

基于摇荡微分方程的波浪能装置分析

摘要

随着振荡式浮子波浪能发电装置的兴起,该装置的运动规律和最大输出功率的设计成为当下热门的研究专题 [2]。本文对波浪能装置进行平动和转动分析,建立了装置垂荡和摇荡的动力学方程;同时,本文运用差分优化算法,设计了合适的阻尼系数,使得波浪能装置输出功率最大化,对波浪能装置的设计提供了一定的指导意义。

针对问题一,我们首先对静水中的波浪能装置进行运动学分析,得到了装置在波浪到来前的初始状态。接着对非平衡状态的装置进行分析,分别得出了浮子和振子的二元二阶运动学微分方程,然后对该微分方程组进行降阶处理、并代入装置初始状态,得到了第一问关键的**垂荡微分方程**。利用 matlab 的 ode45 函数,我们分别对两种阻尼系数的情况用龙格库塔法进行求解,最终得到浮子和振子的振荡均**收敛于频率为波浪频率的正弦函数**,如阻尼系数为常值时浮子于 10s、20s、40s、60s、100s 的位移分别为: -0.1907m、-0.5907m、0.2854m、-0.3145m、-0.0836m。

针对问题二,首先根据文献 [1] 推导出了平均功率的计算公式,接着把本问题视作以最大输出功率为目标、以阻尼系数的比例系数和幂指数为变量的优化问题,并建立了对应的优化模型。然后,针对此类双变量单目标优化模型,采用**差分进化算法**进行求解,最终得到了常值阻尼系数的最大输出功率为 **229.322W**,此时比例系数 p 为 **37200**;变值阻尼系数的最大功率为 **229.321W**,此时系数 p 为 **37320**,而幂指数 q 恰好为 0。最后,我们分析了不同系数下功率值的曲面,得到了选取系数的泛用标准。

针对问题三,首先对浮子质心位置、浮子转动惯量、振子转动惯量、倾斜浮子的静水恢复力大小进行计算,然后对浮子水平和垂直方向、振子的轴向方向进行平动分析,同时对浮子和振子进行转动分析,得到了关于浮子和振子运动状态的五个动力学方程,同样对该五元二阶运动学微分方程组进行降阶处理、并将静水中的波浪能装置作为初值代入,得到了本问关键的**摇荡微分方程**。由于本问的微分方程是刚性的,选用 matlab 的 ode15s 函数、运用龙格库塔法进行求解,最终得到的浮子、振子的振荡和摆动同样**收敛于频率为波浪频率的正弦函数**,如浮子于 10s、20s、40s、60s、100s 的位移分别为:

针对问题四,将问题二中的直线阻尼功率计算公式拓展到转动阻尼上,得到了总的平均功率的表达式。同样以总平均功率最大为目标、以直线阻尼系数和转动阻尼系数为变量建立优化模型,并用**差分进化算法**进行求解,最终得到的最大输出功率为 **351.190W**,相应的直线阻尼系数为 **63272N·s/m**,旋转阻尼系数为 **24078N·s·m**。

最后,我们总结了模型的优缺点。结果显示我们成功建立了波浪能装置的运动模型,且能通过选取不同阻尼系数最大化输出功率,具有现实的指导意义。

关键字: 垂荡微分方程 摇荡微分方程 差分进化算法

目录

一、 问题重述.....	4
1.1 问题背景.....	4
1.2 问题提出.....	4
二、 模型假设.....	4
三、 符号说明.....	5
四、 问题一：垂荡波浪能装置状态控制微分方程.....	5
4.1 模型的建立.....	5
4.1.1 平衡状态受力分析	5
4.1.2 非平衡状态受力分析	6
4.2 模型的求解.....	8
4.3 结果分析.....	10
4.4 模型的验证.....	10
五、 问题二：垂荡情形的最佳阻尼系数设计.....	11
5.1 模型的建立.....	11
5.2 模型的求解.....	12
5.3 结果分析.....	12
六、 问题三：摇荡波浪能装置状态控制微分方程.....	13
6.1 准备工作.....	13
6.1.1 浮子质心位置	14
6.1.2 浮子绕质心转轴的转动惯量	15
6.1.3 振子绕底座转轴的转动惯量	16
6.1.4 倾斜浮子静水恢复力	17
6.2 模型的建立：摇荡运动方程.....	18
6.2.1 对浮子的平动力学分析	18
6.2.2 对浮子的转动力学分析	20
6.2.3 对振子的平动力学分析	21
6.2.4 对振子的转动力学分析	22
6.3 模型的求解.....	23
6.4 模型的验证.....	24

七、 问题四：摇荡情形的组合阻尼系数设计.....	25
7.1 模型的建立.....	25
7.2 模型的求解.....	25
八、 模型的优缺点.....	26

一、问题重述

1.1 问题背景

近年来能源匮乏问题成为了人类社会最大的挑战之一，随着对清洁可再生能源需求的发展，波浪能源逐渐成为新时代能源的宠儿。而大规模利用波浪能的关键是提高波浪的能量转化效率。

在一种由浮子、中轴、能量输出系统（PTO）组成的波浪能提取波浪能装置中，浮子随海面波浪运动而运动，带动振子运动的同时，驱动阻尼器做功，完成对波浪能的提取工作。

1.2 问题提出

问题一：当浮子只在海浪中做垂荡运动时，建立振子与浮子的运动模型。在波浪影响下，分别讨论当直线阻尼器的阻尼系数为常数和当直线阻尼器的阻尼系数与振子浮子间相对速度的幂成正比的情况下的波浪能装置垂荡状态。

问题二：在问题一的两种情况下，试寻找合适的阻尼系数（和比例系数），使得波浪能装置功率最大。

问题三：若浮子在海浪中不仅做垂荡运动，还做纵摇运动，并由旋转阻尼器吸收其产生的能量，试讨论当直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数均为常数时，受波浪影响的波浪能装置垂荡和纵摇的状态。

问题四：在问题三的情况下，试分别寻找直线阻尼器和旋转阻尼器最合适的阻尼系数，使得波浪能装置功率最大。

二、模型假设

- 由于题目将海波描述为周期性微幅波，在计算静水恢复力时，忽略海水的起伏，认为海面保持水平。
- 由于波浪能装置周围海水与其处于相对静止状态，认为所有附加惯性力矩均作用于浮子上。
- 由于海水无旋无粘，认为浮子摇荡时发生的移动仅有两个自由度，发生的转动仅有一个自由度。
- 由于中轴、底座、隔层及 PTO 的质量均可忽略不计，在进行动力学分析时，仅讨论浮子和振子两个对象。
- 在问题三摇荡分析中，假设兴波阻尼力、静水恢复力和垂荡激励力均作用于质心。

三、符号说明

符号	意义	单位
m	振子质量	kg
M	浮子质量	kg
k_1	直线弹簧刚度	N/m
k_2	直线阻尼器的阻尼系数	$N \cdot s/m$
k_3	扭转弹簧刚度	N/m
k_4	旋转阻尼器的阻尼系数	$N \cdot s/m$
ρ	海水密度	kg/m^3
S	浮子圆柱部分底面积	m^2
M'	附加惯性质量	kg
r	振子底端到转轴底座的距离	m
γ_1	垂荡兴波阻尼力系数	$/$
γ_2	纵摇兴波阻尼力矩系数	$/$

四、问题一：垂荡波浪能装置状态控制微分方程

4.1 模型的建立

为了建立浮子和振子的动力学模型，我们分别对处于静水中（平衡状态）的波浪能装置和处于海浪中（非平衡状态）的波浪能装置进行受力分析。

4.1.1 平衡状态受力分析

一开始，波浪能装置处于无海浪的静水中，整个波浪能装置处于平衡状态，如图1所示。

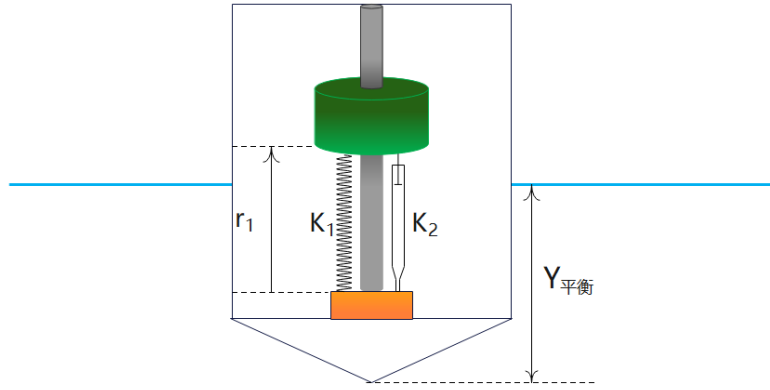


图1 静止波浪能装置示意图

此时，浮子和振子的受力分别为式 (1a) 和式 (1b) 所示。

$$\begin{cases} F_{\text{静}} = mg, & (1a) \\ F_{\text{弹}} + Mg = F_{\text{静}}, & (1b) \end{cases}$$

式中，振子质量为 $m = 2433\text{kg}$ ，浮子质量为 $M = 4866\text{kg}$ ， $F_{\text{弹}}$ 为直弹簧初始状态的弹力，表达式如下：

$$F_{\text{弹}} = k_1(r_0 - r_1), \quad (2)$$

式中，弹簧原长 $r_0 = 0.5\text{m}$ ， r_1 为弹簧处于平衡位置时的长度， $F_{\text{静}}$ 为波浪能装置所受静水恢复力，也即浮力。

不妨假设浮子吃水范围不会超过圆柱体上端，也不会低于圆柱体下端，即有吃水深度 $Y_{\text{平衡}} \in [0.8\text{m}, 3.8\text{m}]$ ，固有式 (3)：

$$F_{\text{静}} = \rho g V_0 = \rho g \cdot (V_{\text{圆锥}} + V_{\text{圆柱}}) = \rho g \cdot \left(\frac{4}{15}\pi + \pi Y_{\text{平衡}} \right), \quad (3)$$

据此可以用式 (1) 得到的 $F_{\text{静}}$ 解得初始状态下的波浪能装置状态：弹簧平衡长度 $r_1 = 0.2020\text{m}$ 、浮子吃水体积 $V_0 = 7.121\text{m}^3$ 和浮子吃水深度 $Y_{\text{平衡}} = 2.000\text{m}$ 。

解出的吃水深度满足先前作出的假设： $Y_{\text{平衡}} \in [0.8\text{m}, 3.8\text{m}]$ ，证明假设是合理的。

4.1.2 非平衡状态受力分析

假设在海浪的影响下，处于非平衡状态的波浪能装置相对于平衡状态的位移为 y ，方向向下为正，设此时振子底面到中轴底座距离，即弹簧长度为 r ，如图 2 所示。

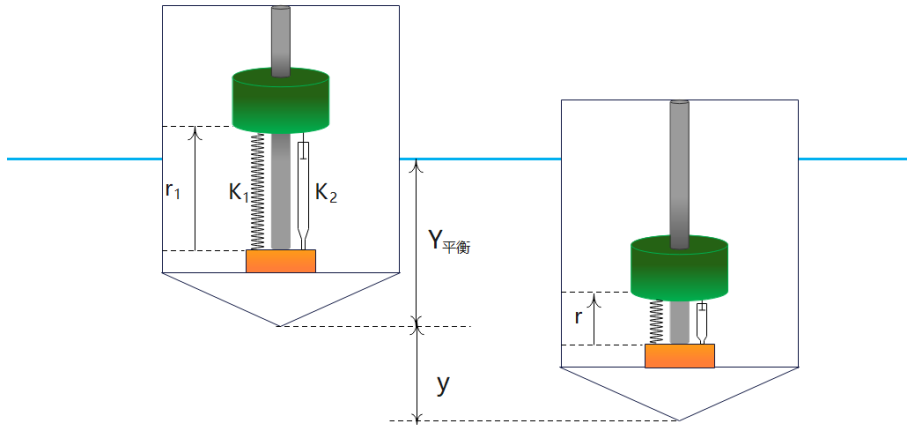


图 2 垂荡波浪能装置示意图

首先在地面系中对浮子进行受力分析，再选取浮子为非惯性参考系，对振子进行受力分析，二者受力示意图如图 3 和图 4 所示。

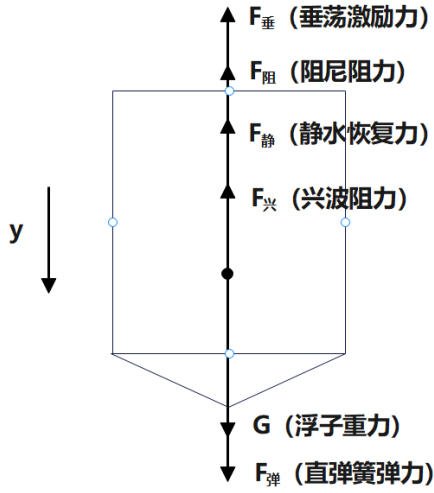


图 3 浮子受力示意图

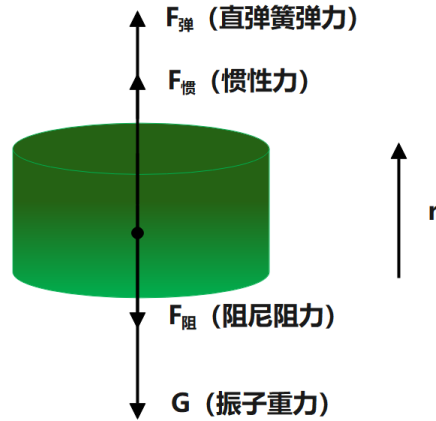


图 4 振子受力示意图

我们同样假设浮子吃水范围既不会超过圆柱体上端也不会低于圆柱体下端，即有吃水深度变化 $y \in [-2m, 1m]$ ，则静水恢复力 $F_{静}$ 可用式 (4) 表示：

$$F_{静} = \rho g(V_0 + Sy), \quad (4)$$

式中， S 代表浮子底面积， y 代表浮子上下垂荡的移动距离。

分别列出浮子动力学方程式 (5a) 和振子动力学方程式 (5b)，有：

$$\begin{cases} (M' + M)\ddot{y} = Mg + k_1(r_0 - r) - \rho g(V_0 + Sy) - k_2\dot{r} - f\cos\omega t - \gamma_1\dot{y}, & (5a) \\ m\ddot{r} = m\ddot{y} + k_1(r_0 - r) - mg - k_2\dot{r}, & (5b) \end{cases}$$

