Задачи по ТМ

Иво Стратев

22 март 2021 г.

Нека $RelEq(R, A)$ е съкращение за "R е релация на еквивалетност в A". Разбира се това е изразимо в езика на теория на множествата.

Задача 1.

Нека R и S са релации на еквивалетност в A. Тогава

$$RelEq(R \cup S, A) \iff (\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S \ \vee \ [a]_S \subseteq [a]_R).$$

Решение:

Ако $A = \emptyset$, то $R = S = R \cup S = \emptyset$. В такъв случай твърдението е вярно.

Нека тогава $A \neq \emptyset$. От $RelEq(R, A)$, $RelEq(S, A)$ и $A \neq \emptyset$, следва че $Id_A \subseteq R$ и $Id_A \subseteq S$ и тогава $(\exists a \in A)$ & $(\forall a \in A)(a \in [a]_R$ & $a \in [a]_S)$. Тоест $(\forall a \in A)([a]_R \neq \emptyset$ & $[a]_S \neq \emptyset)$.

($\Longrightarrow$)

Нека $RelEq(R \cup S, A)$. Допускаме, че не е вярно
$(\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S \ \vee \ [a]_S \subseteq [a]_R)$.
Тогава е вярно$(\exists a \in A)([a]_R \not\subseteq [a]_S$ & $[a]_S \not\subseteq [a]_R)$.
Значи е вярно $(\exists a \in A)([a]_R \setminus [a]_S \neq \emptyset$ & $[a]_S \setminus [a]_R \neq \emptyset)$.

Нека тогава $a \in A$ и $[a]_R \setminus [a]_S \neq \emptyset$ & $[a]_S \setminus [a]_R \neq \emptyset$.
Нека тогава $r \in [a]_R \setminus [a]_S$ и $s \in [a]_S \setminus [a]_R$.

Тогава $< a, r > \in R \setminus S$ и $< a, s > \in S \setminus R$.
Тогава $< a, r > \in R \cup S$ и $< a, s > \in R \cup S$.
Но понеже $RelEq(R \cup S, A)$, то $< r, a > \in R \cup S$ и $< r, s > \in R \cup S$.
Възможни са два случая.

Случай 1: $< r, s > \in R$.

Тогава $< a, r > \in R$ и $< r, s > \in R$, но $RelEq(R, A)$ и значи $< a, s > \in R$, но това е Абсурд, защото $< a, s > \notin R$.

Случай 2: $< r, s > \notin R$.

Тогава $< r, s > \in S$. Но тогава $< s, a > \in S$ и $< r, s > \in S$, защото $RelEq(S, A)$. Но тогава $< r, a > \in S$ и $< a, r > \in S$, но това е Абсурд!

Така и в двата възможни случая достигнахме до Абсурд, който е следствие на допускането, че не е вярно $(\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S \ \vee \ [a]_S \subseteq [a]_R)$.
Тогава е вярно $(\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S \ \vee \ [a]_S \subseteq [a]_R)$.

$(\Longleftarrow)$

Нека $(\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S \ \vee \ [a]_S \subseteq [a]_R)$. Ще покажем, че е в сила $RelEq(R \cup S, A)$.

Рефлексивност:

Понеже $RelEq(R, A)$, то $Id_A \subseteq R$ и значи $Id_A \subseteq R \cup S$. Значи $R \cup S$ е рефлексивна в A.

Симетричност:

Нека $< a, b > \in R \cup S$. Тогава ако $< a, b > \in R$, то понеже $RelEq(R, A)$, следва че $< b, a > \in R$, а значи и $< b, a > \in R \cup S$. Ако пък $< a, b > \in S$, то понеже $RelEq(S, A)$, следва че $< b, a > \in S$, а значи и $< b, a > \in R \cup S$. И е в сила $< a, b > \in R \vee < a, b > \in S$. Значи $< b, a > \in R \cup S$. Следователно $R \cup S$ е симетрична.

