Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, I поток, летен семестър на 2017/2018 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*10*	*10*	*10*	*10*	*40*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. а) Нека A е множество и нека f е функция с домейн декартовия квадрат на множеството A и ко-домейн множеството A, имаща следните свойства:

- $\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in A\ f(f(x,\ y),\ z) = f(x,\ f(y,\ z))$
- $\exists x \in A\ \forall y \in A\ f(x,\ y) = y\ \wedge\ f(y,\ x) = y$
- $\exists x \in A\ \exists y \in A\ \neg(f(x,\ y) = f(y,\ x))$

Дайте добре обоснован пример за множеството A и функцията f, в който множеството A е крайно и пример, в който A е изброимо безкрайно. **(5 точки)**

б) Нека A е множество и нека R е релация в множеството A, имаща следните свойства:

- R е рефлексивна и не е транзитивна.
- $\forall x \in A\ \exists y \in A\ \ ((y,\ x) \in R\ \wedge\ (x,\ y) \notin R)$

Дайте добре обоснован пример, в който A и R са крайни множества и пример, в който са изброимо безкрайни. **(5 точки)**

Задача 2. Дадена е окръжност върху, която са нарисувани n сини точки и n червени точки. Докажете, че за всяко естествено число n независимо от разположението на точките, можем да направим обиколка по часовниковата стрелка на окръжността, започвайки от една от точките, така че на всяко преминаване от оцветена точка в оцветена точка, броят на червените точки е винаги поне колкото броят на сините точки.

Задача 3. Нека $D = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ и нека $R \subseteq D^3 \times D^3$ е следната релация:

$$(a,\ b,\ c)\, R\, (x,\ y,\ z) \iff ac \equiv xz \pmod 5.$$

а) Докажете, че R е релация на еквивалетност. **(3 точки)**

б) Намерете броят на класовете на еквивалетност относно релацията R. **(2 точки)** в) Намерете броят на елементите във всеки клас на еквивалентност относно R. **(5 точки)**

Задача 4. Дадено е естествено число n. Всяка от четирите страни на квадрат се оцветява в точно един от n-те различни цвята. Да се намери броят на различните възможни оцветявания с точност до ротация и отражение. Тоест ако едно оцветяване се получава от друго чрез ротация или отражение ние не считаме тези оцветявания за различни.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. a) Да разгледаме дефиницията за група, която се използва в курсовете по алгебра:

Нека множеството G е непразно и е затворено относно бинарната операция $*$. Казваме, че G е група относно бинарната операцията $*$, ако:

- $\forall a \in G\, \forall b \in G\, \forall c \in G\ (a * b) * c = a * (b * c)$
- $\exists e \in G\, \forall g \in G\ e * g = g \wedge g * e = g$
- $\forall g \in G\, \exists r \in G\ g * r = e \wedge r * g = e$

G е абелева група относно бинарната операцията $*$, ако е група относно бинарната операцията $*$ и е в сила: $\forall a \in G\, \forall b \in G\ a * b = b * a$. Тогава отрицанието на твърдението: "G е е абелева група относно бинарната операцията $*$"е равносилно на: $\neg \forall a \in G\, \forall b \in G\ a * b = b * a$, което е логически еквивалентно на $\exists a \in G\, \exists b \in G\ a * b \neq b * a$, защото:

$$\begin{aligned} \neg \forall a \in G\, \forall b \in G\ a * b = b * a &\equiv \\ \exists a \in G\, \neg \forall b \in G\ a * b = b * a &\equiv \\ \exists a \in G\, \exists b \in G\ \neg a * b = b * a &\equiv \\ \exists a \in G\, \exists b \in G\ a * b \neq b * a & \end{aligned}$$

Ние знаем, че $*$ е бинарна операция в множеството G и то е затворено относно $*$, ако $\forall a \in G\, \forall b \in G\ a * b \in G$.

Тогава нека A е произволна не абелева група относно бинарната операция $\#$ и нека $f : A \times A \to A$ е функцията: $f = \{((x,\ y),\ x\#y) \mid x,\ y \in A\}$, тогава $\forall x \in A\, \forall y \in A\ f(x,\ y) = x\#y$ и нека ε е неутралния елемент на A относно $\#$, тогава е вярно:

- $\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in A\ f(f(x,\ y),\ z) = f(x,\ f(y,\ z))$
- $\forall x \in A\ f(x,\ \varepsilon) = x \wedge f(\varepsilon,\ x) = x \implies \exists x \in A\ \forall y \in A\ f(x,\ y) = y \wedge f(y,\ x) = y$
- $\forall x \in A\ \exists y \in A\ f(x,\ y) = \varepsilon \wedge f(y,\ x) = \varepsilon$
- $\exists x \in A\ \exists y \in A\ \neg(f(x,\ y) = f(y,\ x))$

