

Seri bahan kuliah Algeo #12 – Update 2023

Vektor di Ruang Euclidean **(bagian 2)**

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Ortogonal dan ortonormal

- Dua buah vektor tak-nol \mathbf{u} dan \mathbf{v} di \mathbb{R}^n dikatakan **ortogonal** atau saling tegak lurus jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$,
- Vektor nol selalu ortogonal dengan *setiap* vektor di \mathbb{R}^n
- Himpunan vektor di \mathbb{R}^n disebut **himpunan ortogonal** jika setiap pasang vektor di dalam himpunan tersebut ortogonal.
- Himpunan ortogonal vektor-vektor satuan dinamakan **himpunan ortonormal**.

Contoh 8:

(a) Himpunan vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)$, dan $\mathbf{v}_3 = (-2, -5, 1)$ membentuk himpunan orthogonal karena

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (-2)(1) + (1)(0) + (1)(2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = (-2)(-2) + (1)(-5) + (1)(1) = -4 - 5 + 1 = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = (1)(-2) + (0)(-5) + (2)(1) = -2 + 0 + 2 = 0$$

(ii) Himpunan vektor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan $\mathbf{v}_1 = (-3, 4, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 2)$, dan $\mathbf{v}_3 = (4, -3, 0)$ bukan himpunan orthogonal karena

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (-3)(1) + (4)(2) + (-1)(2) = -3 + 8 - 2 = 3 \neq 0$$

(cukup ditunjukkan satu saja perkalian titik dua vector yang tidak menghasilkan nol untuk menyatakan bukan himpunan ortogonal)

Contoh 9: Himpunan vektor satuan $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ di \mathbb{R}^3 adalah himpunan orthogonal sekaligus himpunan ortonormal, karena

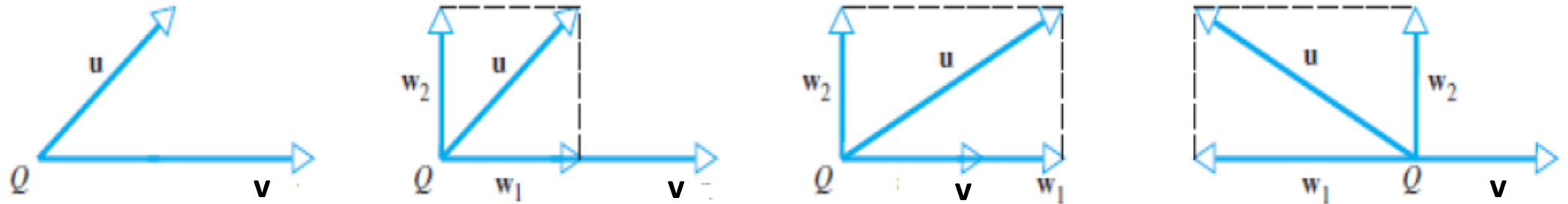
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = (0)(0) + (1)(0) + (0)(1) = 0$$

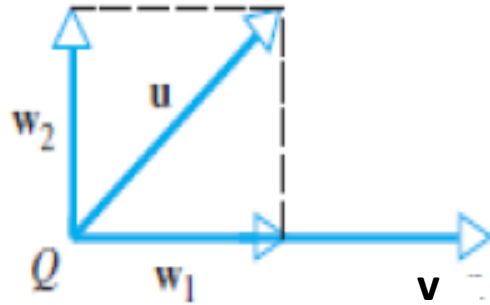
Proyeksi Ortogonal

- Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah dua vektor di \mathbb{R}^n dan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, maka \mathbf{u} dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, yang dalam hal ini \mathbf{w}_1 adalah proyeksi \mathbf{u} pada \mathbf{v} dan \mathbf{w}_2 adalah komponen dari \mathbf{u} yang orthogonal pada \mathbf{v} .



Bagaimana cara menentukan \mathbf{w}_1 dan \mathbf{w}_2 ?

- Tinjau gambar ini:



\mathbf{w}_1 = proyeksi \mathbf{u} pada \mathbf{v}
 = perkalian skalar k dengan \mathbf{v}
 = $k\mathbf{v}$

dan

\mathbf{w}_2 = komponen dari \mathbf{u} yang orthogonal pada \mathbf{v} .
 maka

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{v} \\ &= k \|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v} \\ &= k \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ sebab } \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{v}) \rightarrow k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \end{aligned}$$

sehingga

$$\mathbf{w}_1 = k \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v}$$

dan

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = \mathbf{u} - k\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v}$$

Contoh 10: Misalkan $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ dan $\mathbf{v} = (4, -1, 2)$, tentukan proyeksi orthogonal \mathbf{u} pada \mathbf{v} dan komponen \mathbf{u} yang orthogonal dengan \mathbf{v} .

