

# Relasi dan Fungsi

## Bagian 2 (Update 2023)

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

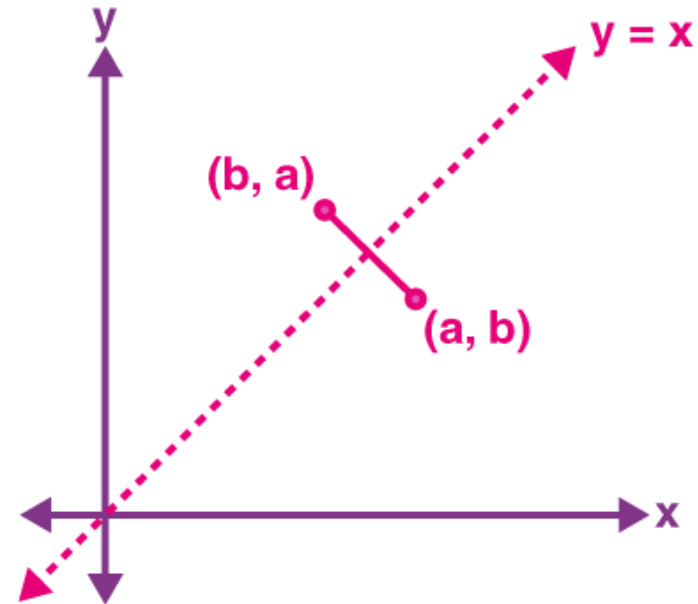
Oleh: Rinaldi Munir

**Program Studi Teknik Informatika**  
**STEI - ITB**

## Relasi Inversi

- Misalkan  $R$  adalah relasi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$ . Invers dari relasi  $R$ , dilambangkan dengan  $R^{-1}$ , adalah relasi dari  $B$  ke  $A$  yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$



**Contoh 17.** Misalkan  $P = \{2, 3, 4\}$  dan  $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$ . Jika kita definisikan relasi  $R$  dari  $P$  ke  $Q$  dengan

$$(p, q) \in R \text{ jika } p \text{ habis membagi } q$$

maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

$R^{-1}$  adalah *invers* dari relasi  $R$ , yaitu relasi dari  $Q$  ke  $P$  dengan

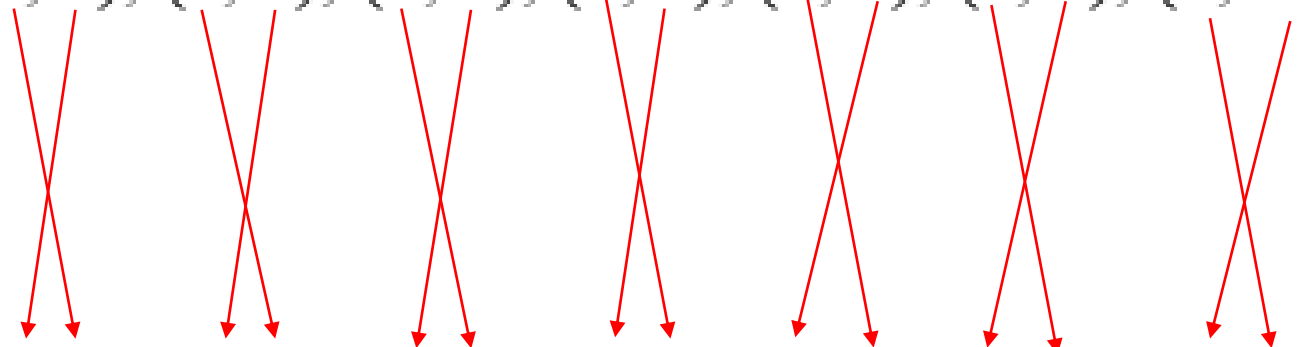
$$(q, p) \in R^{-1} \text{ jika } q \text{ adalah kelipatan dari } p$$

maka kita peroleh

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$



Jika  $M$  adalah matriks yang merepresentasikan relasi  $R$ ,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi  $R^{-1}$ , misalkan  $N$ , diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks  $M$ ,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Mengkombinasikan Relasi

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.
- Jika  $R_1$  dan  $R_2$  masing-masing adalah relasi dari himpuna  $A$  ke himpunan  $B$ , maka  $R_1 \cap R_2$ ,  $R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 - R_2$ , dan  $R_1 \oplus R_2$  juga adalah relasi dari  $A$  ke  $B$ .

**Contoh 18.** Misalkan  $A = \{a, b, c\}$  dan  $B = \{a, b, c, d\}$ .

$$\text{Relasi } R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$$\text{Relasi } R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

- Jika relasi  $R_1$  dan  $R_2$  masing-masing dinyatakan dengan matriks  $M_{R_1}$  dan  $M_{R_2}$ , maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} \quad \text{dan} \quad M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$



**Contoh 19.** Misalkan bahwa relasi  $R_1$  dan  $R_2$  pada himpunan  $A$  dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Komposisi Relasi

- Misalkan  $R$  adalah relasi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$ , dan  $S$  adalah relasi dari himpunan  $B$  ke himpunan  $C$ . Komposisi  $R$  dan  $S$ , dinotasikan dengan  $S \circ R$ , adalah relasi dari  $A$  ke  $C$  yang didefinisikan oleh

$$S \circ R = \{ (a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ dan untuk beberapa } b \in B, (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S \}$$

**Contoh 20.** Misalkan

$$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$

adalah relasi dari himpunan  $\{1, 2, 3\}$  ke himpunan  $\{2, 4, 6, 8\}$  dan

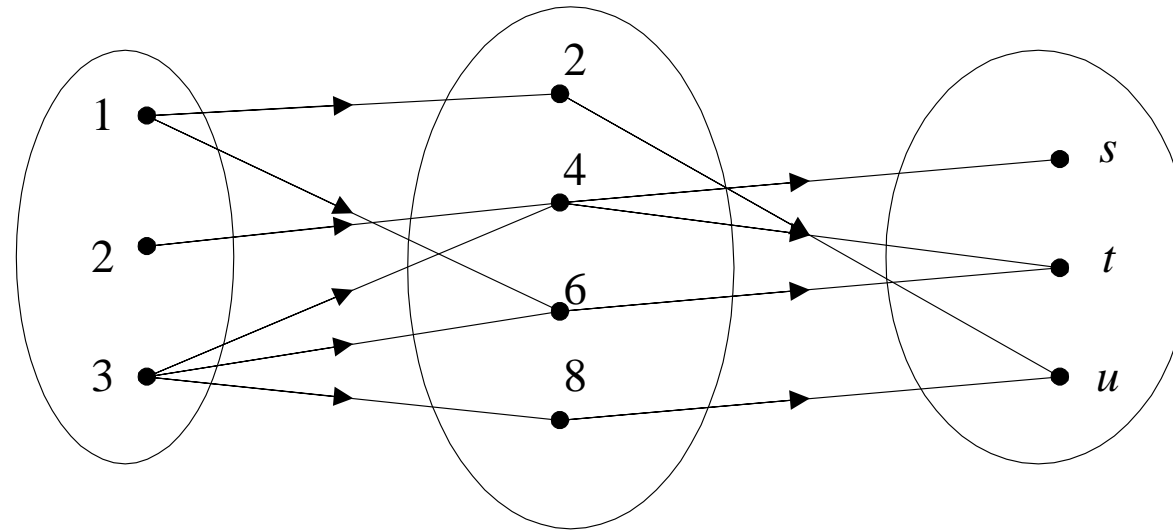
$$S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

adalah relasi dari himpunan  $\{2, 4, 6, 8\}$  ke himpunan  $\{s, t, u\}$ .

