

### Activité 3 : Structures algébriques

#### Exercice 1

On définit sur  $\mathbb{R}$  la loi  $*$  par :

$$x * y = xy - x - y + 2$$

1. Montrer que  $*$  est une loi de composition interne, associative et commutative.
2. Montrer que  $*$  admet un élément neutre que l'on déterminera.
3. En déduire l'ensemble des éléments inversibles de  $\mathbb{R}$  par rapport à  $*$ .

#### Exercice 2

On pose pour tous  $a$  et  $b$  dans  $I = ]1; +\infty[$ ,  $a * b = \sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} + 1$ .

1. Montrer que  $*$  est une loi de composition interne dans  $I$ .
2. Soit l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}_+^{+*}$  vers  $I$  par

$$f(x) = \sqrt{x + 1}.$$

- (a) Montrer que  $f$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}_+^{+*}, \times)$  dans  $(I, *)$ .
- (b) En déduire la structure de  $(I, *)$ .
- (c) Montrer que l'ensemble  $E = \{\sqrt{1 + 2^m} \mid m \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe de  $(I, *)$ .