# <u>Los Problemas de los Viernes - Semana 1:</u>

**Integrantes:**

**Jesús Arley Celis**

**Juan Verano Ramirez**

1. Las fosas para competencias de clavados, desde plataforma de 10 $m$ de altura, tienen 5 $m$ de profundidad

   a) Justifique (cuantitativamente) por qué esa debe ser la profundidad que garantice la seguirdad de los atletas

   b) Suponga que un corcho esférico de 5 $cm$ de diámetro está en el fondo de fosa. Calcule la velocidad con la que llega a la superficie.

   c) Suponga ahora que una burbuja de un gas ideal se encuentra en el fondo de la fosa de clavados y calcule la velocidad con la cual arriba a la superficie

$$\boxed{y_2(t) = -6{,}965t^2 + 31{,}074t - 30{,}19}$$

Optimizamos

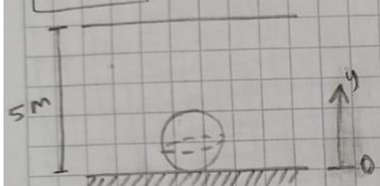
$$\dot{y}_2(t) = -13{,}93t + 31{,}074 = 0$$

$$t = 2{,}23 \text{ seg}$$

$$y_2(2{,}23) = -6{,}965(2{,}23)^2 + 31{,}074(2{,}23) - 30{,}19$$

$$= 4{,}49 \text{ m.}$$

1.b.




$r = 2{,}5$ cm $\simeq 0{,}025$ m

$V = \frac{4}{3}\pi(0{,}025)^3 = 6{,}545 \times 10^{-5}\ m^3$

$y_0 = 0$ m.

$v_0 = 0$ m/s.

$$\Sigma F_y = ma = -mg + \rho V g$$

$$\ddot{y} = -g + \rho\left(\frac{V}{m}\right)g \rightarrow \ddot{y} = -g + \frac{\rho_{agua}}{\rho_{corcho}}g$$

$\rho_{corcho}$.

$$\ddot{y} = -9{,}8 + \frac{(997)}{(250{,}77)}(9{,}8)$$

$$\ddot{y} = 27{,}49$$

- $\int \ddot{y}\,dt = \int 27{,}49\,dt \rightarrow \dot{y}(t) = 27{,}49t + C_1$

$$\dot{y}(0) = 27{,}49(0) + C_1 = 0$$

$$C_1 = 0$$

- $\int \dot{y}\,dt = \int 27{,}49t\,dt \rightarrow y(t) = 13{,}745t^2 + C_2$

$$y(0) = 13{,}745(0)^2 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$\boxed{y(t) = 13{,}745\,t^2}$$

$$y(t) = 5 = 13{,}745t^2$$

$$\boxed{t_1 = 0{,}603} \wedge \cancel{t_2 = -0{,}603}$$

$$\dot{y}(0{,}603) = 27{,}49(0{,}603)$$

$$= 16{,}58\ m/s^2$$

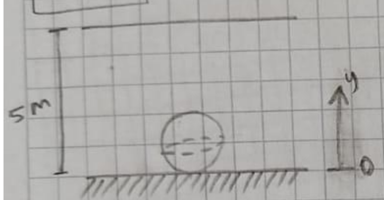
$$\boxed{y_2(t) = -6{,}965t^2 + 31{,}074t - 30{,}19}$$

Optimizamos

$$\dot{y}_2(t) = -13{,}93t + 31{,}074 = 0$$
$$t = 2{,}23 \text{ seg}$$

$$y_2(2{,}23) = -6{,}965(2{,}23)^2 + 31{,}074(2{,}23) - 30{,}19$$
$$= \underline{4{,}49 \text{ m.}}$$

$\boxed{1.b.}$




$$r = 2{,}5 \text{ cm} \approx 0{,}025 \text{ m}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(0{,}025)^3 = 6{,}545 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$y_0 = 0 \text{ m}$$
$$v_0 = 0 \text{ m/s.}$$

$$\Sigma F_y = ma = -mg + \rho V g$$

$$\ddot{y} = -g + \rho\left(\frac{V}{m}\right)g \quad \rightarrow \quad \ddot{y} = -g + \frac{\rho_{agua}}{\rho_{corcho}}g$$

$\rho_{corcho}$.