Транзитивност:

Нека $< a, b > \in R \cup S$ и $< b, c > \in R \cup S$. Тогава са възможни два случая.

Случай 1 $(< a, b > \in R \;\&\; < b, c > \in R) \;\vee (< a, b > \in S \;\&\; < b, c > \in S)$:

Възможни са два случая (под слуачая).

Случай 1.1 $< a, b > \in R \;\&\; < b, c > \in R$:

Тогава понеже $RelEq(R, A)$, то $< a, c > \in R$, а значи и $< a, c > \in R \cup S$.

Случай 1.2 $< a, b > \in S \;\&\; < b, c > \in S$:

Тогава понеже $RelEq(S, A)$, то $< a, c > \in S$, а значи и $< a, c > \in R \cup S$.

Случай 2 $(< a, b > \in R \setminus S \;\&\; < b, c > \in S \setminus R) \;\vee (< a, b > \in S \setminus R \;\&\; < b, c > \in S \setminus R)$:

Ще покажем, че това не е възможно. Нека $< u, v > \in R \setminus S$
и $< v, w > \in S \setminus R$. Понеже $[v]_R \subseteq [v]_S \;\vee\; [v]_S \subseteq [v]_R$, то са възможни два случая.
Ако $[v]_R \subseteq [v]_S$, тогава $u \in [v]_S$ и значи $< u, v > \in S$, но това е Абсурд!
Ако $[v]_S \subseteq [v]_R$, тогава $w \in [v]_R$ и значи $< v, w > \in R$, но това е Абсурд!

Излезе, че този логически случай не е възможен, поради връзката между двете реалции. Тогава тривиално следва, че $< a, c > \in R \cup S$.

Така и в двата случая излезе, че $< a, c > \in R \cup S$ (във втория предпоставката, че има такива двойки просто не е вярна и тогава следствието е тривиално). Следователно $R \cup S$ е транзитивна.

Следователно $RelEq(R \cup S, A)$. $\quad \square$

Задача 2.

Нека A, B и C са такива, че $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{C \times C}}$. Тогава

$$\exists g(g : A \twoheadrightarrow C) \ \vee \ \exists h(h : C \rightarrowtail B)$$

Решение:

След като $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{C \times C}}$. Нека $f : A \cup B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C \times C$.

Възможни са два случая.

Случай 1 $(\forall c \in C)(\exists a \in A)(\exists d \in C)(f(a) =< c, d >)$:

Понеже $f : A \cup B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C \times C$, то $f_{\restriction A} : A \to C \times C$.
Нека $left : C \times C \to C$ и $(\forall x \in C)(\forall y \in C)(left(< x, y >) = x)$.
Понеже $(\forall c \in C)(left(< c, c >) = c)$, то $left : C \times C \twoheadrightarrow C$.
Ще покажем, че $f_{\restriction A} \circ left : A \twoheadrightarrow C$. За сега имаме $f_{\restriction A} \circ left : A \to C$,
понеже $Dom(left) = C \times C$, $Range(left) = C$, $Dom(f_{\restriction A}) = A$
и $Range(f_{\restriction A}) \subseteq C \times C$. Нека $c \in C$. Тогава
$(\exists a \in A)(\exists d \in C)(f(a) =< c, d >)$. Нека тогава $a \in A$ и $d \in C$ и са такива,
че $f(a) =< c, d >$. Тогава $(f_{\restriction A} \circ left)(a) = left(f_{\restriction A}(a)) = left(< c, d >) = c$.
Следователно $(\forall y \in C)(\exists x \in A)((f_{\restriction A} \circ left)(x) = y)$.
Тоест $f_{\restriction A} \circ left : A \twoheadrightarrow C$.
Следователно $\exists g(g : A \twoheadrightarrow C) \ \vee \ \exists h(h : C \rightarrowtail B)$.

