Teori Bilangan
(Bagian 1)

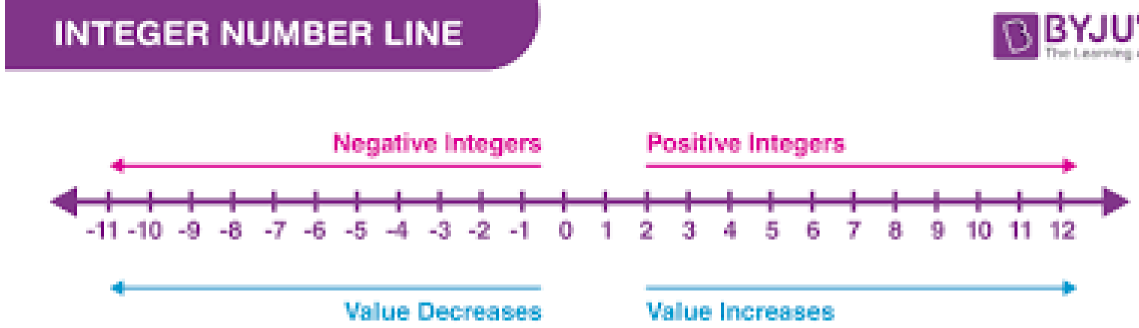
(Update 2023)

Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB



Bilangan Bulat

- **Teori bilangan** adalah cabang matematika murni yang ditujukan untuk mempelajari bilangan bulat (*integer*) atau fungsi bernilai bilangan bulat.

- Bilangan bulat (*integer*) adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya 8, 21, 8765, -34, 0, -13451, dsb

- Berlawanan dengan bilangan bulat adalah bilangan riil yang mempunyai titik desimal, seperti 8.0, 34.25, 0.02, -0.00234

Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat

- Misalkan *a* dan *b* bilangan bulat, $a \neq 0$.

  a **habis membagi** *b* (*a divides b*) jika terdapat bilangan bulat *c* sedemikian sehingga $b = ac$.

- Notasi: $a \mid b$ jika $b = ac$, $c \in \mathbf{Z}$ dan $a \neq 0$.

- **Contoh 1**: $4 \mid 12$ karena $12/4 = 3$ (bilangan bulat) atau $12 = 4 \times 3$. Tetapi $4 \nmid 13$ karena $13/4 = 3.25$ (bukan bilangan bulat).

Teorema Euclidean

Teorema 1 (Teorema Euclidean). Misalkan m dan n bilangan bulat, $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka hasil pembagiannya adalah q (*quotient*) dan sisanya r (*remainder*), sedemikian sehingga

$$m = nq + r$$

dengan $0 \leq r < n$.

Contoh 2.

(i) $1987/97 = 20$, sisa 47

$1987 = 20 \cdot 97 + 47$

(ii) $-22/3 = -8$, sisa 2

$-22 = (-8) \cdot 3 + 2$

tetapi jika pembagiannya sebagai berikut:

$-22/3 = -7$ sisa -1

$-22 = (-7) \cdot 3 - 1$ (salah!!)

karena $r = -1$ (syarat $0 \leq r < n$)

Pembagi Bersama Terbesar (PBB)

- Misalkan *a* dan *b* bilangan bulat tidak nol.

- Pembagi bersama terbesar (PBB – **greatest common divisor** atau *gcd*) dari *a* dan *b* adalah bilangan bulat terbesar *d* sedemikian hingga $d \mid a$ dan $d \mid b$.

- Dalam hal ini kita nyatakan bahwa PBB(a, b) = d.

Di sekolah dasar, istilah “pembagi bersama terbesar” sering disebut “faktor persekutuan terbesar” atau FPB

- **Contoh 3.** PBB(45, 36) = ?

  Faktor pembagi 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45;

  Faktor pembagi 36: 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36;

  Faktor pembagi bersama 45 dan 36: 1, 3, 9 → terbesar = 9

→ PBB(45, 36) = 9.

- **Teorema 2.** Misalkan *m* dan *n* bilangan bulat, dengan syarat $n > 0$ sedemikian sehingga

$$m = nq + r, \quad 0 \leq r < n$$

maka PBB(*m*, *n*) = PBB(*n*, *r*)

- **Contoh 4**: *m* = 60, *n* = 18,

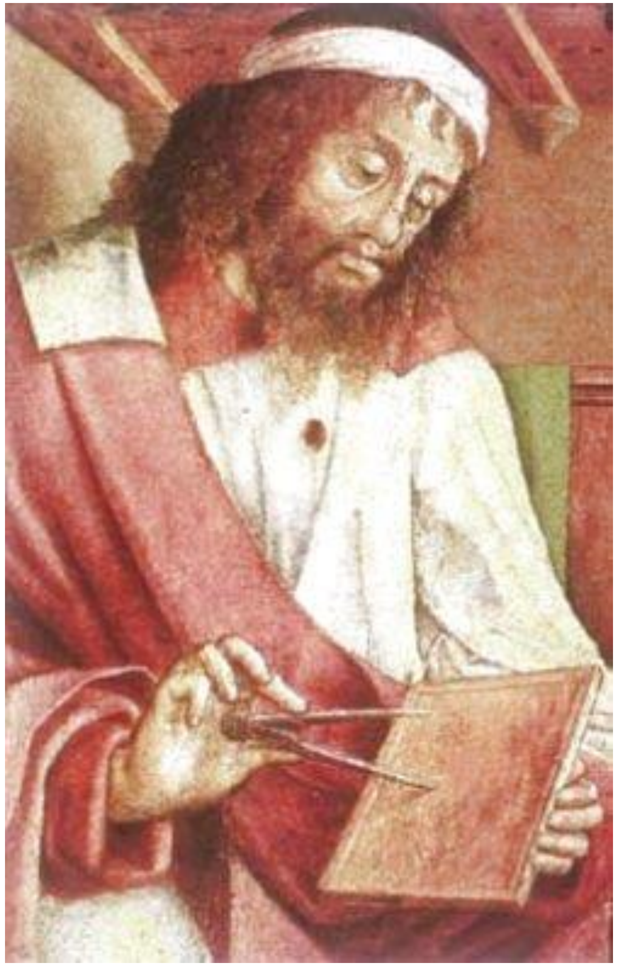
$$60 = 3 \cdot 18 + 6$$

maka PBB(60, 18) = PBB(18, 6) = 6

Algoritma Euclidean

- Tujuan: algoritma untuk mencari PBB dari dua buah bilangan bulat.

