Bahan kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Himpunan

(Bag. 1 – Update 2023)

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI - ITB

Definisi

- Himpunan (*set*) adalah sekumpulan objek yang *berbeda*.
- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.
- Contoh: HMIF adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa IF dan STI. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.
- Contoh: Satu set komputer desktop terdiri dari CPU, monitor, dan keyboard

- Himpunan mahasiswa

- Satu *set* mainan huruf (huruf besar dan kecil)

- Perhatikan bedanya:
  {1, 2, 3, 4, 5, 6 } → Himpunan (*set*)

  {1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} → Himpunan-ganda (*multi-set*) → perluasan konsep *set*
  → Ada elemen yang berulang (ganda)
  → Dibahas dalam sub-bab tersendiri

- Urutan elemen di dalam himpunan tidak penting
  {a, b, c, d} = {d, b, a, c} = {c, a, d, b}

- Perulangan elemen hanya dihitung satu kali, kecuali jiak disebut sebagai *multiset*
  {1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

- Setiap elemen di dalam himpunan tidak harus berkorelasi satu sama lain, yang penting BERBEDA satu sama lain
  { 56, Rp3000, Amir, cacing, Silver Queen, -45° C , paku}

Cara Penyajian Himpunan

1. **<u>Enumerasi</u>**

   Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

   Contoh 1.

   - Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
   - Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
   - C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
   - $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
   - $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
   - $K = \{ \{\} \}$
   - Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
   - Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Keangggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

- **Contoh 2.** Misalkan:

  $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \text{c}\}, \{a, c\} \}$

  $K = \{\{\}\}$

  maka

  $3 \in A$

  $\{a, b, c\} \in R$

  $c \notin R$

  $\{\} \in K$

  $\{\} \notin R$

Contoh 3. Jika $P_1 = \{a, b\}$,

$P_2 = \{ \{a, b\} \}$,

$P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

2. *Simbol-simbol Baku*

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

Z^{+} = himpunan bilangan bulat positif = {1, 2, 3, … }

Q = himpunan bilangan rasional = $\{a/b \mid a, b \in \mathbf{Z}$ dan $b \neq 0\}$

= {…, -3/4, -4/5, 2/3, 1/2, … } = {…, -0.6, -0.8, 0.666…, 0.5, …}

R = himpunan bilangan riil

R^{+} = himpunan bilangan riil positif

C = himpunan bilangan kompleks = $\{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$

Himpunan yang universal: **semesta pembicaraan**, disimbolkan dengan U atau S.

Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

3. ***Notasi Pembentuk Himpunan***

- Notasi: { *x* | syarat yang harus dipenuhi oleh *x* }

Contoh 4.

(i) *A* adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5 ditulis sebagai

A = { x | x adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau $A = \{ x \mid x \in \mathbf{P}, x < 5 \} = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) M = { x | x adalah mahasiswa yang mengambil mata kuliah IF2120}

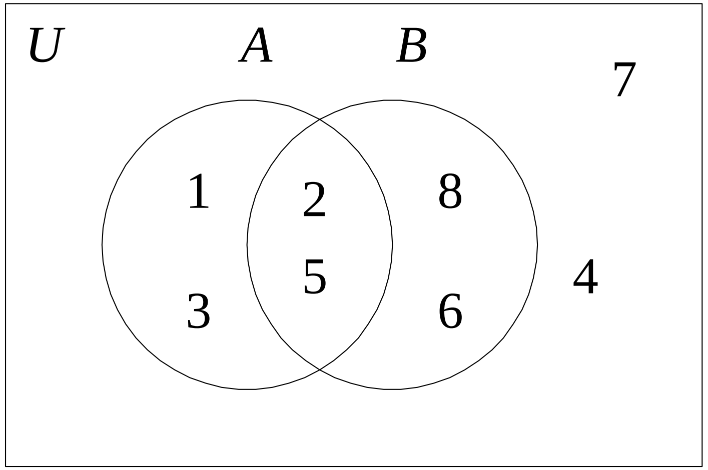
4. Diagram Venn

Contoh 5.

