<u>Los Problemas de los Viernes - Semana 3</u>

Integrantes:

Jesús Arley Celis
Juan Verano Ramirez

1. Considere un sistema con el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a\left(\dot{x}^2 \operatorname{sen}^2 y + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

donde a y b son constantes.

   a) Derive las ecuaciones de movimiento del sistema.
   b) Calcule e identifique las cantidades conservadas. ¿Es integrable este sistema?
   c) Calcule la energía del sistema.
   d) Suponga que $y(t) = y_o =$ cte. es una solución. ¿Cuáles son $x(t)$ y $z(t)$ en este caso?

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a(\dot{x}^2\sin^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}\sin^2 y + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\cos y$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\sin y \; ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = a\dot{y}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x}(a\sin^2 y + b\cos^2 y) + 2(a-b)\dot{x}\sin y\cos y + b(\ddot{z}\cos y - \dot{z}\sin y) = 0 \quad \text{I}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = a\ddot{y} \Rightarrow \quad a\ddot{y} + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\sin y = 0 \quad \text{II}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = b\ddot{x}\cos y \mp b\dot{x}\sin(y) + b\ddot{z} \Rightarrow \quad b(\ddot{x}\cos y - \dot{x}\sin y + \ddot{z}) = 0$$

$$\ddot{x}\cos y - \dot{x}\sin y + \ddot{z} = 0 \quad \text{III}$$

a) I, II y III constituyen las ecuaciones de movimiento del sistema

b) tenemos que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$ Por ende $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}$ son cantidades conservadas

además como el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo $\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}$ es una cantidad conservada.

$$\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} = \Big[\left[a\dot{x}\sin^2 y + b\cos y(\dot{x}\cos y + \dot{z})\right]\dot{x} + a\dot{y}^2 + b(\dot{x}\cos y\dot{z} + \dot{z}^2)$$
$$- \left(\frac{1}{2}a(\dot{x}^2\sin^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2\right)\Big]$$

$$= a(\dot{x}^2\sin^2 y + \dot{y}^2) + b\cos^2 y\,\dot{x}^2 + 2b\cos y\,\dot{x}\dot{z} + b\dot{z}^2 - \frac{1}{2}a(\dot{x}^2\sin^2 y + \dot{y}^2)$$
$$- \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

$$= a(\dot{x}^2\sin^2 y + \dot{y}^2) + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2 - \frac{1}{2}a(\dot{x}^2\sin^2 y + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2\sin^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2 \quad \text{IV}$$

$\cancel{a\dot{y} = C_1 \; \text{V}}$ $\quad a\dot{x}\sin^2 y + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\cos y = C_1 \quad \text{V}$

$$b(\dot{x}\cos y + \dot{z}) = C_2 \quad \text{VI}$$

IV, V y VI son las cantidades conservadas del sistema como en nuestro sistema tenemos 3 grados de libertad correspondientes a las coordenadas (x, y, z) y a su vez tenemos 3 cantidades conservadas entonces el sistema es integrable.

La cantidad conservada IV corresponde a la energía del sistema.

Si $y(t) = \text{const} = y_0$ entonces.

$$\dot{x}(a\sin^2 y_0 + b\cos^2 y_0) + b\cos y_0 \dot{z} = C_1 \qquad (d.1)$$

$$\dot{x}\cos y_0 + \dot{z} = \frac{C_2}{b}. \qquad (d.2)$$

$$\dot{z} = \frac{C_2}{b} - \dot{x}\cos y_0$$

$$\dot{x}(a\sin^2 y_0 + b\cos^2 y_0) + b\cos y_0\left(\frac{C_2}{b} - \dot{x}\cos y_0\right) = C_1$$

$$\dot{x}a\sin^2 y_0 + C_2\cos y_0 = C_1$$

$$\dot{x} = \frac{C_1 - C_2\cos y_0}{a\sin^2 y_0}$$

$$\boxed{x = \frac{C_1 - C_2\cos y_0}{a\sin^2 y_0}t + C_3}.$$

$$\dot{z} = \frac{C_2}{b} - \left(\frac{C_1 - C_2\cos y_0}{a\sin^2 y_0} \cancel{+C_3}\right)\cos y_0$$

$$z = \left[\frac{C_2}{b} - \frac{(C - C_2\cos y_0)\cos y_0}{a\sin^2 y_0}\right]t + C_4.$$

Vemos que en x y z conforman un movimiento rectilíneo uniforme

2. Una partícula de masa m se mueve en el potencial unidimensional

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

a) Encuentre el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del sistema

b) ¿Existen cantidades conservadas?

c) Muestre que el movimiento de la partícula es finito si su energía $E < 0$, y es infinito si $E \geq 0$.

d) Encuentre los puntos de retorno y el mínimo valor posible de E.

e) Para el movimiento finito, encuentre el período en función de E.

