

# Дискретная теория вероятностей. Неофициальный конспект

Лектор: Михаил Анатольевич Лифшиц  
Конспектировал Леонид Данилевич

II семестр, весна 2023 г.

# Оглавление

<b>1 Дискретная теория вероятностей</b>	<b>2</b>
1.1 Основные определения и понятия . . . . .	2
1.1.1 Вероятностное пространство. События . . . . .	2
1.1.2 Взаимосвязь событий . . . . .	3
1.2 Случайные величины . . . . .	4
1.2.1 Схема Бернулли . . . . .	4
1.2.2 Случайные блуждания . . . . .	5
1.2.3 Про условные вероятности . . . . .	6
1.3 Матожидание, дисперсия . . . . .	7
1.3.1 Простейшие свойства матожидания . . . . .	7
1.3.2 Неравенства, связанные с математическим ожиданием . . . . .	9
1.3.3 Медиана . . . . .	10
1.3.4 Дисперсия . . . . .	10
1.3.5 Моменты . . . . .	12
1.4 Законы больших чисел (ЗБЧ) . . . . .	12
1.5 Производящие функции . . . . .	14
1.5.1 Производящие функции и моменты . . . . .	15
1.6 Ветвящиеся процессы . . . . .	16
1.6.1 Процесс Гальтона — Ватсона . . . . .	16
1.6.2 Некоторые другие виды процессов . . . . .	17
1.7 Предельные теоремы Муавра — Лапласа . . . . .	17
1.7.1 Локальная . . . . .	17
1.7.2 Интегральная . . . . .	18
1.8 Цепи Маркова . . . . .	20
1.8.1 Инвариантные (стационарные) распределения . . . . .	20
1.8.2 Классификация состояний в цепях Маркова . . . . .	23
1.8.3 Периодичность . . . . .	24
1.8.4 Связь периодов и эргодических классов . . . . .	25
1.8.5 Возвратность . . . . .	27
1.9 Случайное блуждание в $\mathbb{Z}^1$ . . . . .	29
1.9.1 Распределение максимума. Принцип отражения . . . . .	30
1.9.2 Время пребывания на полуоси (закон арксинуса) . . . . .	31
1.9.3 Задача о разорении игрока . . . . .	32
1.9.4 Матожидание времени разорения . . . . .	33
1.10 Случайные графы . . . . .	33
1.10.1 Граф Эрдёша — Рены . . . . .	34
1.10.2 power law for degrees (степенной закон для степеней (вершин)) . . . . .	34
1.10.3 Дерево преимущественного присоединения . . . . .	34
1.10.4 Распределение степеней вершин . . . . .	35

# Глава 1

## Дискретная теория вероятностей

### Лекция I 14 февраля 2023 г.

#### 1.1 Основные определения и понятия

##### 1.1.1 Вероятностное пространство. События

Рассмотрим конечное или счётное множество  $\Omega$ .

Элементы множества  $\omega \in \Omega$  называются *элементарными исходами*, само множество  $\Omega$  называется *пространством элементарных исходов*.

Всякое подмножество  $A \subset \Omega$  является *событием*.

Введём функцию  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , сопоставляющую элементарному исходу «его вероятность». Необходимым и достаточным условием является  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ . Так как  $p(\omega) \geq 0$ , то сумма конечного или счётного числа слагаемых корректно определена. А именно, сумма счётного числа слагаемых либо расходится при любой перестановке слагаемых, либо сходится к одному и тому же числу.

**Определение 1.1.1** (Вероятностное пространство). Пространство элементарных исходов  $\Omega$  с заданной на нём вероятностью  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Определение 1.1.2** (Вероятность события). Сумма вероятностей элементарных исходов — его элементов, как множества.

Пишут  $\mathbb{P} : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ .

*Свойства* (Свойства вероятностей).

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ .
- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
- $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$ , где  $\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \setminus A$ .
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$ .

Для пересекающихся событий посчитать вероятность их объединения сложнее. Используя формулу включений-исключений, можно записать

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

и так далее.

*Замечание.* Иногда случается так, что все элементарные исходы равновероятны. Так как сумма их вероятностей — 1, то в таком случае  $|\Omega| < \infty$ , и  $\forall \omega \in \Omega : p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ . Отсюда получаем,  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

### 1.1.2 Взаимосвязь событий

#### Условная вероятность

Зафиксируем некоторое событие  $B \subset \Omega$ , такое, что  $\mathbb{P}(B) > 0$ .

**Определение 1.1.3** (Условная вероятность события  $A$  (при условии  $B$ )).  $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ .

Об этом удобно думать, как о вероятности того, что произошло  $A$ , *при условии* того, что произошло  $B$ .

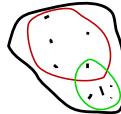


Рис. 1.1: Про условную вероятность

Красное событие довольно вероятно, что произойдёт, но при условии того, что произошло зелёное событие, вероятность красного существенно понижается.

Интуиция за этим определением следующая: все элементарные исходы, содержащиеся в  $B$  могут как произойти, так и не произойти, но все, не содержащиеся в  $B$  — точно не произошли.

Таким образом, вероятностное пространство «сузилось», ввели новую вероятностную функцию

$$\tilde{p} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; \quad \tilde{p} : \omega \mapsto \begin{cases} \alpha \cdot p(\omega), & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B \end{cases}$$

где  $\alpha$  — коэффициент нормировки, необходимый для условия суммирования всех вероятностей в единицу.  $\sum_{\omega \in B} p(\omega) = \mathbb{P}(B)$ , поэтому  $\alpha = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}$ .

#### Независимость событий

Интуитивно, независимость событий — это когда происхождение одного события не влияет на вероятность происхождения другого.

Воспользовавшись языком условной вероятности,  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ . За определение принимают формулу, полученную из этой домножением на  $\mathbb{P}(B)$  — без деления.

**Определение 1.1.4** (События  $A$  и  $B$  независимы).  $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$ .

*Замечание.* Приятным бонусом формулы оказалась симметричность относительно  $A$  и  $B$ .

Можно доказать, что независимость  $A$  и  $B$  влечёт независимость  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .

Независимость множества событий бывает *попарная* и *в совокупности*.

Попарная независимость — гораздо более слабое условие, оно означает лишь независимость любой пары событий. Независимость множества событий  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$  в совокупности означает  $\forall S \subset \mathcal{A} : \prod_{A \in S} \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{A \in S} A\right)$ .

*Контрпример* (Пирамидка Бернштейна). Покажем, что попарная независимость отличается от независимости в совокупности. Рассмотрим четырёхгранную пирамидку (как кубик, только четыре грани, а не шесть), у которой грани белая, синяя, красная, бело-сине-красная.

При её броске возможны 4 элементарных исхода — выпала такая-то грань. Определим вероятностное пространство на этом множестве, введя вероятности каждого исхода  $1/4$ .

Рассмотрим три события  $W, B, R$  — выпала грань, на которой есть белое, синее или красное соответственно. Несложно заметить, что

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W) &= \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(R) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(W \cap B) &= \mathbb{P}(B \cap R) = \mathbb{P}(W \cap R) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(W \cap B \cap R) &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

## 1.2 Случайные величины

**Определение 1.2.1** (Случайная величина). Отображение  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 1.2.2** (Независимость случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ ).  $\forall r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ : события  $\{X = r_1\}, \dots, \{X_n = r_n\}$  независимы.

Запись  $\{X = r_1\}$  является сокращением более длинной записи  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = r_1\}$ .

### 1.2.1 Схема Бернулли

Пусть  $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$ .

Введём независимые события  $A_1, \dots, A_n$ , такие, что  $\mathbb{P}(A_j) = p$ . Назовём их *испытаниями*, посмотрим, какие испытания завершились «успехом» (событие произошло), а какие — нет.

*Пример* (Схема Бернулли для  $n = 2$ ). Обозначим  $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}, A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}$ . Все вероятности элементарных исходов определены условием однозначно. Так,  $p(\omega_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = p \cdot p = p^2$ .

Рассмотрим случайную величину  $S(\omega)$  — количество успехов.

$\omega$	$A_1$	$A_2$	$p(\omega)$	$S(\omega)$
$\omega_1$	Успех	Успех	$p^2$	2
$\omega_2$	Успех	Неудача	$p(1-p)$	1
$\omega_3$	Неудача	Успех	$(1-p)p$	1
$\omega_4$	Неудача	Неудача	$(1-p)^2$	0

Посчитаем для произвольного  $n$  вероятность того, что количество успехов — ровно  $k$ . Из базовой комбинаторики очевидно, что

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{\omega \in \Omega: S(\omega)=k} p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega: S(\omega)=k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Для всякой случайной величины  $S$ , удовлетворяющей формуле выше, говорят, что она подчинена *биномиальному распределению*  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Заметим, что  $\Omega = \bigsqcup_{k=0}^n \{S = k\}$ , откуда мы получаем тождество

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S = k) = 1 \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

**Теорема 1.2.1** (Пуассон). Пусть  $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}, a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Рассмотрим последовательность схем Бернулли с параметрами  $(n, p_n)$ , где  $n \cdot p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

Тогда  $\mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!}$ . Случайные величины, удовлетворяющие этой формуле, имеют *распределение Пуассона*  $\mathcal{P}(a)$ .

*Доказательство.*

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{(np_n)^k}_{\rightarrow a} \cdot \underbrace{(1-p_n)^{\frac{1}{p_n}}}_{e^{-1}} \cdot \underbrace{p_n^{(n-k)}}_{\rightarrow a} \longrightarrow e^{-a} \frac{a^k}{k!}$$

□

## Лекция II

20 февраля 2023 г.

Введём в схеме Бернулли ещё одну случайную величину  $T$  — момент первого успеха, наименьший номер первого успешного события (и формальный элемент  $\infty$  иначе).

$T \in \{1, \dots, n, \infty\}$ . (Эта запись не совсем формальна: она означает, что  $T$ , как отображение, принимает значения в данном множестве). Несложно по определению почитать

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_{k-1}}, A_k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, 1 \leq k \leq n$$

Если же ни одно испытание не закончилось успехом, то  $T = \infty$ ,  $\mathbb{P}(T = \infty) = (1-p)^n$ .

Рассмотрим случай  $n = \infty$ . Тогда событие «ни одно испытание не закончилось успехом» исключается, а сумма вероятностей остальных событий равна 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{1}{1 - (1-p)} \cdot p = 1$$

Говорят, что  $T$  имеет *геометрическое распределение*.

На самом деле дискретная теория вероятностей не позволяет создать схему Бернулли со счётым (любым бесконечным) количеством испытаний (при  $0 < p < 1$ ). Таким образом, рассматривая случай  $n = \infty$ , мы ведём себя неформально, в любом случае выходя за рамки дискретной теории вероятностей.

*Доказательство невозможности счётной схеме Бернулли в дискретной теории вероятностей.*  
 Рассмотрим произвольный элементарный исход  $\omega$ . Если ему соответствует бесконечное число успехов, то для любого  $m$  рассмотрим  $m$  успешных событий. Пусть это какие-то фиксированные  $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ . Так как они произошли, то  $\mathbb{P}(m) \leq p^m$ , то есть на самом деле  $\mathbb{P}(\omega) = 0$ . (В случае бесконечного числа неуспехов опять же можно оценить  $\forall m \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\omega) \leq (1-p)^m$ ). Но раз вероятность каждого элементарного исхода равна 0, то они не могут суммироваться в 1, противоречие. □

Это произошло из-за того, что в схеме Бернулли со счётым числом испытаний континуум возможных исходов.

Чтобы это обойти, можно рассматривать последовательность конечных схем, как в теореме Пуассона, или же просто закрыть на это глаза — в непрерывной теории вероятностей такое распределение возможно.

### 1.2.2 Случайные блуждания

Введём случайные величины  $S_n : S_0 = 0, S_{n+1} = S_n + X_n$ , где  $X_n = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p \\ -1, & \text{с вероятностью } 1-p \end{cases}$ , и все  $\{X_n\}$  независимы.

Это та же схема Бернулли, просто успехам соответствуют движения в положительную сторону оси, и неуспехам — в отрицательную.

Исследуем распределение  $S_n$ . Очевидно, возможные значения  $S_n$  — это  $[-n; n]$ , причём  $k \equiv n \pmod{2}$ .

Событие  $\{S_n = k\}$  эквивалентно событию « $m$  величин равны 1 (остальные -1)», где  $k = m - (n - m) \Rightarrow m = \frac{n+k}{2}$ .

Отсюда согласно схеме Бернулли получаем  $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2}$ .

В симметричном случае, при  $p = 1/2$  формула упрощается,  $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} \cdot \frac{1}{2^n}$ .

### 1.2.3 Про условные вероятности

Вероятность происхождения  $A$  при условии  $B$ :  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$  (при  $\mathbb{P}(B) > 0$ ).

Применение условных вероятностей:

- Вычисление вероятностей вложенных событий. Пусть  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n$ .

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_{n-1})$$

*Доказательство.* По индукции.

$$\mathbb{P}(A_n) \underset{\text{события вложены}}{=} \mathbb{P}(A_n \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_n|A_{n-1})$$

□

- Формула полной вероятности Пусть вероятностное пространство  $\Omega$  разбито на конечное (или счётное) число дизъюнктных событий  $H_1, \dots, H_n$ .



Рис. 1.2: Разбиение вероятностного пространства

Рассмотрим произвольное событие  $A \subset \Omega$ .

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|H_i) \mathbb{P}(H_i)$$

- Формула Байеса. Пусть вероятностное пространство  $\Omega$  разбито на конечное (или счётное) число дизъюнктных событий  $H_1, \dots, H_n$ . Теперь мы хотим узнать вероятность  $H_i$  для некоего  $i$  при условии наступления события  $A$ .

Запишем

$$\mathbb{P}(H_i|A) \underset{\text{по определению}}{=} \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_i) \mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_i) \mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|H_j) \mathbb{P}(H_j)}$$

## 1.3 Матожидание, дисперсия

Говорят, что  $X$  и  $Y$  *одинаково распределены*, если  $\forall r \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = r) = \mathbb{P}(Y = r)$ . Например, в схеме Бернулли из 6 испытаний случайные величины «количество успехов на первых 2 испытаниях» и «количество успехов на последних 2 испытаниях» одинаково распределены.

