

# Вариационное исчисление. Неофициальный конспект

Лектор: Роман Владимирович Романов

Конспектировал Леонид Данилевич

Редактировал Максим Лаунер

IV семестр, весна 2024 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Что мы будем изучать</b>	<b>2</b>
1.1	Интегральные функционалы . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Формула первой вариации. Уравнение Эйлера — Лагранжа</b>	<b>4</b>
2.1	Лемма Дюбуа-Реймона . . . . .	4
2.2	Формула первой вариации . . . . .	4
2.3	Уравнение Эйлера — Лагранжа . . . . .	5
2.4	Случай свободных концов . . . . .	5
2.5	Случай фиксированных концов . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Условные экстремумы</b>	<b>7</b>
3.1	Случай нескольких условий . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Функционалы на кривых</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Условия трансверсальности. Задача Лагранжа</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Инвариантность уравнения Эйлера — Лагранжа</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Прямые методы вариационного исчисления</b>	<b>16</b>
7.1	Поиск решения задачи Штурма — Лиувилля . . . . .	16
7.2	Построение ортонормированного базиса . . . . .	19
7.3	Нули собственных функций . . . . .	21

# Лекция I

15 февраля 2024 г.

## 1 Что мы будем изучать

Вариационное исчисление занимается поиском экстремумов в задаче, где число переменных бесконечно.

Рассмотрим конечномерную ситуацию. Пусть имеется  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $M$  — какое-то многообразие.

При поиске экстремумов формируются следующие направления:

1. Необходимое условие:  $(\nabla f)(x) = 0$ .
2. Достаточное: форма  $(D^2 f)(x)$  знакопределён ( $> < 0$ ).
3. Поиск экстремумов сужения  $f|_N$  на подмногообразие (метод множителей Лагранжа).

В случае вариационного исчисления вместо  $M$  стоит некоторое бесконечномерное пространство, например, пространство функций. В основном мы будем заниматься аналогами 1 и 3 пунктов.

Функция, которая в свою очередь задана на пространстве функций часто называется *функционалом*. Чтобы визуально различать «обычные» функции, и функционалы, образ точки  $f$  под действием функционала  $J$  будем обозначать  $J[f]$ .

Пускай  $X$  — (пока произвольное) метрическое пространство,  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  — функция.

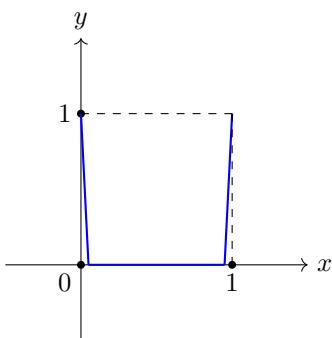
**Определение 1.1** ( $x \in X$  — строгий локальный минимум).  $\exists \delta > 0 : \forall y \in U_\delta(x) : J[y] > J[x]$ .

Аналогично определяются нестрогий минимум и максимумы. Также стоит вспомнить про существование глобальных строгих и нестрогих минимумов и максимумов.

*Пример* (Чего такого особенного в бесконечномерии?). Пусть  $X = \{f \in C[0, 1] | f(0) = f(1) = 1\}$ , норма на  $C[0, 1]$  определена формулой  $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ .

Пусть  $J[f] := \int_0^1 f^2(x) dx$ . Очевидно,  $J$  непрерывен.

Ясно, что  $\forall f \in X : J[f] > 0$ . С другой стороны,  $\inf_{f \in X} J[f] = 0$  — можно рассматривать функции вида



С третьей стороны,  $X$  замкнуто: равномерный предел равномерных непрерывен, и условия на значения на концах уважают предел. Получается, в данном случае теорема Кантора не работает. В чём дело?

Оказывается, проблема в том, что нет компактности: в бесконечномерном пространстве замкнутое ограниченное множество необязательно компактно.

## 1.1 Интегральные функционалы

В дальнейшем мы будем рассматривать не произвольные функционалы, а ограничимся некоторым их подмножеством.

Пусть задано непрерывное  $L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , положим  $J[u] := \int_a^b L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$ . Мы будем заниматься множеством  $X = C^1[a, b] = C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$  (далее не будем указывать область значений, ясно из контекста) и его замкнутыми подмножествами.

Такие  $J$  называются *интегральными функционалами*. Мы их изучаем, так как на них возможна богатая теория, и вместе с тем, интегральные функционалы часто встречаются в приложениях.

*Примеры.*

- $X = \{u \in C^1[a, b] \mid u(a) = u_a, u(b) = u_b\}, J[u] = \int_a^b \sqrt{1 + (u')^2} dx$  — функционал длин графиков кривых, соединяющих две данные точки.
- $J = \int_a^b (\frac{\dot{u}^2}{2} - V(u)) dx$ , где  $V$  — заданная функция. В механике называется *действием*.

Сначала убедимся, что они непрерывны.

*Замечание* (О норме). Для  $f \in C^1[a, b]$ :  $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$  — очевидно норма. В дальнейшем мы всегда будем использовать такую норму для  $C^1$ .

**Предложение 1.1.** Пусть  $X = C^1[a, b], L \in C([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Тогда интегральный функционал  $J$  непрерывен на  $X$ .

*Доказательство.* Пусть  $u, \tilde{u} \in X, \|u - \tilde{u}\| < \delta < 1$ .

$$|J[u] - J[\tilde{u}]| = \left| \int_a^b L(x, \tilde{u}(x), \dot{\tilde{u}}(x)) - L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx \right| \leqslant$$

Заметим, что  $\|(x, \tilde{u}(x), \dot{\tilde{u}}(x)) - (x, u(x), \dot{u}(x))\|_{\mathbb{R}^{2n+1}} < \delta$

Рассмотрим  $K = [a, b] \times \overline{B_{\|u\|_X+1}} \times \overline{B_{\|u\|_X+1}}$  — компакт в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

$$\leqslant \int_a^b \omega_{L|_K}(\delta) dx = (b-a)\omega_{L|_K}(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

где  $\omega$  — модуль непрерывности. Он определён, так как  $L|_K$  непрерывна на компакте.  $\square$

Пусть  $X$  — нормированное пространство (необязательно замкнутое),  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 1.2** (Производная функционала  $J$  в точке  $x$  по направлению  $h \in X$ ).

$$\delta J[x, h] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} J[x + th]$$

Иначе эту штуку называют *вариацией*  $J$  по направлению  $h$ .

*Свойства* (Вариация).

- Однородность:  $\delta J[x, ch] = c \cdot \delta J[x, h]$ .
- Не следует ожидать аддитивность. Так,  $\exists \delta J[x, h_1], \delta J[x, h_2]$  не влечёт существование  $\delta J[x, h_1 + h_2]$ , а если последнее и существует, то не обязано быть суммой.

Примеры этого были в анализе, здесь бесконечномерной специфики нет.

- Как и в конечномерном анализе, в критической (экстремальной) точке вариация (если существует) должна обращаться в нуль.

А именно,  $x \in X$  — локальный экстремум  $J$ , тогда  $\forall h : \exists \delta J[x, h] \Rightarrow \delta J[x, h] = 0$ .

*Доказательство.* Сужение  $\alpha(t) = J[x + th]$  тоже имеет локальный экстремум, значит, если производная в  $t = 0$  есть, то она равна нулю.  $\square$

## 2 Формула первой вариации. Уравнение Эйлера — Лагранжа

### 2.1 Лемма Дюбуа-Реймона

**Лемма 2.1** (Дюбуа-Реймон). Пускай  $f \in C[a, b]$ , и для всех  $\omega \in C^1[a, b]$ , таких, что  $\omega(a) = \omega(b) = 0$ , известно, что  $\int_a^b f \omega' = 0$ .

Тогда  $f \equiv \text{const}$ .

*Доказательство.* Если бы  $f$  сама была гладкой, то можно было бы интегрировать по частям.  $\int f' \omega = 0 \Rightarrow f' \equiv 0$  — можно взять  $\omega$ , сосредоточенную там, где  $f'$  одного знака.

Мы надеемся, что  $f$  — константа, то есть равна своему среднему  $\bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ .

Определим  $\omega$ , интегрируя  $f - \bar{f}$ :  $\omega(x) := \int_a^x (f(x') - \bar{f}) dx'$ . Понятно, что  $\omega \in C^1$ . Более того, несложно видеть, что  $\omega(a) = \omega(b) = 0$ .

Подставим данную  $\omega$  в посылку теоремы.

$$0 = \int_a^b f \omega' = \int_a^b (f - \bar{f}) \omega' = \int_a^b (f - \bar{f})^2 dx$$

Так как интеграл нуль, то получаем  $f \equiv \bar{f}$ .  $\square$

### 2.2 Формула первой вариации

Опять  $X = C^1[a, b]$ , и функционал того же самого вида  $J[u] = \int_a^b L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$ .

**Лемма 2.2** (Формула первой вариации). Пусть  $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Градиент  $L$  по второму и третьему аргументам будем обозначать  $\nabla_u L$  и  $\nabla_{\dot{u}} L$  соответственно, это векторы из  $\mathbb{R}^n$ .

Тогда производная  $J$  в точке  $u$  по направлению  $h$  существует, и равна

$$\int_a^b \left[ \left\langle (\nabla_u L)(t, u(t), \dot{u}(t)), h(t) \right\rangle + \left\langle (\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t), \dot{u}(t)), \dot{h}(t) \right\rangle \right] dt$$

*Доказательство.*  $J[u + \tau h] - J[u] = \int_a^b \left[ L\left(t, u(t) + \tau h(t), \dot{u}(t) + \tau \dot{h}(t)\right) - L\left(t, u(t), \dot{u}(t)\right) \right] dt$ .

Применяя формулу Лагранжа, получаем для некой  $\tau_* = \tau_*(t) \in [0, \tau]$ :

$$\begin{aligned} J[u + \tau h] - J[u] &= \tau \int_a^b \left[ \left\langle (\nabla_u L)(t, u(t) + \tau_* h(t), \dot{u}(t) + \tau_* \dot{h}(t)), h(t) \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle (\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t) + \tau_* h(t), \dot{u}(t) + \tau_* \dot{h}(t)), \dot{h}(t) \right\rangle \right] dt \end{aligned}$$

Поделив на  $\tau$ , получаем  $\frac{J[u+\tau h] - J[u]}{\tau} = \int_a^b \dots$  — вот тот, что выше.