$$\ddot{y} = -9{,}8 + \frac{(997)}{(250{,}77)}(9{,}8)$$

$$\ddot{y} = 27{,}49$$

- $\int \ddot{y}\,dt = \int 27{,}49\,dt \rightarrow \dot{y}(t) = 27{,}49t + C_1$

$$\dot{y}(0) = 27{,}49(0) + C_1 = 0$$
$$\underline{C_1 = 0}$$

- $\int \dot{y}\,dt = \int 27{,}49t\,dt \rightarrow y(t) = 13{,}745t^2 + C_2$

$$y(0) = \cancel{13{,}745(0)^2} + C_2 = 0$$
$$C_2 = 0.$$

$$\boxed{y(t) = 13{,}745t^2}$$

$$y(t) = 5 = 13{,}745t^2$$

$$\boxed{t_1 = 0{,}603} \wedge \cancel{t_2 = -0{,}603}$$

$$\dot{y}(0{,}603) = 27{,}49(0{,}603).$$
$$= \underline{16{,}58 \text{ m/s}^2}$$

2. Una partícula cargada se mueve en un campo electromagnético. La ecuación de Lorentz que provee la fuerza que actúa sobre la partícula. Si es $\mathbf{E}$ el vector de campo eléctrico y $\mathbf{B}$ el vector inducción magnética, la fuerza sobre una partícula de masa $m$ que lleva una carga $e$ y una velocidad $\mathbf{v}$ está dada por

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

donde $c$ es la velocidad de la luz y se supone que $v \ll c$.

*a*) Si no existe campo eléctrico y la partícula penetra en el campo magnético en una dirección normal a las líneas de flujo, demostrar que la trayectoria es un círculo de radio

$$r = \frac{cmv}{eB} = \frac{v}{\omega_c}$$

donde $\omega_c \equiv eB/mc$ es la frecuencia ciclotrónica.

*b*) Haga coincidir el eje $z$ con en la dirección de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ con el eje $y$. Entonces,

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z; \quad \mathbf{E} = E_y\mathbf{e}_y + E_z\mathbf{e}_z$$

Demostrar que la componente $z = z(t)$ del movimiento es

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m}t^2$$

donde

$$z(0) \equiv z_0 \quad y \quad \dot{z}(0) \equiv \dot{z}_0$$

*c*) Calcule ahora las expresiones para $x(t)$ e $y(t)$. Muestre que los valores medios en el tiempo de estas componentes de la velocidad son

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{cE_y}{B}; \quad \langle \dot{y} \rangle = 0$$

para ello demuestre que el movimiento es periódico y después calcule el valor medio un período completo.

*d*) Integre las expresiones de la velocidad determinadas arriba y demuetre que (con una elección adecuada de las condiciones iniciales) podemos escribir

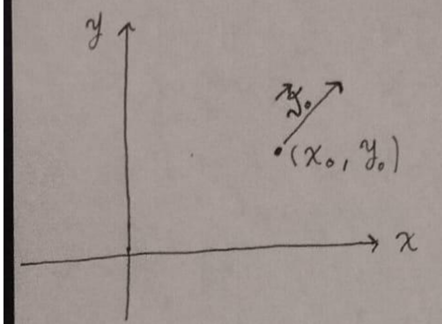
$$x(t) = \frac{A}{\omega_c}\operatorname{sen}\omega_L t + \frac{cE_y}{B}t; \quad y(t) = \frac{A}{\omega_c}(\cos\omega_L t - 1)$$

las cuales son las ecuaciones paramétricas de una [1]. Trazar la proyección de la trayectoria sobre el plano $x$-y en los casos

- $A > |cE_y/B|$
- $A < |cE_y/B|$
- $A = |cE_y/B|$. ¡Una cicloide!

2)

a) $\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{F}_L = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}$




Existe un $\vec{B}$ apuntando hacia afuera del Papel y constante.

$$\vec{B} = B\hat{k}$$

la Posición inicial de la Particula cargada es:

$$\vec{r}_0 = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}$$

su Velocidad inicial.

$$\vec{v}_0 = V_{x_0}\hat{\imath} + V_{y_0}\hat{\jmath}$$

de esta forma $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ es decir la Particula cargada Penetra de manera normal u ortogonal las lineas de flujo del campo magnetico.

de acuerdo a la segunda ley de Newton

$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$, la unica fuerza que afecta la Particula es $\vec{F}_L$

