Доказателства на някои твърдения по ЛА

Иво Стратев

15 декември 2018 г.

Теорема за ранга и дефекта

Твърдение

Нека $\mathbb{V}$ е крайно мерно линейно пространство над полето $\mathbb{F}$ и нека $\varphi \in \mathrm{Hom}\mathbb{V}$.
Тогава $d(\varphi) + r(\varphi) = \dim\mathbb{V}$.

Доказателство:

Случай 1: $\mathrm{Ker}\varphi = \{\theta\}$

Тогава $\dim\mathrm{Ker}\varphi = d(\varphi) = 0$.
Следователно трябва да покажем, че $r(\varphi) = \dim\mathbb{V}$, тоест
$\dim\mathrm{Im}\varphi = \dim\mathbb{V}$, което ще получим ако докажем, че $\mathrm{Im}\varphi \cong \mathbb{V}$.
Нека $\tau : \mathbb{V} \to \mathrm{Im}\varphi$ и нека $\forall v \in \mathbb{V}\ \tau(v) = \varphi(v)$.
Ще покажем, че τ е изоморфизъм.
Първо ще покажем, че τ е хомоморфизъм.

$$\forall a, b \in \mathbb{V}\ \tau(a+b) = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \tau(a) + \tau(b)$$
$$\forall a \in \mathbb{V}\ \forall \lambda \in \mathbb{F}\ \tau(\lambda.a) = \varphi(\lambda.a) = \lambda\varphi(a) = \lambda\tau(a)$$

Следователно $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \mathrm{Im}\varphi)$.
Сега ще покажем, че τ е биекция, като покажем, че е инекция и сюрекция.
Нека $v, u \in \mathbb{V}$ са такива, че $v \neq u$, тогава да допуснем, че $\tau(v) = \tau(u)$.

$$\tau(v) = \tau(u) \implies \varphi(v) = \varphi(u) \implies \varphi(v) - \varphi(u) = \theta \implies$$
$$\varphi(v) + \varphi(-u) = \theta \implies \varphi(v + -u) = \theta \implies v - u \in \mathrm{Ker}\varphi \implies$$
$$v - u = \theta \implies v = u$$

Това е противоречие, следователно $\tau(v) \neq \tau(u)$. Така получаваме
$\forall v, u \in \mathbb{V}\ v \neq u \implies \tau(v) \neq \tau(u)$, което е дефиницията за инекция.
Остава ни сюрекция.
Нека $v \in \mathrm{Im}\varphi$. Тогава по дефиниция $\exists u \in \mathbb{V}\ \varphi(u) = v$.
Нека $u \in \mathbb{V}\ \varphi(u) = v$ следователно $\tau(u) = v$. Така $\forall v \in \mathrm{Im}\varphi\ \exists u \in \mathbb{V}\ \tau(u) = v$,
което е дефиницията за сюрекция. Следователно τ е биекция и значи
τ е изоморфизъм. Следователно $\mathrm{Im}\varphi \cong \mathbb{V}$ и така $\dim\mathrm{Im}\varphi = \dim\mathbb{V}$, тоест
$r(\varphi) = \dim\mathbb{V}$, от където $r(\varphi) + 0 = \dim\mathbb{V}$, тоест $d(\varphi) + r(\varphi) = \dim\mathbb{V}$.

Случай 2: $\mathrm{Ker}\varphi \neq \{\theta\}$

$\mathrm{Ker}\varphi \neq \{\theta\} \implies d(\varphi) > 0$. Нека $k = d(\varphi),\ n = \dim\mathbb{V}$
и нека $b_1, b_2, \ldots, b_n$ е базис на $\mathbb{V}$ и нека $b_1, b_2, \ldots, b_k$ е базис на $\mathrm{Ker}\varphi$.

