Решения на примерни теоретични задачи по ДУПРИЛ

Иво Стратев

15 февруари 2018 г.

Съдържание

1 Задача 1.

Колко решения има задачата

1.1 а)

$$\begin{cases} y' = x^3 + y^3 \\ y(3) = 3 \end{cases}$$

Решение:

$$x^3 + y^3 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Уравнението е от първи ред. Следователно има единствено решение. (от Теоремата за съществуване и единственост).

1.2 б)

$$\begin{cases} y'^2 - 2xyy' = x^2y^2 + 1 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Решение:

Прехвърляме всичко от едната страна и получаваме

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ y') = y'^2 - 2xyy' - x^2y^2 - 1 = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Проверяваме вида на точка $(2,\ 1)$. Заместваме в даното уравнение с

$r = y'(2),\ y(2),\ x = 2$, тоест $F(2,\ y(2),\ r) = 0$ получаваме

$r^2 - 2.2.1.r - 2^2.1^2 - 1 = 0 \implies r^2 - 4r - 5 = 0 \implies (r-5)(r+1) = 0.$

Пресмятаме $\frac{\partial}{\partial r} F(2,\ 1,\ r) = (r^2 - 4r - 5)' = 2r - 4 = 2(r-2).$

$F(2,\ 1,\ 2) \neq 0$. Тогава точката е обикновенна и следователно задачата на Коши има точно две решения (от Лемата за редукцията).

1.3 в)

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ y') = y'^2 - xyy' + x^2 + y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Решение:

Търсим на колко е равно $y'(1)$. Заместваме $F(1,\ y(1),\ y'(1)) = 0 \implies$

$(y'(1))^2 - 1.2.y'(1) + 1^2 + 2 = 0 \implies (y'(1))^2 - 2.y'(1) + 3 \implies$

$D(F(1,\ y(1),\ y'(1))) = 4 - 12 = -8 < 0 \implies \neg\exists y'(1)$.

Следователно задачата няма реално решение.

2 Задача 2

Колко са решенията на системата

2.1 а)

$$\begin{cases} y' = xy^2 + 4 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$$

Решение:

$3 = y'(1) = 1.y(1)^2 + 4 = 1.2^2 + 4 = 8 \implies 3 = 8 \implies ↯$

Следователно системата няма решение.

2.2 б)

$$\begin{cases} y' = 2y^2 - 5x \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$$

Решение:

$3 = y'(1) = 2.y(1)^2 - 5.1 = 8 - 5 = 3 \implies 3 = 3$
Системата

$$\begin{cases} y' = 2y^2 - 5x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

предасталява задача на Коши, която има едно единствено решение. Уловието $y'(1) = 3$ е изпълнено. Тогава общата система има единствено решение.

2.3 в)

$$\begin{cases} y'' = 2xy' + 3y + x \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$$

Решение:

Преобразуваме системата до еквивалентната ѝ

$$\begin{cases} y'' - 2xy' - 3y = x \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$$

$-2x,\ -3,\ x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ тогава дадената система представлява задача на Коши за нехомогенно линейно уравнение от втори ред, следователно системата има единствено решение (при това то е глобално).

2.4 г)

$$\begin{cases} y''' = xy'' + (x+1)y \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$$

Решение:

Преобразуваме системата до еквивалентната ѝ

$$\begin{cases} y''' - xy'' - (x+1)y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$$

$-x,\ -(x+1) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Уравнението $y''' - xy'' - (x+1)y = 0$ е линейно уравнение от 3-ти ред. Множеството от решенията му представлява линейно пространство изоморфно на $\mathbb{R}^3$. Имаме дадени две начални условия тогава размерността на линейно пространство, съвпадащо с решенията на системата е $3 - 2 = 1$. Тоест то е изоморфно на цялата реална права следователно системата има безброй много решения (тя е неопределена).

3 Задача 3.

За уравнението

$$(*) \quad y' + y^2 + x^2 = 2xy + 5$$

намерете частно решение $y_1(x)$ от вида $ax + b$. Уравнение от какъв тип за $z(x)$ се получава след полагането $y(x) = z(x) + y_1(x)$ в $(*)$?

Решение:

Частното решение $y_1(x) = ax + b$ ще намерим като заместим в даденото уравнение.

$$y_1' + y_1^2 + x^2 = 2xy_1 + 5 \implies$$

$$y_1' + y_1^2 + x^2 - 2xy_1 - 5 = 0 \implies$$

$$a + (ax+b)^2 + x^2 - 2x(ax+b) - 5 = 0 \implies$$

$$a + a^2x^2 + 2abx + b^2 + x^2 - 2ax^2 - 2bx - 5 = 0 \implies$$

$$(a^2 - 2a + 1)x^2 + (2ab - 2b)x + (a + b^2 - 5) = 0 \implies$$

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ 2(ab - b) = 0 \\ a + b^2 - 5 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = bb^2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$$

Избираме $y_1(x) = x + 2$. Правим смяната $y(x) = z(x) + y_1(x) = z(x) + x + 2$

Получаваме $(z(x) + x + 2)' + (z(x) + x + 2)^2 + x^2 = 2x(z(x) + x + 2) + 5 \implies$

$z'(x) + 1 + z^2(x) + 2(x+2)z(x) + x^2 + 4x + 4 + x^2 = 2xz(x) + 2x^2 + 4x + 5$

$z'(x) + z^2(x) + 2z(x) = 0 \implies z' = z^2 + 2z$. Това е уравнение с разделящи се променливи, понеже не зависи от x, както и Бернулиево за $\alpha(x) = 2$ и $\beta(x) = 1$. $(z' = \alpha z + \beta z^2)$.

