Теоритично контролно №3 1, I, Информатика

Иво Стратев

12 февруари 2017 г.

1

1.1 Определение за полилинейна фунцкия

$\mathbb{V}$ - ЛП над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$
$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V}, \cdots \times \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ ($f : \mathbb{V}^n \to \mathbb{F}$)
f е полилинейна ако $i = 1, \dots, n$
$\forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n, v', v'' \in \mathbb{V}$
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F};\ v_i = \lambda v' + \mu v''$

$$f(v_1, \dots, v_n) = \begin{array}{l} \lambda f(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n) \\ + \\ \mu f(v_1, \dots, v_{i-1}, v'', v_{i+1}, \dots, v_n) \end{array}$$

1.2 Определение за антисиметрична фунцкия

$\mathbb{V}$ - ЛП над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$
$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V}, \cdots \times \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ ($f : \mathbb{V}^n \to \mathbb{F}$)
f е антисиметрична ако $\forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n$
$\forall v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n \in \mathbb{V}$

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

1.3 Необходимо и достатъчно условие една полилинейна функция да е антисиметрична

$\mathbb{V}$ - ЛП над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$
$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V}, \cdots \times \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ е полилинейна функция
f е антисиметрична $\iff \forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n$
$\forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, v \in \mathbb{V}$

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$$

1.4 Определение за пермутация

Нека $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\},\ n \in \mathbb{N}$
$S(\Omega_n) = \{\sigma : \Omega_n \to \Omega_n \mid \sigma$ е биекция$\}$
$\forall \sigma \in S(\Omega_n),\ \sigma$ е пермутация
$|S(\Omega_n)| = n!$

1.5 Определение за инверсия в пермутация

$\sigma \in S(\Omega_n),\ \forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n \in \Omega_n$
$\sigma(i), \sigma(j)$ образуват инверсия $\iff \sigma(i) > \sigma(j),$ но $i < j$
$[\sigma]$ - брой инверсии $\implies 1 \leq [\sigma] \leq n$

1.6 Определение за транспозиция

$\sigma \in S(\Omega_n),\ \forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n \in \Omega_n$
$\sigma \in S(\Omega_n) \implies \sigma = \{\sigma(1), \dots, \sigma(i), \dots, \sigma(j), \dots, \sigma(n)\}$
$\sigma_t \in S(\Omega_n)$ е транспозиция $\iff \sigma_t = \{\sigma(1), \dots, \sigma(j), \dots, \sigma(i), \dots, \sigma(n)\}$

1.7 Определение за четност на пермутация

$\sigma \in S(\Omega_n)$
$$\sigma \begin{cases} \text{четна} & [\sigma] \mod 2 = 0 \\ \text{нечетна} & [\sigma] \mod 2 = 1 \end{cases}$$
$$sign\sigma = \begin{cases} 1 & \text{четна} \\ -1 & \text{нечетна} \end{cases} = (-1)^{[\sigma]}$$

1.8 Определение за детерминантна функция

$f : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n, \dots \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}\ (f : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F})$
f е детерминантна функция, ако е полилинейна, антисиметрична и
$f(e_1, \dots, e_n) = 1,\ e_1, \dots, e_n$ е стандартния базис на $\mathbb{F}^n$

2 Детерминанта и нейните свойства

2.1 Определение за Детерминанта

F е числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})\ detA$
е стойността на единствената детерминантна фунцкия:
$D : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n, \dots \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}\ (f : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F})$
на редовете на A : $(a_{11}, \dots, a_{1n})^t, \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nn})^t \in \mathbb{F}^n$

2.2 Формула за пресмятане на Детерминанта

$\mathbb{F}$ - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F}),\ A = (a_{ij})_{n \times n}$

$detA = \sum_{\sigma \in S(\Omega_n)} sign\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

2.3 Връзката между детерминантите на една матрица и транспонираната й матрица

$detA = detA^t$

2.4 Промяна на детерминантата на една матрица, ако заменим един нейн ред с нулев ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A
Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\forall i = 1, \dots, n,\ a_i = (0. \dots, 0) \implies detA = 0$

