

# 系泊系统的设计

熊锦程 周骏宇 田展源

2022.8.17

## 摘要

近浅海观测网传输节点由浮标钢管、钢桶、重物球、锚链和海底锚组成，为了使其正常工作，节点的漂浮形态需要满足一些规定，比如装有通讯设备的钢桶夹角小于  $5^\circ$ ，为了使节点能在不同海深和海流海风速度下正常工作，我们做了以下工作。

首先，我们基于锁链模型对节点进行受力分析，并将整个系统受力用力矢量三角形表示出来，接着我们运用三角形中的几何关系，在力矢量三角形中用力矢量表达出了各锚链、钢管的朝向，然后根据海洋深度约束方程求解出了自由形态下的节点形态，最后我们检测与水平夹角为负的链条，并对其使用时间复杂度为对数级的迭代算法，逐步放平负数夹角的链条并将其剔除考虑，得出最终解，并将其运用在  $12\text{m/s}$  海风和  $24\text{m/s}$  的海风条件下，得到对应的浮标吃水深度分别为  $0.683\text{m}$  和  $0.697\text{m}$ 。

其次，为了得到  $36\text{m/s}$  高速海风下对重物球的要求，我们首先绘制了不同重物球质量下的钢桶倾斜角度和锚链底端与水平夹角，观察到其单调递减趋势和大致满去条件的初值后，我们设置初始质量增量的步长，通过不断提高重物球的质量，迭代求解出了满足钢桶的倾斜角度不超过  $5^\circ$  且锚链底端的水平夹角不超过  $16^\circ$  的最小重物球质量—— $2237\text{kg}$ 。

最终，在将海底流纳入考虑后，我们计算出了海底流对重物球和不同倾角的钢管的力。由于海流对钢管的力受钢管倾角影响，而钢管倾角又受海流力影响，因此我们通过受力平衡和力矩平衡方程，建立了各钢管下端拉力对上端拉力的表达式，明确浮标处的边界条件（初始拉力值）后，由上至下逐步计算各钢管拉力，并用首节中的方法计算出了钢管的朝向。我们也因此能够计算节点在任意速度和方向的海面风、海底流影响下的三维形态。然后根据此模型和题目所给的外部条件，我们通过在一定范围内均匀采样，提出了数万个不同重物球质量、锚链类型和锚链长度的组合，并在此区域内寻找能使浮标吃水深度和节点游动范围尽可能小的 Pareto 最优解，在所得到的 Pareto 前沿中选取节点工作状态最好的组合，作为我们的系泊系统的优化策略。

**关键字：**系泊系统，锁链模型，力矢量三角形，变长搜索法，Pareto 最优解

# 1 问题背景与重述

## 1.1 问题背景

为了让近浅海观测网能顺利发挥作用，需要依靠沉在海底的锚固定整个系统，使其保持相对静止的位置，因此，和锚相连的锚链末尾必须和水平海底面保持较小夹角（小于  $16^\circ$ ）。此外，水声通讯系统也需要在小倾角的测量钢桶中才能正常工作。综上，讨论不同外界条件下（如不同海流和海风速度中）应该如何保障近浅海观测网节点的运行条件是很有必要的。

## 1.2 问题的提出

问题 1：试分别给出在 12m/s 和 24m/s 海面风下，具有 1200kg 重物球、22.05m 型锚链的观测网节点在 18m 海深下的各项形态参数。

问题 2：在问题 1 的假设下，试计算在 36m/s 海面风下观测网节点的各项形态参数，并给出在此条件下该如何选择重物球重量才能使得节点正常工作。

问题 3：在一片已知海深变化范围、最大海面风和海水流速度的海域，试计算不同情况下的观测网结点形态参数。

# 2 问题的分析与假设

1. 为了使分析更有普遍性，本团队仅对平衡状态下的节点形态进行分析。
2. 由于密度较高，本团队假设锚链的浮力忽略不计，且不受海流影响。
3. 所有链条均视作质量均匀分布的刚体。
4. 假设重物球是纯铁构成的完美球体，密度为  $7.9 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 。
5. 海面风仅影响节点海平面以上的部分。
6. 重力加速度  $g=9.8 \text{ N/Kg}$ 。

# 3 符号说明

符号	意义	单位
$m_i$	第 i 段锚链质量	kg
$l_i$	第 i 段锚链长度	m
$P_i$	第 i 段锚链所受浮力	N
$\theta_i$	第 i 段锚链与水平面的夹角	°
$m_b$	重物球质量	kg
$V_w$	海面风速度	m/s
$V_s$	海底流速度	m/s

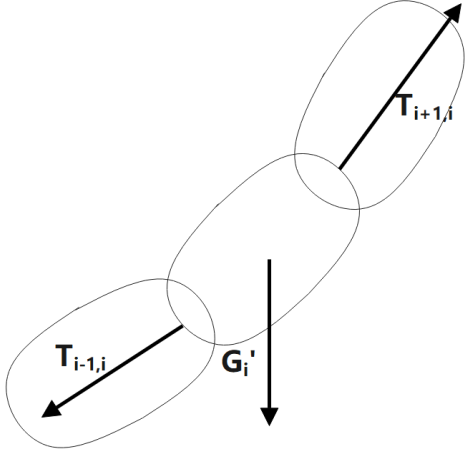


图 1: 非首尾单节链条

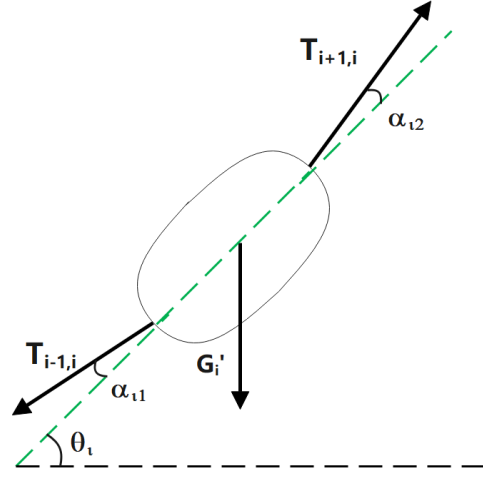


图 2: 单节链条受力示意

## 4 节点形态建模

近浅海观测网节点系统由锚、锚链、钢桶、重物球和钢管五部分组成，其形态数据（如钢桶和钢管的倾斜角、锚链曲线、浮标入水深度和游动区域）受到系统自身和外部多种力的影响，因此，需要对节点各系统进行缜密的受力分析，并结合海洋深度带来的几何约束，才能准确求解出节点的形态。

### 4.1 锁链模型

为了方便后续讨论，我们将整个节点系统划分为锚链段（包含锚与锚链）、钢桶段（包含钢桶和重物球）和钢管段（包含钢管和浮标）三段分别进行受力分析。不妨假设锚链段含  $n$  节链条，钢桶段含一节链条（钢桶本身），钢管段含 4 节链条，共计  $n+5$  节链条。