式中, \dot{r} 、 \ddot{r} 分别代表振子**相对于浮子**的轴向运动速度和加速度 (以向上为正方向), \dot{y} 、 \ddot{y} 分别代表浮子运动的速度和加速度 (以向下为正方向)。 M' 为附加惯性质量, γ_1 为兴波阻尼力系数, k_1 为直线弹簧的刚度, k_2 为直线阻尼器的阻尼系数。

4.2 模型的求解

由于式 (5) 对于任意时刻 t 均成立, 将静止状态下直弹簧平衡长度 $r_1 = 0.2020m$ 和浮子初始吃水体积 V_0 代入该微分方程组, 即有:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = m\ddot{y} + k_1(r_0 - r) - mg - k_2\dot{r}, \\ (M' + M)\ddot{x} = Mg + k_1(r_0 - r) - \rho g(V_0 + Sy) - k_2\dot{r} - f\cos\omega t - \gamma_1\dot{y}, \\ r|_{t=0} = 0.2020, \dot{r}|_{t=0} = 0, y|_{t=0} = 0, \dot{y}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

然后, 把上面的二元二阶常系数线性非齐次微分方程组降阶成一阶微分方程组: 用 u_1, u_2, u_3, u_4 分别替换 r, \dot{r}, y, \dot{y} , 即可得到下式:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2, \\ \frac{du_2}{dt} = -\left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_1}{M+M'}\right)u_1 - \left(\frac{k_2}{m} + \frac{k_2}{M+M'}\right)u_2 - \frac{\rho g S}{M+M'}u_3 - \frac{\gamma_1}{M+M'}u_4 - \frac{M'g}{M+M'} \\ \quad + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_1}{M+M'}\right)r_0 - \frac{\rho S V_0}{M+M'} - \frac{f}{M+M'}\cos\omega t, \\ \frac{du_3}{dt} = u_4, \\ \frac{du_4}{dt} = -\frac{k_1}{M+M'}u_1 - \frac{k_2}{M+M'}u_2 - \frac{\rho g S}{M+M'}u_3 - \frac{\gamma_1}{M+M'}u_4 + \frac{Mg}{M+M'} \\ \quad + \frac{k_1}{M+M'}r_0 - \frac{\rho S V_0}{M+M'} - \frac{f}{M+M'}\cos\omega t, \\ u_1|_{t=0} = 0.2020, u_2|_{t=0} = 0, u_3|_{t=0} = 0, u_4|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

接着, 按照题目要求, 代入浮子和振子质量 $M = 4866kg, m = 2433kg$ 、海水密度 $\rho = 1025kg/m^3$ 、浮子初始吃水体积 $V_0 = 7.121m^3$ 、浮子圆柱部分底面积 $S = \pi r^2$ 和弹簧原长 $r_0 = 0.5m$ 、弹簧刚性系数 $k_1 = 80000N/m$ 。最后, 对式 (8) 所示的两种直线阻尼器的阻尼系数 k_2 , 利用 matlab 的 ode45 函数, 采用龙格库塔法分别求解出了两种阻尼系数情况下不同时刻 t 下的浮子、振子的位移和速度。

$$k_2 = \begin{cases} 10000, \\ 10000 |\dot{r}|^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (8)$$

结果如图 5和图 6所示。

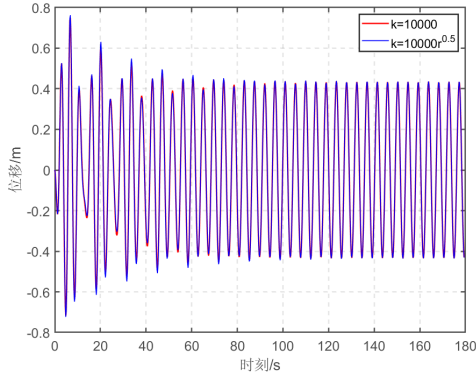


图 5 浮子不同时刻的位移

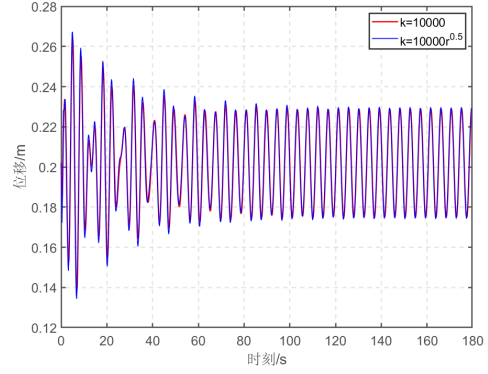


图 6 振子不同时刻的位移

红色和蓝色曲线分别代表 k_2 取常值和 k_2 取变值两种情况下不同时刻的位置，具体而言，图 5描述了两种情况下浮子相对于初始位置的位移（取垂直于海平面向下为正方向），图 6描述了两种情况下振子底面离中轴底座距离。

从图上看， k_2 取常值或 k_2 取变值对结果影响并不显著，我们将在本小节结束时分析其原因。

在此图中也可以看到，解出的浮子吃水深度的变化满足先前作出的假设： $y \in [-2m, 1m]$ ，证明先前做的假设是合理的。

最后，将振子和浮子的位移、速度均按下式统一到同一坐标系中，同样取垂直于海平面向上为正方向，令初始时刻位置为位移零点， R 和 \dot{R} ，为振子相对于平衡位置位移和速度， Y 和 \dot{Y} ，为浮子相对于平衡位置位移和速度，正方向向上，有式 (9):

$$\begin{cases} R = r - r_1 - y, \\ \dot{R} = \dot{r} - \dot{y}, \\ Y = -y, \\ \dot{Y} = -\dot{y}, \end{cases} \quad (9)$$

算得的部分结果如表 1所示。

表 1 不同时刻浮子与振子的垂荡位移和速度

		时刻				
		10s	20s	40s	60s	100s
$k = 10000$	浮子位移 (m)	-0.1907	-0.5907	0.2854	-0.3145	-0.0836
	浮子速度 (m/s)	-0.6410	-0.2409	0.3130	-0.4794	-0.6042
	振子位移 (m)	-0.2117	-0.6342	0.2965	-0.3314	-0.0841
	振子速度 (m/s)	-0.6939	-0.2727	0.3329	-0.5157	-0.6430
$k = 10000 \dot{r} ^{0.5}$	浮子位移 (m)	-0.2059	-0.6111	0.2688	-0.3272	-0.0884
	浮子速度 (m/s)	-0.6528	-0.2547	0.2954	-0.4915	-0.6098
	振子位移 (m)	-0.2346	-0.6610	0.2802	-0.3496	-0.0935
	振子速度 (m/s)	-0.6999	-0.2770	0.3126	-0.5256	-0.6500

4.3 结果分析

从图 5和图 6中不难看出，静止状态的浮子和振子在受到海浪力作用的几十秒内做着无规则运动，不过随着时间推移，二者运动幅度逐渐收敛且趋向正弦运动，代表浮子和振子逐步倾向于新的稳定态。

同时也发现，在本问条件中，由于海浪导致的振子浮子相对运动速度基本不超过 $1m/s$ ，导致阻尼器产生的阻尼往往远小于弹簧的弹力，对浮子振子的运动状态影响较小，因此图 5和图 6中不同的阻尼器条件下的浮子振子运动状态几乎一样（实测变化值不超过 $0.05m$ ）。

4.4 模型的验证

由于得到的浮子和振子的振荡方程最后均收敛于某正弦函数，我们对得到的浮子的位移方程进行快速傅里叶变换，分析其频谱信息，如图 7所示。

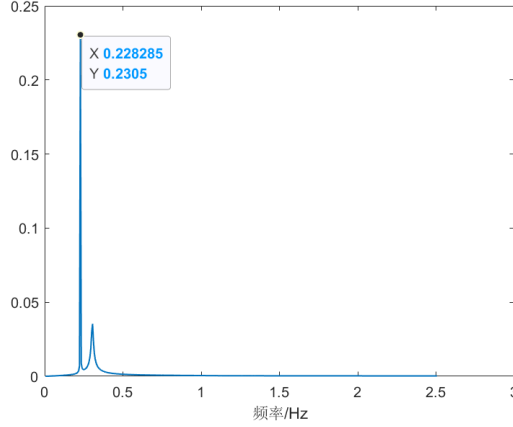


图7 垂荡波浪能装置位移频谱

在频谱图中,存在明显的主峰,其频率为 $0.228Hz$,与波浪频率 $f = \frac{1.4005}{2\pi} = 0.223Hz$ 几乎一致,这说明我们关于浮子和振子的垂荡运动模型是合理的。同时,由于图中次峰较主峰低许多,说明浮子和振子的振频会在短时间内达到主峰所示频率,因此我们后续在计算阻尼功率时可以将一个周期内的平均功率视作阻尼实际的平均功率。

五、 问题二：垂荡情形的最佳阻尼系数设计

5.1 模型的建立

为了找到能最大化输出功率的阻尼系数 k_2 , 首先建立了阻尼器输出功率的计算模型。

在 0 至 t 时间段内的任意微元时间 dt 内, 阻尼器输出功率 dw 可用式 (10) 表示:

$$dw = \left| \vec{F}_{\text{阻}} \cdot \vec{ds} \right| \quad (10)$$

其中, $\vec{F}_{\text{阻}}$ 为阻尼产生阻力的大小, \vec{ds} 代表 dt 时间段内阻尼器长度变化量, 其可用速度乘以时间, 即 $\vec{r} dt$ 表示。根据刘攀等人的工作成果 [1], $\vec{F}_{\text{阻}}$ 可用式 (11) 表示:

$$\vec{F}_{\text{阻}} = k_2 \cdot \vec{r} \quad (11)$$

合并式 (10) 和式 (11), 即可得到功率的计算公式:

$$\begin{aligned} dw &= \left| k_2 \vec{r} \cdot \vec{r} dt \right| = k_2 \dot{r}^2 dt \\ \Rightarrow W &= \int_0^t dw = \int_0^t k_2 \dot{r}^2 dt \end{aligned}$$

当振子趋于稳定时, 平均功率 \overline{W} 可用式 (5.1) 得到:

$$\overline{W} = \frac{1}{T} \int_0^T k_2 \dot{r}^2 dt$$

同时，通过上一节对第一问的分析，在其他条件固定的情况下，建立任意时刻下的振子速度 \dot{r} 关于直线阻尼器的阻尼系数 k_2 的函数模型，用 $\dot{r} = f(k_2, t)$ 表示。

进一步分析，直线阻尼器的阻尼系数为常量时的情况 $k_2 = p, p \in [0, 10^5]$ ，可以被视作 $k_2 = p \cdot |\dot{r}|^q$ 当 $q = 0$ 的特殊情况，即可将本问题转化为双变量的优化问题：

$$\begin{aligned} & \max_{p, q} \overline{W}, \\ s.t. \quad & \begin{cases} \overline{W} = \frac{1}{T} \int_0^T k_2 \dot{r}^2 dt, \\ \dot{r} = f(k_2, t), \\ k_2 = p \cdot |\dot{r}|^q, \\ p \in [0, 10^5], \\ q \in [0, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

求解本优化问题即可得到最佳阻尼系数和最佳幂指数以及对应的最大功率。

5.2 模型的求解

对于本双变量单目标优化问题，采用遗传算法的变种——差分进化算法进行求解。我们初始化了 100 个二维向量 $\mathbf{x} (x \in \mathbb{R}^2)$ ，设置变异系数 $F = 0.8$ ，交叉系数 $CR = 0.8$ ，迭代 1000 轮进行优化求解。