Если  $X$  и  $Y$  определены на одном и том же вероятностном пространстве, то можно определить арифметические действия (сумму, произведение...) случайных величин, как соответствующие арифметические действия над отображениями поточечно.

**Определение 1.3.1** (Математическое ожидание случайной величины  $X$ ). Обозначается

$$\mathbb{E}X \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega)$$

Математическое ожидание довольно неплохо описывает случайную величину одним числом: (задача 1.3.1).

После приведения подобных членов, можно записать  $\mathbb{E}(X) = \sum_r \mathbb{P}(X = r)r$ . Если  $\Omega$  конечно, то сумма считается; если же  $\Omega$  — бесконечное вероятностное пространство, то матожидание может быть не определено, как сумма бесконечного ряда (тем не менее, сумма всегда существует, если  $X$  всегда принимает неотрицательные значения). Чтобы было удобно оперировать с матожиданиями, будем считать, что матожидание определено, если и только если ряд сходится **абсолютно**.

Чтобы исследовать существование  $\mathbb{E}X$ , введём функции положительной и отрицательной частей числа:

$$\begin{aligned} x_+ &\stackrel{\text{def}}{=} \max\{x, 0\} \\ x_- &\stackrel{\text{def}}{=} \max\{-x, 0\} \end{aligned}$$

Несложно видеть, что равенство  $x = x_+ - x_-$  выполнено всегда.

Посчитав матожидание положительной и отрицательной частей  $X$ ,  $\mathbb{E}(X_+)$  и  $\mathbb{E}(X_-)$ , можно утверждать, что  $\mathbb{E}(X)$  существует, если и только если хотя бы одно из  $\mathbb{E}(X_+)$  и  $\mathbb{E}(X_-)$  конечно. Если же  $\mathbb{E}(X_+) = \mathbb{E}(X_-) = +\infty$ , то  $\mathbb{E}(X)$  не определено. (Если ровно одно из  $\mathbb{E}(X_+)$  или  $\mathbb{E}(X_-)$  бесконечно, то  $\mathbb{E}X$  тоже можно мыслить, как бесконечность того или иного знака)

### 1.3.1 Простейшие свойства матожидания

- $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$ .
- $\forall c \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$ .
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) &= \sum_{r_1} r_1 \mathbb{P}(X = r_1) + \sum_{r_2} r_2 \mathbb{P}(Y = r_2) = \\ &= \sum_{r_1} r_1 \sum_{r_2} \mathbb{P}(X = r_1 \wedge Y = r_2) + \sum_{r_2} r_2 \sum_{r_1} \mathbb{P}(X = r_1 \wedge Y = r_2) = \\ &= \sum_{r_1, r_2} (r_1 + r_2) \mathbb{P}(X = r_1 \wedge Y = r_2) \end{aligned} \quad \square$$

Здесь важно заметить, что  $X$  и  $Y$  лишь должны быть определены на одном вероятностном событии; они не обязаны быть, например, независимы.

- $X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$ . Для доказательства можно записать  $Y = X + (Y - X)$ . Тогда  $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X + \mathbb{E}(Y - X)$ .

Примеры (Матожидания случайных величин).

- $X$  имеет распределение Бернулли с параметром  $p$ , записываемое  $\mathcal{B}(p)$ . Это по определению значит

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 1) = p \\ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$

В таком случае  $\mathbb{E}X = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = p$ .

- Пусть  $S$  имеет распределение  $\mathcal{B}(n, p)$  — число успехов в схеме Бернулли.

$$\mathbb{P}(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Матожидание  $S$  можно посчитать по определению:  $\mathbb{E}S = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

Но это неоправданно сложно. Для упрощения работы запишем  $S = \mathbb{1}_1 + \dots + \mathbb{1}_n$ , где  $\mathbb{1}_1, \dots, \mathbb{1}_n$  — индикаторы событий  $A_1, \dots, A_n$  соответственно. По определению  $\mathbb{1}_i = \begin{cases} 1, & A_i \text{ успешно} \\ 0, & A_i \text{ неуспешно} \end{cases}$

Каждый индикатор по отдельности имеет распределение Бернулли с параметром  $p$ , таким образом,

$$\mathbb{E}S = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = n \cdot p$$

- Пусть  $X$  имеет распределение Пуассона  $\mathcal{P}(a)$ :

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$$

Матожидание такой случайной величины равно

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-a} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} \cdot a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-a} a e^a = a$$

Оказывается, параметр  $a$  в Пуассоновском распределении — матожидание данной случайной величины.

## Лекция III

27 февраля 2023 г.

Известно, что  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ . Верно ли, что  $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$ ?

Выберем в качестве  $X$  величину, распределённую по закону  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$ .

В качестве  $Y$  возьмём эту же случайную величину:  $Y = X$ .

Тогда замечаем, что  $\mathbb{E}X = 0, \mathbb{E}Y = 0, \mathbb{E}XY = \mathbb{E}X^2 = 1$ , равенство не выполняется. «Увы, так устроен мир»

К счастью, можно наложить дополнительные условия, а именно, о **независимости** случайных величин  $X$  и  $Y$ .

В таком случае формула выполняется:

$$\mathbb{P}(X = r_1, Y = r_2) = \underset{\text{определение независимости}}{=} \mathbb{P}(X = r_1) \cdot \mathbb{P}(Y = r_2)$$

откуда

$$\sum_{r_1, r_2} r_1 r_2 \mathbb{P}(X = r_1, Y = r_2) = \sum_{r_1, r_2} r_1 r_2 \mathbb{P}(X = r_1) \cdot \mathbb{P}(Y = r_2) = \left( \sum_{r_1} r_1 \mathbb{P}(X = r_1) \right) \left( \sum_{r_2} r_2 \mathbb{P}(Y = r_2) \right) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$$

Конечно, можно доказать по индукции формулу для любого конечного числа сомножителей:

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}X_i$$

для независимых событий  $X_1, \dots, X_n$ .

Рассмотрим следующую задачу, показывающую, что матожидание — число, наилучшим образом приближает случайную величину:

**Задача 1.3.1.** *Дана случайная величина  $X : \mathbb{E}X^2 < \infty$ . Надо найти число  $r$ , минимизирующее  $\mathbb{E}((X - r)^2)$ .*

Значит, надо минимизировать  $\mathbb{E}(X^2 - 2rX + r^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2r\mathbb{E}(X) + r^2$ . Это квадратный трёхчлен по  $r$ , минимум достигается при  $r = \mathbb{E}(X)$ .

### 1.3.2 Неравенства, связанные с математическим ожиданием

Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — неубывающая неотрицательная функция.

**Факт 1.3.1.**  $\forall X$  — случайная величина и  $\forall r \in \mathbb{R}$  имеет место неравенство:

$$\mathbb{P}(X \geq r) \leq \frac{\mathbb{E}f(X)}{f(r)}$$

*Доказательство.* Рассмотрим вторую функцию  $g(x) = \begin{cases} 0, & x < r \\ f(r), & x \geq r \end{cases}$ . Несложно проверить, что  $g(x) \leq f(x)$ . Отсюда  $g(X) \leq f(X)$  ( $f(X)$  — композиция двух функций), и, как следствие,  $\mathbb{E}(g(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$ . Но несложно видеть, что  $\mathbb{E}(g(X)) = 0 \cdot \mathbb{P}(X < r) + f(r) \cdot \mathbb{P}(X \geq r) = f(r) \cdot \mathbb{P}(X \geq r)$ , и неравенство выполнено.  $\square$

- **Следствие 1.3.1** (Экспоненциальное неравенство Чебышёва). *Рассмотрим  $f(x) = e^{\lambda x}$ , где  $\lambda > 0$ .*

$$\text{Тогда } \mathbb{P}(X \geq r) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda r}}.$$

Более того, здесь возможна более сильная форма — оптимизация по  $\lambda$ :

$$\mathbb{P}(X \geq r) \leq \inf_{\lambda > 0} \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda r}}$$

- **Следствие 1.3.2** (Неравенство Маркова).  $\forall r > 0 : \mathbb{P}(|X| \geq r) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{r}$ .

*Доказательство.* Применим неравенство (факт 1.3.1) для  $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  и случайной величины  $|X|$ . Получим

$$\mathbb{P}(|X| \geq r) \leq \frac{\mathbb{E}f(|X|)}{r} = \frac{\mathbb{E}|X|}{r}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

- **Следствие 1.3.3.**  $\mathbb{P}(|X| \geq r) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{r^2}$

*Доказательство.* Следует из предыдущего применением  $\mathbb{P}(|X| \geq r) \iff \mathbb{P}(X^2 \geq r^2)$ .  $\square$

*Замечание.* Несмотря на то, что это практически то же, что и выше, в мире случайных величин нам будет удобно оценивать не случайную величину, а её квадрат.

- **Следствие 1.3.4** (Вероятностное неравенство Йенсена). Пусть  $X$  — случайная величина с конечным матожиданием, а  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла вниз (как  $x^2$ ).

Тогда  $\mathbb{E}(\phi(X)) \geq \phi(\mathbb{E}X)$ . (картинка, где  $X$  принимает два значения).

*Доказательство.* Пусть  $X$  принимает конечное число значений. Тогда

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)\phi(X(\omega)) \stackrel{\text{по неравенству Йенсена}}{\geq} \phi\left(\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)X(\omega)\right) = \phi(\mathbb{E}X)$$

Если  $X$  принимает счётное число значений, то можно устроить предельный переход.  $\square$

### 1.3.3 Медиана

Ещё одно число, которым можно характеризовать случайную величину — *медиана*.

**Определение 1.3.2** (Медиана случайной величины  $X$ ). Такое число  $m$ , что  $\mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$  и  $\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ .

1. Можно доказать, что медиана (в отличие от матожидания) всегда существует.
2. Медиана необязательно единственна. Так, в случае случайной величины  $X$ , распределённой по закону  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$  медианой является любое число  $m \in [-1, 1]$ .
3. Пусть  $X$  — случайная величина, такая, что  $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$ . Единственная медиана — это 0, причём  $\mathbb{P}(X \geq 0) = \frac{2}{3}$ , и  $\mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{2}{3}$  тоже.
4. На самом деле, медиана — плохая метрика, которой никто не пользуется. Так, только матожидание линейно: медиана суммы вообще не выражается через медианы слагаемых.
5. *Интересный факт.* Если в задаче (задача 1.3.1) заменить  $\mathbb{E}((X - r)^2)$  на  $\mathbb{E}(|X - r|)$ , то минимизирующим  $r$  окажется не матожидание, но медиана.

### 1.3.4 Дисперсия

«Слово дисперсия знакомо тем, кто имеет дело с садоводством. Садоводы используют так называемую дисперсионную краску»

Вообще говоря, дисперсия описывает «меру разброса» данной случайной величины.

Пусть  $X$  — случайная величина, такая, что  $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ .

**Определение 1.3.3** (Дисперсия  $X$ ).  $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$ .

Докажем эквивалентность двух определений:

*Доказательство.*

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \quad \square$$

*Замечание.* В англоязычных текстах дисперсию обозначают  $\text{Var}(X)$  — от слова Variance.

1.  $\mathbb{D}(X) \geq 0$ , как матожидание неотрицательной величины.
2. У константы нет дисперсии:  $\mathbb{D}(C) = 0$
3. Из определения очевидно  $\mathbb{D}(X + C) = \mathbb{D}X$ .
4. Из определения очевидно  $\mathbb{D}(C \cdot X) = C^2 \cdot \mathbb{D}(X)$ . В частности,  $\mathbb{D}(-X) = \mathbb{D}(X)$ .
5. Аддитивность: для **независимых** случайных величин  $X, Y$ :  $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X+Y) &= \mathbb{E}(X+Y)^2 - (\mathbb{E}(X+Y))^2 = \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y)^2 = \\ &= (\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2) + (\mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2) + \underbrace{(2\mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y)}_{0 \text{ из-за независимости}} = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y)\end{aligned}\quad \square$$

6. Определение дисперсии без вычитания матожидания: пусть  $X, X'$  независимы и одинаково распределены.

Тогда  $\mathbb{D}X = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X - X')^2$ .

*Доказательство.*

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}(X - X')^2 = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2 + X'^2 - 2XX') = \frac{1}{2}(\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}X'^2 - 2(\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X')) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \quad \square$$

7. «Элементарное, но нетривиальное свойство».

Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — 1-липшицева функция, то есть  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ .

Тогда для любой случайной величины  $X : \mathbb{D}(f(X)) \leq \mathbb{D}(X)$ .

*Доказательство.* Воспользоваться свойством  $\mathbb{D}X = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X - X')^2$ , а также тем, что  $(X - X')^2 \geq (f(X) - f(X'))^2$  (поточечно).  $\square$

8. **Факт 1.3.2** (Неравенство Чебышёва). *Пусть  $X$  — случайная величина, такая, что  $\mathbb{D}(X) < \infty$ .*

Тогда  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq r) \leq \frac{\mathbb{D}X}{r^2}$ .

*Доказательство.*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq r) \underset{\text{(следствие 1.3.3)}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}{r^2} = \frac{\mathbb{D}X}{r^2} \quad \square$$

*Замечание* (О единицах измерения). Если случайная величина принимает значения некой разности (рублей, очки, километры), то матожидание имеет ту же разность, а дисперсия — разности квадрата измеряемой величины. Чтобы избавиться от такого неудобства, вводят *среднеквадратическое отклонение*.

**Определение 1.3.4** (Среднеквадратическое отклонение случайной величины  $X$ ).  $\sigma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbb{D}(X)}$ .

*Пример.* Пусть  $X$  имеет распределение Пуассона  $\mathcal{P}(a)$ .

По формуле  $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$  получаем, что для вычисления дисперсии надо получить  $\mathbb{E}(X^2)$  (нам уже известно, что  $(\mathbb{E}X)^2 = a^2$ ).

Необыкновенным образом получаем, что легче посчитать  $\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}X$ .