Maka komposisi relasi  $R$  dan  $S$  adalah

$$S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)\}$$

Komposisi relasi  $R$  dan  $S$  lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



- Jika relasi  $R_1$  dan  $R_2$  masing-masing dinyatakan dengan matriks  $M_{R_1}$  dan  $M_{R_2}$ , maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \cdot M_{R_2}$$

yang dalam hal ini operator “.” sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan “ $\wedge$ ” dan tanda tambah dengan “ $\vee$ ”.

**Contoh 21.** Misalkan bahwa relasi  $R_1$  dan  $R_2$  pada himpunan  $A$  dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan  $R_2 \circ R_1$  adalah

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \cdot M_{R_2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $R^n$  menyatakan komposisi relasi dengan dirinya sendiri sebanyak  $n$  kali:

$$R^n = R \circ R \circ \dots \circ R \quad (\text{sebanyak } n \text{ kali}) \quad \text{Contoh: } R^3 = R \circ R \circ R$$

dan

$$M_{R^n} = M_R^{[n]}$$

- Oleh karena

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

maka

$$M_{R^{n+1}} = M_R \cdot M_R^{[n]} \quad (\text{catatan: } M_R \cdot M_R^{[n]} = M_R^{[n]} \cdot M_R)$$

# Relasi n-ary

- Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan.
- Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi *n-ary* (baca: ener).
- Jika  $n = 2$ , maka relasinya dinamakan relasi biner ( $bi = 2$ ). Relasi *n-ary* mempunyai terapan penting di dalam basisdata.
- Misalkan  $A_1, A_2, \dots, A_n$  adalah himpunan. Relasi *n-ary*  $R$  pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , atau dengan notasi  $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .
- Himpunan  $A_1, A_2, \dots, A_n$  disebut daerah asal relasi dan  $n$  disebut **derajat**.



**Contoh 22.** Misalkan

$$NIM = \{13598011, 13598014, 13598015, 13598019, \\ 13598021, 13598025\}$$

$$Nama = \{Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan\}$$

$$MatKul = \{Matematika Diskrit, Algoritma, Struktur Data, \\ Arsitektur Komputer\}$$

$$Nilai = \{A, B, C, D, E\}$$

Relasi  $MHS$  terdiri dari 5-tupel  $(NIM, Nama, MatKul, Nilai)$ :

$$MHS \subseteq NIM \times Nama \times MatKul \times Nilai$$

Satu contoh relasi yang bernama *MHS* adalah

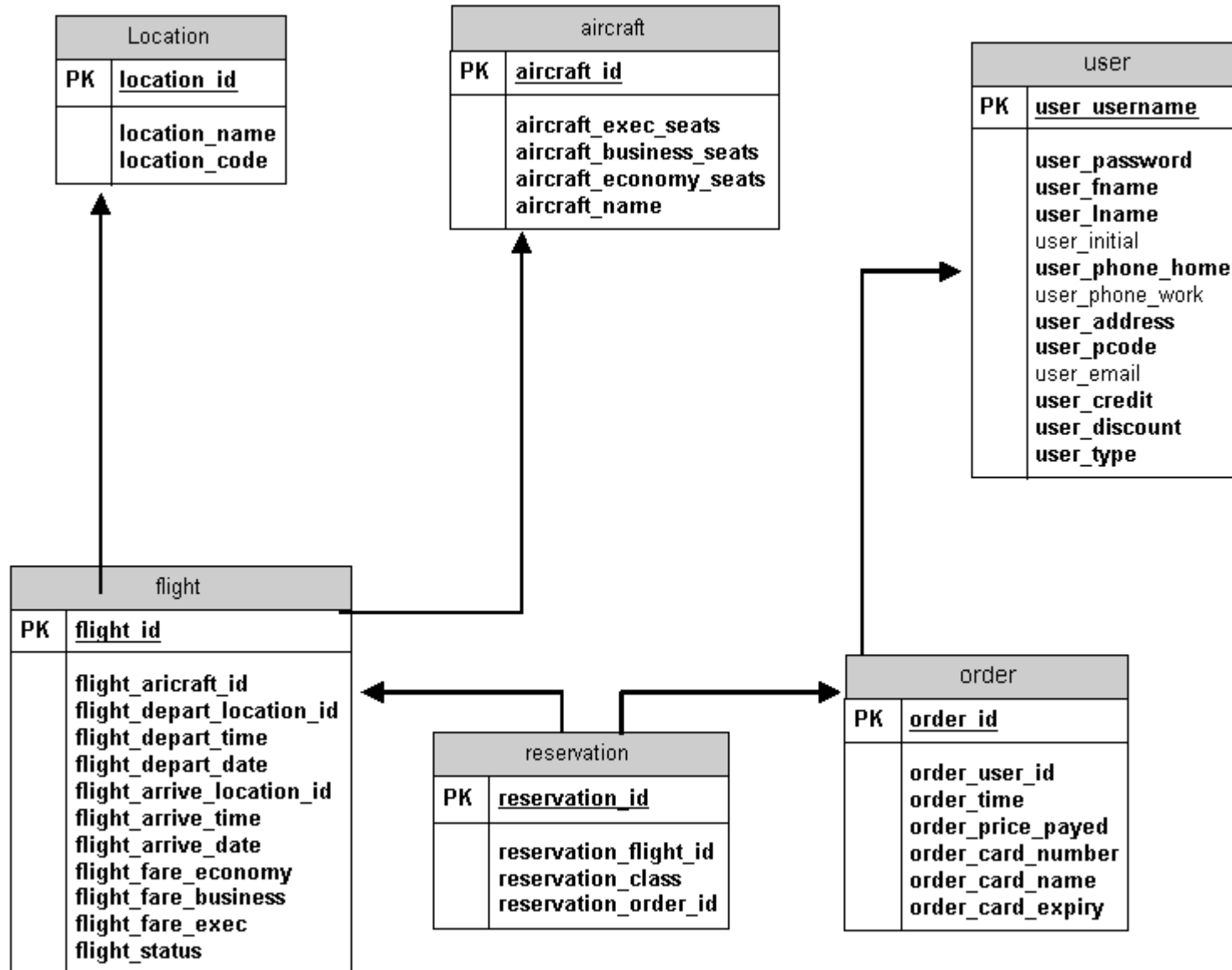
$$\begin{aligned} MHS = \{ & (13598011, \text{Amir, Matematika Diskrit, A}), \\ & (13598011, \text{Amir, Arsitektur Komputer, B}), \\ & (13598014, \text{Santi, Arsitektur Komputer, D}), \\ & (13598015, \text{Irwan, Algoritma, C}), \\ & (13598015, \text{Irwan, Struktur Data C}), \\ & (13598015, \text{Irwan, Arsitektur Komputer, B}), \\ & (13598019, \text{Ahmad, Algoritma, E}), \\ & (13598021, \text{Cecep, Algoritma, A}), \\ & (13598021, \text{Cecep, Arsitektur Komputer, B}), \\ & (13598025, \text{Hamdan, Matematika Diskrit, B}), \\ & (13598025, \text{Hamdan, Algoritma, A, B}), \\ & (13598025, \text{Hamdan, Struktur Data, C}), \\ & (13598025, \text{Hamdan, Ars. Komputer, B}) \\ & \} \end{aligned}$$

Relasi *MHS* di atas juga dapat ditulis dalam bentuk Tabel:

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

- Basisdata (*database*) adalah kumpulan tabel.
- Salah satu model basisdata adalah **model basisdata relasional** (*relational database*).
- Model basisdata ini didasarkan pada konsep relasi *n-ary*.
- Pada basisdata relasional, satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada tabel disebut **atribut**.
- Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada.

