Seri bahan kuliah Algeo #15 - 2023

Ruang Vektor Umum
(bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Pengantar

- Studi tentang vektor pada awalnya dimulai dengan menampilkan vektor sebagai ruas garis dengan tanda panah ( ).

- Vektor-vektor di ruang R^2 dan R^3 dinyatakan sebagai 2-tupel atau 3-tupel (yaitu (w_1, w_2) atau (w_1, w_2, w_3)) dan dapat digambarkan secara visual sebagai ruas garis pada sistem koordinat kartesian.

- Selanjutnya, pengertian vektor diperluas ke ruang R^n, dan sebuah vektor dinyatakan sebagai n-tupel, namun penggambaran secara visual menjadi tidak mungkin lagi.

- Konsep vektor di ruang R^n dapat diperluas sehingga berbagai objek matematika dapat diperlakukan sebagai vektor asalkan memenuhi sejumlah aksioma.

Ruang Vektor

- Yang dimaksud dengan **ruang vektor** (*vector space*) adalah himpunan objek-objek yang dilengkapi dengan dua operasi di dalam himpunan tersebut, yaitu:
  1. operasi penjumlahan objek-objek
  2. operasi perkalian objek dengan skalar

- R^3 adalah contoh sebuah ruang vektor. Himpunan objeknya adalah vektor-vektor yang dinyatakan sebagai $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Di dalam R^3 didefinisikan operasi penjumlahan dua buah vektor, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, dan perkalian skalar $k\mathbf{v}$ seperti yang sudah dipelajari sebelumnya.

- Namun, kita dapat memperlakukan himpunan lain sebagai ruang vektor asalkan memenuhi persyaratan yang dijelaskan pada *slide* berikut.

Ruang Vektor

Sebuah himpunan objek-objek V yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian dengan skalar dapat disebut sebagai **ruang vektor** dan semua objek di dalam V disebut **vektor**, apabila memenuhi 6 aksioma berikut ini:

1. **Tertutup (*closure*)**

Operasi penjumlahan dan perkalian skalar selalu menghasilkan vektor di dalam V.

Jadi, untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ dan skalar k, maka

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$$

$$k\mathbf{u} \in V$$

2. Komutatif

Untuk semua **u**, **v** $\in V$, maka **u** + **v** = **v** + **u**

3. Asosiatif

Untuk semua **u**, **v**, **w** $\in V$, maka **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**

4. Identitas

Untuk semua **u** $\in V$, terdapat elemen identitas (vektor) **0** dan skalar 1 sedemikian sehingga

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

5. Balikan (*inverse*) atau negatif

Untuk setiap $\mathbf{u} \in V$, terdapat $-\mathbf{u} \in V$ sedemikian sehingga

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

6. Distributif

Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan k, m skalar, maka

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

$$(k + m)\mathbf{w} = k\mathbf{w} + m\mathbf{w}$$

$$k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$$

- Enam (6) aksioma tersebut dapat dirangkum menjadi 10 poin sebagai berikut:

1. If $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are objects in V, then $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ is in V.
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
3. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
4. There is an object $\mathbf{0}$ in V, called a *zero vector* for V, such that $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ for all $\mathbf{u}$ in V.
5. For each $\mathbf{u}$ in V, there is an object $-\mathbf{u}$ in V, called a *negative* of $\mathbf{u}$, such that $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.
6. If k is any scalar and $\mathbf{u}$ is any object in V, then $k\mathbf{u}$ is in V.
7. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
8. $(k+m)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+m\mathbf{u}$
9. $k(m\mathbf{u})=(km)(\mathbf{u})$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Cara menunjukkan apakah sebuah himpunan dengan dua operasi merupakan ruang vektor

1. Identifikasi himpunan V dengan objek-objek di dalamnya yang akan menjadi vektor

2. Identifikasi operasi penjumlahan dan perkalian skalar di dalam V

3. Periksa aksioma 1 (tertutup terhadap operasi penjumlahan dan tertutup terhadap operasi perkalian skalar)

4. Periksa apakah lima aksioma lainnya dipenuhi

Contoh-contoh Ruang Vektor

1. R^n (termasuk R^2 dan R^3) adalah ruang vektor

- V = R^n = himpunan objek berbentuk $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $u_i \in R$
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dan perkalian skalar menghasilkan vektor dengan n-tupel di R^n.
- Lima aksioma lainnya: komutatif, identitas, asosiatif, distributif, balikan, juga dipenuhi oleh R^n (periksa!)