对于常值阻尼系数 $k_2 = p$ 的情况，仅需将二维向量 \mathbf{x} 的第二维设置为常数 0 进行计算即可。在迭代了不到一百轮后，发现所有向量均收敛于一个二维点附近，最终 1000 轮后得到的最大功率为 **229.322W**，此时系数 p 为 **37200**。

对于变值阻尼系数 $k_2 = p \cdot |\dot{r}|^q$ 的情况，对于本情况，向量同样以很快的速度收敛到一个点附近，最终 1000 轮后得到的最大功率为 **229.321W**，此时系数 p 为 **37320**，而幂指数 q 恰好为 **0**，证明阻尼系数取常值下刚好能达到最大功率（由于采样精度以及采样区间不同，两次优化得到的结果不尽相同，这属于正常现象）。

5.3 结果分析

在得到了最大功率后，为了更加直观地探讨功率和阻尼系数的关系，我们绘制了以功率为 Z 轴，比例系数 p 和幂指数 q 分别为 x、y 轴的三维曲面图，如图 8 所示。

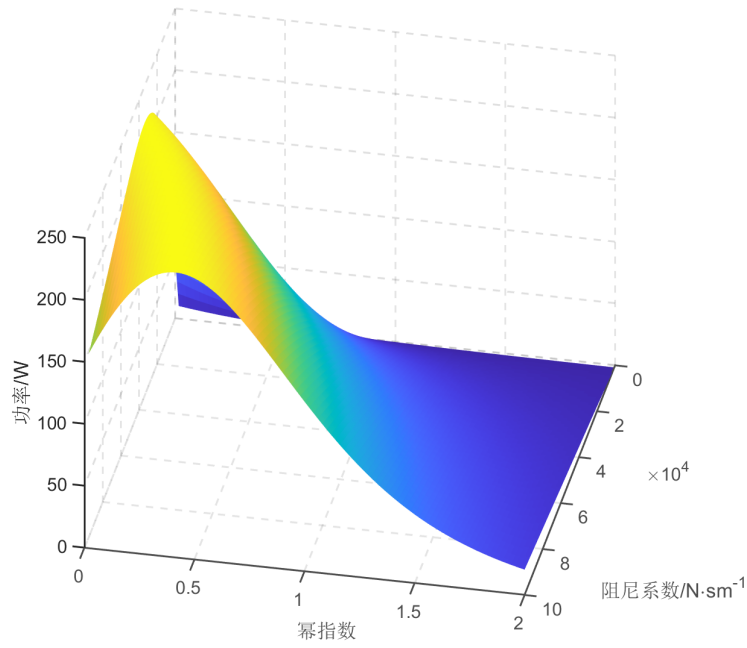


图8 功率曲面

从图中发现，功率曲面存在明显的鞍部，在此部分，功率的变化不超过 $1w$ ，因此我们认为在此范围内的 p 和 q 都是合理的。同时也发现，幂指数取较大值 ($q \in [0.5, 1]$) 时输出功率都不太理想，这是因为浮子和振子的相对速度往往小于 1，对于变值阻尼系数 $k_2 = p \cdot |\dot{r}|^q$ ，幂指数 q 越大，相对速度对阻尼系数的削弱越明显，进而减小输出功率。

六、问题三：摇荡波浪能装置状态控制微分方程

6.1 准备工作

我们在本文中继续沿用问题一的思想，将摇荡波浪能装置运动状态用物理学微分方程表示，并将静水中的浮子和振子视作微分方程初态。

将浮子质心相对于静水中竖直平衡位置的位移设为 y （向下为正），将浮子质心相对于静水中水平平衡位置的位移设为 x （向右为正）。同时保留对 r 的定义：振子到中轴底座的距离，也即弹簧长度为 r 。设 α 为浮子相对于竖直方向的偏角（顺时针方向为正），设 β 为中轴相对于竖直方向的偏角（逆时针方向为正）。如图 9 所示。

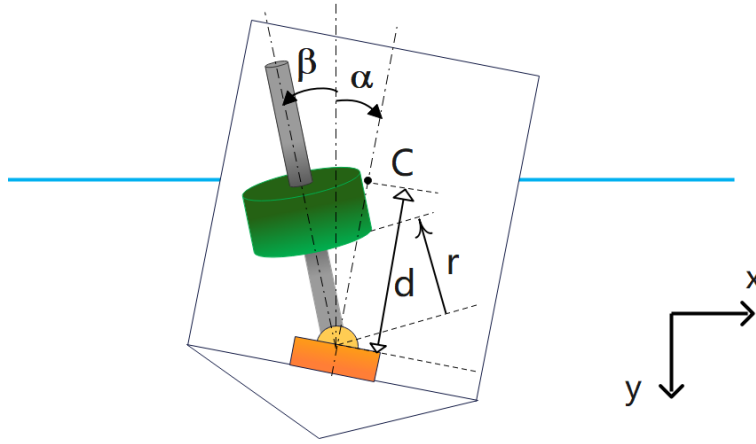


图9 摇荡波浪能装置示意图

图9中，C为浮子的质心。

在正式建立摇荡微分方程之前，先要做若干准备工作，在接下来的四个小节中，我们分别会求解出浮子的质心位置、浮子绕过质心转轴的转动惯量、振子绕底座转轴的转动惯量和倾斜浮子静水恢复力。

6.1.1 浮子质心位置

已知质心的计算公式：

$$y_i = \frac{1}{m_i} \int_{h_{i-1}}^{h_i} y dm$$

波浪能装置的浮子由质量均匀分布的圆柱壳体和圆锥壳体组成。由于浮子具有圆对称性，求解其质心仅需求解质心所在高度即可。考虑到浮子由底部圆锥面、中部圆柱面和顶部圆面三部分组成，采用的方法为：分别求解三部分的质心高度 x_i ，再根据三部分质量加权平均。即：

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (12)$$

设浮子面密度为 $\sigma(kg/m^2)$ 。

- 对于底部圆锥面的质心高度 y_1 ，有：

$$m_1 y_1 = \int_0^{0.8} y dm \quad (13)$$

其中， $dm = \sigma \cdot 2\pi y (\frac{\tan\phi}{\cos\phi} dy)$ ， ϕ 为圆锥半顶角。该部分质量 $m_1 = \frac{1}{\sin\phi} \sigma \pi r^2$ 。

- 对于中部圆柱面的质心高度 y_2 ，有：

$$m_2 y_2 = \int_{0.8}^{3.8} y dm \quad (14)$$

其中, $dm = \sigma \cdot 2\pi r dy$ 。该部分质量 $m_2 = 6\sigma\pi r$ 。

- 对于顶部圆面的质心高度 y_3 , 有:

$$m_3 y_3 = 3.8\sigma\pi r^2 \quad (15)$$

该部分质量 $m_3 = \sigma\pi r^2$ 。

最后, 利用题目条件得出的 $\sigma = 187.05(kg \cdot m^2)$, 综合式 (13)、式 (14) 和式 (15), 可以解得 $y_c = 2.208m$ 。

6.1.2 浮子绕质心转轴的转动惯量

求解完质心位置后, 进一步求解浮子绕质心转轴旋转的转动惯量。与质心求解同理, 考虑到浮子由底部圆锥面、中部圆柱面和顶部圆面三部分组成, 我们将分成三个部分对浮子的转动惯量进行求解。而浮子总的转动惯量 I 则等于三个部分的转动惯量之和, 即: $I = I_1 + I_2 + I_3$ 。

在正式开始之前, 首先求解一个圆环关于一根与圆环所在平面平行、且到平面距离为 d 的转轴的转动惯量。根据平行轴定理, 有式 (16)。

$$\begin{aligned} I &= I_c + md^2 \\ &= \frac{1}{2}mr^2 + md^2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中, I_c 是圆环以一根过质心的直径为转轴的转动惯量, 即 $\frac{1}{2}mr^2$, m 是圆环质量, r 是圆环半径, d 是转轴到圆环质心 (其圆心) 的距离。

然后, 我们将浮子拆分成顶部圆面、中部圆柱面和底部圆锥面三个部分分别计算转动惯量。

- 对于底部圆锥面的转动惯量 I_1 , 有:

$$I_1 = \int_0^{0.8} \frac{1}{2} \cdot dm \cdot r(y)^2 + dm \cdot (y_c - y)^2 \quad (17)$$

其中 $dm = \sigma \cdot 2\pi r(y) \frac{dy}{\cos \varphi}$, $r(y) = \tan \varphi \cdot y$ 。

求解得 $I_1 = 7.7655 \cdot \sigma(kg \cdot m^2)$ 。

- 对于中部圆柱面的转动惯量 I_2 , 有:

$$I_2 = \int_{0.8-y_c}^{3.8-y_c} \frac{1}{2} \cdot dm \cdot r^2 + dm \cdot y^2 \quad (18)$$

其中 $dm = \sigma \cdot 2\pi r dy$ 。

求解得 $I_2 = 23.7217 \cdot \sigma(kg \cdot m^2)$ 。

- 对于顶部圆面的转动惯量 I_3 ，有：

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot dm \cdot r^2 + dm \cdot d^2 \quad (19)$$

其中 $dm = \sigma \cdot 2\pi r dr$ ， $d = 3.8 - y_c$ 。

求解得 $I_3 = 8.7484 \cdot \sigma (kg \cdot m^2)$ 。

最后，利用题目条件得出的 $\sigma = 187.05(kg \cdot m^2)$ ，式 (17)、式 (18) 和式 (19)，可以求解出浮子相对于过质心转轴的转动惯量为 $I = I_1 + I_2 + I_3 = 7526.11(kg \cdot m^2)$ 。

6.1.3 振子绕底座转轴的转动惯量

波浪能装置中的振子是穿在中轴上的圆柱体，在计算转动惯量时，忽略中轴粗细，将振子视作实心圆柱体处理。

当振子下端到中轴底座的距离为 r 时，取与转轴相距 $r + x$ 处厚度为 dx 的一个薄圆面，如图 10 所示。

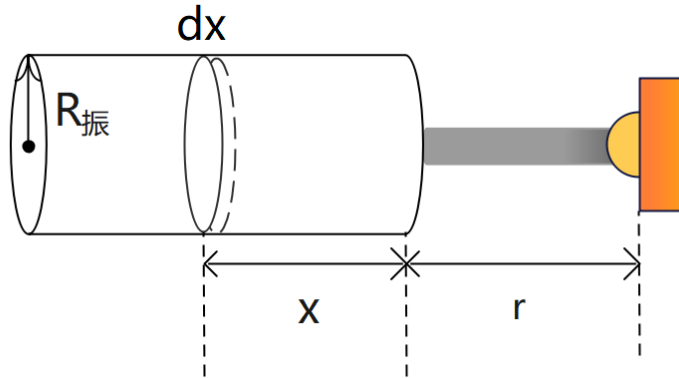


图 10 计算振子转动惯量

根据式 (16) 所示的平行轴定理，此薄圆面绕底座转轴的转动惯量 $dI(x)$ 可用下式表示：

$$dI(x) = \frac{1}{4} \rho \pi R^4 dx + \rho \pi (x + r)^2 R^2 dx, \quad (20)$$

沿轴方向对 x 积分即可得圆柱体的转动惯量 $I(r)$ 为：

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^l dI(x) dx \\ &= \frac{1}{4} m (R^2 + \frac{1}{3} l^2 + 4r^2 + 4rl + l^2), \end{aligned} \quad (21)$$

式中，振子高度 $l = 0.5m$ ，振子质量 $m = 2433kg$ ，振子半径 $R = 0.5m$ 。

6.1.4 倾斜浮子静水恢复力

在摇荡过程中，浮子沿 y 方向的运动和绕质心转动均会使静水恢复力发生变化，我们将浮子的运动过程表述为先绕质心旋转 α ，再向下位移 $y(m)$ 。然后通过计算转动前后排水量之差来计算浮力。

不妨假设转动过程不会淹没圆柱上顶角也不会露出圆柱下底角（后续计算结果时将其进行验证），则任意形态的浮子可通过平衡状态的浮子经过旋转和下沉两个状态得到，如图 11 所示的过程。

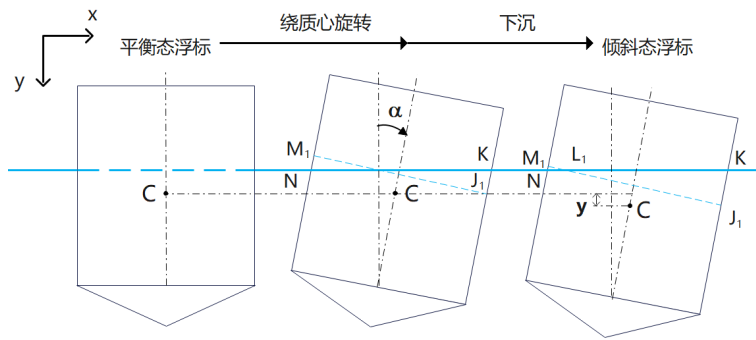


图 11 倾斜浮子静水恢复力计算

图 11 中， C 代表浮子的质心，也即转轴中心，其转动前后的位置应当保持不变，直线 M_1J_1 代表转动前浮子的水面位置，直线 NK 代表转动后浮子的水面位置，质心一开始距离水面的距离 $y_{\text{质}} = Y_{\text{平衡}} - y_c$ ，计算得 $y_{\text{质}} = 1.3792m$ 。接着浮子向下位移 $y(m)$ ， M_1J_1 和 C 也随之向下位移 $y(m)$ 。设直线 M_1J_1 交直线 NK 于 L_1 ，不难看出浮子吃水体积的变化可用三角形 M_1NL_1 和三角形 J_1KL_1 对应体积差表示。