- Penemu: Euclides, seorang matematikawan Yunani yang menuliskan algoritmanya tersebut dalam buku, *Element*.



- Lukisan Euclides versi lain

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat tak negatif dengan $m \geq n$. Misalkan $r_0 = m$ dan $r_1 = n$.
Lakukan secara berturut-turut pembagian untuk memperoleh

$$
\begin{array}{ll}
r_0 = r_1 q_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1, \\
r_1 = r_2 q_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2, \\
\quad \vdots & \\
r_{n-2} = r_{n-1}\, q_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} = r_n q_n + 0 &
\end{array}
$$

Teorema 2. Misalkan m dan n bilangan bulat, dengan syarat $n > 0$ sedemikian sehingga $m = nq + r$, $0 \leq r < n$ maka PBB(m, n) = PBB(n, r)

Menurut Teorema 2,

$$
\begin{aligned}
&\text{PBB}(m, n) = \text{PBB}(r_0, r_1) = \text{PBB}(r_1, r_2) = \ldots = \\
&\text{PBB}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{PBB}(r_{n-1}, r_n) = \text{PBB}(r_n, 0) = r_n
\end{aligned}
$$

Jadi, PBB dari m dan n adalah sisa terakhir yang tidak nol dari runtunan pembagian tersebut

Diberikan dua buah bilangan bulat tak-negatif m dan n ($m \geq n$). Algoritma Euclidean berikut mencari pembagi bersama terbesar dari m dan n.

Algoritma Euclidean

1. Jika $n = 0$ maka
   m adalah PBB(m, n);
   stop.
   tetapi jika $n \neq 0$,
   lanjutkan ke langkah 2.
2. Bagilah m dengan n dan misalkan r adalah sisanya.
3. Ganti nilai m dengan nilai n dan nilai n dengan nilai r, lalu ulang kembali ke langkah 1.

```
procedure Euclidean(input m, n : integer,
                    output PBB : integer)
{ Mencari PBB(m, n) dengan syarat m dan n bilangan tak-
  negatif dan m ≥ n
  Masukan: m dan n, m ≥ n dan m, n ≥ 0
  Keluaran: PBB(m, n)
}
Kamus
   r : integer

Algoritma:
   while n ≠ 0 do
      r ← m mod n
      m ← n
      n ← r
   endwhile
   { n = 0, maka PBB(m,n) = m }
   PBB ← m
```

Contoh 4. m = 80, n = 12 dan dipenuhi syarat $m \geq n$

$$80 = 6 \cdot 12 + 8$$

$$12 = 1 \cdot 8 + 4$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4, maka PBB(80, 12) = 4.

Kombinasi Linier

- PBB(a,b) dapat dinyatakan sebagai **kombinasi linier** (*linear combination*) a dan b dengan koefisien-koefisennya.

- **Contoh 6**: PBB(80, 12) = 4 ,

  $$4 = (-1) \cdot 80 + 7 \cdot 12.$$

- **Teorema 3.** Misalkan a dan b bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga PBB(a, b) = $ma + nb$.

- **Contoh 7**: Nyatakan PBB(21, 45) sebagai kombinasi linier dari 21 dan 45.

  Penyelesaian:

  $$45 = 2 \cdot 21 + 3 \qquad \text{(i)}$$

  $$21 = 7 \cdot 3 + 0 \qquad \text{(ii)}$$

  Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 3, maka **PBB(45, 21) = 3**

  Dari persamaan (i) dapat dituliskan:

  $$\mathbf{3 = 45 - 2 \cdot 21 = 1 \cdot 45 - 2 \cdot 21}$$

  Jadi 3 merupakan kombinasi linier dari 45 dan 21

Contoh 8: Nyatakan PBB(312, 70) sebagai kombinasi linier 312 dan 70.

<u>Jawaban</u>: Terapkan algoritma Euclidean untuk memperoleh PBB(312, 70):

$312 = 4 \cdot 70 + 32$ (i)

$70 = 2 \cdot 32 + 6$ (ii)

$32 = 5 \cdot 6 + 2$ (iii)

$6 = 3 \cdot 2 + 0$ (iv)

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 2, maka **PBB(312, 70) = 2**

Susun pembagian nomor (iii) dan (ii) masing-masing menjadi

$2 = 32 - 5 \cdot 6$ (iv)

$6 = 70 - 2 \cdot 32$ (v)

Sulihkan (v) ke dalam (iv) menjadi

$2 = 32 - 5\cdot(70 - 2\cdot32) = 1\cdot32 - 5\cdot70 + 10\cdot32 = 11 \cdot 32 - 5 \cdot 70$ (vi)

Susun pembagian nomor (i) menjadi

$32 = 312 - 4 \cdot 70$ (vii)

Sulihkan (vii) ke dalam (vi) menjadi

$2 = 11 \cdot 32 - 5 \cdot 70 = 11 \cdot (312 - 4 \cdot 70) - 5 \cdot 70 = 11 . 312 - 49 \cdot 70$

Jadi, PBB(312, 70) = $2 = 11 \cdot 312 - 49 \cdot 70$

Relatif Prima

- Dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan *relatif prima* jika PBB(a, b) = 1.