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{a^k}{k!} = a^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-a} \frac{a^{k-2}}{(k-2)!} = a^2$$

Отсюда  $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = a^2 + a$ , и, наконец,  $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = a + a^2 - a^2 = a$ .

## Лекция IV

6 марта 2023 г.

Пусть  $X, Y$  — случайные величины.

**Определение 1.3.5** (Ковариация  $X$  и  $Y$ ).

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

Про ковариацию говорят, что это *мера линейной зависимости*  $X$  и  $Y$ .

Ковариация билинейна (линейна по обоим аргументам) и симметрична.

**Определение 1.3.6** ( $X$  и  $Y$  некоррелированы). Ковариация  $X$  и  $Y$  равна 0, т. е.  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .

В частности, независимые величины с конечным матожиданием модуля некоррелированы. Из ковариации следует, что для некоррелированных случайных величин  $X, Y : \mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y)$ .

Когда говорят про некоррелированность случайных величин, то имеют в виду попарную некоррелированность.

### 1.3.5 Моменты

Для  $k \in \mathbb{N}$  определяют  $k$ -й момент случайной величины  $X$ , он по определению равен  $\mathbb{E}(X^k)$ . Для  $k = 1$  это матожидание.

Также определяют  $k$ -й центральный момент случайной величины  $X$ , он по определению равен  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k$ . Для  $k = 2$  это дисперсия.

Если в определении звучит слово *абсолютный*, то матожидание берётся от модуля аргумента ( $k$ -й абсолютный момент,  $k$ -й абсолютный центральный момент).

$k$ -й момент однороден — при домножении случайной величины на  $c$  он домножается на  $c^k$  или  $|c|^k$ . Для чётных  $k$  абсолютные моменты совпадают с обычными.

## 1.4 Законы больших чисел (ЗБЧ)

Если сложить много случайных величин, то в сумме получится что-то близкое к сумме их матожиданий.

**Теорема 1.4.1** (Закон больших чисел Чебышёва). Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — некоррелированные случайные величины, такие, что  $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ . Запишем это как  $\exists \sigma \in \mathbb{R} : \sup_i \mathbb{D}X_i \leq \sigma^2$ .

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i}{n}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство.*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i)\right| > n\varepsilon\right)$$

Согласно неравенству Чебышёва (факт 1.3.2), это оценивается следующим образом:

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i)\right| > n\varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{(n\varepsilon)^2} \leq \frac{n\sigma^2}{(n\varepsilon)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

**Следствие 1.4.1.** Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — независимые одинаково распределённые случайные величины.

Если  $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ ,  $\mathbb{E}X_i = a$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Замечание.* В заключении следствия ничего не говорится про второй момент величин  $X_j$ , и, на самом деле, следствие как теорема верно и без оценки  $\mathbb{E}X_i^2$  в посылке. Это мы докажем через пару лет совсем не тривиальной математикой.

**Следствие 1.4.2** (Закон больших чисел Бернулли). *Пусть  $S_n$  — число успехов в схеме Бернулли с параметрами  $n, p$ . Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

На самом деле, в 1613 году Бернулли доказал закон больших чисел, названный позднее в честь него, используя довольно сложные вычисления.

Лишь только в 1870 году Чебышёв доказал общий закон больших чисел и следствие из него.

Докажем полученными средствами теорему из матанализа, не использующую в своей формулировке ничего случайностного.

**Теорема 1.4.2** (Вейерштрасс). Пусть  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда

$$\exists \{P_n\}_{n=1}^\infty : \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - P_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство.*

**Лемма 1.4.1** (О математических ожиданиях). *Пусть  $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность случайных величин, такая, что  $\exists a \in \mathbb{R}$  :*

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}(|Z_n - a| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Пусть дана функция  $f$ , заданная в окрестности точки  $a$ , непрерывная в  $a$  и ограниченная некоторым числом  $M \in \mathbb{R}$ .*

*Тогда  $\mathbb{E}(f(Z_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$ .*

*Доказательство леммы.*

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}f(Z_n) - f(a)| &= |\mathbb{E}(f(Z_n) - f(a))| && \leq \\ &&& \text{наприм., по неравенству Йенсена для модуля} \\ &\leq \mathbb{E}|f(Z_n) - f(a)| && \leq \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \underbrace{|f(Z_n) - f(a)| \cdot \chi_{\{|Z_n - a| \geq \varepsilon\}}}_{\leq 2M \cdot \mathbb{P}(|Z_n - a| \geq \varepsilon)} + \underbrace{|f(Z_n) - f(a)| \cdot \chi_{\{|Z_n - a| < \varepsilon\}}}_{\leq w(f, a, \varepsilon)} \right] \end{aligned}$$

где  $w(f, a, \varepsilon) = \sup_{|s-a|<\varepsilon} |f(s) - f(a)|$ . В силу непрерывности  $f$  это сходится к 0 при  $s \rightarrow 0$ .

Устремив  $\varepsilon$  к нулю, получаем, что  $|\mathbb{E}f(Z_n) - f(a)| < \delta(\varepsilon)$ , где  $\delta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ ,  $\delta > 0$ .

Левая часть не зависит от  $\varepsilon$ , получается  $|\mathbb{E}f(Z_n) - f(a)| = 0$ . □

Рассмотрим последовательность случайных величин  $S_n$  — число успехов в схеме Бернулли с параметрами  $(n, p)$ , где  $p$  — фиксированное число из  $[0, 1]$ .

Согласно закону больших чисел Бернулли  $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Применим лемму для  $p$  и  $f$ :  $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(p)$ . Подставим определение матожидания, отсюда

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_n = k) f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(p)$$

Осталось сказать, что сходимость к  $f(p)$  равномерна при всех  $p \in [0, 1]$ . Для этого улучшим оценку: заметим, что из леммы на самом деле следует, что

$$\left| \mathbb{E}f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(p) \right| \leq 2M \cdot \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) + w(f, p, \varepsilon)$$

Первое слагаемое оценивается сверху в виде

$$2M \cdot \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2M \cdot \mathbb{P}(|S_n - np| \leq n\varepsilon) \leq 2M \frac{np(1-p)}{(n\varepsilon^2)} \leq \frac{2M}{n\varepsilon^2}$$

Чтобы показать, что  $|\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) - f(p)| \leq \delta$ , выберем  $\varepsilon > 0$  такой, что  $\forall p \in [0, 1] : w(f, p, \varepsilon) < \frac{\delta}{2}$  (это можно сделать, так как согласно теореме Кантора непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна), затем выберем настолько большое  $n$ , что  $\frac{2M}{n\varepsilon^2} \leq \frac{\delta}{2}$ .  $\square$

## 1.5 Производящие функции

Пусть  $X$  — случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения.

**Определение 1.5.1** (Производящая функция величины  $X$ ). Степенной ряд

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k$$

Так как  $\sum_{k=0}^{\infty}$ , то ряд сходится при  $|z| \leq 1$ .

При рассмотрении производящих функций мы будем брать аргументы  $z \in [0, 1]$ .

Заметим, что  $\phi_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$ ,  $\phi_X(1) = 1$ , а сама функция неубывает и выпукла вниз (как  $x^2$ ). Это следует из того, что  $\phi_X(z)$  — линейная стандартных мономов, каждый из которых неубывает и выпуклый вниз.

Если  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\phi_{X+Y}(z) = \phi_X(z)\phi_Y(z)$ .

*Доказательство.*

$$\phi_{X+Y}(z) = \mathbb{E}(z^{X+Y}) = \mathbb{E}(z^X \cdot z^Y) \underset{X \text{ и } Y \text{ независимы}}{=} \mathbb{E}(z^X) \cdot \mathbb{E}(z^Y) = \phi_X(z) \cdot \phi_Y(z)$$

$\square$

# Лекция V

13 марта 2023 г.

Обобщим данную формулу.

- Пусть  $X_1, \dots, X_n$  независимы. Тогда  $\phi_{S_n}(z) = \prod_{j=1}^n \phi_{X_j}(z)$ , где  $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$  — тоже случайная величина.

2. В частности, если  $X_1, \dots, X_n$  независимы и одинаково распределены, то  $\phi_{S_n}(z) = \phi_{X_1}(z)^n$ .
3. Пусть  $X_1, \dots, X_n, \dots$  — независимы (независимо любое конечное подмножество) и одинаково распределены. Пусть  $N \in \mathbb{N}_0$  — случайная величина (формальное,  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ , где  $\Omega$  — вероятностное пространство), не зависящая от всех  $X$ -ов.

Положим  $S := \sum_{i=1}^N X_i$ .

Тогда  $\phi_S(z) = \phi_N(\phi_{X_1}(z))$ .

*Замечание.* Предыдущий пункт — частный случай данного. В самом деле, для неслучайной величины  $N$ , всегда равной  $n$ , производящая функция равна  $z^n$ .

*Доказательство.*

$$\phi_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S=k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S=k, N=n)z^k = \mathbb{P}(S_n=k, N=n)z^k =$$

Воспользуемся независимостью, продолжив равенство

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n=k) \mathbb{P}(N=n)z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n=k)z^k}_{\phi_{S_n}(z)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) \cdot \phi_{X_1}(z)^n = \phi_S(\phi_{X_1}(z)) \end{aligned}$$

□

### 1.5.1 Производящие функции и моменты

**Предложение 1.5.1.**  $\phi_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1) \cdots (X-k+1))$ .

В частности, для  $k=1$ :  $\phi'_X(1) = \mathbb{E}X$ ; для  $k=2$ :  $\phi''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X$ .

*Доказательство.* Докажем для  $k=1$ .

Формально продифференцировав ряд, получаем  $\phi'_X(z) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)z^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)k \cdot z^{k-1}$ . При подстановке  $z=1$  действительно получается  $\mathbb{E}X$ , но надо обосновывать, почему производная ряда в граничной точке круга сходимости равна сумме производных слагаемых ряда. □

*Другой вариант доказательства.* Данный вариант тяжелее в смысле выкладок, но легче — в смысле теорем, на которые опирается доказательство.

Рассмотрим  $z \in (0, 1)$ , близкое к единице.

$$\frac{\phi_X(1) - \phi_X(z)}{1-z} = \frac{1 - \phi_X(z)}{1-z} = \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)z^k}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \frac{1-z^k}{1-z}$$

По теореме Коши найдутся точки  $\tilde{z}_k \in (z, 1)$ , такие, что  $\frac{1-z^k}{1-z} = k\tilde{z}_k^{k-1}$ .

Отсюда получаем оценку  $\frac{\phi_X(1) - \phi_X(z)}{1-z} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot k$  (пользуемся тем, что все  $\tilde{z}_k \leq 1$ ). В пределе

$$\phi'_X(X) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot k.$$

Чтобы получить оценку с другой стороны, заменим сумму на конечную, совершим предельный переход, получим  $\phi'_X(X) \geq \sum_{k=0}^K \mathbb{P}(X = k) \cdot k \cdot z^{k-1}$ . Устремив  $z$  к единице, получаем оценку  $\phi'_X(X) \geq \sum_{k=0}^K \mathbb{P}(X = k) \cdot k$ , затем можно перейти к предельному переходу по  $K \rightarrow \infty$ .  $\square$

*Замечание.* Производная бесконечна  $\iff$  матожидание бесконечно.

## 1.6 Ветвящиеся процессы

### 1.6.1 Процесс Гальтона — Ватсона

График: в момент времени  $t = 0$  есть частица (человек, электрон), которая в каждый момент времени порождает случайное число потомков.

Получается, если можно так выразиться, дерево. Будем считать, что числа потомков у каждой частицы — независимые одинаково распределённые случайные величины.

Гальтон и Ватсон интересовались генеалогией знатных родов, но потом внезапно оказалось, что процесс прекрасно описывает ядерные реакции.

**Определение 1.6.1** (Процесс Гальтона — Ватсона). Пусть  $(X_{n,j})_{n \geq 0, j \geq 1}$  — независимые одинаково распределённые случайные величины.

Последовательность случайных величин определяется формулой  $M_0 = 1$ ,  $M_{n+1} = \sum_{j=1}^{M_n} X_{n,j}$  и называется *ветвящимся процессом*.

Согласно рекурсивной формуле,  $M_n$  не зависит от  $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots$ .

Значит,  $\phi_{M_{n+1}}(z) = \phi_{M_n}(\phi_X(z))$ , где  $\phi_X$  — производящая функция любой из величин  $X_{n,j}$ .

Получаем  $\phi_{M_0}(z) = z$ ,  $\phi_{M_1}(z) = \phi_X(z)$ ,  $\phi_{M_2}(z) = \phi_X(\phi_X(z))$ . Вообще,  $\phi_{M_n}(z) = \phi_X^{\circ n}(z)$ .

#### Задача о выживании и вырождении ветвящегося процесса

Определим вероятность того, что на  $n$ -м шаге процесс не выжил  $q_n = \mathbb{P}(M_n = 0)$ .

Очевидно,  $q_{n+1} \geq q_n$ , так как если процесс выродился, то так потом и будет, но он может выродиться на  $n + 1$ -м шаге впервые.

Так как  $q_n \leq 1$ , то последовательность  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  имеет предел  $q$ .

Говорят, что *процесс вырождается*, если  $q = 1$ .

Нарисуем график  $\phi_X(z)$  при  $z \in [0, 1]$ .

**Предложение 1.6.1.**  $q$  — наименьший корень уравнения  $\phi_X(z) = z$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $M$  — множество корней уравнения  $1 \in M$ ,  $M$  замкнуто — прообраз нуля некоторого непрерывного отображения.

Отсюда следует, что в  $M$  существует наименьший элемент  $z_*$ .

Так как  $q_n = \mathbb{P}(M_n = 0) = \phi_{M_n}(0) = \phi_X^{\circ n}(0)$ , то  $q_{n+1} = \phi_X^{\circ n+1}(0) = \phi_X(q_n)$ .

Запишем  $0 \leq z_*$ , откуда  $\phi_X(0) \leq \phi_X(z_*) = z_*$ . Так можно применять много раз, получаем  $\forall n \in \mathbb{N} : \phi_X^{\circ n}(0) \leq z_*$ .