Penyelesaian:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (2)^2})^2 = (4)^2 + (-1)^2 + (2)^2 = 16 + 1 + 4 = 21$$

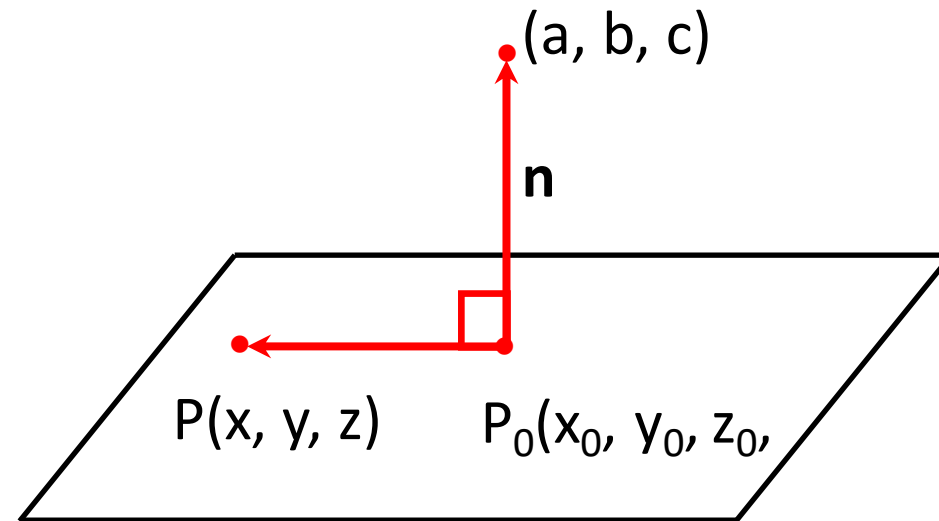
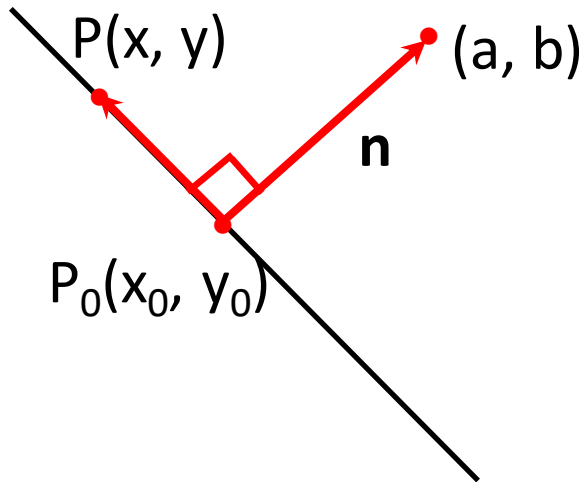
maka

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \mathbf{v} = \frac{15}{21} (4, -1, 2) = (20/7, -5/7, 10/7)$$

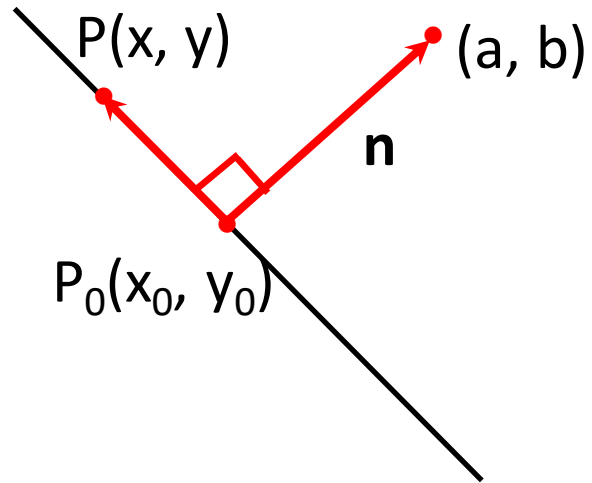
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = (2, -1, 3) - (20/7, -5/7, 10/7) = (-6/7, -2/7, 11/7)$$