## Contoh basis data relasional:



- Setiap tabel pada basisdata diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah *file*.
- Satu baris data pada tabel menyatakan sebuah *record*, dan setiap atribut menyatakan sebuah *field*.
- Secara fisik basisdata adalah kumpulan *file*, sedangkan *file* adalah kumpulan *record*, setiap *record* terdiri atas sejumlah *field*.
- 
- Atribut khusus pada tabel yang mengidentifikasikan secara unik elemen relasi disebut **kunci** (*key*).

- Operasi yang dilakukan terhadap basisdata dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*.
- Contoh *query*:
  - “tampilkan semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit”
  - “tampilkan daftar nilai mahasiswa dengan NIM = 13598015”
  - “tampilkan daftar mahasiswa yang terdiri atas NIM dan mata kuliah yang diambil”
- *Query* terhadap basisdata relasional dapat dinyatakan secara abstrak dengan operasi pada relasi *n-ary*.
- Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah seleksi, proyeksi, dan join.

## *Seleksi*

Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu.

Operator:  $\sigma$

**Contoh 23.** Misalkan untuk relasi MHS kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematik Diskrit. Operasi seleksinya adalah

$$\sigma_{\text{Matkul}=\text{"Matematika Diskrit"}}(\text{MHS})$$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A) dan  
(13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B)



## ***Proyeksi***

Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali.

Operator:  $\pi$

### **Contoh 24.** Operasi proyeksi

$\pi_{\text{Nama, MatKul, Nilai}} (\text{MHS})$

menghasilkan Tabel 3.5. Sedangkan operasi proyeksi

$\pi_{\text{NIM, Nama}} (\text{MHS})$

menghasilkan Tabel 3.6.

**Tabel 3.5**

Nama	MatKul	Nilai
Amir	Matematika Diskrit	A
Amir	Arsitektur Komputer	B
Santi	Algoritma	D
Irwan	Algoritma	C
Irwan	Struktur Data	C
Irwan	Arsitektur Komputer	B
Ahmad	Algoritma	E
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B
Hamdan	Matematika Diskrit	B
Hamdan	Algoritma	A
Hamdan	Struktur Data	C
Hamdan	Arsitektur Komputer	B

**Tabel 3.6**

NIM	Nama
13598011	Amir
13598014	Santi
13598015	Irwan
13598019	Ahmad
13598021	Cecep
13598025	Hamdan

## ***Join***

Operasi *join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama.

Operator:  $\tau$

**Contoh 25.** Misalkan relasi *MHS1* dinyatakan dengan Tabel 3.7 dan relasi *MHS2* dinyatakan dengan Tabel 3.8.

Operasi *join*

$$\tau_{\text{NIM, Nama}}(\text{MHS1, MHS2})$$

menghasilkan Tabel 3.9.

**Tabel 3.7**    **MHS1**

NIM	Nama	JK
13598001	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

**Tabel 3.8**    **MHS2**

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus I	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statistik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

**Tabel 3.9**     $\tau_{\text{NIM, Nama}}$  (**MHS1, MHS2**)

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598001	Hananto	L	Basisdata	B
13598004	Heidi	W	Kalkulus I	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	L	Agama	A

# SQL

- Bahasa khusus untuk *query* di dalam basisdata disebut *SQL (Structured Query Language)*.
- Bahasa ini dirancang agar dapat merealisasikan *query* abstrak yang sudah dijelaskan. Misalnya,

```
SELECT NIM, Nama, MatKul, Nilai  
FROM MHS  
WHERE MatKul = 'Matematika Diskrit'
```

adalah bahasa *SQL* yang bersesuaian untuk *query* abstrak

$\sigma_{Matkul="Matematika Diskrit"}(MHS)$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A)  
(13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B).

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

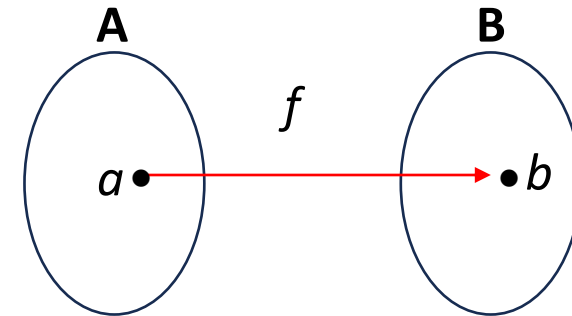
# Fungsi

- Misalkan  $A$  dan  $B$  himpunan. Relasi biner  $f$  dari  $A$  ke  $B$  merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam  $A$  dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam  $B$ .

- Jika  $f$  adalah fungsi dari  $A$  ke  $B$  kita menuliskan

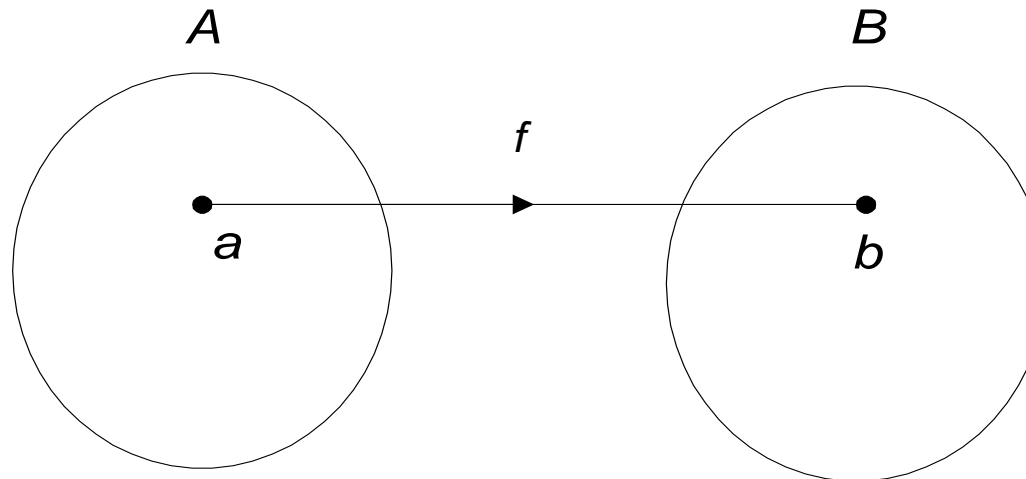
$$f: A \rightarrow B$$

yang artinya  $f$  **memetakan**  $A$  ke  $B$ .



