COURS D'ALGÈBRE (676578585)

Docteur Cédric K. SOME

29 août 2022

Chapitre 1

Logique et mathématiques

Sommaire

1.1 Généralités

La différence entre les mathématiques et les sciences expérimentales c'est que la véracité d'une relation mathématique vient du fait qu'on la démontre à partir des règles du jeu que l'on s'est données tandis que celle d'une science expérimentale vient du fait que l'on la vérifie par une expérience. La logique est l'étude de la construction des propriétés et de leurs propriétés d'emploi ; les différents éléments de cette science sont à la base de tous les raisonnements matématiques. Les éléments qui établissent les règles du raisonnement correct, en excluant les processus psychologiques sont appelés « *calcul propositionnel* ». Le calcul propositionnel permet d'exprimer les termes, les propositions, les relations par des symboles simples, et de ramener les opérations logiques à des calculs s'effectuant selon des règles précises. Justifier une proposition c'est la rattacher à d'autres propositions déjà admises, c'est la déduire de ces propositions. Démontrer une proposition c'est rendre cette proposition claire (évidente) à autrui.

1.1.1 Variables propositionnelles et connecteurs logiques

Définition 1.1.1

- *On appelle proposition logique ou assertion tout énoncé ou un assemblage d'énoncé auquel on peut répondre par « **vrai** » ou « **faux** ».*
  On représente souvent les propositions par des lettres $A, B, \cdots, Z$.
  Ces lettres sont appelées des variables propositionnelles.
  On utilise les parenthèses pour séparer les propositions.
- *Un raisonnement est un procédé indirect de justification, soumis aux règles de la logique. On dit qu'une proposition mathématique est démontrée lorsqu'on montre qu'elle découle logiquement et nécessairement d'autres propositions déjà admises (ou démontrées).*
- *On appelle connecteur logique toute opération permettant de créer de nouvelle(s) proposition(s) à partir d'assertions existantes p et q.*
- *Une tautologie est une proposition qui est toujours vraie.*

Remarque 1.1.1 *On peut supprimer certaines parenthèses dans les expressions :*

(i) $\neg(A)$ *s'écrit* $\neg A$;

(ii) $((A) \vee (B)) \Longrightarrow (C)$ *s'écrit* $A \vee B \Longrightarrow C$;

(iii) $((A) \vee (B)) \wedge (C)$ *s'écrit* $(A \vee B) \wedge C$.

Remarque 1.1.2 *Soient P et Q deux propositions.*

(1) Ce n'est pas par ce que la proposition $P \Longrightarrow Q$ est vraie que la proposition Q est vraie.

*(2) La proposition « P **implique** Q » est aussi appelée comme suit :*
- ***« Si** P**, alors** Q **»** ;*
- ***« Pour** P**, il faut** Q **»** ;*
- ***«** Q **est une condition nécessaire pour** P **»** ;*
- ***«** P **est une condition suffisante pour** Q **»** ;*
- ***« non**P **ou** Q **»**.*

*(3) La proposition « P **est équivalente à** Q » est aussi désignée par l'une des propositions suivantes :*
- ***«** P **si, et seulement si** Q **»** ;*
- ***« Pour** P **il faut et il suffit** Q **»** ;*
- ***«** P **est une condition nécessaire et suffisante pour** Q **»** ;*
- ***«** P **implique** Q **et** Q **implique** P **»**.*

Exemple 1.1.1

Soient les propositions suivantes :
- *A : « le nombre x est nul »*
- *B : « le produit xy est nul » .*
  *La proposition A est une **condition suffisante** de la proposition B :*
  pour que le produit xy soit nul, il suffit que x le soit.
  *Cependant, la proposition B est une **condition nécessaire** de A :*

