане и триангуляции

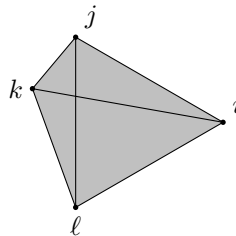
Пусть  $K$  — поле. Вспомним грассманиан  $\text{Gr}(k, n)$  — многообразие, параметризующее  $k$ -мерные подпространства в  $n$ -мерии (например, в пространстве строк  ${}^n K$ ).

Грассманиан удобно представлять себе, как множество матриц  $M_{k \times n}(K)$  с точностью до действия  $\text{GL}_k(K)$  умножениями слева.

Однородными координатами на грассманиане служат значения миноров  $k \times k$ , на которые накладываются соотношения Плюккера. В случае  $k = 2$  эти соотношения выглядят следующим образом:

$$p_{ik}p_{j\ell} = p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell} \quad (*)$$

где  $i < j < k < \ell$ , а  $p_{ij} = p_{ji}$  равен значению квадратного минора из  $i$ -го и  $j$ -го столбца. Иными словами, для матрицы  $x$ :  $p_{ij} = x_{1,\min(i,j)}x_{2,\max(i,j)} - x_{1,\max(i,j)}x_{2,\min(i,j)}$ . Изображая это правило на картинке, получаем правило Птолемея:



Из картинке ясно, что на самом деле имеет значение только циклический порядок индексов  $i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

# Лекция II

18 февраля 2026 г.

Размерность многообразия  $\text{Gr}(2, n)$  равна  $2n - 4$ , а размерность Крулля однородного координатного кольца  $K[\text{Gr}(2, n)] = K[p_{ij}]/(\star)$  на единичку больше, значит,  $2n - 3$ .

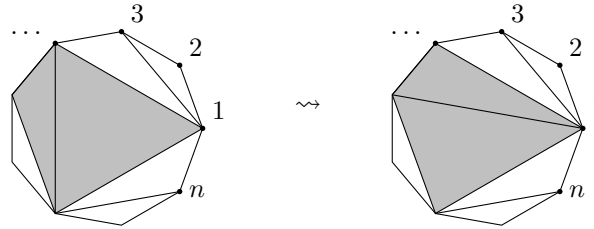
**Определение 1.3** (Матрица  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  вполне положительна). Все миноры  $A$  положительны.

Заинтересуемся схожим вопросом: когда все миноры  $2 \times 2$  в матрице  $2 \times n$  положительны? Более точно, сколько миноров надо проверить на положительность, чтобы положительность остальных последовала?

Из описания координатного кольца грассманиана ясно, что миноры матрицы — любые  $p_{ij} \in K$ , удовлетворяющие соотношениям  $(\star)$ . Так как  $\dim \mathbb{R}[\text{Gr}(2, n)] = 2n - 3$ , то такова и степень трансцендентности его поля частных, откуда ответ хотя бы  $2n - 3$ . **Это видимо не совсем строгое утверждение, так как  $\mathbb{R}$  не алгебраически замкнуто.** С другой стороны, эта оценка достигается:

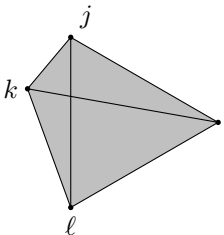
**Предложение 1.1.** Пусть  $T$  — триангуляция правильного  $n$ -угольника (множество неупорядоченных пар вершин, соединённых ребром, в том числе пары соседних вершин). Пусть  $R := \{p_{ij} \mid (i, j) \in T\}$  Тогда любой  $p_{rs}$  выражается в виде некоторой рациональной функции от элементов  $R$  с положительными коэффициентами. В частности, положительность элементов  $R$  повлечёт положительность всех миноров  $2 \times 2$ .

*Доказательство.* Рассмотрим граф, вершины которого — триангуляции  $n$ -угольника, а рёбра соответствуют флипам следующего вида:



А именно, любая хорда триангуляции является ребром двух смежных треугольников, в объединении дающих четырёхугольник. Назовём *флипом* замену данной хорды триангуляции на другую диагональ четырёхугольника. Кстати, этот граф является остовом  $(n - 3)$ -мерного ассоциэдра.