- $A$  disebut **daerah asal** (*domain*) dari  $f$  dan  $B$  disebut **daerah tujuan** (*codomain*) dari  $f$ .
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.
- Kita menuliskan  $f(a) = b$  jika elemen  $a$  di dalam  $A$  dihubungkan dengan elemen  $b$  di dalam  $B$ .

- Jika  $f(a) = b$ , maka  $b$  dinamakan **bayangan** (*image*) dari  $a$  dan  $a$  dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari  $b$ .
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan  $f$  disebut **jelajah** (*range*) dari  $f$ . Perhatikan bahwa jelajah dari  $f$  adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari  $B$ .



- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  1. Tiap elemen di dalam himpunan  $A$  harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan  $f$ .
  2. Frasa “dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam  $B$ ” berarti bahwa jika  $(a, b) \in f$  dan  $(a, c) \in f$ , maka  $b = c$ .



- Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

1. Himpunan pasangan terurut.  
Seperti pada relasi.

2. Formula pengisian nilai (*assignment*).  
Contoh:  $f(x) = 2x + 10$ ,  $f(x) = x^2$ , dan  $f(x) = 1/x$ .

3. Kata-kata  
Contoh: “ $f$  adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner”.

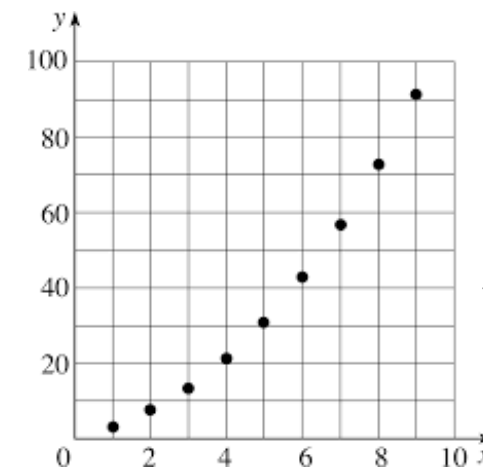
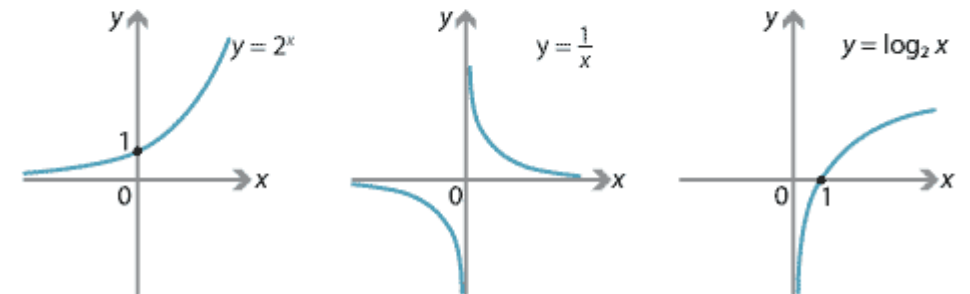
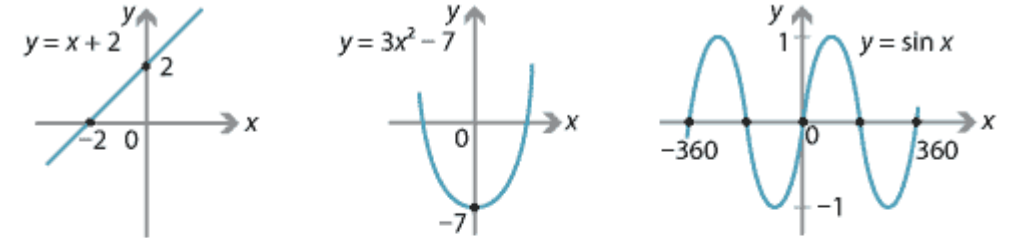
4. Kode program (*source code*)  
Contoh: Fungsi menghitung  $|x|$

```

function abs (x:integer) :integer;
begin
    if x < 0 then
        abs := -x
    else
        abs := x;
end;

```

## 5. Kurva/grafik dalam bidang kartesian



← fungsi diskrit

### Contoh 26. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$  adalah fungsi dari  $A$  ke  $B$ . Di sini  $f(1) = u$ ,  $f(2) = v$ , dan  $f(3) = w$ . Daerah asal dari  $f$  adalah  $A$  dan daerah tujuan adalah  $B$ . Jelajah dari  $f$  adalah  $\{u, v, w\}$ , yang dalam hal ini sama dengan himpunan  $B$ .

### Contoh 27. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$  adalah fungsi dari  $A$  ke  $B$ , meskipun  $u$  merupakan bayangan dari dua elemen  $A$ . Daerah asal fungsi adalah  $A$ , daerah tujuannya adalah  $B$ , dan jelajah fungsi adalah  $\{u, v\}$ .

### Contoh 28. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

dari  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$  bukan fungsi, karena tidak semua elemen  $A$  dipetakan ke  $B$ .

### Contoh 29. Relasi

$$f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$$

dari  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$  bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen  $B$ , yaitu  $u$  dan  $v$ .

**Contoh 30.** Misalkan  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  didefinisikan oleh  $f(x) = x^2$ . Daerah asal dan daerah tujuan dari  $f$  adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari  $f$  adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

**Contoh 31.** Misalkan  $A$  adalah himpunan mahasiswa di ITB. Manakah dari pemetaan berikut yang mendefinisikan sebuah fungsi pada himpunan  $A$ ?

- (i) Setiap mahasiswa memetakan NIM (Nomor Induk Mahasiswa).
- (ii) Setiap mahasiswa memetakan nomor *handphone*-nya.
- (iii) Setiap mahasiswa memetakan dosen walinya.
- (iv) Setiap mahasiswa memetakan anaknya.

Jawaban:

- (i) Ya, karena setiap mahasiswa hanya mempunyai satu buah NIM.
- (ii) Tidak, karena ada mahasiswa yang mempunyai lebih dari satu nomor HP atau tidak mempunyai HP sama sekali.
- (iii) Ya, karena setiap mahasiswa hanya mempunyai 1 orang dosen wali.
- (iv) Tidak, jika ada mahasiswa yang belum menikah.

**Contoh 32.** Misalkan  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  didefinisikan oleh  $f(x) = \sqrt{x}$ . Apakah  $f$  sebuah fungsi? Mengapa?