Vektor Normal

- Vektor normal (atau **normal** saja) adalah vektor yang tegak lurus dengan sebuah garis atau sebuah bidang



\mathbf{n} = vektor normal = normal



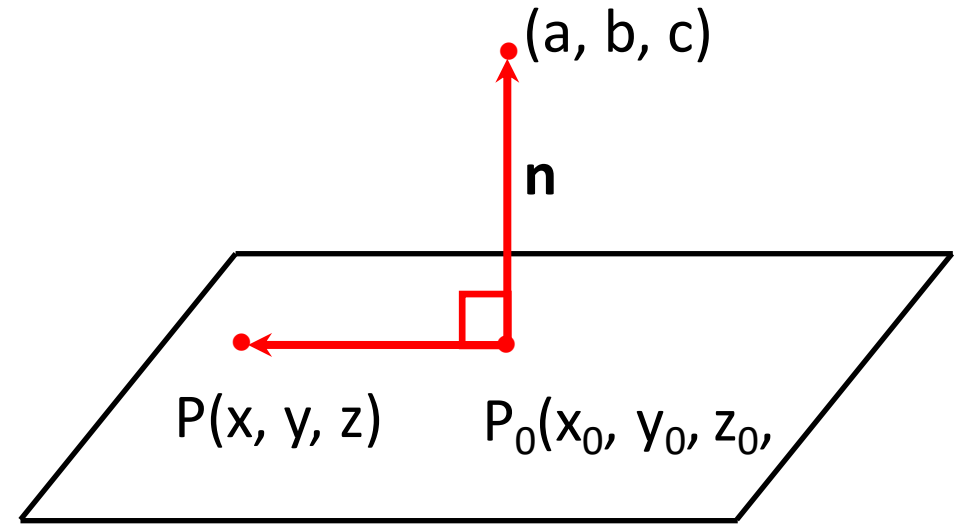
$$\mathbf{n} = (a, b)$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$$

\mathbf{n} dan $\overrightarrow{P_0P}$ orthogonal, sehingga

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$



$$\mathbf{n} = (a, b, c)$$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

\mathbf{n} dan $\overrightarrow{P_0P}$ orthogonal, sehingga

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Contoh 11:

- (i) Persamaan $7(x - 1) + 2(y + 3) = 0$ menyatakan persamaan garis lurus yang melalui titik $(1, -3)$ dengan normal $\mathbf{n} = (7, 2)$.
- (ii) (i) Persamaan $2(x - 3) - 5(y - 6) + 7z = 0$ menyatakan persamaan bidang yang melalui titik $(3, 6, 0)$ dengan normal $\mathbf{n} = (2, -5, 7)$.

Contoh 12: Carilah persamaan bidang yang melalui titik $P(2, 6, 1)$ dan tegak lurus dengan $\mathbf{n} = (1, 4, 2)$.

Penyelesaian: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$1(x - 2) + 4(y - 6) + 2(z - 1) = 0$$

$$x - 2 + 4y - 24 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 4y + 2z - 28 = 0$$

- Bentuk umum persamaan garis adalah $ax + by + c = 0$ dengan normal $\mathbf{n} = (a, b)$
- Bentuk umum persamaan bidang adalah $ax + by + cz + d = 0$ dengan normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$

Contoh 13: Carilah persamaan bidang yang melalui titik $(3, 2, 1)$, $(2, 1, -1)$, dan $(-1, 3, 2)$.

Penyelesaian:

Persamaan bidang: $ax + by + cz + d = 0$

$$(3, 2, 1) \quad \rightarrow 3a + 2b + c + d = 0$$

$$(2, 1, -1) \quad \rightarrow 2a + b - c + d = 0$$

$$(-1, 3, 2) \quad \rightarrow -a + 3b + 2c + d = 0$$

SPL:

$$3a + 2b + c + d = 0$$

$$2a + b - c + d = 0$$

$$-a + 3b + 2c + d = 0$$

Selesaikan SPL dengan metode eliminasi Gauss untuk menemukan nilai a , b , c , dan d (solusi berbentuk parametrik, karena banyak sekali bidang yang melalui ketiga titik tersebut)