Сперва разберёмся с первым слагаемым. Покажем, что

$$\underbrace{\int_a^b \left\langle (\nabla_u L)(t, u(t) + \tau_* h(t), \dot{u}(t) + \tau_* \dot{h}(t)), h(t) \right\rangle dt}_{I} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \underbrace{\int_a^b \left\langle (\nabla_u L)(t, u(t), \dot{u}(t)), h(t) \right\rangle dt}_{II}$$

Модуль разности аргументов не превосходит  $\tau_* \|h\|_X$ . Отсюда  $\|\nabla_u L(\dots) - \nabla_u L(\dots)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \omega_{L|_K} (\tau_* \|h\|_X)$ , здесь  $K := [a, b] \times \overline{B_{\|u\|+\|h\|}} \times \overline{B_{\|u\|+\|h\|}}$  (мы считаем, что  $\tau \leq 1$ , откуда  $\tau_* \leq 1$ ).

Значит,  $|(I) - (II)| \leq \int_a^b \omega_{L|_K} (\tau_* \|h\|) dt \leq (b-a) \omega_{L|_K} (\tau \|h\|) dt \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$ .

Таким образом, у первого слагаемого под интегралом — естественный предел. Аналогично со вторым слагаемым, получаем утверждение леммы.  $\square$

## 2.3 Уравнение Эйлера — Лагранжа

Пусть  $u \in X$  — экстремум. Тогда  $\forall h \in X : \delta J[u, h] = 0$ .

Условие обнуления градиента — некое уравнение на точку. Мы хотим уравнение на  $u(t)$ , избавимся от  $h$ . Подгоним под лемму Дюбуа-Реймона (лемма 2.1).

Введём  $R(x) := \int_a^x (\nabla_u L)(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$ . Согласно (лемма 2.2)

$$\delta J[x, h] = \int_a^b \left\langle \dot{R}(t), h(t) \right\rangle + \left\langle (\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t), \dot{u}(t)), \dot{h}(t) \right\rangle dt$$

Поскольку  $R(a) = 0$ , интегрируя по частям, получим  $\langle R(b), h(b) \rangle + \int_a^b \underbrace{\left\langle (\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t), \dot{u}(t)) - R(t), \dot{h}(t) \right\rangle}_{\xi(t)} dt$

И это равно нулю  $\forall h \in C^1[a, b]$ . Рассмотрим  $h$ , обращающийся на концах в ноль:  $h(a) = h(b) = 0$ .

Теперь  $\int_a^b \left\langle \xi(t), \dot{h}(t) \right\rangle dt = 0$ , и мы покомпонентно можем применить лемму Дюбуа-Реймона, получая  $\xi(t) = C \equiv \text{const}$ . Но  $R(t) \in C^1$ , значит,  $\nabla_{\dot{u}} L(t, u(t), \dot{u}(t)) \in C^1$  тоже.

Дифференцируя  $\xi$ , получаем уравнение:  $\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t), \dot{u}(t)) - (\nabla_u L)(t, u(t), \dot{u}(t)) = 0$ . Оно называется *уравнение Эйлера — Лагранжа*, это основное уравнение вариационного исчисления.

*Замечание.* В случае общего положения уравнение Эйлера — Лагранжа — дифференциальное второго порядка, что соответствует  $u \in C^2$ : при вычислении  $\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t), \dot{u}(t))$  появится в общем случае вторая производная  $u$ . Такая ситуация, на самом деле, довольно общая: экстремаль «регулярнее», чем произвольный элемент своего пространства (например, (предложение 2.1))).

## 2.4 Случай свободных концов

Теперь рассмотрим совсем произвольную  $h \in C^1$ , получим уравнение ( $C = \xi$  — определена выше):

$$0 = \delta J[u, h] = \langle R(b), h(b) \rangle + \int_a^b \left\langle C, \dot{h}(t) \right\rangle dt = \langle R(b), h(b) \rangle + \langle C, h(b) \rangle - \langle C, h(a) \rangle$$

1. Рассмотрим такую  $h$ , что  $h(b) = 0, h(a) = C$ . Для неё  $\delta J[u, h] = -\|C\|^2$ , значит,  $\xi = C = 0$ .

Подставляя в определение  $\xi$ , получаем  $R(a) = 0$ , то есть  $(\nabla_{\dot{u}} L)(a, u(a), \dot{u}(a)) = 0$ .

2. Теперь рассмотрим такую  $h$ , что  $h(b) = R(b)$ . В этом случае  $\delta J[u, h] = \|R(b)\|^2 \Rightarrow R(b) = 0$ . Получили  $(\nabla_{\dot{u}} L)(b, u(b), \dot{u}(b)) = 0$ .

Итак, помимо уравнения Эйлера — Лагранжа, мы получили два условия (но в разных точках) на уравнение второго порядка, можно надеяться, что хватит, чтобы найти решения (но это совсем не факт — так, может существовать одно решение, а может их вовсе не быть, или быть бесконечно много).

Подытожим в теорему.

**Теорема 2.1** (Задача со свободными концами). Пусть  $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , пусть  $X = C^1[a, b]$ , пусть  $u$  — локальный экстремум  $J$ .

Тогда

1.  $(\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t), \dot{u}(t)) \in C^1[a, b]$ .
2.  $\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{u}} L = \nabla_u L$  — уравнение Эйлера — Лагранжа.
3.  $(\nabla_{\dot{u}} L)(a, u(a), \dot{u}(a)) = 0$
4.  $(\nabla_{\dot{u}} L)(b, u(b), \dot{u}(b)) = 0$

## 2.5 Случай фиксированных концов

Теперь обсудим, что происходит, если имеются граничные условия на функции из множества, по которому ищутся экстремумы функционалов.

Рассмотрим  $X = \{f \in C^1[a, b] \mid f(a) = f_a, f(b) = f_b\}$ . Это не подпространство (не имеет линейной структуры), нельзя определить производную по направлению.

Функционал  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  задан той же формулой.

Какая здесь характеристика локальных экстремумов?

Рассмотрим  $\tilde{J} : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — с той же формулой, что и  $J$ . Тогда  $\forall u, h : \exists \delta \tilde{J}[u, h]$ .

С другой стороны, если  $h \in C^1[a, b]$ ,  $h(a) = h(b) = 0$ , то  $\forall u \in X, t \in \mathbb{R} : u + th \in X$ . Имеем право рассмотреть  $J[u + th]$ . Если  $u$  — локальный экстремум, то  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} J[u + th] = 0$ . Она существует, так как это  $\frac{d}{dt} \tilde{J}[u + th]$ .

Тем самым, такие функции  $h$  прибавлять можно, будем это тоже называть вариацией:  $\delta J[u, h]$  задаётся той же формулой. Дальше работает то же самое рассуждение, все действия те же самые, только при интегрировании по частям внеинтегральный член занулятся, никаких дополнительных соотношений не возникнет.

**Теорема 2.2** (Задача с фиксированными концами). Пусть  $L \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , пусть  $X = \{f \in C^1[a, b] \mid f(a) = f_a, f(b) = f_b\}$ , пусть  $u$  — локальный экстремум  $J$ . Тогда

1.  $(\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t), \dot{u}(t)) \in C^1[a, b]$ .
2.  $\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{u}} L = \nabla_u L$  — уравнение Эйлера — Лагранжа.

Заметим, что у нас по-прежнему два условия (теперь уже данные в самой задаче) и уравнение второго порядка, значит, по-прежнему, данных для решения задачи как раз столько, что стоит надеяться на получение решения.

## Лекция II

29 февраля 2024 г.

Распишем чуть подробнее уравнение Эйлера — Лагранжа, пусть для определённости функции скалярны ( $d = 1$ ). Если все производные определены, то оно имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{u}} + \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{u}^2} \ddot{u} \quad (*)$$

Общая теорема (теорема 2.1) говорит, что  $\nabla_{\dot{u}} L$  имеет  $C^1$  гладкость, однако совсем не утверждается, что при разложении (\*) каждое слагаемое будет гладким, или даже просто будет существовать. И правда, такого и не наблюдается.

*Контрпример.* Рассмотрим функционал  $J[u] = \int_{-1}^1 u^2(\dot{u} - 2x)^2 dx$ , где  $X = \left\{ u \in C^1[-1, 1] \mid \begin{array}{l} u(-1) = 0 \\ u(1) = 1 \end{array} \right\}$

и функцию  $u \in X$ ,  $u(t) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$ .  $u$  — экстремаль, например, потому что это глобальный минимум. При этом  $u \notin C^2$ , хотя  $\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 2u^2(\dot{u} - 2x) \equiv 0$  — бесконечно гладкая.

Что нужно потребовать, чтобы все слагаемые (\*) существовали?

В примере сам лагранжиан  $L(x, u, \dot{u}) = u^2(\dot{u} - 2x^2)$  — бесконечно гладкий. Но  $\ddot{u}$  можно выразить из (\*) только если  $\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \neq 0$ .

Следующее предложение формулируется в случае, когда  $L$  задан на  $[a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ; в общем случае сужения  $L$  на некоторое подмножество принципиально ничего не поменяется.

**Предложение 2.1.** Пусть  $L \in C^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , пусть  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{u}^2} \right) \neq 0$  везде в  $\Omega$ .

Пусть  $u$  — локальный экстремум функционала  $J$ . Утверждается, что  $u \in C^2[a, b]$ .

*Доказательство.* Введём функцию

$$\begin{aligned} \xi : [a, b] \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, v) &\mapsto (\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t), \dot{u}(t)) - (\nabla_{\dot{u}} L)(t, u(t), v) \end{aligned}$$

Согласно посылке теоремы,  $\frac{\partial}{\partial v} \xi \neq 0$  для всех  $t, v$ . Так как  $u$  — экстремум, то  $\xi \in C^1$ .

По теореме о неявной функции  $\forall t_0 \in (a, b) : \exists \delta > 0 : \{(t, v) | \xi(t, v) = 0, |t - t_0| < \delta\}$  — график некоторой функции  $v \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^d)$ . Но  $v \equiv \dot{u}|_{(t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$ . Значит,  $u \in C^2(a, b)$ .

Случай концов ( $t_0 = a, b$ ) — упражнение. □

### 3 Условные экстремумы

Согласно полуисторической, полулегендарной справке, некогда Диодона прибыла на берег некоторого африканского государства, и потребовала, на основании своего высокого происхождения, выделить ей столько земли, сколько можно опоясать ремешком из шкуры одного быка...