- **Contoh 9.**

  (i) 20 dan 3 relatif prima sebab PBB(20, 3) = 1

  (ii) 7 dan 11 relatif prima karena PBB(7, 11) = 1

  (iii) 20 dan 5 tidak relatif prima sebab PBB(20, 5) = 5 $\neq$ 1

  (iv) 31 dan 0 tidak relative prima sebab PBB(31, 0) = 31

- Dikaitkan dengan kombinasi linier, jika a dan b relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga

$$ma + nb = 1$$

- **Contoh 10.** Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena PBB(20, 3) =1, atau dapat ditulis

$$2 \cdot 20 + (-13) \cdot 3 = 1 \quad (m = 2, n = -13)$$

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena PBB(20, 5) = 5 $\neq$ 1 sehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam $m \cdot 20 + n \cdot 5 = 1$.

Aritmetika Modulo

- Misalkan a dan m bilangan bulat ($m > 0$). Operasi

  a* mod *m (dibaca "*a* modulo *m*")

  memberikan sisa jika a dibagi dengan m.

- Notasi: $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.

- m disebut **modulus** atau **modulo**, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$.

- **Contoh 11.** Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:

(i) 23 mod 5 = 3	$(23 = 5 \cdot 4 + 3)$
(ii) 27 mod 3 = 0	$(27 = 3 \cdot 9 + 0)$
(iii) 6 mod 8 = 6	$(6 = 8 \cdot 0 + 6)$
(iv) 0 mod 12 = 0	$(0 = 12 \cdot 0 + 0)$
(v) –41 mod 9 = –5	(–41 = (9)(–4) – 5) → salah karena r < 0
–41 mod 9 = 4	(–41 = 9(–5) + 4)) → betul
(vi) – 39 mod 13 = 0	(–39 = 13(–3) + 0)

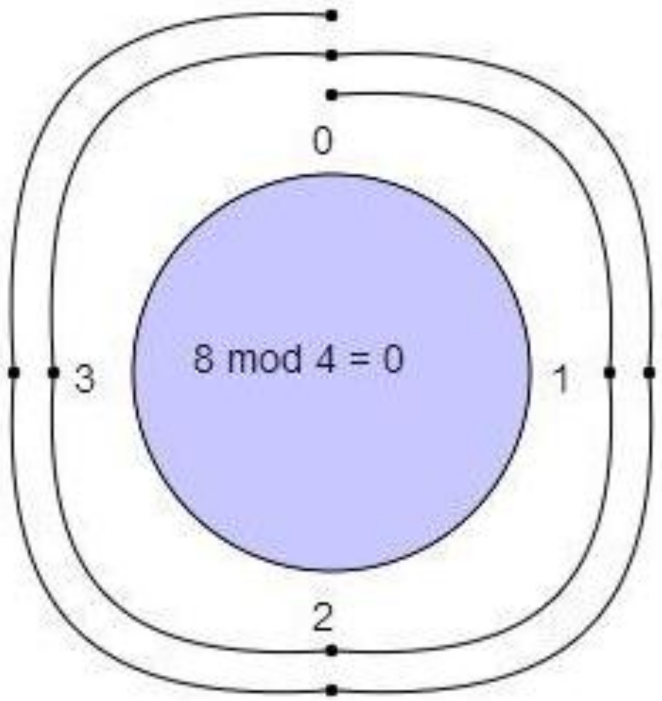
- *Penjelasan untuk (v):* Karena *a* negatif, bagi $|a|$ dengan *m* mendapatkan sisa *r'*. Maka *a* mod *m* = *m* – *r'* bila $r' \neq 0$.

  Jadi |– 41| mod 9 = 5, sehingga –41 mod 9 = 9 – 5 = 4.

8 mod 4 = ?

With a modulus of 4 we make a clock with numbers 0,1,2,3

We start at 0 and go through 8 numbers in a clockwise sequence 1,2,3,0,1,2,3,0



We ended up at 0

so:

8 mod 4 = 0

Sumber: www.khancademy.org

-5 mod 3 = ?

With a modulus of 3 we we make a clock with numbers 0,1,2

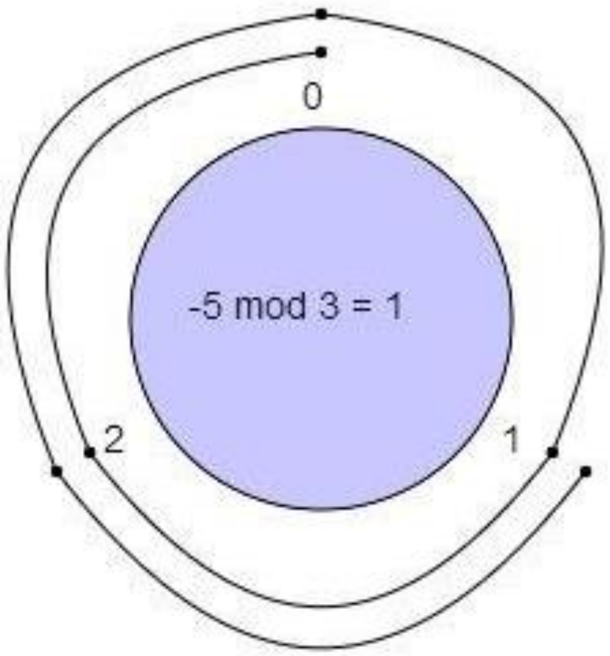
We start at 0 and go through 5 numbers in **counter-clockwise** sequence (5 is **negative**)

2,1,0,2,1

We ended up at 1

so:

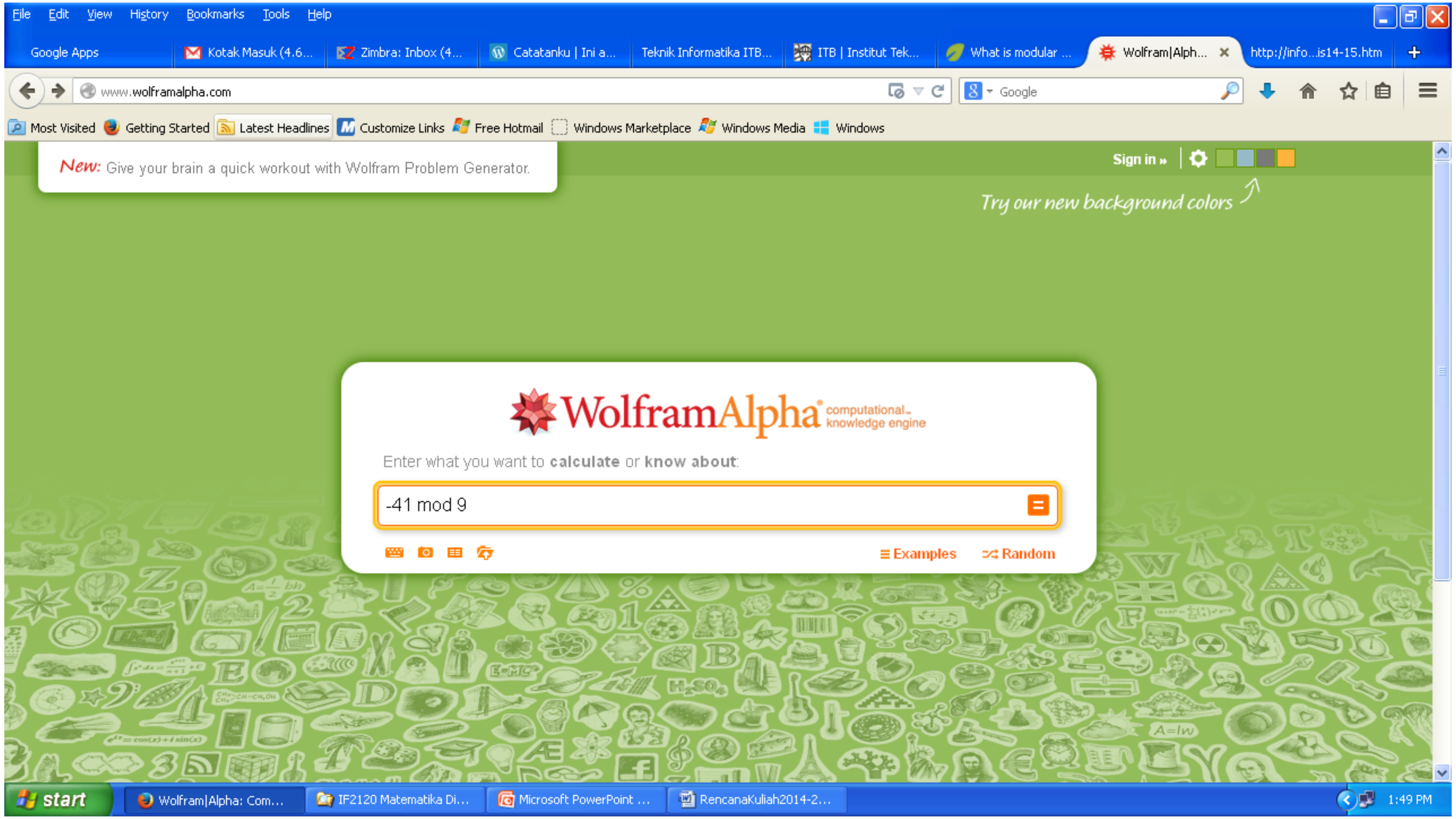
-5 mod 3 = 1

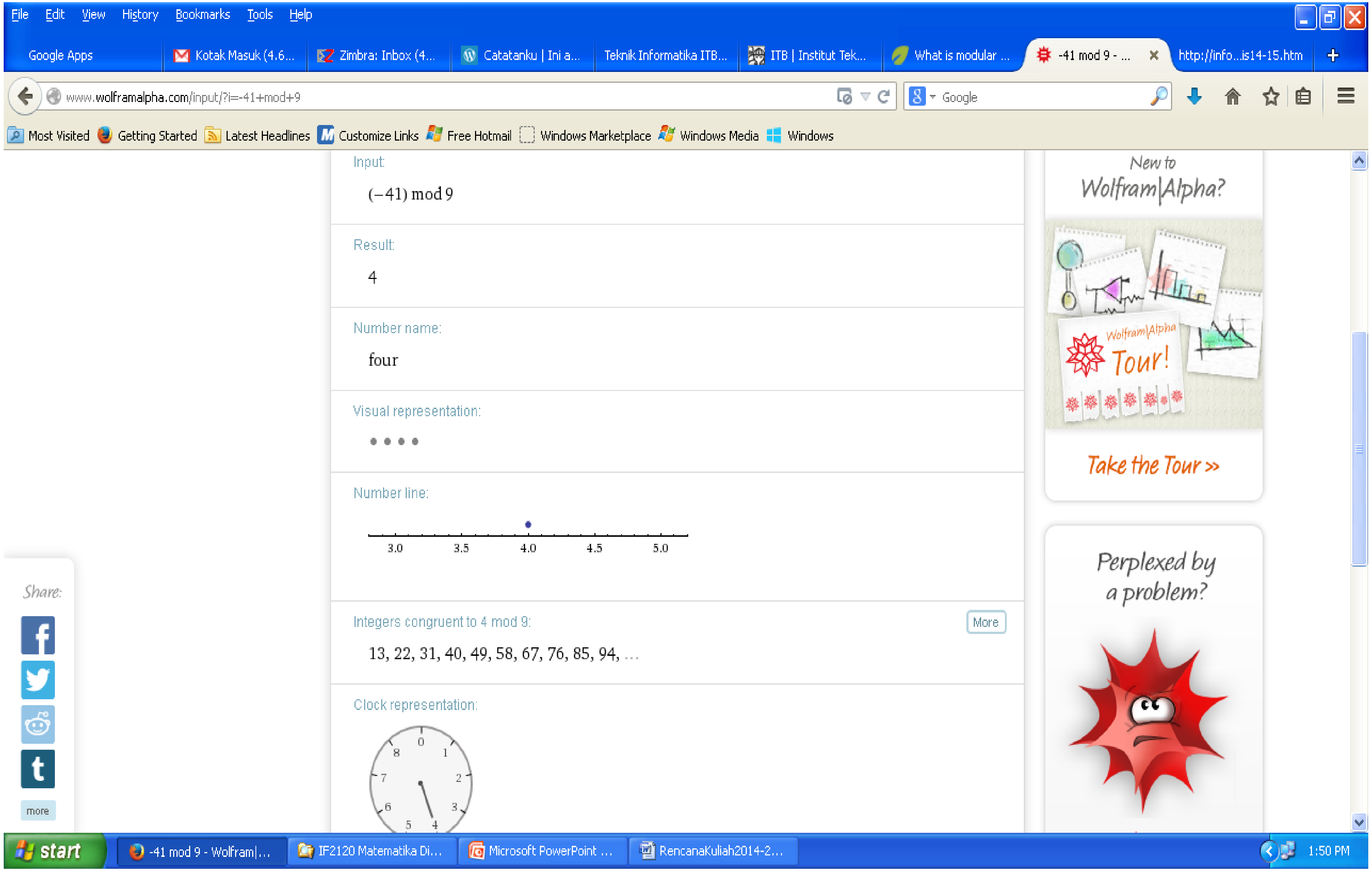


Sumber: www.khanacademy.org

Aritmetika Modulo di dalam Wolfram Alpha

- Kunjungi: www.wolframalpha.com




www.wolframalpha.com/input/?i=-41+mod+9
Input:
(−41) mod 9
Result:
4
Number name:
four
Visual representation:
Number line:
3.0 3.5 4.0 4.5 5.0
Integers congruent to 4 mod 9:
13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76, 85, 94, …
More
Clock representation:
New to Wolfram|Alpha?
Take the Tour »
Perplexed by a problem?
Share:
more

Kongruen

- Misalnya 38 mod 5 = 3 dan 13 mod 5 = 3, maka dikatakan

  $38 \equiv 13 \pmod 5$

  (dibaca: 38 kongruen dengan 13 dalam modulus 5).

- Dalam kehidupan sehari-hari menggunakan jam, kita mengenal:

  jam 14.00 = jam 2 siang $\rightarrow 14 \equiv 2 \pmod{12}$

  jam 18.00 = jam 6 sore $\rightarrow 18 \equiv 6 \pmod{12}$

  jam 21.00 = jam 9 malam $\rightarrow 21 \equiv 9 \pmod{12}$

  jam 24.00 = jam 0 $\rightarrow 24 \equiv 0 \pmod{12}$

- **DEFINISI**: Misalkan a dan b bilangan bulat dan m adalah bilangan > 0, maka $\boldsymbol{a \equiv b}$ **(mod** $\boldsymbol{m}$**)** jika dan hanya jika $m \mid (a - b)$.

- Jika a **tidak** kongruen dengan b dalam modulus m, maka ditulis

  $a \not\equiv b \pmod{m}$.

- **Contoh 12.**

$17 \equiv 2 \pmod 3$ *(3 habis membagi 17 – 2 = 15)*

$21 \equiv 9 \pmod{12}$ *(12 habis membagi 21 – 9 = 12)*