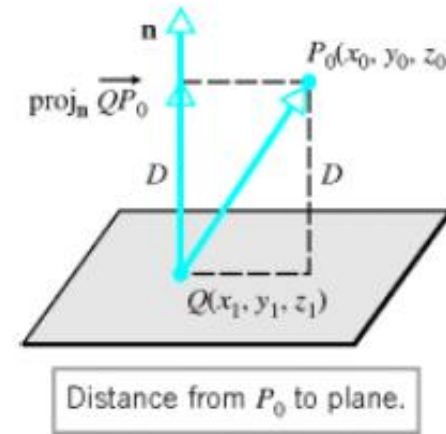
Jarak sebuah titik ke garis dan ke bidang

- Di R^2 , jarak antara titik $P_0(x_0, y_0)$ dengan garis $ax + by + c = 0$ adalah

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Di R^3 , jarak antara titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan bidang $ax + by + cz + d = 0$ adalah

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



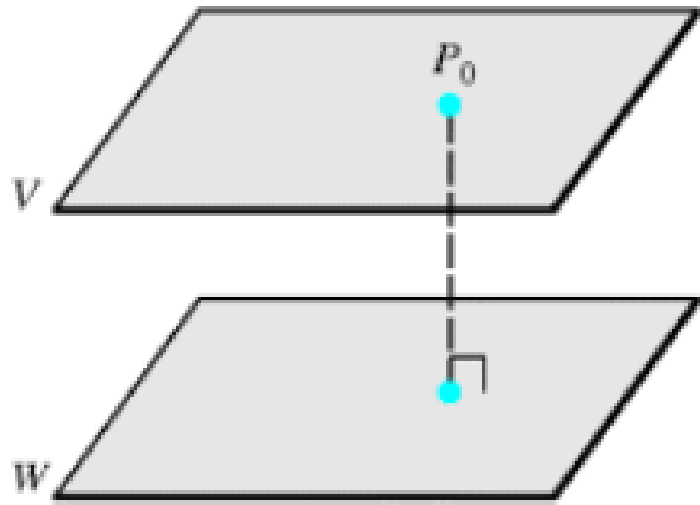
Contoh 14: Tentukan jarak dari titik $(1, -4, -3)$ ke bidang $2x - 3y + 6z = -1$

Penyelesaian:

$$2x - 3y + 6z = -1 \rightarrow 2x - 3y + 6z + 1 = 0 \rightarrow a = 2, b = -3, c = 6, d = 1$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{3}{7}$$

Jarak antara dua bidang paralel



Jarak antara bidang V dan bidang W = jarak dari P_0 ke W

Contoh 15: Tentukan jarak antara bidang $x + 2y - 2z = 3$ dan bidang $2x + 4y - 4z = 7$

Penyelesaian:

$$\text{Bidang } x + 2y - 2z - 3 = 0 \rightarrow \mathbf{n} = (1, 2, -2)$$

$$\text{Bidang } 2x + 4y - 4z - 7 = 0 \rightarrow \mathbf{n} = (2, 4, -4)$$

Pilih sebuah titik di bidang $x + 2y - 2z - 3 = 0$:

$$\text{ambil } y = 0, z = 0, \text{ maka } x = 3 - 2y + 2z = 3 - 2(0) + 2(0) = 3$$

diperoleh titik $(3, 0, 0)$

Hitung jarak dari $(3, 0, 0)$ ke bidang $2x + 4y - 4z - 7 = 0$ sbb:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

Latihan (Kuis 2022)

Diketahui persamaan dua buah bidang: $2x - y - z = 5$ dan $-4x + 2y + 2z = 12$

- a) Tunjukkan bahwa kedua bidang tersebut parallel
- b) Hitung jarak kedua buah bidang tersebut

Jawaban:

a) $2x - y - z - 5 = 0 \rightarrow \mathbf{n}_1 = (2, -1, -1)$

$-4x + 2y + 2z - 12 = 0 \rightarrow \mathbf{n}_2 = (-4, 2, 2)$

Karena $\mathbf{n}_2 = -2\mathbf{n}_1$, maka vektor normal kedua bidang tersebut sejajar, berarti kedua bidang tsb paralel

- b) Pilih sebuah titik di bidang $2x - y - z - 5 = 0$, misalkan ambil $y = 0, z = 0$, maka $x = (y + z + 5)/2 = 5/2 = 2,5$