2. **Ruang vektor matriks 2 x 2**

- V = himpunan matriks berukuran 2 x 2 dengan elemen-elemen bilangan riil adalah ruang vektor, dilambangkan dengan M_{22}
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

$$k\mathbf{u}=k\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dan perkalian skalar menghasilkan matriks yang berukuran 2 x 2 juga
- Aksioma-aksioma lain juga dipenuhi, misalnya

  - komutatif $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

  - elemen identitas adalah $\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{u}$

- kemudian, $1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$

- balikan atau negatif: terdapat $-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$ sehingga

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- periksa bahwa aksioma asosiatif dan distributif juga dipenuhi, yaitu jika **u**, **v**, dan **w** adalah matriks 2 x 2, maka

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

dan jika *k* dan *m* adalah skalar maka

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$
$$(k + m)\mathbf{w} = k\mathbf{w} + m\mathbf{w}$$
$$k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$$

3. Ruang vektor matriks m x n

- Sebagai perampaatan dari ruang vektor matriks 2 x 2, maka V = himpunan matriks berukuran m x n dengan elemen-elemen bilangan riil juga adalah ruang vektor
- Dilambangkan dengan M_{mn}

4. Ruang vektor fungsi-fungsi bernilai bilangan riil

- V = himpunan semua fungsi bernilai bilangan rill untuk setiap x di dalam selang $(-\infty, \infty)$. Elemen himpunan V adalah fungsi berbentuk f(x)
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb: jika f = f(x) dan g = g(x), maka

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

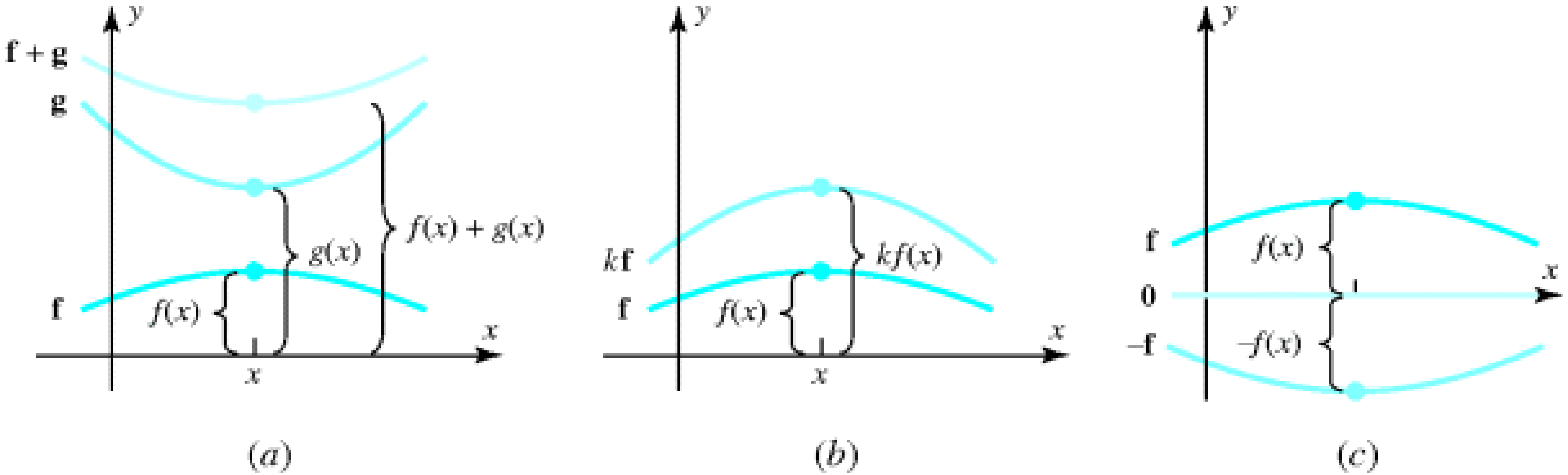
$$(kf)(x) = kf(x)$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dua buah fungsi dan perkalian skalar fungsi menghasilkan fungsi lain yang juga di dalam V yang terdefenisi untuk x di dalam $(-\infty, \infty)$
- Aksioma-aksioma lain juga dipenuhi, misalnya

  - komutatif: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$

  - elemen identitas adalah 0 sehingga $f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$