Напоминание конечномерного случая: пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  — область,  $f, g \in C^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{M} = \{x \in \Omega | g(x) = 0\}$ .

Заинтересуемся экстремумами сужения  $f|_{\mathcal{M}}$ . Пусть  $x_0 \in \Omega$  — экстремум. Построим кривую  $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$  так, что  $x(0) = x_0$ . Условие  $g(x(t)) \equiv 0$  влечёт, что  $f(x(t))$  имеет локальный экстремум в нуле.

Другими словами,  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x(t)) = \langle (\nabla f)(x_0), \dot{x}(t) \rangle = 0$ .

Поскольку кривую можно выбрать с любым вектором скорости, то  $(\nabla f)(x_0) \perp T_{x_0} \mathcal{M}$ . Если  $(\nabla g)(x_0) \neq 0$  в  $x_0$ , то  $T_{x_0} \mathcal{M}$  — пространство коразмерности 1. Найдём какой-нибудь вектор, перпендикулярный  $\mathcal{M}$ . Это как раз градиент:  $g(x(t)) = 0 \Rightarrow \langle (\nabla g)(x_0), \dot{x} \rangle = 0$ .

Иными словами  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla(f - \lambda g)(x_0) = 0$ . Далее для поиска экстремумов ищут критические точки  $f - \lambda g$ , выделяют те, которые в  $\mathcal{M}$ , а с обнулениями градиента  $g$  разбираются отдельно.

Пускай  $X$  — нормированное замкнутое пространство,  $G \in C^1(X)$  — задающий условие функционал. Расшифруем условие  $G \in C^1(X)$ :

- $\forall x \in X : \exists G'(x) \in X^* : |G(x + s) - G(x) - G'(x)s| = o(\|s\|)$  — сильная дифференцируемость в точке  $x$ .

- Определённое в предыдущем пункте отображение  $G' : X \rightarrow X^*$  непрерывно.

Для применения метода множителей Лагранжа нам понадобится лемма, утверждающая, что в направлении всякого вектора из  $\text{Ker } G'(x_0)$  можно пустить путь — как в конечномерном случае.

**Лемма 3.1.** Пусть  $x_0 \in \mathcal{M} := \{x \in X | G(x) = 0\}$ . Пусть  $G'(x_0) \neq 0$ .

Тогда  $\forall h \in \text{Ker } G'(x_0) : \exists x \in C^1((-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}) : x(0) = x_0, \dot{x}(0) = h$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольный  $\xi \notin \text{Ker } G'(x_0)$ . Определим  $r(t, \tau) := G[x_0 + t\xi + \tau h]$ . Ясно, что  $r \in C^1([-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ .

$r(0, 0) = 0, \frac{\partial r}{\partial t}(0, 0) = G'[x_0]\xi \neq 0$ . Применяя теорему о неявной функции, получаем  $\exists \delta > 0 : \{(t, \tau) | \tau \in (-\delta, \delta), r(t, \tau) = 0\}$  — график  $C^1$  функции  $t = t(\tau)$ , где  $t : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Проверим, что  $x : \tau \mapsto x_0 + t(\tau)\xi + \tau h$  — искомая кривая:

1. По построению  $x : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}$  — класса  $C^1$ .
2. Дифференцируя тождество  $G[x(t)] = 0$  в точке  $t = 0$ , получаем  $G'[x(0)] \cdot \dot{x}(0) = 0$ , значит,  $\dot{x}(0) \in \text{Ker } G'[x_0]$ . С другой стороны,  $\dot{x}(0) = \dot{t}(0)\xi + h$ , откуда  $\dot{t}(0) = 0$  (ведь  $\xi \notin \text{Ker } G'[x_0]$ ). Тем самым,  $\dot{x}(0) = h$ .  $\square$

Пускай  $F \in C^1(X), x_0 \in \mathcal{M}$  — точка локального экстремума сужения  $F|_{\mathcal{M}}$ .

Рассмотрим только что построенную кривую  $x(\tau)$  ( $x'(0) = h$ ). Так как  $x_0$  — экстремаль, то в частности должно быть  $\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} F[x(\tau)] = 0$ . С другой стороны, это равно  $F'[x_0] \cdot h$ .

Значит,  $\text{Ker } G'[x_0] \subset \text{Ker } F'[x_0]$ , причём  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : (F'[x_0] - \lambda G'[x_0]) = 0$  — и  $F'$ , и  $G'$  обнуляются на пространстве коразмерности 1. Формальнее, выберем  $\eta \notin \text{Ker } G'[x_0]$ , и разложим

$$\forall h \in X : h = \underbrace{\left( h - \frac{G'[x_0]h}{G'[x_0]\eta}\eta \right)}_{\in \text{Ker } G'[x_0]} + \frac{G'[x_0]h}{G'[x_0]\eta}\eta$$

Значит,  $(F'[x_0] - \lambda G'[x_0])(h) = \frac{G'[x_0]h}{G'[x_0]\eta} \cdot (F'[x_0]\eta - \lambda G'[x_0]\eta)$ . Видно, что подойдёт  $\lambda = \frac{F'[x_0]\eta}{G'[x_0]\eta}$ .

Получилась теорема:

**Теорема 3.1.** Пускай  $F, G \in C^1(X)$ , пускай  $x_0$  — точка локального экстремума  $F$  на  $\mathcal{M} := \{x \in X | G[x] = 0\}$ , пусть  $G'[x_0] \neq 0$ .

Тогда  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall h \in X : \delta(F - \lambda G)[x_0, h] = 0$  (отметим, что так как  $F, G \in C^1$ , то  $\exists \delta(F - \lambda G)$ .)

**Упражнение 3.1.** Задача с фиксированными концами

### 3.1 Случай нескольких условий

Даны  $F, G_1, \dots, G_n \in C^1(X), \mathcal{M} := \{x \in X | G_1[x] = \dots = G_n[x] = 0\}$ .

Образуем линейный оператор  $\mathbb{G}'[x_0] = \begin{pmatrix} G'_1[x_0] \\ \vdots \\ G'_n[x_0] \end{pmatrix} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  по правилу  $\mathbb{G}'[x_0]h = \begin{pmatrix} G'_1[x_0]h \\ \vdots \\ G'_n[x_0]h \end{pmatrix}$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $x_0$  — точка локального экстремума  $F$  на  $\mathcal{M}$ , пусть  $\text{Ran } \mathbb{G}'[x_0] = \mathbb{R}^n$  (иными словами  $\sum_{j=1}^n c_j G'_j[x_0] = 0 \Rightarrow \forall j : c_j = 0$ ) ( $\text{Ran}$  (от англ. range) — образ).

Тогда  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \forall h \in X : \delta(F - \sum \lambda_j G_j)[x_0, h] = 0$

**Доказательство.**

**Лемма 3.2.** В тех же предположениях невырожденности  $\text{Ran } \mathbb{G}'(x) = \mathbb{R}^n$ . Пусть  $h \in \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } G'_j[x_0]$ . Тогда  $\exists x : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{M}, x \in C^1, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = h$ .

*Доказательство леммы.*

Аналогично (лемма 3.1), тоже теорема о неявной функции.  $\square$

Полностью аналогично скалярному случаю  $n = 1$ .  $\square$

*Замечание.* Можно попробовать применить скалярную теорему с  $n = 1$  к функционалу  $G[x] = \sum_{i=1}^n G_i^2[x]$ . Однако это ничего не даст, так как  $G'[x] = 0$  везде на  $\mathcal{M}$ .

**Упражнение 3.2.** Доказать аналогичное утверждение для задачи с фиксированными концами.

Теперь применим (теорема 3.2) к случаю интегральных функционалов.

**Теорема 3.3.** Пускай  $L, r_1, \dots, r_n \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , и определены  $J[u] := \int_a^b L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$ ,  
 $R_j[u] := \int_a^b r_j(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$ .

Пусть  $u_0$  — точка локального экстремума  $J|_{\bigcap \text{Ker } R_j}$ ; оператор  $\mathbb{R}(u_0) := \begin{pmatrix} R'_1(u_0) \\ \vdots \\ R'_n(u_0) \end{pmatrix}$  имеет полный

ранг (можно явно выразить производные при помощи (лемма 2.2)). Вообще, если я правильно понимаю, лемма даёт производные по Гато, что не гарантирует существование производных по Фреше. Тем не менее, несложно видеть, что доказательство не меняется, если считать производные по Фреше — все оценки прячутся в  $o(\|h\|)$ .

Тогда

1.  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \nabla_{\dot{u}}(L - \sum \lambda_j r_j)(t, u_0(t), \dot{u}_0(t)) \in C^1[a, b]$ .
2. Выполнено уравнение Эйлера — Лагранжа:  $\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{u}}(L - \sum \lambda_j R_j) = \nabla_u(L - \sum \lambda_j R_j)$
3.  $\nabla_{\dot{u}}(L - \sum \lambda_j r_j)\Big|_{t=a} = \nabla_{\dot{u}}(L - \sum \lambda_j r_j)\Big|_{t=b} = 0$ .

*Доказательство.* Вытекает из доказательства (теорема 2.1) (там использовалось только то, что вариация обращается в нуль, а не то, что  $u_0$  — экстремаль) и (теорема 3.1).  $\square$

*Пример.* Пускай  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область, граница которой — поверхность класса  $C^1$ . Введём пространство непрерывных на этой границе функций  $X := C(\partial\Omega)$ .

Заведём  $J[\sigma] := \iint_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \frac{\sigma(x)\sigma(y) dS(x) dS(y)}{|x-y|}$ .

$J$  непрерывен на  $X$ , поскольку  $\xi : y \mapsto \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma(x)}{|x-y|} dS(x)$  непрерывно.

$$J[\sigma + s] - J[\sigma] = 2 \iint_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \frac{s(x)\sigma(y)}{|x-y|} dS(x) dS(y) + \mathcal{O}(\|s\|_C^2)$$

Также  $s \mapsto \int_{\partial\Omega} s(x)\xi(x) dx$  непрерывен, откуда  $J$  — даже функционал класса  $C^1(X)$ .

## Лекция III

14 марта 2024 г.

Заинтересуемся экстремумами с постоянным значением  $G[\sigma] = \int_{\partial\Omega} \sigma(x) dx$ . Решение будет отвечать распределению зарядов на поверхности, минимизирующему энергию системы — физический принцип говорит, что конечное положение экстремально.