Перейдя к пределу у  $q_{n+1} = \phi_X(q_n)$  получаем  $q = \phi_X(q)$ .

Используя  $q \leq z_*$  и  $\phi_X(q) = q$ , получаем  $q = z_*$ .  $\square$

---

Обозначим  $m = \mathbb{E}X$  — среднее число потомков частицы.

**Теорема 1.6.1.** Процесс  $M_n$  не вырождается  $\iff$  либо  $m > 1$ , либо  $X = 1$  всегда, то есть  $X$  — величина неслучайная.

*Доказательство.*

- Рассмотрим  $m > 1$ . При  $z$ , близком к единице,  $\phi_X(z) = 1 - m(1 - z) + o(1 - z)$ , что при  $z$  достаточно близких к 1 меньше  $z$ .

Таким образом, нашлась точка  $z : \phi_X(z) < z$ . С другой стороны,  $\phi_X(0) \geq 0$ , значит, существует корень уравнения  $\phi_X(z) = z$ , строго меньший единицы. Отсюда следует, что процесс не вырождается.

- Рассмотрим  $m < 1$ . Функция  $\phi_X(z)$  выпукла вниз, поэтому  $\forall z \in [0, 1] : \phi_X(z) \geq 1 + m(z - 1)$ .

Таким образом, единственный корень уравнения  $\phi_X(z) = z - z = 1$ .

- Рассмотрим  $m = 1$ . Касательная прямая к  $\phi_X(z)$  проходит по диагонали  $y = z$ .

Рассмотрим наименьший корень уравнения  $\phi_X(z) = z$ . Есть варианты:

1. Касание единицы происходит только в самом конце:  $\phi_X(z) > z$  для  $z < 1$ . Это случай вырождения процесса.
2.  $\forall z \in [0, 1] : \phi_X(z) = z$ . Процесс не вырождается,  $X_{n,j} = 1$  всегда.
3. Остался один случай, которого не бывает. Для некоего  $a \in (0, 1)$ , совпадение  $\phi_X(z) = z$  происходит только при  $z \in [a, 1]$ .

На самом деле, с производящими функциями такое невозможно: если  $\phi_X(z) = z$  в окрестности 1, то  $\phi''_X(1) = 0$ .

Но  $\phi''_X(1) = \mathbb{E}(X(X - 1)) = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X$ , а мы знаем, что  $\mathbb{E}X = 1$ . Получается,  $\mathbb{E}X^2 = 1$ , и дисперсия этой величины нулевая:  $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 0$ . Таким образом,  $X$  — величина неслучайная.

□

## 1.6.2 Некоторые другие виды процессов

### Процессы Беллмана — Харриса

Отличие от процессов Гальтона — Ватсона состоит в том, что каждый субъект живёт случайное время. В конце своего жизненного времени частица распадается на случайное количество частиц.

### Многотиповые процессы

Распределение числа потомков зависит от типа данной частицы: синяя частица порождает либо два синие, либо две красные, а красная — одну жёлтую, и, возможно, одну зелёную.

### Процессы с иммиграцией

На каждом поколении число частиц меняется каким-то фиксированным образом — частицы «прибывают откуда-то снаружи».

## 1.7 Предельные теоремы Муавра — Лапласа

### 1.7.1 Локальная

Запишем число успехов в схеме Бернулли  $\mathcal{B}(n, p)$ . Зафиксируем  $p$  и изучим  $\mathbb{P}(S_n = k)$  для «типичных» значений  $k$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Вспомним, что  $\mathbb{E}S_n = np$ ,  $\mathbb{D}S_n = np(1-p)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

Так как дисперсия — это квадрат «типичного отклонения», то для некой константы  $C$  величина  $S_n$  должна часто отклоняться от своего матожидания не больше, чем на  $C\sqrt{n}$ .

**Определение 1.7.1** (Последовательности  $A_{n,k}$  и  $B_{n,k}$  равномерно эквивалентны при  $n \rightarrow \infty$  на некоторой области  $k \in C_n$ ).  
 $\max_{k \in C_n} \left| \frac{A_{n,k}}{B_{n,k}} - 1 \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

**Теорема 1.7.1** (Локальная предельная теорема Муавра — Лапласа). Локальность означает, что в рассмотрении находится фиксированное  $k$ .

Пусть последовательность  $\varepsilon_n$  стремится к нулю. Утверждается, что

$$\mathbb{P}(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(k-np)^2}{2p(1-p)n} \right\}$$

равномерно по области  $\{k \in \mathbb{N} \mid |k - np| \leq \varepsilon_n \cdot n^{2/3}\}$ . «Название теоремы — историческое недоразумение. Теорему Муавра — Лапласа доказал Муавр, а Лаплас — лишь включил её в свой учебник. Впрочем, к распространению этой теоремы он всё-таки имел какое-то отношение»

*Доказательство.* Запишем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^k \\ &\sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot p^k (1-p)^{n-k}}{\left(\frac{(n-k)}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}} \sim \frac{n^n p^k (1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi np(1-p)} \cdot (n-k)^{n-k} k^k} \end{aligned}$$

Преобразовав ещё чуть-чуть выражение, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \frac{n^n p^k (1-p)^{n-k}}{(n-k)^{n-k} k^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \left(\frac{np}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$$

Определим новую переменную  $v$  таким образом:  $k = np + v$ . В таком случае  $\left(\frac{k}{np}\right)^k = \left(\frac{np+v}{np}\right)^{np+v} = \left(1 + \frac{v}{np}\right)^{np+v} = \exp\left(\log\left(1 + \frac{v}{np}\right)(np+v)\right)$ . Разложим  $\log$  в ряд с точностью до второго члена:  $\exp\left(\left(\frac{v}{np} - \frac{v^2}{2(np)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^3}{(np)^3}\right)\right)(np+v)\right) = \exp\left(v - \frac{v^2}{2np} + \frac{v^2}{np} - \frac{v^3}{2(np)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^3}{(np)^2}\right)\right) = \exp\left(v + \frac{v^2}{2np} + o(1)\right)$ . Слагаемое под  $\mathcal{O}$  стремится к нулю, так как  $|v| \leq \varepsilon_n \cdot n^{2/3}$  по условию на рассматриваемую область  $k$ .

Таким образом,  $\left(\frac{np}{k}\right)^k = \exp\left(-(k-np) - \frac{(k-np)^2}{2np} + o(1)\right)$ . Аналогично (подставив  $p \rightsquigarrow (1-p)$ ;  $k \rightsquigarrow (n-k)$ ;  $v \rightsquigarrow -v$ ) получаем  $\left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k} = \exp\left(-(np-k) - \frac{(np-k)^2}{2n(1-p)} + o(1)\right)$

Перемножив, получаем

$$\left(\frac{np}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k} = \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2n} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) + o(1)\right\} = \exp\left\{-\frac{(np-k)^2}{2np(1-p)} + o(1)\right\}$$

□

## 1.7.2 Интегральная

Что можно сказать о вероятности попадания числа успехов в определённый интервал?

**Теорема 1.7.2** (Интегральная теорема Муавра — Лапласа). Пусть  $a < b$ .

$$\mathbb{P}\left(S_n \in [np + a\sqrt{p(1-p)n}; np + b\sqrt{p(1-p)n}]\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\text{Вероятность переписывается в виде } \mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{p(1-p)n}} \leq b\right) = \mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Дисперсия } S_n}} \leq b\right)$$

*Доказательство.*

$$\mathbb{P}\left(S_n \in [np + a\sqrt{p(1-p)n}; np + b\sqrt{p(1-p)n}]\right) = \sum_{k \in [np + a\sqrt{p(1-p)n}; np + b\sqrt{p(1-p)n}]} \mathbb{P}(S_n = k)$$

Так как  $k - np \sim \mathcal{O}(\sqrt{n})$ , то все последующие оценки равномерны по  $k$ .

$$\sum_k \mathbb{P}(S_n = k) \sim \sum_k \frac{1}{\sqrt{2np(1-p)}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2p(1-p)n}\right\}$$

Слагаемые в сумме можно заменить на эквивалентные, так как оценка равномерна. Заменим сумму интегралом: для начала покажем  $\frac{1}{\sqrt{2np(1-p)}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2p(1-p)n}\right\} \sim \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{2np(1-p)}} \exp\left\{-\frac{(x-np)^2}{2p(1-p)n}\right\} dx$ . Покажем корректность этой эквивалентности, заменив  $x = k + \theta$ .  $\frac{1}{\sqrt{2np(1-p)}} \exp\left\{-\frac{(x-np)^2}{2p(1-p)n}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2np(1-p)}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2 + 2(k-np)\theta + \theta^2}{2p(1-p)n}\right\}$ . Так как  $(k-np)\theta = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ , то этими слагаемыми действительно можно пренебречь — знаменатель порядка  $n$ , эти слагаемые —  $o(1)$ .

$$\sum_k \mathbb{P}(S_n = k) \sim \int_{np + a\sqrt{np(1-p)}}^{np + b\sqrt{np(1-p)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(x-np)^2}{2np(1-p)}\right) dx + o(1)$$

Сделаем замену переменной:  $u = \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ . Тогда  $du = \frac{dx}{\sqrt{np(1-p)}}$ .

$$\text{Интеграл упрощается до } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

□

**Следствие 1.7.1.**

$$\mathbb{P}\left(S_n \leq np + b\sqrt{np(1-p)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

*Доказательство.*

- Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n < np) = \frac{1}{2}$ . Для этого покажем  $\forall \varepsilon > 0 : \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n < np) - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon$ .

Воспользуемся тем, что  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ . Значит, найдётся  $M > 0$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+M} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(np - M\sqrt{np(1-p)} \leq S_n < np\right) &\leq \mathbb{P}(S_n < np) \leq 1 - \mathbb{P}\left(np \leq S_n \leq np + M\sqrt{np(1-p)}\right) \\ &\downarrow n \rightarrow \infty \\ \int_{-M}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n < np) \leq 1 - \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

- Теперь осталось посчитать  $\mathbb{P}\left(S_n \leq np + b\sqrt{np(1-p)}\right)$ . Без потери общности  $b \geq 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(S_n \leq np + b\sqrt{np(1-p)}\right) &= \mathbb{P}(S_n < np) + \mathbb{P}\left(np \leq S_n \leq np + b\sqrt{np(1-p)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

□

*Интересный факт.* Интеграл в правой части описывает нормальное распределение, он не берётся. Теорема Леви «выросла» из интегральной теоремы Муавра — Лапласа.

*Интересный факт* (Теорема Леви). Пусть  $X_1, \dots, X_n, \dots$  — независимо распределённые случайные величины,  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ . Предположим, что  $\mathbb{E}X_j^2 < \infty$  для любого  $j$ .

Тогда для  $\forall a < b : \mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \leq b\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .

## Лекция VI

22 марта 2023 г.

### 1.8 Цепи Маркова

Лекция пропущена.

## Лекция VII

27 марта 2023 г.

Было:  $\mathcal{X}$  — множество состояний.  $X_0, X_1, \dots, \in \mathcal{X}$ .  $\pi_n(x) = \mathbb{P}(X_n = x), x \in \mathcal{X}$ . Вероятность перехода  $p(x \rightarrow y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$ .  $\pi_0, p$  определяют состояние цепи.  $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \pi_0 p(x_0 \rightarrow x_1) \cdot \dots \cdot \pi_n = \pi_0 \cdot p^n$ .

#### 1.8.1 Инвариантные (стационарные) распределения

**Определение 1.8.1** (Распределение на множестве  $\mathcal{X}$ ). Такое отображение  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ , что  $\sum_{x \in \mathcal{X}} \pi(x) = 1$ .

**Определение 1.8.2** (Инвариантное распределение). Такое распределение  $\pi$ , что  $\pi \cdot p = \pi$ .

$$\forall y \in \mathcal{X} : \pi(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi(x)p(x \rightarrow y).$$

Если  $\pi_0$  инвариантно, то  $\forall n \geq 0 : \pi_n = \pi \cdot p^n = \pi_0$ . Следует из ассоциативности умножения матриц.

*Примеры.*

- «Хороший пример»: блуждание по конечному неориентированному графу.

Обозначим за  $E$  общее число рёбер,  $\deg x$  — число рёбер, инцидентных  $x$ . Очевидно.  $\sum_{x \in \mathcal{X}} \deg x = 2E$ .

Рассмотрим цепь Маркова, где  $\forall y : p(x \rightarrow y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg x}, & \exists(x, y) \\ 0, & \nexists(x, y) \end{cases}$ .

Выберем распределение  $\pi(x) = \frac{\deg(x)}{2E}$ . Покажем, что оно инвариантно:

$$\frac{\deg(y)}{2E} = \pi(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi(x)p(x \rightarrow y) = \sum_{x \in \mathcal{X}, \exists(x, y)} \frac{\deg(x)}{2E} \cdot \frac{1}{\deg x} = \sum_{x \in \mathcal{X}, \exists(x, y)} \frac{1}{2E} = \frac{\deg y}{2E}$$

- «Плохой пример»: случайное блуждание на множестве целых чисел  $\mathbb{Z}$ . Вероятности перехода  $p(n \rightarrow n+1) = p(n \rightarrow n-1) = \frac{1}{2}$ .

Граф бесконечный. и это всё разрушает. Поищем инвариантное распределение. Пусть это  $\pi$ .

Тогда  $\pi(y) = \frac{1}{2}(\pi(y-1) + \pi(y+1))$ . Отсюда можно выразить  $\forall y \in \mathbb{Z} : \pi(y) = \pi(0) + ky$ , где  $k$  — некая константа. Несложно видеть, что во всех трёх случаях ( $k < 0, k > 0, k = 0$ )  $\pi$  не является распределением.

Таким образом, для случайного блуждания на  $\mathbb{Z}$  нет инвариантного распределения.

**Теорема 1.8.1** (Марков). Пусть  $\mathcal{X}$  — конечная цепь, причём вероятность любого перехода ненулевая:  $\delta := \min_{x, y \in \mathcal{X}} p(x \rightarrow y) > 0$ .