  - negatif fungsi adalah $–f(x)$ sehingga $f(x) + (–f(x)) = 0 = (–f(x)) + f(x)$



(f + g)(x) = f(x) + g(x)

(kf)(x) = kf(x)

f(x) + (–f(x)) = 0 = (–f(x)) + f(x)

4. Ruang vektor polinom

- V = himpunan semua polinom berbentuk $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk setiap x di dalam selang $(-\infty, \infty)$.
- Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sbb: jika **p** = $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ dan **q** = $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ maka

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

$$k\mathbf{p} = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \ldots + ka_nx^n$$

- *Closure*: operasi penjumlahan dua buah polinom dan perkalian skalar polinom menghasilkan polinom lain yang juga di dalam V yang terdefenisi untuk x di dalam $(-\infty, \infty)$
- Aksioma-aksioma lain juga dipenuhi, misalnya

  - komutatif: $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$
  - elemen identitas adalah 0 sehingga $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$
  - negatif polinom adalah $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_nx^n$
    sehingga $p(x) + (-p(x)) = 0 = (-p(x)) + p(x)$

Contoh yang bukan ruang vektor

Misalkan $V = R^2$ = himpunan objek berbentuk $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $u_i \in R$. Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar di dalam V sbb:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$k\mathbf{u} = (ku_1, 0)$$

Contoh: misalkan $\mathbf{u} = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (5, 2)$ maka

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3 + 5, 4 + 2) = (8, 6)$$

$$8\mathbf{u} = (8 \cdot 3, 0) = (24, 0)$$

- Aksioma *closure* dipenuhi oleh ruang vektor ini
- Namun ruang vektor gagal memenuhi aksioma identitas, sebab

$$1\mathbf{u} = (1u_1, 0) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$$

Subruang

- Jika *V* adalah sebuah ruang vektor, maka sub-himpunan *W* dari *V* disebut **subruang** (*subspace*) jika *W* sendiri adalah ruang vektor di bawah operasi penjumlahan dan perkalian scalar

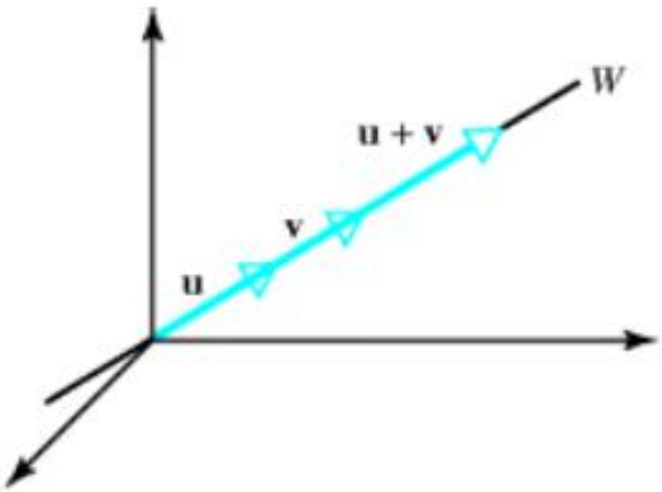
  Contoh: $V = R^3$, W = sebuah bidang yang melalui titik asal (0, 0, 0)

- **Teorema**: Jika W adalah himpunan yang berisi satu atau lebih vektor di dalam ruang vektor V, maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi:

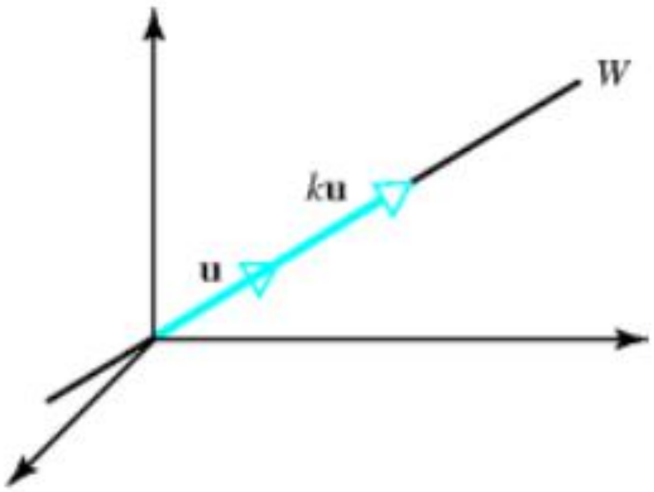
  1. Jika **u** dan **v** adalah vektor di W, maka **u** + **v** menghasilkan vektor di W
  2. Jika *k* adalah skalar dan **u** adalah vekto di W, maka *k***u** adalah vektor di W

Contoh-contoh subruang

1. Himpunan titik-titik sepanjang garis yang melalui titik asal di R^2 atau di R^3 yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar adalah subruang dari R^2 atau R^3.



