Pokok Bahasan Bab 4
Nilai Ekspektasi

Probabilitas & Statistika

Materi yang Dibahas:

1. Rataan
2. Variansi
3. Kovariansi dan koefisien korelasi
4. Kombinasi Linear rataan dan variansi
5. Teorema Chebyshev

Institut Teknologi Bandung

Global Development Learning Network

Tim Penyusun

Judhi Santoso
Harlili
Dwi H. Widyantoro

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Global Development Learning Network

Contoh (1)

Dua buah mata uang (muka dan belakang) dilempar 16 kali. X: banyak muka per lemparan. Tanpa muka 4 kali, satu muka 7 kali, dua muka 5 kali.

Rata-rata kemunculan muka dari percobaan:

$$\frac{(0)(4)+(1)(7)+(2)(5)}{16}=\frac{17}{16}=1.06$$

Lanjutan Contoh (1)

Padahal, menurut harapan seseorang sebelum melakukan percobaan, dengan harapan jumlah kemunculan adalah *fair*, maka andaikan *X* menyatakan jumlah kemunculan muka, didapat

$$P(X=0) = {}^{1}/_{4}, P(X=1) = {}^{1}/_{2}, P(X=2) = {}^{1}/_{4}$$

sehingga rataan dari *X* adalah

$$\mu = E(X) = (0)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

Definisi rataan dan ekspektasi

Jika *X* variabel random, distribusi peluang adalah *f(x)*, maka **rataan** atau **nilai ekspektasi** *X* adalah

$$\mu = E(x) = \sum_{x} x f(x)$$

jika *X* diskrit, dan

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

jika *X* kontinu

Contoh soal (Example 1)

Suatu produk memiliki 7 komponen, 4 komponen baik dan 3 rusak. Jika diambil 3 dari produk tersebut, berapa rataan produk yang baik.

Distribusi peluang *X*:

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, x = 0, 1, 2, 3$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) \\ &= (0)f(0) + (1)f(1) + (2)f(2) + (3)f(3) \\ &= (1)\left(\frac{12}{35}\right) + (2)\left(\frac{18}{35}\right) + (3)\left(\frac{4}{35}\right) = \frac{12}{7}\end{aligned}$$

Example 4.2

- A salesperson for a medical device company has two appointments on a given day. At the first appointment, he believes that he has a 70 % chance to make the deal, from which he can earn $1000 commission if successful. On the other hand, he thinks he only has a 40 % chance to make the deal at the second appointment, from which, if successful, he can make $1500. What is his expected commission based on his own probability belief? Assume that the appointment results are independent of each other.

Jawab 4.2

: First, we know that the salesperson, for the two appointments, can have 4 possible commission totals: \$0, \$1000, \$1500, and \$2500. We then need to calculate their associated probabilities. By independence, we obtain

$$f(\$0) = (1-0.7)(1-0.4) = 0.18, \quad f(\$2500) = (0.7)(0.4) = 0.28,$$
$$f(\$1000) = (0.7)(1-0.4) = 0.42, \text{ and } f(\$1500) = (1-0.7)(0.4) = 0.12.$$

Therefore, the expected commission for the salesperson is

$$\begin{aligned} E(X) &= (\$0)(0.18) + (\$1000)(0.42) + (\$1500)(0.12) + (\$2500)(0.28) \\ &= \$1300. \end{aligned}$$

Contoh soal

Misalkan *X* adalah variabel random dengan distribusi peluang:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20000}{x^3}, x > 100 \\ 0, \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Hitung rataan *X*.

$$\mu = E(X) = \int_{100}^{\infty} x \frac{20000}{x^3} dx = 200$$

Definisi Ekspektasi 2 Var Random

Misalkan *X* dan *Y* adalah variabel random dengan fungsi densitas gabungan *f(x,y)*. Rataan atau ekspektasi dari variabel random *g(x,y)* adalah

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$$

jika *X* dan *Y* diskrit, dan

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$$

jika *X* dan *Y* kontinu.