Jawaban:

- Persamaan  $f(x) = \sqrt{x}$  bukanlah sebuah fungsi di dalam himpunan bilangan riil, karena tidak semua nilai  $x$  di dalam  $\mathbf{R}$  dipetakan oleh  $f$  ke  $\mathbf{R}$ . Relasi  $f$  hanya terdefinisi untuk nilai-nilai  $x \geq 0$ , untuk nilai  $x$  negatif tidak ada akar pangkat duanya.
- Namun, jika daerah asal dan daerah tujuan fungsi diubah, misalnya  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  atau diubah menjadi  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ , dalam hal ini  $D = \{x \mid x \geq 0\}$ , maka  $f(x) = \sqrt{x}$  adalah sebuah fungsi.
- Perhatikan bahwa  $f(x) = \sqrt{x}$  berbeda artinya dengan  $f(x) = \pm\sqrt{x}$ . Penulisan  $f(x) = \sqrt{x}$  artinya hanya untuk akar bernilai positif (*principal root*)

**Contoh 33.** Tentukan daerah asal fungsi yang berbentuk  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

Jawaban: Fungsi  $f$  hanya terdefinisi untuk  $x^2 - 5x + 6 > 0$

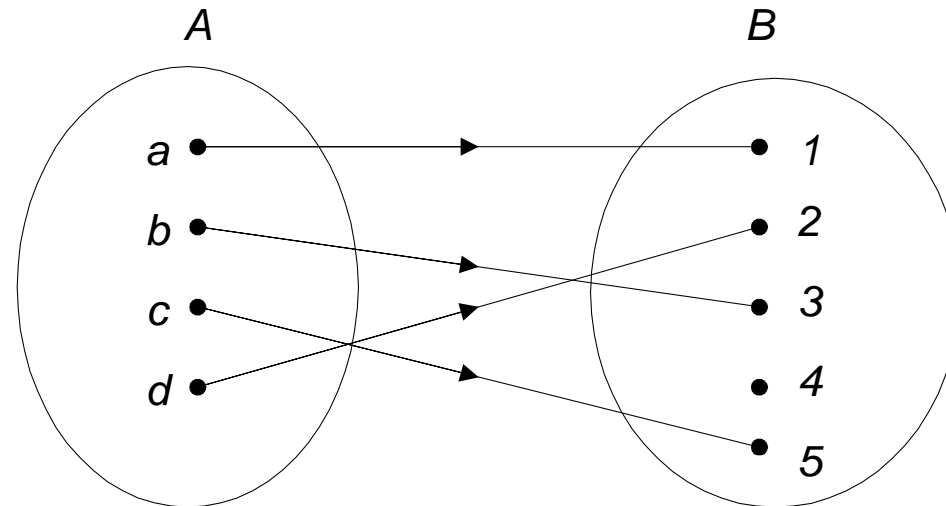
$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$(x - 2)(x - 3) > 0$$

$$x < 2 \text{ atau } x > 3$$

Jadi, daerah asal  $f$  adalah  $\{x \mid x < 2 \text{ atau } x > 3, x \in \mathbf{R}\}$

- Fungsi  $f$  dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan  $A$  yang memiliki bayangan sama.



### Contoh 34. Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w, x\}$  adalah fungsi satu-ke-satu,

Tetapi relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$  bukan fungsi satu-ke-satu, karena  $f(1) = f(2) = u$ .

**Contoh 35.** Misalkan  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ . Tentukan apakah  $f(x) = x^2 + 1$  dan  $f(x) = x - 1$  merupakan fungsi satu-ke-satu?

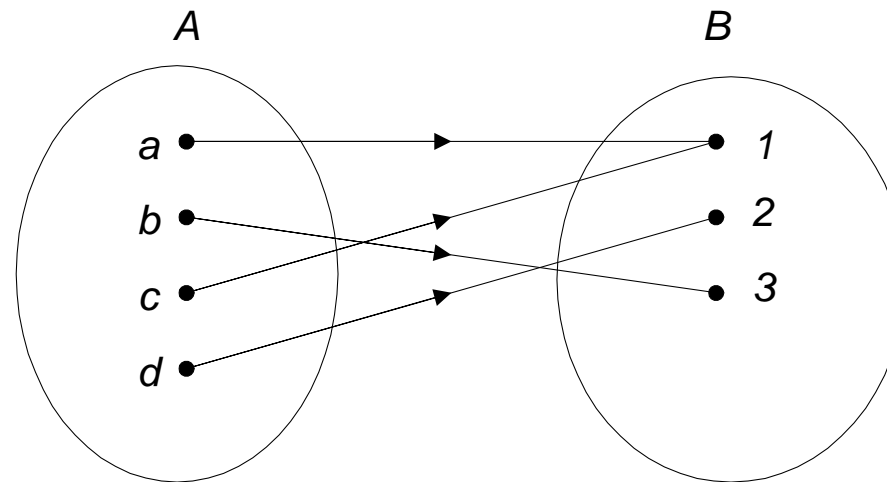
Penyelesaian:

- (i)  $f(x) = x^2 + 1$  bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua  $x$  yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya  $f(2) = f(-2) = 5$  padahal  $-2 \neq 2$ .
- (ii)  $f(x) = x - 1$  adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk  $a \neq b$ ,  
 $a - 1 \neq b - 1$ .

Misalnya untuk  $x = 2$ ,  $f(2) = 1$  dan untuk  $x = -2$ ,  $f(-2) = -3$ .



- Fungsi  $f$  dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan  $B$  merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan  $A$ .
- Dengan kata lain seluruh elemen  $B$  merupakan jelajah dari  $f$ . Fungsi  $f$  disebut fungsi pada himpunan  $B$ .



### Contoh 36. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

dari  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$  bukan fungsi pada karena  $w$  tidak termasuk jelajah dari  $f$ .

Relasi

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$$

dari  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$  merupakan fungsi pada karena semua anggota  $B$  merupakan jelajah dari  $f$ .

**Contoh 37.** Misalkan  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ . Tentukan apakah  $f(x) = x^2 + 1$  dan  $f(x) = x - 1$  merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

- (i)  $f(x) = x^2 + 1$  bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari  $f$ .
- (ii)  $f(x) = x - 1$  adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat  $y$ , selalu ada nilai  $x$  yang memenuhi, yaitu  $y = x - 1$  akan dipenuhi untuk  $x = y + 1$ .

- Fungsi  $f$  dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijektif** (*bijective*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

### Contoh 38. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

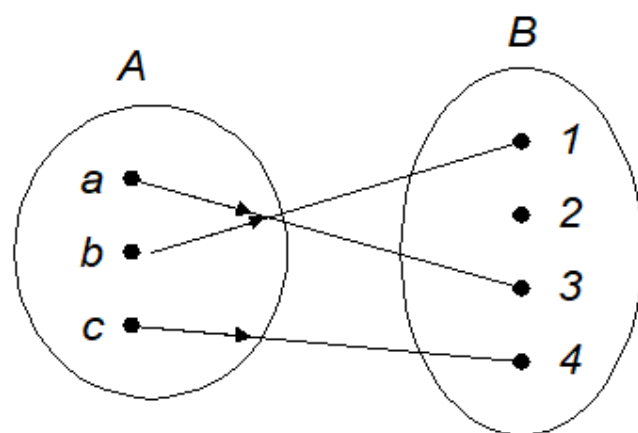
dari  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$  adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena  $f$  adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