$\vec{F}_L = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$, donde $\vec{v}(t) = V_x(t)\hat{\imath} + V_y(t)\hat{\jmath} + V_z(t)\hat{k}$

$$= \frac{e}{c}\begin{vmatrix} i & j & k \\ V_x & V_y & V_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \left[BV_y\hat{\imath} - BV_x\hat{\jmath}\right]\frac{e}{c}$$

sea $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ separando la ecuación vectorial en coordenadas quedaría:

$$\frac{eB}{mc}V_y(t) = a_x(t) \;; \quad a_x(t) = \frac{dV_x(t)}{dt}$$

$$-\frac{eB}{mc}V_x(t) = a_y(t) \;; \quad a_y(t) = \frac{dV_y(t)}{dt}$$

$$0 = a_z(t) \;; \quad a_z(t) = \frac{dV_z(t)}{dt}$$

$$; \quad \frac{eB}{mc} = K$$

$$\begin{cases} ① \; \dfrac{dV_x(t)}{dt} = K V_y(t) \\ ② \; \dfrac{dV_y(t)}{dt} = -K V_x(t) \\ ③ \; \dfrac{dV_z(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

debido a que $z_0 = V_{z0} = 0 \Rightarrow z(t) = 0$

~~Como~~ $V_y(t) = dx$

Como $V_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ ; reemplazamos en ① integramos con respecto a t desde t = 0 a un tiempo t cualqu.

$$\int_{V_{x0}}^{V_x} \frac{dV_x(t)}{dt} dt = k\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy(t)}{dt} dt$$

$$\left. V_x = Ky(t) - Ky_0 + V_{x0} \right\} ④$$

Reemplazando ④ en ② tenemos:

$$\frac{dV_y(t)}{dt} = -K^2 y(t) + K^2 y_0 - KV_{x0}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt} = -K^2 y(t) + K^2 y_0 - KV_{x0}$$

Vemos que es una E.d.O. de segundo grado con coeficientes cost. la cual tien sol homogenea.

$$y_h(t) = A\cos(Kt) + B\sin(Kt)$$

y cuya sol Particular es

$$y_p(t) = y_0 - \frac{V_{x0}}{K}$$

usando $y(0) = y_0$

$$y_0 = A + y_0 - \frac{V_{x0}}{K} \Rightarrow A = \frac{V_{x0}}{K}$$

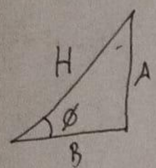
usando $V_y(0) = V_{y0} \Rightarrow B = \frac{V_{y0}}{K}$

Por tanto:

$$\underbrace{y(t) = \frac{V_{x0}}{K}\cos(Kt) + \frac{V_{y0}}{K}\sin(Kt) + y_0 - \frac{V_{x0}}{K}}$$ ⑤

Para entender mejor la ecuación vamos a convertir la suma de coseno y seno en forma de una sola función trig. Para ello usaremos la siguiente forma.

Sea: $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$, haremos la sustitución: $H^2 = A^2 + B^2$ donde se puede interpretar geometricamente como un triangulo:




$\operatorname{sen}\phi = \frac{A}{H}$; $\cos\phi = \frac{B}{H}$; $\phi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$ y sustituyendo A y B en nuestra expresión inicial.

$$A\cos(\theta) + B\sin\theta = H(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta)$$
$$= H\sin(\theta + \phi).$$

Aplicando esto a nuestra expresión ⑤ tenemos que.

$$⑥\ \boxed{y(t) = H\sin(Kt + \phi) + y_0 - \frac{V_{x0}}{K}}$$ ; donde $H = \sqrt{\frac{V_{x0}^2 + V_{y0}^2}{K^2}} = \frac{v_0}{K}$

y $\phi = \arctan\left(\frac{V_{x0}}{V_{y0}}\right)$.

Reemplazando ⑥ en ④ y $V_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

$$\frac{dx(t)}{dt} = K\left(H\sin(Kt + \phi) \cancel{+ y_0} - \cancel{\frac{V_{x0}}{K}}\right) - \cancel{Ky_0} + \cancel{V_{x0}}$$

integrando desde $t=0$ hasta un $t$ cualquiera tenemos que

$$x(t) - x_0 = -H\cos(Kt + \phi) + H\cos\phi;$$

como $\cos\phi = \frac{V_{y0}}{KH}$, entonces:

$$x(t) = -H\cos(Kt + \phi) + x_0 + \frac{V_{y0}}{K}$$

Vemos entonces que la particula debido a la fuerza $\vec{F}_L$ traza el camino

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(x_0 + \frac{V_{y0}}{K}\right) - H\cos(Kt + \phi))\hat{\imath} + \left(y_0 - \frac{V_{x0}}{K} + H\sin(Kt + \phi)\right)\hat{\jmath}}\ ⑦$$