$-7 \equiv 15 \pmod{11}$ *(11 habis membagi –7 – 15 = –22)*

$12 \not\equiv 2 \pmod 7$ *(7 tidak habis membagi 12 – 2 = 10)*

$-7 \not\equiv 15 \pmod 3$ *(3 tidak habis membagi –7 – 15 = –22)*

DEFINISI: Misalkan *a* dan *b* bilangan bulat dan $m > 0$, maka **$a \equiv b$ (mod m)** jika dan hanya jika $m \mid (a - b)$.

Latihan 1

Tentukan semua bilangan yang kongruen dengan 5 (mod 11).

<u>Penyelesaian</u>: Misalkan bilangan yang kongruen dengan 5 (mod 11) adalah *x*.

$$x \equiv 5 \pmod{11}$$

Jadi, $11 \mid (x - 5)$, atau $\frac{x-5}{11} = \text{bilangan bulat}$

Nilai *x* yang memenuhi adalah 16, 27, 38, ..., lalu -6, -17, ...

- Jadi, nilai-nilai yang kongruen dengan 5 (mod 11) adalah ..., -17, –6, 16, 27, 38, ...

- $a \equiv b \pmod{m}$ dalam bentuk "sama dengan" dapat dituliskan sebagai

$$\boxed{a = b + km}$$ (*k* adalah bilangan bulat)

- **Contoh 13.**

$17 \equiv 2 \pmod{3}$ → $17 = 2 + 5 \cdot 3$ $(k = 5)$

$-7 \equiv 15 \pmod{11}$ → $-7 = 15 + (-2)11$ $(k = -2)$

- a mod m = r dapat juga ditulis sebagai $a \equiv r \pmod{m}$

- **Contoh 14.**

  (i) 23 mod 5 = 3 → $23 \equiv 3 \pmod{5}$

  (ii) 27 mod 3 = 0 → $27 \equiv 0 \pmod{3}$

  (iii) 6 mod 8 = 6 → $6 \equiv 6 \pmod{8}$

  (iv) 0 mod 12 = 0 → $0 \equiv 0 \pmod{12}$

  (v) – 41 mod 9 = 4 → $-41 \equiv 4 \pmod{9}$

  (vi) – 39 mod 13 = 0 → $-39 \equiv 0 \pmod{13}$

Teorema 4. Misalkan m adalah bilangan bulat positif.

