COURS D'ALGÈBRE 1

Docteur Cédric K. SOME

29 août 2022

Chapitre 2

Ensembles et applications

Sommaire

2.1 Notions d'ensembles

Définition 2.1.1 *Un ensemble est une collection « d'objets » appelés* <u>*éléments*</u> *:*

$$\{0,1\}\ ;\ \{blanc, noir, rouge\}$$

Cette collection peut ne pas avoir d'ordre et chaque élément apparaît une seule fois dans la collection :

$$\{3;1;7\} = \{1;2;3;7\} = \{7;3;1;3;7;2\}$$

- *En particulier, l'ensemble ne contenant aucun élément est appelé ensemble vide, et est noté* $\emptyset$.
- *On note :*

$$\boxed{x \in E}$$

si x *est un élément de* E, *et on note*

$$\boxed{x \notin E}$$

dans le cas contraire.

Exemple 2.1.1 *Les ensembles des nombres sont :*

(1) l'ensemble des des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ et donné par $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \cdots \}$

(2) l'ensemble des des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$ et défini par $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.

(3) L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux qui est l'ensemble des nombres ui peuvent s'écrire sous la forme $a.10^p$, où $a, p \in \mathbb{Z}$.

(4) L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, qui est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un quotient de deux nombres relatifs.

(5) l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

(6) l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes qui l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

Remarque 2.1.1 *Un ensemble peut s'écrire de deux façons :*

- ***En extension*** *: on énumère ses éléments. On dit qu'on définit l'ensemble en extension. Par exemple : $\{3; 1; 7\}$.*
- ***En compréhension*** *: on se donne une propriété qui caractérise ses éléments. On dit qu'on définit l'ensemble en compréhension.*
  Par exemple :

$$\{x \in \mathbb{R} |\, |x-2| < 1\} \quad ; \quad \{z \in \mathbb{C} |\, z^5 = 1\} \quad ; \quad \{x \in \mathbb{R} |\, 2 \leq x \leq 5\} = [2; 5]$$

Définition 2.1.2 *Soit E un ensemble. On dit que E est fini lorsque E est vide ou E est non vide et il existe un entier naturel non nul n et une bijection définie de E sur $\{1, 2, \cdots, n\}$. Le réel n est appelé le cardinal de E. On le note $card(E)$.*

2.1.1 Inclusion, union, intersection, complémentaire

Définition 2.1.3 *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$, si tout élément de E est élément de F. Autrement dit :*

$$\forall x \in E, x \in F.$$

On dit aussi que E est une partie ou un sous-ensemble de F. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Propriété 2.1.1 *Soient E, F, G trois ensembles.*

- *On a toujours : $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$*
- *Si $E \subset F et F \subset G$, alors $E \subset G$.*
- *Si $E \subset F$ alors $card(E) \leq card(F)$.*
- *$E = F$ si, et seulement $E \subset F$ et $F \subset E$.*
- *Si $card(E) = n$ alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.*

Exemple 2.1.2 *Soit $E = \{1, 2, 3\}$.*
On a : $card(E) = 3$ donc $card(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$.
Plus précisément, $\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}\Big\}$.

Définition 2.1.4 *Soient E et F deux ensembles. On dit que F et E sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun :*

$$\forall x \in F, x \notin E \text{ et } \forall x \in E; x \notin F.$$

Remarque 2.1.2 *Attention à ne pas confondre disjoint et différent.*

Définition 2.1.5 *Soient E et F deux ensembles. On appelle intersection de E et F et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments communs à E et F :*

$$E \cap F = \{x |\ x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Remarque 2.1.3 *On a : $E \cap F \subset E$ et $E \subset F \subset F$.*

Définition 2.1.6 *On appelle réunion de E et F notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des deux ensembles E et F :*

$$E \cup F = \{x |\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

Remarque 2.1.4 *On a toujours : $E \cup E \cup F = F \cup E \cup F = E \cup F$.*

Proposition 2.1.1 *Soient A, B, C trois ensembles.*
- ***Commutativité*** *: $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.*
- ***Associativité*** *:*

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ et } A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- ***Distributivité*** *:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Définition 2.1.7 *Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $\mathcal{C}_E^A$ ou $E \setminus A$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :*

$$\mathcal{C}_E^A = \{x \in E |\ x \notin A\}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, $\mathcal{C}_E^A$ se note $\mathcal{C}_A$ ou $\bar{A}$ ou A^c.