Тогава ще се борим да покажем, че $r(\varphi) = n - k$.
Нека пресметнем φ върху произволна линейна комбинация на базиса на $\dim\mathbb{V}$.
Нека $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ и нека $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ тогава

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j b_j\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i\right) + \varphi\left(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j b_j\right) =$$

$\theta + \varphi\left(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j b_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \varphi(b_j)$, защото $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i \in \mathrm{Ker}\varphi$. Но $\varphi(v) \in \mathrm{Im}\varphi$.
Тоест всеки вектор от образа е линейна комбинация на $\varphi(b_{k+1}), \varphi(b_{k+2}), \ldots, \varphi(b_n)$. Тогава някак естествено е да се борим да покажем, че $\varphi(b_{k+1}), \varphi(b_{k+2}), \ldots, \varphi(b_n)$ е базис на $\mathrm{Im}\varphi$, понеже това са $n-k$ вектора от образа и всеки вектор от образа е тяхна лин. комбинация. За да са базис остава да покажем, че са линейно независими. Директно не можем да направим това, но нека допуснем противното, тоест че са линейно зависими. Тогава

$$\exists \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-k} \in \mathbb{F} \ : \ (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-k}) \neq (0, 0, \ldots, 0) \wedge \sum_{s=1}^{n-k} \mu_s \varphi(b_{k+s}) = \theta.$$

Нека $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-k} \in \mathbb{F}$ са такива, че
$(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-k}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ и $\sum_{s=1}^{n-k} \mu_s \varphi(b_{k+s}) = \theta$ тогава $\varphi\left(\sum_{s=1}^{n-k} \mu_s b_{k+s}\right) = \theta$

и значи $\sum_{s=1}^{n-k} \mu_s b_{k+s} \in \mathrm{Ker}\varphi$, следователно вектора $\sum_{s=1}^{n-k} \mu_s b_{k+s}$ има линейна комбинация спрямо базиса на ядрото $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Нека тогава $\gamma_1, \gamma_2, \ldots . \gamma_k \in \mathbb{F}$ са такива, че $\sum_{s=1}^{n-k} \mu_s b_{k+s} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i b_i$. Следователно $\sum_{s=1}^{n-k} \mu_s b_{k+s} - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i b_i = \theta$, тоест

$\sum_{i=1}^{k} (-\gamma_i) b_i + \sum_{s=1}^{n-k} \mu_s b_{k+s} = \theta$. Така получаваме, че линейната комбинация с коефициенти $(-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots . - \gamma_k, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-k})$ даввa нулевия вектор. Но
$(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-k}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ следователно
$(-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots . - \gamma_k, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-k}) \neq (0, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0)$, което значи, че векторите $b_1, b_2, \ldots, b_n$ са линейно зависими, което е противоречние, защото те са базис. В частност линейно независими. Следователно $\varphi(b_{k+1}), \varphi(b_{k+2}), \ldots, \varphi(b_n)$ са линейно независими и значи са базис на $\mathrm{Im}\varphi$. Значи $\dim\mathrm{Im}\varphi = n - k$, тоест $r(\varphi) = n - k$. Така получаваме точно $d(\varphi) + r(\varphi) = \dim\mathbb{V}$, което искахме да докажем.

Неравенство на Силвестър

Нека $\mathbb{F}$ е поле и $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}), B \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ тогава
$r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

Доказателство:

Ще докажем еквивалентното на това твърдение, но за линейни изображения, от където ще получим горното твърдение почти на готово. За това нека $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$ са крайно мерни линейни пространства над $\mathbb{F}$ и нека
$\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ и $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.
Започваме от следното помощно твърдение $\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}$

П.Т. 1 $\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}$

Първи начин:

Нека $w \in \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$ тогава $\exists u \in \mathbb{U}\ (\psi \circ \varphi)(u) = w$.
Нека тогава $u \in \mathbb{U}\ (\psi \circ \varphi)(u) = w$. следователно $\psi(\varphi(u)) = w$, но $\varphi(u) \in \mathrm{Im}\varphi$, тоест $w \in \mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}$. Така $\forall w \in \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)\ w \in \mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}$, тоест $\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \subseteq \mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}$.
Нека $w \in \mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}$ тогава $\exists v \in \mathrm{Im}\varphi \quad \psi|_{\mathrm{Im}\varphi}(v) = w$. Нека $v \in \mathrm{Im}\varphi \quad \psi|_{\mathrm{Im}\varphi}(v) = w$, тоест $\psi(v) = w$, но $v \in \mathrm{Im}\varphi$ следователно $\exists u \in \mathbb{U}\ \varphi(u) = v$. Нека $u \in \mathbb{U}\ \varphi(u) = v$.
Тогава $\psi(v) = w \implies \psi(\varphi(u)) = w \implies (\psi \circ \varphi)(u) = w \implies w \in \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$.
Така $\forall w \in \mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}\ w \in \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$, тоест $\mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi} \subseteq \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$.
Следователно $\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}$.