2.5 Промяна на детерминантата на една матрица, ако заменим един нейн стълб с нулев стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})^t, \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A
Тогава $A = (a_1\ \dots\ a_n)$ $\forall i = 1, \dots, n,\ a_i = (0. \dots, 0)^t \implies detA = 0$

2.6 Промяна на детерминантата на една матрица, ако разменим два нейни реда

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A
Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\forall i, j;\ 1 \le i \ne j \le n$

$$det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.7 Промяна на детерминантата на една матрица, ако разменим два нейни стълба

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})^t, \ldots, a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A
Тогава $A = (a_1 \ \ldots \ a_n)$ $\forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n$
$det(a_1 \ \ldots \ a_i \ \ldots \ a_j \ \ldots \ a_n) = -det(a_1 \ \ldots \ a_i \ \ldots \ a_j \ \ldots \ a_n)$

2.8 Промяна на детерминантата на една матрица, ако умножим един нейн ред с някакво число

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ са редовете на A
Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\forall i = 1, \ldots, n,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$

$$det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.9 Промяна на детерминантата на една матрица, ако умножим един нейн стълб с някакво число

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ са редовете на A
Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\forall i = 1, \ldots, n,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$
$det(a_1 \ \ldots \ \lambda a_i \ \ldots \ a_n) = \lambda det(a_1 \ \ldots \ a_i \ \ldots \ a_n)$

2.10 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн ред заменим с друг, различен от него, ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ са редовете на A
Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n$

$$a_i := a_j \implies det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

2.11 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб заменим с друг, различен от него, стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})^t, \ldots, a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A
Тогава $A = (a_1 \ \ldots \ a_n)$ $\forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n$
$a_i := a_j \implies det(a_1 \ \ldots \ a_j \ \ldots \ a_j \ \ldots \ a_n) = 0$

2.12 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн ред заменим с умножен с число друг, различен от него, ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ са редовете на A
Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$

$$a_i := \lambda a_j \implies det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda 0 = 0$$

2.13 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб заменим с умножен с число друг, различен от него, стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})^t, \ldots, a_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A
Тогава $A = (a_1 \ \ldots \ a_n)$ $\forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$

$a_i := \lambda a_j \implies det(a_1 \ \dots \ \lambda a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) =$
$= \lambda det(a_1 \ \dots \ a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) = \lambda 0 = 0$

2.14 Промяна на детерминантата на една матрица, ако към един нейн ред прибавим друг, различен от него, ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A
Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n$

$$a_i := a_i + a_j \implies det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = detA + 0 = detA$$

2.15 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб прибавим друг, различен от него, стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})^t, \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A
Тогава $A = (a_1 \ \dots \ a_n)\ \forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n$
$a_i := a_i + a_j \implies det(a_1 \ \dots \ a_i + a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) =$
$= det(a_1 \ \dots \ a_i \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) + det(a_1 \ \dots \ a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) = detA + 0 = detA$

2.16 Промяна на детерминантата на една матрица, ако към един нейн ред прибавим м умножен с число друг, различен от него, ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$
Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A
Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$

$$a_i := a_i + \lambda a_j \implies det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= detA + \lambda det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = detA + \lambda 0 = detA + 0 = detA$$

2.17 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб прибавим м умножен с число друг, различен от него, стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})^t, \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$ $\forall i, j;\ 1 \le i \neq j \le n,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$

$a_i := a_i + \lambda a_j \implies det(a_1 \ \dots \ a_i + \lambda a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) =$

$= det(a_1 \ \dots \ a_i \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) + det(a_1 \ \dots \ \lambda a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) =$

$= detA + \lambda det(a_1 \ \dots \ a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) = detA + \lambda 0 = detA + 0 = detA$