4 Задача 4.

Дадено е уравнението

$$(**) \quad y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}$$

а) Намерете пресечната точка $(a,\ b)$ на двете прави Решение:

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y - 1 \\ -3y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y - 1 \\ y = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

б) Уравнение от какъв вид се получава за $z(t) = y(x - a) - b$, като направите смяната на променливите $x = t + a$ и $y = z + b$ в $(**)$?

Решение:

Правим смяната

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

и заместваме в $(**)$

$$(z-1)' = \frac{(t+1) + 2\,(z-1) + 1}{2\,(t+1) + (z-1) - 1} \implies$$

$$z' = \frac{t + 2z}{2t + z} = \frac{t\left(1 + 2\frac{z}{t}\right)}{t\left(2 + \frac{z}{t}\right)} = \frac{1 + 2\frac{z}{t}}{2 + \frac{z}{t}}$$

Вида на полученото уравнение е хомогенно. След полагане на $p = zt$ се получава уравнение с разделящи се променливи.

5 Задача 5.

Дадена е задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

където $y_0 \in \mathbb{R}$, а коефициентите $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати функции в интервала $(-6,\ 6)$. Проверете, че функцията

$$y(x) = e^{\displaystyle\int_0^x a(t)\ dt} \left(y_0 + \int_0^x b(t) e^{\displaystyle -\int_0^t a(s)\ ds} dt \right)$$

е решение на задачата на Коши в интервала $(-6,\ 6)$.

Решение:

Първо ще проверим, че дадената функция изпълнява условието

$$y(x)' = a(x)y(x) + b(x)$$

за целта я диференцираме и получаваме

$$y(x)' = \left[e^{\int_0^x a(t)\,dt} \left(y_0 + \int_0^x b(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds} dt \right) \right]' =$$

$$= \left(e^{\int_0^x a(t)\,dt} \right)' \left(y_0 + \int_0^x b(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds} dt \right)$$

$$+ \quad e^{\int_0^x a(t)\,dt} \left(y_0 + \int_0^x b(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds} dt \right)' =$$

$$= \left(\int_0^x a(t)\,dt \right)' e^{\int_0^x a(t)\,dt} \left(y_0 + \int_0^x b(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds} dt \right)$$

$$+ \quad e^{\int_0^x a(t)\,dt} \left(\int_0^x b(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds} dt \right)' =$$

$$= a(x)y(x) + e^{\int_0^x a(t)\,dt} \left(b(x) e^{-\int_0^x a(s)\,ds} \right) =$$

$$= a(x)y(x) + e^{\int_0^x a(t)\,dt} e^{-\int_0^x a(t)\,dt} b(x) =$$

$$= a(x)y(x) + b(x) \implies y'(x) = a(x)y(x) + b(x).$$

Остава да проверим, че $y(0) = y_0$. Ако то е изпълнено дадената функция ще бъде решение на задачата на Коши в интервала $(-6,\ 6)$, защото там функциите $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати.

$$y(0) = e^{\int_0^0 a(t)\,dt} \left(y_0 + \int_0^0 b(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds} dt \right) =$$

$$= e^0 (y_0 + 0) = 1.y_0 = y_0.$$

Следователно

$$y(x) = e^{\int_0^x a(t)\,dt} \left(y_0 + \int_0^x b(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds} dt \right)$$

е решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

в интервала $(-6,\ 6)$.

6 Задача 6.

Сведете задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

до интегрално уравнение. Намерете първите три последователни приближения $(y_0,\ y_1,\ y_2)$ за решението на задачата на Коши.

Решение:

В даденото уравнение $\frac{\partial}{\partial x} y = y^2 - 2x$ ще сменим променливата x с v получаваме уравнието $\frac{\partial}{\partial v} y = y^2 - 2v$. Интегрираме го в граници от началното условие до x.

$$\frac{\partial}{\partial v} y(v) = y^2(v) - 2v \quad \Big| \quad \int_0^x \, dv \implies$$

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial v} y(v)\, dv = \int_0^x y^2(v) - 2v\, dv \implies$$

$$\int_0^x dy = \int_0^x y^2(v) - 2v\, dv \implies$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x y^2(v) - 2v\, dv \implies$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x y^2(v) - 2v\, dv.$$

