Задачи за детерминанти от 27.12.2018г. или поне тези, които трябваше да решим :D

Иво Стратев

28 ноември 2018 г.

Задача 1 (n + 1 на n + 1 // пълния вариант).

Да се пресметне детерминантата от (n + 1)-ви ред:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a+1 \\ a & a & a & \cdots & a+1 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a+1 & \cdots & a & a \\ a & a+1 & a & \cdots & a & a \\ a & d & d & \cdots & d & d \end{vmatrix}$$

Решение:

Вадим първия стълб от всеки друг и получаваме:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & d-a & d-a & \cdots & d-a & d-a \end{vmatrix}$$

Изваждаме общия множител a и получаваме:

$$a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & d-a & d-a & \cdots & d-a & d-a \end{vmatrix}$$

Вадим първи ред от всеки друг и получаваме:

$$a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & d-a & d-a & \cdots & d-a & d-a-1 \end{vmatrix}$$

Изкарваме общия множител -1 от последния стълб и получаваме:

$$-a\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & d-a & d-a & \cdots & d-a & 1+a-d\end{vmatrix}$$

Развиваме по първи стълб и получаваме детерминанта от n-ти ред:

$$-a\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ d-a & d-a & \cdots & d-a & 1+a-d\end{vmatrix}$$

Умножаваме първия ред по $d-a$ и го вадим от последния, умножаваме втория ред по $d-a$ и го вадим от последния и тн. и получаваме:

$$-a\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+a-d-(n-1)(d-a)\end{vmatrix} =$$

$$-a\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+n(a-d)\end{vmatrix}$$

Получената детерминанта развиваме по последния ред и получаваме:

$$-a(1+n(a-d))(-1)^{n+n}\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix} =$$

$$-a(1+n(a-d))\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

Получената детерминанта е от $n-1$-ви ред и е обратно диагонална и така като я развием получаваме:

$$-a(1+n(a-d))(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}1^{n-1}$$

И така първоначалната детерминанта е равна на:

$$(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}+1}a(1+n(a-d))$$

Отговор: $(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}+1} a(1+n(a-d))$

Задача 2.

Да се пресметне детерминантата от (n + 1)-ви ред:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 0 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & a_1+a_4 & \cdots & a_1+a_n \\ 4 & a_2+a_1 & 0 & a_2+a_3 & a_2+a_4 & \cdots & a_2+a_n \\ 4 & a_3+a_1 & a_3+a_2 & 0 & a_3+a_4 & \cdots & a_3+a_n \\ 4 & a_4+a_1 & a_4+a_2 & a_4+a_3 & 0 & \cdots & a_4+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & a_n+a_4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Решение:

Понякога помага да си представим как изглежда още някой друг ред или стълб, за да имаме по-голям поглед над задачата (ако знам, че ще ми се налага да смятам подобна детерминанта бих си взел доста листа и бих писал хоризонтално :D)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 4 & 0 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & a_1+a_4 & \cdots & a_1+a_{n-1} & a_1+a_n \\ 4 & a_2+a_1 & 0 & a_2+a_3 & a_2+a_4 & \cdots & a_2+a_{n-1} & a_2+a_n \\ 4 & a_3+a_1 & a_3+a_2 & 0 & a_3+a_4 & \cdots & a_3+a_{n-1} & a_3+a_n \\ 4 & a_4+a_1 & a_4+a_2 & a_4+a_3 & 0 & \cdots & a_4+a_{n-1} & a_4+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 4 & a_{n-1}+a_1 & a_{n-1}+a_2 & a_{n-1}+a_3 & a_{n-1}+a_4 & \cdots & 0 & a_{n-1}+a_n \\ 4 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & a_n+a_4 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Ще извадим последния ред от всеки друг, без първия и така получаваме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 0 & -a_n-a_1 & a_1-a_n & a_1-a_n & a_1-a_n & \cdots & a_1-a_n & a_1+a_n \\ 0 & a_2-a_n & -a_n-a_2 & a_2-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_2-a_n & a_2+a_n \\ 0 & a_3-a_n & a_3-a_n & -a_n-a_3 & a_3-a_n & \cdots & a_3-a_n & a_3+a_n \\ 0 & a_4-a_n & a_4-a_n & a_4-a_n & -a_n-a_4 & \cdots & a_4-a_n & a_4+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1}-a_n & a_{n-1}-a_n & a_{n-1}-a_n & a_{n-1}+a_n & \cdots & -a_n-a_{n+1} & a_{n-1}+a_n \\ 4 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & a_n+a_4 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Добавяме последния стълб към всеки без първия и така получаваме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & \cdots & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2a_1 & 2a_1 & 2a_1 & \cdots & 2a_1 & a_1+a_n \\ 0 & 2a_2 & 0 & 2a_2 & 2a_2 & \cdots & 2a_2 & a_2+a_n \\ 0 & 2a_3 & 2a_3 & 0 & 2a_3 & \cdots & 2a_3 & a_3+a_n \\ 0 & 2a_4 & 2a_4 & 2a_4 & 0 & \cdots & 2a_4 & a_4+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1}+a_n \\ 4 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & a_n+a_4 & \cdots & a_n+a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Развиваме по първи стълб и получаваме:

$$\Delta = 4(-1)^{n+1+1} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & \cdots & 8 & 4 \\ 0 & 2a_1 & 2a_1 & 2a_1 & \cdots & 2a_1 & a_1 + a_n \\ 2a_2 & 0 & 2a_2 & 2a_2 & \cdots & 2a_2 & a_2 + a_n \\ 2a_3 & 2a_3 & 0 & 2a_3 & \cdots & 2a_3 & a_3 + a_n \\ 2a_4 & 2a_4 & 2a_4 & 0 & \cdots & 2a_4 & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

Вадим общия множител 4 от първия ред и получаваме:

$$\Delta = 16(-1)^{n} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 2a_1 & 2a_1 & 2a_1 & \cdots & 2a_1 & a_1 + a_n \\ 2a_2 & 0 & 2a_2 & 2a_2 & \cdots & 2a_2 & a_2 + a_n \\ 2a_3 & 2a_3 & 0 & 2a_3 & \cdots & 2a_3 & a_3 + a_n \\ 2a_4 & 2a_4 & 2a_4 & 0 & \cdots & 2a_4 & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

Вадим общия множител 2 от първите $n-1$ стълба и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^{n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 + a_n \\ a_2 & 0 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 + a_n \\ a_3 & a_3 & 0 & a_3 & \cdots & a_3 & a_3 + a_n \\ a_4 & a_4 & a_4 & 0 & \cdots & a_4 & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

От втори ред вадим първия умножен по a_1, от трети ред вадим първия умножен по a_2 и тн. от n-ти ред вадим първия умножен по a_{n-1} и така получаваме

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^{n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Последователно разменяме n-тия с $n-1$-вия стълб, след това $n-1$-вия с $n-2$-рия и тн. накарая 2-рияс 1-вия. Това са $n-1$ размени, тоест $n-1$ смени на знака и така:

$$\Delta = (-1)^{n-1}2^{n+3}(-1)^{n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_n & -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & -a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Изкарваме $n-1$ множителя (-1) и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_n & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 0 & 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Тази детерминанта е от тип Пачи крак! Обаче ще трябва да разгледаме два случая:

Случай 1: $\exists i \in I_{n-1}\ a_i = 0$

Тогава $i+1$-я стълб е равен на e_1^t, тоест елемента с индекси $1, i+1$ е равен на 1 и всички други са 0, $i+1$-я ред пък е равен на $-a_n e_1$, тоест елемента с индекси $i+1, 1$ е равен на $-a_n$ и всички други са 0. Тоест:

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ -a_n & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Тогава от всеки стълб освен $i+1$-вия вадим $i+1$-вия и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ -a_n & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

След, което развиваме по $i+1$-вия ред и получаваме

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^n(-a_n)(-1)^{i+1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Сега развиваме по първи ред и получаваме