Tenemos el potencial unidimensional

$$V(x) = \frac{-V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

El lagrangiano del sistema queda:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

Debido a la naturaleza del potencial, el sistema puede reducirse un problema unidimensional

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x) \right) = -2 V_0 \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha x) \tanh(\alpha x)$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} \right) = m\ddot{x}$

$\rightarrow \quad m\ddot{x} + 2 V_0 \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha x) \tanh(\alpha x) = 0$

Ya que el lagrangeano no depende explícitamente del tiemp[o] la energía se conserva, además, debido a que $V(x)$ no depend[e] de $\dot{x}$ $\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = 0\right)$, la energía es

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x) = cte$$

Ahora introduzcamos una transformación del tipo $x \rightarrow x' + \delta x'$ $(\dot{x} \rightarrow \dot{x}')$

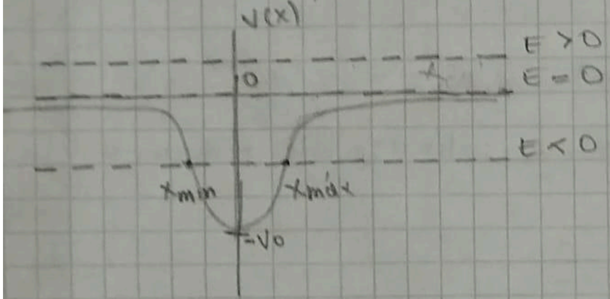
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha (x' + \delta x'))} = \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 + \frac{V_0}{(\cosh x' \cosh \delta x + \operatorname{senh} x \operatorname{senh}}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 + \frac{V_0}{\cosh^2 x' \cosh^2 \delta x + 2 \cosh x \cosh \delta x \operatorname{senh} x \operatorname{senh} \delta x + \operatorname{senh}^2 x \operatorname{senh}^2}$$

Ni en broma

Es evidente que $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}' + \frac{df}{dt}$, por lo que no hay simetrías de traslación este movimiento, y por ende no hay corrientes de Noether asociadas. Además, debido a que el problema es unidimensional, no tiene sentido hablar de simetrías rotacionales.

Analizando el potencial tenemos:



Para $E \geq 0$ la energía consta únicamente de energía cinética, por lo que la partícula se moverá en movimiento uniforme indefinidamente.

Para $-V_0 \leq E < 0$, la partícula oscilará entre x_{min} y $x_{máx}$.

Para $E < -V_0$ el sistema pierde sentido

Puntos de retorno.

$$V(x) = E$$

$$\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} = E \rightarrow \frac{V_0}{E} = \cosh^2(\alpha x)$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{V_0}{E}} = \cosh(\alpha x) \rightarrow x_{ret} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{V_0}{E}}\right)$$

$$x_{min} = -\frac{1}{\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{V_0}{E}}\right) \wedge x_{máx} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{V_0}{E}}\right)$$

$$y_{min} = y_{máx} = -V_0$$

Punto de equilibrio

$$F = 0 \rightarrow \nabla V = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \rightarrow -2V_0 \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha x) \tanh(\alpha x) = 0$$

$$\rightarrow \operatorname{sech}^2(\alpha x) = 0.$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V_0 \overset{0}{\operatorname{sech}^2(\alpha x)} = 0 \rightarrow E_{min} = \frac{1}{2} m V_0$$

(2)

Teniendo que $E < 0$, tenemos que:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x) = cte$$

$$\rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E + V_0 \operatorname{sech}^2(\alpha x)\right]} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\right]}$$

$$\rightarrow \underbrace{\int_{t_{min}}^{t_{máx}} dt}_{T.} = \int_{x_{min}}^{x_{máx}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}E + \frac{2V_0}{m\cosh^2(\alpha x)}}}$$

Que de esto se encargue Python

Periodo del movimiento.

3. El Lagrangiano de un sistema se puede expresar como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right)$$

donde a, b, y c son constantes, pero sujetas a la condición $b^2 - ac \neq 0$.

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento para este sistema.

b) Calcule e identifique las cantidades conservadas

c) ¿El sistema es integrable?

③ $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$; $b^2 - ac \neq 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kax - kby$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = ma\dot{x} + bm\dot{y}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = ma\ddot{x} + mb\ddot{y}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -kcy - kbx$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = mb\dot{x} + mc\dot{y}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = mb\ddot{x} + mc\ddot{y}$

entonces.

MOV. equations.
$$\begin{cases} ma\ddot{x} + mb\ddot{y} + kax + kby = 0 \\ mb\ddot{x} + mc\ddot{y} + kbx + kcy = 0 \end{cases}$$

Como el lagrangiano no depende explicitamente del tiempo. luego.

$$E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} = [m(a\dot{x} + b\dot{y})]\dot{x} + [m(b\dot{x} + c\dot{y})]\dot{y} - \mathcal{L}$$
$$= m(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \left[\frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)\right]$$
$$E = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) + \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

Vemos que para este caso y selección de constantes a, b, c. solamente tenemos una cantidad conservada y tenemos un sistema con 2 coordenadas por ende el sistema no es integrable.

4. Una partícula se mueve en un plano sujeta a una fuerza central de magnitud

$$F = \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{\left(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}\right)}{c^2}\right]$$

donde r es la distancia de la partícula al centro de fuerza y c es una constante. Halle el potencial generalizado que resulta de tal fuerza y, a partir de éste, el Lagrangiano del sistema.

4

$$F = \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2}\right] \rightarrow \text{Fuerza central}$$

$$F = -\nabla V \longrightarrow F = \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{r^2 c^2}\right] = -\frac{dV}{dr}$$

$$\int -dV = \int \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{r^2 c^2}\right] dr$$

$$-V(r) = -\frac{1}{r} - \frac{1}{c^2}\int \frac{1}{r^2}\dot{r}^2\, dr + \frac{2}{c^2}\int \frac{1}{r}\ddot{r}\, dr$$

Para $\dot{r} << c$, el sistema puede aproximarse a

$$V(r) = \frac{1}{r}$$

Quedándonos un Lagrangeano

$$V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{r} \text{ - en primera aproximación}$$