Полученото интегрално уравнение

$$y(x) = 1 + \int_0^x y^2(v) - 2v\, dv.$$

е еквивалентно на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Дефинираме следната редица от последователни приближения на решението на задачата на Коши по метода на Пикар

$$y_0(x) \equiv y(0) = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(v)^2 - 2v\, dv$$

Пресмятаме първите три приближения.

$$y_0(x) \equiv 1 \quad \text{(константа функция)}$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0(v)^2 - 2v\, dv = 1 + \int_0^x 1 - 2v\, dv =$$

$$= 1 + v|_0^x - 2\int_0^x v\, dv = 1 + x - 2\frac{v^2}{2}|_0^x = 1 + x - x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(v)^2 - 2v\, dv = 1 + \int_0^x (1 + v - v^2)^2 - 2v\, dv =$$

$$= 1 + \int_0^x 1 + 2v + v^2 - 2(1+v)v^2 + v^4 - 2v\, dv =$$

$$= 1 + \int_0^x 1 - v^2 - 2v^3 + v^4\, dv = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}$$

Отговор:

Интегралното уравнение е $y(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x y^2(v) - 2v\, dv$.

Първите триприближения са:

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + x - x^2$$

$$y_2(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}$$

7 Задача 7.

Приложете теоремата за съществуване и единственост в правоъгълника $\Pi = \{(x,\ y) \mid |x| \leq 2,\ |y| \leq 1\}$, за да намерите интервал, в който съществува решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = y^2 - x + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Решение:

$f(x,\ y) = y^2 - x + 1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, тоест $f(x,\ y)$ е безкрайно гладка и в частност е липшицова. В случая е лесно да се докаже, че $f(x,\ y)$ по втория аргумент в Π, което ни е необходимо.

Очевидно $\Pi = \{(x,\ y) \mid |x| \leq 2,\ |y| \leq 1\} = [-2,\ 2] \times [-1,\ 1]$.

Ще си мислим, че сме фиксирали първия аргумент и ще разглеждаме $F_x(y) = f(x,\ y)$ за фиксирано $x \in [-2,\ 2]$. От теоремата за крайните нараствания приложена за F_x и $y_1,\ y_2 \in [-1,\ 1]$ получаваме $\exists \xi \in [-1,\ 1]\ :$

$$F_x(y_1) - F_x(y_2) = F_x'(\xi)(y_1 - y_2) \implies$$

$$|F_x(y_1) - F_x(y_2)| = |F_x'(\xi)(y_1 - y_2)| \implies$$

$$|F_x(y_1) - F_x(y_2)| = |F_x'(\xi)||y_1 - y_2| \leq \max_{y \in [-1,\ 1]} |F_x'(y)||y_1 - y_2| \implies$$

$$|F_x(y_1) - F_x(y_2)| \leq \max_{y \in [-1,\ 1]} |2y||y_1 - y_2| = 2|y_1 - y_2| \implies$$

$$|F_x(y_1) - F_x(y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|$$

Така чрез теоремата за крайните нараствания доказахме, че наистина F_x е липшищова, от където у f е липшищова по втория си аргумент.

Можем и директно да докажем, че F_x е липшищова, без да използваме теорамата за крайните нараствания. Нека отново $y_1,\ y_2 \in [-1,\ 1]$ ще намерим оценка отгоре за $|F_x(y_1) - F_x(y_2)|$

$$|F_x(y_1) - F_x(y_2)| = |y_1^2 - x + 1 - (y_2^2 - x + 1)| =$$

$$= |y_1^2 - y_2^2 - x + 1 + x - 1| = |y_1^2 - y_2^2| =$$

$$= |(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \implies$$

$$|F_x(y_1) - F_x(y_2)| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \leq \max_{c,\ d \in [-1,\ 1]} |c + d||y_1 - y_2| =$$

$$= |\max_{c \in [-1,\ 1]} c + \max_{d \in [-1,\ 1]} d||y_1 - y_2| = |1 + 1||y_1 - y_2| = 2|y_1 - y_2| \implies$$

$$|F_x(y_1) - F_x(y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|$$

И в двата случая е ясно, че $\forall x \in [-2,\ 2]$ F_x е липшищова, което значи, че f е липшищова по втория си аргумент.

Нека $M = \max\limits_{(x,\ y) \in \Pi} f(x,\ y) = \max\limits_{(x,\ y) \in \Pi} y^2 - x + 1 = \max\limits_{y \in [-1,\ 1]} y^2 + \max\limits_{x \in [-2,\ 2]} (-x) + 1 =$
$= 1^2 - \min\limits_{x \in [-2,\ 2]} x + 1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4.$

Нека $h = \min(2,\ \frac{1}{M}) = \min(2, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. Тогава съществува решение на задачата на Коши в интервала $(0 - h,\ 0 + h) = \left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$.

8 Задача 8.

Докажете, че решението на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = xy^2 - x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

е четна функция.