(*a*) *W* is closed under addition.



(*b*) *W* is closed under scalar multiplication.

2. Himpunan titik-titik pada bidang yang melalui titik asal di R^3 yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar adalah subruang dari R^3.

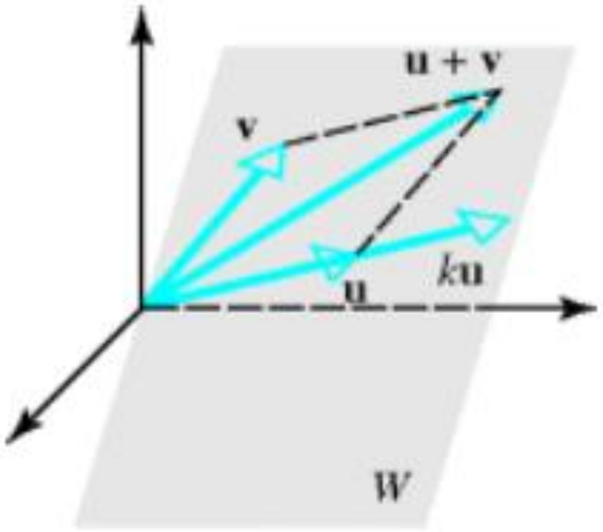


Figure 4.2.3 The vectors $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ and $k\mathbf{u}$ both lie in the same plane as $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$

Contoh yang bukan subruang

- Himpunan titik-titik di dalam kuadran 1 pada bidang kartesian tidak membentuk subruang dari R^2 karena tidak tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

Contoh: $\mathbf{v}$ = (1, 1) adalah vektor di W tetapi (–1)$\mathbf{v}$ = (–1, –1) terletak di luar W

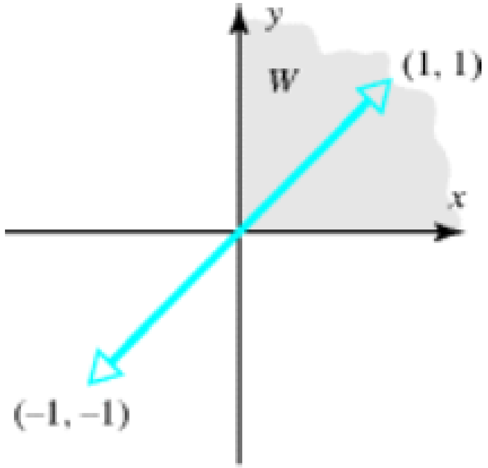


Figure 4.2.4 *W* is not closed under scalar multiplication

- Himpunan W yang berisi matriks n x n yang memiliki balikan (*invertible*) tidak membentuk subruang dari M_{nn} karena tidak tertutup terhadap oeprasi penjumlahan dan perkalian dengan scalar.

Contoh: $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $V = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$0U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ matriks ini tidak memiliki balikan

$U + V = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow$ determinannya $= 0 \rightarrow$ tidak memiliki balikan

Kombinasi linier

- Jika **w** adalah vektor di V, maka **w** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …., $\mathbf{v_r}$ apabila **w** dapat dinyatakan sebagai

$$\boxed{\mathbf{w} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \dots + k_r\mathbf{v_r}}$$

yang dalam hal ini $k_1, k_2, \dots, k_r$ adalah skalar.

Contoh 1: Misalkan $\mathbf{v_1} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v_2} = (2, -4, 3)$, maka

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2} = 2(3, 2, -1) + 3(2, -4, 3) = (12, -8, 7)$$

Contoh 2: Nyatakan vektor (5, 9, 5) sebagai kombinasi linier dari **u** = (2, 1, 4), **v** = (1, –1 , 3) dan **w** = (3, 2, 5)

Penyelesaian:

$$k_1\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\9\\5\end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan linier (SPL):

$$\begin{aligned} 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= 5 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 &= 9 \\ 4k_1 + 3k_2 + 5k_3 &= 5 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh:

$$k_1 = 3, \quad k_2 = -4, \quad k_3 = 2$$

Teorema: Jika S = {$\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, …, $\mathbf{w_r}$} adalah himpunan vektor-vektor di ruang vektor V, maka

(a) Himpunan W yang berisi semua kombinasi linier vektor-vektor di dalam S adalah subruang dari V

(b) Himpunan W tersebut adalah subruang "terkecil" dari V yang mengandung vektor-vektor di dalam S dengan pengertian bahwa sembarang subruang lain yang mengandung vektor-vektor tersebut juga mengandung W.

