Solución a la ecuación diferencial de Bessel por el método de Frobenius

Métodos Matemáticos para físicos II

Universidad Industrial de Santander

Juan David Verano Ramírez – 2221093

Octubre - 2024

Ecuación diferencial de Bessel

$$x^2y'' + xy + (x^2-p^2)x = 0 \quad (1) \quad \text{con } p \in \mathbb{R}^+$$

Solución de la ecuación de Bessel:

Sugerimos una función solución para la ecuación de Bessel de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \rightarrow$$ Serie solución de la forma de Frobenius (con $a_0 \neq 0$).

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Reemplazando en (1) tenemos:

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + (x^2-p^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2} - p^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

Factor común x^{n+r}

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\underbrace{\left((n+r)(n+r-1)+(n+r)-p^2\right)}_{(n+r)(n+r-1+1)-p^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0$$

Organizando y ajustando índices obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}((n+r)^2-p^2) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2}$$

$$a_0x^r(r^2-p^2) + a_1x^{r+1}((r+1)^2-p^2) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+r}((n+r)^2-p^2) + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r} = 0$$

$$a_0x^r(r^2-p^2) + a_1x^{r+1}((r+1)^2-p^2) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n((n+r)^2-p^2)+a_{n-2}\right)x^{n+r} = 0.$$

para que la igualdad se cumpla, los coeficientes de la serie deben ser cero.

Entonces obtenemos las siguientes condiciones:

- $a_0 x^r (r^2-p^2)=0$. dado que $a_0 \neq 0$

$\rightarrow r^2-p^2=0 \rightarrow \boxed{r=\pm p}$

- $((r+1)^2-p^2)a_1 x^{r+1}=0$.

$\hookrightarrow ((r+1)^2-p^2)a_1=0$.

Caso 1: $r=p$.

$\Rightarrow ((p+1)^2-p^2)a_1=(p^2+2p+1-p^2)a_1=0$.
$=(2p+1)a_1=0$.

$\boxed{a_1=0}$ ya que p es un real positivo.

Caso 2: $r=-p$.

$((1-p)^2-p^2)a_1=(1-2p+p^2-p^2)a_1=0$.
$=(1-2p)a_1=0$

$\boxed{a_1=0}$

- $(a_n((n+r)^2-p^2)+a_{n-2})x^{n+r}=0$.

$\boxed{\text{Caso } 1: r=p}$

$a_n((n+p)^2-p^2)+a_{n-2}=0$.
$a_n(n+p-p)(n+p+p)+a_{n-2}=0$
$a_n(n(n+2p))+a_{n-2}=0$

$$\boxed{a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}}$$

Relación de recurrencia para los coeficientes de la serie solución con $r=p$. $(k=2,3,4,\dots)$

Analicemos la relación de recurrencia:

$n=2 \rightarrow a_2=-\dfrac{a_0}{2(2+2p)}=-\dfrac{a_0}{1!\,2^2(1+p)}=$

$n=3 \rightarrow a_3=-\dfrac{a_1}{3(3+2p)}=0$ ya que $a_1=0$

$k=4 \rightarrow a_4=-\dfrac{a_2}{4(4+2p)}=-\dfrac{\left(-\dfrac{a_0}{2^2(1+p)}\right)}{2\cdot 4(2+p)}=\dfrac{a_0}{2!\,2^4(1+p)(2+p)}$.

con este análisis podemos concluir que para

- $\underline{K}$ $\underline{par}$

$$a_K = a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n\, n!\,(1+p)(2+p)\cdots(n+p)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

- $\underline{K}$ $\underline{impar}$

$$a_K = 0$$

Entonces tenemos que la serie solución de la ecuación de Bessel es:

$$a_0 x^r + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}\, n!\,(1+p)(2+p)\cdots(n+p)} x^{2n+p} \quad (\text{para } r = p).$$

Si observamos detenidamente, en el denominador se ve el factorial de $(1+p)$, dado que p no es necesariamente un entero, usamos la función gamma para compactar la expresión.