Ясно, что любая хорда  $n$ -угольника лежит в какой-то триангуляции. Без доказательства утверждается, что граф триангуляций связан. Начнём с триангуляции  $T$ , и, применяя флипы, дойдём до триангуляции, содержащей хорду  $r - s$ . Легко видеть, что  $p_{ik}$ , где  $i - k$  — хорда, появляющаяся после флипа, выражается через остальные  $p_{j\ell}$ , отвечающие хордам, присутствовавшим до флипа:

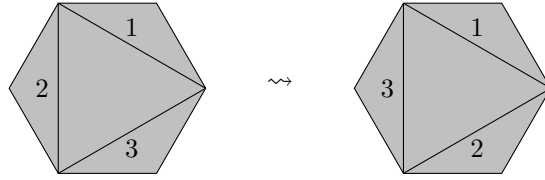
$$p_{ik} = \frac{p_{ij}p_{k\ell} + p_{jk}p_{i\ell}}{p_{j\ell}}$$

□

Эту теорему можно пытаться обобщать на разные интересные случаи — рассматривать не только триангуляции, или скажем работать не на плоскости (или её компактификации — сфере), а на поверхности с большим числом ручек. Впрочем, начиная с некоторого места она уже перестает быть верной.

Ещё пару слов про флипы и триангуляции: можно считать, что диагонали пронумерованы от 1 до  $n - 3$ , и при флипе новая диагональ нумеруется тем числом, что было написано на стираемой. Тогда получается, что на множестве триангуляций действует свободное произведение  $\underbrace{C_2 * \dots * C_2}_n$ .

Действие, разумеется, не свободное. Например, флипы диагоналей, далеко друг от друга отстоящих, коммутируют. Сами пометки на диагоналях тоже могут перемещаться:

**Упражнение 1.2.** Получите последовательностью пяти флипов из одной триангуляции шестиугольника другую:



## 1.4 Классификация фризов

Пусть  $p \in \text{Gr}(2, n)$  — точка с однородными координатами  $p_{ij}$ ; предположим, что для всех  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ :  $p_{i,i+1} = 1$ . Можно составить фриз из координат этой точки следующим образом:

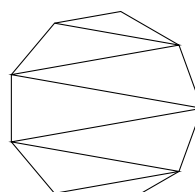
	1		1		1		1	
		$p_{1,3}$		$p_{2,4}$		$p_{3,5}$		
	$p_{n,3}$		$p_{1,4}$		$p_{2,5}$		$p_{3,6}$	
...		$p_{n,4}$		$p_{1,5}$		$p_{2,6}$		...
				$\ddots$				
		$p_{?,?-2}$		$p_{?,+1,-1}$		$p_{?,+2,?}$		
	1		1		1		1	

$\text{SL}_2$ -соотношения выполнены, так как в них превращается соотношение  $(\star)$ :

$$\begin{array}{c}
 p_{i,j} \quad p_{i+1,j} \\
 p_{i,j+1} \quad p_{i+1,j+1}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 i+1 \quad i \\
 j \quad j+1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = p_{i,i+1}p_{j,j+1} = 1
 \end{array}$$

Обратно, если есть некоторый фриз, то можно построить числа  $p_{ij}$ , удовлетворяющие соотношениям Пюккера: пройдем зигзагом вниз по фризу, и положим значения координат, соответствующим зигзаг-триангуляции, равными  $q_i$ , а остальные восстановим как в (предложение 1.1).