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

A = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A.
Notasi: $n(A)$ atau $\left| A \right|$

Contoh 6.

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 $\}$,
atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $\left| B \right| = n(B) = 8$

(ii) T = {kucing, a, Amir, 10, paku, laptop}, maka $\left| T \right| = 6$

(iii) $A = \{2, \{2, 3\}, \{4\}, 6, \{\{7\}\} \}$, maka $\left| A \right| = 5$

(iv) $C = \varnothing$, maka $n(C) = 0$

(v) $D = \{ x \in \mathbf{N} \mid x < 5000 \}$, maka $n(D) = 4999$

(vi) $D = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \geq 5000 \}$, maka $n(D)$ tak berhingga

Himpunan kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\varnothing$ atau {}

Contoh 7.

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar riil persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing\}$
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\{\varnothing\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu $\varnothing$.

Himpunan Bagian (*Subset*)

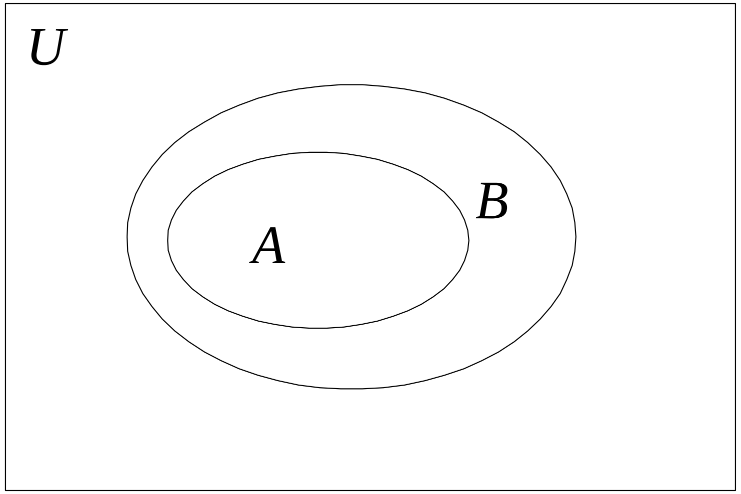
- Notasi: $A \subseteq B$
- **Defenisi:** Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen dari *B*.

- Secara formal: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

- A adalah *subset* dari B.

  Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari *A,*

  $B \supseteq A$



Contoh 8.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

(v) A = {3, 9}, B = {5, 9, 1, 3}, $A \subseteq B$? benar

(vi) A = {3, 3, 3, 9}, B = {5, 9, 1, 3}, $A \subseteq B$? benar

(vii) A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4}, $A \subseteq B$? salah

- Perhatikan bahwa:

  $\emptyset \subseteq$ A untuk sembarang himpunan A

  A $\subseteq$ A untuk sembarang himpunan A

- $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\emptyset$ dan *A* disebut himpunan bagian tak-sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan *A*.

  Contoh: *A* = {1, 2, 3}, maka

  {1, 2, 3} dan $\emptyset$ adalah *improper subset* dari *A*.

  {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} adalah *proper subset* dari A

- *A* dikatakan himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari *B* jika:

  (i) setiap elemen dari *A* juga elemen dari *B* , dan

  (ii) sekurang-kurangnya ada satu elemen di *B* yang tidak ada di *A*

- Perhatikan bahwa penulisan $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

(i) $A \subset B$: digunakan untuk menekankan bahwa A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

- A disebut himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari B.
- Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  Jadi, $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menekankan bahwa A adalah himpunan bagian dari B yang memungkinkan $A = B$.

- Contoh: $\{1, 2, 3\} \subseteq$ { himpunan bilangan asli < 4}

  {1, 2, 3} adalah *improper subset* dari { himpunan bilangan asli < 4}

- Latihan

  Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = {1, 2, 3, 4, 5}. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B.