Himpunan membangun (*spanning set*)

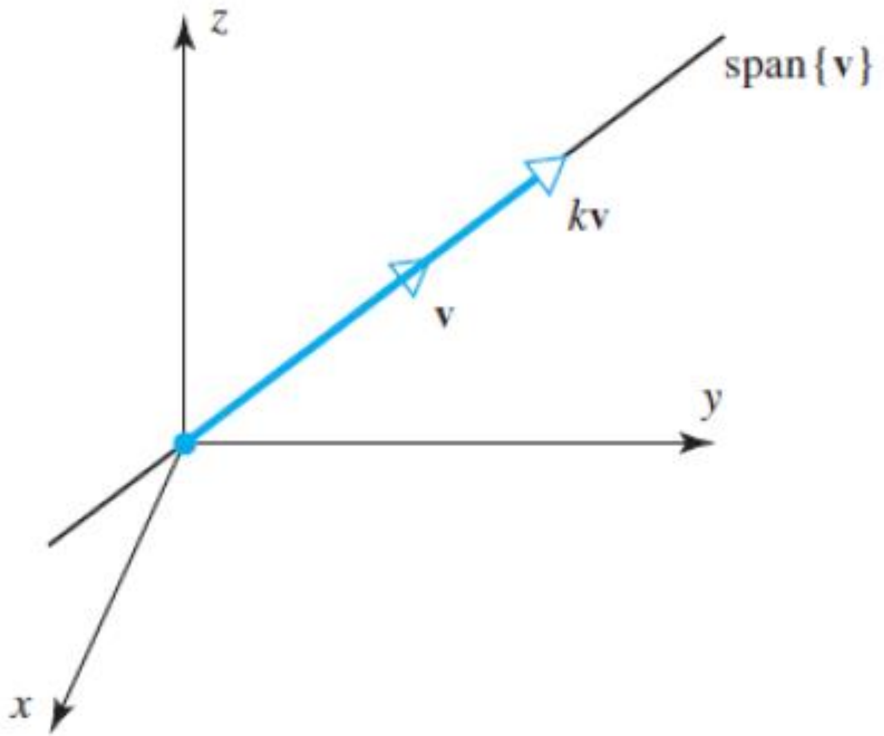
- Jika $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_r}$ adalah vektor-vektor di dalam ruang vektor V dan subruang dari V dibentuk dari kombinasi linier $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_r}$ maka himpunan $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_r}\}$ dikatakan **membangun** (*span*) subruang tersebut.

- $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_r}\}$ disebut himpunan merentang atau himpunan membangun (*spanning set*).