Тогда  $\exists \pi$  — такое распределение, что

$$\forall x, y \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N} : |p^n(x \rightarrow y) - \pi(y)| \leq (1 - \delta)^n \quad (1.1)$$

При этом  $\pi$  — единственное инвариантное распределение цепи. Любое начальное распределение  $\pi_0$  влечёт  $\pi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$ .

*Доказательство.* В предположении истинности (1.1) получаем

$$\pi_n(y) = (\pi_0 p^n)(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_0(x)p^n(x \rightarrow y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_0(x) \right)}_1 \pi(y) = \pi(y)$$

Предположим, что  $\tilde{\pi}$  — произвольное инвариантное распределение. Рассмотрим цепь для  $\pi_0 = \tilde{\pi}$ . С одной стороны, в таком случае  $\forall n \in \mathbb{N} : \pi_n = \tilde{\pi}$ . С другой стороны,  $\pi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$ . Значит,  $\tilde{\pi} = \pi$ .

Таким образом, все инвариантные распределения совпадают с  $\pi$ .

Теперь докажем что-то. Запишем в координатном виде  $p^{n+1} = p^n \cdot p$ .

$$\begin{aligned} p^{n+1}(x \rightarrow y) &= \sum_{z \in \mathcal{X}} p^n(x \rightarrow z)p(z \rightarrow y) \\ &\downarrow n \rightarrow \infty \\ \pi(y) &= \sum_{z \in \mathcal{X}} \pi(z)p(z \rightarrow y) \end{aligned}$$

Интересно, что мы доказали?

Покажем, что  $\pi$  — распределение, то есть сумма  $\sum_{x \in \mathcal{X}} \pi(x) = 1$ . Для любого фиксированного  $x \in \mathcal{X}$

$$1 = \sum_{y \in \mathcal{X}} p^n(x \rightarrow y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in \mathcal{X}} \pi(y)$$

---

Осталось доказать (1.1). Зафиксируем  $y \in \mathcal{X}$ . Рассмотрим последовательности  $m_n = \min_{x \in \mathcal{X}} p^n(x \rightarrow y)$  и  $M_n = \max_{x \in \mathcal{X}} p^n(x \rightarrow y)$ .

$m_n$  неубывает,  $M_n$  невозрастает:

$$p^{n+1}(x \rightarrow y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} p(x \rightarrow z)p^n(z \rightarrow y)$$

Так как  $p^n(z \rightarrow y) \in [m_n, M_n]$ , то  $p^{n+1}(x \rightarrow y)$ , как барицентрическая комбинация таких вероятностей, тоже лежит в  $[m_n, M_n]$ . Отсюда действительно  $m_n$  неубывает,  $M_n$  невозрастает.

Ещё докажем их сближение:  $(M_{n+1} - m_{n+1}) \leq (1 - \delta)(M_n - m_n)$ : Выберем такие  $x_1, x_2$ , что максимум и минимум достигаются:  $M_{n+1} = p^{n+1}(x_1 \rightarrow y)$ ,  $m_{n+1} = p^{n+1}(x_2 \rightarrow y)$ .

$$M_{n+1} - m_{n+1} = p^{n+1}(x_1 \rightarrow y) - p^{n+1}(x_2 \rightarrow y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} [p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]p^n(z \rightarrow y)$$

Оценим эту сумму следующим образом:

$$\sum_{z \in \mathcal{X}} [p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]p^n(z \rightarrow y) \leq \sum_{z \in \mathcal{X}} [p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]_+ M_n - \sum_{z \in \mathcal{X}} [p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]_- m_n$$

Покажем равенство

$$\sum_{z \in \mathcal{X}} [p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]_+ = \sum_{z \in \mathcal{X}} [p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]_-$$

Это верно, так как

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{X}} [p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]_+ - \sum_{z \in \mathcal{X}} [p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]_- &= \\ \sum_{z \in \mathcal{X}} (p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)) &= \sum_{z \in \mathcal{X}} p(x_1 \rightarrow z) - \sum_{z \in \mathcal{X}} p(x_2 \rightarrow z) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Таким образом

$$M_{n+1} - m_{n+1} \leq \sum_{z \in \mathcal{X}} [p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]_+ (M_n - m_n)$$

Если все слагаемые  $[p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z)]_+$  равны нулю, то доказывать нечего. Иначе найдётся положительное слагаемое  $p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z) > 0$ . Согласно определению  $\delta$ :  $p(x_1 \rightarrow z) - p(x_2 \rightarrow z) \leq p(x_1 \rightarrow z) - \delta$ .

Доказали сближение  $(M_{n+1} - m_{n+1}) \leq (1 - \delta)(M_n - m_n)$ .

Таким образом,  $m_n$  неубывает,  $M_n$  невозрастает,  $M_n - m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Назначим за  $\pi(y)$  общий предел последовательностей  $m_n$  и  $M_n$ . Так как  $|p^n(x \rightarrow y) - \pi(y)| \leq M_n - m_n \leq (1 - \delta)^n$ , то (1.1) доказана.  $\square$

*Примеры* (Теорема Маркова здесь неприменима).

- «Бесконечно плохой пример»: случайное блуждание на квадрате из четырёх вершин. Вероятность перехода в диагонально противоположную вершину равна 0, вероятности  $p^n(x \rightarrow y)$  не сходятся — они периодично меняются с  $\frac{1}{2}$  до 0.
- Случайное блуждание по пятиугольнику из пяти вершин. Есть рёбра с вероятностью перехода 0, напрямую теорема неприменима. Но здесь за четыре шага можно попасть в любую вершину:  $\forall x, y : p^4(x \rightarrow y) > 0$ .

**Факт 1.8.1.** Пусть цепь Маркова такова, что для некоторого  $m \in \mathbb{N} : \forall x, y \in \mathcal{X} : p^m(x \rightarrow y) > 0$ . Тогда  $\exists!$  инвариантное распределение  $\pi : p^n(x \rightarrow y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y)$ .

*Доказательство.* Доказательство Маркова применимо к прореженной цепи  $X_0, X_m, \dots$  с матрицей перехода  $p^m$ . Согласно ему,  $p^{mn}(x \rightarrow y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y)$ .

$$p^k(x \rightarrow y) = p^{mn+l}(x \rightarrow y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} p^l(x \rightarrow z) p^{mn}(z \rightarrow y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \sum_{z \in \mathcal{X}} p^l(x \rightarrow z) \right)}_1 \pi(y) = \pi(y)$$

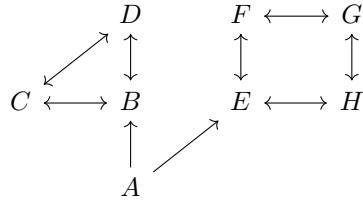
□

## Лекция VIII

3 апреля 2023 г.

### 1.8.2 Классификация состояний в цепях Маркова

Рассмотрим для примера цепь Маркова на таком графе:



#### Существенные и несущественные состояния

**Определение 1.8.3** (Состояние  $y$  достижимо из  $x$ ). Существует такая последовательность состояний  $x_0, \dots, x_m$ , такая, что

$$x_0 = x; x_m = y; \quad p(x_i \rightarrow x_{i+1}) > 0$$

Обозначается  $x \cdots \rightarrow y$

**Определение 1.8.4** (Существенное состояние  $x$ ).  $\forall y$  такого, достижимого из  $x$ , можно вернуться:

$$(x \cdots \rightarrow y) \Rightarrow (y \cdots \rightarrow x)$$

*Пример.*  $A$  — единственное несущественное состояние в графе в начала раздела.

**Факт 1.8.2.** Из существенного состояния можно перейти только в существенное.

*Доказательство.* От противного:  $\exists z \in \mathcal{X} : (y \cdots \rightarrow z) \wedge \neg(z \cdots \rightarrow y)$ . Тогда в частности  $\neg(z \cdots \rightarrow x)$ , но  $x \cdots \rightarrow z$ . Противоречие. □

**Факт 1.8.3.** В конечной цепи Маркова всегда найдётся хотя бы одно существенное состояние.

*Доказательство.* Рассмотрим цепочку состояний. Если  $x_0 \in \mathcal{X}$  (произвольный элемент) — существенное состояние, то доказывать нечего. Иначе выберем  $x_1$  как такое состояние, что  $x_0 \cdots \rightarrow x_1$ , но не наоборот.

Так дальше продолжим цепочку:  $x_n \cdots \rightarrow x_{n+1}$ . От противного: пусть она стала бесконечной, никакие состояния в ней не оказались существенными. Если в какой-то момент окажется, что  $x_i = x_j$ , то значит мы нашли цикл  $x_i \cdots \rightarrow \dots \rightarrow x_j$ , и получили противоречие. □

*Контрпример.* В бесконечной цепи  $p(n \rightarrow n+1) = p(n \rightarrow n+2) = \frac{1}{2}$  существенных состояний нет. Но, она, конечно, бесконечная.

---

На множестве существенных состояний можно ввести отношение эквивалентности:

$$x \sim y \iff x \cdots \rightarrow y \vee x = y$$

Симметричность: по определению того, что  $x$  — существенное состояние:  $(x \cdots \rightarrow y) \Rightarrow (y \cdots \rightarrow x)$ . Транзитивность и рефлексивность очевидны из определения.

**Следствие 1.8.1.** *Множество существенных состояний распадается на классы достижимых — эргодические классы.*

**Факт 1.8.4.** *Каждый эргодический класс замкнут: из любого эргодического класса нельзя выйти.*

*Доказательство.* Из всякого  $x$  из данного эргодического класса можно попасть только в существенные  $y$ , которые по определению эквивалентны  $x$ .  $\square$

*Пример.* В графе выше эти классы — треугольник  $BCD$  и четырёхугольник  $EFGH$ .

**Определение 1.8.5** (Неприводимая цепь Маркова). В данной цепи нет замкнутых множеств кроме всего пространства  $\mathcal{X}$ .

Рассмотрим произвольное состояние  $x \in \mathcal{X}$ . По определению, множество точек, достижимых из  $x$  (обозначим его  $T_x$ ), замкнуто.

В неприводимой цепи  $\forall x \in \mathcal{X} : T_x = \mathcal{X}$ , значит, эквивалентным определением неприводимой цепи является то, что из любого состояния можно добраться до любого другого.

В частности, в неприводимой цепи все состояния — существенные, образуют один эргодический класс.

### 1.8.3 Периодичность

Рассмотрим произвольное состояние  $x \in \mathcal{X}$ , обозначим  $I_x := \{k \in \mathbb{N} \mid p^k(x \rightarrow x) > 0\}$ . Будем считать, что  $I_x$  непустое.

**Определение 1.8.6** (Период состояния  $x$ ).  $d(x) = \gcd(I_x)$ .

*Замечание.* Для произвольного  $x$ :  $I_x$  — полугруппа по сложению.

**Факт 1.8.5.** *Существует конечное подмножество  $I'_x \subset I_x$ , такое, что  $\gcd(I_x) = \gcd(I'_x)$ .*

*Доказательство.* Положим  $d_M := \gcd(I_x \cap [1, M])$ . С ростом  $M$  последовательность множеств увеличивается по включению,  $d_M$  убывает.

Так как  $d_M$  — натуральные числа, то последовательность стабилизируется:  $\exists M_0 : \forall M > M_0 : \gcd(I_x \cap [1, M]) = d_{M_0}$ . Очевидно, в таком случае  $I_x \cap [1, M]$  — искомое подмножество.  $\square$

**Факт 1.8.6.**  $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\{k \cdot d(x) \mid k \in \mathbb{N}, k \geq k_0\} \subset I_x \subset \{k \cdot d(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

*Доказательство.* Правое включение очевидно верно независимо от  $k_0$ .

1. Найдём конечное множество  $I'_x \subset I_x$ , такое, что  $\gcd(I'_x) = d(x)$ .
2. Найдём линейную комбинацию элементов  $I'_x$ , такую, что  $d(x) = \sum_j v_j \lambda_j, v_j \in I'_x, \lambda_j \in \mathbb{Z}$ .
3. Выберем  $b := \sum_j v_j |\lambda_j|$ .  $b \in I_x$ , как линейная комбинация его элементов с неотрицательными коэффициентами  $|\lambda_j|$ .

Значит,  $b$  представимо в виде  $b = \beta \cdot d(x)$ .

4. Заметим, что  $(\beta + 1)d(x) = \sum_j v_j \cdot (\lambda_j + |\lambda_j|)$ , что опять-таки линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами, лежит в  $I_x$ .
5. Рассмотрим достаточно большое  $k \in \mathbb{N}$ . Разделив на  $\beta$  с остатком, получаем  $k = r\beta + v$ , где  $0 \leq v < \beta$ .

$$k = r\beta + v(\beta + 1) - v\beta = (r - v)\beta + v(\beta + 1)$$

Для  $r - v \geq 0$ , например, для  $k \geq \beta^2$ :  $k \cdot d(x) \in I_x$ , как линейная комбинация  $\beta \cdot d(x)$  и  $(\beta + 1) \cdot d(x)$ .

Таким образом,  $k_0 = \beta^2$  подходит.

□

**Следствие 1.8.2.** В частности,  $\exists k \in \mathbb{N} : kd \in I_x \wedge (k + 1) \cdot d(x) \in I_x$  (например,  $k = \beta$ ).

**Факт 1.8.7.** Если два состояния сообщаются:  $x \dots \rightarrow y$  и  $y \dots \rightarrow x$ , то  $d(x) = d(y)$ .

*Доказательство.* Пусть  $p^a(x \rightarrow y) > 0$ . Воспользуемся (следствие 1.8.2) применительно к  $y$ : есть два цикла, содержащих  $y$ , длин  $k \cdot d(y)$  и  $(k + 1) \cdot d(y)$ .

Тогда  $a + k \cdot d(y) \in I_x$  и  $a + (k + 1) \cdot d(y) \in I_x$  тоже. Отсюда сразу получаем  $d(x) \mid d(y) = (a + (k + 1) \cdot d(y)) - a - k \cdot d(y)$ . Аналогично  $d(y) \mid d(x)$ , значит они равны. □

#### 1.8.4 Связь периодов и эргодических классов

Для произвольного эргодического класса  $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ :  $x, y \in \mathcal{C} \Rightarrow d(x) = d(y)$ .