Втори начин:

$\mathrm{Im}\psi|_{\mathrm{Im}\varphi} = \{\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}(v) \mid v \in \mathrm{Im}\varphi\} = \{\psi(v) \mid v \in \mathrm{Im}\varphi\} =$
$\{\psi(\varphi(u)) \mid u \in \mathbb{U}\} = \{(\psi \circ \varphi)(u) \mid u \in \mathbb{U}\} = \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$ Следват редица помощни доказателства, за които ще се нуждаем от произволно подпространство на $\mathbb{V}$. За това нека $\mathbb{L} \leq \mathbb{V}$.

П.Т. 2 $\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} = \mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$

Първи начин:

Нека $v \in \mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}}$ тогава $\psi|_{\mathbb{L}}(v) = \theta$ в частност $v \in \mathbb{L}$, от където $\psi(v) = \theta$ и $v \in \mathbb{L}$ следователно $v \in \mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$. Тоест $\forall v \in \mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}}\ v \in \mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$
така $\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} \subseteq\in \mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$.
Нека $v \in \mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$ тогава $v \in \mathrm{Ker}\psi$ и $v \in \mathbb{L}$ така $\psi(v) = \theta$ и $v \in \mathbb{L}$ тоест $\psi|_{\mathbb{L}}(v) = \theta$. Следователно $v \in \mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}}$ така $\forall v \in \mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}\ v \in \mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}}$ тоест $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L} \subseteq \mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}}$. Следователно $\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} = \mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$

Втори начин:

$\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} = \{l \in \mathbb{L} \mid \psi|_{\mathbb{L}}(l) = \theta\} = \{l \in \mathbb{L} \mid \psi(l) = \theta\} =$
$\{v \in \mathbb{V} \mid v \in \mathbb{L} \wedge \psi(l) = \theta\} = \mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$

П.Т. 3 $\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} \leq \mathrm{Ker}\psi$

Първи начин:

От предното твърдение $\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} = \mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$.
От лекции $\mathrm{Ker}\psi \leq \mathbb{V}$.
От лекции знаем, че сечението на подпространство е подпространство,
следователно $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L} \leq \mathbb{V}$. Тоест $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$ е линейно пространство.
Очевидно $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L} \subseteq \mathrm{Ker}\psi$ Тогава $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L}$ бидейки линейно пространство и подмножество на $\mathrm{Ker}\psi$, то $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L} \leq \mathrm{Ker}\psi$ и значи $\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} \leq \mathrm{Ker}\psi$.

Втори начин:

Очевидно $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathbb{L} \subseteq \mathrm{Ker}\psi$ и следователно $\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} \subseteq \mathrm{Ker}\psi$ и както знаем, от лекции ядрото на всяко линейно изображение е линейно подпространство на домейна си, тоест $\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} \leq \mathbb{L}$. Значи $\mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} \leq \mathrm{Ker}\psi$.

В частност:

$\dim \mathrm{Ker}\psi|_{\mathbb{L}} \leq \dim\mathrm{Ker}\psi$, тоест $d(\psi|_{\mathbb{L}}) \leq d(\psi)$.