进一步对倾斜态浮标进行分析，浮子中轴应通过质心 C 和 NK 中点 L_2 ，过 L_2 作 $M_1L_1J_1$ 平行线 $M_2L_2J_2$ ，如图 12 所示。

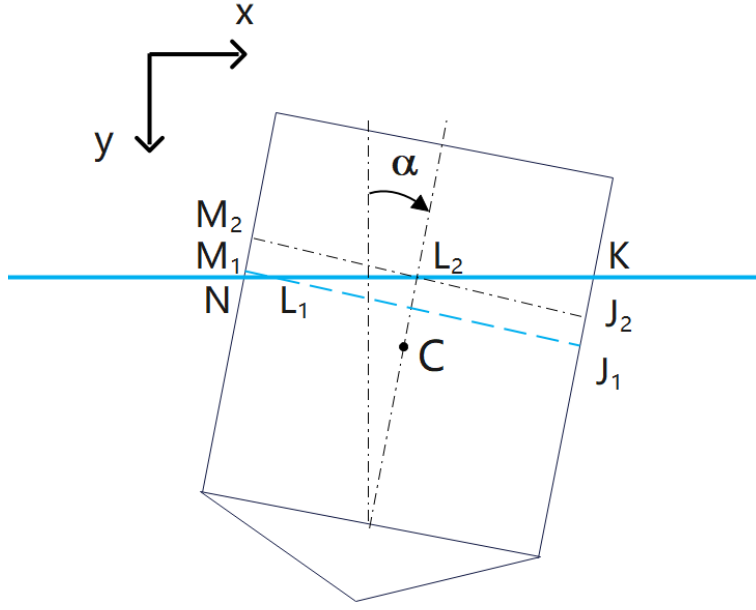


图 12 倾斜浮子几何

不难看出三角形 M_2NL_2 和三角形 J_2KL_2 对应圆柱体积应当相等,故三角形 M_1NL_1 和三角形 J_1KL_1 对应体积差 Δ 有:

$$\Delta = J_1KL_1 - M_1NL_1 = (J_2KL_2 + L_1L_2J_2J_1) - (M_2NL_2 - L_1L_2M_2M_1) = M_1M_2J_1J_2,$$

而 $M_1M_2J_2J_1$ 恰好代表底面为浮子底部、高为 J_1J_2 的圆柱体积, 且 J_1J_2 有:

$$J_1J_2 = \frac{1}{\cos\alpha}(y_{\text{质}} + y) - y_{\text{质}},$$

故可用下式表示倾斜浮子的静水恢复力:

$$F_{\text{静}} = \rho g \left\{ V_0 + S \left[\frac{1}{\cos\alpha}(y_{\text{质}} + y) - y_{\text{质}} \right] \right\}, \quad (22)$$

即倾斜浮子的静水恢复力 $F_{\text{静}}$ 为转角 α 和浮子竖直方向位移 y 的函数。

6.2 模型的建立: 振荡运动方程

至此, 准备工作已经全部完成。

承袭第一问的分析思想分别选取地面系(惯性系)和浮子底座中心(非惯性系)为参考系, 对浮子和振子分别进行分析。

6.2.1 对浮子的平动力学分析

首先对浮子进行平动分析。在本问中, 浮子质心受力示意图如图 13 所示。

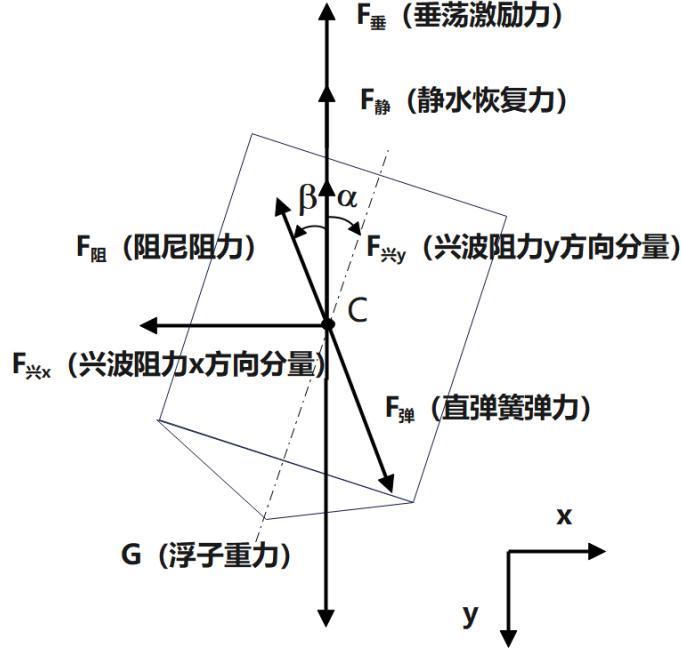


图 13 浮子受力示意图

图中弹簧弹力和直线阻尼阻力共线。由于兴波阻尼力与浮子速度方向相关，我们在图中将其分解为 x 方向和 y 方向的两个兴波阻尼力分力进行表示。

选用浮子 x 方向的速度 \dot{x} 和 y 方向的速度 \dot{y} 、浮子 x 方向的加速度 \ddot{x} 和 y 方向的加速度 \ddot{y} 、振子到中轴底座的距离 r 作为未知参数，将浮子所有受力表示如式 (23):

$$\begin{cases} G = Mg, \\ F_{\text{弹}} = k_1(r_0 - r), \\ F_{\text{阻}} = k_2\dot{r}, \\ F_{\text{兴}x} = \gamma_1\dot{x}, \\ F_{\text{兴}y} = \gamma_1\dot{y}, \\ F_{\text{静}} = \rho g \left\{ V_0 + S \left[\frac{1}{\cos\alpha} (y_{\text{质}} + y) - y_{\text{质}} \right] \right\}, \end{cases} \quad (23)$$

接着，我们可以分别列出浮子沿 x 、 y 方向的动力学方程，并将式 (23) 中各个力的计算值代入动力学方程中，即可得式 (24a) 和式 (24b):

$$\begin{cases} (M' + M)\ddot{x} = k_1(r_0 - r)\sin\beta - k_2\dot{r}\sin\beta - \gamma_1\dot{x}, \end{cases} \quad (24a)$$

$$\begin{cases} (M' + M)\ddot{y} = Mg + k_1(r_0 - r)\cos\beta - F_{\text{静}} - k_2\dot{r}\cos\beta - f\cos\omega t - \gamma_1\dot{y}, \end{cases} \quad (24b)$$

6.2.2 对浮子的转动力学分析

然后，对浮子进行转动分析。

浮子绕过质心的转轴进行转动，在浮子受到的各种力中，作用在中轴底座的弹簧弹力和直线阻尼阻力不通过浮子转轴，因此会产生力矩，将其产生的力矩定义为 M_f 。图 14 为浮子所受的各种力矩的示意图。

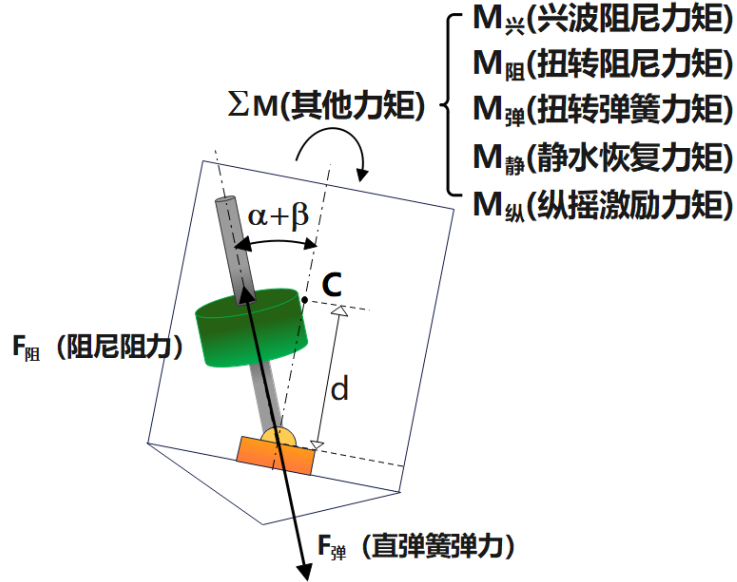


图 14 浮子所受力矩

上图中，用 $\sum M$ 表示浮子受到的五个其他力矩之和，它们分别是：兴波阻尼力矩 $M_{兴}$ ，扭转阻尼力矩 $M_{阻}$ ，扭转弹簧力矩 $M_{弹}$ ，静水恢复力矩 $M_{静}$ 和纵摇激励力矩 $M_{纵}$ 。它们可以用浮子相对于竖直方向的偏角 α 、中轴相对于竖直方向的偏角 β 以及二者关于时间的一阶导数 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ （物理意义为角速度）表示。同时也可以利用 α 、 β 以及浮子质心到中轴底座的距离 d 表示作用在中轴底座的弹簧弹力和直线阻尼阻力的力矩。各力矩的计算式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{纵} = L \cos \omega t, \\ M_{静} = -\eta \cdot \alpha, \\ M_{兴} = -\gamma_2 \dot{\alpha}, \\ M_{阻} = -k_4 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}), \\ M_{弹} = -k_3 (\alpha + \beta), \\ M_f = (F_{阻} - F_{弹}) \cdot d \sin(\alpha + \beta), \end{array} \right. \quad (25)$$

式中， d 代表浮子质心距离中轴底座的距离，经过之前的求解，质心 C 所在高度为距浮子圆锥面顶点 $2.208m$ 处，因此质心到中轴底座的距离 $d = 2.208 - 0.8 = 1.408m$ 。用此

数据即可算得弹簧弹力和直线阻尼阻力产生的力矩。

据此可以列出浮子的转动方程，如式 (26) 所示。

$$(I_c + I')\ddot{\alpha} = L\cos\omega t - k_3(\alpha + \beta) - k_4(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - \eta \cdot \alpha - \gamma_2\dot{\alpha} + (F_{\text{阻}} - F_{\text{弹}}) \cdot d\sin(\alpha + \beta), \quad (26)$$

式中， I_c 为浮子的转动惯量，根据之前计算的结果有 $I_c = 7526.11(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ ， I' 为附加转动惯量。

6.2.3 对振子的平动力学分析

对于振子，我们以浮子底座中心为非惯性系参考系。先对其进行平动分析，振子受力示意如图 15 所示。

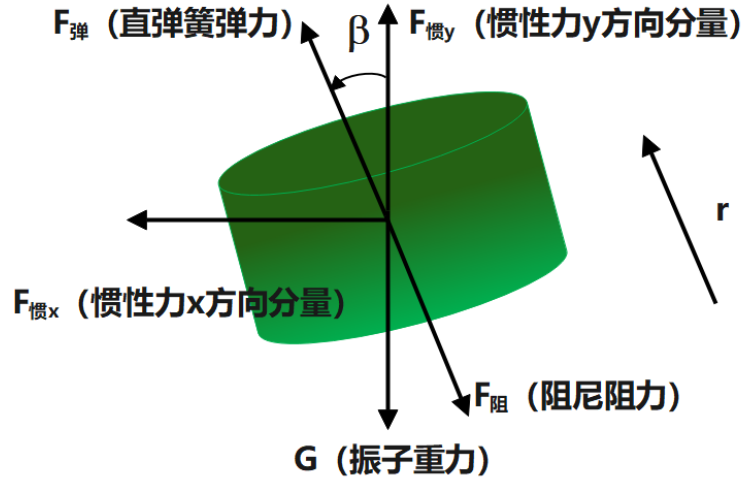


图 15 振子受力示意图

图中弹簧弹力和直线阻尼阻力共线。惯性力的方向与浮子底座中心的加速度的方向相反，其计算需要利用浮子质心加速度以及中轴底座中心相对于浮子质心的牵连加速度，将其分解到 x 和 y 方向，用 $F_{\text{惯}x}$, $F_{\text{惯}y}$ 进行表示。

与浮子的分析过程相同，可以计算出振子所受的所有力，如式 (27) 所示：

$$\left\{ \begin{array}{l} G = mg, \\ F_{\text{弹}} = k_1(r_0 - r), \\ F_{\text{阻}} = k_2\dot{r}, \\ F_{\text{惯}x} = m[\ddot{x} - \ddot{\alpha}(y_c - 0.8)\cos\alpha], \\ F_{\text{惯}y} = m[\ddot{y} - \ddot{\alpha}(y_c - 0.8)\sin\alpha], \end{array} \right. \quad (27)$$