同时，为了简化受力分析图中各链条段的浮力，我们引入等效重力  $G'$  的概念，将各节的重力和所受浮力的合力用等效重力表示，即  $G'_i = G_i + P_i$ 。值得注意的是，本节点系统酷似一条悬挂线，但与之不同的是，本系统的三个部分质量分布不均，且各系统是由小范围内的刚性线段拼接而成，不能简单拟合合成悬挂线进行讨论。但是，我们发现将三个部分均视作离散悬挂线后，其受力分析方式应当是类似的，因此，我们提出了基于几何矢量分解的锁链式力学方程。

对于三部分中从下往上数第  $i$  段（ $i \neq 1, n+5$ ）刚性段来说，其受到的力如图 1 和图 2 所示：

其中， $G'$  为第  $i$  段链条的等效重力，它是重力和浮力的合力： $G'_i = m_i g - P_i$ ， $T_{i-1,i}$  和  $T_{i+1,i}$  分别为第  $i-1$  段链条对第  $i$  段链条和第  $i+1$  段链条对第  $i$  段链条的拉力， $\alpha_{i1}$  和  $\alpha_{i2}$  分别为两拉力和锁链节朝向（即其中轴线）的夹角， $\theta_i$  为锁链节朝向与水平方向的夹角。

已知各链条均处于平衡状态，将各链条视作刚体后，用刚体的受力平衡等式  $\vec{T}_{i-1,i} + \vec{T}_{i+1,i} + \vec{G} = 0$  和力矩平衡等式  $|\vec{T}_{i-1,i}| \cdot \sin \alpha_{i1} = |\vec{T}_{i+1,i}| \cdot \sin \alpha_{i2}$  联立，可得如下方程：

$$\begin{cases} \vec{T}_{i-1,i} + \vec{T}_{i+1,i} + \vec{G} = 0 \\ |\vec{T}_{i-1,i}| \cdot \sin \alpha_{i1} = |\vec{T}_{i+1,i}| \cdot \sin \alpha_{i2} \end{cases}$$

接着我们将受力平衡关系式用矢量三角形直观表示如图 3，由于第  $i-1$  段链条对第  $i$  段链条的力和第  $i$  段对第  $i-1$  段的力为反作用力，大小相等而方向相反，直观表示即第  $i$  段链条的力矢量三角形可以和第  $i-1$  段的  $\Delta$  无缝拼接。唯一一个特例是钢管与第  $n$  节锚链之间的拉力，这是因为两

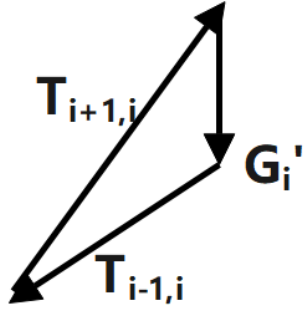


图 3: 非首尾单节链条

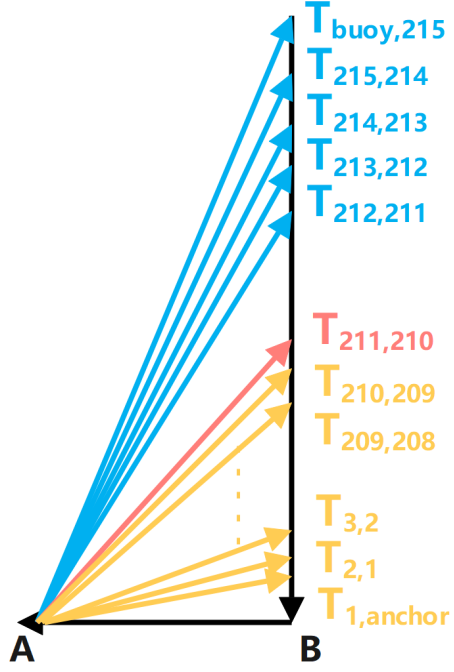


图 4: 单节链条受力示意

节链条结合点处存在重物球重力，同理，我们用一个矢量三角形表示此类力的关系，最后，我们将  $n+5$  个  $\Delta$  拼接后可得图 4 所示的  $\Delta ABT_{buoy,n+5}$ 。

我们按照之前分的锚链段（包含锚与锚链）、钢桶段（包含钢桶和重物球）和钢管段（包含钢管和浮标）将图中拉力分别用黄色、红色和蓝色表示，图中  $\overrightarrow{T_{buoy,n+5}}$  代表浮标对第 1 段链条（即首个钢管）的拉力， $\overrightarrow{T_{anchor,1}}$  代表海底第 1 段链条对锚的拉力。图中  $\Delta AT_{n,n+1}T_{n+1,n}$  即代表“重物球段”。

通过对整个系泊系统的分析不难得出  $\overrightarrow{AB}$  即为海面风对节点系统产生的力，而  $\overrightarrow{BT_{buoy,n+5}}$  即整个系统所受浮力。由图 3 的矢量三角形又可知  $\overrightarrow{T_{i-1,i}T_{i,i+1}}$  代表第  $i$  段链条的等效重力。而  $\overrightarrow{T_{1,anchor}B}$  较为特殊，代表海底锚对整个系统施加的向下的力。

至此，所有链条间作用力均可以用浮标提供浮力表示，不过我们没有求解这些力的必要，因此不在此列出等式。

## 4.2 海深度几何约束

仅分析各链条间的拉力并不足以求解各链条形态，如图 5 所示，蓝色虚线代表第  $i$  段链条朝向，而绿色虚线代表第  $i+1$  段链条朝向。

使用我们在 4.1 节中提到的力矩平衡等式即可建立拉力和各节链条朝向的关系，同样，我们在之前建立的矢量三角中将此类关系表达出来，如图 6 所示。图中，我们将  $AT_{i-1,i}$  反向延长一倍距离到  $A'$ ，并连接  $A'T_{i+1,i}$ ，由力矩平衡等式易得  $A'T_{i+1,i}$  即为第  $i$  节链条的朝向，其与水平方向的夹角  $\theta_i$  可由下式得：

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{BB' + BT_{i-1} + T_{i+1}T_{i-1}}{A'B'}\right) = \arctan\left(\frac{BT_{i-1} + 0.5T_{i+1}T_{i-1}}{AB}\right)$$

式中， $AB$  长度代表风力大小  $F_w$ ，其可由  $F_w = 0.625 * S_w v_w^2$  计算，式中  $S$  代表法向受力面积， $T_{i+1}T_{i-1}$  代表第  $i$  段链条等效重力  $G' = m_i g - P_i$ ， $T_{i-1}B$  代表第 1 到  $i-1$  节全部链条等效重力的和，由