В частност е вярно:

- $\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in A\ f(f(x,\ y),\ z) = f(x,\ f(y,\ z))$
- $\exists x \in A\ \forall y \in A\ f(x,\ y) = y \wedge f(y,\ x) = y$
- $\exists x \in A\ \exists y \in A\ \neg(f(x,\ y) = f(y,\ x))$

От курсът по Висша Алгебра е известно, че с точност до изоморфизъм съществува единствена група с изброимо безкрайно много елементи и това е множеството на целите числа (ние знаем, че множествата $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ са изброимо безкрайни) относно операцията събиране. Тогава ако $A = \mathbb{Z}$ и $f = \{((a,\ b),\ a + b) \mid a,\ b \in \mathbb{Z}\}$ е пример, в който множеството A е изброимо безкрайно.

Отново от курсът по Висша Алгебра ни е известно, че множеството от неутралния елемент на коя да е група е група (минимална подгрупа) относно груповата операция.

Тогава ако $A = \{0\}$ и $f = \{((0,\ 0),\ 0)\}$ е пример, в който множеството A е крайно.

б) Ако A е множество, то R е релация по дефиниция, ако $R \subseteq A \times A$.

R е рефлексивна, ако е вярно: $\forall a \in A \; (a,\ a) \in R$.

R е транзитивна, ако е вярно: $\forall x \in A \; \forall y \in A \; \forall z \in A \; ((x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R \implies (x,\ z) \in R)$

Тогава R не е транзитивна, ако е вярно:
$\exists x \in A \; \exists y \in A \; \exists z \in A \; ((x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R \wedge (x,\ z) \notin R)$, защото:

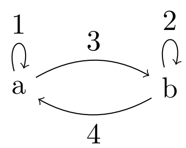
$$\begin{aligned}
\neg \forall x \in A \; \forall y \in A \; \forall z \in A \; ((x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R \implies (x,\ z) \in R) \equiv \\
\exists x \in A \; \neg \forall y \in A \; \forall z \in A \; ((x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R \implies (x,\ z) \in R) \equiv \\
\exists x \in A \; \exists y \in A \; \neg \forall z \in A \; ((x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R \implies (x,\ z) \in R) \equiv \\
\exists x \in A \; \exists y \in A \; \exists z \in A \; \neg ((x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R \implies (x,\ z) \in R) \equiv \\
\exists x \in A \; \exists y \in A \; \exists z \in A \; \neg (\neg ((x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R) \vee (x,\ z) \in R) \equiv \\
\exists x \in A \; \exists y \in A \; \exists z \in A \; (\neg (\neg ((x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R) \wedge \neg ((x,\ z) \in R))) \equiv \\
\exists x \in A \; \exists y \in A \; \exists z \in A \; ((x,\ y) \in R \wedge (y,\ z) \in R \wedge (x,\ z) \notin R)
\end{aligned}$$

В крайния случай ще построим стъпка по стъпка минимални A и R, започвайки от множество A, което да е празно.

Следкато A е празно множество, то и $R \subset \emptyset \times \emptyset$ следва, че $R = \emptyset$, но тогава R е празната релация, която по тривални причини е транзитивна.

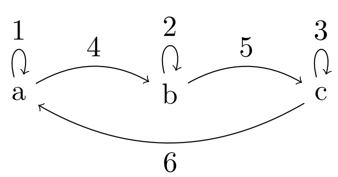
Нека $A = \{a\}$, понеже R е рефлексивна то нека $R = \{(a,\ a)\}$, но тогава
$(a,\ a) \in R \wedge (a,\ a) \in R \wedge (a,\ a) \in R$, тоест R е транзитивна.

Тогава нека $A = \{a,\ b\}$, понеже R е рефлексивна, то започваме с $R = \{(a,\ a),\ (b,\ b)\}$. Искаме да бъде изпълнено: $\forall x \in A \; \exists y \in A \; ((y,\ x) \in R \wedge (x,\ y) \notin R)$. Тогава ако си вземем елемента b понеже е изпълнено $(b,\ b) \in R$, то добавяме двойката $(a,\ b)$ към R. По аналогични съображения добавяме и симетричната двойка $(b,\ a)$. Нека разгледаме диаграма на релацията $R = \{(a,\ a),\ (b,\ b),\ (a,\ b),\ (b,\ a)\}$.