### Contoh 39. Fungsi

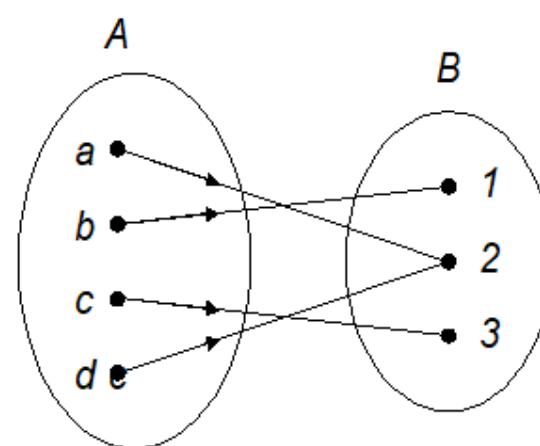
$$f(x) = x - 1$$

merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena  $f$  adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

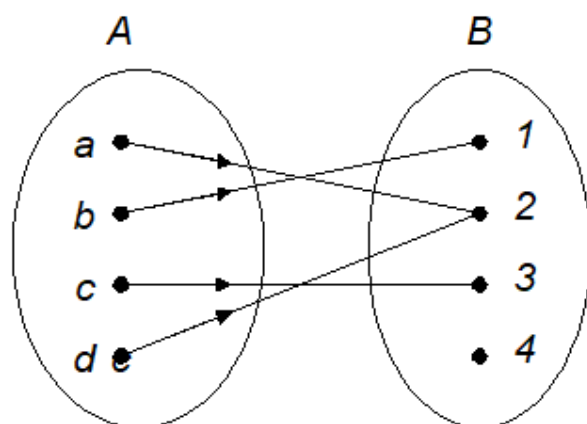
Fungsi satu-ke-satu,  
bukan pada



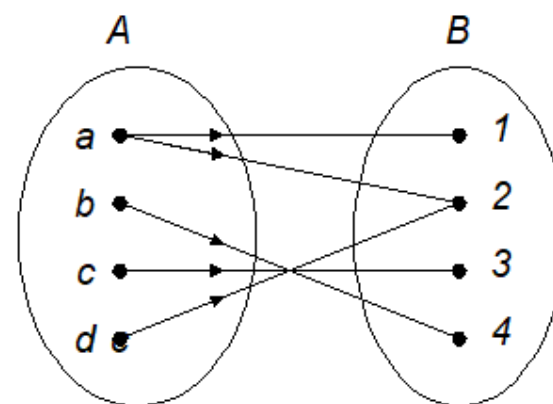
Fungsi pada,  
bukan satu-ke-satu

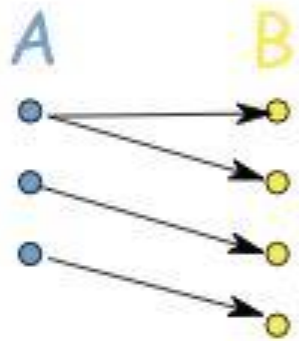


Bukan fungsi satu-ke-satu  
maupun pada



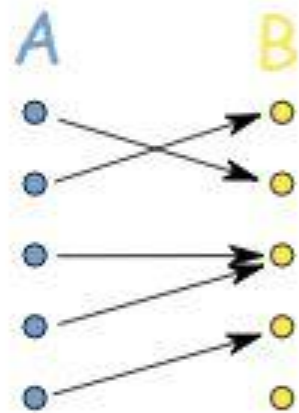
Bukan fungsi





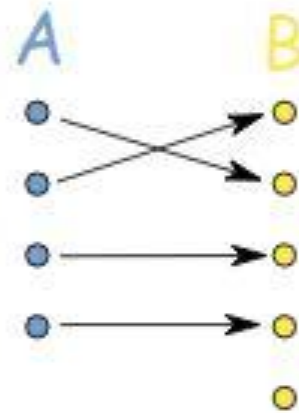
NOT a  
Function

*A has many B*



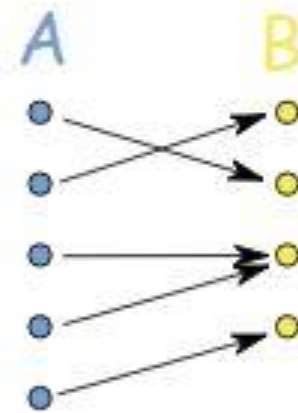
General  
Function

*B can have many A*



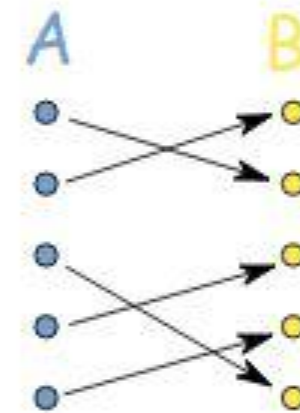
Injective  
(not surjective)

*B can't have many A*



Surjective  
(not injective)

*Every B has some A*



Bijjective  
(injective, surjective)