2.18 $detA = 0 \iff$ **редовете на** A **са линейно зависими**

3 $A \in M_n,\ detA = 3$

3.1 $B = A^t \implies detB = detA = 3$

3.2 $B = A := a_{i,*} = (0, \dots, 0) \implies detB = 0$

3.3 $B = A := a_{*,i} = (0, \dots, 0)^t \implies detB = 0$

3.4 $B = A := a_{i,*} = a_{j,*} + a_{k,*} \implies detB = 0$

3.5 $B = A := a_{*,i} = a_{*,j} + a_{*,k} \implies detB = 0$

3.6 $B = A := a_{i,*} = 4a_{i,*} \implies detB = 4detA = 4.3 = 12$

3.7 $B = A := a_{*,i} = -4a_{*,i} \implies detB = -4detA = -4.3 = -12$

3.8 $B = A := a_{i,*} = a_{j,*} \implies detB = 0$

3.9 $B = A := a_{*,i} = a_{*,j} \implies detB = 0$

3.10 $B = A := a_{i,*} = 8a_{j,*} \implies detB = 8.0 = 0$

3.11 $B = A := a_{*,i} = 6a_{*,j} \implies detB = 6.0 = 0$

3.12 $B = A := a_{i,*} + 5a_{j,*} \implies detB = detA + 5.0 = detA + 0 = detA$

3.13 $B = A := a_{*,i} + 4a_{*,j} \implies detB = detA + 4.0 = detA + 0 = detA$

3.14 $B = A := a_{i,*} = a_{j,*},\ a_{j,*} = a_{i,*} \implies detB = -detA$

3.15 $B = A := a_{*,i} = a_{*,j},\ a_{*,j} = a_{*,i} \implies detB = -detA$

3.16 $B = A := a_{i,*} = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{j,*} \implies detB = 0$

3.17 $B = A := a_{*,i} = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{*,j} \implies detB = 0$

4

4.1 $A \in M_{n\geq 8}\ \sum_{k=1}^{n} a_{8k}A_{1k} = \delta_{81}detA = 0detA = 0$

4.2 $A \in M_{n\geq 8}\ \sum_{k=1}^{n} a_{k8}A_{k1} = \delta_{81}detA = 0detA = 0$

4.3 $A, B \in M_n,\ detA = 8,\ detB = 1$
$detAB = detAdetB = 8.1 = 8$

4.4 $A, B \in M_n,\ detA = 8,\ detB = 1$
$det(AB)^t = detAB = detAdetB = 8.1 = 8$

4.5 $A, B \in M_{n\geq 8},\ detA = 9,\ detB = 1$
A, B **се различават само по 8-мия си ред/стълб**
$det(A = B) = 2^{n-1}(detA + detB) =$
$= 2^{n-1}(9 + 1) = 2^{n-1}.10 = 5.2^n$

5 Развитие на детерминанта по ред/стълб на

$$\Delta = \begin{vmatrix} -9 & -8 & 6 & 5 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 9 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

5.1 Развитие по първи ред

$$\Delta = -9\begin{vmatrix}-2 & 6 & 1\\ -2 & 1 & 5\\ 9 & 5 & -6\end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix}7 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}7 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 5\\ 1 & 9 & -6\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}7 & -2 & 6\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 9 & 5\end{vmatrix}$$

5.2 Развитие по първи стълб

$$\Delta = -9\begin{vmatrix}-2 & 6 & 1\\ -2 & 1 & 5\\ 9 & 5 & -6\end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix}-8 & 6 & 5\\ -2 & 1 & 5\\ 9 & 5 & -6\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-8 & 6 & 5\\ -2 & 6 & 1\\ -2 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

5.3 Развитие по втори ред

$$\Delta = 7\begin{vmatrix}-8 & 6 & 5\\ -2 & 1 & 5\\ 9 & 5 & -6\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}-9 & 6 & 5\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}-9 & -8 & 5\\ 0 & -2 & 5\\ 1 & 9 & -6\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-9 & -8 & 6\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 9 & 5\end{vmatrix}$$

5.4 Развитие по втори стълб

$$\Delta = -8\begin{vmatrix}7 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}-9 & 6 & 5\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-9 & 6 & 5\\ 7 & 6 & 1\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix}-9 & 6 & 5\\ 7 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