Понеже искаме релацията R да не е транзитивна, то съобразяваме от диаграмата на релацията, че текущата релация е транзитивна и продължаваме със следващата стъпка, която е да добавим нов елемент към множеството A и да се пробваме да изградим релация с желаните свойства. Нека $A = \{a,\ b,\ c\}$ искаме R да е рефлексивна, за това започваме от релацията $R = \{(a,\ a),\ (b,\ b),\ (c,\ c)\}$. Отново искаме да бъде вярно: $\forall x \in A \; \exists y \in A \; ((y,\ x) \in R \wedge (x,\ y) \notin R)$. Тогава по абсолютно сходни разсъждения като в предният опит добавяме двойката $(a,\ b)$. Ако добавим двойката $(b,\ c)$ то ще е вярно, че $(b,\ c) \in R \wedge (c,\ b) \notin R$, както и е вярно, че R няма да бъде транзитивна релация, защото $(a,\ b) \in R \wedge (b,\ c) \in R \wedge (a,\ c) \notin R$. Тогава единственото нещо, което остава да е изпълнено е $\exists y \in A \; ((y,\ \mathrm{a}) \in R \wedge (\mathrm{a},\ y) \notin R)$. Следователно ако добавим двойката $(c,\ a)$ релацията ни ще изпълнява всички свойства.

Тоест $A = \{a,\ b,\ c\}$ и $R = \{(a,\ a),\ (b,\ b),\ (c,\ c),\ (a,\ b),\ (b,\ c),\ (c,\ a)\}$ е краен пример, изпълняващ условията на задачата. Ето и как изглежда диаграмата на релацията:



В крайния случай ни беше сравнително лесно да построим множествата, които търсим в изброимо безкрайния ще ни е малко по-трудно, за това там ще използваме друга стратегия. Досещаме се, че ако вземем изброимо безкрайно множество A и подходяща изброимо безкрайна релация, която е рефлексивна, транзитивна и има свойството $\forall x \in A\ \exists y \in A\ \ ((y,\ x) \in R\ \wedge\ (x,\ y) \notin R)$, то ако премахнем само една транзитивна "тройка", като запазим рефлексивността ще получим релация с търсените свойства. Тогава нека $A = \mathbb{Z}$ и нека T да бъде релацията "по-малко или равно" на цели числа. Ще се борим да покажем, че T притежава свойството
$\forall x \in A\ \exists y \in A\ \ ((y,\ x) \in T\ \wedge\ (x,\ y) \notin T)$. $\forall z \in \mathbb{Z}\ z-1 \in \mathbb{Z}\ \wedge\ z-1 \leq z\ \wedge\ z \not\leq z-1 \implies$
$\forall z \in \mathbb{Z}\ (z-1,\ z) \in R_{\leq}\ \wedge\ (z,\ z-1) \notin R_{\leq} \implies \forall x \in A\ \exists y \in A\ \ ((y,\ x) \in T\ \wedge\ (x,\ y) \notin T)$.

Тогава ако $R = T \setminus \{(0,\ 9)\}$ е рефлексивна и притежава свойството
$\forall x \in A\ \exists y \in A\ \ ((y,\ x) \in R\ \wedge\ (x,\ y) \notin R)$. Остава да покажем, че не е транзитивна.
$0 \leq 8 \wedge 8 \leq 9 \wedge (0,\ 8) \neq (0,\ 9) \wedge (8,\ 9) \neq (0,\ 9) \wedge (0,\ 9) \notin R \implies (0,\ 8) \in R \wedge (8,\ 9) \in R \wedge (0,\ 9) \notin R$
Премахнали сме краен брой (една двойка) елементи на изброимо безкрайно множество, тогава R е изброимо безкрайно.

Задача 2.

Задача 3. а)

- R е рефлексивна, защото $\forall (a,\ b,\ c) \in D^3\ \ ac \equiv ac \pmod 5 \implies (a,\ b,\ c)\, R\, (a,\ b,\ c)$ (Рефлексивност на релацията $\equiv_{\text{mod } 5}$).

- R е симетрична, защото $\forall (a,\ b,\ c),\ (x,\ y,\ z) \in D^3\ :\ (a,\ b,\ c)\, R\, (x,\ y,\ z) \implies ac \equiv xz \pmod 5 \implies ac \equiv xz \pmod 5 \implies (x,\ y,\ z)\, R\, (a,\ b,\ c)$
(Симетричност на релацията $\equiv_{\text{mod } 5}$).

- R е транзитивна, защото
$\forall (a,\ b,\ c),\ (x,\ y,\ z),\ (m,\ n,\ k) \in D^3\ :\ (a,\ b,\ c)\, R\, (m,\ n,\ k)\ \wedge\ (m,\ n,\ k)\, R\, (x,\ y,\ z)$
$\implies ac \equiv mk \pmod 5\ \wedge\ mk \equiv xz \pmod 5 \implies ac \equiv xz \pmod 5 \implies (a,\ b,\ c)\, R\, (x,\ y,\ z)$
(Транзитивност на релацията $\equiv_{\text{mod } 5}$).

R е рефлексивна, симетрична и транзитивна следователно е релация на еквивалентност.