Table 1.1 – **Tableau de connecteurs logiques**

Connecteurs	**Notations**	**Lecture**	**Exemple**	**Valeur de vérité**
Négation	$\rceil$	**Non**	$\rceil P$ *"non P"*	l'assertion $\rceil p$ est vraie si p est fausse et est fausse si p est vraie
Disjonction	$\bigvee$	**ou**	$p \vee q$ *"p ou q"*	$p \vee q$ est vraie quand l'un au moins des deux assertions p, q est vraie
Conjonction	$\bigwedge$	**et**	$p \wedge q$ *"p et q"*	$p \wedge q$ est vraie quand les deux assertions p, q sont vraies à la fois
Implication	$\Longrightarrow$	**implique**	$p \Longrightarrow q$ *"p implique q"*	$p \Longrightarrow q$ est vraie quand p est fausse (le faux implique n'importe quoi) ou quand p, q sont vraies
Equivalence	$\Longleftrightarrow$	**équivaut**	$p \Longleftrightarrow q$ *"p équivaut à q"*	$p \Longleftrightarrow q$ est vraie si p, q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses

pour que x soit nul, il est nécessaire que le produit xy soit nul.
Mais B n'est pas une condition suffisante de A car la nullité du produit xy n'entraîne pas nécessairement celle de x.

Considérons les propositions suivantes :

- *A : cette chemise est en nylon ;*
- *B : elle est médiocre.*

Alors la conjonction et la disjonction des propositions A et B sont respectivement données par :

- *$A \wedge B$: cette chemise est en nylon et elle est médiocre ;*
- *$\neg A \vee \neg B$: cette chemise n'est pas en nylon ou elle n'est pas médiocre.*

1.1.2 Tableaux de vérité

Définition 1.1.2

- *Toute proposition est soit fausse (**F**), soit vraie (**V**) ; on parle dans ce cas de sa **valeur de vérité**.*
- *La valeur de vérité d'une proposition peut être assimilée à une application dont l'ensemble d'arrivée est $\{0, 1\}$. Sur $\{0, 1\}$, 0 représente le **faux** et 1 le **vrai**.*
  On introduit ainsi une loi binaire, notée $\perp$, qui représente l'un des connecteurs logiques cités dans la TABLE 1.1.
- *La définition d'une loi binaire peut être résumée en des tableaux indiquant la valeur de vérité de cette loi. Ces tableaux sont appelés **tableaux de vérité** ou **table de vérité** de la loi binaire.*
- *Deux assertions P et Q sont dites synonymes si et si seulement si elles ont le même tableau de vérité. On note $P \equiv Q$.*

Exemple 1.1.2 *Les tables de vérité des lois (connecteurs logiques)* $\neg, \wedge$ *et* $\vee$ *sont :*

TABLE 1.2 – **Table de vérité de la Négation**

P	$\neg P$
F	V
V	F

TABLE 1.3 – **Table de vérité de la conjonction**

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLE 1.4 – **Table de vérité de la disjonction**

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLE 1.5 – **Table de vérité de l'équivalence**

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque 1.1.3
S'il y a n variable(s) propositionnelle(s), il y a 2^n *lignes dans la table de vérité. Cela pose un problème lorsque l'on veut étudier beaucoup de variables.*

Exercice 1.1.1
Remplir le tableau de vérité suivant :

P	V	V	V	V	F	F	F	F
Q	V	V	F	F	V	V	F	F
R	V	F	V	F	V	F	V	F
$P \wedge Q$								
$P \vee Q$								
$\neg P$								
$\neg Q$								
$P \Longrightarrow Q$								
$Q \Longrightarrow P$								
$P \Longleftrightarrow Q$								
$R \vee (P \vee Q)$								
$\neg(P \wedge Q)$								
$\neg(P \vee Q)$								

Remarque 1.1.4
*La négation s'exprime parfois par un trait au dessus de la variable propositionnelle. Si A est une variable propositionnelle, l'expression $\bar{A}$ signifie la négation de la proposition A. $\bar{A}$ de lit **non A** ou **A bar**.*

Le tableau de vérité de l'Exercice 1.1.1, est une démonstration des résultats suivants :

Théorème 1.1.1 ***(De Morgan)***
Soient A et B deux propositions élémentaires. On a toujours :

$$\overline{(A \wedge B)} = \overline{A} \vee \overline{B} \quad et \quad \overline{(A \vee B)} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Théorème 1.1.2
Soient P, Q et R trois propositions.
- $\neg(\neg P) \iff P$.
- $P \wedge Q \iff Q \wedge P$.
- $P \vee Q \iff Q \vee P$.
- $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
- $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
- *Si* $(P \Longrightarrow Q)$ *et* $(Q \Longrightarrow R)$ *alors* $(P \Longrightarrow R)$.
- $(P \Longrightarrow Q) \iff (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$.
- $\neg(P \Longrightarrow Q) \iff (P \wedge \neg Q)$.