*A to B, perfectly*

<https://www.aplustopper.com/injective-surjective-bijective/>

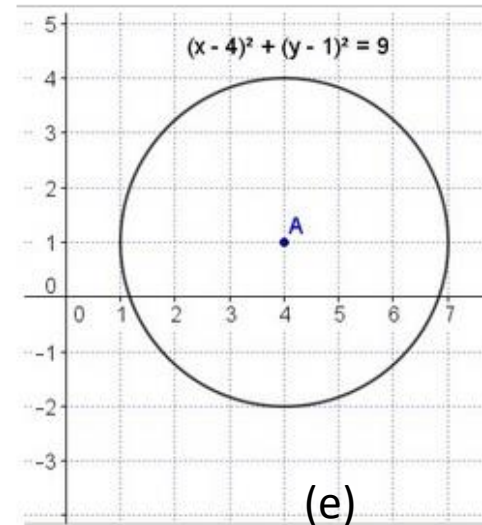
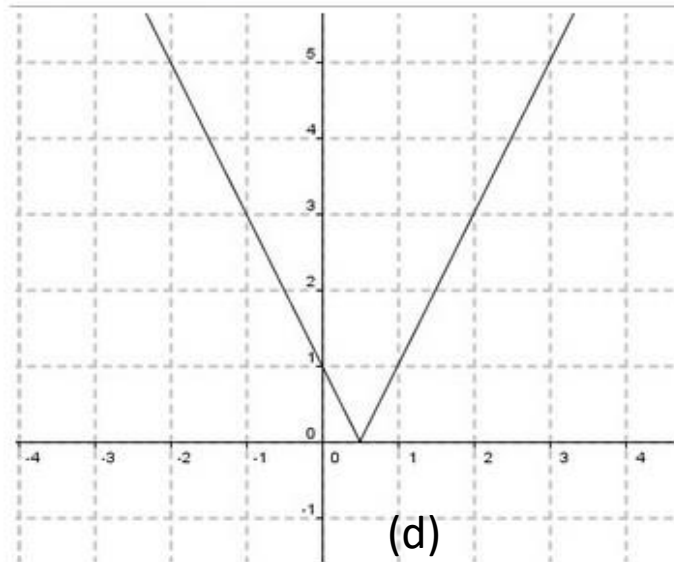
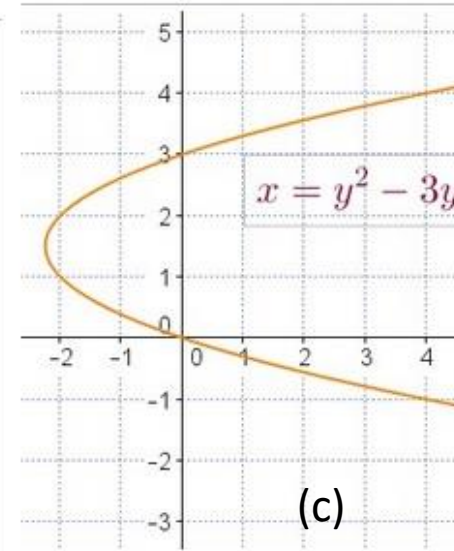
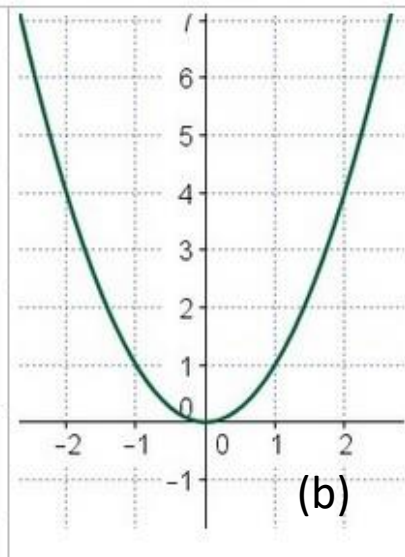
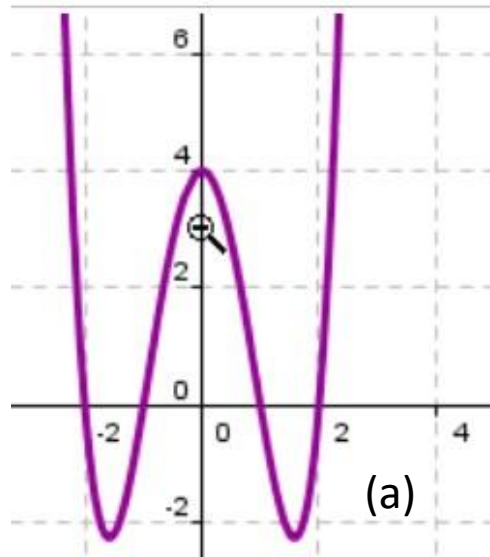
**Contoh 40 (Kuis 2022).** Tentukan apakah fungsi dibawah ini injektif, surjektif, bijektif, bukan fungsi, atau bukan keempatnya. Tuliskan juga alasannya! (fungsi memetakan himpunan yang disebutkan pertama ke himpunan yang disebutkan kedua).

- a) Fungsi “memiliki” pada himpunan mahasiswa ITB dengan himpunan NIM ITB
- b) Fungsi “mengambil” pada himpunan mahasiswa semester 3 Informatika ITB dengan himpunan mata kuliah wajib semester 3 Program Studi Informatika ITB.
- c) Fungsi “terdaftar di kelas” pada himpunan mahasiswa yang mengambil Matdis dengan himpunan kelas K1,K2,K3.

**Jawaban:**

- a) Bijektif karena setiap mahasiswa pasti memiliki NIM dan setiap NIM pasti dimiliki oleh seorang mahasiswa. NIM mahasiswa juga unik sehingga tidak ada 2 mahasiswa yang dipetakan pada NIM yang sama
- b) Bukan fungsi karena satu orang mahasiswa dipetakan ke lebih dari satu buah mata kuliah wajib semester 3
- c) Surjektif karena setiap mahasiswa yang mengambil matdis pasti terdaftar di salah satu kelas K1,K2, atau K3. Lalu setiap kelas pasti memiliki mahasiswa yang terdaftar dan bisa lebih dari 1 mahasiswa pada setiap kelas (bukan injektif).

**Contoh 41.** Dari lima buah grafik di bawah ini, mana yang merupakan fungsi?

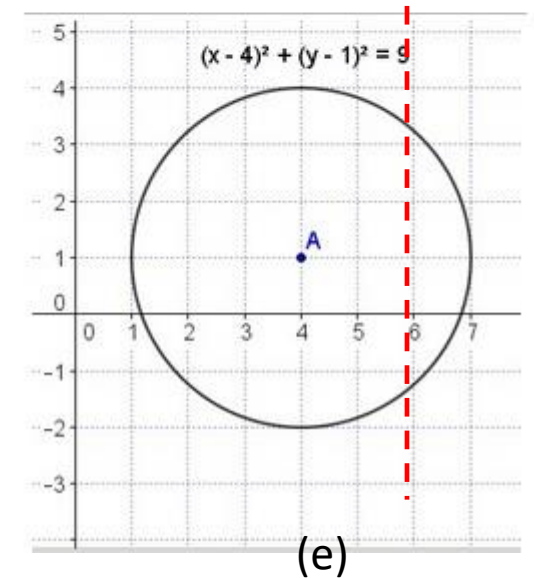
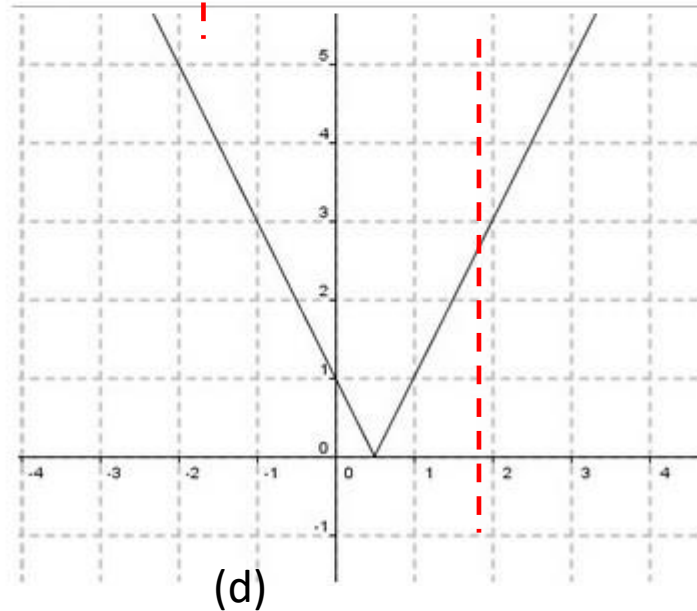
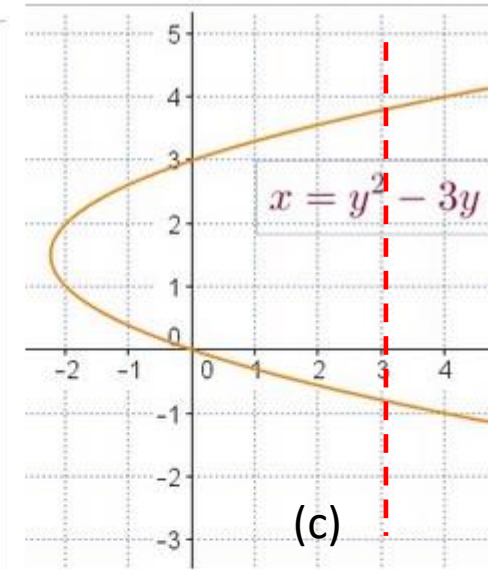
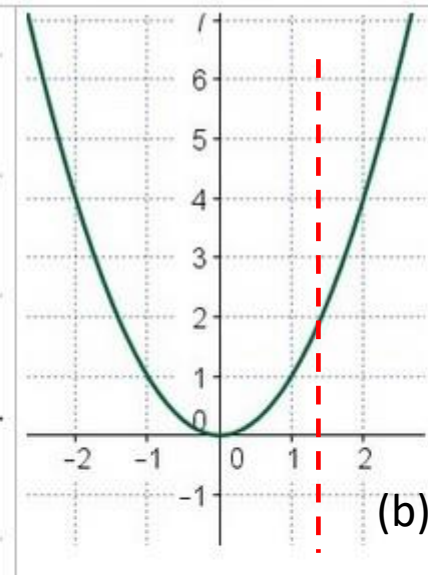
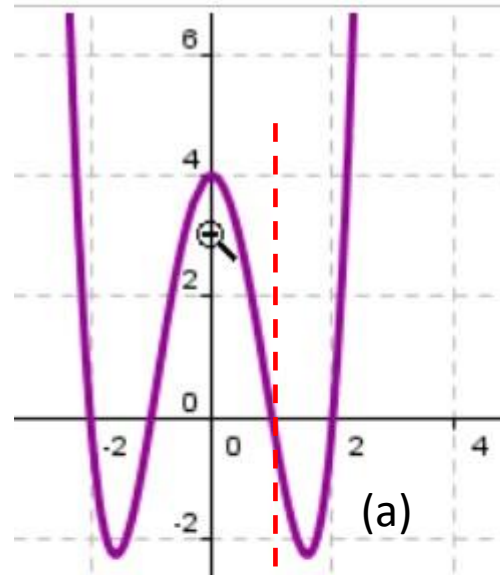