La ecuación (7) nos muestra claramente la ecuación parametrica de un circulo con centro en $\left(x_0 + \frac{V_{y0}}{k}, y_0 - \frac{V_{x0}}{k}\right)$ y radio

$r = H \Rightarrow \quad r = \frac{v_0^t}{k} = \frac{v_0}{\frac{EB}{mc}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{v_0 mc}{EB}}$

~~gncus~~ ademas vemos que la particula tiene una frecuencia angular sobre sotrayectoria

$$\boxed{\omega = K = \frac{EB}{mc}}$$

2.b) $\vec{B} = B\hat{k}$ ; $\vec{E} = E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k}$

La fuerza de lorentz ejercida a un particula en movimiento es:

$$\vec{F}_L = \frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = B\dot{y}\hat{\imath} - B\dot{x}\hat{\jmath}$$

$$\vec{F}_L = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{B} = \frac{eB}{c}\dot{y}\hat{\imath} + \left(eE_y - \frac{eB}{c}\dot{x}\right)\hat{\jmath} + eE_z\hat{k}$$

Por ende la ecuación de movimiento correspondiente a la componente $(\hat{k})$ será

$$\frac{eE_z}{m} = \ddot{z}$$

integrando desde $t=0$ a un $t$ cualquiera tenemos.

$$\dot{z} = \dot{z}_0 + \frac{eE_z}{m}t$$

integrando nuevamente en el mismo intervalo tenemos.

$$\boxed{z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m}t^2}$$

2.c) las ecuaciones Para las coordenadas $x$, y $y$ son.

$$\begin{cases} (1) \quad \ddot{x} = \frac{Be}{cm}\dot{y} \\ (2) \quad \ddot{y} = \frac{e}{m}E_y - \frac{Be}{cm}\dot{x} \end{cases}$$

integrando la ecuación (1) en $0 \leq t' \leq t$, tenemos.

$$(3) \quad \dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{Be}{cm}y - \frac{Be}{cm}y_0 \quad ; \quad \frac{Be}{cm} = K.$$

Reemplazando (3) en (2) tenemos.

$$\ddot{y} = \frac{e}{m}E_y - K(\dot{x}_0 + Ky - Ky_0) = \frac{e}{m}E_y - K\dot{x}_0 - K^2y + K^2y_0 \quad (4)$$

la solución homogenea de (4) es.

$$y_h = A\cos(Kt) + B\sin(Kt)$$ ; que puede escribirse como

$$y_h = H\sin(Kt + \phi)$$

Una solución particular de (4) es

$$y_p = \frac{eE_y}{mK^2} - \frac{\dot{x}_0}{K} + y_0$$

Por tanto:

$$y(t) = H\sin(Kt+\phi) + \frac{eE_y}{mK^2} - \frac{\dot{x}_0}{K} + y_0 \quad (5)$$

usando las condiciones $y(0) = y_0$ y $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ tendremos que.

$$\phi = \arctan\left(\frac{eE_y}{mK\dot{y}_0} - \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0}\right) \quad y \quad H = \frac{-\dot{y}_0}{K\cos(\phi)}$$

Sea $T = \frac{2\pi}{K}$

Vemos que $y(t) = y(t+T)$ Por ende $y(t)$ es Periodica

Reemplazando ⑤ en ③ tenemos que.

$$\dot{x} = \cancel{\dot{x}_0} + K\left(H\sin(Kt+\phi) + \frac{eE_y}{mK^2} - \cancel{\frac{\dot{x}_0}{K}} + y_0\right) - \cancel{Ky_0}$$

$$\dot{x} = KH\sin(Kt+\phi) + \frac{eE_y}{mK} \quad ⑥$$

integrando ⑥ en $0 \leq t' \leq t$ tenemos que.

$$x(t) = -H\cos(Kt+\phi) + H\cos(\phi) + \frac{eE_y}{mK}t$$

$$x(t) = -H\cos(Kt+\phi) + \frac{eE_y}{mK}t - \frac{\dot{y}_0}{K} \Big\} \quad ⑦$$

en la expresión ⑦ Podemos que no existe un T tal que $x(t) = x(t+T)$, debido a que aunque $H\cos(Kt+\phi)$ es Periodica $\frac{eE_y}{mK}t$ no lo es.