1)Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan c adalah sembarang bilangan bulat maka

(i) $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$

(ii) $ac \equiv bc \pmod{m}$

(iii) $a^p \equiv b^p \pmod{m}$, p bilangan bulat tak-negatif

artinya, kedua ruas dapat ditambah, dikali, atau dipangkatkan dengan sebuah konstanta

2) Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka

(i) $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$

(ii) $ac \equiv bd \pmod{m}$

artinya, dua buah bilangan bulat dengan modulus yang sama dapat dijumlahkan atau dikalikan

Bukti (hanya untuk 1(ii) dan 2(i) saja):

$ac \equiv bc \pmod{m}$

1(ii) $a \equiv b \pmod{m}$ berarti:

$\Leftrightarrow a = b + km$

$\Leftrightarrow a - b = km$

$\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$

$\Leftrightarrow ac = bc + Km$

$\Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ ■

$(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$

2(i) $a \equiv b \pmod{m} \quad \Leftrightarrow \quad a = b + k_1 m$

$c \equiv d \pmod{m} \quad \Leftrightarrow \quad c = d + k_2 m \;\; +$

$\Leftrightarrow \quad (a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$

$\Leftrightarrow \quad (a + c) = (b + d) + km \qquad (k = k_1 + k_2)$

$\Leftrightarrow \quad (a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$ ■

Contoh 15.

Misalkan $17 \equiv 2 \pmod 3$ dan $10 \equiv 4 \pmod 3$, maka menurut Teorema 4,

$17 + 5 \equiv 2 + 5 \pmod 3 \Leftrightarrow 22 \equiv 7 \pmod 3$ periksa $3 \mid (22 - 7)$

$17 \,.\, 5 \equiv 2 \cdot 5 \pmod 3 \Leftrightarrow 85 \equiv 10 \pmod 3$ periksa $3 \mid (85 - 10)$

$17 + 10 \equiv 2 + 4 \pmod 3 \Leftrightarrow 27 \equiv 6 \pmod 3$ periksa $3 \mid (27 - 6)$

$17 \,.\, 10 \equiv 2 \cdot 4 \pmod 3 \Leftrightarrow 170 \equiv 8 \pmod 3$ periksa $3 \mid (170 - 8)$

- Teorema 4 tidak memasukkan operasi pembagian pada aritmetika modulo karena jika kedua ruas dibagi dengan bilangan bulat, maka kekongruenan tidak selalu dipenuhi.

- **Contoh 16**:

  $10 \equiv 4 \pmod{3}$ dapat dibagi dengan 2

  karena $10/2 = 5$ dan $4/2 = 2$, dan $5 \equiv 2 \pmod{3}$

  $14 \equiv 8 \pmod{6}$ tidak dapat dibagi dengan 2, karena $14/2 = 7$ dan $8/2 = 4$, tetapi $7 \not\equiv 4 \pmod{6}$.

Latihan 2

Buktikan Teorema 4.2(ii), jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka buktikan bahwa $ac \equiv bd \pmod{m}$

.

Penyelesaian:

$a \equiv b \pmod{m}$ → $a = b + k_1 m$

$c \equiv d \pmod{m}$ → $c = d + k_2 m$

maka

$\Leftrightarrow ac = (b + k_1 m)(d + k_2 m)$

$\Leftrightarrow ac \;= bd + bk_2 m + dk_1 m + k_1 k_2 m^2$

$\Leftrightarrow ac \;= bd + Km$ dengan $K = bk_2 + dk_1 + k_1 k_2 m$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{ac \equiv bd \pmod{m}}$ (terbukti)

Balikan Modulo (modulo invers)

- Di dalam aritmetika bilangan riil, balikan sebuah bilangan yang tidak-nol adalah bentuk pecahannya sedemikian sehingga hasil perkalian keduanya sama dengan 1.
- Jika a adalah sebuah bilangan tidak-nol, maka balikannya adalah $1/a$ sedemikian sehingga $a \times 1/a = 1$.

  Contoh: Balikan 4 adalah 1/4, sebab $4 \times 1/4 = 1$.
- Balikan a dilambangkan dengan a^{-1} .

- Di dalam aritmetika modulo, balikan modulo sebuah bilangan bulat lebih sukar dihitung.

- Diberikan sebuah bilangan bulat a(mod m). Bagaimana menghitung balikan a (mod m)?

- **Syarat**: Jika a dan m relatif prima dan $m > 1$, maka balikan (*invers*) dari a (mod m) ada.

- Balikan dari a (mod m) adalah bilangan bulat x sedemikian sehingga:

  $$xa \equiv 1 \pmod{m}$$

- Dalam notasi lainnya, a^{-1}(mod m) = x

Bukti: a dan m relatif prima, jadi PBB(a, m) = 1, dan terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga:

$$xa + ym = 1$$

yang mengimplikasikan bahwa

$$xa + ym \equiv 1 \pmod{m}$$

Karena $ym \equiv 0 \pmod{m}$ (kenapa?), maka

$$xa \equiv 1 \pmod{m}$$

Kekongruenan yang terakhir ini berarti bahwa x adalah balikan dari a (mod m). ■

- Pembuktian di atas juga menceritakan bahwa untuk mencari balikan dari *a* (mod *m*), kita harus membuat kombinasi linier dari *a* dan *m* sama dengan 1.

- Koefisien *a* dari kombinasi linier tersebut merupakan balikan dari *a* (mod *m*).

Contoh 17. Tentukan balikan dari 4 (mod 9), 17 (mod 7), dan 18 (mod 10).

Penyelesaian:

(a) Karena PBB(4, 9) = 1, maka balikan dari 4 (mod 9) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh bahwa

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \quad \text{(i)}$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0 \quad \text{(ii)}$$

Susun persamaan (i) menjadi

$$-2 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 1 \quad \text{atau} \quad -2 \cdot 4 + 1 \cdot 9 \equiv 1 \pmod 9$$

Karena $1 \cdot 9 \equiv 0 \pmod 9$, maka

$$-2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 9$$

Dari kekongruenan terakhir ini kita peroleh –2 adalah balikan dari 4 (mod 9).

atau dapat juga ditulis $4^{-1} \pmod 9 = -2 \pmod 9$.

