Домашна Работа № 1

Иво Стратев, Информатика, 2-ри курс, група 3, фак. № 45342

29 ноември 2017 г.

Нека $F(x) = \frac{2x^2+18}{x-9}$, нека $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$ и нека е дадена рекуретна редица

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, такава че:

$$a_n = \begin{cases} \lambda & , \; n = 1 \\ F(a_{n-1}) & , \; n \geq 2 \end{cases}$$

Да се изследва редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ за сходимост в зависимост от λ.

Решение:

Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходящата, нека $l = \lim_{n\to\infty} \; a_n$.

Тогава $\lim_{n\to\infty} \; a_{n+1} - a_n = l - l = 0 \implies$

$\lim_{n\to\infty} \; a_{n+1} - a_n = \lim_{n\to\infty} \; F(a_n) - a_n =$

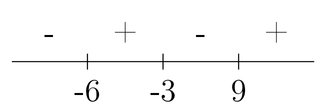
$= \lim_{n\to\infty} \; \frac{2a_n^2+18}{a_n-9} - a_n = \lim_{n\to\infty} \; \frac{2a_n^2+18}{a_n-9} - a_n \frac{a_n-9}{a_n-9} =$

$= \lim_{n\to\infty} \; \frac{2a_n^2+18-a_n^2+9a_n}{a_n-9} = \lim_{n\to\infty} \; \frac{a_n^2+9a_n+18}{a_n-9} = \frac{l^2+9l+18}{l-9} = 0$

$\iff \; l^2+9l+18 = 0 \iff (l+3)(l+6) = 0 \iff l = -3 \; \vee \; l = -6$

Тогава ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща нейната граница е или -6 или -3.

$$sign(a_{n+1} - a_n) = sign\left(\frac{(a_n+3)(a_n+6)}{a_n-9}\right) \qquad (1)$$



$sign(a_{n+1} - (-6)) = sing(F(a_n) + 6) = sign\left(\frac{2a_n^2+18+6(a_n-9)}{a_n-9}\right) =$

$= sign\left(\frac{2a_n^2+2.9+6a_n-6.9}{a_n-9}\right) = sign\left(\frac{2a_n^2+6a_n-4.9}{a_n-9}\right) = sign\left(2\frac{a_n^2+3a_n-18}{a_n-9}\right) =$

$$= sign\left(\frac{a_n^2+3a_n-18}{a_n-9}\right) = sign\left(\frac{(a_n+6)(a_n-3)}{a_n-9}\right) \quad (2)$$

$$\begin{array}{cccc} - & + & - & + \\ & -6 & 3 & 9 \end{array}$$

$$sign(a_{n+1}-(-3)) = sing(F(a_n)+3) = sign\left(\frac{2a_n^2+18+3(a_n-9)}{a_n-9}\right) =$$

$$= sign\left(\frac{2a_n^2+3a_n+2.9-3.9}{a_n-9}\right) = sign\left(\frac{2a_n^2+3a_n-9}{a_n-9}\right) = sign\left(\frac{(a_n+3)(a_n-\frac{3}{2})}{a_n-9}\right) \quad (3)$$

$$\begin{array}{cccc} - & + & - & + \\ & -3 & \frac{3}{2} & 9 \end{array}$$

$$sign(a_{n+1}-9) = sing(F(a_n)-9) = sign\left(\frac{2a_n^2+18-9(a_n-9)}{a_n-9}\right) =$$

$$= sign\left(\frac{2a_n^2+2.9-9a_n+9.9}{a_n-9}\right) = sign\left(\frac{2a_n^2-9a_n+11.9}{a_n-9}\right) =$$

$$= sign(2a_n^2-9a_n+11.9)sign(a_n-9) = 1.sign(a_n-9) = sign(a_n-9) \quad (4)$$

$$\begin{array}{cc} - & + \\ & 9 \end{array}$$

Нека $\lambda \in (9,\ \infty)$. Тогава от (1) следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растяща, защото всеки член е строго по-голям от предишния. От (2) и (3) следва, че $a_2 > -3 > -6$. Тогава $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > -3 > -6$, тоест редицата е неограничена откъдето следва, че $a_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$.

Нека $\lambda \in (3,\ 9)$. Тогава от (3) следва, че $a_2 < -3$, а от (2) следва, че $a_2 < -6$. Тогава от (1) следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно намаляваща, защото всеки член е строго по-малък от предишния, заедно с $a_2 < -6 < -3 \implies$ следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно намаляваща и неограничена, тоест $a_k \underset{k\to\infty}{\to} -\infty$.

Нека $\lambda = 3$. Тогава от (2) следва, че $a_2 = -6$ и отново от (2) следва, че $a_3 = -6$. Тогава по индукция, следва че $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\ a_n = -6$. От където следва, че $a_k \underset{k\to\infty}{\to} -6$.

Нека $\lambda \in \left(\frac{3}{2},\ 3\right)$. Тогава от (3) следва, че $a_2 < -3$, а от (2) следва, че $a_2 > -6$. Получаваме $-6 < a_2 < -3$. Тогава чрез индукция по n от (3) и (2) достигаме до неравенството

$\forall n \in \mathbb{N}\ -6 < a_n < -3$. От (1) следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растяща, от което следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растяща и ограничена отгоре от -3 или $a_k \underset{k\to\infty}{\to} -3$.

Нека $\lambda = \frac{3}{2}$. Тогава от (3) следва, че $a_2 = -3$ и отново от (3) следва, че $a_3 = -3$. Тогава по индукция, следва че $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\ a_n = -3$. От където следва, че $a_k \underset{k\to\infty}{\to} -3$.

Нека $\lambda \in \left(-3,\ \frac{3}{2}\right)$. Тогава от (3) следва, че $a_2 > -3$, от (2) следва, че $a_2 > -6$, тоест

$a_2 > -3 > -6$, а от (1) следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и така по индукция получаваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно намаляваща и ограничена отдолу от -3, тогава $a_k \underset{k\to\infty}{\to} -3$.

Нека $\lambda = -3$. Тогава от (3) следва, че $a_2 = -3$ и отново от (3) следва, че $a_3 = -3$. Тогава по индукция, следва че $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = -3$. От където следва, че $a_k \underset{k\to\infty}{\to} -3$.

Нека $\lambda \in (-6,\ -3)$. Тогава от (3) следва, че $a_2 < -3$, а от (2) следва, че $a_2 > -6$ тоест $-6 < a_2 < -3$. От (1) следва, че редицата е растяща и по индукция от (1), (2) и (3) следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растяща и ограничена отгоре от -3, тоест $a_k \underset{k\to\infty}{\to} -3$.

Нека $\lambda = -6$. Тогава от (2) следва, че $a_2 = -6$ и отново от (2) следва, че $a_3 = -6$. Тогава по индукция, следва че $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = -6$. От където следва, че $a_k \underset{k\to\infty}{\to} -6$.

Нека $\lambda \in (-\infty,\ -6)$. Тогава от (1) следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно намаляваща, защото всеки член е строго по-малък от предишния. От (2) и (3) следва, че $a_2 < -6 < -3$. Тогава $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n < -6 < -3$, тоест редицата е неограничена откъдето следва, че $a_k \underset{k\to\infty}{\to} -\infty$.

Отговор: $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & ,\ \lambda \in (-\infty,\ -6) \cup (3,\ 9) \\ -6 & ,\ \lambda \in \{-6,\ 3\} \\ -3 & ,\ \lambda \in (-6,\ 3) \\ \infty & ,\ \lambda \in (9,\ \infty) \end{cases}$