<u>Propiedades de la función gamma</u>

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1+p) &= (n+p)\,\Gamma(n+p) \\
&= (n+p)(n-1+p)\,\Gamma(n-1+p) \\
&= (n+p)(n-1+p)(n-2+p)\,\Gamma(n-2+p) \\
&= (n+p)(n-1+p)(n-2+p)\cdots(2+p)\,\Gamma(2+p) \\
&= (n+p)(n-1+p)(n-2+p)\cdots(2+p)(1+p)\,\Gamma(1+p)
\end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(n+1+p)} = \frac{1}{(n+p)(n-1+p)(n-2+p)\cdots(2+p)(1+p)}$$

Entonces la serie solución queda dada por

$$y = a_0 x^p + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(1+p)\, a_0}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(n+1+p)} x^{2n+p} \left(\frac{2^p}{2^p}\right) = 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(1+p)\, a_0}{n!\, \Gamma(n+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

para fines de normalización

$$a_0 = \frac{1}{2^p\, \Gamma(1+p)}$$

Las funciones de Bessel de primer orden:

$$J_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(n+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

$\boxed{\text{Caso 2}: r = -p}$

$$a_k((k-p)^2 - p^2) + a_{k-2} = 0$$
$$a_k(k^2 - 2kp + p^2 - p^2) + a_{k-2} = 0$$
$$\text{(A)} \quad a_k\, k(k-2p) + a_{k-2} = 0$$

$$\boxed{a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-2p)}}$$

Relación de recurrencia para los coeficientes de la serie solución con $r = -p$ $(k = 2, 3, 4, \dots)$

Analicemos esta relación de recurrencia:

$$k = 2 \rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2^2(1-p)}$$

$$k = 3 \rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3(3-2p)} = 0 \quad \text{ya que } a_1 = 0.$$

$$k = 4 \rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4(4-2p)} = \frac{-\left(-\frac{a_0}{2^2(1-p)}\right)}{2^3(2-p)}$$

$$= \frac{a_0}{2!\,2^4(1-p)(2-p)}$$

podemos concluir que de igual manera la serie solución para la ecuación de Bessel con $r = -p$ es

$$J_{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}, \left(a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!\,(n-p)\cdots(1-p)}\right)$$

Consideremos por un momento a p como un entero

Usando la relación de recurrencia (A)

$$k = 2,\ p = 1 \rightarrow a_2(2)(\overset{0}{2-2}) + a_0 = 0 \rightarrow a_0 = 0$$
$$k = 2,\ p = 2 \rightarrow a_2(2)(2-4) + a_0 = 0$$
$$\rightarrow a_2 = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$\rightarrow$ ✗ ya que la condición de Frobenius indica que $a_0 \neq 0$.

Esto indica que no existe una serie solución tipo Frobenius para la ecuación de Bessel relacionado a p entero. con $r = -p$

$$\rightarrow p \in \mathbb{R}^+ - \{\mathbb{Z}\}.$$

Cuando p es un entero tenemos entonces una única solución para la ecuación de Bessel, es decir, tenemos un conjunto incompleto solución. Para completar el conjunto fundamental de soluciones:

<u>Funciones de Neumann - Weber</u>

Estas funciones corresponden a una solución para la ecuación de Bessel cuando p es un entero. Las funciones de Neumann se definen como.

$$Y_p = Y\cot(p\pi) J_p - \csc(p\pi) = \frac{\cos(p\pi) J_p - J_{-p}}{\operatorname{sen}(p\pi)} \quad (p \notin \mathbb{Z})$$

Como Y_p es una combinación lineal de J_p y J_{-p} con p no entero, Y_p es solución a la ecuación de Bessel de orden p.

Si tenemos entonces que necesitamos otra solución para p entero, podríamos estudiar Y_p cuando $p \to P$, es decir

$$Y_P = \lim_{p \to P} Y_p \quad \text{con } P \in \mathbb{Z}$$

(<u>Funciones de Bessel de segunda especie</u>)