1.2 Calcul de Prédicats

1.2.1 Prédicats et quantificateurs

Définition 1.2.1
- *Un prédicat est un énoncé A contenant une ou plusieurs variables $x, y, \cdots$ qu'on peut remplacer par des éléments de tel ou tel ensemble, produisant ainsi des assertions valides $A(x, y, \cdots)$.*
- *Soit A un prédicat de variable x, l'ensemble E auquel appartient la variables x est appelé le référentiel du prédicat.*

Définition 1.2.2
- *Si pour un élément x du référentiel E d'un prédicat A , l'assertion $A(x)$ est vraie, on dit que x vérifie la propriété A, et on écrit simplement « $x \in E, A(x)$ » plutôt que « $x \in E, A(x)$ est vraie ».*
- ***Le quantificateur existentiel*** *:*
  le symbole « $\exists$ » est appelé quantificateur existentiel et se lit « il existe ».
  L'écriture « $\exists x \in E,\ A(x)$ » signifie que « il existe x appartenant à E, $A(x)$ est vraie ». L'assertion

  $$« \exists x \in E,\ A(x) »$$

  est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $A(x)$ est vraie.

– ***Le <u>quantificateur universel</u>*** *:*
*le symbole « $\forall$ » est appelé quantificateur universel et se lit « **quel que soit** » ou « **pour tout** ». On écrit « $\forall x \in E, A(x)$ » pour dire « quel que soit x appartenant à E, $A(x)$ est vraie ».*
L'assertion

$$\text{« } \forall x \in E, A(x) \text{ »}$$

est vraie lorsque les assertions $A(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

Exemple 1.2.1

1) Quantificateur d'existence :
- *« $\exists x \in \mathbb{R},\ x(x-1) < 0$ » est vraie (par exemple $x = \frac{2}{3}$ vérifie bien la propriété). « $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 - n > n$ » est vraie (il y a plein de choix, par exemple $n = 3$ convient, mais aussi $n = 10$ ou même $n = 100$, un seul suffit pour dire que l'assertion est vraie).*
- *« $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$ » est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).*

2) Quantificateur universel :
- *« $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \in [0, +\infty[$ » est une assertion vraie.*
- *« $\forall x \in [1, +\infty[,\ x^2 \geq 1$ » est une assertion vraie.*
- *« $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 1$ » est une assertion fausse car $0^2 = 0 < 1$.*
- *« $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est divisible par 2 » est vraie.*

1.2.2 Négation d'un quantificateur ou d'un connecteur logique

- La négation du quantificateur universel est le quantificateur d'existence et la négation du quantificateur d'existence est le quantificateur universel.
- La négation de « **et** » est « **ou** » et la négation de « **ou** » est « **et** ».

La négation de l'assertion «$\forall x \in E, A(x)$ » est l'assertion « $\exists x \in E, nonA(x)$ » .

et

La négation de l'assertion «$\exists x \in E, A(x)$ » est l'assertion « $\forall x \in E, nonA(x)$ » .

Remarque 1.2.1

Dans une assertion, on ne peut pas à priori modifier l'ordre des quantificateurs.
- *« $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ » signifie que « pour tout réel x, il existe un réel y tel que y soit plus grand ou égal à x ».*
  Cette assertion est vraie. Si l'on inverse les quantificateurs, on a :
  « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq y$ » qui signifie que « il existe un réel y tel que tout réel x soit plus petit que y » ; ce qui est faux.
- *La négation de « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 + z + 16 = 0)$ » est « $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 + z + 16 \neq 0$».*

1.3 Applications aux raisonnements mathématiques

Définition 1.3.1

- *Les postulats sont des propositions indémontrables que le mathématicien demande à son auditeur d'accorder.*
- *Un axiome est une exigence purement logique (une convention comme les codes de la route). Les axiomes sont de nos jours utilisés à la place des postulats.*
- *Un théorème est une proposition logique démontrable à partir des axiomes.*