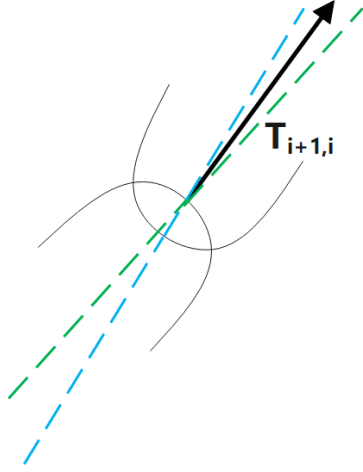


图 5: 单节链条受力和朝向的关系

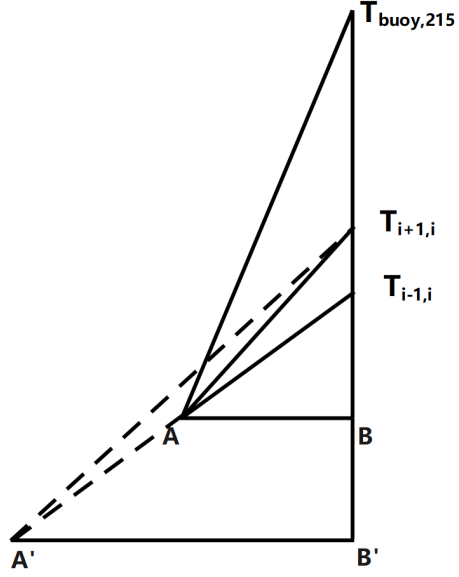


图 6: 链条朝向的几何表示

于海底锚的拉力未知，此式须用  $P - \sum_{k=i}^{n+5} G'_k$  替代计算，式中，P 为浮标提供的总浮力。经过此番替代，我们即可用已知力计算任意一段链条朝向与水平方向的夹角  $\theta_i$ ：

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{P - \sum_{k=i}^{n+5} G'_k + 0.5G'_i}{F_w}\right)$$

值得注意的是，锚链如果过长，其在水底的部分极大有可能沉底，此时链条的  $\theta$  为 0，而不可能小于 0，由此可以得到关于  $\theta$  的一个约束：

$$\theta_i \geq 0$$

上式并不能保证关于  $\theta$  的这一约束，其解可能为负值，因而选择优化为下式：

$$\theta_i = \frac{\left| \arctan\left(\frac{P - \sum_{k=i}^{n+5} G'_k + 0.5G'_i}{F_w}\right) \right| + \arctan\left(\frac{P - \sum_{k=i}^{n+5} G'_k + 0.5G'_i}{F_w}\right)}{2}$$

接着，算得平衡时系泊系统的高度  $H_s$ ：

$$H_s = \sum_{i=1}^{n+5} l_i \sin(\theta_i)$$

同时，根据浮力公式，浮标没入水中的深度  $H_b$  有：

$$H_b = \frac{P}{\rho_s g S}$$

式中， $\rho_s$  为海水密度，S 为浮标底面积。同时海面风施加的力  $F_w$  可由  $F_w = 0.625 * S_w v_w^2 = 0.625 * (h_c - H_b) * d v_w^2$  计算得，式中  $h_c$  和 d 分别为浮标的高和直径。最后，系泊系统的高度和浮标没入水中的深度之和应与海水深度  $D_s$  一致，根据此条件即可构建关于未知数 P（浮标提供浮力）的唯一方程：

$$D_s = H_s + H_b$$

即可求解整个节点系统的自由式形态，但值得注意的是，情况特殊时，锚链段中部分链条朝向与水平夹角会是负数，这与我们一开始的假设相悖，此时仅需将所有 m 条负数夹角的链条段放平（即剔

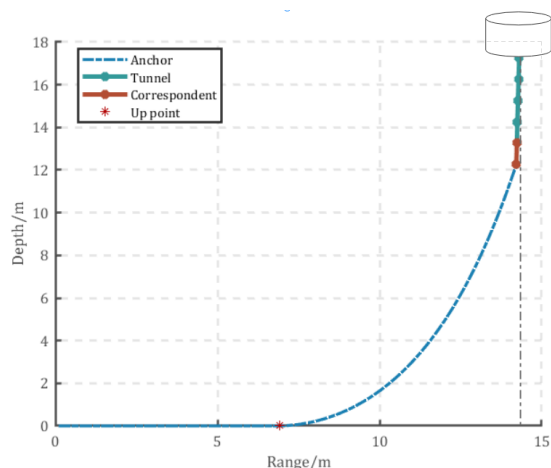


图 7: 问题 1 中观测节点形态

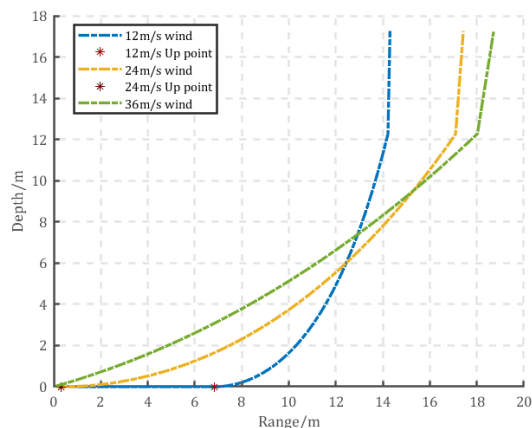


图 8: 不同风速下节点形态

风速	钢桶倾角	钢管 1 倾角	钢管 2 倾角	钢管 3 倾角	钢管 4 倾角	游动范围	吃水深度
12m/s	1.165°	1.182°	1.174°	1.166°	1.158°	14.648m	0.683m
24m/s	4.431°	4.494°	4.465°	4.436°	4.407°	17.772m	0.697m

除考虑)，重新求解剩余  $n-m$  条在新条件下的状态，重复上述过程即可迭代求解到没有负数夹角的临界值，由于浮标下降链条长带来的浮力远大于夹角为负数的链条段的重力，本方法的收敛速度应当指数级别的，远快于 matlab 自带的迭代求解函数（实测结果  $m$  的变化为：42，17，5，1,0）。

### 4.3 各形态求解结果

代入问题 1 的条件：锚链段数  $n = 22.05m/105mm = 210$ 、海水深度  $D_s = 18m$ 、风速  $v_w = 12m/s$  以及各段“链条”的质量和长度，及可求解出图 7 所示结果。图中我们用三种颜色线段分别表示锚链段、钢桶段和钢管段，并用红星表示首个离开海底的锚链的位置（准确数值为第 65 节锚链处），而灰色虚线代表节点的游动的最远处（14.648m）。

同理，我们可以解得 24m/s 的节点形态，并将三个风速下的节点形态进行比较，比较图如图 8 所示，具体结果如下表所示：

## 5 重物球适宜质量的分析

利用已有的模型和求解方法，当风速为 36m/s 时，可以解出钢桶和各钢管倾角以及游动范围如下表所示。

此时不满足题中所给的约束条件，需要调节重物球的质量。

由于重物球的存在，会重新调节系统的质量分布，导致系统其他部分姿态的改变。采用上节的分析方法，在图 4 中， $T_{n+1,n}T_{n,n+1}$  的长度代表的即是重物球质量，而钢桶和锚链倾角由图 6 中的几何算法也可以得到，根据上节的算法，我们可以绘制出  $m_b - \theta_n$  和  $m_b - \theta_1$  的关系曲线，如图 9 所示。