ahora calcularemos el Valor promedio de $\dot{x}$ y $\dot{y}$

$$\langle\dot{x}\rangle = \frac{K}{2\pi}\int_t^{t+2\pi/K}\left[KH\sin(Kt'+\phi) + \frac{eE_y}{mK}\right]dt'$$

$$= \frac{K}{2\pi}\left[-H\cos(Kt'+\phi)\Big|_t^{t+2\pi/K} + \frac{eE_y}{mK}\Big|_t^{t+2\pi/K}\right].$$

$$= \frac{K}{2\pi}\left[-H\left(\cos(Kt+2\pi+\phi) - \cos(Kt+\phi)\right) + \frac{eE_y}{mK}\left(\frac{2\pi}{K}\right)\right]$$

$$= \frac{K}{2\pi}\left[\frac{eE_y}{mK}\left(\frac{2\pi}{K}\right)\right] = \frac{eE_y}{mK} = \frac{eE_y}{m\left(\frac{eB}{mc}\right)} = \boxed{\frac{cE_y}{B}}$$

$$\langle\dot{y}\rangle = \frac{K}{2\pi}\int_t^{t+2\pi/K} -H\cos(Kt'+\phi)\,dt' = 0.$$

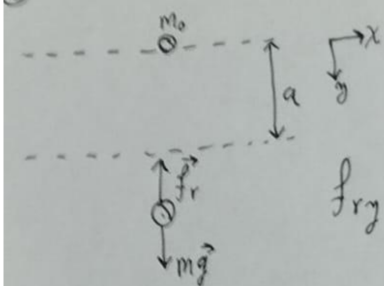
3. Una gota de lluvia de masa inicial $m_0$ gramos, cae, partiendo del reposo, y cruza una nube cuyo espesor es de $a$ cm. A medida que cae va ganando masa a razón de $b$ g/seg. Las goticas que forman la nube están en reposo con relación a la Tierra. El movimiento de la gota encuentra una resistencia proporcional a su velocidad.

   $a$) Escríba la ecuación diferencial del movimiento de la gota.

   $b$) Determine la velocidad de la gota al salir de la nube si, durante el paso por ella, duplica su masa.

   $c$) Suponiendo que la resistencia del aire dentro y fuera de la nube es la misma ¿cuál será la velocidad límite de la gota después que sale de la nube?

③




$\frac{dm}{dt} = b \qquad \dot{y}(0) = 0$

$f_{ry} = -k\dot{y} \quad ; \quad \frac{dm}{dt} = b \Rightarrow m = m_0 + bt$

luego la ecuación de movimiento viene dada por.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\dot{y} + m\ddot{y}$$

$$\sum F_y: \quad mg - k\dot{y} = m\ddot{y} + b\dot{y}$$

$$\ddot{y} + \frac{k+b}{m}\dot{y} = g$$

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{k+b}{m_0+bt}\dot{y} = g} \quad ⓐ$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{k+b}{m_0+bt}dt} = e^{\frac{k+b}{b}\ln|m_0+bt|} = (m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{y}(m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}}\right) = g(m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}}$$

$$\dot{y}(m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}}\Big|_{t=0}^{t} = g\int_0^t (m_0+bt)^{\frac{k}{b}+1}dt$$

$$\dot{y}(m_0+bt)^{\frac{k}{b}+1} = \cancel{g}\frac{g}{b(\frac{k}{b}+2)}(m_0+bt)^{\frac{k}{b}+2}\Big|_0^t$$

$$\dot{y}(m_0+bt)^{\frac{k}{b}+1} = \frac{g}{b(\frac{k}{b}+2)}\left((m_0+bt)^{\frac{k}{b}+2} - m_0^{\frac{k}{b}+2}\right)$$

$m = m_0 + bt$ si $m(t_f) = 2m_0$ entonces:

$$\dot{y}(2m_0)^{\frac{k}{b}+1} = \frac{g}{b(\frac{k}{b}+2)}\left[(2m_0)^{\frac{k}{b}+2} - m_0^{\frac{k}{b}+2}\right]$$

$$\dot{y}(2m_0)^{\frac{k}{b}+1} = \frac{g}{b\left(\frac{k}{b}+2\right)}\left[ m_0^{\frac{k}{b}+2} \right]$$

$$\boxed{\dot{y} = \frac{g\, m_0^{\frac{k}{b}+1}}{2^{\frac{k}{b}+1}\, b\left(\frac{k}{b}+2\right)}} \quad (b).$$

despues que sale de la nube $m = const = 2m_0$
Por ende la ecuación de movimiento queda

$$2m_0 g - k\dot{y} = 2m_0\ddot{y}$$

Para la velocidad limite $\ddot{y} = 0$

$$\boxed{\dot{y}_{lim} = \frac{2m_0 g}{k}} \quad (c)$$