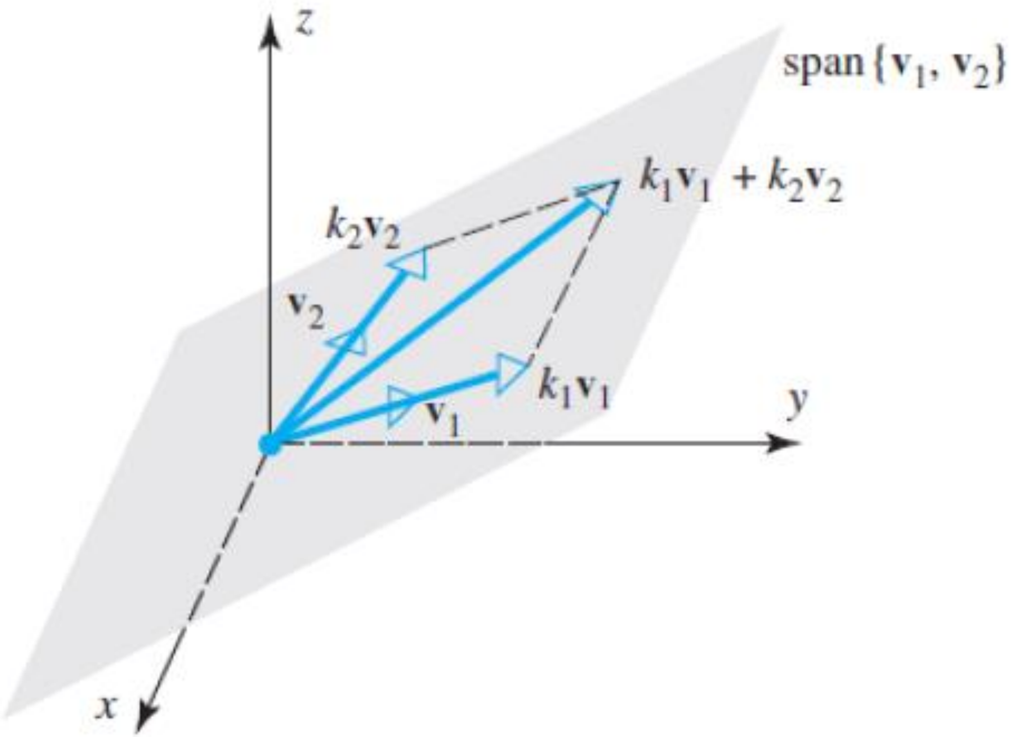
- S membangun subruang maka kita menyatakannya sebagai

  span$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_r}\}$ atau *span*(S).

- Jika $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_r}\}$ membangun V maka sembarang vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \dots + k_r\mathbf{v_r}$



(a) Span{$\mathbf{v}$} is the line through the origin determined by $\mathbf{v}$.



(b) Span{$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$} is the plane through the origin determined by $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$.

Contoh 3: Vektor-vektor satuan standard **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1) membangun R^3 karena setiap vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi liner **v** = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**. Kita dapat menyatakan R^3 = *span*{**i**, **j**, **k**}.

Contoh 4: Polinom 1, x, x^2, …, x^n membangun ruang vektor P_n, karena setiap polinom **p** di dalam P_n dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

yang merupakan kombinasi linier dari 1, x, x^2, …, x^n. Kita dapat menyatakan bahwa P_n = *span*{1, x, x^2, …, x^n}

Contoh 5: Tentukan apakah $\mathbf{v_1} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v_2} = (4, 1, 2)$ dan $\mathbf{v_3} = (8, -1, 8)$ membangun R^3?

<u>Penyelesaian</u>: Kita harus menentukan apakah sembarang vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3}$

$$(u_1, u_2, u_3) = k_1(2, -1, 3) + k_2(4, 1, 2) + k_3(8, -1, 8)$$

Diperoleh SPL:

$$2k_1 + 4k_2 + 8k_3 = u_1$$
$$-k_1 + k_2 - k_3 = u_2$$
$$3k_1 + 2k_2 + 8k_3 = u_3$$

Apakah SPL di atas dapat dipecahkan? Perhatikan matriks koefisien SPL, yaitu $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 20 - 40 = 0$$

Karena det(A) = 0, maka SPL tersebut tidak konsisten, artinya tidak terdapat k_1, k_2 dan k_3 yang memenuhi. Oleh karena itu $\mathbf{u}$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi liner $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3}$. Dengan kata lain $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ tidak membangun R^3.

Kebebasan linier (*linear independence*)

- Misalkan V adalah ruang vektor. Himpunan S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_r}$} dikatakan **bebas linier** (*linear independence*) jika dan hanya jika kombinasi linier

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \dots + k_r\mathbf{v_r} = 0$$

memiliki hanya satu solusi yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Solusi ini disebut **solusi trivial**.

- Sebaliknya, S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_r}$} dikatakan **tidak bebas linier** atau **kebergantungan linier** (*linear dependence*) jika dan hanya jika kombinasi linier

$$k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \dots + k_r\mathbf{v_r} = 0$$

memiliki **solusi non-trivial**, yaitu memiliki solusi lain selain $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$

Pengertian lain bebas linier dan tidak bebas linier adalah sbb:

Sebuah himpunan S yang memiliki dua atau lebih vektor dikatakan:

(a) **tidak bebas linier** (*linear dependence*) jika dan hanya jika sedikitnya satu vektor di dalam S adalah kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya.

(b) **bebas linier** (*linear independence*) jika tidak ada vektor di dalam S yang dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya.