6 Формули на Крамер

$$\begin{array}{lll} -5x_1 & -2x_2 = & 2\\ 8x_1 & -7x_2 = & -5\end{array}$$

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}2 & -2\\ -5 & -7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-5 & -2\\ 8 & -7\end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 8 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-5 & -2\\ 8 & -7\end{vmatrix}}$$

7

7.1 Определение за обратима матрица

$A \in M_n,\ A$ е обратима $\iff \exists A^{-1};\ AA^{-1} = A^{-1}A = E$

7.2 Неособена матрица

$A \in M_n,\ A$ е неособена $\iff detA \neq 0$

7.3 Формула за обратна матрица на неособена матрица

$A \in M_n,\ A$ е неособена $A^{-1} = \frac{1}{detA} A_{ji} = \frac{1}{detA}(-1)^{j+i}\Delta_{ji}$

7.4 Определение за ранг на матрица

$A \in M_n,\ r(A) = rr(A) = rc(A)$

7.5 Втора теорема за ранг на матрица

$A \in M_n,\ r(A) = r \iff \exists r;$
$\exists 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$
$\exists 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n;$

$$\exists \begin{vmatrix} i_1 j_1 & \cdots & i_1 j_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i_n j_1 & \cdots & i_n j_n \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\forall k;\ r < k \leq n \begin{vmatrix} i_1 j_1 & \cdots & i_1 j_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i_k j_1 & \cdots & i_k j_k \end{vmatrix} = 0$$

8

8.1 $A \in M_5,\ detA = 0 \implies 0 \leq r(A) < 5$

8.2 Th Руше

$A \in M_n(\mathbb{F}),\ B \in F^n\ Ax = B$ има решение $\iff r(A) = r(A|B)$

8.3 $x \in \mathbb{F}^n,\ Ax = B,\ r = r(A) = r(A|B)$ $\implies$ броя на неизвестните е $n - r$

8.4 Една хомогенна система с равен брой неизвестни и уравнения $Ax = 0,\ A \in M_n$, която има ненулево решение е с $detA = 0$ (непълен ранг)

8.5 Една хомогенна система с квадратна матрица на $Ax = 0,\ A \in M_n$, има ненулево решение $\iff detA = 0$ (пълен ранг)

8.6 Определение за Фундаментална система решения на хомогенна система уравнения

$\mathbb{F}$ - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$
ФСР е $\forall$ базис на пространството $\{x \in F^n \mid Ax = \theta\}$

8.7 Размерността на множеството от решения на хомогенна система линейни уравнения, ако общият брой на неизвестните е n и рангът на матрицата на системата е равен на r

$\mathbb{F}$ - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$
$dim\{x \in F^n \mid Ax = \theta\} = n - r(A) = n - r$

9

9.1 Подобни матрици

$\mathbb{F}$ - числово поле, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$
$A \sim B \iff \exists T \in M_n(\mathbb{F});\ detT \neq 0,\ B = T^{-1}AT$

9.2 Определение за характеристичен полином на матрица

$\mathbb{F}$ - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$
$f_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$ - характеристичен полином на матрицата A

9.3 Определение за характеристичен полином на линеен оператор

$\mathbb{V}$ - КМЛП над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$
Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ A = M(\varphi) \in M_n(\mathbb{F})$ е матрицата на φ, в кой да е базис на $\mathbb{V}$
$\implies f_\varphi(\lambda) = f_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$ - характеристичен полином на ЛО φ

9.4 Определение за характеристичен корен

$\mathbb{F}$ - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$
$\forall\lambda_0;\ f_A(\lambda_0) = det(A - \lambda_0 E) = 0$
λ_0 - характеристичен корен на характеристичния полином на A

9.5 Определение за собствена стойност на линеен оператор

$\mathbb{V}$ - КМЛП над числовото поле $\mathbb{F}$
Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$
$\forall\lambda_0 \in \mathbb{F};\ f_\varphi(\lambda_0) = det(M(\varphi) - \lambda_0 E) = 0$
λ_0 - собствена стойност на φ