- Catatan: setiap bilangan yang kongruen dengan

  $-2 \pmod 9$

  juga adalah balikan dari 4 (mod 9), misalnya ..., –20, –11, 7, 16, ...

  $-20 \equiv -2 \pmod 9$ (karena 9 habis membagi $-20 - (-2) = -18$)

  $-11 \equiv -2 \pmod 9$ (karena 9 habis membagi $-11 - (-2) = -9$)

  $7 \equiv -2 \pmod 9$ (karena 9 habis membagi $7 - (-2) = 9$)

  $16 \equiv -2 \pmod 9$ (karena 9 habis membagi $16 - (-2) = 18$)

- ..., –20, –11, –2, 7, 16, ... diperoleh dengan menambahkan 9 ke kiri atau ke kanan dari –2

(b) Karena PBB(17, 7) = 1, maka balikan dari 17 (mod 7) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh rangkaian pembagian berikut:

$17 = 2 \cdot 7 + 3$ (i)

$7 = 2 \cdot 3 + 1$ (ii)

$3 = 3 \cdot 1 + 0$ (iii) (yang berarti: PBB(17, 7) = 1))

Susun (ii) menjadi:

$1 = 7 - 2 \cdot 3$ (iv)

Susun (i) menjadi

$3 = 17 - 2 \cdot 7$ (v)

Sulihkan (v) ke dalam (iv):

$1 = 7 - 2 \cdot (17 - 2 \cdot 7) = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 17 + 4 \cdot 7 = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$

atau

$-2 \cdot 17 + 5 \cdot 7 = 1$ ($5 \cdot 7 \equiv 0 \pmod{7}$)

$-2 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{7}$ (7 habis membagi $-2 \cdot 17 - 1 = -35$)

Jadi, –2 adalah balikan dari 17 (mod 7), atau dapat ditulis $17^{-1} \pmod{7} = -2 \pmod{7}$.

(c) Menghitung balikan 18 (mod 10). Karena PBB(18, 10) = 2 $\neq$ 1, maka balikan dari 18 (mod 10) tidak ada.

Cara lain menghitung balikan modulo

- Ditanya: balikan dari a (mod m)
- Misalkan x adalah balikan dari a (mod m), maka

  $ax \equiv 1 \pmod{m}$ (definisi balikan modulo)

  atau dalam notasi 'sama dengan':

  $ax = 1 + km$

  atau

  $x = (1 + km)/a$

  Cobakan untuk k = 0, 1, 2, … dan k = -1, -2, …

  Solusinya adalah semua bilangan bulat yang memenuhi.

- **Contoh 18**: Balikan dari 4 (mod 9) adalah x sedemikian sehingga $4x \equiv 1 \pmod 9$

$4x \equiv 1 \pmod 9 \rightarrow 4x = 1 + 9k \rightarrow x = (1 + 9k)/4$

Untuk $k = 0 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot 0)/4 = 1/4 \rightarrow$ tidak bulat

$k = 1 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot 1)/4 = 10/4 \rightarrow$ tidak bulat

$k = 2 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot 2)/4 = 19/4 \rightarrow$ tidak bulat

$k = 3 \rightarrow x = (1 + 9 . 3)/4 = 7$

$k = -1 \rightarrow x = (1 + 9. -1)/4 = -2$

Balikan dari 4 (mod 9) adalah 7 (mod 9), -2 (mod 9), dst

Catatan: cukup menemukan satu saja balikan dari 4(mod 9), maka semua bilangan lainnya dapat dicari dengan menambahkan 9 pada bilangan tersebut. Pada contoh di atas 7 adalah balikan 4(mod 9), maka dengan menambahkan 9 ke kiri dan ke kanan diperoleh …, -11, -2, 7, 16, …

Latihan 3

- Tentukan semua balikan dari 9 (mod 11).

Penyelesaian:

- Misalkan 9^{-1} (mod 11) = x
- Maka $9x \equiv 1$ (mod 11) atau $9x = 1 + 11k$ atau

  $x = (1 + 11k)/9$

  Dengan mencoba semua nilai k yang bulat (k = 0, -1, -2, ..., 1, 2, ...) maka diperoleh x = 5. Semua bilangan lain yang kongruen dengan 5 (mod 11) juga merupakan solusi, yaitu –6, 16, 27, ...

Kekongruenan Linier

- Kekongruenan linier (*linear congruence*) berbentuk:

  $ax \equiv b \pmod{m}$

  ($m > 0$, a dan b sembarang bilangan bulat, dan x adalah peubah bilangan bulat).

  Pemecahan: $ax = b + km$ → $x = \dfrac{b + km}{a}$

  (Cobakan untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$ dan $k = -1, -2, \ldots$ yang menghasilkan x sebagai bilangan bulat)

Contoh 19.