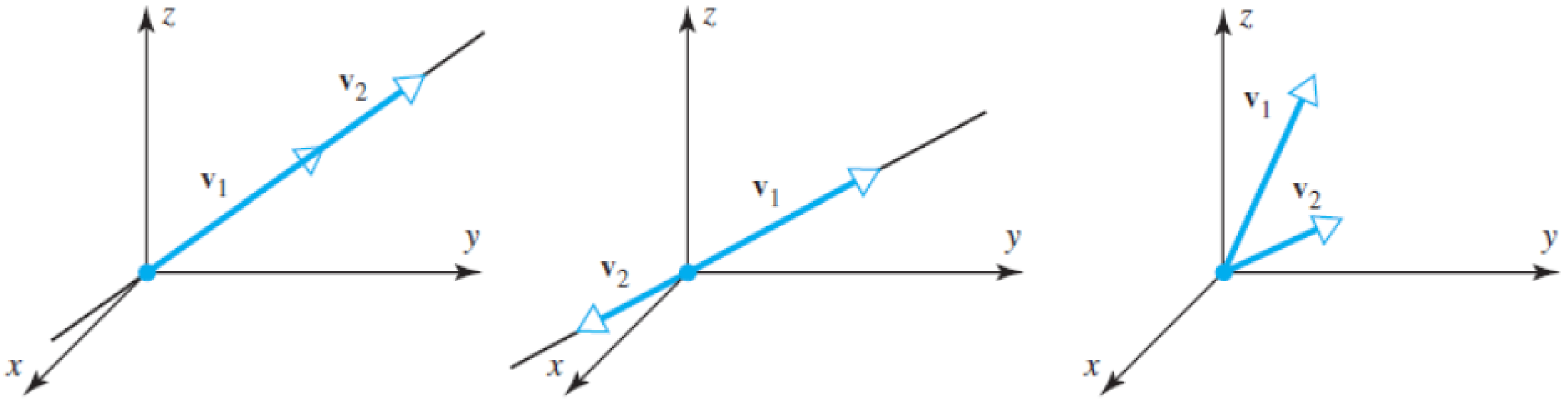
Contoh 6: Misalkan S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ } dengan $\mathbf{v_1}$ = (1, 2 , 3), $\mathbf{v_2}$ = (2, 1, 5) dan $\mathbf{v_3}$ = (4, 5, 11). Kita dapat memverifikasi bahwa

$$2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} - \mathbf{v_3} = 0 \rightarrow \mathbf{v_3} = 2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$$

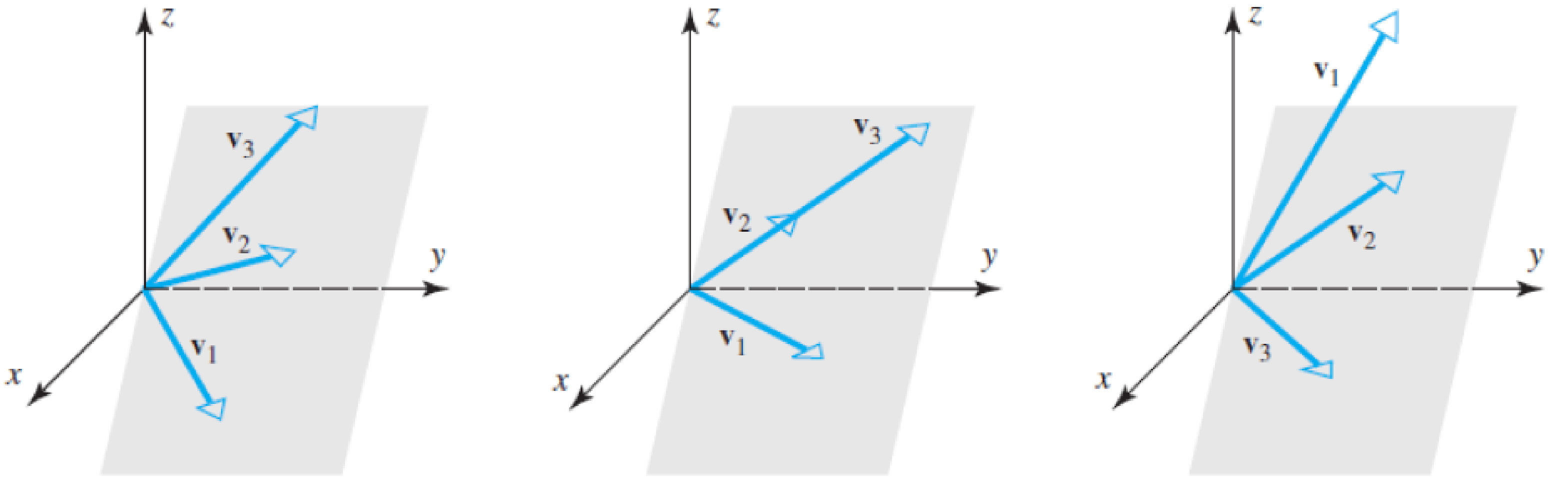
Karena $\mathbf{v_3} = 2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ maka itu berarti $\mathbf{v_3}$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya. Dengan kata lain, $\mathbf{v_3}$ bergantung pada vektor-vektor lainnya di dalam S, sehingga himpunan S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ } dikatakan tidak bebas linier.

