1 Глава 3 Уравнения на права и равнина в пространството

1.1 Задача 1.

Да се намери точка M', ортогонално симетрична
на точката $M(1,1,2)$ относно равнината ε, определена с точките
$M_1(5,10,0),\ M_2(4,0,-7),\ M_3(2,4,-5)$. Да се определят и директорните
косинуси в посока от M към M'
Решение:

$$\varepsilon\begin{cases} z\ M_1(5,10,0)\\ z\ M_2(4,0,-7)\\ z\ M_3(2,4,-5)\end{cases}$$

$$\varepsilon:\begin{vmatrix} x-5 & y-10 & z\\ -1 & -10 & -7\\ -3 & -6 & -5\end{vmatrix}=0$$

$$\varepsilon: 50(x-5)+21(y-10)+6z-30z-42(x-5)-5(y-10)=0$$

$$\varepsilon: 8(x-5)+16(y-10)-24z=0 \ |\tfrac{1}{8}$$

$$\varepsilon: x-5+2(y-10)-3z=0$$

$$\varepsilon: x+2y-3z-25=0$$

$$N_\varepsilon(1,2,-3)\perp\varepsilon$$

$$g\begin{cases} z\ M(1,1,2)\\ \parallel\ N_\varepsilon(1,2,-3)\end{cases}$$

$$g\begin{cases} x=1+\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=2-3\lambda\end{cases}$$

$$g\cap\varepsilon=M_0(x_0,y_0,z_0)$$

$$1+\lambda_0+2+4\lambda_0-6+9\lambda_0-25=0$$

$$14\lambda_0=28 \implies \lambda_0=2 \implies M_0(3,5,-4)$$

$$M'(x',y',z')$$

$$M_0(\tfrac{x_M+x'}{2},\tfrac{y_M+y'}{2},\tfrac{z_M+z'}{2})$$

$3 = \frac{1+x'}{2} \quad 5 = \frac{1+y'}{2} \quad -4 = \frac{2+z'}{2}$

$x' = 5 \quad y' = 9 \quad z = -10$

$\implies M'(5, 9, -10)$

$\overrightarrow{MM'}(4, 8, -12) \parallel \overrightarrow{q}(1, 2, -3)$

$\implies \overrightarrow{n_q} = \frac{\overrightarrow{q}}{|\overrightarrow{q}|}$

$|\overrightarrow{q}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{n_q}(\frac{1}{14}, \frac{2}{14}, -\frac{3}{14})$

Директроните косинуси съвпадат с кординатите на $\overrightarrow{n_q}$

1.2 Задача 2.

Да се намери точка M', ортогонално симетрична
на точката $M(-1, 1, 2)$ относно правата
$g \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$
и да се намери разтоянието от M до g
Решение:

$$g \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

$$g \begin{cases} z\ G(0, 1, -2) \\ \parallel \overrightarrow{g}(1, 1, 1) \end{cases}$$

$$\varepsilon \begin{cases} z\ M(-1, 1, 2) \\ \perp \overrightarrow{g}(1, 1, 1) \end{cases}$$

$\implies \varepsilon : 1(x+1) + 1(y-1) + 1(z-2) = 0$

$\varepsilon : x + y + z - 2 = 0$

$\varepsilon \cap g = M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + 1 \\ z_0 &= x_0 - 2 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + 1 \\ z_0 &= x_0 - 2 \\ x_0 + x_0 + 1 + x_0 - 2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + 1 \\ z_0 &= x_0 - 2 \\ 3x_0 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= 2 \\ z_0 &= -1 \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

$\implies M_0(1, 2, -1)$

$M'(x', y', z')$

$M_0(\frac{x_M + x'}{2}, \frac{y_M + y'}{2}, \frac{z_M + z'}{2})$

$1 = \frac{-1+x'}{2} \quad 2 = \frac{1+y'}{2} \quad -1 = \frac{2+z'}{2}$

$x' = 3 \quad y' = 3 \quad z = -4$

$\implies M'(3, 3, -4)$

$d(M, g) = d(M, M_0) = |\overrightarrow{MM_0}| \ (\varepsilon \cap g = M_0, \ \varepsilon \ z \ M, \ \varepsilon \perp g)$

$\overrightarrow{MM_0}(2, 1, -3)$

$|\overrightarrow{MM_0}| = \sqrt{4 + 1 = 9} = \sqrt{14}$