钢桶倾角	钢管 1 倾角	钢管 2 倾角	钢管 3 倾角	钢管 4 倾角	游动范围
9.186°	9.308°	9.251°	9.196°	9.141°	18.866m

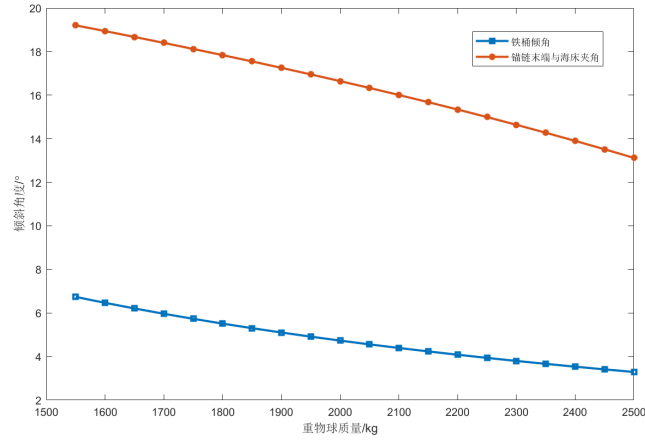


图 9: 不同重物球质量下角度的改变

可以明显观察到，当重物球质量增大时，会导致钢桶倾角以及锚链末端夹角逐渐减小，并且可以观察到重物球质量在 2200kg 附近时锚链末端夹角达到  $16^\circ$  的临界值，重物球质量在 1900kg 附近时钢桶倾角达到  $5^\circ$  的临界值。为了搜索出同时满足两个约束条件的质量临界值，我们采用变步长搜索算法，从 2000kg 开始进行搜索，程序流程图如图 10 所示。

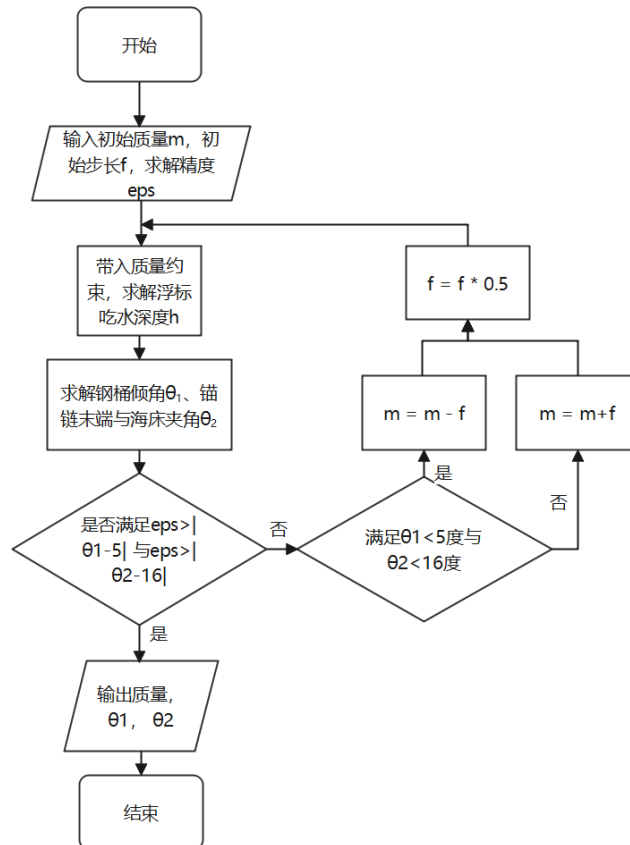


图 10: 临界点搜索流程图

在设置初值为 2100kg，阈值  $\epsilon = 0.001$ ，最大搜索次数为 50 的情况下，搜索出来结果临界值为

2237kg，此情况下系统各数据为如下表。

重物球质量	钢桶倾角	锚链末端倾角	游动范围
2237kg	4.387°	15.996°	18.533m

根据表中数据可知，当重物球质量为 2237kg 时，钢桶倾角为 4.387°，满足钢桶对角度的要求，钢桶内设备可以正常工作。同时锚链末端与海床夹角为 15.996°，船锚恰好不会被提起。

同时考虑到浮标浸没深度会与重物球的质量相关，依据 1 我们在第一问中所建立的模型，解出重物球质量在 1500kg 2500kg 时，浮标浸没深度的变化趋势，如图 11 所示。

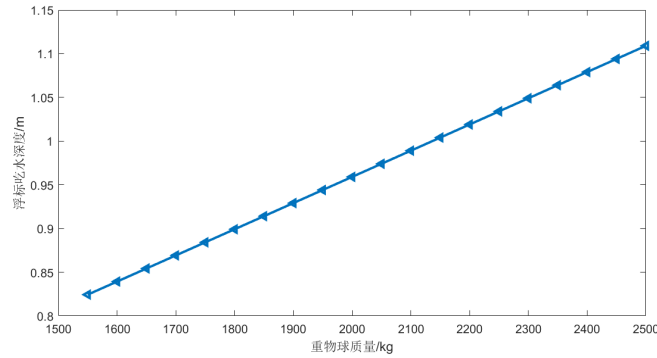


图 11: 临界点搜索流程图

可知浸没深度与重物球质量成正相关，因此重物球质量不易过重，不利于浮标吃水深度尽量小这一目标。因此我们建议重物球质量略重于 2237kg，为了保证设备稳定性，可在此基础上适当增重。

## 6 考虑海底流后的优化方案

### 6.1 不同方向海流力计算公式

假设水流方向沿  $y$  轴，竖直方向为  $z$  轴，根据近海水流力可通过  $F = 374Sv^2$  计算，其中  $S$  为物体在与海流速度垂直的平面的投影面积，不妨假设海流与法平面夹角为  $\alpha$ ，如图 12 所示，则其投影面积由一个矩形和一个椭圆组成，其面积为  $S = ldcos\alpha + \pi r^2 sin\alpha$ 。



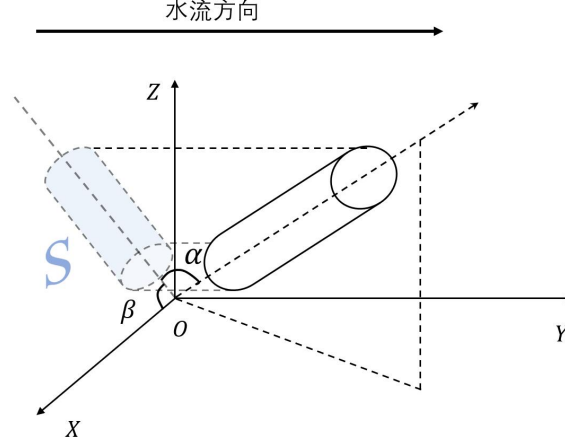


图 12: 极坐标表示及水流作用面积投影

## 6.2 修正后的模型

由于只有钢管和钢桶区域会受海水流的影响（全局编号  $n+1$   $n+5$ ），我们仅需考虑五段钢管和一个重物球在海水流下的受力情况。首先，我们以海流方向为  $y$  轴、竖直方向为  $z$  轴建立右手坐标系。