Contoh soal 4.7

Hitunglah $E\left(\frac{Y}{X}\right)$ dengan fungsi densitas sbb:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(1+3y^2)}{4}, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{, untuk } x \text{ yang lain}\end{cases}$$

Jawaban

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{y(1+3y^2)}{4} dxdy = \frac{5}{8}$$

Definisi Variansi

Misalkan *X* adalah variabel random dengan distribusi peluang *f(x)* dan rataan μ . Variansi dari *X* adalah:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

jika *X* diskrit, dan

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

jika *X* kontinu.

Akar kuadrat dari variansi disebut dengan **standar deviasi/simpangan baku** dari *X*.

Contoh soal (Example 8)

Diberikan disribusi peluang sbb:

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.4	0.3

Hitunglah variansi dari *X*.

Jawab: $\mu = E(X) = 1(0.3) + 2(0.4) + 3(0.3) = 2.0$

$$\sigma^2 = \sum_{x=1}^{3} (x-2)^2 f(x)$$

$$= (1-2)^2(0.3) + (2-2)^2(0.4) + (3-2)^2(0.3) = 0.6$$

Teorema 4.2

Variansi dari variabel random X adalah

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Contoh soal 1 (Example 9)

Diberikan distribusi diskrit dari variabel random *X* sebagai berikut.

x	0	1	2	3
f(x)	0.51	0.38	0.1	0.01

Hitunglah variansi dari X

Jawab:

$$\mu = 0(0.51) + 1(0.38) + 2(0.1) + 3(0.01) = 0.61$$

$$E(X^2) = 0(0.51) + 1(0.38) + 4(0.1) + 9(0.01) = 0.87$$

$$\sigma^2 = 0.87 - (0.61)^2 = 0.4979$$

Contoh soal 2 (Example 10)

Diberikan distribusi dari *X* sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), 1 < x < 2 \\ \\ 0, \text{ untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Jawab:

$$\mu = E(X) = 2\int_1^2 x(x-1)dx = \frac{5}{3}$$

$$E(X^2) = 2\int_1^2 x^2(x-1)dx = \frac{17}{6}$$

Diperoleh

$$\sigma^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Definisi Kovariansi

Misalkan *X* dan *Y* adalah variabel random dengan distribusi peluang gabungan *f(x, y)*. Kovariansi dari *X* dan *Y* adalah

$$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y)\, f(x,y)$$

jika *X* dan *Y* diskrit, dan

$$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y) f(x,y)\, dxdy$$

Pengertian

Kovariansi antara dua variabel random menunjukkan asosiasi antara dua variabel tersebut, jika kedua variabel tersebut bergerak kearah yang sama maka hasil kali bernilai positif, jika bergerak kearah berlawanan (X membesar dan Y mengecil), maka hasil kali tersebut akan bernilai negatif

Teorema

Kovariansi dua variabel random *X* dan *Y* dengan rataan μ_x dan μ_y adalah

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

Contoh 4.13

Jumlah ballpoint warna biru *X* dan jumlah ballpoint warna merah *Y*, jika dua diambil secara random dari box mempunyai distribusi sbb:

f(x,y)	x=0	x=1	x=2	h(y)
y=0	3/28	9/28	3/28	15/28
y=1	3/14	3/14		3/7
y=2	1/28			1/28
g(x)	5/14	5/18	3/28	1

Hitunglah kovariansi dari *X* dan *Y*

Jawaban

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x,y) \\
&= (0)(0)f(0,0) + (0)(1)f(0,1) \\
&\quad + (1)(0)f(1,0) + (1)(1)f(1,1) + (2)(0)f(2,0) \\
&= f(1,1) = \frac{3}{14}.
\end{aligned}
$$

Jawaban

$$\mu_X = \sum_{x=0}^{2} x g(x) = (0)\left(\frac{5}{14}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{3}{4},$$

$$\mu_Y = \sum_{y=0}^{2} y h(y) = (0)\left(\frac{15}{28}\right) + (1)\left(\frac{3}{7}\right) + (2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{2}.$$