Jawaban:

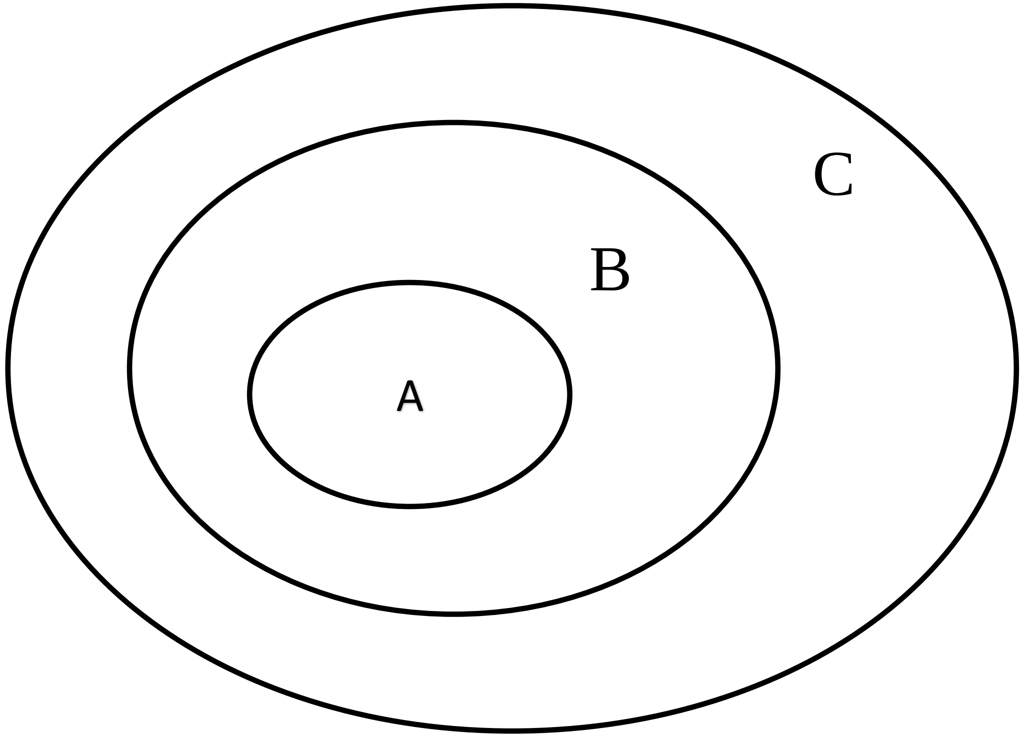
Data: A = {1, 2, 3} dan B = {1, 2, 3, 4, 5}, lalu $A \subset C$ dan $C \subset B$

C harus mengandung semua elemen *A* = {1, 2, 3} dan sekurang-kurangnya satu elemen dari *B*.

Dengan demikian, *C* = {1, 2, 3, 4} atau *C* = {1, 2, 3, 5}.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena *C* adalah *proper subset* dari *B*.

- Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$



Latihan

1. Misalkan $A = \{5\}$ dan $B = \{5, \{5\}\}$.
   (a) Apakah $A \subseteq B$? Jelaskan!
   (b) Apakah $A \in B$? Jelaskan!
   (c) Apakah A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B?

2. Tentukan apakah pernyataan di bawah ini benar atau salah:
   (a) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
   (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   (c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
   (d) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
   (e) Jika $A \subseteq B$ dan $B \in C$, maka $A \in C$
   (f) Jika $A \in B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \in C$.
   (g) Jika $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, maka $\emptyset \in 2^A$
   (h) Jika $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, maka $\{\{\emptyset\}\} \subseteq 2^A$

i) $\emptyset \subseteq \emptyset$

j) $\emptyset \in \emptyset$

k) $\{\emptyset\} \in \emptyset$

l) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{\{a, b, c\}\}$

m) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{\{a, b, c$

n) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

o) jika $A \in B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

p) jika $A \subseteq B$ dan $B \in C$, maka $A \subseteq C$

q) $x \in \{x\}$

r) $\{x\} \subseteq \{x\}$

s) $\{x\} \in \{x\}$

t) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

u) $\emptyset \subseteq \{x\}$

(v) $\emptyset \in \{x\}$

3. Didefinisikan A, B, C, D, dan E sebagai berikut:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \{2\}, \{\{4\}\}\}$,

$C = \{1, \{1, 2\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}$, $D = \{1, 2, 2, 1\}$.