就重物球而言，其在与海流速度垂直的平面的投影面积是固定的，因此受到海水流的力为  $374v^2 * \pi r^2 = 1.140 * m_b v^2$ 。

就钢管和钢桶而言，其在与海流速度垂直的平面的投影面积会随自身方向扭转而改变，我们将钢管一端与坐标系原点重合，设钢管中轴线的长度矢量为  $\vec{L}$ ，两端拉力分别为  $\vec{F}_i$ 、 $\vec{F}_{i+1}$ ，如图 13 所示。

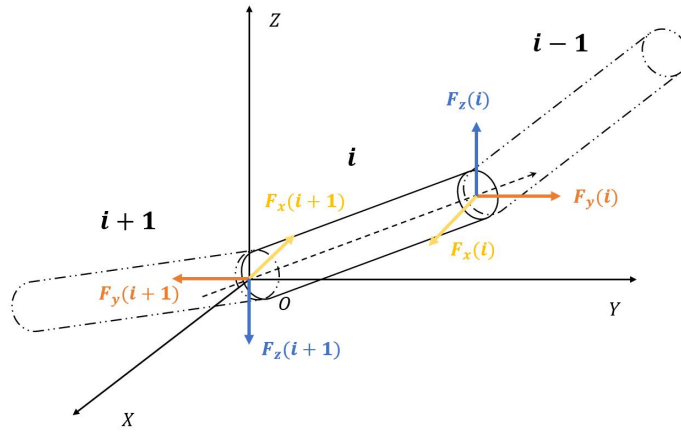


图 13: 钢管在海流中的受力

则钢管在与海流速度垂直的平面的投影面积  $S_p$  计算公式可由下式得：

$$S_p = \sqrt{1 - \left( \frac{\vec{L} \cdot \vec{e}_y}{|\vec{L}|} \right)^2} * d + \pi r^2 * \frac{|\vec{L} \cdot \vec{e}_y|}{|\vec{L}|}$$

由此可列出钢管的受力平衡方程，如下式：

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{i+1} + \vec{G}' + \vec{e}_y * 374S_p * v^2 = 0$$

同第四大节，由于等效重力和海流力均过钢管质心，钢管的力矩平衡方程可表示为：

$$\vec{F}_i \times \frac{\vec{L}}{2} + \vec{F}_{i+1} \times \frac{\vec{L}}{2} = 0$$

最后我们再加入钢管长度的限制  $|\vec{L}| = 1(\text{m})$ ，即可得到  $\vec{F}_{i+1}$  和  $\vec{L}$  为未知量的方程组：

$$\begin{cases} \vec{F}_i + \vec{F}_{i+1} + \vec{G}' + \vec{e}_y * 374S_p * v^2 = 0 \\ \vec{F}_i \times \frac{\vec{L}}{2} + \vec{F}_{i+1} \times \frac{\vec{L}}{2} = 0 \\ |\vec{L}| = 1 \end{cases}$$

其中  $S_p = \sqrt{1 - \left( \frac{\vec{L} \cdot \vec{e}_y}{|\vec{L}|} \right)^2} * d + \pi r^2 * \frac{\vec{L} \cdot \vec{e}_y}{|\vec{L}|}$ 。

至此，我们得到了从第  $n+1$  段钢管拉力推导第  $n$  段钢管拉力的公式，而对于最上方的钢管拉力，我们对浮标进行受力分析，如图 14。

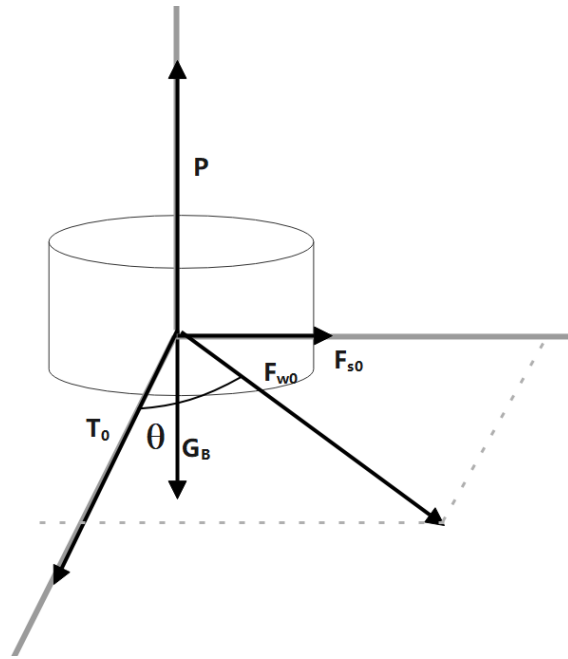


图 14: 浮标受力分析

则有以下式：

$$\vec{T}_0 = -(\vec{G}_B + \vec{F}_{w0} + \vec{F}_{s0} + \vec{P})$$

解出  $\vec{T}_0$  后，即可逐个解得各个链条间的拉力，进而用第四节的方法解得个链条的朝向。以 18m 海深中 1200kg 重物球和 210 节 2 型锚链的节点系统为例，我们绘制了其在方向相互垂直的 12m/s 海面风、1.5m/s 海底流，如下图所示：