Propriété 2.1.2 *Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. Alors :*
- *$\bar{\bar{A}} = A$; $\mathcal{C}_E^E = \emptyset$ et $\mathcal{C}_E^\emptyset = E$;*
- *$A \subset B$ si, et seulement si $\overline{B} \subset \bar{A}$;*
- *$A = B$ si, et seulement si $\bar{A} = \overline{B}$;*
- *$A \cap \mathcal{C}_E^A = \emptyset$ et $A \cup \mathcal{C}_E^A = E$.*

Proposition 2.1.2 ***(lois de Morgan)***
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On a :
- *$\mathcal{C}_E^{A \cap B} = \mathcal{C}_E^A \cup \mathcal{C}_E^B$*
- *$\mathcal{C}_E^{A \cup B} = \mathcal{C}_E^A \cap \mathcal{C}_E^B$*

Définition 2.1.8
Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On appelle partition de E, toute partie Q de $\mathcal{P}(E)$ constituée de parties non vides de E deux à deux disjointes et dont leur réunion est égale à E.

Exemple 2.1.3
Soit $E = \{1, 2, 3\}$.
On a : $\mathcal{P}(E) = \Bigg\{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}\Bigg\}$.
Donc $Q = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ est une partition de E.
De même, $P' = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ est une partition de E.

Définition 2.1.9
Soient A et B deux parties de E.

- *On appelle différence de A et B notée $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas des éléments de B :*

$$A \setminus B = \{x \in A \,|x \notin B\}$$

  On a :

$$A \setminus B = \mathcal{C}_A^{A\cap B} = A \cap \mathcal{C}_E^B.$$

- *On appelle <u>différence symétrique</u> de A et B, notée $A\Delta B$, l'ensemble des éléments appartenant uniquement à A ou à B :*

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Définition 2.1.10
On appelle <u>produit cartésien</u> de E et F et on note $E \times F$, l'ensemble des éléments (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y)|\, x \in E \quad \text{et} \quad y \in F\}$$

Chaque élément (x, y) de $E \times F$ est appelé un couple.
Soient (x, y) et (x', y') des éléments de $E \times F$. Alors :

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

En particulier si $E = F$ alors $E \times F = E \times E$ et $E \times E$ se note E^2.
Ainsi :

$$\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois } E} = E^n$$

2.2 Relations binaires

2.2.1 Définition

Définition 2.2.1
Soient E et F deux ensembles non vides.
On appelle relation de E vers F la donnée d'une partie G non vide de $E \times F$. Si $(x, y) \in G$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ (si la relation est notée $\mathcal{R}$).
G est appelé graphe de la relation.
Si $E = F$ on dit qu'on a une relation dans E.

Exemple 2.2.1
- *Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :*

$$A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \subset B.$$

- *Dans $\mathbb{N}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :*

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \text{ divise } y$$

2.2.2 Relation d'équivalence

Définition 2.2.2 *Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation dans E. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est :*
- *réflexive si et seulement si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$;*
- *symétrique si $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$;*
- *transitive lorsque $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$;*
- *antisymétrique : $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$.*

Exemple 2.2.2
- *Dans $\mathbb{R}$ la relation « inférieur ou égal ($\leq$) » est réflexive, transitive et antisymétrique.*
- *Dans $\mathbb{R}$ la relation « divise($|$) » est réflexive, transitive et antisymétrique.*
- *Dans $\mathbb{R}$ la relation « egal ($=$) » est réflexive, transitive et symétrique.*