接着，通过研究振子的受力，可以列出振子在中轴方向沿径向的动力学方程，并将式 (27) 中各个力的计算值代入该动力学方程中，即可得式 (28)：

$$m(\ddot{r} - \dot{\beta}^2 r) = k_1(r_0 - r) - k_2 \dot{r} - mg \cos \beta + m[\ddot{x} - \ddot{\alpha}(y_c - 0.8) \cos \alpha] \sin \beta + m[\ddot{y} - \ddot{\alpha}(y_c - 0.8) \sin \alpha] \cos \beta, \quad (28)$$

6.2.4 对振子的转动力学分析

同理对振子进行转动分析。

振子的转动绕中轴底座上固定的转轴进行，在振子所受的各个力中，作用于振子质心的振子重力不通过振子转轴，因此会产生力矩。同时，由于振子处于非惯性系中，还需要考虑惯性力的力矩，将这些未过转轴的力产生的力矩定义为 M_g 。图 16 为浮子所受的各种力矩的示意图。

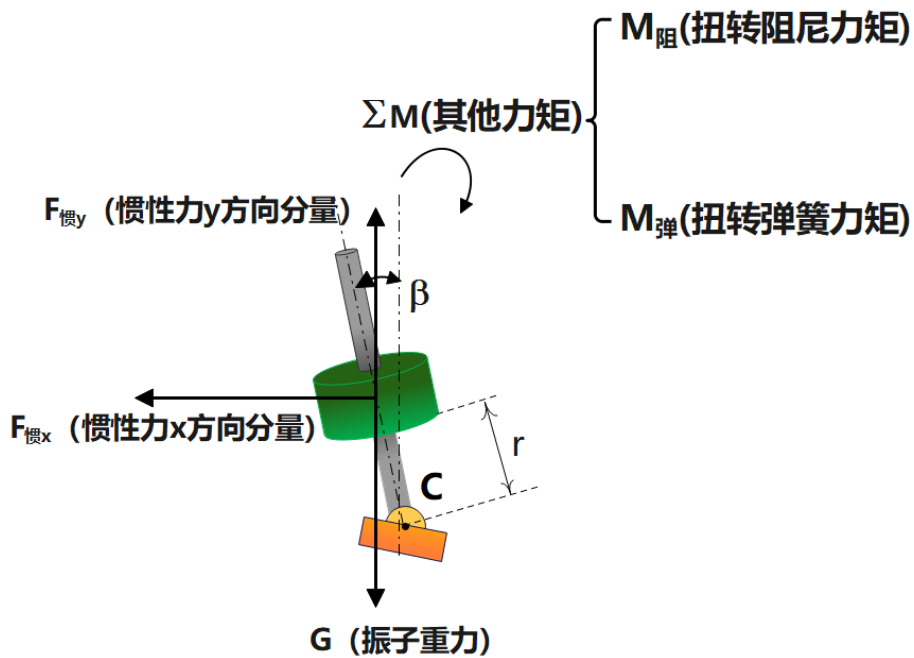


图 16 振子所受力矩

上图中，用 $\sum M$ 表示振子受到的两个其他力矩之和，它们分别是：扭转弹簧力矩 $M_{\text{弹}}$ 和扭转阻尼力矩 $M_{\text{阻}}$ ，二者均由题目给出，仅需计算未过转轴的力产生的力矩 M_g ：

$$M_g = mg \cdot r \sin \beta + F_{\text{惯}x} \cdot r \cos \beta - F_{\text{惯}y} \cdot r \sin \beta, \quad (29)$$

式中， r 为振子底端到中轴底座的距离。

根据非惯性系中的角动量定理：

$$M_{\text{惯}} + M_{\text{外}} = \frac{dL}{dt} \quad (30)$$

据此我们可以列出振子的转动方程，如式 (31) 所示。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I(r)\dot{\beta}) &= \frac{dI}{dr}\dot{r}\dot{\beta} + I(r)\ddot{\beta} \\ &= -M_{\text{弹}} - M_{\text{阻}} + mgr \cdot \sin\beta + F_{\text{惯}x} \cdot r\cos\beta - F_{\text{惯}y} \cdot r\sin\beta, \end{aligned} \quad (31)$$

注意到对振子角动量求导时，根据之前的计算，振子的转动惯量 $I(r)$ 并不是常数，而是 r 的函数，因此需要用到链式求导法则。

6.3 模型的求解

浮子的平动动力学方程式 (24)、转动动力学方程式 (26)，和振子的平动动力学方程式 (28)、转动动力学方程式 (31) 对于任意时刻 t 均成立，联立四个方程，并将静止状态下直弹簧平衡长度 $r_1 = 0.2020m$ 和浮子初始吃水体积 V_0 代入该微分方程组，有：

$$\begin{cases} (M' + M)\ddot{x} = k_1(r_0 - r)\sin\beta - k_2\dot{r}\sin\beta - \gamma_1\dot{x}, \\ (M' + M)\ddot{y} = Mg + k_1(r_0 - r)\cos\beta - F_{\text{静}} - k_2\dot{r}\cos\beta - f\cos\omega t - \gamma_1\dot{y}, \\ (I_c + I')\ddot{\alpha} = L\cos\omega t - k_3(\alpha + \beta) - \eta \cdot \alpha - k_4(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) - \gamma_2\dot{\alpha} + (F_{\text{阻}} - F_{\text{弹}}) \cdot d\sin(\alpha + \beta), \\ m(\ddot{r} - \dot{\beta}^2 r) = k_1(r_0 - r) - k_2\dot{r} - mg\cos\beta + F_{\text{惯}x}\sin\beta + F_{\text{惯}y}\cos\beta, \\ \frac{dI}{dr}\dot{r}\dot{\beta} + I(r)\ddot{\beta} = -M_{\text{弹}} - M_{\text{阻}} - mgr \cdot \sin\beta + F_{\text{惯}x} \cdot r\cos\beta - F_{\text{惯}y} \cdot r\sin\beta, \\ r|_{t=0} = 0.2020, \dot{r}|_{t=0} = 0, y|_{t=0} = 0, \dot{y}|_{t=0} = 0, x|_{t=0} = 0, \dot{x}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (32)$$

然后，用与第一问相同的办法把上面的五元二阶常系数线性非齐次微分方程组降阶成一阶：用 u_1, \dots, u_{10} 分别替换 $x, \dot{x}, y, \dot{y}, r, \dot{r}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$ ，并按照题目要求，代入浮子质量 M 、振子质量 m 、扭转弹簧力矩 $M_{\text{弹}}$ 、扭转阻尼力矩 $M_{\text{阻}}$ 等已知数据，利用 matlab 的 ode15s 函数，采用龙格库塔法求解各个时刻下的浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度，并利用式 (9)，将浮子、振子位移统一到海平面坐标系中，得到的部分结果如表 2 所示。

表 2 不同时刻浮子与振子的垂荡位移和速度

		时刻				
		10s	20s	40s	60s	100s
浮子	垂荡位移 (m)	-0.5327	-0.695	0.375	-0.313	-0.0473
	垂荡速度 (m/s)	0.9759	-0.2615	0.7511	-0.7247	-0.9458
	纵荡角位移 (rad)	0.0152	0.0193	-0.0229	0.0275	0.0155
	纵荡角速度 (rad/s)	-0.0575	0.0230	-0.0402	0.0545	0.0720
振子	垂荡位移 (m)	-0.6036	-0.7611	0.3993	-0.3323	-0.0392
	垂荡速度 (m/s)	1.0437	-0.3093	0.839	-0.8004	-1.0341
	纵荡角位移 (rad)	0.0155	0.0196	-0.0233	0.0281	0.01580
	纵荡角速度 (rad/s)	-0.0600	0.0225	-0.0422	0.0555	0.0743

6.4 模型的验证

与第一问相同，为了分析波浪能装置摇荡的频率，对摇荡微分方程求解得到的浮子位移作快速傅里叶变化，如图 17所示。

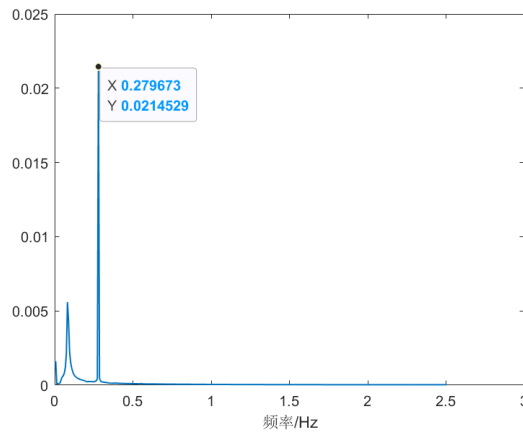


图 17 摇荡波浪能装置位移频谱

在频谱图中，同样存在明显的主峰，其频率为 $0.280Hz$ ，与波浪频率 $f = \frac{1.7152}{2\pi} = 0.273Hz$ 几乎一致，这说明关于浮子和振子的摇荡运动模型也是合理的。同时，由于图中次峰较主峰低许多，说明浮子和振子的振频会在短时间内达到主峰所示频率，因此后续在计算阻尼功率时可以将一个周期内的平均功率视作阻尼实际的平均功率。

七、问题四：摇荡情形的组合阻尼系数设计

7.1 模型的建立

在本问中，总平均功率 $\overline{W_{\text{总}}}$ 可由直线阻尼器和旋转阻尼器产生功率之和表示，即有：

$$\overline{W_{\text{总}}} = \overline{W_{\text{直}}} + \overline{W_{\text{旋}}}$$

与第二问相同，用式 (5.1) 计算直线阻尼器的平均功率：

$$\overline{W_{\text{直}}} = \frac{1}{T} \int_0^T k_2 \dot{r}^2 dt$$

式中， k_2 代表直线阻尼器的阻尼系数。

对于旋转阻尼器的平均功率，将上式进行推广，用中轴与浮子相对角速度 $\dot{\alpha} + \dot{\beta}$ 替换振子轴移速度 \dot{r} ，用角度位移量 $d(\alpha + \beta)$ 替换振子轴移量 dr ，即可将旋转阻尼器的平均功率表示如下：

$$\overline{W_{\text{旋}}} = \frac{1}{T} \int_0^T k_4 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 dt$$

式中， k_4 代表旋转阻尼器的阻尼系数。

在第三问中，得到了其他条件固定的情况下，振子速度 \dot{r} 和振子与浮子相对角速度 $\dot{\alpha} + \dot{\beta}$ 关于直线阻尼器阻尼系数 k_2 、旋转阻尼器阻尼系数 k_4 和时刻 t 的函数模型，用 $\dot{r} = g(k_2, k_4, t)$ 和 $\dot{\alpha} + \dot{\beta} = h(k_2, k_4, t)$ 表示。

进一步分析，直线阻尼器的阻尼系数取值范围为 $k_2 \in [0, 10^5]$ ，旋转阻尼器的阻尼系数取值范围为 $k_4 \in [0, 10^5]$ ，我们同样可将本问题转化为双变量的优化问题：

$$\begin{aligned} & \max_{k_2, k_4} \overline{W}, \\ & s.t. \quad \begin{cases} \overline{W_{\text{总}}} = \overline{W_{\text{直}}} + \overline{W_{\text{旋}}} \\ \overline{W_{\text{直}}} = \frac{1}{T} \int_0^T k_2 \dot{r}^2 dt, \\ \overline{W_{\text{旋}}} = \frac{1}{T} \int_0^T k_4 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 dt, \\ \dot{r} = g(k_2, k_4, t), \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} = h(k_2, k_4, t), \\ k_2 \in [0, 10^5], \\ k_4 \in [0, 10^5], \end{cases} \end{aligned}$$

求解本优化问题即可得到最佳直线、旋转阻尼系数的组合以及对应的最大功率。

7.2 模型的求解

对于上述双变量单目标优化问题，同样采用差分进化算法进行求解。采用了与第二问初始化了 100 个二维向量 $\mathbf{x}(x \in \mathbb{R}^2)$ ，设置变异系数 $F = 0.8$ ，交叉系数 $CR = 0.8$ ，迭代 1000 轮进行优化求解。

最终解算出的最优结果为 **351.190W**，相应的直线阻尼系数为 **63272N · s/m**，旋转阻尼系数为 **24078N · s · m**

八、模型的优缺点

模型的优点：

1. 本文建立并求解了垂荡浮子的微分方程，很好地预测了浮子垂荡运动规律。
2. 在直线阻尼器阻尼系数的设计中，本文给出了自己的设计方案，并对方案机理进行了分析。
3. 在考虑了纵摇后，本文建立并求解了摇荡浮子的微分方程，更加丰富地表述了浮子的运动规律。
4. 在直线和转动阻尼器阻尼系数的组合设计中，本文给出了最佳的设计方案，使得输出功率可以达到最大。