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^n(-a_n)(-1)^{i+1+1}.1.(-1)^{1+i}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Тоест

$$\Delta = 2^{n+3}a_n(-1)^n\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Получената детерминанта е диагонална и то по главния и можем директно да я пресметнем:

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^n\prod_{j=1,j\neq i}^{n} a_j$$

Случай 2: $\forall i \in I_{n-1}\ a_i \neq 0$

Тогава можем да делим без проблем и за това към първия стълб добавяме всеки друг умножен съответно по $\dfrac{a_n}{a_i}$ и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^n\begin{vmatrix} 1+a_n\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Сега развиваме тази детерминанта по първия стълб и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^n\left(1+a_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n-1}a_i =$$

$$2^{n+3}(-1)^n\left(\prod_{i=1}^{n-1}a_i + a_n\prod_{i=1}^{n-1}a_i\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right) =$$

$$2^{n+3}(-1)^n\left(\prod_{i=1,i\neq n}^{n}a_i + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}a_j}{a_i}\right) =$$

$$2^{n+3}(-1)^n\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}a_j$$

Отговор:

$$\exists i \in I_{n-1}\ a_i = 0 \implies \Delta = 2^{n+3}(-1)^n \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j$$

$$\forall i \in I_{n-1}\ a_i \neq 0 \implies \Delta = 2^{n+3}(-1)^n \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j$$

Задача 3.

Да се пресметне детерминантата от (n + 1)-ви ред:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 2a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 & \cdots & a_1 + a_n \\ 4 & a_1 - a_2 & 2a_2 & a_3 - a_2 & a_4 - a_2 & \cdots & a_2 + a_n \\ 4 & a_1 - a_3 & a_2 - a_3 & 2a_3 & a_4 - a_3 & \cdots & a_3 + a_n \\ 4 & a_1 - a_4 & a_2 - a_4 & a_3 - a_4 & 2a_4 & \cdots & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & a_n + a_4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 4 & 2a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 & \cdots & a_{n-1} - a_1 & a_1 + a_n \\ 4 & a_1 - a_2 & 2a_2 & a_3 - a_2 & a_4 - a_2 & \cdots & a_{n-1} - a_2 & a_2 + a_n \\ 4 & a_1 - a_3 & a_2 - a_3 & 2a_3 & a_4 - a_3 & \cdots & a_{n-1} - a_3 & a_3 + a_n \\ 4 & a_1 - a_4 & a_2 - a_4 & a_3 - a_4 & 2a_4 & \cdots & a_{n-1} - a_4 & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 4 & a_1 - a_{n-1} & a_2 - a_{n-1} & a_3 - a_{n-1} & a_4 - a_{n-1} & \cdots & 2a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \\ 4 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & a_n + a_4 & \cdots & a_n + a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Ще извадим последния ред от всеки друг, без първия и така получаваме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 0 & a_1 - a_n & -a_1 - a_n & -a_1 - a_n & -a_1 - a_n & \cdots & -a_1 - a_n & a_1 + a_n \\ 0 & -a_2 - a_n & a_2 - a_n & -a_2 - a_n & -a_2 - a_n & \cdots & -a_2 - a_n & a_2 + a_n \\ 0 & -a_3 - a_n & -a_3 - a_n & a_3 - a_n & -a_3 - a_n & \cdots & -a_3 - a_n & a_3 + a_n \\ 0 & -a_4 - a_n & -a_4 - a_n & -a_4 - a_n & a_4 - a_n & \cdots & -a_4 - a_n & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a_{n-1} - a_n & -a_{n-1} - a_n & -a_{n-1} - a_n & -a_{n-1} + a_n & \cdots & a_{n+1} - a_1 & a_{n-1} + a_n \\ 4 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & a_n + a_4 & \cdots & a_n + a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Добавяме последния стълб към всеки без първия и така получаваме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & \cdots & 8 & 4 \\ 0 & 2a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 + a_n \\ 0 & 0 & 2a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 + a_n \\ 0 & 0 & 0 & 2a_3 & 0 & \cdots & 0 & a_3 + a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_4 & \cdots & 0 & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \\ 4 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & a_n + a_4 & \cdots & a_n + a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Развиваме по първи стълб и получаваме:

$$\Delta = 4(-1)^{n+1+1} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & \cdots & 8 & 4 \\ 2a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 + a_n \\ 0 & 2a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 + a_n \\ 0 & 0 & 2a_3 & 0 & \cdots & 0 & a_3 + a_n \\ 0 & 0 & 0 & 2a_4 & \cdots & 0 & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

Вадим общия множител 4 от първия ред и получаваме:

$$\Delta = 16(-1)^{n} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 2a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 + a_n \\ 0 & 2a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 + a_n \\ 0 & 0 & 2a_3 & 0 & \cdots & 0 & a_3 + a_n \\ 0 & 0 & 0 & 2a_4 & \cdots & 0 & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

Вадим общия множител 2 от първите $n-1$ стълба и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^{n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 + a_n \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 + a_n \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & a_3 + a_n \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 & a_4 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

От последния стълб вадим всеки друг и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3}(-1)^{n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-(n-1) \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Последователно разменяме n-тия с $n-1$-вия стълб, след това $n-1$-вия с $n-2$-рия и тн. накарая 2-рияс 1-вия. Това са $n-1$ размени, тоест $n-1$ смени на знака и така:

$$\Delta = (-1)^{n-1}2^{n+3}(-1)^{n} \begin{vmatrix} 2-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_n & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Така получихме, че първоначалната детерминанта е равна на:

$$\Delta = 2^{n+3} \begin{vmatrix} n-2 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ a_n & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Тази детерминанта е от тип Пачи крак! Обаче ще трябва да разгледаме два случая:

Случай 1: $\exists i \in I_{n-1}\ a_i = 0$

Тогава $i+1$-я стълб е равен на $-e_1^t$, тоест елемента с индекси $1, i+1$ е равен на -1 и всички други са 0, $i+1$-я ред пък е равен на $a_n e_1$, тоест елемента с индекси $i+1, 1$ е равен на a_n и всички други са 0. Тоест:

$$\Delta = 2^{n+3} \begin{vmatrix} n-2 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ a_n & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Тогава към първия стълб добавяме $i+1$-вия умножен с $n-2$, а от всеки друг вадим $i+1$-вия и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ a_n & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

След, което развиваме по $i+1$-вия ред и получаваме

$$\Delta = 2^{n+3} a_n (-1)^{i+1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Сега развиваме по първи ред и получаваме

$$\Delta = 2^{n+3} a_n (-1)^{i+1+1}(-1)(-1)^{1+i} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Тоест

$$\Delta = 2^{n+3} a_n \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Получената детерминанта е диагонална и то по главния и можем директно да я пресметнем:

$$\Delta = 2^{n+3} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j$$

Случай 2: $\forall i \in I_{n-1}\ a_i \neq 0$

Тогава можем да делим без проблем и за това от първия стълб вадим всеки друг умножен съответно по $\dfrac{a_n}{a_i}$ и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3} \begin{vmatrix} n-2-a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i} & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Сега развиваме тази детерминанта по първия стълб и получаваме:

$$\Delta = 2^{n+3} \left(n-2-a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i} \right) \prod_{i=1}^{n-1} a_i =$$

$$2^{n+3} \left((n-2) \prod_{i=1}^{n-1} a_i - a_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i} \right) =$$

$$2^{n+3} \left((n-2) \prod_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{n} a_j}{a_i} \right) =$$

$$2^{n+3} \left((n-2) \prod_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j \right)$$

Отговор:

$$\exists i \in I_{n-1}\ a_i = 0 \implies \Delta = 2^{n+3} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j$$

$$\forall i \in I_{n-1}\ a_i \neq 0 \implies \Delta = 2^{n+3} \left((n-2) \prod_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j \right)$$