Тема 5. Интерполирование функций

Для заданной функции $f(x)$ выберите симметричный относительно нуля интервал непрерывности функции $[-a; a]$.

1.1. Напишите процедуру построения интерполяционного полинома Лагранжа по

- равноотстоящим узлам, включающим коны отрезка ($L_\text{р}^n$);
- узлам — корням полинома Чебышёва (L_Ch^n, см. (6) в [1]).

Представьте на одном графике исходную функцию, построенные полиномы и узлы интерполяции.

1.2. Напишите процедуру, приближённо вычисляющую погрешность интерполяционного полинома:

$$E(x) = \max_{x \in [-a;a]} |L(x) - f(x)| dx. \tag{1}$$

Оцените эту погрешность в 100 или в 200 точках, равномерно распределённых внутри отрезка, и возьмите максимум.

1.3. Для количества узлов n от 3 до 12 постройте по два интерполяционных полинома ($L_\text{р}^n$) и (L_Ch^n) и оцените их погрешности. В качестве результата представьте таблицу, в которой числу n будут сопоставлены отклонения. Сделайте вывод о точности двух полиномов.

2. Выполните те же задания, что и в пп. 1.1–1.3 для функции

$$h(x) = |x| f(x).$$

3.1 Выполните те же задания, что и в пп. 1.1–1.3, но для интерполяционного многочлена Эрмита $H(x)$. Вычисляйте не только погрешность приближении функции полиномом $E(x)$, но и погрешность приближения производной функции с помощью производной полинома

$$\bar{E}(x) = \max_{x \in [-a;a]} |H'(x) - f'(x)| dx.$$

Сравните, будут ли чебышёвские узлы давать лучшую точность? Число узлов n берите от 3 до 5.

3.2 Сравните с точностью полиномов Лагранжа по тем же количествам узлов (определяйте и $E(x)$ и $\bar{E}(x)$ для всех полиномов).

3.3 Сравните с точностью полиномов Лагранжа тех же степеней.

4. Повторите задание 3, включив ещё и значения вторых производных. Используйте только $n = 3$. Оценивайте и погрешность приближения второй производной функции с помощью второй производной полинома

$$\bar{\bar{E}}(x) = \max_{x \in [-a;a]} |H''(x) - f''(x)| dx.$$

5.1 Напишите процедуру построения сплайна S_{10} для функции $f(x)$ по n равноотстоящим точкам на отрезке $[-a; a]$. Выведите график.

5.2 Напишите процедуру построения локального сплайна S_{31} с выводом графика.

5.3 Напишите процедуру построения глобального сплайна S_{32} с использованием граничных условий вида:

- $S''_{32}(-a) = S''_{32}(a) = 0$ (естественный сплайн);
- $S'_{32}(-a) = f'(-a), \quad S'_{32}(a) = f'(a)$.

Предусмотрите возможность вывода всех сплайнов из пп. 5.1–5.3 на один график. При малых n их можно сравнить графически.

Функции для выполнения задания

1. $f(x) = x - \sin 4x - 0.25$
2. $f(x) = x^3 - e^x$
3. $f(x) = \sqrt{x+2} + \cos 5x$
4. $f(x) = x^2 - 1 + \arccos x$
5. $f(x) = \lg(x+2) + \dfrac{7}{2x-6}$
6. $f(x) = \operatorname{tg}(x/2 + 0.2) - x^2 + 2$
7. $f(x) = 3x - \cos 4x - 1$
8. $f(x) = x - x^3 - \lg(x+2)$
9. $f(x) = x^2 - \arcsin(x/2 - 0.2)$
10. $f(x) = x^2 + 4\sin x - 2$
11. $f(x) = \operatorname{ctg}(x/2 + \pi/2) + x^2$
12. $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos 3x + 0.1$
13. $f(x) = (x+1)^3 \ln(x+2)$
14. $f(x) = x^2 - \cos 10x$
15. $f(x) = \operatorname{ctg}(x + 7/6) - x$
16. $f(x) = \operatorname{tg} 3x + (0.4 - x)^2$
17. $f(x) = x^4 + 1 - \operatorname{tg}(x/2)$
18. $f(x) = x^2 \sin x^2 + 1$
19. $f(x) = 0.5^{x+1.5} + 1 - (x-2)^2$
20. $f(x) = 2^x (x-1)^2 - 2$

Литература:

1. Иванов. А. П. Методические указания к вычислительному практикуму. Тема 5: Интерполирование функций. // http://www.apmath.spbu.ru/
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. 1978 г.