Решение:

Нека $\varphi(x)$ е непрекъснато решение на задачата на Коши в интервала $(\alpha,\ \beta)$. Тоест нека $\varphi'(x) = x\varphi^2(x) - x^3$ и $\varphi(0) = 1$. Нека $\psi(x) = \varphi(-x)$. Тогава $\psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0) = 1$.

$$\psi'(x) = (\varphi(-x)) = \varphi'(-x)(-x)' = -\varphi'(-x) =$$

$$= -((-x)\varphi^2(-x) - (-x)^3) = -(-x\varphi^2(-x) + x^3) =$$

$$= x\varphi^2(-x) - x^3 = x\psi^2(x) - x^3 \implies \psi'(x) = x\psi^2(x) - x^3$$

Следователно $\psi(x)$ е решение на същата задача на Коши в интервала $(\gamma,\ \delta)$. От теоремата за съществуване и единственост следва, че

$\forall x \in (\alpha,\ \beta) \cap (\gamma,\ \delta)\ \varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv \varphi(-x)$.

Следователно $\varphi(x)$ е четна функция и $(\gamma,\ \delta) = (\alpha,\ \beta)$.

9 Задача 9.

За уравнението $(x^2+y^2+x)dx+ydy = 0$ намерете интегриращ множите от вида $\mu(x^2 + y^2)$.

Решение:
Нека $P(x,\ y) = x^2+y^2+x$ и $Q(x,\ y) = y$ и $t(x,\ y) = x^2+y^2$ Ако $\mu(t)$ е интегриращ

множеител за $Pdx + Qdy = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu P = \frac{\partial}{\partial x}\mu Q \implies$$

$$\mu' y P + \mu P' y = \mu' x Q + \mu Q' x \implies$$

$$\mu(P'y - Q'x) = \mu' x Q - \mu' y P \implies$$

$$\mu(P'y - Q'x) = \mu' t.t'x.Q - \mu' t.t'y.P \implies$$

$$\mu(P'y - Q'x) = \mu' t(t'x.Q - t'y.P) \implies$$

$$\frac{\mu' t}{\mu} = \frac{P'y - Q'x}{t'x.Q - t'y.P} = \frac{2y - 0}{2xy - 2y(x^2 + y^2 + x)} \implies$$

$$\frac{\mu' t}{\mu} = -\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{t} \implies$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu(t)\frac{1}{\mu(t)} = -\frac{1}{t} \;\Big|\; \int \partial t \implies$$

$$\int \frac{1}{\mu(t)}\frac{\partial}{\partial t}\mu(t)\;\partial t = -\int \frac{1}{t}\;\partial t \implies$$

$$\int \frac{1}{\mu}\;\partial \mu = -\ln|t| + c \implies$$

$$\ln|\mu| = -\ln|t| + C \implies \ln|\mu.t| = c \mid e \implies$$

$$|\mu.t| = e^c \implies \mu.t = C \implies \mu = \frac{C}{t} = \frac{C}{x^2 + y^2}.$$

Тогава един интегриращ множител е $\mu(x^2 + y^2) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

10 Задача 10.

Намерете особените точки за уравнението

$$x(y'^2 + 4) = 2yy'$$

Има ли уравнението особени решения?

Решение:

Нека $F(x,\ y,\ z) = x(z^2 + 4) - 2yz$ и нека $(x_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^2$. Тогава търсим корените на уравнението $F(x_0,\ y_0,\ z) = 0$. Тоест $x_0(z^2 + 4) - 2y_0 z = 0$.

Да разгледаме частния случай когато $x_0 = 0$. Тогава получаваме, че $y_0 z = 0$.

Ако $y_0 = 0$ то получаваме, че всяко $z \in \mathbb{R}$ е корен.
Тогава имаме и че $\frac{\partial}{\partial z} F(0,\ 0,\ z) = \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0$. Тоест точката $(0,\ 0)$ е особена.

Ако $y_0 \neq 0$ то директно следва, че корен е $z = 0$. Тогава пресмятаме $\left(\frac{\partial}{\partial z} F(0,\ y_0,\ z)\right)(0) = (-2y_0)(0) = -2y_0 \neq 0$. Тогава точките от вида $(0,\ y_0)\ :\ y_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ са обикновени.

Ако $x_0 \neq 0$ то $F(x_0,\ y_0,\ z) = x_0 z^2 - 2y_0 z + 4x_0 = 0$.
$D_{F(x_0,\, y_0,\, z)} = 4y_0^2 - 16x_0^2 = 4(y_0^2 - 4x_0^2)$.

Ако $y_0^2 - 4x_0^2 < 0$ то уравнението няма реални корени.

Ако $y_0^2 - 4x_0^2 = 0$, тоест $y_0 = \pm 2x_0$ Получаваме един корен на уравнението, който е $z_{1,\,2} = \frac{y_0}{x_0}$. Пресмятаме $\left(\frac{\partial}{\partial z} F(x_0,\ y_0,\ z)\right)\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = (2x_0 z - 2y_0)\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = 0$. Тогава точките $\{(r,\ \pm 2r) \mid r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\}$ са особени. Но ние получихме, че точката $(0,\ 0)$ също е особена. Тогава правите $y(x) = 2x$ и $y(x) = -2x$ са криви изцяло от особени точки. Заместваме в уравнението $x(y'^2 + 4) = 2yy'$ с $y = 2x$. Получаваме $x(4+4) = 8x = 2.2x.2$. Тогава правата $y(x) = 2x$ е особено решение. Заместваме и с $y = -2x$ и получаваме $x(4+4) = 8x = 2.(-2x).(-2)$, което значи и че правата $y = -2x$ е особено решение на даденото уравнение.