*Доказательство.*  $x$  и  $y$  сообщаются, так как они в одном эргодическом классе. □

#### Циклические подклассы

Рассмотрим один эргодический класс, например,  $\mathcal{C} = \{E, F, G, H\}$ . Заметим, что для  $\mathcal{C}_0 = \{E, G\}$  и  $\mathcal{C}_1 = \{F, H\}$ : из одного класса на следующем шаге можно попасть только в другой.

Пусть  $\mathcal{C}$  — эргодический класс с периодом  $d$ . Тогда существует разбиение  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \sqcup \mathcal{C}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{C}_{d-1}$ , такое, что вероятность перехода из  $\mathcal{C}_i$  в  $\mathcal{C}_{(i+1) \pmod d}$  равна 1.

Иными словами,  $\forall x \in \mathcal{C}_i : p(x \rightarrow y) > 0 \Rightarrow y \in \mathcal{C}_{(i+1) \pmod d}$ . Это называется *разбиением на циклические подклассы*.

*Доказательство.* Выберем произвольное  $x_0 \in \mathcal{C}$ . Для всякого  $y \in \mathcal{C}$  найдём такое  $l(y) : p^{l(y)}(x_0 \rightarrow y) > 0$ .

Положим  $j(y) = l(y) \pmod d$  ( $0 \leq j(y) < d$ ).

Определим  $\forall j = 0..d-1 : \mathcal{C}_j := \{y \in \mathcal{C} \mid j(y) = j\}$ . Ясно, что  $\bigcup_j \mathcal{C}_j = \mathcal{C}$ .

Заметим, что если  $p(y \rightarrow z) > 0$ , то  $p^{l(y)}(x_0 \rightarrow y) > 0 \Rightarrow p^{l(y)+1}(x_0 \rightarrow z) > 0$ . Значит, действительно,  $p(x \rightarrow y) > 0 \Rightarrow y \in \mathcal{C}_{(i+1) \pmod d}$ .

Осталось показать, что  $\mathcal{C}_j$  не пересекаются.

Пойдём от противного: пусть  $y \in \mathcal{C}_{j_1} \cap \mathcal{C}_{j_2}$ . Тогда  $\exists l_1, l_2 \in \mathbb{N} : p^{l_1}(x_0 \rightarrow y) > 0, p^{l_2}(x_0 \rightarrow y) > 0$ . Так как  $x_0$  и  $y$  в одном эргодическом классе, то для некоторого  $b \in \mathbb{N} : p^b(y \rightarrow x_0)$ . значит,  $l_1 + b \in I_{x_0}$  и  $l_2 + b \in I_{x_0}$ . Значит, они оба делятся на  $d$ , их разность делится на  $d$ , значит,  $l_1 \equiv l_2 \pmod d$ . □

## Лекция IX

10 апреля 2023 г.

**Теорема 1.8.2** (Марков). Самая общая формулировка, которая у нас покамест встречалась, звучит так:

Если для конечной цепи  $\mathcal{X}$  существует  $m \in \mathbb{N} : \forall x, y \in \mathcal{X} : p^m(x \rightarrow y) > 0$ , то

$\exists \pi$  — распределение, такое, что  $p^n(x \rightarrow y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$ , а ещё  $\pi \cdot p = \pi$  и  $\forall \pi_0 : \pi_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$ .

На этой лекции мы рассмотрим ещё две теоремы, далее обобщающие теорему Маркова.

**Теорема 1.8.3** (Марков, для апериодических цепей). Пусть  $\mathcal{X}$  конечно и состоит из единственного эргодического класса с периодом 1.

Утверждается, что тогда верно утверждение предыдущей теоремы (истинна посылка).

*Доказательство.* Пусть  $x$  — произвольное состояние. Тогда, согласно предыдущей лекции, существует достаточно большое  $K(x) : \forall k \geq K(x) : p^k(x \rightarrow x) > 0$ .

По определению эргодического класса,  $\exists a(x, y) : p^{a(x, y)}(x \rightarrow y) > 0$ . Тогда

$$\forall k \geq K(x) + a(x, y) : p^k(x \rightarrow y) > p^{k-a(x, y)}(x \rightarrow x) \cdot p^{a(x, y)}(x \rightarrow y) > 0$$

Так как пар конечное число, то  $m := \max_{x, y} (K(x) + a(x, y))$  подойдёт.  $\square$

*Замечание.* Рассмотрим цепь, в которой есть один эргодический класс  $\mathcal{C}$  и много несущественных состояний, из которых достичим данный класс.

Формально, под условие теоремы эта цепь не подходит. Тем не менее, доказательство работает и здесь.

**Упражнение.** Если  $\mathcal{X}$  конечно, и содержит единственный эргодический класс  $\mathcal{C}$ , причём его период — 1, то утверждение теоремы Маркова тоже верно (правда, посылка в записанной форме не истинна), причём предельное распределение сосредоточено на эргодическом классе:  $\sum_{y \in \mathcal{C}} \pi(y) = 1$ .

**Теорема 1.8.4** (Марков, для периодических цепей). Пусть  $\mathcal{X}$  конечно и состоит из единственного эргодического класса с периодом  $d > 1$ .

Для краткости записи обозначим  $i \oplus j := (i + j \pmod d)$ .

Тогда, как уже доказано,  $\mathcal{X} = \mathcal{C}_0 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{C}_{d-1}$ , таких, что

$$p(x \rightarrow y) > 0 \Rightarrow \exists j \in [0, d) : x \in \mathcal{C}_j, y \in \mathcal{C}_{j \oplus 1}$$

Утверждается, что  $\{\pi_j\}_{j=0}^{d-1}$  — система распределений, такая, что  $\forall j : \pi_j$  сосредоточено на  $\mathcal{C}_j$ , и

$$\forall x \in \mathcal{C}_i, y \in \mathcal{C}_{i \oplus j} : \lim_{n \rightarrow \infty} p^{nd+j}(x \rightarrow y) = \pi_{i \oplus j}(y)$$

Кроме того, условие инвариантности заменяется на условие  $\pi_j \cdot p = \pi_{j \oplus 1}$ .

*Доказательство.* Зафиксируем подкласс  $\mathcal{C}_i$  и рассмотрим на нём марковскую цепь с переходной вероятностью  $q := p^d$ . Заметим, что тогда  $\mathcal{C}_i$  — эргодический класс в новой цепи, причём его период — 1. В самом деле,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{C}_i : \exists K : \forall k \geq K : p^{kd}(x \rightarrow x) &> 0 \\ q^k(x \rightarrow x) &> 0 \end{aligned}$$

Таким образом, период новой цепи равен 1, откуда получаем, что к новой цепи применима предыдущая теорема.

А именно, существует распределение  $\pi_i$  на  $\mathcal{C}_i$ :

$$\forall x, y \in \mathcal{C}_i : q^n(x \rightarrow y) \xrightarrow{x \rightarrow y} \pi_i(x \rightarrow y) \iff p^{nd}(x \rightarrow y) \xrightarrow{x \rightarrow y} \pi_i(x \rightarrow y)$$

Теперь рассмотрим два подкласса  $\mathcal{C}_i$  и  $\mathcal{C}_{i\oplus j}$  и произвольные  $x \in \mathcal{C}_i, y \in \mathcal{C}_{i\oplus j}$ .

$$p^{nd+j}(x \rightarrow y) = p^{nd}p^j(x \rightarrow y) = \sum_{z \in \mathcal{C}_{i\oplus j}} p^j(x \rightarrow z) \cdot p^{nd}(z \rightarrow y)$$

Так как  $p^{nd}(z \rightarrow y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_{i\oplus j}(y)$ , то  $p^{nd+j}(x \rightarrow y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{z \in \mathcal{C}_{i\oplus j}} p^j(x \rightarrow z) \right) \cdot \pi_{i\oplus j}(y) = \pi_{i\oplus j}(y)$ .

Осталось доказать, что  $\pi_j \cdot p = \pi_{j\oplus 1}$ . Положим  $y \in \mathcal{C}_{j+1}$ , запишем

$$\pi_{j\oplus 1}(y) = \sum_{x \in \mathcal{C}_j} \pi_j(x) \cdot p(x \rightarrow y)$$

Для этого вспомним, что  $\forall x_0 \in \mathcal{C}_j : \pi_j(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{nd}(x_0 \rightarrow x)$ . Тогда

$$\pi_{j\oplus 1}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in \mathcal{C}_j} p^{nd}(x_0 \rightarrow x) \cdot p(x \rightarrow y) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{nd+1}(x \rightarrow y) \underset{\text{предыдущее утверждение для } j=1}{=} \pi_{j\oplus 1}(y)$$

□

### 1.8.5 Возвратность

Пусть  $\mathcal{X}$  — быть может бесконечное пространство состояний.

Выберем  $x_0 \in \mathcal{X}$ , обозначим за  $f_i$  вероятность вернуться в  $\mathcal{X}$  на  $i$ -м шаге:

$$f_i(x_0) := \mathbb{P}((x_1 \neq x_0) \wedge \dots \wedge (x_{i-1} \neq x_0) \wedge (x_i = x_0))$$

Так как события несовместны, то  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) \leq 1$ .

**Определение 1.8.7** ( $x_0 \in \mathcal{X}$  — возвратное состояние). Такое состояние, для которого  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = 1$ .

При этом говорят, что  $x_0$  — положительно возвратно, если  $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot f_i(x_0) < \infty$ , то есть матожидание времени возврата конечно. Иначе  $x_0$  называется нуль-возвратным.

**Теорема 1.8.5** (Критерий возвратности).  $x \in \mathcal{X}$  возвратно  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x \rightarrow x) = \infty$ .

*Доказательство.* Запишем двумя способами вероятность события пройти цикл из  $x$  в  $x$ .

$$p^n(x \rightarrow x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot p^{n-i}(x \rightarrow x)$$

Введём производящие функции  $\mathcal{F}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)z^i$  и  $\mathcal{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n(x \rightarrow x)z^n$ , действующие на  $z \in [0, 1]$ . Для них

$$\mathcal{P}(z) = 1 + \mathcal{F}(z)\mathcal{P}(z)$$

Таким образом,

$$1 - \frac{1}{\mathcal{P}(z)} = \mathcal{F}(z)$$

Перейдём к пределу при  $z \rightarrow 1$ . Равенство обратится в

$$1 - \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} p^n(x \rightarrow x)} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

□

**Факт 1.8.8.** Если  $x$  и  $y$  сообщаются, то они либо оба возвратны, либо оба — невозвратны.

*Доказательство.*  $\exists a, b \in \mathbb{N} : p^a(x \rightarrow y) > 0$  и  $p^b(y \rightarrow x) > 0$ . Тогда запишем

$$p^{n+a+b}(x \rightarrow x) \geq p^a(x \rightarrow y)p^n(y \rightarrow y)p^b(y \rightarrow x)$$

Отсюда видим, что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} p^n(x \rightarrow x)$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} p^n(y \rightarrow y)$  сходятся (или нет) одновременно.  $\square$

**Следствие 1.8.3.** Если в цепи все состояния сообщаются, то они все одновременно либо возвратны, либо нет.

*Пример* (Самый знаменитый пример). **Простое симметричное случайное блуждание на  $\mathbb{Z}^d$ .**

Пусть мы находимся в произвольной точке пространства  $\mathbb{Z}^d \ni (x_1 \dots x_d)$ . На каждом шагу меняется произвольная координата с вероятностью  $\frac{1}{2d}$  — на  $\pm 1$ .

Все точки сообщаются, значит, все они возвратны или невозвратны одновременно.

## Лекция X

17 апреля 2023 г.

**Теорема 1.8.6** (Пойа). Симметричное случайное блуждание на целочисленной решётке  $\mathbb{Z}^d$  возвратно  $\iff d \leq 2$ .

*Доказательство.* Будем пользоваться не определением возвратности, а критерием — про сходимость ряда. Идея состоит в том, что  $p^n(x \rightarrow x) \asymp n^{-d/2}$ . Этот ряд сходится при  $d \geq 3$ .

$p^{2n+1}(0 \rightarrow 0) = 0$ , поэтому для проверки расходимости ряда будем рассматривать чётные индексы.

$d = 1$ .

$$p_1^n(0 \rightarrow 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} \sim \frac{(2n/e)^n \sqrt{2\pi 2n}}{(n/e)^n (n/e)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \sqrt{2\pi n} \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Так как ряд расходится, то блуждание возвратно.

$d = 2$ . Представим себе блуждание по плоскости  $x, y$  и рассмотрим замену переменных:  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ .

Теперь обе координаты  $(u, v)$  независимы:

$$\begin{cases} x \rightsquigarrow x + 1 & u \rightsquigarrow u + 1, v \rightsquigarrow v + 1 & 1/4 \\ x \rightsquigarrow x - 1 & u \rightsquigarrow u - 1, v \rightsquigarrow v - 1 & 1/4 \\ y \rightsquigarrow y + 1 & u \rightsquigarrow u + 1, v \rightsquigarrow v - 1 & 1/4 \\ y \rightsquigarrow y - 1 & u \rightsquigarrow u - 1, v \rightsquigarrow v + 1 & 1/4 \end{cases}$$

Таким образом, случайные блуждания по заменённым координатам независимы, откуда:

$$p_2^{2n}(0 \rightarrow 0)_{(xy)} = p_2^{2n}(0 \rightarrow 0)_{(uv)} = p_1^{2n}(0 \rightarrow 0)_u \cdot p_1^{2n}(0 \rightarrow 0)_v = \frac{1}{\pi n}$$

Ряд расходится, блуждание возвратно.

$d = 3$ . Введём  $M_1, M_2, M_3$  — число шагов вдоль осей 1, 2, 3 — случайные величины, такие, что  $M_1 + M_2 + M_3 = 2n$ . Так же введём событие

$$A_{m_1, m_2, m_3} = \{M_1 = 2m_1, M_2 = 2m_2, M_3 = 2m_3\}$$

Запишем  $p_3^{2n}(0 \rightarrow 0) = \sum_{m_1, m_2, m_3} p_3^{2n}(0 \rightarrow 0 \wedge A_{m_1, m_2, m_3})$  — формулу полной вероятности.