П.Т. 4 $\mathrm{Im}\psi|_{\mathbb{L}} \leq \mathrm{Im}\psi$

Доказателство:

Първо подмножество. Нека $w \in \mathrm{Im}\psi|_{\mathbb{L}}$ тогава $\exists l \in \mathbb{L}\ \psi|_{\mathbb{L}}(l) = w$. Нека тогава $l \in \mathbb{L}\ \psi|_{\mathbb{L}}(l) = w$ следователно $\psi(l) = w$, но $l \in \mathbb{L} \leq \mathbb{V}$ и значи $w \in \mathrm{Im}\psi$. Така $\forall w \in \mathrm{Im}\psi|_{\mathbb{L}}\ w \in \mathrm{Im}\psi$, тоест $\mathrm{Im}\psi|_{\mathbb{L}} \subseteq \mathrm{Im}\psi$.
От лекции знаем, че образа на всяко линейно изображение е линейно подпространство на ко-домейна си, в частност е линейно пространство, тогава получаваме $\mathrm{Im}\psi|_{\mathbb{L}} \leq \mathrm{Im}\psi$.

В частност:

$\dim \mathrm{Im}\psi|_{\mathbb{L}} \leq \dim\mathrm{Im}\psi$, тоест $r(\psi|_{\mathbb{L}}) \leq r(\psi)$.

П.Т. 5 $r(\psi|_{\mathbb{L}}) \leq \dim\mathbb{L}$

Доказателство:

Сещаме се, че има теорема, която връзва размерностите на ранга и домейна на линейно изображение. Това е теоремата за ранга и дефекта. Прилагаме я и получаваме $r(\psi|_{\mathbb{L}}) + d(\psi|_{\mathbb{L}}) = \dim\mathbb{L}$. Ползваме, че $0 \leq d(\psi|_{\mathbb{L}}) \leq \dim\mathbb{L}$ и така получаваме исканото твърдение $r(\psi|_{\mathbb{L}}) \leq \dim\mathbb{L}$.
Така поглеждайки твърдението, което искаме да докажем
$r(\varphi) + r(\psi) - \dim\mathbb{V} \leq r(\psi \circ \varphi) \leq \min\{r(\varphi), r(\psi)\}$ и досещайки се, че $\mathrm{Im}\varphi \leq \mathbb{V}$, да замесим $\mathbb{L}$ с $\mathrm{Im}\varphi$ от горните твърдения и да видим с какво разполагаме:
От П.Т. 1 $r(\psi \circ \varphi) = r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi})$
От П.Т. 3 $d(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \leq d(\psi)$
От П.Т. 4 $r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \leq r(\psi)$
От П.Т. 5 $r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \leq \dim\mathrm{Im}\varphi = r(\varphi)$
От Th (За r и d) $d(\varphi) + r(\varphi) = \dim\mathbb{U}$
От Th (За r и d) $d(\psi) + r(\psi) = \dim\mathbb{V}$
От Th (За r и d) $d(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) + r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) = \dim\mathrm{Im}\varphi = r(\varphi)$

П.Т. 6 $r(\psi \circ \varphi) \leq \min\{r(\varphi), r(\psi)\}$

$$\begin{aligned} r(\psi \circ \varphi) = r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \leq r(\varphi) \\ r(\psi \circ \varphi) = r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \leq r(\psi) \end{aligned}$$

Следователно $r(\psi \circ \varphi) \leq \min\{r(\varphi), r(\psi)\}$

П.Т. 7 $r(\varphi) + r(\psi) - \dim\mathbb{V} \leq r(\psi \circ \varphi)$

$$\begin{aligned} d(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \leq d(\psi) \implies \\ d(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) + r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \leq d(\psi) + r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \implies \\ r(\varphi) \leq d(\psi) + r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \implies \\ r(\varphi) + r(\psi) \leq r(\psi) + d(\psi) + r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \implies \\ r(\varphi) + r(\psi) \leq \dim\mathbb{V} + r(\psi|_{\mathrm{Im}\varphi}) \implies \\ r(\varphi) + r(\psi) - \dim\mathbb{V} \leq r(\psi \circ \varphi) \end{aligned}$$

Следователно

$$r(\varphi) + r(\psi) - \dim\mathbb{V} \leq r(\psi \circ \varphi) \leq \min\{r(\varphi), r(\psi)\}$$

Сега остава да съобразим, че за да е вярно изконното твърдение трябва да са в сила:

$$\begin{aligned}
\dim\mathbb{V} &= n \\
\dim\mathbb{U} &= k \\
\dim\mathbb{W} &= m \\
f_1, f_2, \dots, f_n &\text{ - базис на } \mathbb{V} \\
g_1, g_2, \dots, g_k &\text{ - базис на } \mathbb{U} \\
h_1, h_2, \dots, h_m &\text{ - базис на } \mathbb{W} \\
A &= M_f^h(\psi) \\
B &= M_g^f(\varphi)
\end{aligned}$$