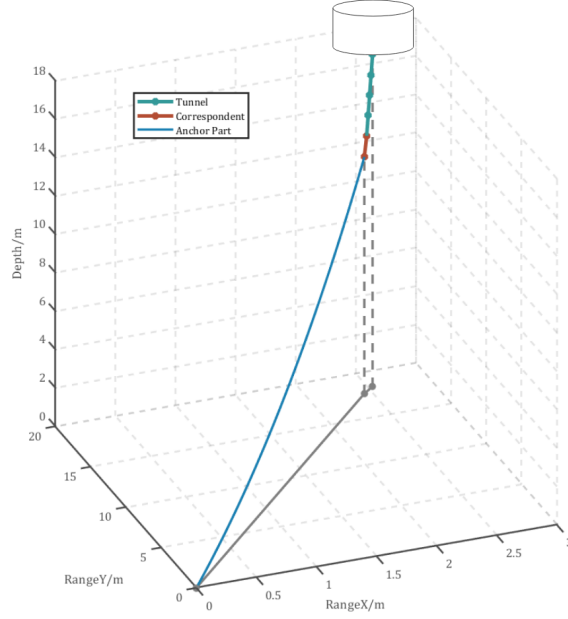


图 15: 海流中的节点形态

图中，我们用三种颜色线段分别表示锚链段、钢桶段和钢管段。从我们做的灰色虚线辅助线可以看出，虽然很小，但受海流影响的钢管段和钢桶段存在三维上的偏移。

### 6.3 最佳设计方案

要想使存在海底流的系泊系统能够正常工作，需要确定锚链的型号  $T$ （对应的长度和密度为  $l_T, \rho_T$ ）、段数  $n$  和重物球的质量  $m_b$ ，使得浮标的吃水深度  $H_b$  和游动区域  $R$  尽可能小，而为了让水声通讯系统正常工作，需要使钢桶的倾斜角度  $\theta_n$  小于  $5^\circ$ ，同时为了防止锚被拖走导致节点丢失，要求锚链末端与锚的链接处的切线方向与海床的夹角  $\theta_1$  不超过  $16^\circ$ 。为了让浮标在该海域中任意情况下都可以正常工作，需要考虑最坏的海深  $D_s$ 、海流速度  $v_s$  和海风速度  $v_w$  情况，因此我们的优化目标如下：

$$\begin{aligned} & \min_{T, n, m_b} H_b \\ & \min_{T, n, m_b} R \\ & s.t. \begin{cases} \theta_n(T, n, m_b) \leq 5^\circ \\ \theta_1(T, n, m_b) \leq 16^\circ \\ T \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ m_b + n * l_T * \rho_T + \sum G \leq P_{max} \end{cases} \end{aligned}$$

式中， $\sum G$  代表钢管、钢桶和浮标的总质量， $P_{max}$  代表浮标能提供的最大浮力 0。

对于此类多目标优化问题，由于  $\theta_n(T, n, m_b)$  和  $\theta_1(T, n, m_b)$  函数均只有数值解而无符号解，无法用一般多优化算法求解。因此我们采用遍历的方法，在  $T \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 、 $m_b \in [1000, 5000]$  和  $n \in [60, 320]$  的区域内计算各个方案对应的浮标的吃水深度  $H_b$  和游动区域  $R$ ，我们首先采用大的步长确定大致的解的区域，而后在  $T \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 、 $m_b \in [3900, 4300]$  和  $n \in [65, 85]$  中进一步搜索，然后我们运用 Pareto 最优解的思想，将所有  $(H_b, R)$  散点绘制在二维平面内，并按照 **Theorem6.1** 寻找支配解。

**Theorem 6.1.** Denote the outcomes of two solutions as  $s_i = (f_1^i \dots f_k^i)$  and  $s_j = (f_1^j \dots f_k^j)$ ,  $s_i$  dominates  $s_j$  if and only if  $f_1^j \leq f_1^i \dots f_g^j \leq f_g^i \dots, f_k^j \leq f_k^i$  (for minimization objectives).

在本优化环境中寻找到的所有支配解集  $\{(H_b^1, R^1), \dots (H_b^k, R^k)\}$  构成 Pareto 近似前沿。由 **Theorem 6.1** 不难得知，Pareto 近似前沿上的解在两个优化目标——浮标的吃水深度  $H_b$  和游动区域  $R$  上会同时优于其他解，因此我们将搜索范围缩小在了 Pareto 近似前沿上。下图是我们在 12m/s 最小风速下试验的结果，我们挑选了五个支配解，并将其用图像表示，如图 16。

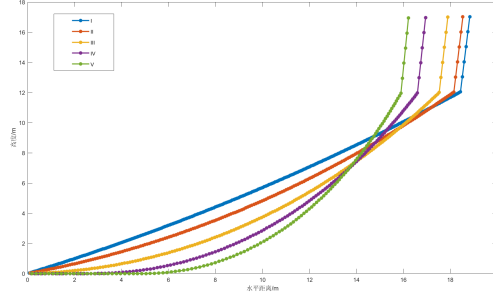


图 16: 支配解示例

五个支配解的具体数值如下：

吃水深度	钢桶倾角	游动范围	锚链末端倾角
0.977m	4.523°	18.828m	25.507°
0.989m	4.387°	18.533m	15.996°
1.009m	4.183°	17.892m	1.8223°
1.034m	3.935°	16.945m	0.000°
1.063m	3.670°	16.216m	0.000°

然后，为了使浮标的水声通讯系统能够以最好的状态工作，我们在 Pareto 近似前沿中选取了钢桶的倾斜角度  $\theta_n$  最小的解，作为支配解中的最优解。最后我们将同样的思路运用于 20m 海深、36m/s 风速和 1.5m/s 的极限环境中，得到我们的 Pareto 最优解，也即我们设计的系泊系统——T 为五号锚链， $m_g = 3450\text{kg}$ ， $n=65$ ，此条件下的吃水深度  $H_b$  为 1.468m，游动区域  $R$  为 16.433m， $\theta_n$  小于 9.155°。