Уже проверили, что  $J, G \in C^1(X)$ .

Пусть  $\sigma$  — экстремаль  $J|_{\{\sigma \in X | G(\sigma)=Q\}}$ . Тогда  $\forall h \in X: \delta(J - \lambda G)[\sigma, h] = 0$ . Посчитаем

$$\begin{aligned}\delta(J - \lambda G)[\sigma, h] &= (J - \lambda G)[\sigma + h] - (J - \lambda G)[\sigma] = \\ &= 2 \iint_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \frac{\sigma(x)h(y)}{|x-y|} dS(x) dS(y) - \lambda \int_{\partial\Omega} h(y) dS(y) + \iint_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \frac{h(x)h(y)}{|x-y|} dS(x) dS(y)\end{aligned}$$

Третье слагаемое  $O(\|h\|_X^2)$ :  $\iint \frac{1}{|x-y|}$  сходится. Заметим, что остальная часть — линейный функционал от  $h$ , где коэффициент непрерывен от  $\sigma$ . Это в точности значит, что  $J \in C^1$ .

$$J[\sigma + h] - J[\sigma] = l_\sigma(h) + o(\|h\|), \text{ где } l_\sigma : h \mapsto \iint_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \frac{\sigma(x)h(y)}{|x-y|} dS(y) = \int_{\partial\Omega} \xi(y)h(y) dS(y)$$

Запишем условие экстремальности:

$$\forall h : \delta(J - \lambda G)[\sigma, h] = 2 \int h(y) dS(y) \left( 2 \int \frac{\sigma(x) dS(x)}{|x-y|} - \lambda \right) = 0$$

По «нулевой лемме Дюбуа-Реймона», выражение в скобочках должен быть всегда нулём.

Получили

$$\boxed{\lambda = 2 \int \frac{\sigma(x) dS(x)}{|x-y|}}$$

Экстремаль  $\sigma$  ищется, как решение «интегрального уравнения»: заведём  $K : f \mapsto \int \frac{f(x) dS(x)}{|x-y|}$ , это ограниченный непрерывный интегральный оператор. Таким образом,  $\sigma$  — решение  $K\sigma = \frac{\lambda}{2} \mathbb{1}$ .

Иными словами, потенциал, создаваемый распределением заряда на самой поверхности постоянен. Такая постановка задачи не очень естественна — например, бывают точечные заряды. Естественнее было бы рассматривать задачи вида  $\sigma$  — борелевская мера на  $\partial\Omega$ ,  $J[\sigma] = \int \frac{d\sigma(x) d\sigma(y)}{|x-y|}$ . Тут уже уместно задавать вопросы о существовании интеграла, сходимости, и прочем, мы не будем это выяснять по причине нехватки аппарата.

## 4 Функционалы на кривых

В задаче Диодоны ответом является некоторая кривая, а кривая, в зависимости от того, как выбрать параметр, может не реализовываться, как график функции. С другой стороны, хотим независимость от параметризации, потому что зачем.

**Определение 4.1** (Кривая  $\gamma \in C$ ). Непрерывное отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Определение 4.2** (Параметризованная кривая  $\gamma$ ).  $\forall x \in [a, b] : \gamma'(x) \neq 0$ .

**Определение 4.3** (Кривая  $\gamma$  класса  $C^j$ ). Кривая  $\gamma \in C^j$ .

Пусть  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — две параметризованные кривые.

**Определение 4.4** (Эквивалентность кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ). Диффеоморфизм  $\kappa \in C^j([a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2])$ , такой, что  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \kappa$  и  $\forall x : \kappa'(x) > 0$ . Класс эквивалентности относительно данного отношения зовётся *ориентированная кривая*.

За  $\Gamma^j$  обозначим множество ориентированных кривых, представители которых — кривые класса  $C^j$ . Ещё используют  $\Gamma^j[a, b]$ .

Пускай  $\mathcal{F} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , пусть она однородная порядка 1 по второму аргументу:

$$\forall \lambda > 0 : \mathcal{F}(z, \lambda w) = \lambda \mathcal{F}(z, w)$$

Пусть  $\gamma : [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow \mathbb{R}^d$  — кривая класса  $C^1$ . Определим  $J[\gamma] := \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \mathcal{F}[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] dt$ .

**Предложение 4.1.** В этой ситуации  $J$  задаёт функционал на  $\Gamma^1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^d$  — два эквивалентных представителя.

$$\begin{aligned} J[\gamma_1] &= \int_{a_1}^{b_1} \mathcal{F}[\gamma_1(t), \dot{\gamma}_1(t)] dt = \int_{a_1}^{b_1} \mathcal{F}[\gamma_2(\kappa(t)), \dot{\kappa}(t) \cdot \dot{\gamma}_2(\kappa(t))] dt = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \mathcal{F}[\gamma_2(\kappa(t)), \dot{\gamma}_2(\kappa(t))] \dot{\kappa}(t) dt = \left\| \begin{array}{l} \tau = \kappa(t) \\ d\tau = \dot{\kappa}(t) dt \end{array} \right\| = \int_{a_2}^{b_2} \mathcal{F}[\gamma_2(\tau), \dot{\gamma}_2(\tau)] d\tau \quad \square \end{aligned}$$

Примеры.

- $\mathcal{F}(z, w) = |w|$ . Функционал  $J$  — длина кривой
- $\mathcal{F}(z, w) = |w| \cdot f(z)$ , где, например,  $d = 2$  (кривая плоская),  $f(z) = z_2^\alpha$  (здесь  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ).
  - При  $\alpha = 0$  это предыдущий случай.
  - При  $\alpha = -1$  это длина в гиперболической плоскости (в модули Пуанкаре в верхней полуплоскости).
  - При  $\alpha = 1$  это координата центра масс кривой, а ещё — площадь поверхности вращения.
  - При  $\alpha = -\frac{1}{2}$  это время, требуемое шарику, чтобы скатиться по жёлобу данной формы.

Пусть  $L \in C([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ,  $X = C^1[a, b]$ ,  $J[u] = \int_a^b L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$ . Превратим последний в функционал на кривой. Заведём  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{F}(z, w) = L(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, \frac{w_2}{|w_1|}, \dots, \frac{w_{n+1}}{|w_1|})|w_1|$ . Он имеет требуемую однородность. Тогда сопоставим функции  $u(t)$  кривую  $\gamma_u : t \mapsto (t, u(t))$ .

Рассмотрим  $\tilde{J}[\gamma] := \int \mathcal{F}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$ , утверждается, что если  $L$  «разумная», то  $\tilde{J}$  — функционал на кривых.

**Предложение 4.2.**  $\tilde{J}[\gamma_u] = J[u]$ .

*Доказательство.*  $\dot{\gamma}_u(t) = (1, \dot{u}(t))$ .  $\square$

**Утверждение 4.1.** Пусть  $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) \cap C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

Пусть  $\forall \lambda > 0 : \mathcal{F}(z, \lambda w) = \lambda \mathcal{F}(z, w)$ .

Пусть  $\gamma \in \Gamma^2$ ,  $\gamma : [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .  $J[\gamma] = \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \mathcal{F}[\gamma, \dot{\gamma}] dt$ ,  $E\{\gamma\} := (\nabla_z \mathcal{F})(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt}(\nabla_w \mathcal{F})(\gamma, \dot{\gamma})$ . Определение осмысленно, так как кривая параметризована, и  $\dot{\gamma} \neq 0$ , а  $\mathcal{F} \in C^2(\dots)$ .

Теперь пусть  $s \in C^2([a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ , и пусть  $s(\_, \tau)$  — параметризованная кривая. Тогда  $\frac{d}{d\tau} J[s(\_, \tau)] = \int_a^b \langle E\{s(x, \tau)\}, \frac{\partial s}{\partial \tau}(x, \tau) \rangle dx + \langle (\nabla_w \mathcal{F})(s(x, \tau), \frac{\partial s}{\partial x}(x, \tau)), \frac{\partial s}{\partial \tau}(x, \tau) \rangle \Big|_{x=a}^{x=b}$ . **Наверно, так.**

*Доказательство.* Упражнение.  $\square$

**Лемма 4.1.** Пусть  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  — представители кривой  $\gamma \in \Gamma^2$  ( $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \kappa$ ). Тогда  $(E\{\gamma_1\})(x) = \kappa'(x) (E\{\gamma_2\})(\kappa(x))$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} E\{\gamma_1\}(x) &= (\nabla_z \mathcal{F})(\gamma_1(x), \dot{\gamma}_1(x)) - \frac{d}{dx}(\nabla_w \mathcal{F})(\gamma_1(x), \dot{\gamma}_1(x)) = \\ &= \kappa'(x)(\nabla_z \mathcal{F})(\gamma_2(\kappa(x)), \dot{\gamma}'_2(\kappa(x))) - \frac{d}{dx}(\nabla_w \mathcal{F})(\gamma_1(x), \dot{\gamma}_1(x)) \quad (\textcircled{1}) \end{aligned}$$

Дифференцируя по  $w$  равенство  $\mathcal{F}(z, \lambda w) = \lambda \mathcal{F}(z, w)$ , получаем  $\lambda(\nabla_w \mathcal{F})(z, \lambda w) = \lambda(\nabla_w \mathcal{F})(z, w)$

$$(\textcircled{1}) \kappa'(x)(\nabla_z \mathcal{F})(\gamma_2(\kappa(x)), \dot{\gamma}'_2(\kappa(x))) - \kappa'(x) \frac{d}{ds} \Big|_{s=\kappa(x)} (\nabla_w \mathcal{F})(\gamma_2(s), \dot{\gamma}'_2(s)) = \kappa'(x) \cdot (E\{\gamma_2\})(\kappa(x))$$

□

**Следствие 4.1.**  $E\{\gamma_1\} \equiv 0 \iff E\{\gamma_2\} \equiv 0$  при  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ .

Заведём метрику на  $\Gamma^2$ , чтобы определить экстремумы. Пусть  $\xi : [a_\xi, b_\xi] \rightarrow \mathbb{R}^d$  и  $\nu : [a_\nu, b_\nu] \rightarrow \mathbb{R}^d$  — представители  $\gamma_\xi, \gamma_\nu \in \Gamma^2$ .

Перепараметризуем  $\xi$  и  $\nu$  так, что они определены на  $[0, 1]$ , и их скорости постоянны:  $|\dot{\xi}| \equiv \text{const}, |\dot{\nu}| \equiv \text{const}$ .