Untuk tiap W, X, Y, Z yang didefinisikan di bawah ini, nyatakan apakah ia adalah elemen atau himpunan bagian dari tiap-tiap himpunan A, B, C, D.

$W = \{1, 3, 5\}$ $\qquad$ $X = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $Y = \{4\}$ $\qquad$ $Z = \{2\}$

Himpunan yang Sama

- **Defenisi:** $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 5, 5, 8, 8\}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iv) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

(iv) A = {anjing, kucing, kuda}, B = {kucing, kuda, tupai, anjing}, maka $A \neq B$

- Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

  (a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

  (b) jika $A = B$, maka $B = A$

  (c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

- **Defenisi:** Himpunan *A* dikatakan ekivalen dengan himpunan *B* jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

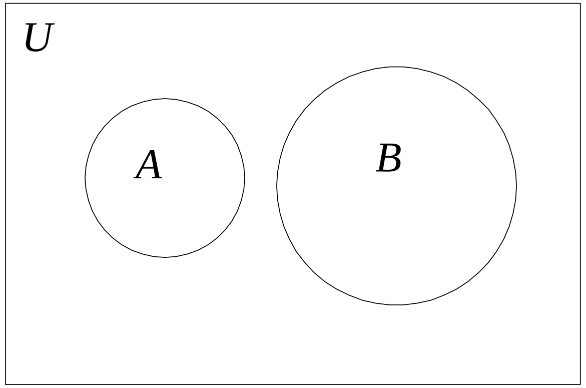
Contoh 10. Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- **Defenisi:** Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : A // B

- Diagram Venn:



Contoh 11. Jika A = { x | x $\in$ **P**, x < 8 } dan B = { 10, 20, 30, ... }, maka A // B.

Himpunan Kuasa

- **Defenisi:** Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A.
- Notasi: P(A) atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 12. Jika A = { 1, 2 }, maka P(A) = 2^A = { ∅, { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}, dan $|P(A)| = 2^2 = 4$

Contoh 13. Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah P(∅) ={∅}, dan himpunan kuasa dari himpunan {∅} adalah P({∅}) = {∅ , {∅}}.

Latihan

1. Misalkan X dan Z merupakan himpunan pada himpunan semesta U yang tidak terukur besarnya dengan anggota masing-masing himpunan berbeda. Diketahui X dan Z saling lepas. Urutkan kardinalitas di bawah ini secara terurut membesar:
    - $| P(X \cap Z) |$
    - $| X - Z |$
    - $| X \oplus Z |$
    - $| X \cap Z |$
    - $| P(X) \cup P(Z) |$
    - $| \overline{P(X) \cup P(Z)} |$

Jawaban: $| X \cap Z |$, $| P(X \cap Z) |$, $| X - Z |$, $| X \oplus Z |$, $| P(X) \cup P(Z)|$, $|\overline{P(X) \cup P(Z)}|$

Penjelasan:

- $| X \cap Z | = 0$, karena saling lepas
- $| P(X \cap Z) | = 1$, karena saling lepas dan $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $| X – Z | = |X|$
- $| X \oplus Z | = |X + Z|$ atau $|X \cup Z|$
- $| P(X) \cup P(Z) | = 2^{|X|} + 2^{|Z|}$
- $| \overline{P(X) \cup P(Z)} | = \infty - 2^{|X|} + 2^{|Z|} = \infty$

Bersambung ke Bagian 2