Contoh 7: Polinom $\mathbf{p_1} = 1 - x$, $\mathbf{p_2} = 5 + 3x - 2x^2$, dan $\mathbf{p_3} = 1 + 3x - x^2$ membentuk himpunan yang tidak bebas linier karena $3\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2} + 2\mathbf{p_3} = 0 \rightarrow \mathbf{p_2} = 3\mathbf{p_3} + 2\mathbf{p_3}$, yang berarti $\mathbf{p_2}$ merupakan kombinasi linier dari polinom-polinom lainnya.

Linear Independence in R^2 and R^3



(*a*) Linearly dependent (*b*) Linearly dependent (*c*) Linearly independent



(*a*) Linearly dependent (*b*) Linearly dependent (*c*) Linearly independent

Contoh 8: Tentukan apakah $\mathbf{v_1}$ = (1, –2, 3), $\mathbf{v_2}$ = (5, 6, –1) dan $\mathbf{v_3}$ = (3, 2, 1) membentuk himpunan yang bebas linier atau tidak bebas linier.

<u>Penyelesaian</u>: Kita harus memeriksa apakah kombinasi linier $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = 0$ memiliki solusi trivial atau non-trivial.

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL homogen di atas dengan metode eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \overset{\text{OBE}}{\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

Solusi: $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$
(solusi trivial)

Karena kombinasi linier $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = 0$ mempunyai solusi trivial maka dikatakan {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$} adalah himpunan yang bebas linier.

Contoh 9: Tentukan apakah $\mathbf{v_1} = (2, -1 , 4)$, $\mathbf{v_2} = (3, 6, 2)$ dan $\mathbf{v_3} = (1, 10, -1)$ membentuk himpunan yang bebas linier atau tidak bebas linier.

<u>Penyelesaian</u>: Kita harus memeriksa apakah kombinasi linier $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = 0$ memiliki solusi trivial atau non-trivial.

$$k_1(2, -1 , 4) + k_2(3, 6, 2) + k_3(1, 10 , -1) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} 2k_1 + 3k_2 + 2k_3 &= 0 \\ -k_1 + 6k_2 + 10k_3 &= 0 \\ 4k_1 + 2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL homogen di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh solusinya:

$$k_1 = t,\ k_2 = -½\, t,\ k_3 = -½\, t$$

(Solusi non-trivial. Perhatikan bahwa jika $t = 0$, maka SPL memiliki solusi $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$. Namun, ada banyak solusi yang lain selain $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$)

Karena kombinasi linier $k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3} = 0$ mempunyai solusi non trivial maka dikatakan {{$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ } adalah himpunan yang tidak bebas linier.

Catatan: Cara lain untuk memeriksa apakah SPL homogen

$$\begin{aligned} 2k_1 + 3k_2 + 2k_3 &= 0 \\ -k_1 + 6k_2 + 10k_3 &= 0 \\ 4k_1 + 2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

memiliki solusi trivial atau non trivial adalah dengan menghitung determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Karena det(A) = 0, maka SPL homogen tersebut memiliki solusi non-trivial.

Contoh 10: Vektor-vektor satuan standard **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1) adalah vektor-vektor yang bebas linier di R^3. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = 0$$

atau

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 1, 0) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 \qquad\qquad &= 0 \\ k_2 \qquad &= 0 \\ k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi solusinya $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ (solusi trivial)

Secara umum, vektor-vektor satuan standard di R^n,

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \text{dan } \mathbf{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1),$$

membentuk himpunan yang bebas linier di R^n

Bersambung ke Bagian 2