б) Нека фиксираме един елемент на домейна $(a,\ b,\ c) \in D^3$ тогава класът на $(a,\ b,\ c)$ по дефиниция е:

$$[(a,\ b,\ c)] = \{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid (a,\ b,\ c)\, R\, (x,\ y,\ z)\} = \\ = \{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid ac \equiv xz \pmod 5\},$$

но понеже $(a,\ b,\ c)$ е фиксиран елемент на домейна на релацията, то и ac е фиксирана константа, която е с фиксиран остатък при делелениe с частно и остатък на 5. Ние знаем, че има точно пет различни остатъци "по модул" 5, това са елементите на множеството D. Тогава множеството от класовете на еквивалентност относно R е:

$$\{\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv k \pmod 5\} \mid k \in D\}$$

и броят на елементите му съвпада с броят на елементите на множеството D, който е 5.
implies

в) От комбинаторния принцип на умножението следва, че броят на елементие на домейна е: $|D^3| = |D|^3 = 5^3 = 125$.

Нека разгледаме подробно всеки един клас на еквивалентност.

Започваме със следното наблюдение ако $m,\ n \in D$, то $0 \leq mn \leq 16$.

Нека означим с M множеството от целите числата от 0 до 16, тоест $M = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 16\}$.

Започвайки от онези наредени тройки с елементи от D, за които

$$\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 0 \pmod 5\}.$$

Числата даващи остатък 0 при деление с частно и остатък на 5 са числата от множеството:

$$\{m \in M \mid 5 \mid m\} = \{0,\ 5,\ 10,\ 15\}$$

Понеже $5 \notin D$, то единственото число кратно на 5, което може да се получи като произведение на числа от D е 0. Тогава $\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 0 \pmod 5\} = \{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid x = 0 \ \vee\ z = 0\} = \{(0,\ y,\ z) \in D^3\} \cup \{(x,\ y,\ 0) \in D^3\}$. Тогава от принципа на включването и изключването получаваме:

$$\begin{aligned} |\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 0 \pmod 5\}| &= |\{(0,\ y,\ z) \in D^3\} \cup \{(x,\ y,\ 0) \in D^3\}| = \\ = |\{(0,\ y,\ z) \in D^3\}| + |\{(x,\ y,\ 0) \in D^3\}| &- |\{(0,\ y,\ z) \in D^3\} \cap \{(x,\ y,\ 0) \in D^3\}| = \\ &= |D^2| + |D^2| - |\{(0,\ y,\ 0) \mid y \in D\}| = 2|D|^2 - |D| = 50 - 5 = 45. \end{aligned}$$

Числата даващи остатък 1 при делеление с частно и остатък на 5 от M са: $1,\ 6,\ 11,\ 16$. 11 е просто число строго по-голямо от 4, следователно никой две числа от D не дават произведение 11. За останалите числа съществува единствено (с точност до реда) разлагане като произведение на числа от множеството D, по-кокретно: $1 = 1.1$, $6 = 2.3 = 3.2$ и $16 = 4.4$. Тогава:

$$\begin{aligned} |\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 1 \pmod 5\}| &= \\ = |\{(x,\ y,\ z) \mid y \in D,\ (x,\ z) \in \{(1,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 4)\}\}| &= \\ = |D|.|\{(1,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 4)\}| = 5.4 &= 20. \end{aligned}$$

Числата даващи остатък 2 при делеление с частно и остатък на 5 от M са: $2,\ 7,\ 12$. 7 е просто число строго по-голямо от 4, следователно никой две числа от D не дават произведение 7. За 2 и 12 съществува единствено (с точност до реда) разлагане като произведение на числа от множеството D, по-кокретно: $2 = 1.2 = 2.1$ и $12 = 3.4 = 4.3$. Тогава:

$$\begin{aligned} |\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 1 \pmod 5\}| &= \\ = |\{(x,\ y,\ z) \mid y \in D,\ (x,\ z) \in \{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3)\}\}| &= \\ = |D|.|\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3)\}| = 5.4 &= 20. \end{aligned}$$

Числата даващи остатък 3 при делеление с частно и остатък на 5 от M са: $3,\ 8,\ 13$. 13 е просто число строго по-голямо от 4, следователно никой две числа от D не дават произведение 13. За 3 и 8 съществува единствено (с точност до реда) разлагане като произведение на числа от множеството D, по-кокретно: $3 = 1.3 = 3.1$ и $8 = 2.4 = 4.2$. Тогава:

$$\begin{aligned} |\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 1 \pmod 5\}| &= \\ = |\{(x,\ y,\ z) \mid y \in D,\ (x,\ z) \in \{(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)\}\}| &= \\ = |D|.|\{(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)\}| = 5.4 &= 20. \end{aligned}$$

Получихме: $45 + 4.20 = 45 + 80 = 125$.

Задача 4.