	1		1		1		1	
		$q_1$		$\square$		$\square$		
	$q_2$		$\square$		$\square$		$\square$	
...		$q_3$		$\square$		$\square$		...
				$\ddots$				
		$q_{n-3}$		$\square$		$\square$		
	1		1		1		1	



Далее остальные значения во фризе восстанавливаются однозначно из  $\text{SL}_2$ -соотношений, и в силу выше построенного примера, они все будут иметь вид  $p_{ij}$ . Единственность на самом деле имеет место чуть более слабая — например, она есть если все  $q_i > 0$  — тогда предложение 1.1 говорит, что все полученные координаты будут положительными. Значит, на самом деле фриз однозначно восстанавливается по  $q_i$  и на некотором открытом по Зарисскому множестве.

*Замечание.* Отсюда получается, что при условии  $p_{i,i+1} = 1$  для всех  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  точка лежит на грассманиане, если выполнены уравнения

$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = 1.$$

По-видимому, если ещё подумать, отсюда следует, что вместо всех соотношений грассманиана достаточно проверить соотношения

$$p_{i,j}p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j}p_{i,j+1} = p_{i,i+1}p_{j,j+1},$$

но я не уверен.

## 2 Определения

### 2.1 Колчаны и кластерные матрицы

**Определение 2.1** (Колчан). Произвольный ориентированный граф  $Q = (V, E)$ , в котором всё разрешено: петли, кратные рёбра, может быть даже бесконечное число вершин или рёбер. . .

**Определение 2.2** (Кластерный колчан). Конечный колчан без петель и рёбер туда-обратно (пары рёбер вида  $i \rightarrow j$  и  $j \rightarrow i$ ).

Кластерные колчаны  $Q$  взаимно однозначно соответствуют кососимметрическим матрицам: колчану  $Q$  отвечает матрица  $B_Q \in M_n(\mathbb{Z})$  (где  $n = |V|$ ):

$$(B_Q)_{i,j} = \begin{cases} \#\{i \rightarrow j\}, & \text{есть стрелки } i \rightarrow j \\ \#\{j \rightarrow i\}, & \text{есть стрелки } j \rightarrow i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Определение 2.3** (Кластерный колчан с замороженными вершинами). Кластерный колчан на  $N$  вершинах, где первые  $n \leq N$  вершин называются *незамороженными*, а последние  $N - n$  вершин называются *замороженными*, и между ними нет рёбер.

На матричном языке кластерный колчан с замороженными вершинами изображают в виде матрицы  $\tilde{B} \in M_{N \times n}(\mathbb{Z})$ , где  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ , и  $B \in M_n(\mathbb{Z})$  кососимметрическая, а  $C \in M_{(N-n) \times n}(\mathbb{Z})$  — любая.

Теоретически можно было бы считать, что кластерному колчану с замороженными вершинами отвечает кососимметрическая матрица из  $M_N(\mathbb{Z})$ , где правый нижний квадрат  $(N - n) \times (N - n)$  нулевой, но так уже не поступить с обобщением данного понятия — *кластерными матрицами*, которые мы определим чуть позже.

Пусть  $Q$  — конечный кластерный колчан,  $1 \leq i \leq n$  — незамороженная вершина.

**Определение 2.4** (Мутация  $Q$  в вершине  $i$ ). На колчанном языке это новый колчан  $M_i(Q)$ , в котором множество вершин то же самое, а множество рёбер претерпевает следующие изменения:

1. Для каждой пары вершин  $k, \ell$ , таких, что есть рёбра  $k \rightarrow i \rightarrow \ell$ , добавляем ребро  $k \rightarrow \ell$  (если рёбер  $k \rightarrow i$  всего  $n_k$  штук, а рёбер  $i \rightarrow \ell$  всего  $n_\ell$  штук, то мы добавим  $n_k \cdot n_\ell$  рёбер).
2. Разворачиваем стрелки, инцидентные  $i$ .
3. Стираем всевозможные противонаправленные пары (если было  $t$  рёбер в одну сторону, и  $\ell$  в другую, то останется  $|t - \ell|$  понятно в какую сторону).