Тогава

$$r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

Лема на Фитинг

Твърдение

Нека $\mathbb{V}$ е крайно мерно линейно пространство над полето $\mathbb{F}$ и нека $\varphi \in \mathrm{Hom}\mathbb{V}$ тогава $\exists m \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Ker}\varphi^m \oplus \mathrm{Im}\varphi^m = \mathbb{V}$

Доказателство:

П.Т. 1 $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Ker}\varphi^k \leq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$

Доказателство:

Нека $k \in \mathbb{N}$.
За да докажем $\mathrm{Ker}\varphi^k \leq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$ трябва последователно да докажем, че $\mathrm{Ker}\varphi^k \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$ и това, че $\mathrm{Ker}\varphi^k$ е затворено относно събиране и умножение със скалар.
Нека $v \in \mathrm{Ker}\varphi^k$ тогава $\varphi^k(v) = \theta$ тогава $\varphi^{k+1}(v) = \varphi(\varphi^k(v)) = \varphi(\theta) = \theta$ следователно $v \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$. Така $\forall v \in \mathrm{Ker}\varphi^k$ $v \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$ тоест $\mathrm{Ker}\varphi^k \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$.

$$\forall a, b \in \mathrm{Ker}\varphi^k \ \varphi^k(a+b) = \varphi^k(a) + \varphi^k(b) = \theta + \theta = \theta \implies a + b \in \mathrm{Ker}\varphi^k$$
$$\forall a \in \mathrm{Ker}\varphi^k \ \forall \lambda \in \mathbb{V} \ \varphi^k(\lambda.a) = \lambda\varphi^k(a) = \lambda\theta = \theta \implies \lambda.a \in \mathrm{Ker}\varphi^k$$

Следователно $\mathrm{Ker}\varphi^k \leq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$. От където $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Ker}\varphi^k \leq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$.

П.Т. 2 $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Im}\varphi^k \geq \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$

Доказателство:

Нека $k \in \mathbb{N}$.
За да докажем $\mathrm{Im}\varphi^k \geq \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ трябва последователно да докажем, че $\mathrm{Im}\varphi^k \supseteq \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ и това, че $\mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ е затворено относно събиране и умножение със скалар.
Нека $u \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ следователно $\exists w \in \mathbb{V}$ $\varphi^{k+1}(w) = u$. Нека $w \in \mathbb{V}$ $\varphi^{k+1}(w) = u$, тоест $\varphi^k(\varphi(w)) = u$, но $\varphi(w) \in \mathrm{Im}\varphi \leq \mathbb{V}$, в частност $\varphi(w) \in \mathbb{V}$, но тогава $u \in \mathrm{Im}\varphi^k$. Така $\forall u \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ $u \in \mathrm{Im}\varphi^k$, тоест $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\varphi^k$.
Нека $a, b \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ тогава $\exists a', b' \in \mathbb{V}$ $\varphi^{k+1}(a') = a \wedge \varphi^{k+1}(b') = b$. Нека $a', b' \in \mathbb{V}$

са такива, че $\varphi^{k+1}(a') = a \wedge \varphi^{k+1}(b') = b$. Тогава
$a + b = \varphi^{k+1}(a') + \varphi^{k+1}(b') = \varphi^{k+1}(a' + b')$ следователно $a + b \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$.
Така $\forall a, b \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ $a + b \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$.
Нека $a \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ и нека $\lambda \in \mathbb{F}$ тогава $\exists a' \in \mathbb{V}$ $\varphi^{k+1}(a') = a$. Нека $a' \in \mathbb{V}$ е такъв, че $\varphi^{k+1}(a') = a$. Тогава $\lambda.a = \lambda\varphi^{k+1}(a') = \varphi^{k+1}(\lambda.a')$ следователно $\lambda.a \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$.
Така $\forall a \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ $\forall\lambda \in \mathbb{V}$ $\lambda.a \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$.
Следователно $\mathrm{Im}\varphi^k \geq \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ От където $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Im}\varphi^k \geq \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$.