9.6 Определение за собствен вектор на линеен оператор

$\mathbb{V}$ - КМЛП над числовото поле $\mathbb{F}$
Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$
$\forall v_{\lambda_0} \in \mathbb{V},\ \exists \lambda_0 \in \mathbb{F};\ f_\varphi(\lambda_0) = det(M(\varphi) - \lambda_0 E) = 0,\ \varphi(v_0) = \lambda_0 v_{\lambda_0}$
v_{λ_0} - собствен вектор на φ

9.7 Всички собствени стойности са характеристични корени на даден линеен оператор

9.8 Всички характеристични корени, които са част от полето над, което е дефинирано линейното пространство, за което даденото линейно изображение е линеен оператор са негови собствени стойности

9.9 Векторите съотвестващи на различни собствени стойности на даден линеен оператор са линейно независими

$\mathbb{V}$ - КМЛП над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$
Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$, φ има n на брой различни собствени стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $\exists$ базис $v_1, \dots, v_n$ на φ, в който φ има диагонална матрица,

$$M_v(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

9.10 Връзка между степен на характеристичен полином на линеен оператор и размерност на пространството

$\mathbb{V}$ - КМЛП над числовото поле $\mathbb{F}$
Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V} \implies deg(f_\varphi(\lambda)) = dim\mathbb{V}$

9.11 Връзка между степен на характеристичен полином на линеен оператор и брой различни собствени стойности

$\mathbb{V}$ - КМЛП над числовото поле $\mathbb{F}$ Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$
$\implies deg(f_\varphi(\lambda)) \geq$ брой различни собствени стойности ≥ 0

9.12 Връзка между броя на различните характеристични корени на линеен оператор и размерността на пространството

$\mathbb{V}$ - КМЛП над числовото поле $\mathbb{F}$ Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$
$\Longrightarrow dim\mathbb{V} \geq$ брой различни характеристични корени ≥ 1

9.13 Матрицата на линеен оператор в базис от собствени вектори е диагонална

10

10.1 Определение за евклидово пространство

ЛП $\mathbb{V}$ над $\mathbb{R}$ се нарича евклидово пространство,
ако в него е въведено скаларно произведение,
тоест изображение $(\ ,\ ) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, имащо свойствата:

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{V}\ (a + b, c) = (a, c) + (b, c)$

2. $\forall a, b \in \mathbb{V}\ , \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda a, b) = \lambda(a, b)$

3. $\forall a, b \in \mathbb{V}\ (a, b) = (b, a)$

4. $\forall a \in \mathbb{V}\ (a, a) \geq 0,\ (a, a) = 0 \iff a = \theta$

10.2 Определение за скаларно произведение

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство.
Скаларно произведение е изображение $(\ ,\ ) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, имащо свойствата:

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{V}\ (a + b, c) = (a, c) + (b, c)$

2. $\forall a, b \in \mathbb{V}\ , \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda a, b) = \lambda(a, b)$

3. $\forall a, b \in \mathbb{V}\ (a, b) = (b, a)$

4. $\forall a \in \mathbb{V}\ (a, a) \geq 0,\ (a, a) = 0 \iff a = \theta$

10.3 Определение за дължина на вектор

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство.
Нека $a \in \mathbb{V} \Longrightarrow |a| = \sqrt{(a, a)}$ е дължина на вектора a

10.4 Определение за ортогонални вектори

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство.
Нека $a, b \in \mathbb{V},\ a, b$ са ортогонални $(a \perp b) \iff (a, b) = 0$

10.5 Определение за ортогонален базис

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство. $dim\mathbb{V} = n$
Базисът $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ е ортогонален $\iff \forall i, j;\ 1 \leq i \neq j \leq n\ (v_i, v_j) = 0$

10.6 Определение за ортонормиран базис

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство. $dim\mathbb{V} = n$
Базисът $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{V}$ е ортонормиран $\iff \forall j, i = 1, \dots, n\ (e_i, e_j) = \delta_{ij}$

10.7 Ортогонални по между си и ненулеви вектори в евклидово пространство са линейно независими

10.8 Определение за ортогонално допълнение на линейно подпространство в евклидово пространство