На матричном языке мутация выглядит так: из  $B_Q = (b_{ij})$  получается  $B_{M_i(Q)} =: M_i(B_Q) = (b'_{ij})$ :

$$b'_{pq} = \begin{cases} -b_{pq}, & i = p \text{ или } i = q \\ b_{pq} + b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} > 0 \\ b_{pq} - b_{pi}b_{iq}, & b_{pi}, b_{iq} < 0 \\ b_{pq}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (\Delta)$$

*Замечание.* Это инволюция: две мутации подряд в одной и той же вершине не меняют колчан.

*Пример.* Пусть  $v$  — сток или исток. Мутация в вершине  $v$  — разворот рёбер, инцидентных  $v$ .

**Упражнение 2.1.** Если  $Q$  — дерево на  $n$  вершинах, то мутациями в истоках и стоках можно получить любую ориентацию всех  $n - 1$  рёбер.

Этот факт известен даже среди алгебраистов, и отвечает следующему утверждению: категории модулей над некоторыми конечномерными алгебрами почти эквивалентны в некотором смысле, **вроде так**.

Однако если делать мутации не в источниках и стоках, то даже какой-нибудь путь может претерпевать очень значительные изменения. Тем не менее, верен следующий факт:

*Интересный факт.* Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  — два кластерных колчана без ориентированных циклов на одном множестве вершин. Предположим, что они эквивалентны: существует последовательность мутаций, превращающих один в другой. Тогда  $Q_2$  получается из  $Q_1$  только при помощи мутаций в источниках и стоках. В частности, они изоморфны как неориентированные графы.

Что любопытно, комбинаторное доказательство этой теоремы неизвестно, а вот с помощью кластерных категорий доказательство существует уже давно.

**Определение 2.5** (Матрица  $B' \in M_n(\mathbb{Z})$  кососимметризуема). Существуют  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  при  $d_i > 0$  и кососимметричная  $B \in M_n(\mathbb{Z})$ :  $B'D = DB$ .

**Определение 2.6** (Кластерная матрица).  $\tilde{B} \in M_{N,n}(\mathbb{Z})$ , такая что верхний квадрат  $n \times n$  — кососимметризуемая матрица, а нижний прямоугольник — любая.

Мутацию в незамороженной вершине  $1 \leq i \leq n$  кластерной матрицы определим по формуле  $(\Delta)$ .

**Утверждение 2.1.** Мутация по-прежнему инволюция; кососимметризуемость верхнего квадрата сохраняется после мутации;  $M_i$  коммутирует с транспонированием  $B \mapsto B^t$  и разворотом всех рёбер  $\tilde{B} \mapsto -\tilde{B}$ . Если  $b_{ij} = b_{ji} = 0$ , то  $M_i(M_j(\tilde{B})) = M_j(M_i(\tilde{B}))$ .

*Доказательство.* Не совсем очевидно, но проверяется в лоб. □

## 2.2 Кластерная алгебра

Обозначим через  $T_n$  регулярное дерево степени  $n$  с неориентированными рёбрами, покрашенными числами  $1, \dots, n$ . Иными словами, граф Кэли для  $\underbrace{C_2 * \dots * C_2}_n$ . Отметим некоторую вершину  $t_0$ .

Теперь пусть  $K$  — поле,  $\tilde{B} \in M_{N \times n}(\mathbb{Z})$  — кластерная матрица. Для определения кластерной алгебры нам потребуется следующий набор данных:

- Отображение  $\tilde{B}$ , сопоставляющее каждой вершине  $T_n$  по кластерной матрице  $N \times n$ , такое что для любых вершин  $t_1$  и  $t_2$ , соединённых ребром цвета  $i$ , выполнено соотношение  $\tilde{B}(t_2) = M_i(\tilde{B}(t_1))$ . Ясно, что задать такое отображение — всё равно, что задать начальную кластерную матрицу  $\tilde{B}(t_0)$ , остальные определяются однозначно.
- Отображение  $x : V(T_n) \rightarrow K(x_1, \dots, x_N)^N$ . Вектор  $x(t) = (x_1^t, \dots, x_N^t)$  называется *расширенным кластером* в вершине  $t$ , а совокупность всех элементов всех векторов зовётся *кластерными переменными*. Первые  $n$  переменных расширенного кластера формируют обычный *кластер*. При этом  $x(t_0) = (x_1, \dots, x_N)$  — *начальный кластер*, и опять же имеется связь между значениями в соседних вершинах: если вершины  $t$  и  $t'$  соединены ребром цвета  $i$ ,  $x(t) = y, x(t') = y'$ , и в вершине  $i$  стоит матрица  $B(t) = (b_{ij})$  то при  $j \neq i$ :  $y_j = y'_j$ , а при  $j = i$  выполнено соотношение:

$$y_i y'_i = \prod_{b_{ki} > 0} y_k^{b_{ki}} + \prod_{b_{ki} < 0} y_k^{-b_{ki}}. \quad (\leftrightarrow)$$

Так как при мутации в вершине  $i$  элементы соответствующих строки и столбца кластерной матрицы меняют знаки, это соотношение не зависит от того, какой из концов ребра мы назначаем в качестве  $t$ , а какой — в качестве  $t'$ .

Пару  $(x(t_0), \tilde{B}(t_0))$  называют *кластерным зерном* (cluster seed).



**Определение 2.7** (Кластерная алгебра  $A(B)$ ). Подалгебра в  $K(x_1, \dots, x_N)$ , порождённая кластерными переменными.

И это ещё не самое общее определение, здесь мы определили так называемую *кластерную алгебру геометрического типа*. Но других у нас, вероятно, не будет.

Этот тип называется геометрическим, так как однородное кольцо грассманиана и некоторых других интересных многообразий — такие кластерные алгебры.

## Лекция III

25 февраля 2026 г.

На самом деле, условие кососимметризуемости не особо существенно, мы будем использовать только кососимметричность по знаку:  $\text{sgn}(b_{ij}) = -\text{sgn}(b_{ji})$ . На кососимметризуемые матрицы можно смотреть, как на класс кососимметричных по знаку матриц, замкнутых относительно мутаций.

### 2.3 Эффект лорановости для кластерной алгебры

*Замечание.* Соотношение  $(\leftrightarrow)$  ещё можно переписать в виде

$$y_i y'_i = \prod_{b_{ki} > 0} y_k^{b_{ki}} \left( 1 + \prod_k y_k^{-b_{ki}} \right).$$

*Замечание.* В кластерную алгебру  $A$ , задаваемую зерном  $(X, \tilde{B})$ , можно добавлять или убирать (подставляя  $x_i := 1$ ) замороженные переменные. При этом для согласованности надо также добавлять или убирать строки в  $\tilde{B}$ .

*Замечание.* Также можно замораживать ранее незамороженные переменные, стирая при этом соответствующий столбец матрицы  $\tilde{B}$ .

**Теорема 2.1** (Эффект лорановости). Пусть  $M = \left\{ \prod_{a_i \geq 0} x_i^{a_i} \right\}$  — мультипликативная система всех мономов кольца многочленов. Утверждается, что  $A \subset L := M^{-1}K[x_1, \dots, x_N]$ . Иными словами, любая кластерная переменная — ряд Лорана относительно переменных начального (отсюда ясно, что на самом деле любого) кластера.

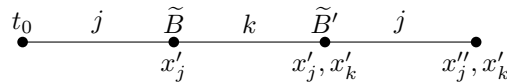
*Доказательство.* Доказательство не особо идейное, надо просто проверить, что все детали определения хорошо придуманы.

Пусть  $X = (x_1, \dots, x_N)$  — начальный кластер. Любой другой кластер имеет вид  $M_{i_s} \cdot \dots \cdot M_{i_1}(X)$ . Доказывать будем индукцией по  $s$ .

База:  $s = 1$  ясно, и на самом деле ясно даже  $s = 2$ :  $M_j(M_i(X))$  при  $j \neq i$  — рациональная функция от переменных начального кластера с делением только на мономы от них самих.

Переход: Рассмотрим несколько случаев.