Sehingga Diperoleh

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{56}$$

Contoh soal 4.14

Pelari pria *X* dan pelari wanita *Y* mempunyai distribusi peluang gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \\ \\ 0 \;\; \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Hitunglah kovariansi *X* dan *Y*

Jawaban

Distribusi marginal *X* dan *Y* adalah

$$g(x) = \begin{cases} 4x^3, 0 \le x \le 1 \\ 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \qquad h(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2), 0 \le y \le 1 \\ 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Dari fungsi densitas marginal diatas diperoleh

$$\mu_X = E(X) = \int_0^1 4x^4 dx = \frac{4}{5}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \int_0^1 4y^2(1-y^2) dy = \frac{8}{15}$$

sehingga $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y = \frac{4}{9} - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{4}{225}.$

Koefisien Korelasi

- Variabel random X dan Y dengan covariansi σ_{xy} dan simpangan baku masing-masing σ_x dan σ_y. Koefisien korelasi X, Y adalah ρ_{xy}

    - $\rho_{xy} = (\sigma_{xy})/(\sigma_x)(\sigma_y)$

Latihan

- Hitung nilai koefisien korelasi untuk contoh 4.13
- Hitung nilai koefisien korelasi untuk contoh 4.14

Rataan dari Kombinasi Linear Variabel Random (1)

Teorema:

Jika a dan b adalah konstanta, maka

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

$$E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)].$$

$$E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = E[g(X,Y)] \pm E[h(X,Y)].$$

Rataan dari Kombinasi Linear Variabel Random (2)

Permintaan minuman dalam liter per minggu dinyatakan dalam fungsi variabel random $g(X) = X^2 + X - 2$, di mana X mempunyai fungsi densitas:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 1 < x < 2 \\ 0, & untuk\ x\ yang\ lain \end{cases}$$

Tentukan nilai rataan dari permintaan minuman tersebut.

- Jawab:

$E(X) = X^2 + X - 2 = E(X^2) + E(X) - (2)$

$= \frac{17}{6} + \frac{5}{3} - 2 = \frac{5}{2}$

Rataan dari Kombinasi Linear Variabel Random (3)

- Teorema Sifat Rataan dari Dua Variabel Random yang Saling Bebas:
  Misalkan X dan Y adalah dua variabel random yang saling bebas, maka:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Example 4.21

- Perlihatkan X dan Y saling bebas.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Jawab 4.21

By definition,

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{x^2 y(1+3y^2)}{4}\, dxdy = \frac{5}{6},\ E(X) = \frac{4}{3},\ \text{and } E(Y) = \frac{5}{8}.$$

Hence,

$$E(X)E(Y) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{5}{6} = E(XY).$$

Variansi dari Kombinasi Linear Variabel Random (1)

- Teorema Menghitung Variansi dari Kombinasi Linear Variabel Random: Jika a dan b adalah konstanta maka

$$\sigma^2_{aX+b} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2$$

Variansi dari Kombinasi Linear Variabel Random (2)

- Teorema Menghitung Variansi dari Kombinasi Linear Dua Variabel Random: Jika X dan Y adalah variabel random dengan distribusi peluang $f(x, y)$, maka

$$\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}$$

Variansi dari Kombinasi Linear Variabel Random (3)

- Contoh Teorema-Teorema Menghitung Variansi:
  Jika X dan Y adalah variabel random dengan variansi $\sigma^2_X = 2$, $\sigma^2_Y = 4$ dan kovariansi $\sigma_{XY} = -2$, hitunglah variansi dari variabel random $Z = 3X - 4Y + 8$.
- Jawab:
  $\sigma^2_Z = \sigma^2_{3X-4Y+8} = \sigma^2_{3X-4Y}$
  $= 9\sigma^2_X + 16\sigma^2_Y - 24\sigma_{XY} = 130$