## 附件

第一问算形态:

```
1 clearvars
2 %g=9.8N/kg
3 wind=12; %风速
4 syms F n; %设浮标提供力为 F/N
5 H_waterEat=F/(1.025*1000*pi()*9.8) %吃水深度 H/m
6 F_wind=0.625*wind^2*(2*(2-H_waterEat))
7 F_last=F-(22.05*7+1200*6.875/7.9+100+40+1000)*9.8+(0.025^2*pi()*
    *4+0.15^2*pi())*1.025*1000*9.8
8 f1=symsum(0.105*sin(atan((F_last+(n-0.5)*0.735*9.8)/F_wind)),1,210);
9 f2=sin(atan((F_last+210*0.735*9.8+600*9.8)/F_wind));
10 f3=symsum(sin(atan((F_last+210*0.735*9.8+1200*6.875/7.9*9.8+(n-0.5)
    *10*9.8)/F_wind)),1,4);
11 f4=-18+H_waterEat;
12 f=f1+f2+f3+f4;
13 func = matlabFunction(f,'Vars',F);
14 fsolve(func,20000)
15
16 H_waterEat=subs(H_waterEat,F,ans)
17 F_last=subs(F_last,F,ans)
18 F_wind=subs(F_wind,F,ans)
19 theta=[]
20 for i=1:210
21     theta(i)=double(atan((F_last+(i-0.5)*0.735*9.8)/F_wind));
22 end
23 m=sum(theta<0)
24 H_waterEat=F/(1.025*1000*pi()*9.8) %吃水深度 H/m
25 F_wind=0.625*wind^2*(2*(2-H_waterEat))
26 F_last=F-(0.105*7*(210-m)+1200*6.875/7.9+100+40+1000)*9.8+(0.025^2*
    pi()*4+0.15^2*pi())*1.025*1000*9.8
27 f1=symsum(0.105*sin(atan((F_last+(n-0.5)*0.735*9.8)/F_wind)),1,210-m
    );
28 f2=sin(atan((F_last+(210-m)*0.735*9.8+600*9.8)/F_wind));
29 f3=symsum(sin(atan((F_last+(210-m)*0.735*9.8+1200*6.875/7.9*9.8+(n
    -0.5)*10*9.8)/F_wind)),1,4);
30 f4=-18+H_waterEat;
31 f=f1+f2+f3+f4;
32 func = matlabFunction(f,'Vars',F);
33 fsolve(func,20000)
34 temp=ans/(1.025*1000*pi()*9.8)
```

```

35
36 H_waterEat=subs(H_waterEat,F,ans)
37 F_last=subs(F_last,F,ans)
38 F_wind=subs(F_wind,F,ans)
39 theta=[]
40 for i=1:210
41     theta(i)=double(atan((F_last+(i-0.5)*0.735*9.8)/F_wind));
42 end
43 m2=sum(theta<0)
44 H_waterEat=F/(1.025*1000*pi()*9.8) %吃水深度 H/m
45 F_wind=0.625*wind^2*(2*(2-H_waterEat))
46 F_last=F-(0.105*7*(210-m-m2)+1200*6.875/7.9+100+40+1000)
47     *9.8+(0.025^2*pi()*4+0.15^2*pi())*1.025*1000*9.8
48 f1=symsum(0.105*sin(atan((F_last+(n-0.5)*0.735*9.8)/F_wind)),1,210-m
49     -m2);
50 f2=sin(atan((F_last+(210-m-m2)*0.735*9.8+600*9.8)/F_wind));
51 f3=symsum(sin(atan((F_last+(210-m-m2)*0.735*9.8+1200*6.875/7.9*9.8+(
52     n-0.5)*10*9.8)/F_wind)),1,4);
53 f4=-18+H_waterEat;
54 f=f1+f2+f3+f4;
55 func = matlabFunction(f,'Vars',F);
56 fsolve(func,20000)
57 temp=ans/(1.025*1000*pi()*9.8)
58
59 H_waterEat=subs(H_waterEat,F,ans)
60 F_last=subs(F_last,F,ans)
61 F_wind=subs(F_wind,F,ans)
62 theta=[]
63 for i=1:210
64     theta(i)=double(atan((F_last+(i-0.5)*0.735*9.8)/F_wind));
65 end
66 m3=sum(theta<0)
67 H_waterEat=F/(1.025*1000*pi()*9.8) %吃水深度 H/m
68 F_wind=0.625*wind^2*(2*(2-H_waterEat))
69 F_last=F-(0.105*7*(210-m-m2-m3)+1200*6.875/7.9+100+40+1000)
70     *9.8+(0.025^2*pi()*4+0.15^2*pi())*1.025*1000*9.8
71 f1=symsum(0.105*sin(atan((F_last+(n-0.5)*0.735*9.8)/F_wind)),1,210-m
72     -m2-m3);
73 f2=sin(atan((F_last+(210-m-m2-m3)*0.735*9.8+600*9.8)/F_wind));
74 f3=symsum(sin(atan((F_last+(210-m-m2-m3)
75     *0.735*9.8+1200*6.875/7.9*9.8+(n-0.5)*10*9.8)/F_wind)),1,4);
76 f4=-18+H_waterEat;
77 f=f1+f2+f3+f4;

```

```

72 func = matlabFunction(f, 'Vars', F);
73 fsolve(func, 20000)
74 temp=ans/(1.025*1000*pi()*9.8)
75
76 H_waterEat=subs(H_waterEat, F, ans)
77 F_last=subs(F_last, F, ans)
78 F_wind=subs(F_wind, F, ans)
79 theta=[]
80 for i=1:210
81     theta(i)=double(atan((F_last+(i-0.5)*0.735*9.8)/F_wind));
82 end
83 m4=sum(theta<0)
84 H_waterEat=F/(1.025*1000*pi()*9.8) %吃水深度 H/m
85 F_wind=0.625*wind^2*(2*(2-H_waterEat))
86 F_last=F-(0.105*7*(210-m-m2-m3-m4)+1200*6.875/7.9+100+40+1000)
      *9.8+(0.025^2*pi()*4+0.15^2*pi())*1.025*1000*9.8
87 f1=symsum(0.105*sin(atan((F_last+(n-0.5)*0.735*9.8)/F_wind)), 1, 210-m
      -m2-m3-m4);
88 f2=sin(atan((F_last+(210-m-m2-m3-m4)*0.735*9.8+600*9.8)/F_wind));
89 f3=symsum(sin(atan((F_last+(210-m-m2-m3-m4)
      *0.735*9.8+1200*6.875/7.9*9.8+(n-0.5)*10*9.8)/F_wind)), 1, 4);
90 f4=-18+H_waterEat;
91 f=f1+f2+f3+f4;
92 func = matlabFunction(f, 'Vars', F);
93 fsolve(func, 20000)
94 temp=ans/(1.025*1000*pi()*9.8)

```

第二问：

```

1  clc; clear;
2
3  %定义参数
4  N = 216; %在水中总节段数量
5  h1 = 2; %浮标总高度
6  Rho = 1.025*10^3; %rho 值
7  g = 9.8; %重力加速度
8  M0 = 1000; %浮标质量
9  H = 18; %水面高度
10
11 %初始化质量
12 M = sym('M', [N, 1]);
13 for i = 1:N
14     if i ~= 6

```

```

15         M(i) = 7*105/1000;
16     end
17 end
18 for i = 1:4
19     M(i) = 10;
20 end
21 M(5) = 100;
22
23 %初始化体积
24 V = sym('V', [N, 1]);
25 for i = 1:N
26     V(i) = M(i)/7860;
27 end
28 for i = 1:4
29     V(i) = 1*(25/1000)^2*pi;
30 end
31 V(5) = 1*(0.15)^2*pi;
32
33 %初始化长度
34 D = ones(N, 1).*(105/1000);
35 for i = 1:5
36     D(i) = 1;
37 end
38 D(6) = 0;
39
40 syms h v;
41 Fy = sym('Fy', [1, N]);
42 Theta = sym('Theta', [1, N]);
43 F = 0.625*(h1-h)*2*v^2;
44 for i = 1:N
45     Fy(i) = Rho*g*pi*h-g*M0-g*sum(M(1:i))+Rho*g*(sum(V(1:i)));
46     Theta(i) = abs(atan((2*Fy(i)+g*M(i))/(2*F)))*0.5+atan((2*Fy(i)+g
        *M(i))/(2*F))*0.5;
47 end
48
49 %构造函数 f 求解零点，解出吃水深度 h
50 f = h-H;%初始化待求方程
51 for i = 1:N
52     f = f+D(i)*sin(Theta(i));
53 end
54
55 v = 36;
56 foot = 100;

```



```

57 k = 2000;
58 for i = 1:50
59     M6 = k
60     f1 = matlabFunction(subs(f));
61     h = fzero(f1, [0, 1.9]);
62     t1 = 90-rad2deg(subs(Theta(5)));
63     t2 = rad2deg(subs(Theta(N)));
64
65     if t1<5&& t2<16
66         k = k - foot;
67     else
68         k = k + foot;
69     end
70     disp(vpa(t1));
71     disp(vpa(t2));
72     foot = foot*0.7;
73     clear M6 h;
74 end

