<u>Los Problemas de los Viernes – Semana 2</u>

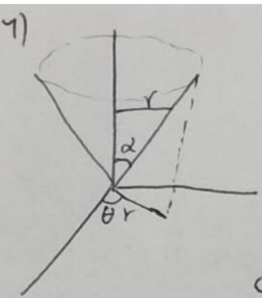
Integrantes:

Jesús Arley Celis

Juan Verano Ramirez

1. Calcule la trayectoria que da la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie de un cono invertido, con ángulo de vértice α. Use coordenadas cilíndricas.

1)



$$x = r\cos\theta \qquad dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$
$$z = r\cot\alpha \qquad dz = \cos\alpha\, dr$$

$$ds^2 = (1+\cos^2\alpha)\,dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$S = \int_a^b \sqrt{\csc^2\alpha\, dr^2 + r^2 d\theta^2} = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\csc^2\alpha + r^2\dot\theta^2}\, dr$$

$$\dot\theta = \frac{d\theta}{dr} \; ; \; F(r,\dot\theta) = \sqrt{\csc^2\alpha + r^2\dot\theta^2} \; ; \; \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial \dot\theta} = \text{Const.}$$

$$\frac{r^2\dot\theta}{\sqrt{\csc^2\alpha + r^2\dot\theta^2}} = C_1 \;\Rightarrow\; r^2\dot\theta^2(r^2 - C_1^2) = C_1^2\csc^2\alpha.$$

$$\dot\theta = \frac{C_1\csc\alpha}{r\sqrt{r^2 - C_1^2}}$$

$$\theta = \int \frac{C_1\csc\alpha}{r\sqrt{r^2 - C_1}}\, dr \qquad u = \sqrt{r^2 - C_1} \; ; \; du = \frac{u}{r}\, dr$$

$$\theta = C\csc\alpha \int \frac{du}{u^2 + C_1} = \sqrt{C_1}\csc\alpha \cdot \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{C_1}}\right) + C_2$$

$$\theta = \sqrt{C_1^2}\csc\alpha \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{r^2 - C_1^2}}{\sqrt{C_1^2}}\right) + C_2.$$

Por ende la curva será: sea $r = t$

$$r(t) = t\cos\left(\sqrt{C_1^2}\csc\alpha \arctan\left(\frac{\sqrt{r^2 - C_1^2}}{\sqrt{C_1^2}}\right) + C_2\right)\hat{\imath}$$
$$+\, t\sin\left(\sqrt{C_1^2}\csc\alpha \arctan\left(\frac{\sqrt{r^2 - C_1^2}}{\sqrt{C_1^2}}\right) + C_2\right)\hat{\jmath}$$
$$+\, t\cot\alpha\, \hat{k} \qquad a \le t \le b.$$

2. Calcule el valor mínimo de la integral

$$I = \int_0^1 \left[(y')^2 + 12xy \right] dx$$

donde la función $y(x)$ satisface $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$.

2)

$$I = \int_0^1 [\dot{y}^2 + 12xy]\, dx.$$

$F(x, y, \dot{y}) = \dot{y}^2 + 12xy$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 12x$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 2\dot{y}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 2\ddot{y}$

Por tanto la ecuación euler-lagrange queda:

$$2\ddot{y} - 12x = 0, \quad \ddot{y} = 6x$$

$$\dot{y} = 3x^2 + C_1, \quad y = x^3 + C_1 x + C_2$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$; $y(1) = 1 \Rightarrow C_1 = 0$

Por lo tanto

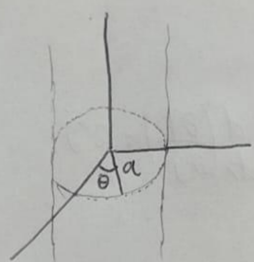
$$y(x) = x^3, \quad \dot{y} = 3x^2$$

$$I_{mn} = \int_0^1 [(3x^2)^2 + 12x(x^3)]\, dx = \int_0^1 (9x^4 + 12x^4)\, dx = \int_0^1 21x^4\, dx = \frac{21}{5} x^5 \Big|_0^1$$

$$I_{min} = \frac{21}{5}$$

3. Encuentre la geodésica (i.e. la trayectoria de menor distancia) entre los puntos $P_1 = (a, 0, 0)$ y $P_2 = (-a, 0, \pi)$ sobre la superficie $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Use coordenadas cilíndricas.

3)



$$x = a\cos\theta \qquad dx = -a\sin\theta\, d\theta$$
$$y = a\sin\theta \qquad dy = a\cos\theta\, d\theta$$
$$z = z \qquad dz = dz$$

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$S = \int \sqrt{a^2\dot{\theta}^2 + 1}\, dz \ ; \qquad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dz}$$

$$F(z, \dot{\theta}) = \sqrt{a^2\dot{\theta}^2 + 1} \ , \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} = \text{const.}$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{a^2\dot{\theta}^2 + 1}} = \text{Const}$$

$$\dot{\theta}^2(1 - C_1^2 a^2) = C_1^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^2 a^2}}$$

$$\theta = \frac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^2 a^2}} z + C_2$$

Si vamos de $P_1 = (a, 0, 0)$ y $P_2 = (-a, 0, \pi)$ en coordenadas cartesianas transformándolo a cilíndricas $\bar{P} = (r, \theta, z)$, tenemos que.