Здесь есть плохие слагаемые, в которых одно из  $m_1, m_2, m_3$  слишком мало.

$$\mathbb{E}M_1 = \mathbb{E}M_2 = \mathbb{E}M_3 = \frac{2n}{3}; \quad \mathbb{D}M_1 = \mathbb{D}M_2 = \mathbb{D}M_3 \sim \text{const} \cdot n$$

Согласно неравенству Чебышёва

$$\mathbb{P}\left(M_1 \leq \frac{n}{3}\right) = \mathbb{P}\left(M_1 - \mathbb{E}M_1 \leq -\frac{n}{3}\right) \leq \mathbb{P}\left(|M_1 - \mathbb{E}M_1| \geq \frac{n}{3}\right) \leq \frac{\mathbb{D}M_1^2}{\left(\frac{n}{3}\right)} = \frac{\text{const}}{n}$$

Эта оценка слишком слабая, она расходится и не помогает доказать сходимость.

Воспользуемся лучше экспоненциальным неравенством Чебышёва:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(M_1 \leq \frac{n}{3}\right) &= \mathbb{P}\left(-M_1 \geq -\frac{n}{3}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{-M_1})}{e^{-n/3}} = \\ &= \mathbb{E}(e^{-M_1}) \cdot e^{n/3} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot e^{-1}\right)^{2n} \cdot e^{n/3} = \left(\left(\frac{2+e^{-1}}{3}\right)^2 e^{1/3}\right)^n \approx 0.87^n \end{aligned}$$

Теперь

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} p_3^{2n}(0 \rightarrow 0 \wedge A_{m_1, m_2, m_3}) \leq \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \\ m_1, m_2 \text{ или } m_3 \text{ меньше } n/3}} \mathbb{P}(A_{m_1, m_2, m_3}) + \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \\ \text{иначе}}} \mathbb{P}(0 \rightarrow 0 \wedge A_{m_1, m_2, m_3})$$

Первая сумма сходится: оценивается суммой  $\mathbb{P}(m_1 \leq \frac{n}{3}) + \mathbb{P}(m_2 \leq \frac{n}{3}) + \mathbb{P}(m_3 \leq \frac{n}{3})$ , где каждое слагаемое оценено выше.

Вторая сумма оценивается из формулы полной вероятности:  $p_3^{2n}(0 \rightarrow 0 \wedge A_{m_1, m_2, m_3}) = p_3^{2n}(0 \rightarrow 0 | A_{m_1, m_2, m_3}) \cdot \mathbb{P}(A_{m_1, m_2, m_3})$ . Дальше  $p_3^{2n}(0 \rightarrow 0 | A_{m_1, m_2, m_3})$  раскладывается на три множителя по каждой координате:

$$p_3^{2n}(0 \rightarrow 0 | A_{m_1, m_2, m_3}) = p_1^{m_1}(0 \rightarrow 0)p_2^{m_2}(0 \rightarrow 0)p_1^{m_3}(0 \rightarrow 0) \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{m_1}} \cdot \frac{\text{const}}{\sqrt{m_2}} \cdot \frac{\text{const}}{\sqrt{m_3}} \leq \frac{\text{const}}{n^{3/2}}$$

Таким образом,  $\sum_{\substack{m_1, m_2, m_3, \text{ одно меньше } n/3}} p_3^{2n}(0 \rightarrow 0 | A_{m_1, m_2, m_3}) \cdot \mathbb{P}(A_{m_1, m_2, m_3}) \leq \frac{\text{const}}{n^{3/2}}$  — события  $A_{m_1, m_2, m_3}$  не пересекаются. Итак, ряд сходится, блуждание невозвратно.

$d > 3$ . Доказывается аналогично  $d = 3$ .

□

## 1.9 Случайное блуждание в $\mathbb{Z}^1$

Случайное блуждание на  $\mathbb{Z}$  можно воспринимать либо как сумму независимых случайных величин  $X_j$ , распределённых по закону  $X_{i,j} = \begin{cases} +1, & \text{с вероятностью } p \\ -1, & \text{с вероятностью } q \end{cases}$  (и  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ), или как марковскую цепь

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{n+1} = s+1 | S_n = s) &= p \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = s-1 | S_n = s) &= q \end{aligned}$$

Исследуем некоторые параметры данного случайного блуждания.

Обозначим за  $R_n$  количество шагов вправо среди первых  $n$  шагов. Это величина с биномиальным распределением  $\mathcal{B}(n, p)$ .  $S_n = R_n - (n - R_n) = 2R_n - n$ , откуда вероятность  $\mathbb{P}(S_n \geq m)$  переписывается в виде  $\mathbb{P}(2R_n - n \geq m) = \mathbb{P}(R_n \geq \frac{n+m}{2})$ .

Интегральная теорема Муавра — Лапласа говорит, что  $\mathbb{P}\left(R_n \geq np + b\sqrt{np(1-p)}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .

В частности, для  $p = 1/2$  получаем  $\mathbb{P}(S_n \geq b\sqrt{n}) = \mathbb{P}(R_n \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}b\sqrt{n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .

Отсюда получаем следствие: характерное значение  $S_n$  при  $p = 1/2$  имеет порядок  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ :

$$\boxed{\mathbb{P}(b_1\sqrt{n} \leq S_n \leq b_2\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b_1}^{b_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}$$

### 1.9.1 Распределение максимума. Принцип отражения

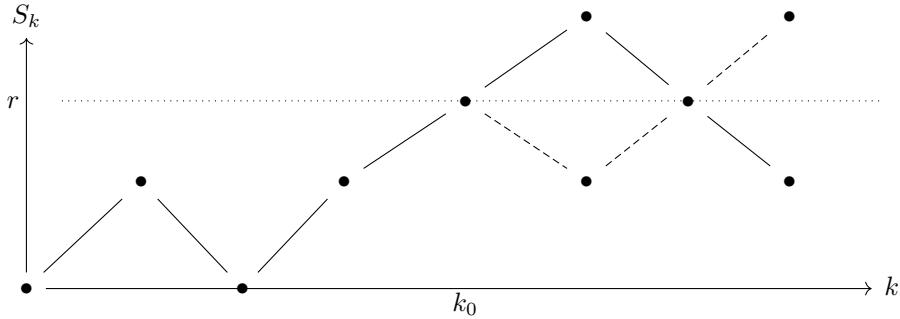
Рассмотрим симметричное случайное блуждание на  $\mathbb{Z}^1$ . Обозначим за  $M_n := \max_{0 \leq j \leq n} S_j$ . Только что мы оценили, что характерное значение  $S_n$  имеет порядок  $\sqrt{n}$ , а какого максимума следует ожидать?

Разобьём событие на три дизъюнктных:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \geq r) &= \mathbb{P}(M_n \geq r, S_n > r) + \mathbb{P}(M_n \geq r, S_n = r) + \mathbb{P}(M_n \geq r, S_n < r) = \\ &= \mathbb{P}(S_n > r) + \mathbb{P}(S_n = r) + \mathbb{P}(M_n \geq r, S_n < r) \end{aligned}$$

**Факт 1.9.1.**  $\mathbb{P}(S_n > r) = \mathbb{P}(M_n \geq r, S_n < r)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное случайное блуждание, в котором  $\{M_n \geq r, S_n < r\}$ . На картинке ниже оно схематично изображено сплошными линиями.



Выделим минимальное  $k_0$ , такое что  $S_{k_0} = r$  — оно очевидно существует, так как  $M_n \geq r$ . Отразим от оси  $S_k = r$  всю часть графика при  $k > k_0$ .

Получили новый вариант развития случайного блуждания. Так как блуждание симметричное, то вероятность его появления такая же, как и у исходного. Более того, нетрудно видеть, что данное отражение задаёт биекцию между всеми событиями  $\{S_n > r\}$  и  $\{S_n < r, M_n \geq r\}$ .  $\square$

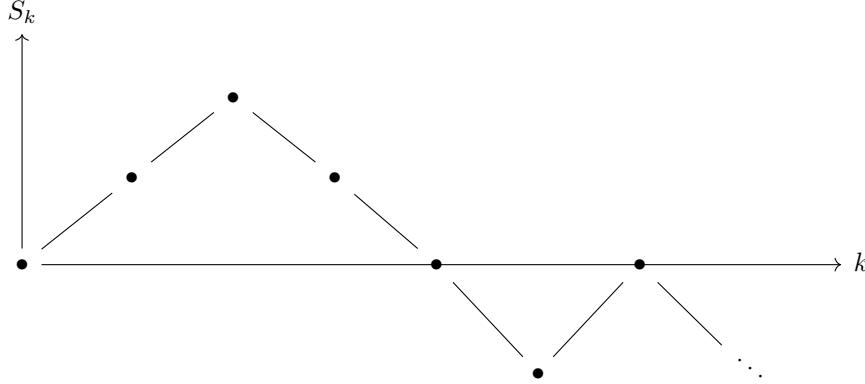
Таким образом, получаем, что  $\mathbb{P}(M_n \geq r) = 2\mathbb{P}(S_n > r) + \mathbb{P}(S_n = r)$ . При стремлении  $n \rightarrow \infty$  для любого конкретного  $r : \mathbb{P}(S_n = r) \rightarrow 0$ , так как даже для  $r = 0$  вероятность эквивалентна  $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ , а из биномиальной формулы ясно, что  $r = 0$  — наиболее вероятно.

Таким образом, применяя интегральную теорему Муавра — Лапласа, получаем

$$\boxed{\mathbb{P}(M_n \geq b\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx}$$

### 1.9.2 Время пребывания на полуоси (закон арксинуса)

Рассмотрим симметричное блуждание с  $p = q = \frac{1}{2}$ . Изобразим на своеобразном графике точки  $(k, S_k)$ , соединив последовательные отрезками.



Назовём временем, проводимым на положительной оси  $T_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{s_k \geq 0, s_{k-1} \geq 0\}}$ . Пусть  $a, b \in (0, 1)$ , найдём, чему пропорциональна вероятность  $\mathbb{P}(a \leq \frac{T_n}{n} \leq b)$ .

Будем рассматривать чётные  $n$ , то есть обозначим их  $2n$ . Интересно заметить, что  $T_{2n}$  всегда чётно: точки  $S_k = 0$  появляются всегда при чётных  $k$ , и между соседними точками либо всё время — пребывание на положительной полуоси, либо всё время — пребывание на отрицательной полуоси.

Будем использовать без доказательства факт  $\mathbb{P}(T_{2n} = k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \cdot \mathbb{P}(S_{2(n-k)} = 0)$ . (доказательство можно найти в учебнике Ширяева «Вероятность», глава 1, параграф 10).

Таким образом, мы можем выразить  $(T_{2n} = k)$  с помощью простых методов:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{2k} = 0) &= 2^{-2k} \binom{2k}{k} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} (1 + o(1)) \\ \mathbb{P}(S_{2(n-k)} = 0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} (1 + o(1))\end{aligned}$$

Теперь можно записать

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{T_n}{n} < b\right) = \sum_{a < \frac{k}{n} < b} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} (1 + o(1)) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{a < \frac{k}{n} < b} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{n}}} \cdot \frac{1}{n} (1 + o(1))$$

Заметим, что теперь под суммой стоит сумма Римана — Дарбу, можем записать свойство интеграла Римана

$$\frac{1}{\pi} \cdot \sum_{a < \frac{k}{n} < b} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{n}}} \cdot \frac{1}{n} (1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = I(b) - I(a)$$

где в качестве  $I$  подойдёт любая первообразная. Любопытно, что здесь есть две разные естественно выглядящие первообразные

$$\begin{aligned}I_1(x) &= \frac{1}{\pi} \arcsin(2x - 1) \\ I_2(x) &= \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})\end{aligned}$$

Это можно видеть из тождества  $\arcsin(2x - 1) + \frac{\pi}{2} = 2 \arcsin(\sqrt{x})$  при  $x \in [0, 1]$ . (Проверяется взятием косинуса от обоих частей)

График  $\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}$  выглядит, как U-образная кривая, с концами, уходящими в бесконечность, поэтому распределение сосредоточено около границ.

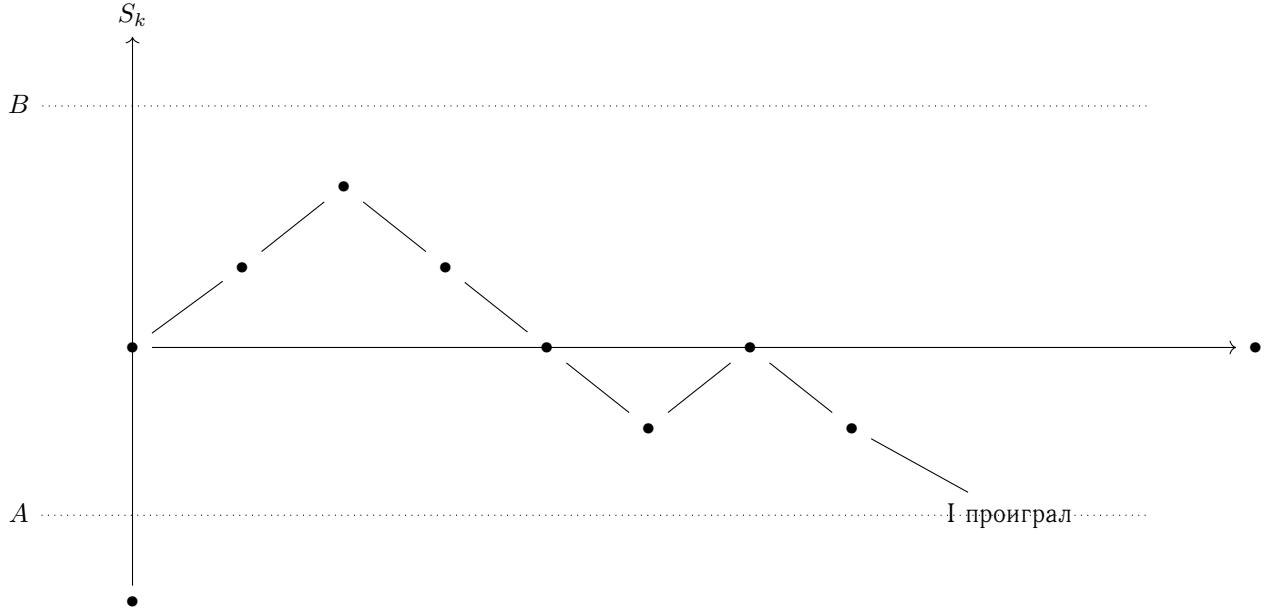
Если рассмотреть случайную величину  $Z$  с распределением  $\mathbb{P}(Z \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$ , то окажется, что она с очень большой вероятностью распределена близко к краю:

$$\mathbb{P}(Z \leq 0.024) \approx 0.1 \quad \mathbb{P}(Z \leq 0.006) \approx 0.05$$

### 1.9.3 Задача о разорении игрока

Пусть у I игрока есть  $|A|$  монет (мы будем считать  $A < 0$ ), у II игрока —  $B$  монет, и пусть они играют в азартную игру. У I игрока вероятность выигрыша  $p$ , у II игрока —  $q = 1 - p$ . По выигрышу проигравший платит одну монету другому, игра заканчивается, когда один из них разорится.