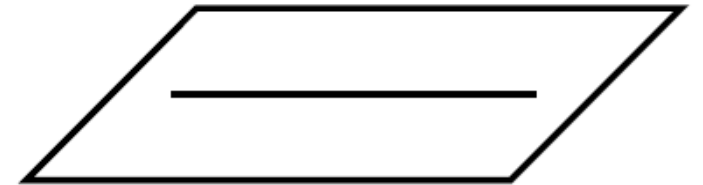
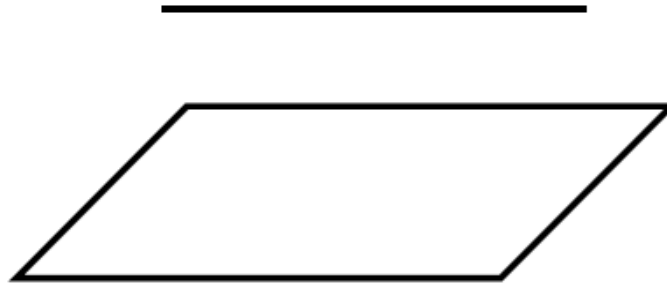
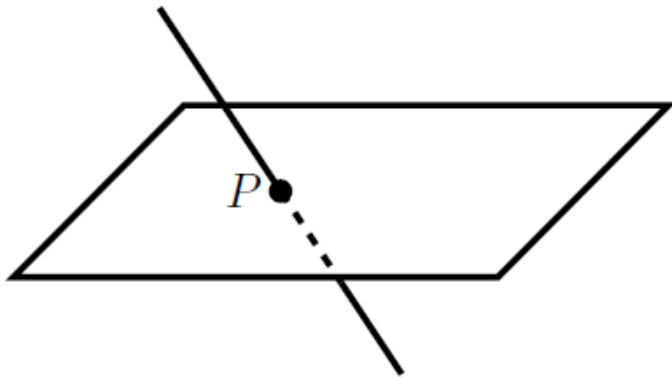
diperoleh titik $(5/2, 0, 0)$. Hitung jarak dari $(3, 0, 0)$ ke bidang $-4x + 2y + 2z - 12 = 0$ sbb:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|(-4)\left(\frac{5}{2}\right) + (2)(0) + (2)(0) - 12|}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{|-10 - 12|}{\sqrt{16 + 4 + 4}} = \frac{22}{\sqrt{24}} = \frac{22}{\sqrt{24}} \times \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}} =$$

$$\frac{11}{12} \sqrt{24}$$

Perpotongan garis dengan bidang

- Kedudukan sebuah garis dengan bidang dapat memiliki tiga kemungkinan:
 1. Garis memotong bidang di sebuah titik
 2. Garis sejajar dengan bidang
 3. Garis terletak pada bidang



Contoh 16: Diketahui bidang P dengan persamaan $2x + y - 4z = 4$.

- (a) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = t, y = 2 + 3t, z = t$
- (b) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = 1 + t, y = 4 + 2t, z = t$
- (c) Tentukan semua titik potong P dengan garis $x = t, y = 4 + 2t, z = t$

Penyelesaian: Ket: Persamaan garis dalam bentuk parametrik

- a) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$$2(t) + (2 + 3t) - 4(t) = 4 \rightarrow t = 2$$

Gunakan t untuk menemukan $(x, y, z) = (2, 8, 2) \rightarrow$ berpotongan pada satu titik

- b) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$$2(1 + t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \rightarrow 6 = 4 \rightarrow \text{tidak ada nilai } t \text{ yang memenuhi persamaan ini}$$

\rightarrow garis sejajar dengan bidang

- c) Sulihkan x, y, dan z ke dalam persamaan bidang:

$$2(t) + (4 + 2t) - 4(t) = 4 \rightarrow 4 = 4 \rightarrow \text{semua nilai } t \text{ memenuhi persamaan ini}$$

\rightarrow garis terletak pada bidang

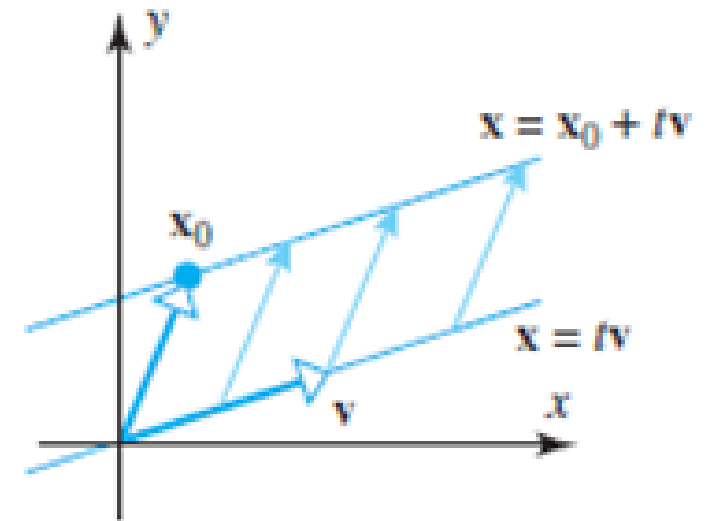
Vektor dan persamaan parametrik garis di \mathbb{R}^2 dan \mathbb{R}^3