П.Т. 3 Ако $\mathrm{Ker}\varphi^k = \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$**, то** $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1} = \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$

Доказателство:

Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека $\mathrm{Ker}\varphi^k = \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$.
От П.Т. 1 знаем, че е изпълнено $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1} \leq \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$.
В частност $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$.
Остава да покажем обратното включване $\mathrm{Ker}\varphi^{k+2} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$.
Нека $v \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$ тогава $\varphi^{k+2}(v) = \theta$, тоест $\varphi^{k+1}(\varphi(v)) = \theta$.
Следователно $\varphi(v) \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$, значи $\varphi(v) \in \mathrm{Ker}\varphi^k$. Тогава $\varphi^k(\varphi(v)) = \theta$, тоест $\varphi^{k+1}(v) = \theta$. Следователно $v \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$. Така $\forall v \in \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$ $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$, тоест $\mathrm{Ker}\varphi^{k+2} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$ и значи $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1} = \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$.

П.Т. 4 Ако $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$**, то** $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} = \mathrm{Im}\varphi^{k+2}$

Доказателство:

Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$.
От П.Т. 2 знаем, че е изпълнено $\mathrm{Im}\varphi^k \geq \mathrm{Im}\varphi^{k+1} \geq \mathrm{Im}\varphi^{k+2}$.
От П.Т. 1 знаем, че е изпълнено $\mathrm{Ker}\varphi^k \leq \mathrm{Ker}\varphi^{k+1} \leq \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$.
Понеже $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$, то $\mathrm{Ker}\varphi^k = \mathrm{Ker}\varphi^{k+1}$.
От П.Т. 3 следва $\mathrm{Ker}\varphi^{k+1} = \mathrm{Ker}\varphi^{k+2}$.
Следователно $\mathrm{Im}\varphi^{k+1} = \mathrm{Im}\varphi^{k+2}$.

П.Т. 5 Съществува $m \in \mathbb{N}$**, такова че**

$$\mathrm{Ker}\varphi < \mathrm{Ker}\varphi^2 < \dots < \mathrm{Ker}\varphi^m = \mathrm{Ker}\varphi^{m+1} = \mathrm{Ker}\varphi^{m+2} = \dots$$
$$\mathrm{Im}\varphi > \mathrm{Im}\varphi^2 > \dots > \mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1} = \mathrm{Im}\varphi^{m+2} = \dots$$

Доказателство:

От П.Т. 1 и П.Т. 2 знаем

$$\mathrm{Ker}\varphi \leq \mathrm{Ker}\varphi^2 \leq \dots \leq \mathrm{Ker}\varphi^m \leq \mathrm{Ker}\varphi^{m+1} \leq \mathrm{Ker}\varphi^{m+2} \leq \dots$$
$$\mathrm{Im}\varphi \geq \mathrm{Im}\varphi^2 \geq \dots \geq \mathrm{Im}\varphi^m \geq \mathrm{Im}\varphi^{m+1} \geq \mathrm{Im}\varphi^{m+2} \geq \dots$$

От П.Т. 3 и П.Т. 4 е ясно, че ако някое от неравенствата е равенство всички след него също са равенства. Теоремата за ранга и дефекта гарантира, че знаците за ядрата и образите се съгласуват. Тогава строги неравенства са възможни само в началото. Не може всички неравенства да са строги, защото всички размерности са ограничени в целочисления интервал $[0, \dim\mathbb{V}]$ и при строго неравенство размерносто се променя поне с единица. То съществува $s \in \mathbb{N}$, такова че

$$\mathrm{Ker}\varphi^s \leq \mathrm{Ker}\varphi^{s+1} \leq \mathrm{Ker}\varphi^{s+2} \leq \dots$$
$$\mathrm{Im}\varphi^s \geq \mathrm{Im}\varphi^{s+1} \geq \mathrm{Im}\varphi^{s+2} \geq \dots$$