Исследуем эту модель. Заметим, что это на самом деле тоже случайное блуждание, заканчивающееся когда  $S_k$  выходит из интервала  $[A, B]$ :



Положим  $\beta_k(x)$  — вероятность выйти на  $B$  раньше, чем на  $A$  не более чем за  $k$  шагов, исходя из точки  $x$ . Эти величины мы можем рассматривать в дискретной теории вероятностей, так как бесконечных траекторий несчётное количество.

Заметим, что  $\beta_k(x)$  монотонно возрастает по  $k$ , но, очевидно,  $\beta_k(x)$  ограничена. Значит, имеется предел, который мы и хотим вычислить.

Запишем своеобразную рекурренту на  $\beta$ : с вероятностью  $p$  первый шаг — в положительном направлении, с вероятностью  $q$  — в отрицательном

$$\beta_k(x) = p\beta_{k-1}(x+1) + q\beta_{k-1}(x-1)$$

Перейдя к пределу по  $k$  получаем

$$\begin{aligned} \beta(x) &= p\beta(x+1) + q\beta(x-1) \\ p\beta(x) + q\beta(x) &= p\beta(x+1) + q\beta(x-1) \\ q(\beta(x) - \beta(x-1)) &= p(\beta(x+1) - \beta(x)) \\ \beta(x+1) - \beta(x) &= \frac{q}{p}(\beta(x) - \beta(x-1)) \end{aligned}$$

Таким образом, последовательные разности  $\beta(x+1) - \beta(x)$  образуют геометрическую прогрессию. Воспользовавшись начальными условиями  $\begin{cases} \beta(B) = 1 \\ \beta(A) = 0 \end{cases}$  можно получить точную формулу. В

частности, для  $p = q = \frac{1}{2}$  получается неожиданно простая формула

$$\beta(0) = \frac{|A|}{B + |A|}$$

Если  $p \neq q$ , то можно решить систему из  $B + |A| + 1$  линейных уравнений, результатом будет

$$\beta(x) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x - \left(\frac{1}{p}\right)^A}{\left(\frac{q}{p}\right)^B - \left(\frac{1}{p}\right)^A}$$

*Замечание.* Случайное блуждание не может бесконечное время болтаться внутри ограниченного отрезка. Вероятность того, что рано или поздно кто-то выиграет стремится к единице. Доказательство остаётся читателю в качестве упражнения.

#### 1.9.4 Матожидание времени разорения

Задача прежняя — есть два игрока с капиталами  $|A|, B, p, q$  — вероятности их выигрышей соответственно.

Обозначим  $T(x)$  — время разорения одного из игроков, если блуждание началось в точке  $x$ . Чему равно  $\mathbb{E}T(x)$ ?

Как и в предыдущей задаче, ограничим игру конечным числом ходов:  $T_k(x) = \begin{cases} T(x), & T(x) \leq k \\ k, & T(x) \geq k \end{cases}$ .

Используемая выше  $T(x)$  — величина, которую мы не можем рассматривать в дискретной теории вероятностей. Чтобы этого избежать, рассмотрим величины  $T_k(x)$  и найдём  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}T_k(x)$ .

Обозначим  $m_k(x) := \mathbb{E}T_k(x)$ .  $m_k(x)$  тоже монотонно возрастает по  $k$ . Более того, у него есть предел — вероятность того, что  $T(x) > n$  экспоненциально убывает, но выкладок, обосновывающих это, нет.

$$m_k(x) = \begin{cases} pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) + 1, & x \in (A, B) \\ 0, & x = A \vee x = B \end{cases}$$

Преобразуем первое равенство, перейдя в нём к пределу по  $k \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} pm(x) + qm(x) &= pm(x+1) + qm(x-1) + 1 \\ p(m(x+1) - m(x)) &= q(m(x) - m(x-1)) - 1 \\ m(x+1) - m(x) &= \frac{q}{p}(m(x) - m(x-1)) - \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Это опять же решаемая система, но для экономии времени лекции приведём лишь решение для  $p = q = \frac{1}{2}$ :

$$m(x+1) - m(x) = (m(x) - m(x-1)) - 2$$

Решением является многочлен второй степени с корнями в  $A$  и  $B$ .  $m(x) = K(x - A)(x - B)$ . Подгоняя  $K$  так, чтобы выполнялось уравнение  $m(x+1) - m(x) = (m(x) - m(x-1)) - 2$  понимаем, что  $K = -1$ .

$$m(x) = (B - x)(x - A); \text{ в частности, } m(0) = |A| \cdot B$$

Если  $p \neq q$ , то ответ чуть более противный:

$$m(0) = \frac{B - A}{p - q} \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^A}{\left(\frac{q}{p}\right)^B - \left(\frac{q}{p}\right)^A} + \frac{A}{p - q}$$

#### 1.10 Случайные графы

В нашей жизни есть огромное множество графов: графов друзей социальных сетей, граф аэропортов и авиалиний, граф совместных научных публикаций и граф цитирований...

small world — маленьность мира, диаметры реальных графов (длина пути — количество рёбер) очень малы. Так, в графе совместных публикаций научного мира диаметр порядка 10.

Графы бывают статические и динамические — во времени меняются последние.

Типичная статическая модель: граф Эрдёша — Рены на  $n$  вершинах  $G(n, p)$ , в котором каждое из  $\binom{n}{2}$  рёбер проведено с вероятностью  $p$ .

Самая знаменитая динамическая модель: модель преимущественного присоединения. Начнём с какого-то простого графа, на каждом шаге добавляем вершину и одно ребро из неё, ведущее к какой-нибудь из существующих вершин, причём вероятность пропорциональна степени вершины.

## Лекция XII

22 мая 2023 г.

### 1.10.1 Граф Эрдёша — Рены

Рассмотрим множество из  $n$  вершин, каждое из  $\binom{n}{2}$  рёбер проведено в вероятностью  $p$  независимо от других — случайный граф  $G(n, p)$ .

Рассмотрим последовательность  $p_n$  и изучим поведение  $G(n, p)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Интересный факт* (Условие связности).

- Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{\log n/n} > 1$ , то  $\mathbb{P}(G(n, p_n) \text{ связен}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .
- Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{\log n/n} < 1$ , то  $\mathbb{P}(G(n, p_n) \text{ связен}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Обозначим за  $M_n$  размер максимальной компоненты связности в  $G(n, p_n)$ .

*Интересный факт* (О гигантской компоненте).

- Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{1/n} =: \gamma > 1$ , то  $\exists a(\gamma) : \mathbb{P}(M_n > a(\gamma) \cdot n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .
- Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{1/n} =: \gamma < 1$ , то  $\exists b(\gamma) : \mathbb{P}(M_n \leq b(\gamma) \cdot \log n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

### 1.10.2 power law for degrees (степенной закон для степеней (вершин))

Рассмотрим большой граф из  $n$  вершин; обозначим за  $V_n^{(d)}$  количество вершин степени  $d$ .

Оказывается, часто имеет место приближение  $V_n^{(d)} \approx (ad^{-\alpha})n$ , где  $\alpha \in (2, 5)$  — для разных графов предлагались разные значения.  $a$  и  $\alpha$  — константы, зависящие от типа графа, но не зависящие от  $d$ , иначе было бы совсем неинтересно. Тем не менее,  $\alpha$  меняется не очень сильно, а  $a$  находится из уравнения  $V_n^{(0)} + V_n^{(1)} + \dots + V_n^{(n)} = n$ .

### 1.10.3 Дерево преимущественного присоединения

Рассмотрим в качестве начального состояния граф  $K_2$ , состоящий из двух вершин и одного ребра.

На  $k$ -м шаге в граф добавляется вершина с номером  $k+2$ , и из неё добавляется ровно одно случайное ребро, причём оно проведено к вершине  $i \in [1, k+1]$  с вероятностью, пропорциональной  $\deg(i)$ , где  $\deg$  — степень в графе на первых  $k+1$  вершинах.

После шага  $n$  в графе  $n+2$  вершины,  $n+1$  ребро, несложно видеть, что граф связан и является деревом.

#### Поведение степеней вершин

Обозначим за  $X_n^{(m)}$  степень вершины  $m$  после шага  $n$ .

«Кто не успел, тот опоздал»

Рассмотрим  $m = 1$ .  $X_0^{(1)} = 1$  — после 0-го шага величина пока неслучайная. Запишем уравнения на развитие случайной переменной  $X_n^{(1)}$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{n+1}^{(1)} - X_n^{(1)} = 1 \mid X_n^{(1)} = k\right) &= \frac{k}{2(n+1)} \\ \mathbb{P}\left(X_{n+1}^{(1)} - X_n^{(1)} = 0 \mid X_n^{(1)} = k\right) &= 1 - \frac{k}{2(n+1)}\end{aligned}$$

Посчитаем от величины  $X_n^{(1)}$  только её матожидание.

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}^{(1)}\right) - \mathbb{E}\left(X_n^{(1)}\right) = \mathbb{E}\left(X_{n+1}^{(1)} - X_n^{(1)}\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1}^{(1)} - X_n^{(1)} = 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_n^{(1)} = k\right) \frac{k}{2(n+1)}$$

В этом месте чудесным образом появляется матожидание, получаем рекурренту на матожидание

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}^{(1)}\right) - \mathbb{E}\left(X_n^{(1)}\right) = \mathbb{E}\left(X_n^{(1)} \cdot \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

откуда  $\mathbb{E}X_{n+1}^{(1)} = \mathbb{E}X_n^{(1)} \left(1 + \frac{1}{2(n+1)}\right) = \mathbb{E}X_n^{(1)} \cdot \frac{2n+3}{2(n+1)} = \frac{(2n+3)!!}{(2n+2)!!}$ . Используя формулу Стирлинга, получаем

$$(2n)!! = 2^n n! \sim 2^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!}$$

откуда

$$\mathbb{E}X_n^{(1)} = \frac{(2n+1)!}{((2n)!!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}{2^{2n} (2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2 \cdot 2n}}{2n} \underbrace{\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}}_{\rightarrow e} \frac{2n+1}{e} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}$$

Заметим, что в графе  $2(n+1)$  рёбер всего, поэтому в среднем степень вершины порядка 2. Таким образом, видим, что степень первой вершины сильно больше средней степени.

Очевидно,  $\mathbb{E}X_n^{(2)} = \mathbb{E}X_n^{(1)}$ . Можно написать формулу для произвольной вершины, она доказывается примерно так же.

$$\mathbb{E}X_n^{(l+1)} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(2l-2)!!}{(2l-1)!!} \sqrt{n}, \text{ где можно записать } \frac{(2l-2)!!}{(2l-1)!!} \sim l^{-1/2}$$

#### 1.10.4 Распределение степеней вершин

Пусть  $V_n^{(d)}$  — количество вершин степени  $d$  после шага  $n$ .

Рассмотрим  $d = 1$ . После 0 шагов  $V_0^{(1)} = 2$  — величина ещё неслучайная. Опять же, выпишем условные вероятности. Заметим, что  $V_{n+1}^{(1)} - V_{n+1}^{(1)} = 0$  — всегда либо 0, либо 1 (добавляется вершина степени 1, но, быть может, одна из вершин степени 1 станет вершиной степени 2).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(V_{n+1}^{(1)} - V_{n+1}^{(1)} = 0 \mid V_n = k\right) &= \frac{k}{2(n+1)} \\ \mathbb{P}\left(V_{n+1}^{(1)} - V_{n+1}^{(1)} = 1 \mid V_n = k\right) &= 1 - \frac{k}{2(n+1)}\end{aligned}$$

Аналогично подсчёту  $\mathbb{E}X_n^{(1)}$  получаем

$$\mathbb{E}V_{n+1}^{(1)} - \mathbb{E}V_n^{(1)} = \mathbb{E}\left(V_{n+1}^{(1)} - V_n^{(1)}\right) = \mathbb{P}\left(V_{n+1}^{(1)} - V_n^{(1)} = 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{2(n+1)}\right) \mathbb{P}\left(V_n^{(1)} = k\right)$$

Суммируя вероятности  $\mathbb{P}(V_n^{(1)} = k)$  получаем 1; во второй половине правой части формулы опять получается матожидание. Значит,

$$\mathbb{E}V_{n+1}^{(1)} - \mathbb{E}V_n^{(1)} = 1 - \frac{\mathbb{E}V_n^{(1)}}{2(n+1)}$$

Чтобы решить эту рекурренту, предположим, что  $\mathbb{E}V_n^{(1)} \sim \alpha n$  для некоего  $\alpha \in \mathbb{R}$ . По-хорошему, это надо обосновать, но давайте опустим.

Тогда решая уравнение  $\alpha = 1 - \frac{\alpha}{2}$ , получаем  $\alpha = \frac{2}{3}$ .

$$\mathbb{E}V_n^{(1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3}n$$

В общем случае получится формула

$$\mathbb{E}V_n^{(d)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4}{d(d+1)(d+2)}n \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4}{d^3}n$$