- Misalkan L adalah garis di \mathbb{R}^2 atau \mathbb{R}^3 yang mengandung titik \mathbf{x}_0 dan paralel dengan vektor \mathbf{v} . Persamaan garis yang melalui \mathbf{x}_0 dan paralel dengan \mathbf{v} adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$$

- Jika $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, maka persamaan garis yang melalui titik asal menjadi

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v}$$



Contoh 17: Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik asal dan parallel dengan vector $\mathbf{v} = (-2, 3)$.

Penyelesaian:

(i) Persamaan vector: $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$

Misalkan $\mathbf{x} = (x, y)$, maka $(x, y) = t(-2, 3)$.

(ii) Persamaan parametrik garis: $x = -2t$ dan $y = 3t$

Contoh 18: Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik $P_0(1, 2, -3)$ dan paralel dengan vector $\mathbf{v} = (4, -5, 1)$.

Penyelesaian:

(i) Persamaan vector: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$

Misalkan $\mathbf{x} = (x, y, z)$, maka $(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(4, -5, 1)$

(ii) Persamaan parametrik garis: $x = 1 + 4t$, $y = 2 - 5t$, $z = -3 + t$

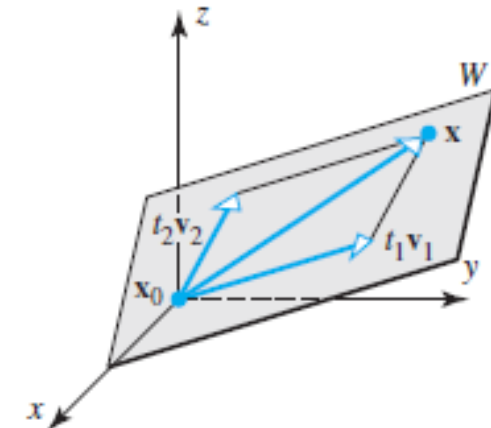
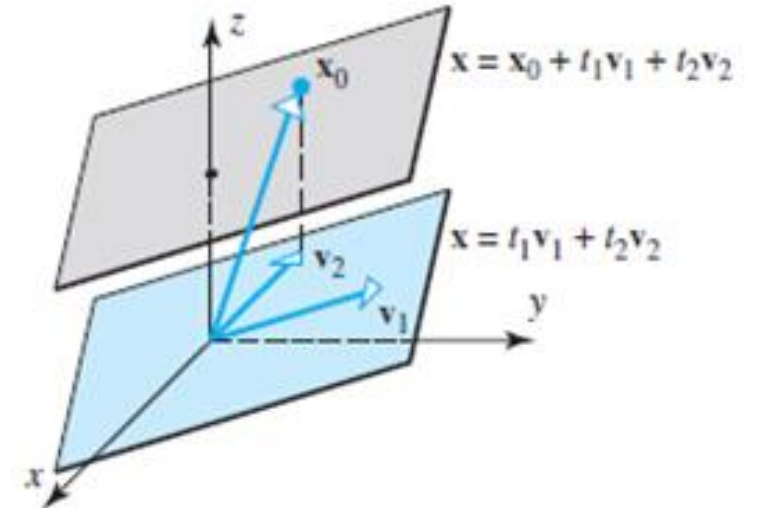
Vektor dan persamaan parametrik bidang di \mathbb{R}^3

- Misalkan W adalah bidang di \mathbb{R}^3 yang mengandung titik \mathbf{x}_0 dan paralel dengan vektor \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 . Persamaan bidang yang melalui \mathbf{x}_0 dan paralel dengan \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$$

- Jika $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, maka persamaan bidang yang melalui titik asal menjadi

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$$



Contoh 19: Tentukan persamaan garis (dalam notasi vector) dan persamaan parametrik garis yang melalui titik asal dan parallel dengan vector $\mathbf{v} = (5, -3, 6, 1)$.