1.3.1 Proposition du type $\forall x, P(x)$

Pour démontrer la proposition "$\forall x, P(x)$" il suffit de considérer un élément x quelconque et de vérifier que pour cet élément x, la propriété est vraie. On procède de la façon suivante

- on commence par l'expression **« Soit x »**,
- ensuite on fait une suite de raisonnements convainquant qui justifie que la propriété $P(x)$ est vraie ;
- On conclut par « **alors la propriété est vraie pour tout** x ».

1.3.2 Proposition du type $\exists x, P(x)$

Ce type de proposition est en général difficile à démontrer. Soit on dispose d'un argument général assurant l'existence d'un tel x, soit il faut déterminer précisément un tel élément x. Dans ce second cas, on commence par une analyse du problème. On suppose que l'on dispose d'un élément x vérifiant $P(x)$ puis à l'aide d'une suite de raisonnements, on détermine les valeurs possibles pour x. On prend une des valeurs de x qu'on a trouvées et on vérifie que $P(x)$ est vraie.

1.3.3 Proposition du type $\exists!\, x, P(x)$

$\exists!$ se lit « il existe et il est unique ». Pour faire une telle démonstration, on montre d'abord l'existence d'un tel élément x comme ci-dessus et ensuite son unicité en supposant qu'il existe un autre élément y tel que $P(y)$ soit vraie. On termine la démonstration en montrant que $x = y$.

1.3.4 Démonstration par un raisonnement direct

Pour démontrer la proposition « $P \Longrightarrow Q$ », on procède par un raisonnement direct :
on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 1.3.1 *Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.*

1.3.5 Démonstration par contraposée

Ce type de démonstration s'utilise pour les assertions de type « $P \Longrightarrow Q$ »
. Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

$$\boxed{\text{« } P \implies Q \text{ » est équivalente à « } \overline{Q} \implies \overline{P} \text{ ».}}$$

Donc $P \Longrightarrow Q$ n'est vraie que si $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ est vraie.
Ainsi, il suffit de prouver que l'implication $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ est vraie.

Exercice 1.3.1

1) Montrer que : n^2 *pair* $\Longrightarrow n$ *pair.*

2) Soient n *et* m *deux entiers naturels tels que* n *soit premier.*
Démontrer que si n *divise* m^2*, alors* n *divise* m*.*

1.3.6 Démonstration par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer « $P \Longrightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie.

Exemple 1.3.2

1. Montrer que si $\dfrac{a}{b+1} = \dfrac{b}{1+a}$ *alors alors* $a = b$*.*

2. Démontrer que $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel.*

1.3.7 Démonstration de l'équivalence entre deux propositions

Pour démontrer la proposition $P \Longleftrightarrow Q$, on utilise la double implique $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$. Cependant, on peut utiliser la démonstration par un raisonnement direct, par contraposée ou par l'absurde pour montrer chaque implication.

1.3.8 Démonstration par récurrence

Soient $A \subset \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier $n \in A$.
On souhaite démontrer la proposition « $\forall n \in A, P(n)$ ».
Soit n_0 le plus petit élément de A.
Pour démontrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout naturel $n \in A$, on procède en deux étapes :

(i) $P(n_0)$ est vraie ;

(ii) on suppose que $P(n)$ est vraie pour $n \geq n_0$ et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

(iii) On conclut en disant : « Alors, $(\forall n \in A, P(n))$ »

Exemple 1.3.3

1) Monter que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$*, pour tout entier naturel* n*.*

2) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n*,* $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$*.*

1.3.9 Démonstration par disjonction

Si l'on souhaite vérifier une assertion P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A.
C'est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

Exemple 1.3.4 *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$*.*

1.3.10 Démonstration par contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver x dans E tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de «$\forall x \in E, P(x)$» est «$\exists x \in E, \text{non}P(x)$».) Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion «$\forall x \in E, P(x)$».

Exemple 1.3.5
Montrer que l'assertion suivante est fausse «Tout entier positif est somme de trois carrés».