Нека $\mathbb{V}$ е КМЕП, $U < V \implies U^{\perp} = \{\forall v \in \mathbb{V} \mid \forall u \in \mathbb{U}\ (u, v) = 0\}$

10.9 Th(Питагор)

Ако векторите $a_1, \dots, a_n$ са два по два ортогонални, то $|\sum_{i=1}^{n} a_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$

10.10 Метод на Грам-Шмид

Нека векторите $e_1, \dots, e_n$ са ортогонални и ненулеви вектори
и нека вектора $a \notin l(e_1, \dots, e_n)$.
Тогава $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F};\ e_{n+1} = a + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$
$\implies e_1, \dots, e_{n+1}$ са ортогонални и ненулеви вектори
и $l(e_1, \dots, e_n, a) = l(e_1, \dots, e_{n+1})$

11

11.1 Детерминанта на Грам

Нека $\mathbb{V}$ е ЕП, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{V}$

$$\Gamma(a_1, \dots, a_m) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_m) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (a_m, a_1) & (a_m, a_2) & \dots & (a_m, a_m) \end{vmatrix}$$

11.2 $\Gamma(a_1, \ldots, a_m) = 0 \iff a_1, \ldots, a_m$ са линейно зависими

11.3 Неравенството на Коши-Буняковски

Нека $\mathbb{V}$ е ЕП, $a, b \in \mathbb{V} \implies |(a,b)| \leq |a||b|$
$|(a,b)| = |a||b| \iff a, b$ са линейно зависими

11.4 $\mathbb{V}$ е ЕП, $a, b \in \mathbb{V} \implies \cos\measuredangle(a,b) = \frac{(a,b)}{|a||b|}$ $\implies \measuredangle(a,b) = \arccos\frac{(a,b)}{|a||b|}$

11.5 Неравенство на триъгълника за вектори в евклидово пространство

$\mathbb{V}$ е ЕП, $a, b \in \mathbb{V} \implies |a+b| \leq |a| + |b|$
$|a+b| = |a| + |b| \iff a \uparrow\uparrow b$ или $a = \theta$ или $b = \theta$

12 Симетричен Линеен оператор

12.1 Симетрична матрица

$A \in M_n(\mathbb{R}),\ A$ е симетрична $\iff A^t = A$

12.2 Определение за симетричен оператор

$\mathbb{V}$ е ЕП, $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ \varphi$ е симетричен $\iff \forall u, v \in \mathbb{V}\ (\varphi(v), u) = (v, \varphi(u))$

12.3 Матрицата на симетричен оператор в ортонормиран базис е симетрична

12.4 Собствените стойности на симетричен оператор са реални и съвпадат с характеристичните му корени

12.5 Собствените вектори на симетричен оператор, съответстващи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си

12.6 Основна Теорема за симетричен оператор

$\mathbb{V}$ е ЕП, $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ \varphi$ е симетричен оператор
$\implies \exists v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ ортонормиран базис на $\mathbb{V}$,
в който матрицата на φ е диагонална
и по главния диагонал са собствените стойности на φ

13 Ортогонален Линеен оператор

13.1 Ортогонална матрица

$A \in M_n(\mathbb{R}),\ A$ е ортогонална $\iff AA^t = E$

13.2 Определение за ортогонален оператор

$\mathbb{V}$ е ЕП, $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ \varphi$ е ортогонален $\iff \forall u, v \in \mathbb{V}\ (\varphi(v), \varphi(u)) = (v, u)$

13.3 Необходимото и достатъчно условие един оператор да е ортогонален е той да изпраща един ортнормиран базис в друг ортнормиран базис

13.4 Матрицата на ортогонален оператор в ортонормиран базис е ортогонална

13.5 Собствените стойности на ортогонален оператор са равни на ± 1

13.6 Собствените вектори на ортогонален оператор, съответстващи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си

13.7 Основна Теорема за ортогонален оператор

$\mathbb{V}$ е ЕП, $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ \varphi$ е ортогонален оператор
$\Longrightarrow\ \exists v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ ортонормиран базис на $\mathbb{V}$,
в който матрицата на φ е клетачно диагонална