Ако $y_0^2 - 4x_0^2 > 0$ то уравнението $F(x_0,\ y_0,\ z) = 0$ има два корена
$z_{1,\,2} = \dfrac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4x_0^2}}{x_0}$. Пресмятаме $\left(\frac{\partial}{\partial z} F(x_0,\ y_0,\ z)\right)(z_{1,\,2}) = (2x_0 z - 2y_0)(z_{1,\,2}) =$
$= 2(y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4x_0^2}) - 2y_0 = \pm 2\sqrt{y_0^2 - 4x_0^2} \neq 0$ тогава точките $\{(c,\ d) \mid c \in \mathbb{R} \backslash \{0\},\ |c| > 2|d|\}$ са обикновени.

Отговор:

Всички особени точки са точките от вида $\{(r,\ \pm 2r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ и уравнението $x(y'^2 + 4) = 2yy'$ има две особени решения $y(x) = 2x$ и $y(x) = -2x$.

11 Задача 11

Като използвате теоремата за единственост на решението на задачата на Коши за линейни уравнения, докажете, че всяко решение на уравнението $y'' + y = 0$ може да се представи като линейна комбинация на функциите $\sin x$ и $\cos x$.

Решение:

Ние знаем, че $\sin x$ е решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

и $\cos x$ е решение на задатачата на Коши

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Също така детерминанта на Вронски на двете функции
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$ тоест те са линейно независими тогава всяко решение на уравнението $y'' + y = 0$ се представя като тяхна линейна комбинация. Сега ще докажем само чрез теоремата за единственост на решението на задачата на Коши за линейни уравнения, че всяко решение на $y'' + y = 0$ се представя като линейна комбинация на $\sin x$ и $\cos x$. Нека

$$\varphi(x) = a \sin x + b \cos x$$

$$\varphi(0) = a.0 + b.1 = b$$

$$\varphi'(0) = a.1 + b.0 = a \implies$$

$$\varphi(x) = \varphi'(0) \sin x + \varphi(0) \cos x$$

$$\varphi''(x) = -a \sin x - b \cos x = -\varphi(x) \implies$$

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = -\varphi(x) + \varphi(x) = 0$$

следователно $\varphi(x)$ е единствено решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(0) \cos x \\ \varphi'(0) \sin x \end{pmatrix} \in l \left(\begin{pmatrix} \cos(0) \\ \cos'(0) \end{pmatrix} \cos x, \ \begin{pmatrix} \sin(0) \\ \sin'(0) \end{pmatrix} \sin x \right)$

12 Задача 12.

Възможно ли е да се допират графиките на две различни решения на уеавнението $y'' - xy' + x^2 y = 1$? Защо?

Решение:

Нека $y_1, \ y_2$ са две решения на уравнението $y'' - xy' + x^2 y = 1$, които се допират. Тогава $\exists a, \ b, \ c \in \mathbb{R} \ : \ y_1(a) = y_2(a) = b$ (графиките им минават през една обща точка) и $y_1'(a) = y_2'(a) = c$ (допират се, имат обаща допирателна в точката $(a, \ b)$). Допускаме, че $y_1 \not\equiv y_2$. За y_1 е изпълнено

$$\begin{cases} y_1'' - xy_1' + x^2 y_1 = 1 \\ y_1(a) = b \\ y_1'(a) = c \end{cases}$$

за y_2 е изпълнено

$$\begin{cases} y_2'' - xy_2' + x^2y_2 = 1 \\ y_2(a) = b \\ y_2'(a) = c \end{cases}$$

, но тогава $y_1,\ y_2$ са решение на една и съща задача на Коши

$$\begin{cases} y'' - xy' + x^2y = 1 \\ y(a) = b \\ y'(a) = c \end{cases}$$

От теоремата за съществуване и единственост на задача на Коши за линейно уравнение следва, че $y_1 \equiv y_2$, но това противоречи на допускането. Следователно не е възможно графиките на две различни решения на уравнението $y'' - xy' + x^2y = 1$ да се допират.

13 Задача 13.

Нека $\varphi(x)$ е непродължимото решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y'' = x^2y + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

а) Какъв е дефиниционния интервал на $\varphi(x)$?

Решение:

$x^2,\ 1 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Реда на уравнението е втори и са дадени две начални условия в една и съща точка тогава дадената задача на Коши има единствено решение φ дефинирано в цялото $\mathbb{R}$.

б) Каква е най-малката стойност на φ? Защо ?