- Пусть  $s = 3$ ,  $i_1 = i_3 = j$ ,  $i_2 = k$ :



Для некоторых мономов  $M_i$

$$x'_j = \frac{M_1 + M_2}{x_j}, \quad x'_k = \frac{M_3 + M_4}{x_k}, \quad x''_j = \frac{M_5 + M_6}{x'_j} = \frac{M_5 + M_6}{M_1 + M_2} x_j.$$

Значит, достаточно проверить, что в  $L$ :  $M_5 + M_6$  делится на  $M_1 + M_2$ .

Без потери общности  $b_{jk} > 0$  (если одновременно поменять все знаки элементов  $\widetilde{B}$ , то кластерные переменные останутся прежними; если же  $b_{jk} = 0$ , то  $M_j$  и  $M_k$  коммутируют, и доказывать нечего).

В  $L$  имеет место ассоциированность  $x'_j \sim M_1 + M_2 \sim \prod_i x_i^{b_{ij}} + 1 =: P$ . Далее работаем по модулю  $P$ , так как нас интересует делимость на  $P$ .

$$x'_k = \frac{1}{x_k} \left( (x'_j)^{b_{jk}} \prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}} \right) \equiv \frac{1}{x_k} \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}} \pmod{P}$$

Далее

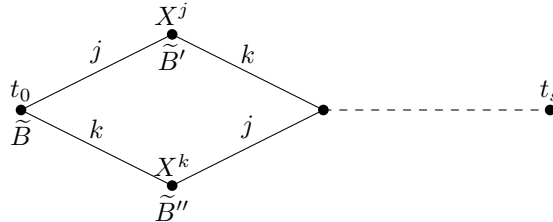
$$\begin{aligned} M_5 + M_6 &\sim (x'_k)^{b'_{kj}} \left( \prod_{i \neq k} x_i^{b'_{ij}} + 1 \right) \equiv \\ &\text{подставляем определение } x'_k \text{ и } b'_{*,j} \\ &\equiv \left( \frac{1}{x_k} \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}} \right)^{b'_{kj}} \left( \prod_{i \neq k} x_i^{b'_{ij}} + 1 \right). \end{aligned}$$

В правой части получилось в точности  $\frac{x'_k}{x_k} \equiv 0 \pmod{P}$ , так как из-за условия  $b_{kj} < 0$  по определению мутации  $b'_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - b_{ik}b_{kj}, & b_{ik} < 0 \\ b_{ij}, & b_{ik} \geq 0 \end{cases}$  при  $i \neq k$  (ну, и  $b'_{kj} = -b_{kj}$ ).

- Теперь общий случай. Индукционное предположение говорит, что меньше чем за  $s$  шагов эффект лорановости сохраняется для **любой** кластерной алгебры.

Пусть по-прежнему  $i_1 = j$ ,  $i_2 = k$ .

- Если  $b_{jk} = b_{kj} = 0$ , то первые две мутации коммутируют:



Применяя индукционное предположение для двух путей, стартовых в соседях  $t_0$  с рисунка, получаем два представления для любой переменной  $x$  в кластере  $t_s$  вида

$$x = \ell_j(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_N) = \ell_k(x_1, \dots, x'_k, \dots, x_N),$$

где  $\ell_j, \ell_k$  — некоторые лорановские многочлены. Пусть  $x'_j = M_1 + M_2$  и  $x'_k = M_3 + M_4$ . Получается,

$$x = \frac{\ell'_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{(M_1 + M_2)^{n_j}} = \frac{\ell'_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_N)}{(M_3 + M_4)^{n_k}}.$$

Кольцо многочленов факториально, значит достаточно проверить взаимную простоту  $M_1 + M_2$  и  $M_3 + M_4$ . Однако в общем случае это ничуть неверно: например, вполне может статься  $M_1 = M_3$  и  $M_2 = M_4$ .