Penyelesaian:

(i) Persamaan garis (dalam notasi vektor): $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$

Misalkan $\mathbf{x} = (w, x, y, z)$, maka $(w, x, y, z) = t(5, -3, 6, 1)$.

(ii) Persamaan parametrik garis: $w = 5t, x = -3t, y = 6t, z = t$

Contoh 20: Tentukan persamaan bidang (dalam notasi vektor) dan persamaan parametrik bidang yang melalui titik $\mathbf{x}_0(2, -1, 0, 3)$ dan paralel dengan vector $\mathbf{v}_1 = (1, 5, 2, -4)$ dan $\mathbf{v}_2 = (0, 7, -8, 6)$.

Penyelesaian:

(i) Persamaan bidang (dalam notasi vektor): $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$

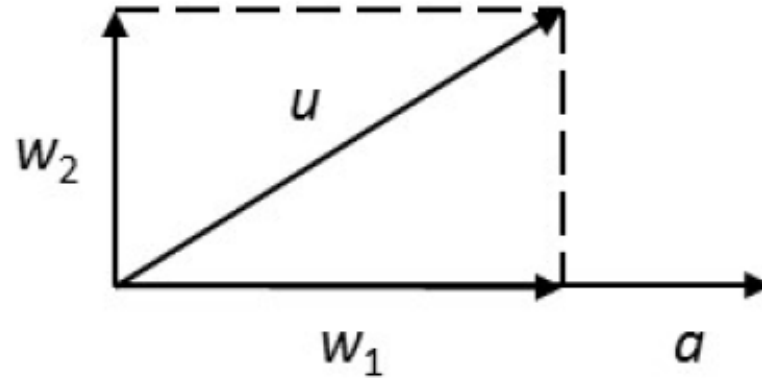
Misalkan $\mathbf{x} = (w, x, y, z)$, maka $(w, x, y, z) = (2, -1, 0, 3) + t_1(1, 5, 2, -4) + t_2(0, 7, -8, 6)$

(ii) Persamaan parametrik bidang: $w = 2 + t_1, x = -1 + 5t_1 + 7t_2, y = 2t_1 - 8t_2, z = 3 - 4t_1 + 6t_2$

Latihan soal (diambil dari soal UTS)

1. Diketahui tiga buah vektor $\mathbf{u}=(2,-6,2)$, $\mathbf{v}=(0,4,-2)$, $\mathbf{w}=(2,2,-4)$.
 - a). Perlihatkan apakah $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}\}$ merupakan himpunan orthogonal
 - b). Tentukan panjang vektor proyeksi orthogonal \mathbf{u} pada vektor \mathbf{w}
2. Diberikan 4 buah titik di ruang yakni, $A(0,1,-1)$; $B(1,1,2)$; $C(2,2,1)$, $P(3,3,3)$
 - a). Tentukan persamaan bidang yang melewati titik A, B , dan C dalam bentuk vektor.
 - b). Pertanyaan sama dengan a) dengan menggunakan normal bidang
 - c). Hitunglah jarak titik P ke bidang tersebut.
 - d). Hitunglah luas segitiga ABC .

3. Perhatikan gambar berikut



w_1 adalah proyeksi vektor $u=(2,1,1,2)$ pada vektor $a=(4,-4,2,-2)$, sedangkan w_2 adalah vektor yang orthogonal dengan vektor a . Jika vektor u dinyatakan sebagai $w_1 + w_2$, tentukan w_1 dan w_2 .

4. Tentukan normal dari bidang yang melewati tiga titik $P(9,0,4)$, $Q(-1,4,3)$, dan $R(0,6,-2)$, kemudian tentukan persamaan bidangnya.

5. Diberikan dua persamaan bidang sebagai berikut:

$$3x - 4y + 2z = 1$$

$$x - 2y + 2z = 1$$

a) Periksa apakah dua bidang tersebut parallel atau berpotongan, berikan alasan. (*nilai 10*)

b) Jika bidang tersebut berpotongan, tentukan persamaan garis yang merupakan perpotongannya, jika parallel tentukan jaraknya. (*nilai 10*)

6. Diberikan dua persamaan bidang sebagai berikut:

$$3x - 4y + z = 1$$

$$6x - 8y + 2z = 3$$

a). Periksa apakah dua bidang tersebut parallel atau berpotongan.

b). Jika bidang tersebut parallel tentukan jarak antara keduanya.

Bersambung ke Bagian 3