

Activité 3 : Structures algébriques

Exercice 1

On définit sur \mathbb{R} la loi $*$ par :

$$x * y = xy - x - y + 2$$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne, associative et commutative.
2. Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
3. En déduire l'ensemble des éléments inversibles de \mathbb{R} par rapport à $*$.

Exercice 2

On pose pour tous a et b dans $I =]1; +\infty[$, $a * b = \sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} + 1$.

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .
2. Soit l'application f définie de \mathbb{R}_+^{+*} vers I par

$$f(x) = \sqrt{x + 1}.$$

- (a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^{+*}, \times)$ dans $(I, *)$.
- (b) En déduire la structure de $(I, *)$.
- (c) Montrer que l'ensemble $E = \{\sqrt{1 + 2^m} | m \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(I, *)$.