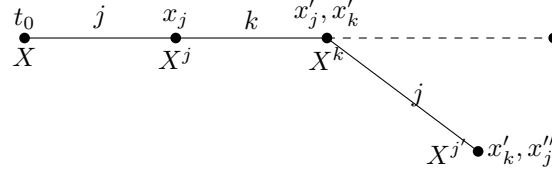
Придётся немного изменить аргумент: введём новую замороженную переменную  $x_{N+1}$ , добавляя в  $\widetilde{B}$  строчку  $e^j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (на  $j$ -м месте единица, остальные нули).

Теперь  $M_1 + M_2 = x_{N+1} \widetilde{M}_1 + M_2$ , и  $M_3 + M_4$  прежний. Значит,  $M_1 + M_2$  линеен по  $x_{N+1}$ , следовательно это произведение какого-то неприводимого многочлена и монома. Однако

$M_3 + M_4$  не содержит  $x_{N+1}$ , откуда получается  $\gcd(M_1 + M_2, M_3 + M_4)$  — какой-то моном (или просто 1, если смотреть с точностью до ассоциированности в кольце лорановских многочленов)

Осталось специализировать  $x_{N+1} := 1$ .

- Теперь считаем, что  $b_{jk} \neq 0$  (без потери общности  $b_{jk} < 0$ ). Изобразим помимо основного пути ещё ответвление цвета  $j$  от  $t_2$ :



Может статься, что  $i_3 = j$ , это ничему не мешает.

Применим дважды индукционное предположение, для путей меньшей длины, исходящих из вершин с начальными кластерами  $X^j$  и  $X^{j'}$ , получим  $x = \frac{\ell_j(x_1, \dots, x_N)}{(x'_j)^{n_j}} = \frac{\ell_k(x_1, \dots, x_N)}{(x'_k)^{n_k} \cdot (x''_j)^{n'_j}}$ .

Аналогично предыдущему пункту, введём новые переменные  $x_q$  и  $x_r$ , и добавим соответствующие им строки:  $q$ -ю равной  $e^j$  и  $r$ -ю равной  $e^k$ . Докажем, что после добавления новых переменных  $\gcd(x'_j, x'_k) = \gcd(x'_j, x''_j) = 1$ .

$$\begin{array}{c} j \\ k \\ q \\ r \end{array} \begin{pmatrix} j & k \\ 0 & -b \\ c & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_j} \begin{pmatrix} j & k \\ 0 & b \\ -c & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_k} \begin{pmatrix} j & k \\ 0 & -b \\ c & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x'_j = \frac{(x_k)^c x_q M_1 + M_2}{x_j} \quad x'_k = \frac{(x'_j)^b x_r M_3 + M_4}{x_k} \quad x''_j = \frac{x_q M_5 + x'_k M_6}{x'_j}$$

$x'_k$  линеен по  $x_r$ , значит неприводим в кольце лорановских многочленов.  $x'_j$  не содержит переменной  $x_r$ , значит,  $x'_j x'_j \not\sim x'_k$ , откуда  $\gcd(x'_j, x'_k) = 1$ . Ранее доказали, что  $x''_j$  — лорановский многочлен. Если предположить, что он не взаимно прост с (неприводимым с точностью до монома)  $x'_j$ , то получится, что числитель  $x_q M_5 + x'_k M_6$  делится как минимум на квадрат  $x'_j$ . Но они оба линейны по  $x_q$ , противоречие.  $\square$

**Упражнение 2.2.** На самом деле,  $A \subset \widetilde{M}^{-1}K[x_1, \dots, x_N]$ , где  $\widetilde{M}$  — мономы от незамороженных переменных.

Указание: хватит простой индукции: надо проверить, что степень вхождения замороженных переменных в кластерные нулевая.

Можно задать вопрос, какого вида будут соответствующие лорановские многочлены. Некоторое время стояла гипотеза, что все коэффициенты положительны (в определении кластерной алгебры вычитаний никаких нет, но есть сокращение дробей; скажем,  $\frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2 - xy + y^2$ ). Ради этого ввели кластерные категории, но в данном случае мощь алгебры оказалась неоправданной: теперь есть и комбинаторное доказательство.