Положим  $\|\gamma_\xi - \gamma_\nu\| = \|\xi - \nu\|_{C^2[0,1]}$ .

**Упражнение 4.1.** Проверить, что это метрика на  $\Gamma^2$ .

С метрикой также пришли всевозможные локальные, глобальные, строгие, нестрогие, минимумы и максимумы.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\gamma \in \Gamma^2$  — локальный максимум  $J$ , непрерывная  $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ ,  $\forall \lambda > 0 : \mathcal{F}(z, \lambda w) = \lambda \mathcal{F}(z, w)$ .

Пусть  $\gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}^n, \mathcal{D} = \{\gamma \in \Gamma^2 \mid \gamma(a_\gamma) = \gamma_a, \gamma(b_\gamma) = \gamma_b\}$  ( $J$  задаётся на пространстве  $\mathcal{D}$ ).

Тогда  $E\{\gamma\} = 0$ .

Доказательство. Рассмотрим  $\gamma + \tau h$ , где  $h(a_\gamma) = h(b_\gamma) = 0$ ,  $h : [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow \mathbb{R}^d, h \in C^2$

Так как  $\dot{\gamma}(s) \neq 0$ , то  $\|\dot{\gamma}(s)\| \neq 0$ , и при достаточно малых  $\tau : \min \|\dot{\gamma} + \tau \dot{h}\| > \varepsilon$ . Значит, при подстановке мы попадём в область, где  $\mathcal{F} \in C^2$ , и существует  $\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} J[\gamma + \tau h] = 0$ ,

Раз  $\gamma$  — экстремум, то производная равна нулю.

$$J[\gamma + \tau h] - J[\gamma] = \tau \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} [\langle (\nabla_z \mathcal{F})(\gamma, \dot{\gamma}), h \rangle + \langle (\nabla_w \mathcal{F})(\gamma, \dot{\gamma}), h' \rangle] dt + \mathcal{O}(\tau^2)$$

Интегрируя по частям, получаем  $\int_a^b \langle E\{\gamma\}, h \rangle dt + 0 + \mathcal{O}(\tau^2)$ . Применяя «нулевую лемму Дюбуа-Реймона», получаем  $E\{\gamma\} = 0$ . □

Таким образом, мы доказали, что чтобы показать экстремальность кривой  $\gamma$ , достаточно проверить экстремальность любой её перепараметризации, а экстремальность проверяется при помощи уравнения, аналогичного уравнению Эйлера — Лагранжа:  $E\{\gamma\} = 0$ .

## Лекция IV

28 марта 2024 г.

## 5 Условия трансверсальности. Задача Лагранжа

Пусть  $J$  — функционал на кривых, концы которых должны находиться на двух заданных многообразиях  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ . Считаем, что  $J, M_1, M_2 \in C^1$ . Функционал рассматривается на пространстве  $X = \{\gamma \in \Gamma^2 \mid \gamma(a_\gamma) \in M_1, \gamma(b_\gamma) \in M_2\}$  и задан обычной интегральной формулой

$$J[\gamma] = \int \mathcal{F}[\gamma, \dot{\gamma}] dt, \text{ где } \mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) \cap C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \forall \lambda > 0 : \mathcal{F}(z, \lambda w) = \lambda \mathcal{F}(z, w)$$

Пусть  $\gamma_0$  — локальный экстремум  $J$  на  $X$ . Тогда  $\gamma_0$  — экстремум на  $\{\gamma \in X \mid \gamma(a_\gamma) = \gamma_0(a_{\gamma_0}), \gamma(b_\gamma) = \gamma_0(b_{\gamma_0})\}$ , следовательно,  $E\{\gamma_0\} = 0$ .

Изучим граничные условия. Теперь кривая вида  $\gamma_0 + \tau h$  не лежит в  $X$ , поэтому просто изучить вариацию не получится.

Попробуем подвигать один из концов кривой так, чтобы он оставался на многообразии, и через некоторое расстояние подвинутая кривая сливалась с изначальной.

Запишем это формулами. Пусть  $a := a_{\gamma_0}, b := b_{\gamma_0}$ , пусть  $r : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1, r \in C^2, r(0) = \gamma_0(a)$ .

Пусть  $\delta > 0$  мало,  $c \in (0, b - a]$ . Рассмотрим  $s$  вида  $s(t, \tau) = \begin{cases} \gamma_0(t) + (r(\tau) - \gamma_0(a)), & t \in [a, a + \delta] \\ \gamma_0(t), & t \in [b - c, b] \end{cases}$ .

Потребуем  $s(\_, 0) = \gamma_0$  и  $s \in C^2([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ ,  $s(t, \_) \in X$ . Также потребуем, чтобы  $\forall t, \tau : \frac{\partial s}{\partial t} \neq 0$ , то есть кривая  $s(\_, \tau)$  должна быть регулярной.

*Пример.* Пусть  $h$  — шапочка, как ниже, тогда подойдёт  $s(t, \tau) = \gamma_0(t) + h(t) \cdot (r(\tau) - r(0))$ .



Так как  $\gamma_0$  — экстремум, то  $J[s(\_, \tau)]$ , как функция от  $\tau$ , имеет экстремум при  $\tau = 0$ . Положим  $f(\tau) = J[s(\_, \tau)]$ , и посчитаем  $f'(\tau)$ , приблизив разность первым членом ряда Тейлора:

$$f(\tau) - f(0) = \int \langle \nabla_u \mathcal{F}, s - \gamma_0 \rangle + \langle \nabla_{\dot{u}} \mathcal{F}, \dot{s} - \dot{\gamma}_0 \rangle + \mathcal{O}(\|s(\_, \tau) - \gamma_0\|_{\Gamma^2}^2) \quad (\textcircled{1})$$

Формула применима, так как  $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ , и  $\dot{u}$  отделён от нуля.

$\frac{\partial s}{\partial t} \neq 0$ , равномерно отделена от нуля, а отрезок фиксирован, откуда  $\mathcal{O}(\|s(\_, \tau) - \gamma_0\|_{\Gamma^2}) \equiv \mathcal{O}(\|s(\_, \tau) - \gamma_0\|_{C^2})$ .

Теперь применим формулу Тейлора по  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \tau \int_a^b \left[ \left\langle \nabla_u \mathcal{F}, \frac{\partial s}{\partial \tau}(\_, 0) \right\rangle + \left\langle \nabla_{\dot{u}} \mathcal{F}, \frac{\partial \dot{s}}{\partial \tau}(\_, 0) \right\rangle \right] d\tau + \mathcal{O}(\tau^2) = \quad (\text{интегрируем по частям}) \\ &= \tau \left[ \int_a^b \left\langle E\{\gamma_0\}, \frac{\partial s}{\partial \tau}(\_, 0) \right\rangle d\tau - \left\langle \nabla_{\dot{u}} \mathcal{F}(\gamma_0)(a), \frac{\partial s}{\partial \tau}(a, 0) \right\rangle \right] + \mathcal{O}(\tau^2) = \\ &= -\tau \left\langle \nabla_{\dot{u}} \mathcal{F}(\gamma_0)(a), \frac{\partial s}{\partial \tau}(a, 0) \right\rangle + \mathcal{O}(\tau^2) \end{aligned}$$

Так как по построению  $\frac{\partial s}{\partial \tau}(b, 0) = 0$ , то внеинтегральный член в  $b$  равен нулю. При этом  $\frac{\partial s}{\partial \tau}(a, 0) = \frac{\partial r}{\partial \tau}(0)$ . Итак,

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \left\langle (\nabla_{\dot{u}} \mathcal{F})(\gamma_0)(a), \frac{\partial r}{\partial \tau}(0) \right\rangle = 0$$

Так как  $r$  — любая кривая через  $\gamma_0(a)$ , то  $(\nabla_{\dot{u}}\mathcal{F})(\gamma_0)(a) \perp T_{\gamma_0(a)}M$ .

Аналогично со вторым концом.

Запишем всё это в теорему:

**Теорема 5.1.** Пускай  $J$  — функционал на кривой ( $\mathcal{F} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ ), как водится,  $\forall \lambda > 0 : \mathcal{F}(z, \lambda w) = \lambda \mathcal{F}(z, w)$ ,  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$  — многообразия класса  $C^1$ , пусть  $\gamma_0$  — локальный экстремум  $J$  на  $X$ .

Тогда

1.  $E\{\gamma_0\} = 0$ .
2.  $\begin{cases} (\nabla_{\dot{u}}\mathcal{F})(\gamma_0)(a) \perp T_{\gamma_0(a)}M_1 \\ (\nabla_{\dot{u}}\mathcal{F})(\gamma_0)(b) \perp T_{\gamma_0(b)}M_2 \end{cases}$  — условия трансверсальности.

Примеры.

- $\mathcal{F}(z, w) = |w|$ . Минимум этого функционала — расстояние от  $M_1$  до  $M_2$ .

Условия из теоремы означают, что  $\dot{\gamma}_0(a) \perp T_{\gamma(a)}M_1, \dot{\gamma}_0(b) \perp T_{\gamma(b)}M_2$ , а также  $\nabla_w\mathcal{F} = \frac{w}{|w|} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\gamma}_0}{|\dot{\gamma}_0|}\right) = 0$  (уравнение Эйлера — Лагранжа). Экстремаль — отрезок, соединяющий два многообразия, и перпендикулярный обоим многообразиям.

- $\mathcal{F}(z, w) = g(z)|w|$ .  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ; мы видели, что тут масса полезностей при разных  $g$ . Так как  $\nabla_w\mathcal{F} = g(z)\frac{w}{|w|} \parallel w$ , то в этом случае условия трансверсальности тоже сводятся к условиям ортогональности:  $\dot{\gamma}_0(a) \perp M_1, \dot{\gamma}_0(b) \perp M_2$ .

Рассмотрим частный случай:  $n = 2, J[y] = \int_{a_y}^{b_y} L(x, y(x), y'(x)) dx$ ,  $L$  — гладкая (везде, где нужно) на  $\mathbb{R}^3$ ;  $\phi, \psi \in C^2$  таковы, что  $y(a_y) = \phi(a_y), y(b_y) = \psi(b_y)$ . Пусть  $y \in C^2$ . Таким образом, многообразия  $M_1 = \{(x, \phi(x)) | x \in \mathbb{R}\}, M_2 = \{(x, \psi(x)) | x \in \mathbb{R}\}$  — графики функций, и концы  $y$  лежат на этих графиках.