Решение:

$\varphi(0) = 0$ и $\varphi''(0) = 0^2\varphi(0) + 1 = 1 > 0$ следователно в 0 се реализира локален минимум за φ. Ако $\varphi(x) \geq 0 \implies \varphi''(x) = x^2\varphi(x) + 1 \geq 1 > 0$. $\varphi(0) = 1 > 0$. След като $\varphi(0) = 1 > 0$ то в околност на 0 $\varphi > 0 \implies \varphi'' > 0 \implies \varphi$ е изпъкнала функция. Тогава φ няма други екстремуми освен в 0, в който има локален минимум тогава най-малката стойснот е $\varphi(0) = 1$.

14 Задача 14.

На чертежаса изобразени графиките на три непрекъснати в интервала $[a,\ b]$ функции $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$. Линейно зависими ли са функциите $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ в интервала $[a,\ b]$? Защо?

а)

На графиката се вижда, че $\exists c,\ d \in [a,\ b]$, за които да е изпълнено

$$f_3(c) = f_3'(c) = f_3'(d) = f_3(d) = 0$$
$$0 < f_1(c) < f_2(c)$$
$$f_1(d) > f_2(d) > 0$$

Да допуснем, че $f_1,\ f_2$ и f_3 са линейно зависими то тогава $\forall x \in [a,\ b]\ \exists c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}\ :\ (c_1,\ c_2,\ c_3) \neq (0,\ 0,\ 0) \wedge c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0$, но тогава $(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x))' = (0)' = 0 \implies c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + c_3' f_3(x) = 0$ Следователно

$$\begin{cases} c_1 f_1(c) + c_2 f_2(c) = 0 \\ c_1 f_1(d) + c_2 f_2(d) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 f_1(c) = -c_2 f_2(c) \\ c_1 f_1(d) = -c_2 f_2(d) \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 \geq -c_2 \\ c_1 \leq c_2 \end{cases} \implies$$

$$c_1 = c_2 = 0 \text{ (линейно независими са)}$$

Така получаваме, че $\forall x \in [a,\ b]\ c_3 f_3(x) = 0$, от графиката е ясно, че $f_3 \not\equiv 0$ тогава $c_3 = 0$, но това значи, че $f_1,\ f_2$ и f_3 са линейно независими.

б)

На графиката се вижда, че f_1 и f_2 са линейни фунции с ненулев наклон пресичащи се в една обаща точка, в която и двете функции се нулират. Тогава

$$f_1(x) = p_1 x + q_1\ \wedge\ p_1 \neq 0$$
$$f_2(x) = p_2 x + q_2\ \wedge\ p_2 \neq 0$$
$$\exists x_0 \in [a,\ b]\ :\ f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0 \implies$$
$$p_1 x_0 + q_1 = 0\ \wedge\ p_2 x_0 + q_2 = 0 \implies$$
$$q_1 = -p_1 x_0\ \wedge\ q_2 = -p_2 x_0 \implies$$
$$f_1(x) = p_1(x - x_0)$$
$$f_2(x) = p_2(x - x_0) \implies$$
$$p_2 f_1(x) - p_1 f_2(x) = p_2 p_1 (x - x_0) - p_1 p_2 (x - x_0) \equiv 0$$

$p_1,\ p_2 \neq 0$ тогава $f_1,\ f_2$ са линейно зависими, но тогава $f_1,\ f_2$ и f_3 са линейно зависими.

15 Задача 15.

Пресметнете детерминанта на Вронски на двойката функции $y_1(x) = 2 - 3x^2$ и $y_2(x) = 2x^3 + 1$. Могат ли $y_1(x)$ и $y_2(x)$ да са решения в интервала $(-2,\ 2)$ на едно и също линейно уравнение

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = 0$$

с непрекъснати коефициенти $a(x),\ b(x) \in C(-2,\ 2)$? Защо?

Решение:

$$W(y_1,\ y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 - 3x^2 & 2x^3 + 1 \\ -6x & 6x \end{vmatrix} =$$

$$= 6x(2 - 3x^2 + 2x^3 + 1) = 6x(3 - 3x^2 + 2x^3)$$

Получаваме $W(y_1,\ y_2)(0) = 0 \neq 6(3-3+2) = 12 = W(y_1,\ y_2)(1)$. Следователно $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не са решение на $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y = 0$ в интервала $(-2,\ 2)$.

16 Задача 16.

При какви стойности на реалния параметър k уравнението

$$y'' + ky = \sin \pi x$$

няма нито едно периодично решение?

Решение:

Нулевата функция е решение на хомогенното уравнение $y'' + ky = 0$. Но това значи, че частно решение на $y'' + ky = \sin \pi x$ е решение на същото уравние не зависимо от стойността на параметъра k.
Очевидно $\sin \pi x \in l(\sin \pi x,\ \cos \pi x) = l(e^{0+i\pi}) = l(e^{0-i\pi})$. Тогава частното решение е от вида $x^s(a \sin \pi x + b \cos \pi x)$, където s е кратността на двойката комплексно спрегнати корени $\pm i\pi$ на характеристичното уравнение $\lambda^2 + k = 0$. Ако $s = 0$ частното решение е периодично, това се случва, когато $k \neq \pi^2$. Тогава ако $k = \pi^2$ частното решение е непериодично. Тогава решението на уравнението е от следния вид $y(x) = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x + x(a \sin \pi x + b \cos \pi x)$, което очевидно е непериодично.