$\bar{P}_1 = (a, 0, 0)$ y $\bar{P}_2 = (a, \pi, \pi)$

Usando $\theta(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ y $\theta(\pi) = \pi \Rightarrow \frac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^2 a^2}} = K = 1$.

$$\theta = z \ ,$$

Por tanto la geodesica es. si $z = t$.

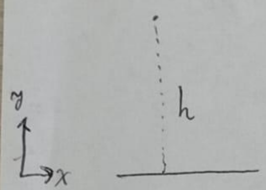
$$\vec{r}(t) = a\cos t\, \hat{\imath} + a\sin t\, \hat{\jmath} + t \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

4. Un cuerpo se deja caer desde una altura h y alcanza el suelo en un tiempo T. La ecuación de movimiento concebiblemente podría tener cualquiera de las formas

$$y = h - g_1 t, \quad y = h - \frac{1}{2} g_2 t^2, \quad y = h - \frac{1}{4} g_3 t^3$$

donde g_1, g_2, g_3 son constantes apropiadas. Demuestre que la forma correcta es aquella que produce el mínimo valor de la acción.

4) tenemos que.



$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \qquad V = mgy.$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -mg \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$S = \int_1^2 \mathcal{L}(t, \dot{y}, y)\, dt$$

es minimo cuando $\frac{\delta S}{\delta y} = 0$ esto es cuando.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

donde y es la función que minimiza S (la acción).

Para nuestro lagrangiano la ecuación euler-Lagrange queda:

$$m\ddot{y} + mg = 0$$

$$\dot{y} = \quad - gt$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Por ende y minimiza la acción.

5. El Lagrangiano de una partícula de masa m es

$$\mathcal{L} = \frac{m^2\dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 f(x) - f^2(x)$$

donde $f(x)$ es una función diferenciable de x. Encuentre la ecuación de movimiento.

$$L = \frac{m^2}{12}\dot{x}^4 + m\dot{x}^2 f(x) - f^2(x)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x} f'(x)$$

Ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\dot{x}^2 f'(x) - 2f(x)f'(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m^2}{3}\dot{x}^3 + 2m\dot{x}f(x)$$

$$\frac{\partial}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m^2\dot{x}^2\ddot{x} + 2m\ddot{x}f(x) + 2m\dot{x}\frac{df(x)}{dt}$$

$$= m^2\dot{x}^2\ddot{x} + 2m\ddot{x}f(x) + 2m\dot{x}^2 f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m^2\dot{x}^2\ddot{x} + 2m\ddot{x}f(x) + 2m\dot{x}^2 f'(x) - m\dot{x}^2 f'(x) + 2f(x)f'(x)$$

$$= m^2\dot{x}^2\ddot{x} + 2m\ddot{x}f(x) + m\dot{x}^2 f'(x) + 2f(x)f'(x) = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{x}\left(m\dot{x}^2 + 2f(x)\right) + \dot{x}^2 f'(x)\left(m + 2f(x)\right) = 0$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\dot{x}^2 f'(x)\left(m + 2f(x)\right)}{m\dot{x}^2 + 2f(x)}$$

6. Consideremos un sistema con n grados de libertad q^a, con $a = 1, \ldots, n$. La forma más general para un Lagrangiano puramente cinético es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab} \left(q_c \right) \dot{q}^a \dot{q}^b$$

donde hemos utilizado la convención de suma de Einstein. Es decir: índices repetidos indican suma. Las funciones $g_{ab} = g_{ba}$ dependen de las coordenadas generalizadas. Supongamos también que $\det \left(g_{ab} \right) \neq 0$ de modo que la matriz inversa g^{ab} existe y $g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$. Demostrar que las ecuaciones de Lagrange para este sistema vienen dadas por,

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc} \dot{q}^b \dot{q}^c = 0$$

donde

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial q^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^d} \right)$$

$L = \frac{1}{2} g_{ab}(q_c)\dot{q}^a\dot{q}^b$

$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial q^a}\frac{\partial q^a}{\partial t}$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

- $\frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\dot{q}^b\dot{q}^c$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^d} = \frac{1}{2} g_{ab}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^d}(\dot{q}^a\dot{q}^b) = \frac{1}{2} g_{ab}\left[\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^d}\dot{q}^b + \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^d}\dot{q}^a\right]$

$= \frac{1}{2} g_{ab}\left[\delta^a_d\dot{q}^b + \delta^b_d\dot{q}^a\right] = \frac{1}{2}\left[g_{db}\dot{q}^b + g_{da}\dot{q}^a\right] = g_{ab}\dot{q}^b$

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) = \frac{d}{dt}(g_{ab}\dot{q}^b)$

$= \frac{d g_{ab}}{dt}\dot{q}^b + g_{ab}\ddot{q}^b = \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^c\dot{q}^b + g_{ab}\ddot{q}^b$

$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0$

$\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^b\dot{q}^c + g_{ab}\ddot{q}^b - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$

$g_{ab}\ddot{q}^b + \left[\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right]\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$

$g^{ad} g_{ab}\ddot{q}^b + \left[\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right]\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$

$\delta^d_b\ddot{q}^b + g^{ad}\left[\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right]\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$

$\ddot{q}^b + g^{ad}\left[\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right]\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$

$\ddot{q}^b + \frac{1}{2} g^{ad}\left[\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right]\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$

$\ddot{q}^b + \frac{1}{2} g^{ad}\Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$