Сведёмся к уже доказанной теореме. Пусть  $\mathcal{F}(z, w) \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  такова:  $\mathcal{F}(z, w) = L\left(z_1, z_2, \frac{w_2}{|w_1|}\right)|w_1|$ .

Будем рассматривать область  $w_1 > 0$  (на интересующей нас кривой-графике  $w_1 \equiv 1$ ).

$$\nabla_w\mathcal{F} = \begin{pmatrix} L\left(z_1, z_2, \frac{w_2}{w_1}\right) - \frac{w_2 w_1}{w_1^2} \frac{\partial L}{\partial u}\left(z_1, z_2, \frac{w_2}{w_1}\right) \\ \frac{\partial L}{\partial u}\left(z_1, z_2, \frac{w_2}{w_1}\right) \end{pmatrix}$$

$\gamma(t) = (t, y(t)), \dot{\gamma}(t) = (1, \dot{y}(t))$ . Запишем условия трансверсальности  $(\nabla_w\mathcal{F})(\gamma)(a) \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{\phi}(a) \end{pmatrix}$  и  $(\nabla_w\mathcal{F})(\gamma)(b) \perp \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{\psi}(b) \end{pmatrix}$  через скалярное произведение:  $(L - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}})(a) \cdot 1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{\phi}(a) = 0$ , аналогично со вторым концом. Это часто записывают в виде

$$\begin{cases} L + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \cdot (\dot{\phi}(a) - \dot{y}(a)) = 0 \\ L + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \cdot (\dot{\psi}(b) - \dot{y}(b)) = 0 \end{cases} \quad (\Delta)$$

Продемонстрируем элементарный вывод этого факта. Видимо, ему будет недоставать некоторой строгости, так что доказательством считаться метод не будет, но так должны были думать те, кто впервые эти уравнения вывели.

Пусть  $y, \tilde{y}$  — две кривые, продлим их касательными так, чтобы они были определены на одном большем отрезке.



Пусть  $h := \tilde{y} - y$ , запишем вариацию:

$$\begin{aligned} J[\tilde{y}] - J[y] &= \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} L(x, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) - \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, \dot{y}) = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (L(x, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) - L(x, y, \dot{y})) - \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} L(x, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) + \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} L(x, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) \quad (\ominus) \end{aligned}$$

Далее к первому слагаемому применим формулу Тейлора по второму и третьему аргументу, и проинтегрируем по частям, чтобы получить общий множитель  $h$ :

$$\begin{aligned} (\ominus) \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) h \, dx + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} h \Big|_{x_0}^{x_1} + L(x_1, y(x_1), \dot{y}(x_1)) \delta x_1 - L(x_0, y(x_0), \dot{y}(x_0)) \delta x_0 + \\ + \mathcal{O}(\|h\|_{C^1}^2) + o(\delta x_1) + o(\delta x_2) \quad (\ominus) \end{aligned}$$

Рассматривая финитные  $h$ , обращающиеся в нуль на концах, получаем, что первый член  $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0$  (это, кстати, уравнение Эйлера — Лагранжа).

Так как мы продолжили  $y$  и  $\tilde{y}$  касательными, то  $h(x_0) = \delta y_0 - \dot{y}(x_0)\delta x_0$  и  $h(x_1) = \delta y_1 - \dot{y}(x_1)\delta x_1$ .

$$\begin{aligned} (\ominus) L(x_1, y(x_1), \dot{y}(x_1)) \delta x_1 - L(x_0, y(x_0), \dot{y}(x_0)) \delta x_0 + \\ + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(x_1, y(x_1), \dot{y}(x_1)) \cdot [\delta y_1 - \dot{y}(x_1)\delta x_1] - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(x_0, y(x_0), \dot{y}(x_0)) \cdot [\delta y_0 - \dot{y}(x_0)\delta x_0] \quad (\ominus) \end{aligned}$$

Теперь вспомним, что концы  $y$  и  $\tilde{y}$  лежат на графиках  $\phi$  и  $\psi$ , откуда с точностью до некоторых малых поправок,  $\delta y_1 = \dot{\psi}(x_1)\delta x_1$  и  $\delta y_0 = \dot{\phi}(x_0)\delta x_0$ .

$$\begin{aligned} (\ominus) \delta x_1 \left( L(x_1, y(x_1), \dot{y}(x_1)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(x_1, y(x_1), \dot{y}(x_1))(-\dot{y}(x_1) + \dot{\psi}(x_1)) \right) + \\ + \delta x_0 \cdot \left( L(x_0, y(x_0), \dot{y}(x_0)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(x_0, y(x_0), \dot{y}(x_0))(-\dot{y}(x_0) + \dot{\phi}(x_0)) \right) \end{aligned}$$

Рассматривая такие  $\tilde{y}$ , что по очереди  $\delta x_0 = 0$  и  $\delta x_1 = 0$ , получаем  $(\Delta)$ .

## 6 Инвариантность уравнения Эйлера — Лагранжа

Если сделать замену переменных в решении уравнения Эйлера — Лагранжа, то получится решение задачи, в которой так же заменили переменные.

Пусть  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — диффеоморфизм,  $J[\gamma] = \int \mathcal{F}(\gamma, \dot{\gamma}) dt$ ,  $\mathcal{F}(z, \lambda w) = \lambda \mathcal{F}(z, w)$ ,  $\lambda > 0$ , и как и раньше,  $\mathcal{F} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ .

Пусть  $\gamma$  — ориентированная кривая, тогда  $T \circ \gamma$  — также ориентированная кривая того же класса гладкости. Определим функционал  $J_T[\gamma] := J[T \circ \gamma]$ , то есть  $J_T[\gamma] = \int \mathcal{F}[T(\gamma(t)), T'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)] dt$ .

Функция  $\mathcal{F}_T(z, w) := \mathcal{F}[T(z), T'(z)w]$  имеет ту же однородность. Пусть  $E_T$  — функция  $E$ , построенная по  $\mathcal{F}_T$ , то есть  $E_T\{\gamma\} = (\nabla_z \mathcal{F}_T)(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt}(\nabla_w \mathcal{F}_T)(\gamma, \dot{\gamma})$ .

Пусть поставлена некоторая задача с фиксированными концами. Согласно (лемма 2.2) после интегрирования по частям получаем:  $\delta J_T[\gamma, h] = \int \langle E_T\{\gamma\}, h \rangle dt + o(\|h\|)$ . Пусть  $T(\gamma + h) = T(\gamma) + T'(\gamma)h + r$ , где  $\|r\|_{C^1}$  конечно же мала (порядка  $\|h\|_{C^1}$ ).

$$\begin{aligned} J_T[\gamma + h] - J_T[\gamma] &= J[T(\gamma) + T'(\gamma)h + r] - J[T(\gamma)] = \\ &= \int \left[ \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma}, T'(\gamma)h + r \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\gamma}}, (T'(\gamma)h + r)' \right\rangle \right] dt + o(\|h\|_{C^1}) = \\ &= \int \left[ \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma}, T'(\gamma)h \right\rangle - \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\gamma}}, T'(\gamma)h \right\rangle \right] dt + o(\|h\|_{C^1}) = \int \langle T'(\gamma)^t E\{T(\gamma)\}, h \rangle + o(\|h\|_{C^1}) \end{aligned}$$

Итак,  $E_T\{\gamma\} = T'(\gamma)^t E\{T(\gamma)\}$  — заявленная инвариантность уравнения Эйлера — Лагранжа.

В частности,  $E_T\{\gamma\} \equiv 0 \Leftrightarrow E\{T(\gamma)\} \equiv 0$ .

## Лекция V

11 апреля 2024 г.

# 7 Прямые методы вариационного исчисления

## 7.1 Поиск решения задачи Штурма — Лиувилля

У уравнения Эйлера — Лагранжа есть некоторые недостатки — так, выявление характера экстремума является отдельной, зачастую весьма сложной, задачей.

Здесь пойдёт речь о методах, пытающихся построить точки максимума или минимума непосредственно. Платой за такое удобство будет общность.

Здесь всё будет одномерно и скалярно: пусть  $p \in C^1[a, b], q \in C[a, b]$ . Рассмотрим задачу с фиксированными концами для функционала следующего вида:  $J[u] = \int_a^b (pu'^2 + qu^2) dx$ . Пусть  $X_0 := \{u \in C^1[a, b] | u(a) = u(b) = 0\}$ , однако в  $X_0$  (ввиду однородности по  $u$ ) инфимум  $J$  всегда либо 0, либо  $-\infty$ . Поэтому добавим нормировочное условие:  $X := \left\{ u \in X_0 \middle| \int_a^b u^2 = 1 \right\}$ .

В рамках ранее рассмотренной теории это является задачей на условный экстремум (при  $G[u] = \int_a^b u^2 = 1$ ). Уравнение Эйлера — Лагранжа для  $J - \lambda G$  получится

$$-(pu')' + qu = \lambda u \tag{*}$$

Из общей теории (и  $C^1$ -гладкости  $p$ ) следует, что для экстремума  $u$ :  $pu' \in C^1$ , то есть  $u \in C^2$  вне окрестности тех точек, где  $p$  обращается в 0. Потребуем, чтобы этих точек не было:  $\forall x \in [a, b] : p(x) > 0$ .

Задача поиска решения уравнения (\*) при условиях вида  $\begin{cases} \alpha_a u(a) + \beta_a u'(a) = 0 \\ \alpha_b u(b) + \beta_b u'(b) = 0 \end{cases}$   
 (где считается, что  $\begin{cases} \alpha_a^2 + \beta_a^2 \neq 0 \\ \alpha_b^2 + \beta_b^2 \neq 0 \end{cases}$ ) называется задачей Штурма — Лиувилля. Её можно рассматривать, как задачу поиска собственных векторов оператора  $\mathcal{L} : X_0 \rightarrow X_0, \mathcal{L} : u \mapsto -(pu')' + qu$ .

Тем самым,  $\lambda$ , при которых  $(*)$  имеет решение, называются *собственными числами*, и соответствующие функции  $u$  — *собственные функции*.

Положим  $\lambda_J := \inf_X J$ . Очевидно, что

$$1. \quad \lambda_J \geq \min_{x \in [a,b]} q(x)$$

$$2. \text{ Из однородности } J \text{ по } u: \forall u \in X_0 : J[u] \geq \lambda_J \int_a^b u^2 dx.$$

Пускай  $u_n \in X$  — минимизирующая последовательность, такая, что  $J[u_n] \searrow \lambda_J$ . Мы докажем, что из соображений компактности можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, и что предел обладает свойствами, которые от него ожидаются.