Отговор $k = \pi^2$.

17 Задача 17.

Дадено е уравнението

$$y'' + ay' + 4y = 0$$

където a е реален параметър.

а) При какви стойности на a всички решения на уравнението са ограничени за $x \in \mathbb{R}$?

б) При какви стойности на a всички решения на уравнението клонят към 0 при $x \to -\infty$?

в) При какви стойности на a уравнението има поне едно периодично решение различно от $y(x) \equiv 0$?
Решение:

Даденото уравнение от хомогенно линейно втори ред. Тогава то или има два различни реални корена $\lambda_1,\ \lambda_2$ или има един двоен реален корен λ или има двойка комплексно спрегнати корени $\gamma,\ \overline{\gamma}$.

В случая на два реални и различни корена общия вид на решенията е $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, и двете базисини функции $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}$ са неограничени, което значи, че и общото решение е неограничено. Това се случва когато е изпълнено неравенството $a^2 - 16 > 0$ или $|a| > 4$. За да клони общото решение към 0 при

$x \to -\infty$. То трябва да имаме поне един положителен корен и той да е по-голям по абсолютна стойност от отрцателния, ако има такъв. Двата корена на характеристичното уравнение са

$\lambda_{1,\,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}$. Ако $a > 4$ това няма как да е изпълнено. Тогава за да имаме по-голям по абсолютна стойност положителен корен със сигурност трябва да изпълнено неравенството $a < -4$, което е и достатъчно условие положителния корен да е по абсолютна стойност по-голям от отрицателния.

В случая двоен корен, ФСР на системата е $\{e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}\}$ и двете фунцкиции отново са неограничени, тогава и решението е неограничено. Двойният корен е $\lambda = -2$. Тогава общото решение на уравнението е $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ и в такъв случай $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} = \infty \neq 0$.

В случая на двойка комплексно спрегнати корени от вида $\alpha \pm i\beta$ ФСР на уравнението е $\{e^{\alpha} \cos \beta x,\ e^{\alpha} \sin \beta x\}$ общото решение е тяхна линейна комбинация, която е ограничена и периодична функция. Това е изпълнено, когато $a^2 - 16 < 0$ или $|a| < 4$.

Отговори:

а) $|a| < 4$

б) $a < -4$

в) $|a| < 4$

18 Задача 18.

Дадено е уравниението

$$(x-1)y'' + (x-2)y' - y = 0,\ x > 0$$

а) Намерете две частни решения на уравнението от вида $y_1(x) = e^{ax}$ и $y_2(x) = bx + c,\ b \neq 0$.

Решение:

Заместваме в уравнението с $y_1(x) = e^{ax}$ и получаваме

$$(x-1)a^2 e^{ax} + (x-2)a e^{ax} - e^{ax} = 0 \implies$$

$$a^2(x-1) + (x-2)a - 1 = 0 \implies$$

$$(a^2 + a)x - (a^2 + 2a + 1) = 0 \implies$$

$$\begin{cases} a(a+1) = 0 \\ (a+1)^2 = 0 \end{cases} \implies a = -1$$

Тогава $y_1(x) = e^{-x}$ е частно решение. Заместваме и с $y_2(x) = bx + c$

$$(x-1).0 + (x-2)b - bx - c = 0 \implies$$

$$bx - 2b - bx - c = 0 \implies$$

$$2b + c = 0 \implies c = -2b$$

Имаме условието $b \neq 0$ тогава избираме $b = 1$ и получаваме решението $y_2(x) = x - 2$.

б) Покажете, че намерените частни решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са линейно независими в интервала $(1, +\infty)$.

Решение:

Пресмятаме детерминанта на вронски на намерените частни решения.

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & x-2 \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix} = e^{-x}(1 + x - 2) = e^{-x}(x-1)$$

$$\forall x \in (1, +\infty)\ e^{-x} \neq 0 \implies e^{-x}(x-1) = 0 \iff (x-1) = 0 \iff x = 1$$

$$\implies \forall x \in (1, +\infty) \quad 0 \neq e^{-x}(x-1) = W(y_1, y_2)(x)$$

Следователно y_1 и y_2 са линейно независими в интервала $(1, +\infty)$.

в) Намерете общото решение на уравнението.

Доказахме, че y_1 и y_2 са линейно независими в интервала $(1, +\infty)$. Те са две на брой и са решения на на лийено хомогенно уравнение от втори ред с непрекъснати коефициенти, тогава те образуват ФСР на линейното пространство съвпадащо с решенията на хомогенното линейно уравнение. Следователно общото решение на уравнеието един

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2(x-2)$$

19 Задача 19.

Нека $x(t)$ и $y(t)$ са решение на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + e^t \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases}$$

Намерете линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти, което се удовлетворява от функцията $x(t)$.