Définition 2.2.3
Soit E un ensemble non vide.
- *Une relation d'équivalence sur E est une relation qui est réflexive, symétrique et transitive.*
- *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, x un élément de E. On appelle classe d'équivalence de x et on note $cl(x)$ ou $\bar{x}$ ou $\dot{x}$, l'ensemble des éléments y de E tels que $x\mathcal{R}y$:*

$$\dot{x} = \{y \in E |\, x\mathcal{R}y\}.$$

Exercice 2.2.1 *On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Longrightarrow 3$ divise $(x - y)$.*
1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 5.

Définition 2.2.4
Soit E un ensemble non vide.

- *Une relation d'ordre sur E est une relation qui est réflexive, antisymétrique et transitive.*
- *Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit ordonné. Les relations d'ordre sont souvent notées $\preceq$.*
- *Une relation d'ordre sur un ensemble E est dite totale si deux éléments quelconques de E sont comparables :*

$$\forall x, y \in E, x \preceq y \text{ ou } y \preceq x.$$

- *Une relation d'ordre qui n'est pas totale est dite partielle.*

Exemple 2.2.3 *Dans $\mathcal{P}(E)$, la relation « **inclusion** ($\subset$) » est partielle.*

Exercice 2.2.2
On définit sur $\mathbb{Z}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x$ divise y.
1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. L'ordre est-il total ?

Définition 2.2.5 ***(Elément maximal, élément minimal)***
Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $a \in E$. On dit que :
- *a est un élément maximal de E si : $\forall x \in E, a \preceq x \Longrightarrow a = x$.*
  Cela signifie que a n'est en relation qu'avec a lui-même.
- *a est un élément minimal de E si : $\forall x \in E, x \preceq a \Longrightarrow a = x$.*
  Donc aucun élément de E n'est en relation avec a si ce n'est a lui-même.

Définition 2.2.6 ***(Plus grand élément, plus petit élément)***
Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $a \in E$. On dit que :
- *a est le plus grand élément de E si : $\forall x \in E, x \preceq a$; c'est-à-dire tout élément de E est en relation avec a. On note $\max(E) = a$.*
- *a est le plus petit élément de E si : $\forall x \in E, a \preceq x$; autrement dit, a est en relation avec tout élément de E. On note $\min(E) = a$.*

Définition 2.2.7
Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E. Soit $a \in E$. On dit que :
- *a est un majorant de A si : $\forall x \in A, x \preceq a$.*
  Un ensemble A qui admet un majorant est dit majoré.
  *Le plus petit des majorant de A est appelé **borne supérieure** de A et on le note $\sup(A)$.*
- *a est un minorant de A si : $\forall x \in A, a \preceq x$.*
  *Le plus grand des minorants de A est appelé **borne inférieure** de A et est noté $\inf(A)$.*

Exercice 2.2.3
On munit $\mathbb{N}$ de la relation d'ordre $\preceq$ définie par : $x \preceq y \Longleftrightarrow x$ divise y. On pose :

$$A = \{4, 8, 16, 24\} \text{ et } B = \{3, 4, 12\}$$

1. A admet-il un plus grand élément, un plus petit élément, une borne inférieure, une borne supérieure ?
2. Répondre aux mêmes questions posées sur B.