Итак, имеется последовательность  $u_n \in X$ , такая, что  $\int_a^b pu_n'^2 + qu_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_J$ . Оценим

$$J[f] \geq \underbrace{\min_{[a,b]} p}_{>0} \cdot \int_a^b f'^2 + \underbrace{\min_{[a,b]} q}_{1} \cdot \int_a^b f^2$$

Из ограниченности  $J[u_n]$  получаем, что  $\sup_n \int_a^b u_n'^2 < \infty$ .

Отсюда сразу следует равностепенная непрерывность:

$$|u_n(x_1) - u_n(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} u_n' \right| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \cdot \left( \int_{x_1}^{x_2} u_n'^2 \right)^{1/2}$$

Эта же оценка показывает равномерную ограниченность: принимая  $x_2 = b$  и  $x = x_1$ , получаем  $|u_n(x)| \leq \sqrt{b - a} \cdot C$ .

Тем самым по теореме Арцела — Асколи из последовательности  $\{u_n\}$  можно выбрать сходящуюся в  $C$  подпоследовательность; без потери общности, эта последовательность совпадает с исходной:  $\exists u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , где предел берётся в  $C[a, b]$ .

Эта предельная  $u$  — кандидат на минимизирующую функцию. Но пока  $u$  даже в интеграл не подставить: про гладкость ничего не известно. Тем не менее, конечно,  $\int_a^b u^2 = 1$ .

**Теорема 7.1.** Так построенное  $u \in C^2$  (в том числе  $u \in X$ ), выполнено  $(*)$ , и  $J[u] = \lambda_J$ .

*Доказательство.* Сначала докажем  $(*)$  в слабом смысле: убедимся, что

$$\forall h \in C^2[a, b] : h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow \int_a^b (-ph')' + qh u = \lambda_J \int_a^b hu \quad (**)$$

Это равенство можно было бы получить, умножив  $(*)$  на  $h$ , и дважды проинтегрировав первое слагаемое по частям, если бы  $(*)$  и  $C^2$ -гладкость  $u$  были уже даны. Нам же придётся пойти в обратном направлении.

Попробуем поварьировать  $J$ , добавляя  $h \in C^2[a, b]$ ,  $h(a) = h(b) = 0$ . Функция вида  $u_n + \varepsilon h$  совсем необязательно лежит в  $X$ , подставим эту функцию в  $\tilde{J}$ , определённый на  $X_0$ , и заданный той же формулой, что и  $J$ .

$$\tilde{J}[u_n + \varepsilon h] = J[u_n] + 2\varepsilon \int_a^b (pu_n'h' + qu_nh) + \varepsilon^2 \tilde{J}[h]$$

Интегрируя по частям  $pu'_n h'$ , получаем  $2\varepsilon \int_a^b u_n(-(ph')' + qh)$ , внеинтегральные члены обнулились.

С другой стороны,  $\tilde{J}[u_n + \varepsilon h] \geq \lambda_J \int_a^b (u_n + \varepsilon h)^2 = \lambda_J + 2\varepsilon \lambda_J \int_a^b u_n h + \varepsilon^2 \lambda_J \int_a^b h^2$ . Переходя к пределу в неравенствах, и сокращая  $\lambda_J$ , получаем

$$2\varepsilon \int_a^b u(-(ph')' + qh) + \varepsilon^2 \tilde{J}[h] \geq 2\varepsilon \lambda_J \int_a^b uh + \varepsilon^2 \lambda_J \int_a^b h^2$$

Так как можно выбирать  $\varepsilon$  разных знаков, то предельный переход показывает равенство линейных по  $\varepsilon$  членов. То есть  $(**)$  выполнено.

Рассмотрим  $\xi \in C[a; b]$  и подберём  $h$  такое, что  $\xi = -(ph')'$ .

А именно,  $h(x) := -\int_a^x \frac{1}{p(t)} \left( \int_a^t \xi(s) ds + C \right) dt$ , где  $C$  выбрана так, что  $h(b) = 0$ . Если посчитать, то

$$C = -\frac{\int_a^b \frac{1}{p(t)} \int_a^t \xi(s) ds dt}{\int_a^b \frac{dt}{p(t)}}$$

По построению  $h \in C^2$ ,  $h(a) = h(b) = 0$ , значит, можно подставить  $h$  в  $(**)$ :

$$0 = \int_a^b \xi u - \int_a^b (q(x) - \lambda_J) u(x) \int_a^x \frac{1}{p(t)} \left( \int_a^t \xi(s) ds + C \right) dt dx =$$

переставим интегралы так, чтобы интеграл по  $s$  был внешним

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \xi u - \int_a^b \xi(s) \int_s^b \frac{1}{p(t)} \int_t^b (q(x) - \lambda_J) u(x) dx dt ds + \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\int_a^b \frac{1}{p}} \int_a^b \xi(s) \int_s^b \frac{dt}{p(t)} ds}_{C} \cdot \int_a^b (q(x) - \lambda_J) u(x) \int_a^x \frac{d\tau}{p(\tau)} dx \end{aligned}$$

Обозначив  $K := \left( \int_a^b \frac{1}{p} \right)^{-1} \int_a^b (q(x) - \lambda_J) u(x) \int_a^x \frac{d\tau}{p} dx$  (константа, не зависящая от  $\xi$ ), получаем

$$0 = \int_a^b \xi(s) \left[ u(s) - \int_s^b \frac{1}{p(t)} \int_t^b (q(x) - \lambda_J) u(x) dx dt + K \int_s^b \frac{dt}{p(t)} \right] ds$$

Итак,  $0 = \int_a^b \xi(s) [\dots] ds$ , откуда «по нулевой лемме Дюбуа-Реймона» выражение в скобках равно нулю везде:  $u(s) = \int_s^b \frac{1}{p(t)} \int_t^b (q(x) - \lambda_J) u(x) dx dt - K \int_s^b \frac{dt}{p(t)}$ , в частности сразу  $u \in C^1$ .

Значит,  $u$  можно продифференцировать, получим

$$u'(s) = -\frac{1}{p(s)} \int_s^b (q(x) - \lambda_J) u(x) dx + \frac{K}{p(s)},$$

откуда  $u \in C^2$ . Тем самым,  $(p(s)u'(s))' = (q(s) - \lambda_J)u(s)$ , значит,  $u \in X$ ,  $J[u] = \int_a^b pu'^2 + qu^2$ . Интегрируя по частям, получаем ровно  $\int_a^b ((-pu')' + qu)u \, dx = \lambda_J \int_a^b u^2 \, dx = \lambda_J$ .  $\square$

Из данной теоремы получаются следующие выводы:  $u$  — нестрогий глобальный минимум, причём если  $J[u] = \lambda_J = J[\tilde{u}] \Rightarrow u = \pm\tilde{u}$ . Это следует из того, что  $u$  — решение соответствующего диффура, то есть лежит в одномерном  $\mathbb{R}$ -пространстве, а нормировка фиксирует точку с точностью до знака.

Пусть  $u_n$  — минимизирующая последовательность. Соображения компактности имеют тот недостаток, что они не предполагают алгоритма выбора сходящейся подпоследовательности; но в данном случае это можно сделать постфактум, зная результат теоремы.

Выберем  $c \in [a, b]$  так, что  $|u|(c) \neq 0$  (между прочим, конечный перебор — у  $|u|$  не более, чем конечное число нулей). ( $|u|$  находим, как предел  $|u_n|$  — он существует, никаких подпоследовательностей выбирать не надо)

Подправим  $u_n$  так, что  $u_n(c) \geq 0$ . Теперь  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ , и опять мы справились найти  $u$  без выбора сходящихся подпоследовательностей.

## 7.2 Построение ортонормированного базиса

Сейчас мы поймём, что множество собственных чисел  $\{\lambda \in \mathbb{R} | (*) \text{ имеет решение}\}$  не очень велико, и решения обладают всячими чудесными свойствами.

Пусть  $u \in X$  — минимизирующая  $J[u] = \lambda_J =: \lambda_1$ .

Положим  $X^{(1)} = \left\{ f \in X \mid \int_a^b fu = 0 \right\}$ . Обозначим  $\lambda_2 := \inf_{X^{(1)}} J$ . Ясно, что  $\lambda_2 \geq \lambda_1$ .

Выберем минимизирующую последовательность из  $X^{(1)}$ , на которой  $J$  сходится к  $\lambda_2$ , и пусть  $u_2$  — предел сходящейся подпоследовательности из данной минимизирующей. Далее по сути повторим доказательство (теорема 7.1), показав, что  $u_2$  — глобальный минимум  $J$  на  $X^{(1)}$ .

Так как интеграл терпит поточечные предельные переходы, то  $\int_a^b u_2^2 = 1$ ,  $u_2(a) = u_2(b) = 0$ ,  $\int_a^b u_2 u = 0$ . Аналогично доказательству (теорема 7.1), для  $u_2$  верно:  $\forall h \in C^2 : h(a) = h(b) = 0, \int_a^b hu = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_2 \int_a^b uh = \int_a^b u_2(-(ph')' + qh) \quad (**)$$

Условие  $\int_a^b hu = 0$  должно быть выполнено, так как в  $J$  в какой-то момент придётся подставить отнормированное  $u_2 + \varepsilon h$ , то есть должно быть выполнено включение  $\frac{u_2 + \varepsilon h}{\|u_2 + \varepsilon h\|_{L^2}} \in X^{(1)}$ . Отсюда следует, что  $u_2 \in C^2[a, b]$ , и  $(*)$  выполнено для  $\lambda_2$ .

Здесь есть некоторая тонкость: при решении используется лемма Дибура-Реймона, и для её применения хотелось бы избавиться от условия ортогональности  $h \perp u$ . На самом деле, оно и правда лишнее: достаточно убедиться, что  $(**)$  выполнено для  $h = u$ , так как любую функцию можно разложить в ортогональную часть и часть, пропорциональную  $u$ . А при  $h = u$  оно выполнено тривиальным образом: обе части нули, так как  $\int_a^b u_2 u = 0$ .

Отметим, что мы сразу получили, что  $\lambda_2 > \lambda_1$ , так как при равенстве  $u_2$  было бы решением того же дифференциального уравнения  $(*)$ , и должно было бы быть пропорционально  $u$ .