模型的缺点：

1. 本文未考虑组件间的摩擦和输出损耗，最终计算功率可能会偏大。
2. 本文仅考虑了浮子的纵摇运动和垂荡运动，还不能做到完全拟合浮子在海面上的运动状态。

参考文献

- [1] 刘攀. 新型波浪能发电装置捕能效率的优化研究 [D]. 南昌大学,2021.DOI:10.27232/d.cnki.gnchu.2021.003178.
- [2] 张弘^①. 海洋波浪发电系统振荡浮子结构的优化研究:[硕士学位论文]. 北京: 清华大学, 2010

附件

```
1 问题一主程序
2
3 %此代码用于生成第一问结果
4
5 clc;clear;
6
7 sol=ode45(@(t, u) odefunc(t, u, 0), [0, 500], [0.2019575;0;0;0]);
8 t = 2*pi*40/1.4005; %计算 40 个周期的时间
9 t = 0:0.2:t; %生成待求时刻
10 u = deval(sol, t); %求解
11 %转换坐标
12 u(1, :) = u(1, :)-0.2019575-u(3, :);
13 u(2, :) = u(2, :)-u(4, :);
14 u(3, :) = -u(3, :);
15 u(4, :) = -u(4, :);
16
17 plot(t, u(3, :));
18 hold on;
19
20 disp('阻尼系数为常量时');
21 time=[10, 20, 40, 60, 100];
22 for i=1:5
23     T=time(i);
24     arg=find(t==T);
25     disp([num2str(T), 's处: ', '振子位移', num2str(u(1, arg), '%.4f'), ' 振子速度', num2str(u(2,
        arg), '%.4f'), ' 浮子位移', num2str(u(3, arg), '%.4f'), ' 浮子速度', num2str(u(4, arg),
        '%.4f')]);
26 end
27
28 sol=ode45(@(t, u) odefunc(t, u, 1), [0, 500], [0.2019575;0;0;0]);
29 t = 2*pi*40/1.4005; %计算 40 个周期的时间
30 t = 0:0.2:t; %生成待求时刻
31 u = deval(sol, t); %求解
32 %转换坐标
33 u(1, :) = u(1, :)-0.2019575-u(3, :);
34 u(2, :) = u(2, :)-u(4, :);
35 u(3, :) = -u(3, :);
36 u(4, :) = -u(4, :);
37
38 plot(t, u(3, :));
39 hold on;
40
41 disp('阻尼系数为变量时');
42 time=[10, 20, 40, 60, 100];
```

```

43 for i=1:5
44     T=time(i);
45     arg=find(t==T);
46     disp([num2str(T), 's处: ', '振子位移', num2str(u(1, arg), '%.4f'), ' 振子速度', num2str(u(2,
        arg), '%.4f'), ' 浮子位移', num2str(u(3, arg), '%.4f'), ' 浮子速度', num2str(u(4, arg),
        '%.4f')]);
47 end
48
49
50
51 function dudt=odefunc(t, u, choice)
52 %t-> 时间自变量,u-> 待求变量,choice->0: 常量阻尼系数 l1: 阻尼系数随相对速度变化
53
54 %题目常量
55 m=2433;%kg 振子质量
56 M=4866;%kg 浮子质量
57 k1=80000;%N/m 弹簧刚度
58 rho=1025;%kg/m3
59 r0=0.5;%m 弹簧原长
60 S = pi*1;%m2
61 R = 1;%m 浮子底面半径
62 g=9.8;%m/s2
63
64 %第一问常量
65 gamma1=656.3616; %Ns/m 垂荡兴波阻力系数
66 M_ = 1335.535;%kg 垂荡附加质量
67 if(choice==0)
68     k2=10000; %Ns/m 直线阻尼器的阻尼系数
69 else
70     k2=10000*abs(u(2))0.5; %Ns/m 直线阻尼器的阻尼系数
71 end
72 f=6250;%N 垂荡激励力振幅
73 omega=1.4005;%1/s 入射波浪频率
74
75 %静态量
76 V0=(m+M)/(rho); %静态吃水体积
77
78 dudt=zeros(4, 1);
79 dudt(1)=u(2);
80 dudt(2)=-(k1/m+k1/(M+M_))*u(1)-(k2/m+k2/(M+M_))*u(2)-rho*g*S/(M+M_)*u(3)...
81     -gamma1/(M+M_)*u(4)-M_/(M+M_)*g+(k1/m+k1/(M+M_))*r0...
82     -rho*g*V0/(M+M_)-f*cos(omega*t)/(M+M_);
83 dudt(3)=u(4);
84 dudt(4)=-k1/(M+M_)*u(1)-k2/(M+M_)*u(2)-rho*g*S/(M+M_)*u(3)-gamma1/(M+M_)*u(4)...
85     + M*g/(M+M_)+(k1*r0)/(M+M_)-rho*g*V0/(M+M_)-f*cos(omega*t)/(M+M_);
86 end

```

```

1
2 问题一仿真代码
3
4 %这个脚本可用于生成第一问的仿真动画，直接执行
5
6 clc;clear;
7 sol=ode45(@(t, u) odefunc(t, u, 1), [0, 500], [0.2019575;0;0;0]);
8 t = 2*pi*40/1.4005; %计算 40 个周期的时间
9 t = 0:0.05:t; %生成待求时刻
10 u = deval(sol, t); %求解
11 %转换坐标
12 u(1, :) = u(1, :)-0.2019575-u(3, :);%以向上为正方向，振子相对于静态时的位移
13 u(2, :) = u(2, :)-u(4, :);
14 u(3, :) = -u(3, :);%以向上为正方向，浮子相对于静态时的位移
15 u(4, :) = -u(4, :);
16
17 r = u(1, :);
18 x = u(3, :);
19
20 line1X=[0, 0, 0, 0, 0];line1Y=[0, 0, 0, 0, 0];
21 line1=plot(line1X, line1Y, 'linewidth',2);
22 hold on;
23 line2X=[0, 0];line2Y=[0, 0];
24 line2=plot(line2X, line2Y, 'linewidth',2);
25 hold on;
26 line3X=[0, 0, 0];line3Y=[0, 0, 0];
27 line3=plot(line3X, line3Y, 'linewidth',2);
28 line4=plot([-5,5], [0, 0]);
29 hold on;
30 line5X=[0, 0, 0, 0, 0];line5Y=[0, 0, 0, 0, 0];
31 line5=plot(line5X, line5Y, 'linewidth',2);
32 hold on;
33 P1X=0;P1Y=0;
34 P1=scatter(P1X, P1Y, 'filled');
35 % axis([-3,3,-3,3]);
36 axis equal;
37 yc=2.207925157; %m 浮子质心到圆锥尖端的距离
38
39 %以下代码绘制仿真动画
40 for i=1:length(t)
41     line1X(1)=-1;
42     line1X(2)=1;
43     line1X(3)=1;
44     line1X(4)=-1;
45     line1X(5)=-1;
46     line1Y(1)=-2+x(i);

```

```

47     line1Y(2)=-2+x(i);
48     line1Y(3)=-2+x(i)+3;
49     line1Y(4)=-2+x(i)+3;
50     line1Y(5)=-2+x(i);
51     set(line1, 'XData', line1X, 'YData', line1Y);
52     line2X(1)=0;
53     line2X(2)=0;
54     line2Y(1)=-2+x(i);
55     line2Y(2)=-2+x(i)+2.8;
56     set(line2, 'XData', line2X, 'YData', line2Y);
57     line3X(1)=-1;
58     line3X(2)=0;
59     line3X(3)=1;
60     line3Y(1)=-2+x(i);
61     line3Y(2)=-2+x(i)-0.8;
62     line3Y(3)=-2+x(i);
63     set(line3, 'XData', line3X, 'YData', line3Y);
64     P1X=0;
65     P1Y=-2-0.8+2.207925157+x(i);
66     set(P1, 'XData', P1X, 'YData', P1Y);
67     line5X(1)=-0.5;
68     line5X(2)=0.5;
69     line5X(3)=0.5;
70     line5X(4)=-0.5;
71     line5X(5)=-0.5;
72     line5Y(1)=-2+0.2019575+r(i);
73     line5Y(2)=-2+0.2019575+r(i);
74     line5Y(3)=-2+0.2019575+r(i)+0.5;
75     line5Y(4)=-2+0.2019575+r(i)+0.5;
76     line5Y(5)=-2+0.2019575+r(i);
77     set(line5, 'XData', line5X, 'YData', line5Y);
78     drawnow;
79 end
80
81
82 function dudt=odefunc(t, u, choice)
83 %t-> 时间自变量,u-> 待求变量,choice->0: 常量阻尼系数 l1: 阻尼系数随相对速度变化
84
85 %题目常量
86 m=2433;%kg 振子质量
87 M=4866;%kg 浮子质量
88 k1=80000;%N/m 弹簧刚度
89 rho=1025;%kg/m3
90 r0=0.5;%m 弹簧原长
91 S = pi*1;%m2
92 R = 1;%m 浮子底面半径
93 g=9.8;%m/s2

```

```

94
95 %第一问常量
96 gamma1=656.3616; %Ns/m 垂荡兴波阻力系数
97 M_= 1335.535;%kg 垂荡附加质量
98 if(choice==0)
99     k2=10000; %Ns/m 直线阻尼器的阻尼系数
100 else
101     k2=10000*abs(u(2))0.5; %Ns/m 直线阻尼器的阻尼系数
102 end
103 f=6250;%N 垂荡激励力振幅
104 omega=1.4005;%1/s 入射波浪频率
105
106 %静态量
107 V0=(m+M)/(rho); %静态吃水体积
108
109 dudt=zeros(4, 1);
110 dudt(1)=u(2);
111 dudt(2)=-((k1/m+k1/(M+M_))*u(1)-(k2/m+k2/(M+M_))*u(2)-rho*g*S/(M+M_)*u(3)...
112     -gamma1/(M+M_)*u(4)-M_/(M+M_)*g+(k1/m+k1/(M+M_))*r0...
113     -rho*g*V0/(M+M_)-f*cos(omega*t)/(M+M_));
114 dudt(3)=u(4);
115 dudt(4)=-k1/(M+M_)*u(1)-k2/(M+M_)*u(2)-rho*g*S/(M+M_)*u(3)-gamma1/(M+M_)*u(4)...
116     + M*g/(M+M_)+(k1*r0)/(M+M_)-rho*g*V0/(M+M_)-f*cos(omega*t)/(M+M_);
117 end

```

```

1 问题二第一问代码
2
3 %此代码用于绘制第二题第一问的图形以及搜索最优解
4
5 clc;clear;
6
7 X=zeros(1, 100);
8 Y=zeros(1, 100);
9
10 % for i=1:100
11 % X(i)=1000*i;
12 % A=1000*i;
13 % P=getP(A);
14 % Y(i)=P;
15 % end
16 % plot(X, Y, 'linewidth', 1);
17 % xlabel(' 常量阻尼系数/N-1');
18 % ylabel(' 功率/W');
19
20 A=37000;
21 foot=500;

```



```

22 for i=1:200
23     P1=getP(A-foot);
24     P2=getP(A+foot);
25
26     if P1>=P2
27         A=A-foot;
28         disp(['系数: ', num2str(A), ' 当前最优: ', num2str(P1)]);
29     else
30         A=A+foot;
31         disp(['系数: ', num2str(A), ' 当前最优: ', num2str(P2)]);
32     end
33     foot=foot*0.8;
34 end
35
36 function P=getP(A)
37     omega=2.2143;
38     last=20*2*pi/omega;%20 个周期来计算功率
39     sol=ode45(@(t, u) odefunc(t, u, A), [0, 400], [0.2019575;0;0;0]);
40     t=300:0.01:300+last;
41     u=deval(sol, t);
42     arg_min=1;
43     arg_max=length(t);
44     v1=u(2, arg_min:arg_max-1);
45     v2=u(2, arg_min+1:arg_max);
46     t1=t(arg_min:arg_max-1);
47     t2=t(arg_min+1:arg_max);
48
49     avg_v=(v2+v1)./2;
50     delta_t=t2-t1;
51
52     W=sum(A.*avg_v.^2.*delta_t);
53     P=W/(t(arg_max)-t(arg_min));
54 end
55 function dudt=odefunc(t, u, A)
56 %t-> 时间自变量,u-> 待求变量,A-> 传入变量
57
58 %题目常量
59 m=2433;%kg 振子质量
60 M=4866;%kg 浮子质量
61 k1=80000;%N/m 弹簧刚度
62 rho=1025;%kg/m3
63 r0=0.5;%m 弹簧原长
64 S = pi*1;%m2
65 R = 1;%m 浮子底面半径
66 g=9.8;%m/s2
67
68 %第二问常量