Tentukan solusi: $4x \equiv 3 \pmod 9$ dan $2x \equiv 3 \pmod 4$

Penyelesaian:

(i) $4x \equiv 3 \pmod 9$

$$x = \frac{3 + k \cdot 9}{4}$$

$k = 0 \rightarrow x = (3 + 0 \cdot 9)/4 = 3/4$ (bukan solusi)

$k = 1 \rightarrow x = (3 + 1 \cdot 9)/4 = 3$

$k = 2 \rightarrow x = (3 + 2 \cdot 9)/4 = 21/4$ (bukan solusi)

$k = 3$, $k = 4$ tidak menghasilkan solusi

$k = 5 \rightarrow x = (3 + 5 \cdot 9)/4 = 12$

…

$k = -1 \rightarrow x = (3 - 1 \cdot 9)/4 = -6/4$ (bukan solusi)

$k = -2 \rightarrow x = (3 - 2 \cdot 9)/4 = -15/4$ (bukan solusi)

$k = -3 \rightarrow x = (3 - 3 \cdot 9)/4 = -6$

…

$k = -6 \rightarrow x = (3 - 6 \cdot 9)/4 = -15$

…

Nilai-nilai x yang memenuhi: 3, 12, … dan –6, –15, …

Atau solusi cukup dinyatakan sebagai $x \equiv 3 \pmod 9$, atau $x = 3 + 9k$, k sembarang bilangan bulat

(ii) $2x \equiv 3 \pmod 4$

$$x = \frac{3 + k \cdot 4}{2}$$

Karena $4k$ genap dan 3 ganjil maka penjumlahannya menghasilkan ganjil, sehingga hasil penjumlahan tersebut jika dibagi dengan 2 tidak menghasilkan bilangan bulat. Dengan kata lain, tidak ada nilai-nilai x yang memenuhi $2x \equiv 3 \pmod 5$.

Cara lain menghitung solusi $ax \equiv b \pmod{m}$

- Seperti dalam persamaan aljabar biasa (tanpa modulo),

  $4x = 12$ → kalikan setiap ruas dengan 1/4 (yaitu invers 4), maka

  $(1/4) \cdot 4x = 12 \cdot (1/4)$ → $x = 12/4 = 3$

- $4x \equiv 12 \pmod{9}$ → kalikan setiap ruas dengan balikan dari 4 (mod 9) (dalam hal ini sudah kita hitung, yaitu –2)

  $(-2) \cdot 4x \equiv (-2) \cdot 12 \pmod{9} \Leftrightarrow -8x \equiv -24 \pmod{9}$

Karena $-8 \equiv 1 \pmod{9}$, maka $x \equiv -24 \pmod{9}$. Semua bilangan bulat yang kongruen dengan –24 (mod 9) adalah solusinya, yaitu …, –33, –15, –6, 3, 12,

Latihan

Tentukan nilai-nilai x yang memenuhi masing-masing kekongruenan berikut:

(a) $4x \equiv 8 \pmod{11}$

(b) $5x \equiv 1 \pmod{61}$

(c) $2x \equiv 1 \pmod{8}$

(d) $2^x \equiv 1 \pmod{32}$

Latihan Soal Teori Bilangan

Soal 1

- Buktikan untuk setiap bilangan bulat positif n dan a, PBB(a, $a + n$) habis membagi n.

Jawaban:

Misalkan PBB(a, $a + n$) = d.

Maka:

$d \mid a + n \rightarrow a + n = k_1 d$

$d \mid a \rightarrow \quad a = k_2 d \quad -$

$a + n - a = (k_1 - k_2)d$

$n = Kd$ (misal $k_1 - k_2 = K$)

$n = Kd \rightarrow d \mid n$ (terbukti)

Soal 2

Perlihatkan bahwa bila $n \mid m$, yang dalam hal ini n dan m adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, dan jika $a \equiv b \pmod{m}$ dengan a dan b adalah bilangan bulat, maka $a \equiv b \pmod{n}$.

- Jawaban:

Diketahui bahwa $n \mid m$ atau dapat dituliskan sebagai :

$m = k_1 \,.\, n$ ….(i)

Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka :

$a = b + k_2 \,.\, m$ ….(ii)

Substitusikan (i) ke dalam (ii):

$a = b + k_2 \,.\, k_1 .\, n$

$a = b + k_3 \,.\, n$ (misalkan $k_3 = k_2 \,.\, k_1$) (iii)

$a - b = k_3 \,.\, \mathrm{n}$ yang berarti bahwa $n \mid (a - b)$ atau

$a \equiv b \pmod{n}$ ■

Soal 3

- Carilah semua bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi 2 dan bersisa 2 jika dibagi 3

Carilah semua bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi 2 dan bersisa 2 jika dibagi 3

Penyelesaian:

Misal bilangan tersebut adalah $x = 2k+1$

$$(2k + 1) \bmod 3 = 2 \rightarrow 2k + 1 \equiv 2 \pmod 3$$

$$2k \equiv 2 - 1 \pmod 3$$

$$2k \equiv 1 \pmod 3$$

$$k \equiv 2 \pmod 3$$

$$k = 2 + 3n$$

Berarti x = 2(2 + 3n)+1 = 6n + 5 , n sembarang bilangan bulat

Jadi bilangan-bilangan yang memenuhi adalah $x = \{..., 5,11,17,23,...\}$

Soal 4

- Tentukan x dan y bilangan bulat yang memenuhi persamaan

$$312x + 70y = 2,$$

lalu hitunglah nilai dari : y mod x .

$312x + 70y = 2$

Jawaban:

Dengan menggunakan algoritma Euclid, ditemukan bahwa :

312 = 4.70 + 32 (i)

70 = 2.32 + 6 (ii)

32 = 5.6 + 2 (iii)

6 = 3.2 + 0 (iv)

Persamaan (iii) dapat dituliskan menjadi : 2 = 32 – 5.6 (v)

Persamaan (ii) dapat dituliskan menjadi : 6 = 70 – 2.32 (vi)

Sulihkan persamaan (vi) ke persamaan (v) :

2 = 32 – 5.(70 – 2.32)

2 = 32 – 5.70 + 10.32

2 = 11.32 – 5.70 (vii)

Persamaan (i) dapat dituliskan menjadi : 32 = 312 – 4.70 (viii)

Sulihkan persamaan (viii) ke persamaan (vii) :

$2 = 11.(312 – 4.70) – 5.70$

$2 = 11.312 – 44.70 – 5.70$

$2 = 11.312 – 49.70$ (ix)

Dari persamaan (ix) diketahui x dan y yang memenuhi adalah

$x = 11$ dan $y = -49$, sehingga $y \bmod x = -49 \bmod 11 = 6$

Bersambung ke Bagian 2