2.3 Applications

Définition 2.3.1 *Soient E et F deux ensembles. Une application f de E vers F est une relation qui associe à tout élément de E, un unique élément y de F. On note :*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- *y est appelé image de x par f ;*
- *x est appelé antécédent de y par f ;*
- *E est appelé ensemble de départ ;*
- *F est appelé ensemble d'arrivée ;*
- *L'ensemble $G = \{(x, y) \in E \times F |\ y = f(x)\}$ est appelé graphe de f.*

L'ensemble des applications de E vers F se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

Définition 2.3.2 *Soient E et F deux ensembles et A une partie de E. On appelle application identité de E l'application*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

On appelle fonction indicatrice de A l'application

$$\begin{aligned} 1_A : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \begin{cases} 1 & si\ \ x \in A, \\ 0 & si\ \ x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 2.3.3 *Soient f et g deux applications. On dit que f et g sont égales on note $f = g$ si elles ont le même ensemble de définition D et $\forall x \in D,\ f(x) = g(x)$.*

2.3.1 Images et images réciproques

Définition 2.3.4 *Soient f une application de E vers F, A une partie de E et B une partie de F.*
- *On appelle image de A par f l'ensemble $f(A) = \{y \in F |\ \exists x \in A, y = f(x)\}$.*
- *On appelle image de f l'ensemble $im(f) = f(E)$.*
- *On appelle image réciproque de B par f l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$.*

Proposition 2.3.1 *Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de partie de E et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de partie de F. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On a :*

$$f\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = \underset{i\in I}{\cup} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\underset{i\in I}{\cap} A_i\right) \subset \underset{i\in I}{\cap} f(A_i)$$

$$f^{-1}\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = \underset{i\in I}{\cup} f^{-1}(A_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\underset{i\in I}{\cap} A_i\right) = \underset{i\in I}{\cap} f^{-1}(A_i)$$

2.3.2 Restriction, prolongement, composition

Définition 2.3.5 *Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Soit $A \subset E$.*

– *On appelle restriction de f à A l'application :*

$$\begin{aligned} f_{|A} : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \ f_{|A} = f(x) \end{aligned}$$

– *Soit $g \in \mathcal{F}(A,F)$.*
On dit que f est un prolongement de g si la restriction de f à A est égale à g ; c'est-à-dire $f_{|A} = g$. autrement dit si f et g coïncident sur A.

Exemple 2.3.1 *On considère le fonctions f et g données comme suit :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x-1}{x^2+1} \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} g :]-5,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x-1}{x^2+1} \end{array}$$

g est une restriction de f à $]-5,+\infty[$ et f est un prolongement de g.

Définition 2.3.6 *Soient E, F et G des ensembles et soient $f : E \longrightarrow F$ $g : F \longrightarrow G$ des applications. On appelle composée de f et g l'application notée $g \circ f$ définie de E vers G par :*

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g\left[f(x)\right]$$

.

Exemple 2.3.2 *On donne*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2x^2+1} \end{array} \ ; \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(2+x) \end{array} \ ; \quad \begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3x-2 \end{array}$$

Proposition 2.3.2 *Soient E, F, G et H des ensembles.*
Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $g \in \mathcal{F}(F,G)$ et $h \in \mathcal{F}(G,H)$. Alors :

– ***associativité*** *: $f \circ g \circ h = (f \circ g) = f \circ (g \circ h)$;*
– ***distributivité*** *: $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.*

2.4 Injection, surjection et bijection

Définition 2.4.1
Soient E et F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

– *L'application f est injective si et seulement si deux éléments quelconques distincts de E ont des images distinctes par f. Autrement dit; f est injective si et seulement :*

$$\forall x, x' \in E, \ f(x) = f(x') \Longrightarrow \ x = x'.$$

– *L'application f est surjective si l'image de E par f est l'ensemble F ; c'est-à-dire :*

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E, f(x) = y.$$

- *L'application f est bijective si elle est injective et surjective :*

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$$

Autrement dit ; f est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f, et bijective si tout élément de F admet un et un seul antécédent par f.

Définition 2.4.2
Soit f une bijection de E vers F. On appelle bijection réciproque de f l'unique application notée f^{-1} telle que fç$-1 \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$. C'est l'application, qui, à chaque élément de F, associe son unique antécédent par f.

Proposition 2.4.1
La composée de deux injections est une injection et la composée de deux surjections est une surjection.