```

```

69 gamma1=167.8395; %Ns/m 垂荡兴波阻力系数
70 M_= 1165.992;%kg 垂荡附加质量
71 k2=A; %Ns/m 直线阻尼器的阻尼系数
72 f=4890;%N 垂荡激励力振幅
73 omega=2.2143;%1/s 入射波浪频率
74
75 %静态量
76 V0=(m+M)/(rho); %静态吃水体积
77
78 dudt=zeros(4, 1);
79 dudt(1)=u(2);
80 dudt(2)=-(k1/m+k1/(M+M_))*u(1)-(k2/m+k2/(M+M_))*u(2)-rho*g*S/(M+M_)*u(3)...
81     -gamma1/(M+M_)*u(4)-M_/(M+M_)*g+(k1/m+k1/(M+M_))*r0...
82     -rho*g*V0/(M+M_)-f*cos(omega*t)/(M+M_);
83 dudt(3)=u(4);
84 dudt(4)=-k1/(M+M_)*u(1)-k2/(M+M_)*u(2)-rho*g*S/(M+M_)*u(3)-gamma1/(M+M_)*u(4)...
85     + M*g/(M+M_)+(k1*r0)/(M+M_)-rho*g*V0/(M+M_)-f*cos(omega*t)/(M+M_);
86 end

```

```

1  问题二第二问图像生成代码
2
3  %此代码用于生成第二题第二问 surf 图像
4
5  clc;clear;
6
7  X=zeros(100, 50);
8  Y=zeros(100, 50);
9  Z=zeros(100, 50);
10 for i=1:100
11     for j=1:100
12         X(i, j)=1000*i;
13         Y(i, j)=0.02*j;
14         P=ques2_2_power(1000*i, 0.02*j);
15         Z(i, j)=P;
16     end
17 end
18 surf(X, Y, Z);
19 hold on
20 grid on
21 shading flat
22 ax=gca;
23 ax.Color=[1,1,1];
24 ax.XColor=[1,1,1].*.3;
25 ax.YColor=[1,1,1].*.3;
26 ax.LineWidth=1.5;
27 ax.GridLineStyle='--';

```

```

28 xlabel('阻尼系数/N\cdotsm^{-1}');
29 ylabel('幂指数');
30 zlabel('功率/W');

```

1
2 问题二计算功率代码

```

3
4 function P=ques2_2_power(A, B)
5     %根据输入 A, B 采样之后使用近似积分求解功率
6
7     omega=2.2143;
8     last=20*2*pi/omega;%10 个周期来计算功率
9     sol=ode45(@(t, u) ques2_2_ode(t, u, A, B), [0, 400], [0.2019575;0;0;0]);
10    t=300:0.01:300+last;
11    u=deval(sol, t);
12    arg_min=1;
13    arg_max=length(t);
14    v1=u(2, arg_min:arg_max-1);
15    v2=u(2, arg_min+1:arg_max);
16    t1=t(arg_min:arg_max-1);
17    t2=t(arg_min+1:arg_max);
18
19    avg_v=(v2+v1)./2;
20    delta_t=t2-t1;
21
22    W=sum(A.*abs(avg_v).^B.*avg_v.^2.*delta_t);
23    P=W/(t(arg_max)-t(arg_min));
24 end

```

25 \begin{lstlisting}

26 问题二差分进化算法

27
28 %使用差分进化算法求解第二题第二问

```

29
30 clc;clear;
31 %DE 差分进化算法
32 %超参数设置
33 num = 100; %向量数
34 len = 2; %向量长度
35 epoch = 100;%迭代次数
36 max_vector = [100000 0]; %向量最大范围
37 min_vector = [0 0]; %向量最小范围
38 F=0.8; %变异算子
39 CR=0.8; %交叉算子
40
41 %向量在规定范围内随机初始化
42 vector_set=rand(num, len);

```

```

43 for i=1:len
44     vector_set(:, i) = vector_set(:, i)*(max_vector(i)-min_vector(i))+min_vector(i);
45 end
46 for e =1:epoch
47     tic
48     for n=1:num
49         sample=randperm(num); %模拟无放回抽样
50         r1=sample(1);r2=sample(2);r3=sample(3);
51         v=vector_set(r1, :)+F*(vector_set(r2, :)-vector_set(r3, :));
52         u = zeros(1, len);
53         for i=1:len %矫正越界值
54             if v(i)>max_vector(i)
55                 v(i)=max_vector(i);
56             end
57             if v(i)<min_vector(i)
58                 v(i)=min_vector(i);
59             end
60             p = rand();
61             if p<CR
62                 u(i)=v(i);
63             else
64                 u(i)=vector_set(n, i);
65             end
66         end
67
68         if ques2_2_power(u(1), u(2))>ques2_2_power(vector_set(n, 1), vector_set(n, 2))%更新操作
69             vector_set(n, :)=u;
70         end
71     end
72     toc
73
74 end
75
76 max=0;
77 max_ind=0;
78 for i=1:num
79     k = ques2_2_power(vector_set(i, 1), vector_set(i, 2));
80     if k>max
81         max=k;
82         max_ind=i;
83     end
84 end
85 max
86 vector_set(max_ind, 1)
87 vector_set(max_ind, 2)

```

```

1  问题三主要代码
2
3  %此代码用于绘制第三问各变量图像
4
5  clc;clear;
6
7  r1=0.2019575;
8  omega=1.7152;%1/s 入射波浪频率
9  yc=2.207925157;%m 浮子质心到圆锥尖端的距离
10
11 sol=ode15s(@odefunc2, [0, 500], [0; 0; 0; 0; r1; 0; 0; 0; 0; 0]);
12 t = 2*pi*40/omega; %计算 40 个周期的时间
13 t = 0:0.2:t; %生成待求时刻
14 u = deval(sol, t); %求解
15
16 x=u(1, :);
17 y=u(3, :);
18 r=u(5, :);
19 alpha=u(7, :);
20 beta=u(9, :);
21
22 float_y=-y;
23 float_a=alpha;
24 float_dy=-u(4,:);
25 float_da=u(8, :);
26 static_y=-y-(yc-0.8)*cos(u(7, :))+u(5, :).*cos(u(9, :))+yc-0.8-r1;
27 static_a=-beta;
28 static_dy=-u(4, :)+u(8, :).*(yc-0.8).*sin(u(7, :))+u(6, :).*cos(u(9, :))-u(5, :).*u(10,
    :).*sin(u(9, :));
29 static_da=-u(10, :);
30 plot(t, static_da)
31 time=[10, 20, 40, 60, 100];
32 for i=1:5
33     T=time(i);
34     arg=find(t==T);
35     disp([num2str(T), 's处: ', '振子垂荡位移', num2str(static_y(arg), '%.4f'), ' 振子垂荡速度',
        num2str(static_dy(arg), '%.4f'),' 振子角位移', num2str(static_a(arg), '%.4f'),'
        振子角速度', num2str(static_da(arg), '%.4f')]);
36 end
37 time=[10, 20, 40, 60, 100];
38 for i=1:5
39     T=time(i);
40     arg=find(t==T);
41     disp([num2str(T), 's处: ', '浮子垂荡位移', num2str(float_y(arg), '%.4f'), ' 浮子垂荡速度',
        num2str(float_dy(arg), '%.4f'),' 浮子角位移', num2str(float_a(arg), '%.4f'),'
        浮子角速度', num2str(float_da(arg), '%.4f')]);
42 end

```

43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88

```
function dudt = odefunc2(t, u)
dudt = zeros(10, 1);

%题目常量
m=2433;%kg 振子质量
M=4866;%kg 浮子质量
k1=80000;%N/m 弹簧刚度
rho=1025;%kg/m³
r0=0.5;%m 弹簧原长
S = pi*1;%m²
g=9.8;%m/s²
R=0.5;%m 振子半径
l=0.5;%m 振子高度
rho0=m/(pi*R²*l);%kg/m³
k3=250000;%N/m 扭转弹簧刚度
eta=8890.7;% Nm 静水恢复力矩系数
Ic=7526.111262;%kg*m²
yc=2.207925157;%m 浮子质心到圆锥尖端的距离

%第三问常量
gamma1=683.4558;%Ns/m 垂荡兴波阻力系数
gamma2=654.3383;%Nms 纵摇兴波阻尼系数
M_ = 1028.876;%kg 垂荡附加质量
k2=10000;%Ns/m 直线阻尼器的阻尼系数
k4=1000;%Ns/m 旋转阻尼器阻尼系数
f=3640;%N 垂荡激励力振幅
L=1690;%Nm 纵摇激励力矩振幅
I_ =7001.914;%kg*m²
omega=1.7152;%1/s 入射波浪频率

V0=(m+M)/(rho); %静态吃水体积
Ff=rho*g*(V0+S*u(3)+(2.8-yc+u(3))*(1-cos(u(7)))*pi/cos(u(7)));

dudt(1)=u(2);
t2=k1/(M+M_)*(r0-u(5))*sin(u(9))-k2/(M+M_)*u(6)*sin(u(9))-gamma1*u(2);
dudt(2)=t2;
dudt(3) = u(4);
t4=M*g/(M+M_)+k1/(M+M_)*(r0-u(5))*cos(u(9))-k2/(M+M_)*u(6)*cos(u(9))-Ff/(M+M_)-gamma1/(M+M_)*u(4)-f/(M+M_)*cos(u(7));
dudt(4) = t4;
dudt(7)=u(8);
dudt(8)=L*cos(omega*t)/(Ic+I_)-k3/(Ic+I_)*(u(7)+u(9))-k4*(u(8)+u(10))/(Ic+I_)-eta*u(7)/(Ic+I_)-gamma2*u(8)/(Ic+I_);
dudt(5)=u(6);
dudt(6) =
    u(10)²*(u(5))+k1/m*(r0-u(5))+(t2-(yc-0.8)*dudt(8)*cos(u(7)))*sin(u(9))+(t4-(yc-0.8)*dudt(8)*sin(u(7)))*cos(u(7));
dudt(9)=u(10);
```

```

89 dudt(10)=1/(...
90     rho0*pi*R^4*1/4+pi*rho0*R^2*1^3/3+pi*rho0*R^2*1^2*u(5)+pi*rho0*R^2*1*u(5)^2 ...
91 )*(...
92     -u(6)*u(10)*(pi*rho0*R^2*1^2+2*pi*rho0*R^2*1*u(5))-k3*(u(7)+u(9))-k4*(u(8)+u(10))+m*g*(u(5))*sin(u(9))+m
93     ...
94 );
95 end

```

```

1  问题三仿真代码
2
3  %此代码用于生成第三问仿真动画，运行即可观看
4
5  r1=0.2019575;
6  omega=1.7152;%1/s 入射波浪频率
7
8  sol=ode15s(@odefunc2, [0, 500], [0; 0; 0; 0; 0; r1; 0; 0; 0; 0; 0]);
9  t = 2*pi*40/omega; %计算 40 个周期的时间
10 t = 0:0.05:t; %生成待求时刻
11 u = deval(sol, t); %求解
12
13 x=u(3, :);
14 y=u(1, :);
15 r=u(5, :);
16 alpha=u(7, :);
17 beta=u(9, :);
18 % plot(t, u(5, :));
19 % return
20
21 line1X=[0, 0, 0, 0, 0];line1Y=[0, 0, 0, 0, 0];
22 line1=plot(line1X, line1Y, 'linewidth',2);
23 hold on;
24 line2X=[0, 0];line2Y=[0, 0];
25 line2=plot(line2X, line2Y, 'linewidth',2);
26 hold on;
27 line3X=[0, 0, 0];line3Y=[0, 0, 0];
28 line3=plot(line3X, line3Y, 'linewidth',2);
29 line4=plot([-5,5], [0.6, 0.6]);
30 hold on;
31 line5X=[0, 0, 0, 0, 0];line5Y=[0, 0, 0, 0, 0];
32 line5=plot(line5X, line5Y, 'linewidth',2);
33 hold on;
34 % P1X=0;P1Y=0;
35 % P1=scatter(P1X, P1Y,'filled');
36 P2X=0;P2Y=0;
37 P2=scatter(P2X, P2Y, 'filled');
38 % axis([-3,3,-3,3]);