Нека $m \in \mathbb{N}$ е най-малкото число s с това свойство. Тогава

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\varphi < \mathrm{Ker}\varphi^2 < \dots < \mathrm{Ker}\varphi^m = \mathrm{Ker}\varphi^{m+1} = \mathrm{Ker}\varphi^{m+2} = \dots \\ \mathrm{Im}\varphi > \mathrm{Im}\varphi^2 > \dots > \mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{m+1} = \mathrm{Im}\varphi^{m+2} = \dots \end{aligned}$$

П.Т. 6 Ако $\psi \in \mathrm{Hom}\mathbb{V}$ е такова, че $\psi^2 = \psi$, то
$\mathrm{Ker}\psi \cap \mathrm{Im}\psi = \{\theta\}$ **и** $\mathrm{Ker}\psi \oplus \mathrm{Im}\psi = \mathbb{V}$

Доказателство:

Нека $\psi \in \mathrm{Hom}\mathbb{V}$ е такова, че $\psi^2 = \psi$.
Нека $v \in \mathrm{Ker}\psi \cap \mathrm{Im}\psi$ следователно $v \in \mathrm{Ker}\psi$ и $v \in \mathrm{Im}\psi$. Така $\psi(v) = \theta$ и $\exists u \in \mathbb{V}\ \psi(u) = v$. Нека $u \in \mathbb{V}\ \psi(u) = v$ тогава $\psi(\psi(u)) = \theta$, но от условието, следва че $\psi(u) = \theta$, понеже $\psi^2 = \psi$. Тогава $v = \theta$ следователно $\forall v \in \mathrm{Ker}\psi \cap \mathrm{Im}\psi\ v = \theta$. Тоест $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathrm{Im}\psi \subseteq \{\theta\}$, но понеже $\theta \in \mathrm{Ker}\psi \cap \mathrm{Im}\psi$, то $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathrm{Im}\psi = \{\theta\}$.
Нека $a \in \mathbb{V}$ тогава

$$\begin{aligned} a = a &\implies \\ a + \theta = a &\implies \\ a + (\psi(a) - \psi(a)) = a &\implies \\ \psi(a) + (a - \psi(a)) = a& \end{aligned}$$

Очевидно $\psi(a) \in \mathrm{Im}\psi$. Остава да покажем, че $a - \psi(a) \in \mathrm{Ker}\psi$.
$\psi(a - \psi(a)) = \psi(a + \psi(-a)) = \psi(a) + \psi(\psi(-a)) =$
$\psi(a) + \psi^2(-a) = \psi(a) + \psi(-a) = \psi(a) + -\psi(a) = \theta$. Следователно $a - \psi(a) \in \mathrm{Ker}\psi$.
По дефиниция $\psi(a) + (a - \psi(a)) \in \mathrm{Im}\psi + \mathrm{Ker}\psi$, следователно $a \in \mathrm{Im}\psi + \mathrm{Ker}\psi$.
Така $\forall a \in \mathbb{V}\ a \in \mathrm{Im}\psi + \mathrm{Ker}\psi$, тоест $\mathbb{V} \subseteq \mathrm{Im}\psi + \mathrm{Ker}\psi$. Понеже $\mathrm{Ker}\psi \leq \mathbb{V}$ и $\mathrm{Im}\psi \leq \mathbb{V}$, то $\mathrm{Im}\psi + \mathrm{Ker}\psi \leq \mathbb{V}$ и значи $\mathrm{Ker}\psi + \mathrm{Im}\psi = \mathbb{V}$. От предното $\mathrm{Ker}\psi \cap \mathrm{Im}\psi = \{\theta\}$.
Следователно $\mathrm{Ker}\psi \oplus \mathrm{Im}\psi = \mathbb{V}$. Нека m е числото от П.Т. 5 тогава понеже $\mathrm{Ker}\varphi^m = \mathrm{Ker}\varphi^{2m}$ и $\mathrm{Im}\varphi^m = \mathrm{Im}\varphi^{2m}$. То $\varphi^m = \varphi^{2m} = (\varphi^m)^2$ и тогава от П.Т. 6 $\mathrm{Ker}\varphi^m \oplus \mathrm{Im}\varphi^m = \mathbb{V}$.