Teorema Chebyshev

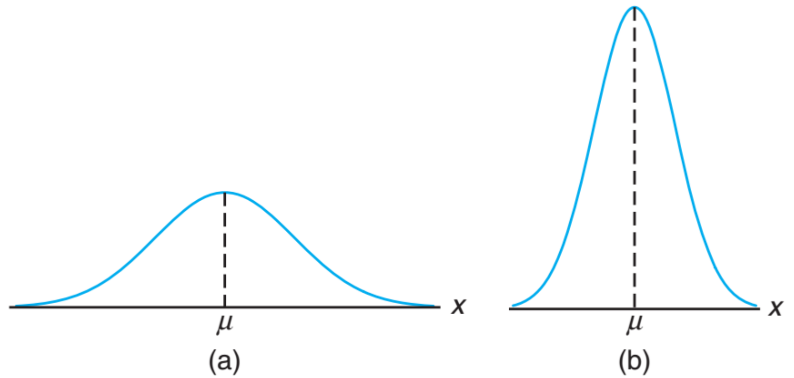

Figure 4.2: Variability of continuous observations about the mean.

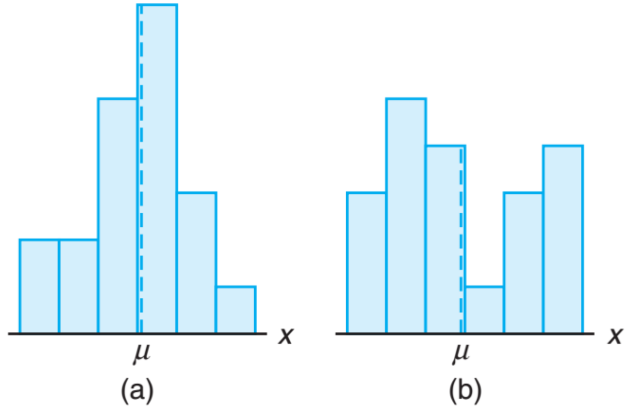

Figure 4.3: Variability of discrete observations about the mean.

Teorema Chebyshev (1)

- Teorema Chebyshev:
  Probabilitas dari sebarang variabel random X dalam selang k simpangan baku dari rataan sekurang-kurangnya $1 - 1/k^2$, atau

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Teorema Chebyshev (4)

- Contoh Penggunaan Teorema Chebyshev:
  Variabel random X mempunyai rataan μ=8 dan variansi σ^2 = 9, serta distribusi peluang tidak diketahui. Tentukan $P(-4 < x < 20)$.

- Jawab:
  $P(-4 < x < 20) = P[8-(4)(3) < x < 8+(4)(2)] \geq \frac{15}{16}$

Example 4.27

A random variable X has a mean $\mu = 8$, a variance $\sigma^2 = 9$, and an unknown probability distribution. Find

(a) $P(-4 < X < 20)$,

(b) $P(|X - 8| \geq 6)$.

Jawab 4.27

(a) $P(-4 < X < 20) = P[8 - (4)(3) < X < 8 + (4)(3)] \geq \frac{15}{16}$.

(b) $P(|X - 8| \geq 6) = 1 - P(|X - 8| < 6) = 1 - P(-6 < X - 8 < 6)$

$$= 1 - P[8 - (2)(3) < X < 8 + (2)(3)] \leq \frac{1}{4}.$$

UTS Sem1-2011/2012

- Seorang pemrogram melakukan *debug* perangkat lunak simulasi suatu sistem dan diperoleh rata-rata waktu antar kesalahan adalah 900 jam dengan simpangan baku adalah 50 jam. Berapa peluang paling banyak jika waktu antar kesalahan adalah 700 jam? Gunakan teorema Chebyshev dan asumsi bahwa distribusi data simetri di sekitar rata-rata.

Jawab UTS Sem 1-2011/2012

- Chebyshev: $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$
- $\mu = 900$; $\sigma = 50$ dan $700 < 900$ maka
- $700 = \mu - k\sigma = 900 - 50k$; $900 - 700 = 50k$;
  $200 = 50k$; $K = 4$
- $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$
- $P(700 < X < 1100) \geq 1 - 1/k^2 \geq 1 - 1/16 \geq 1 - 0.0625$
- Distribusi data simetri maka $P(X \leq 700)$ paling banyak $0.0625/2 = 0.03125$

PR

- Bab4 : # 55, 75