Решение:

Диференцираме уравнението с лява част съдържаща x и получаваме

$$\ddot{x} = \dot{x} + 2\dot{y} + e^t = \dot{x} + 8x + 6y + e^t$$

От същото уравнение изразяваме y и получаваме $2y = \dot{x} - x - e^t$. Заместваме в полученото уравнение и получаваме

$$\ddot{x} = \dot{x} + 8x + 3(\dot{x} - x - e^t) + e^t \implies$$

$$\ddot{x} = 4\dot{x} + 5x - 2e^t \implies \ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 2e^t$$

Отговор: $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 2e^t$

20 Задача 20.

Приложете теоремата за съществуване и единственост в цилиндъра $G = \{(t,\ x,\ y) \mid |t| \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, за да намерите интервал, в който съществува решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = 2x^2 + y \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Решение:

Нека $M = \max\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{(x+3y)^2 + (2x^2+y)} \leq \sqrt{(1+3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ и нека $h = \min\left(2,\ \frac{1}{M}\right) = \min\left(2,\ \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$. Тогава $t \in (-h,\ h) = \left(-\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$

21 Задача 21.

Сведете задачата на Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - y \\ \dot{y} = x + t \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

до система от две интегрални уравнения. Намерете първите три последователни приближения $(x_0,\ y_0;\ x_1,\ y_1\ x_2,\ y_2)$ на решението на задачата на Коши.

Решение:

$\dot{x}(t) = 1 - y \implies \displaystyle\int_0^t \dot{x}(s)\ ds = \int_0^t 1 - y(s)\ ds \implies x(t) - x(0) = \int_0^t 1 - y(s)\ d \implies$
$x(t) = \displaystyle\int_0^t 1 - y(s)\ ds$

$\dot{y} = x + t \implies \displaystyle\int_0^t \dot{y}\ dt = \int_0^t x(s) + s\ ds \implies y(t) - y(0) = \int_0^t x(s) + s\ ds \implies$
$y(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t x(s) + s\ ds$ Тогава задачата на Коши е еквивалентната със следнта

система от две интегрални уравнениея

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t 1 - y(s)\ ds \\ y(t) = 1 + \int_0^t x(s) + s\ ds \end{cases}$$

Дефинираме следните функционални редици

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n(x) = \begin{cases} 0 & ,\ n = 0 \\ \int_0^t 1 - y_{n-1}(s)\ ds & ,\ n > 0 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ y_n(x) = \begin{cases} 1 & ,\ n = 0 \\ 1 + \int_0^t x_{n-1}(s) + s\ ds & ,\ n > 0 \end{cases}$$

Тогава $x_0 = 0,\ y_0 = 1$. Пресмятаме последователно $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$.

$$x_1 = \int_0^t 1 - 1\ ds = 0, \quad y_1 1 + \int_0^t s\ ds = 1 + \frac{t^2}{2}, x_2 = \int_0^t 1 - (1 + \frac{s^2}{2})\ ds = -\frac{s^3}{6}$$

$$y_2 = 1 + \int_0^t s\ ds = 1 + \frac{t^2}{2}$$

22 Задача 22

Нека функциите $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяват системата

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

а) Покажете, че $x^2(t) - y^2(t)$ не зависи от t.

Решение:

Пресмятаме $\dfrac{\partial}{\partial t} x^2(t) - y^2(t) = 2x\dot{x} - 2y\dot{y} = 2x^2y - 2yx^2 = 0$

Следователно $x^2 - y^2 = C$, тоест $x^2 - y^2$ не зависи от t, което означава, че функцията $u(x,\ y) = x^2 - y^2$ е пръв интеграл на системата.

б) Определете равновесните точки на системата. Начертайте фазов портрет на системата. Кои равновесни точки са устойчиви?

Решение:

Особените точки на системата са решенията на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = xy = 0 \\ \dot{y} = x^2 = 0 \end{cases}$$

Следователно ординатата ос е права от особени точки и други особени точки няма.

Понеже $u(x,\ y) = x^2 - y^2$ е пръв интеграл на системата то всички фазови криви са от вида $x^2 - y^2 = C$, които представляват хипербули. Системата

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

задава векторно поле, което определя посоката на движение по хипербулите.

23 Задача 23.

24 Задача 24.

На чертежа са изобразени няколко фазови криви и всички равновесни точки A, B, C, D, E на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\ y) \\ \dot{y} = g(x,\ y) \end{cases}$$

където $f(x,\ y),\ g(x,\ y) \in C^1(\mathbb{R})$. За кои от равновесните точки можем със сигурност да твърдим, че са неустойчиви? Кои от равновесните точки е възможно да са устойчиви?

Решение:

От четрежа се вижда, че движийки се по начертаните фазови криви се отдалечаваме от C и D (има стрелки излизащи от тях). Тогава за C и D със сигурност можем да твърдим, че са неустойчиви. Останлите точки, може да са всякакви понеже не са дадени всички фазови криви и не знам с тях какво точно се случва.

Отговор:

Със сигурност неустойчиви: C и D.

Възможно устойчиви: A, B и E.