

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A). \quad A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

$$\text{Условна вероятност } \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A).$$

$$\text{Форула на Бейс } \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

$$\text{Пълна вероятност } H_1, \dots, H_k \text{ разбиване на } \Omega. \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

Дискретна случайна величина  $X$ .

$$\text{Математическо очакване } \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1} x_k \mathbb{P}(X = x_k). \quad \mathbb{E}(h(X)) = \sum_{k=1} h(x_k) \mathbb{P}(X = x_k).$$

$$\mathbb{E}(a.X + b) = \mathbb{E}(a.X) + \mathbb{E}(b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

$$\text{Дисперсия } \mathbb{D}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

$$\mathbb{D}(a.X + b) = \mathbb{D}(a.X) + \mathbb{D}(b) = a^2\mathbb{D}(X) + 0 = a^2\mathbb{D}(X).$$

$$\text{Стандартно отклонение } \sigma_X = \sqrt{\mathbb{D}(X)}. \quad \mathbb{D}(X) = \sigma_X^2.$$

$$\text{Пораждаща функция } g_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=1} \mathbb{P}(X = x_k) s^{x_k}.$$

$$\mathbb{P}(X = m) = \frac{g_X^{(m)}(0)}{m!} = \frac{\frac{\partial^m g_X}{\partial s^m}(0)}{m!}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbb{E}(X) = g'_X(1). \quad \mathbb{D}(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2.$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies g_{X+Y}(s) = g_X(s).g_Y(s).$$

Дискретни разпределения:

$$\text{Бернулиево (1 опит с някаква вероятност } p): X \sim Ber(p) \iff \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \text{ \& } \mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{E}(X) = p, \quad \mathbb{D}(X) = p(1 - p).$$

$$\text{Биномно (Брой успешни опита от } n \text{ независими опита всеки с вероятност } p): \\ X \sim Bi(n, p) \iff (\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}) \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \mathbb{E}(X) = np, \quad \mathbb{D}(X) = np(1 - p).$$

$$\text{Геометрично (Брой неуспехи до пръв успех всеки опит е с вероятност } p): \\ X \sim Ge(p) \iff (\forall k \in \mathbb{N}) \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1 - p}{p}, \quad \mathbb{D}(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

$$\text{Хипергеометрично (Брой читави при извадка без връщане на } n \text{ обекта от } N \text{ обекта, } K, \text{ от които са читави}): X \sim HG(N, K, n) \iff \\ (\forall k \in \{max(0, n + K - N), \dots, min(n, K)\}) \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \mathbb{E}(X) = nKN, \quad \mathbb{D}(X) = n \frac{K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Пواسоново (Брой случили се събития в даден непрекъснат интервал от време при очакван среден брой  $\lambda$ ):

$$X \sim Po(\lambda) \iff (\forall k \in \mathbb{N}) \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \mathbb{D}(X) = \lambda.$$

Две случайни дискретни величини и двумерно дискретно.

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies \mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y).$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies g_{X+Y}(s) = g_X(s).g_Y(s).$$

$$\text{Съвместно разпределение: } p_{ij} = \mathbb{P}((X, Y) = (x_i, x_j)) = \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = x_j).$$

Маргинални (безусловни) разпределения (вероятности):

$$p_{i*} = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad p_{*j} = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}.$$

$$\text{Условни разпределения (вероятности): } \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{*j}}, \quad \mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i*}}.$$

Условни очаквания  $\mathbb{E}(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i|Y = y_j), \quad \mathbb{E}(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{P}(Y = y_j|X = x_i).$

Критерии за зависимост / независимост:  
 $X \perp\!\!\!\perp Y \iff (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}) \ (p_{ij} = p_{i*}p_{*j}).$   
 $X \not\perp\!\!\!\perp Y \iff (\exists i \in \{1, 2, \dots, n\})(\exists j \in \{1, 2, \dots, m\}) \ (p_{ij} \neq p_{i*}p_{*j}).$

Очакване на двумерно:  $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i x_j p_{ij}.$

Ковариация:  $Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y) \in R.$

$X \perp\!\!\!\perp Y \implies Cov(X, Y) = 0.$

$\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y) + 2Cov(X, Y).$

Коефициент на корелация:  $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X).\mathbb{D}(Y)}} \in [-1, 1].$

Непрекъснати величини:  
 Случайната величина  $X$  има плътносттна функция  $f_X$  и комулативна дистрибутивна функция  $F_X$ . В сила са:  
 $f_X$  е неотрицателна и  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)ds = 1.$   $f_X(s) = \frac{\partial F_X(s)}{\partial s}$  или  $f_X = F'_X.$

$\mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s)ds, \quad \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(s)ds = F_X(b) - F_X(a).$

$\mathbb{P}(X \geq t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F_X(t).$

Математическо очакване  $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s f_X(s)ds$  и  $\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) f_X(s)ds.$

Дисперсия  $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$

Плътност при смяна на променливите: Ако  $Y = h(X)$ , то  $f_Y(t) = f_X(h^{-1}(t)) \left| \frac{\partial h^{-1}(t)}{\partial t} \right|.$

Непрекъснати случайни величини:  
 Равномерно (Равновероятно) (Uniform) в интервала  $[a, b]$ :  $X \sim U(a, b) \iff (\forall s \in [a, b]) \ \left(f_X(s) = \frac{1}{b-a} \ \& \ F_X(s) = \frac{s-a}{b-a}\right),$   
 $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}(a+b), \quad \mathbb{D}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2.$

Експоненциално (време между независими събития в интервал от време с константно очакване  $\lambda^{-1}$ ):  
 $X \sim Exp(\lambda) \iff f_X(s) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda s}, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}, \quad F_X(s) = 1 - e^{-\lambda s}, \quad \mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}, \quad \mathbb{D}(X) = \lambda^{-2}.$

Нормално разпределение (таблица) Ако  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , то  $\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathbb{D}(X) = \sigma^2$  и  $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$  и  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и  $F_Y = \Phi.$   
 $\mathbb{P}(X \leq c) = F_X(c) = \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right), \quad \mathbb{P}(X \leq -\alpha) = \mathbb{P}(X \geq \alpha) = 1 - \mathbb{P}(X \leq \alpha).$  (симетрия)

Интеграли:  
 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \int x^{-1} dx = \ln|x|, \quad \int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a},$   
 $\int \ln x dx = x \ln|x| - x, \quad \int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x).$