# Лекция VI

25 апреля 2024 г.

Рассуждая тем же образом, можно рассмотреть  $X^{(n)} := \left\{ f \in X \mid \int_a^b f u_1 = \dots = \int_a^b f u_n = 0 \right\}$ , где  $u_1 = u$ . Пусть  $\lambda_n := \inf_{X^{(n-1)}} J$ , тогда по тем же причинам  $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$ , инфимум достигается на некотором  $u_n \in C^2[a, b]$  — равенство  $(**)$  верно и для  $h$ , ортогональных  $u_1, \dots, u_{n-1}$ , и для тех, что лежат в их линейной оболочке тоже верно, поэтому мы можем сформулировать

**Теорема 7.2.**

1.  $\forall n \geq 1 : \lambda_n = \inf_{X^{(n-1)}} J$  достигается:  $\lambda_n = J[u_n]$  для некоторого  $u_n \in C^2[a, b] \cap X^{(n-1)}$ , и для него выполнено  $(*)$ .
2. Такое  $u_n$  единственno с точностью до домножения на  $\pm 1$ , и  $\lambda_j \nearrow +\infty$ .

*Доказательство.* Из ещё не обсуждённых вещей в формулировке появилось только условие  $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$ .

Понятно, что  $\lambda_n > \lambda_{n-1}$ , так как в случае равенства  $u_n$  и  $u_{n-1}$  были бы решениями дифференциального уравнения  $(*)$ , и, следовательно, были бы пропорциональны, однако они ортогональны (и не нули).

Предположим, что  $\lambda_n \nearrow \lambda_* < \infty$ . Тем самым,  $\sup_n J[u_n] =: S < \infty$ . Но, расписав  $J$ , получаем  $\int_a^b p u_n'^2 + q u_n^2 \geq \min q + \min p \int_a^b u_n'^2$ , то есть в последовательности  $u_n$  функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, а значит, имеется подпоследовательность  $u_{n_k}$ , сходящаяся в  $C[a, b]$  к  $u_{\infty}$ . Это противоречие к попарной ортогональности:  $\int_a^b u_{n_k} u_{n_{k-1}} = 0$ , но левая часть при стремлении  $k \rightarrow \infty$  даёт норму  $u_{\infty}$ , то есть 1. Противоречие.  $\square$

**Предложение 7.1.** Построенная в предыдущей теореме последовательность  $\{u_n\}$  — ортонормированный базис в  $L^2[a, b]$ .

*Доказательство.* Достаточно показать, что это выполнено в некотором плотном множестве, скажем, в  $C_0^\infty[a, b]$ .

Для  $f \in C_0^\infty[a, b]$  надо проверить, что  $f_N := \sum_{n=1}^N (f, u_n) u_n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} f$ . По построению  $\frac{f - f_N}{\|f - f_N\|_{L^2}} \in X^{(N)}$ .

$$J\left(\frac{f - f_N}{\|f - f_N\|_{L^2}}\right) \geq \lambda_{N+1} \iff \underbrace{J[f - f_N]}_{\int_a^b p(f' - f'_N)^2 + q(f - f_N)^2} \geq \lambda_{N+1} \|f - f_N\|_{L^2}^2$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_a^b (-p(f' - f'_N))' + q(f - f_N) \cdot (f - f_N) = (\mathcal{L}(f - f_N), f - f_N)_{L^2[a, b]}$$

Здесь  $\mathcal{L} : g \mapsto -(pg)' + qg$ . Так как  $f - f_N \perp X^{(N)}$  по построению, а  $\mathcal{L}(f_N) \in X^{(N)}$ , то  $(\mathcal{L}(f - f_N), f - f_N)_{L^2[a, b]} = (\mathcal{L}(f), f - f_N)_{L^2[a, b]}$ . Оценим  $(\mathcal{L}(f), f - f_N)_{L^2[a, b]} \leq \|\mathcal{L}f\|_{L^2} \cdot \|f - f_N\|_{L^2}$ .

Итак,  $\|\mathcal{L}f\|_{L^2} \cdot \|f - f_N\|_{L^2} \geq \lambda_{N+1} \|f - f_N\|_{L^2}^2$

Сокращая на  $\|f - f_N\|$  (если это нуль для некоторого  $N$ , то  $f$  уже разложилась в конечную сумму), получаем  $\|f - f_N\| \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \|\mathcal{L}f\|_{L^2} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$ .  $\square$

**Следствие 7.1.**  $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty = \{\lambda \in \mathbb{C} | (*) \text{ имеет решение для } u \in C^2([a, b] \rightarrow \mathbb{C}) \text{ где } u(a) = u(b) = 0, u \not\equiv 0\}$

*Доказательство.*  $\subseteq$  уже доказали выше. Обратное включение докажем от противного.

Пусть  $\lambda_* \notin \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ , и она отвечает собственной функции  $u_*: \mathcal{L}u_* = \lambda_* u_*$ .

$$\begin{aligned}\lambda_*(u_*, u_n)_{L^2} &= (\mathcal{L}u_*, u_n)_{L^2} = \int_a^b (-(pu'_*)' + qu_*)u_n \underset{\text{по частям}}{=} \int_a^b u_* ((-pu'_n)' + qu_n) = \lambda_n(u_*, u_n)_{L^2} \\ &\Rightarrow \forall n (u_*, u_n) = 0 \Rightarrow u_* = 0\end{aligned}$$

Ещё можно было заметить, что при рассмотрении  $\mathcal{L}$ , как оператора  $X_0 \rightarrow L^2$ , верно  $\forall u, v \in X_0 : (\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v)_{L^2}$  — выкладка выше.  $\square$

### 7.3 Нули собственных функций

Каждая из функций  $u_n$  имеет разве что конечное число нулей на  $(a, b)$ , как нетривиальное решение дифференциального уравнения второго порядка.

Введём для фиксированного  $\lambda$  функция  $u(x, \lambda)$  — решение задачи Коши  $\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda u \\ u(a, \lambda) = 0 \\ u'(a, \lambda) = 1 \end{cases}$

(все производные по  $x$ ). Тогда  $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty = \{\lambda | u(b, \lambda) = 0\}$ .

**Теорема 7.3.**  $u_n$  имеет в точности  $n - 1$  нуль на  $(a, b)$ .

*Доказательство.*

- $u(x, \lambda)$  не имеет нулей на  $(a, b]$  при  $\lambda < \min q$ : (\*) переписывается в виде  $(pu')' = (q - \lambda)u$ , то есть  $u' > 0$  везде.
- Запишем (\*) в виде  $(pu')' + (\lambda - q)u = 0$ . При  $\lambda < \lambda'$ :  $\lambda' - q > \lambda - q$ , то есть (как обсуждалось на диффурах, теорема Штурма) между соседними нулями  $u(x, \lambda)$  есть хотя бы один нуль  $u(x, \lambda')$ . Тем самым,  $u_n$  имеет хотя бы  $n - 1$  нуль, и осталось доказать, что их не больше.
- Обозначим  $\lambda_* = \inf \{\lambda | u(\_, \lambda)\}$  имеет нуль на  $(a, b]$ . Утверждается, что  $\lambda_* = \lambda_1$ . В самом деле, предположим на минуточку, что  $\lambda_* < \lambda_1$ . Тогда  $u(\_, \lambda_*)$  (если имеет нуль на  $(a, b]$ ) имеет нуль на  $(a, b)$  ( $u(b, \lambda_*) = 0$  противоречит определению  $\lambda_1$ ).

Сначала покажем, что инфимум достигается:  $u(\_, \lambda_*)$  имеет нуль на  $(a, b)$ . Устремим некоторую последовательность к  $\lambda_*$  сверху и выберем точку сгущения на  $(a, b)$ :  $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$ ,  $x_{\lambda_n} \rightarrow x_*$ .

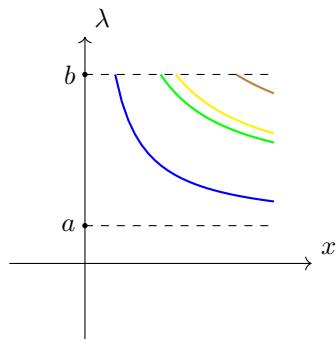
$u(x_*, \lambda_*) = 0$ . Рассмотрим  $u(x_* - \varepsilon, \lambda)$  и  $u(x_* + \varepsilon, \lambda_*)$  (где  $\varepsilon > 0$  — произвольный, такой, что  $x_* \pm \varepsilon \in (a, b)$ , и  $\forall x : 0 < |x - x_*| < \varepsilon \Rightarrow u(x, \lambda_*) \neq 0$ ). Если они разных знаков, то мы получаем противоречие с определением  $\lambda_*$  — есть и меньше, согласно непрерывной зависимости решений от параметров.

Тем самым,  $u(x_* - \varepsilon, \lambda_*)$  и  $u(x_* + \varepsilon, \lambda_*)$  одного знака при всех  $\varepsilon > 0$ . Но тогда  $u(\_, \lambda_*)$  имеет в  $x_n$  нуль минимум второй кратности, и значит,  $u(\_, \lambda_*)$ , как решение диффура, равно тождественному нулю.

- И так далее. Теперь  $\lambda_* = \inf \{\lambda | u(\_, \lambda)\}$  имеет хотя бы два нуля на  $(a, b]$ . Пусть  $u(x_{1,\lambda}, \lambda) = u(x_{2,\lambda}, \lambda) = 0$ . Выберем подпоследовательность так, чтобы  $x_{1,\lambda} \rightarrow x_1$  и  $x_{2,\lambda} \rightarrow x_2$ . Если  $x_1 \neq x_2$ , то всё аналогично.

Если же  $x_1 = x_2 = \tilde{x}$ , то по теореме Лагранжа между  $x_{1,\lambda}$  и  $x_{2,\lambda}$  имеется точка  $s_\lambda$ , в которой  $u'(s_\lambda, \lambda) = 0$ . По принципу двух полицееких  $s_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow \lambda_*]{} \tilde{x}$ , а так как производная  $u$  тоже непрерывно зависит от параметров, то в  $\tilde{x}$  — нуль кратности хотя бы 2.  $\square$

Тем самым, нули появляются в точке  $b$ , и монотонно едут к точке  $a$ :



Непрерывная зависимость нулей от  $\lambda$  следует из непрерывной зависимости решений от параметров и того, что все нули — простые (кратности 1).