Курсова задача №4

Иво Стратев, Информатика, 2-ри курс, група 3, фак. № 45342

13 февруари 2018 г.

Намерете във вид на степенен ред около т. 0 решението на задача на Коши за даденото линейно ДУ от 2-ри ред и определете радиуса на сходимост на реда:

$$\begin{cases} y'' + 5xy' + 3 = 0 \\ y(0) = -5 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Решение:

Решението на дадената задача на Коши търсим във вид на степенен ред около т. 0. Тогава нека

$$\forall x \in \mathbb{R}\ y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

За да намерим развитието на първата производна на y диференцираме от двете страни и получаваме

$$\forall x \in \mathbb{R}\ y'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

По аналогичен начин намираме развитието на втората производна на y

$$\forall x \in \mathbb{R}\ y''(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x^{n-1})' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Сменяме индексите

$$\forall x \in \mathbb{R}\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_{n+2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n$$

Заместваме в даденото линейно ДУ

$$\forall x \in \mathbb{R}\ 0 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 5x\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 5na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (5n+3)a_n]x^n \implies$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (5n+3)a_n = 0 \implies$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+2} = -\frac{5n+3}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

Получихме, че за да имаме решение на даденото линейно ДУ във вид на степенен ред около т. 0, то членовете на този ред трябва да изпълняват рекуретното отношение

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+2} = -\frac{5n+3}{(n+2)(n+1)}a_n$$

От началното условие $y(0) = -5$ получаваме

$$-5 = y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0.$$

Следователно намерихме, че $a_0 = -5$. По аналогичен начин използвайки условието $y'(0) = -3$ получаваме

$$-3 = y'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n 0^{n-1} = a_1.$$

Следователно $a_1 = -3$. Тогава членовете на решението на поставената задача на Коши във вид на ред около т. 0 трябва да изпълняват следните условия

$$\begin{aligned} a_0 &= -5 \\ a_1 &= -3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} &= -\frac{5n+3}{(n+2)(n+1)}a_n. \end{aligned}$$

Пресмятеме първите няколко члена

$$a_2 = -\frac{5.0+3}{(0+2)(0+1)}a_0 = -\frac{3}{2!}(-5) = \frac{15}{2!}$$

$$a_3 = -\frac{5.1+3}{(1+2)(1+1)}a_1 = -\frac{8}{3.2}(-3) = \frac{8.3}{3!}$$

$$a_4 = -\frac{5.2+3}{(2+2)(2+1)}a_2 = -\frac{13}{4.3}\frac{15}{2!} = -\frac{13.3.5}{4!}$$

$$a_5 = -\frac{5.3+3}{(3+2)(3+1)}a_3 = -\frac{18}{5.4}\frac{8.3}{3!} = -\frac{18.8.3}{5!}$$

$$a_6 = -\frac{5.4+3}{(4+2)(4+1)}a_4 = -\frac{23}{6.5} - \frac{13.3.5}{4!} = \frac{23.13.3.5}{6!}$$

$$a_7 = -\frac{5.5+3}{(5+2)(5+1)}a_5 = -\frac{28}{7.6} - \frac{18.8.3}{5!} = \frac{28.18.8.3}{7!}$$

Лесно се съобразява, че

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{2n} = 5\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}(5(2k)+3) = 5\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}(10k+3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{2n+1} = 3\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(5(2k+1)+3) = 3\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(10k+8)$$

Тогава решението на дадената задача на Коши във вид на степенен ред около точката 0 е

$$\forall x \in \mathbb{R}\ y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \begin{cases} 5\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(10k+3) & ,\ n \equiv 0\ (mod\ 2) \\[2ex] 3\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+1}}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1}(10k+8) & ,\ n \equiv 1\ (mod\ 2) \end{cases}$$

За да намерим радиуса на сходимост на реда, решение на задачата ще разгледаме по отделно реда на коефициентите с четен индекс и реда на коефициентите с нечетен. Разглеждаме степенния ред само на членовете с четен индекс

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}(10k+3)x^{2n}$$

За да определим радиуса на сходимост на този ред пресмятаме границата

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5(-1)^{n+1}\prod_{k=0}^{n-1}(10k+3)(2n+2)!}{(2n)!5(-1)^{n+2}\prod_{k=0}^{n}(10k+3)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{10n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{10n+3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)}{10n\left(1+\frac{3}{10n}\right)} = \infty$$

Следователно

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \exists \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}.$$

Разглеждаме степенния ред само на членовете с нечетен индекс

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(10k+8)x^{2n+1}$$

За да определим радиуса на сходимост на този ред пресмятаме границата

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(-1)^{n+1}\prod_{k=0}^{n-1}(10k+8)(2n+3)!}{(2n+1)!3(-1)^{n+3}\prod_{k=0}^{n}(10k+8)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(2n+2)}{10n+8} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+8n+6}{10n+8} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{2n^2}\right)}{10n\left(1+\frac{4}{5n}\right)} = \infty$$

Следователно

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

Получихме, че за всяко $x \in \mathbb{R}$ двата реда за сходящи. Така получаваме че

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} + \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\implies \forall x \in \mathbb{R}\ \exists \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Тоест получихме, че радиуса на сходимост реда около точката 0 на даденото линейно ДУ е безкрайност.

Отговори:

Решението във вид на степенен ред около т. 0 на дадената задачата на Коши за линейно ДУ от 2-ри ред

$$\begin{cases} y'' + 5xy' + 3 = 0 \\ y(0) = -5 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

е реда

$$\forall x \in \mathbb{R}\ y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 5 \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (10k+3) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 3 \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (10k+8) x^{2n+1}.$$

Радиуса на сходимост на този ред е безкрайност. Тоест реда е сходящ за всяка стойност на аргумента.