Jawaban: Defenisi fungsi menyatakan bahwa setiap nilai  $x \in A$  dipetakan hanya tepat ke satu buah nilai  $y \in B$ . Jadi  $x$  tidak boleh memiliki dua buah nilai  $y$  berbeda.

Tariklah garis vertikal (diperlihatkan dnegan garis putus-putus berwarna merah) melalui kurva fungsi  $f$ , jika garis berpotongan pada dua buah titik maka  $f$  **bukan** fungsi.

Berdasarkan cara di atas, maka (c) dan (e) **bukan** fungsi karena garis vertikal berpotongan pada dua buah titik pada kurva.



# Balikan Fungsi

- Jika  $f$  adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari  $A$  ke  $B$ , maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari  $f$ .
- Balikan fungsi dilambangkan dengan  $f^{-1}$ . Misalkan  $a$  adalah anggota himpunan  $A$  dan  $b$  adalah anggota himpunan  $B$ , maka  $f^{-1}(b) = a$  jika  $f(a) = b$ .
- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikkannya.
- Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikkannya tidak ada.

### Contoh 42. Relasi

$$f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$$

dari  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$  adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi  $f$  adalah

$$f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$$

Jadi,  $f$  adalah fungsi *invertible*.

### Contoh 43. Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$ .

Penyelesaian:

Fungsi  $f(x) = x - 1$  adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.

Misalkan  $f(x) = y$ , sehingga  $y = x - 1$ , maka  $x = y + 1$ . Jadi, balikan fungsi balikkannya adalah  $f^{-1}(y) = y + 1$ .

**Contoh 44.** Tentukan balikan fungsi  $f(x) = x^2 + 1$ .

Penyelesaian:

Dari Contoh 35 dan 37 kita sudah menyimpulkan bahwa  $f(x) = x^2 + 1$  bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi,  $f(x) = x^2 + 1$  adalah fungsi yang *not invertible*.

## **Komposisi dari dua buah fungsi.**

Misalkan  $g$  adalah fungsi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$ , dan  $f$  adalah fungsi dari himpunan  $B$  ke himpunan  $C$ . Komposisi  $f$  dan  $g$ , dinotasikan dengan  $f \circ g$ , adalah fungsi dari  $A$  ke  $C$  yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

**Contoh 45.** Diberikan fungsi

$$g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

yang memetakan  $A = \{1, 2, 3\}$  ke  $B = \{u, v, w\}$ , dan fungsi

$$f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$$

yang memetakan  $B = \{u, v, w\}$  ke  $C = \{x, y, z\}$ . Fungsi komposisi dari  $A$  ke  $C$  adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$$

**Contoh 46.** Diberikan fungsi  $f(x) = x - 1$  dan  $g(x) = x^2 + 1$ .

Tentukan  $f \circ g$  dan  $g \circ f$ .

Penyelesaian:

$$(i) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2.$$

$$(ii) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

**Latihan (Kuis 2021).** Tentukan (a) sifat dari fungsi  $f(x)$   $f(x) = |x^2 + x + 1|$ ,  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  apakah injektif, surjektif, bijektif, atau bukan ketiganya, (b) tentukan balikan dari fungsi tersebut jika ada, dan (c) hasil komposisi fungsi  $(f \circ g)(x)$  dengan  $g(x) = x - 2$  dalam bentuk paling sederhana.

Jawaban:

$$f(x) = |x^2 + x + 1|, f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

(a) Bukan ketiganya,

- R tidak injektif, karena terdapat dua nilai  $x$  berbeda memiliki bayangan yang sama (ingatlah  $f(x)$  adalah fungsi parabola).
- R tidak surjektif, karena tidak semua bilangan real merupakan jelajah dari  $f(x)$ , contoh tidak ada  $f(x)$  yang menghasilkan nilai  $-1$ .
- R tidak bijektif, karena tidak injektif dan tidak surjektif.

(b) Tidak ada balikan karena fungsi tidak bijektif.

$$(c) (f \circ g)(x) = |(x-2)^2 + (x-2) + 1| = |x^2 - 3x + 3|$$

**Latihan (Soal UTS 2022)** Diberikan tiga buah fungsi  $f$ ,  $g$ , dan  $h$  yang masing-masing memetakan dari  $A$  ke  $A$ , dalam hal ini  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Fungsi  $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4)\}$ ,  $g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ , dan  $h = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), \text{ dan } (4, 3)\}$ .

(a) Manakah dari ketiga fungsi tersebut memiliki balikan (invers)? Tentukan fungsi balikannya.

(b) Tentukan hasil  $f \circ h \circ g$

Jawaban:

(a) Fungsi yang memiliki balikan hanyalah fungsi  $g$  karena berkoresponden satu-ke-satu (periksalah bahwa  $g$  satu-ke-satu dan pada). Fungsi  $f$  dan  $h$  tidak berkoreponden satu-ke-satu sehingga tidak dapat dibalikkan (periksalah bahwa  $f$  dan  $h$  bukan fungsi satu-ke-satu dan bukan fungsi pada). Balikan fungsi  $g$  adalah  $g^{-1} = \{(2, 1), (4, 2), (1, 3), (3, 4)\}$ .

(b)  $(f \circ h \circ g)(a) = f(h(g(a)))$  dicari sebagai berikut:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1, \quad 3 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2, \quad 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

Maka,  $f \circ h \circ g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2)\}$