```

问题 3:

```

1 function [Alpha,Beta,alpha,beta,gama1,gama2,l,length,deep,f_x,f_y,H]
   = func_Q3_final(g,v_wind,v_water,theta,m,option,length,deep)
2 %h 是吃水深度, g 是重力加速度, v_wind v_water theta x
3 %m 是重物质量, option 是锚链形状, length 是锚链长度 (个)
4 switch option
5     case "1"
6         l = 7.8*1e-3;
7         rou = 3.2;
8     case "2"
9         l = 105*1e-3;
10        rou = 7;
11    case "3"
12        l = 120*1e-3;
13        rou = 12.5;
14    case "4"
15        l = 150*1e-3;
16        rou = 19.5;
17    case "5"
18        l = 180*1e-3;
19        rou = 28.12;
20 end
21

```

```

22 syms h;
23
24 %h = 0.749;
25 %g = 9.8; v_wind = 24; m = 1200; v_water = 1.5; theta = 0; length = 210;
26 P_1 = 1.025*1e3*g*pi*h;
27 F_wind = 0.625*2*(2-h)*v_wind^2; F_water = 374*2*h*v_water^2;
28 F_wind_x = F_wind*cos(theta); F_wind_y = F_wind*sin(theta);
29 N_1 = 4; N_2 = length;
30 G_1 = 1000*g; G_2 = 10*g; G_3 = 100*g+m*g; G_4 = rou*g*l;
31 P_2 = 1.025*1e3*g*pi*(25*1e-3)^2; P_3 = 1.025*1e3*g*pi*(15*1e-2)
    ^2+1.025*1e3*g*(m/(7.86*1e3)); P_4 = 0;
32
33
34 %F_x    F_y
35 %P_1    P_2    P_3    P_4
36 %G_1    G_2    G_3    G_4
37 %F_wind    F_water
38 %N_1    N_2
39
40 %F_x = zeros(N_1 + 1, 1);
41 %F_y = zeros(N_1 + 1, 1);
42 %F_z = zeros(N_1 + 1, 1);
43 %f_x = zeros(N_2 + 1, 1);
44 %f_y = zeros(N_2 + 1, 1);
45 %f_z = zeros(N_2 + 1, 1);
46 H = 0;
47
48 %分析浮标
49
50 F_x(1) = F_wind_x;
51 F_y(1) = F_water+F_wind_y;
52 F_z(1) = P_1 - G_1;
53
54 %迭代分析钢管
55
56 for i = 1:N_1
57     %syms x;
58     F_x(i+1) = F_x(i);
59     F_z(i+1) = F_z(i) + P_2 - G_2;
60     Beta(i) = atan((F_z(i)+(P_2-G_2)/2)/F_x(i));
61     %Alpha(i) =
        vpasolve((F_y(i)+(100*374*1*(50*1e-3)*v_water^2)/2)*cos(x)*sin(Beta(i)) ==
            sin(x)*(F_z(i)+(P_2-G_2)/2), x, 0.3);

```

```

62     Alpha(i) = atan((F_y(i)+(374*1*(50*1e-3)*v_water^2)/2)*sin(Beta(
        i))/(F_z(i)+(P_2-G_2)/2));
63     F_y(i+1) = F_y(i) + 374*1*cos(Alpha(i))*(50*1e-3)*v_water^2;
64     H = H+1*cos(Alpha(i))*sin(Beta(i));
65 end
66
67 %分析钢管与锚链连接处
68
69 f1 = F_x(N_1+1);
70 f2 = F_y(N_1+1);
71 f3 = F_z(N_1+1);
72 f4 = f1;
73 f6 = f3 - G_3 + P_3;
74 gama1 = atan((f3-(G_3-P_3)/2)/f1);
75 %gama2 = vpsolve((f2+(374*1*(30*1e-
        2)*v_water^2)/2)*cos(x)*sin(gama1) == sin(x)*(f3+(P_3-G_3)/2),x,0.3);
76 gama2 = atan((f2+(374*1*(30*1e-2)*v_water^2)/2)*sin(gama1)/(f3+(P_3-
        G_3)/2));
77 f5 = f2 + 374*1*cos(gama2)*(30*1e-2)*v_water^2;
78 H = H+1*cos(gama2)*sin(gama1);
79 f_x(1) = f4;
80 f_y(1) = f5;
81 f_z(1) = f6;
82
83 %分析锚链受力
84
85 for i = 1:N_2
86     %syms x;
87     f_x(i+1) = f_x(i);
88     f_y(i+1) = f_y(i);
89     f_z(i+1) = f_z(i) + P_4 - G_4;
90
91     beta(i) = atan((f_z(i)+(P_4-G_4)/2)/f_x(i));
92     %alpha(i) =
        vpsolve(f_y(i)*cos(x)*sin(beta(i)) == sin(x)*(f_z(i)+(P_2-G_2)/2),x,0.3);
93     alpha(i) = atan(f_y(i)*sin(beta(i))/(f_z(i)+(P_2-G_2)/2));
94     H = H+1*cos(alpha(i))*sin(beta(i));
95 end
96
97 H = H+h-deep;
98
99 end

```

第三问之绘制海流中的节点形态：

```

1 plot3(x(2:6),y(2:6),z(2:6),'-*','LineWidth',3,'Color',[0.2 0.6 0.6])
2 hold on
3 plot3(x(6:7),y(6:7),z(6:7),'-*','LineWidth',3,'Color',[0.7 0.3 0.2])
4 plot3(x(7:end),y(7:end),z(7:end),'-','LineWidth',2,'Color',[0.1 0.5
    0.7])
5 plot3([x(7),x(7)],[y(7),y(7)],[0,z(7)],'--','LineWidth',2,'Color
    ',[0.5 0.5 0.5])
6 plot3([x(2),x(2)],[y(2),y(2)],[0,z(2)],'--','LineWidth',2,'Color
    ',[0.5 0.5 0.5])
7 plot3([0,x(7),x(2)],[0,y(7),y(2)],[0,0,0],'-*','LineWidth',2,'Color
    ',[0.5 0.5 0.5])
8 hold on
9 axis square
10 grid on
11 ax=gca;
12 ax.Color=[1,1,1];
13 ax.XColor=[1,1,1].*.3;
14 ax.YColor=[1,1,1].*.3;
15 ax.ZColor=[1,1,1].*.3;
16 ax.LineWidth=1.5;
17 ax.FontName='cambria';
18 ax.GridLineStyle='--';
19 xlabel("RangeX/m")
20 ylabel("RangeY/m")
21 zlabel("Depth/m")
22 legend('Tunnel','Correspondent','Anchor Part')

```