```

```

39 axis equal;
40 yc=2.207925157; %m 浮子质心到圆锥尖端的距离
41 for i=1:length(t)
42     line1X(1)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))-cos(alpha(i));
43     line1X(2)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))+cos(alpha(i));
44     line1X(3)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))+cos(alpha(i))+3*sin(alpha(i));
45     line1X(4)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))-cos(alpha(i))+3*sin(alpha(i));
46     line1X(5)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))-cos(alpha(i));
47     line1Y(1)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+sin(alpha(i));
48     line1Y(2)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))-sin(alpha(i));
49     line1Y(3)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))-sin(alpha(i))+3*cos(alpha(i));
50     line1Y(4)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+sin(alpha(i))+3*cos(alpha(i));
51     line1Y(5)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+sin(alpha(i));
52     set(line1, 'XData', line1X, 'YData', line1Y);
53     line2X(1)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i));
54     line2X(2)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))+2.8*sin(-beta(i));
55     line2Y(1)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i));
56     line2Y(2)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+2.8*cos(-beta(i));
57     set(line2, 'XData', line2X, 'YData', line2Y);
58     line3X(1)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))-cos(alpha(i));
59     line3X(2)=y(i)-yc*sin(alpha(i));
60     line3X(3)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))+cos(alpha(i));
61     line3Y(1)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+sin(alpha(i));
62     line3Y(2)=-x(i)-yc*cos(alpha(i));
63     line3Y(3)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))-sin(alpha(i));
64     set(line3, 'XData', line3X, 'YData', line3Y);
65     line5X(1)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))+(r(i))*sin(-beta(i))-0.5*cos(beta(i));
66     line5X(2)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))+(r(i))*sin(-beta(i))+0.5*cos(beta(i));
67     line5X(3)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))+(r(i))*sin(-beta(i))+0.5*cos(beta(i))-0.5*sin(beta(i));
68     line5X(4)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))+(r(i))*sin(-beta(i))-0.5*cos(beta(i))-0.5*sin(beta(i));
69     line5X(5)=y(i)-(yc-0.8)*sin(alpha(i))+(r(i))*sin(-beta(i))-0.5*cos(beta(i));
70     line5Y(1)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+(r(i))*cos(-beta(i))-0.5*sin(beta(i));
71     line5Y(2)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+(r(i))*cos(-beta(i))+0.5*sin(beta(i));
72     line5Y(3)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+(r(i))*cos(-beta(i))+0.5*sin(beta(i))+0.5*cos(beta(i));
73     line5Y(4)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+(r(i))*cos(-beta(i))-0.5*sin(beta(i))+0.5*cos(beta(i));
74     line5Y(5)=-x(i)-(yc-0.8)*cos(alpha(i))+(r(i))*cos(-beta(i))-0.5*sin(beta(i));
75     set(line5, 'XData', line5X, 'YData', line5Y);
76     P2X=y(i);
77     P2Y=-x(i);
78     set(P2, 'XData', P2X, 'YData', P2Y);
79     drawnow;
80     if mod(i, 40)==1
81         saveas(gcf, ['3/_', num2str(i), '.png']);
82     end
83 end
84
85 function dudt = odefunc2(t, u)

```



```

86 dudt = zeros(10, 1);
87
88 %题目常量
89 m=2433;%kg 振子质量
90 M=4866;%kg 浮子质量
91 k1=80000;%N/m 弹簧刚度
92 rho=1025;%kg/m³
93 r0=0.5;%m 弹簧原长
94 S = pi*1;%m²
95 g=9.8;%m/s²
96 R=0.5;%m 振子半径
97 l=0.5;%m 振子高度
98 rho0=m/(pi*0.5^3);%kg/m³
99 k3=250000;%N/m 扭转弹簧刚度
100 eta=8890.7;% Nm 静水恢复力矩系数
101 Ic=7526.111262;%kg*m²
102 yc=2.207925157;%m 浮子质心到圆锥尖端的距离
103
104 %第三问常量
105 gamma1=683.4558;%Ns/m 垂荡兴波阻力系数
106 gamma2=654.3383;%Nms 纵摇兴波阻尼系数
107 M_ = 1028.876;%kg 垂荡附加质量
108 k2=10000;%Ns/m 直线阻尼器的阻尼系数
109 k4=1000;%Ns/m 旋转阻尼器阻尼系数
110 f=3640;%N 垂荡激励力振幅
111 L=1690;%Nm 纵摇激励力矩振幅
112 I_ =7001.914;%kg*m²
113 omega=1.7152;%1/s 入射波浪频率
114
115 V0=(m+M)/(rho); %静态吃水体积
116 Ff=rho*g*(V0+S*u(3)+(2.8-yc+u(3))*(1-cos(u(7)))*pi/cos(u(7)));
117
118 dudt(1)=u(2);
119 t2=k1/(M+M_)*(r0-u(5))*sin(u(9))-k2/(M+M_)*u(6)*sin(u(9))-gamma1*u(2);
120 dudt(2)=t2;
121 dudt(3) = u(4);
122 t4=M*g/(M+M_)+k1/(M+M_)*(r0-u(5))*cos(u(9))-k2/(M+M_)*u(6)*cos(u(9))-Ff/(M+M_)-gamma1/(M+M_)*u(4)-f/(M+M_)*cos(u(7));
123 dudt(4) = t4;
124 dudt(7)=u(8);
125 dudt(8)=L*cos(omega*t)/(Ic+I_)-k3/(Ic+I_)*(u(7)+u(9))-k4*(u(8)+u(10))/(Ic+I_)-eta*u(7)/(Ic+I_)-gamma2*u(8)/(Ic+I_);
126 dudt(5)=u(6);
127 dudt(6) =
    u(10)^2*(u(5))+k1/m*(r0-u(5))+(t2-(yc-0.8)*dudt(8)*cos(u(7)))*sin(u(9))+(t4-(yc-0.8)*dudt(8)*sin(u(7)))*cos(u(7));
128 dudt(9)=u(10);
129 dudt(10)=1/(...
130 rho0*pi*R^4*1/4+pi*rho0*R^2*1^3/3+pi*rho0*R^2*1^2*u(5)+pi*rho0*R^2*1*u(5)^2 ...
131 )*(...)

```

```

132     -u(6)*u(10)*(pi*rho0*R^2*l^2+2*pi*rho0*R^2*l*u(5))-k3*(u(7)+u(9))-k4*(u(8)+u(10))+m*g*(u(5))*sin(u(9))+m
133     ...
134 );
135 end

```

```

1
2 问题四主要代码
3
4 %此代码用于生成第四问 surf 图像
5
6 clc;clear;
7
8 X=zeros(100, 100);
9 Y=zeros(100, 100);
10 Z=zeros(100, 100);
11 for i=1:100
12     tic
13     for j=1:100
14         X(i, j)=1000*i;
15         Y(i, j)=1000*j;
16         P=ques4_power(1000*i, 1000*j);
17         Z(i, j)=P;
18     end
19     toc
20 end
21 surf(X, Y, Z);
22 hold on
23 grid on
24 shading flat
25 ax=gca;
26 ax.Color=[1,1,1];
27 ax.XColor=[1,1,1].*.3;
28 ax.YColor=[1,1,1].*.3;
29 ax.LineWidth=1.5;
30 ax.GridLineStyle='--';
31 xlabel('阻尼系数/N\cdots m^{-1}');
32 ylabel('幂指数');
33 zlabel('功率/W');
34
35 \begin{lstlisting}
36 问题四计算代码
37
38 function dudt=ques4_ode(t, u, A, B)
39 %t-> 时间自变量,u-> 待求变量,A-> 传入直线阻尼器系数,B-> 传入旋转阻尼器系数
40

```

```

41 dudt = zeros(10, 1);
42
43 %题目常量
44 m=2433;%kg 振子质量
45 M=4866;%kg 浮子质量
46 k1=80000;%N/m 弹簧刚度
47 rho=1025;%kg/m³
48 r0=0.5;%m 弹簧原长
49 S = pi*1;%m²
50 g=9.8;%m/s²
51 R=0.5;%m 振子半径
52 l=0.5;%m 振子高度
53 rho0=m/(pi*0.5^3);%kg/m³
54 k3=250000;%N/m 扭转弹簧刚度
55 eta=8890.7;% Nm 静水恢复力矩系数
56 Ic=7526.111262;%kg*m²
57 yc=2.207925157;%m 浮子质心到圆锥尖端的距离
58
59 %第三问常量
60 gamma1=528.5018;%Ns/m 垂荡兴波阻力系数
61 gamma2=1655.909;%Nms 纵摇兴波阻尼系数
62 M_ = 1091.099;%kg 垂荡附加质量
63 k2=A;%Ns/m 直线阻尼器的阻尼系数
64 k4=B;%Ns/m 旋转阻尼器阻尼系数
65 f=1760;%N 垂荡激励力振幅
66 L=2140;%Nm 纵摇激励力矩振幅
67 I_ =7142.493;%kg*m²
68 omega=1.9806;%1/s 入射波浪频率
69
70 V0=(m+M)/(rho); %静态吃水体积
71 Ff=rho*g*(V0+S*u(3)+(2.8-yc+u(3))*(1-cos(u(7)))*pi/cos(u(7)));
72
73 dudt(1)=u(2);
74 t2=k1/(M+M_)*(r0-u(5))*sin(u(9))-k2/(M+M_)*u(6)*sin(u(9))-gamma1*u(2);
75 dudt(2)=t2;
76 dudt(3) = u(4);
77 t4=M*g/(M+M_)+k1/(M+M_)*(r0-u(5))*cos(u(9))-k2/(M+M_)*u(6)*cos(u(9))-Ff/(M+M_)-gamma1/(M+M_)*u(4)-f/(M+M_)*cos(u(7));
78 dudt(4) = t4;
79 dudt(7)=u(8);
80 dudt(8)=L*cos(omega*t)/(Ic+I_)-k3/(Ic+I_)*(u(7)+u(9))-k4*(u(8)+u(10))/(Ic+I_)-eta*u(7)/(Ic+I_)-gamma2*u(8)/(Ic+I_);
81 dudt(5)=u(6);
82 dudt(6) =
    u(10)^2*(u(5))+k1/m*(r0-u(5))+(t2-(yc-0.8)*dudt(8)*cos(u(7)))*sin(u(9))+(t4-(yc-0.8)*dudt(8)*sin(u(7)))*cos(u(7));
83 dudt(9)=u(10);
84 dudt(10)=1/(...
85 rho0*pi*R^4*1/4+pi*rho0*R^2*1^3/3+pi*rho0*R^2*1^2*u(5)+pi*rho0*R^2*1*u(5)^2 ...
86 )*(...)

```

```

87         -u(6)*u(10)*(pi*rho0*R^2*l^2+2*pi*rho0*R^2*l*u(5))-k3*(u(7)+u(9))-k4*(u(8)+u(10))+m*g*(u(5))*sin(u(9))+m
88         ...
89     );
90 end

```

1 问题四功率计算代码

```

2
3 function P=ques4_power(A, B)
4     %使用高密度采样近似计算功率
5
6     omega=1.9806;%1/s 入射波浪频率
7     last=20*2*pi/omega;%20 个周期来计算功率
8     r1=0.2019575;
9     sol=ode15s(@(t, u) ques4_ode(t, u, A, B), [0, 400], [0; 0; 0; 0; r1; 0; 0; 0; 0; 0]);
10    t=300:0.01:300+last;
11    u=deval(sol, t);
12    arg_min=1;
13    arg_max=length(t);
14    v1=u(6, arg_min:arg_max-1);
15    v2=u(6, arg_min+1:arg_max);
16    v3=u(8, arg_min:arg_max-1)+u(10, arg_min:arg_max-1);
17    v4=u(8, arg_min+1:arg_max)+u(10, arg_min+1:arg_max);
18    t1=t(arg_min:arg_max-1);
19    t2=t(arg_min+1:arg_max);
20
21    avg_v1=(v2+v1)./2;%相对速度
22    avg_v2=(v4+v3)./2;%相对角速度
23    delta_t=t2-t1;
24
25    W=sum(A.*avg_v1.^2.*delta_t)+sum(B.*avg_v2.^2.*delta_t);
26    P=W/(t(arg_max)-t(arg_min));
27 end

```

1 问题四优化代码

```

2
3 %差分进化算法求解第四问
4
5 clc;clear;
6 %DE 差分进化算法
7 %超参数设置
8 num = 50; %向量数
9 len = 2; %向量长度
10 epoch = 100;%迭代次数
11 max_vector = [100000 100000]; %向量最大范围
12 min_vector = [0 0]; %向量最小范围

```

```

13 F=0.8; %变异算子
14 CR=0.8; %交叉算子
15
16 %向量在规定范围内随机初始化
17 vector_set=rand(num, len);
18 for i=1:len
19     vector_set(:, i) = vector_set(:, i)*(max_vector(i)-min_vector(i))+min_vector(i);
20 end
21 for e =1:epoch
22     tic
23     for n=1:num
24         sample=randperm(num); %模拟无放回抽样
25         r1=sample(1);r2=sample(2);r3=sample(3);
26         v=vector_set(r1, :)+F*(vector_set(r2, :)-vector_set(r3, :));
27         u = zeros(1, len);
28         for i=1:len %矫正越界值
29             if v(i)>max_vector(i)
30                 v(i)=max_vector(i);
31             end
32             if v(i)<min_vector(i)
33                 v(i)=min_vector(i);
34             end
35             p = rand();
36             if p<CR
37                 u(i)=v(i);
38             else
39                 u(i)=vector_set(n, i);
40             end
41         end
42
43         if ques4_power(u(1), u(2))>ques4_power(vector_set(n, 1), vector_set(n, 2))%更新操作
44             vector_set(n, :)=u;
45         end
46     end
47     toc
48     max=0;
49     max_ind=0;
50     for i=1:num
51         k = ques4_power(vector_set(i, 1), vector_set(i, 2));
52         if k>max
53             max=k;
54             max_ind=i;
55         end
56     end
57     max
58     vector_set(max_ind, 1)
59     vector_set(max_ind, 2)

```

```
60 end
61
62 max=0;
63 max_ind=0;
64 for i=1:num
65     k = ques4_power(vector_set(i, 1), vector_set(i, 2));
66     if k>max
67         max=k;
68         max_ind=i;
69     end
70 end
71 max
72 vector_set(max_ind, 1)
73 vector_set(max_ind, 2)
```