Случай 2 $(\exists c \in C)(\forall a \in A)(\forall d \in C)(f(a) \neq< c, d >)$:

Нека тогава $c \in C$ е такова, че $(\forall a \in A)(\forall d \in C)(f(a) \neq< c, d >)$.
$f : A \cup B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C \times C$ следователно $f^{-1} : C \times C \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \cup B$.
Ще докажем, че $(\forall x \in C)(f^{-1}(< c, x >) \in B)$ е истина.
Тоест $Range(f^{-1}_{\restriction \{c\} \times C}) \subseteq B$. Нека $d \in C$. Нека $z = f^{-1}(< c, x >)$.
Да допуснем, че $z \notin B$. Тогава $z \in A$ понеже $z \in A \cup B$.
Но тогава $f(z) =< c, d >$ и $d \in C$ и $z \in A$. Това е Абсурд!
Следователно $z \in B$. Следователно $(\forall x \in C)(f^{-1}(< c, x >) \in B)$.
Това значи, че $Range(f^{-1}_{\restriction \{c\} \times C}) \subseteq B$.
Но $f^{-1} : C \times C \rightarrowtail A \cup B$, следователно $f^{-1}_{\restriction \{c\} \times C} : \{c\} \times C \rightarrowtail B$.

Тогава нека $t : C \to B$ и $(\forall x \in C)(t(x) = f^{-1}(< c, x >)$.
Тогава е очевидно $t : C \rightarrowtail B$.
Следователно $\exists g(g : A \twoheadrightarrow C) \lor \exists h(h : C \rightarrowtail B)$.

И в двата възможни случая доказахме
$\exists g(g : A \twoheadrightarrow C) \lor \exists h(h : C \rightarrowtail B)$. $\square$

Задача 3.

Нека S е такова, че

$$\begin{aligned} \{A\} \subseteq S \subseteq \mathcal{P}(A) \\ \& \\ \forall X(\emptyset \neq X \subseteq S \implies \cap X \in S). \end{aligned}$$

Нека $f : S \to S$ е монотонна функция. Тогава f има най-малка неподвижна точка.

Решение:

Нека $B = \{X \mid X \in S \ \& \ f(X) \subseteq X\}$. Очевидно $B \subseteq S$. Понеже $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, то $(\forall T \in S)(T \subseteq A)$. Тогава $A \in S$ и $f(A) \subseteq A$, понеже $f(A) \in S$. Следователно $A \in B$ и значи $B \neq \emptyset$. Така $\emptyset \neq B \subseteq S$ и значи $\cap B \in S$. Нека тогава $X_0 = \cap B$. Нека $X \in B$. Тогава $X_0 = \cap B \subseteq X$, но понеже f е монотонна, то $f(X_0) \subseteq f(X)$. Но $X \in B$ следователно $f(X) \subseteq X$ и значи $f(X_0) \subseteq X$. Така $(\forall T \in B)(f(X_0) \subseteq T)$ и значи $f(X_0) \subseteq X_0$. Но $X_0 = \cap B \in S$ и така $X_0 \in B$. От $f(X_0) \subseteq X_0$ и f е монотнонна, следва че $f(f(X_0)) \subseteq f(X_0)$. Обаче $Range(f) \subseteq S$ и значи $f(X_0) \in S$. Така $f(X_0) \in B$. Следователно $X_0 \subseteq f(X_0)$. И значи получихме $f(X_0) \subseteq X_0$ и $X_0 \subseteq f(X_0)$. Следователно $X_0 \in S$ и $X_0 = f(X_0)$, тоест X_0 е неподвижна точка за f. Нека $Z \in S$ и $f(Z) = Z$. Тогава $f(Z) \subseteq Z$.
Следователно $Z \in B$. Тогава $X_0 = \cap B \subseteq Z$.
Следователно $(\forall Z \in S)(f(Z) = Z \implies X_0 \subseteq Z)$.
Следователно X_0 е най-малката неподвижна точка на f. $\square$

Лема за разделените инекции

Нека $f : A \rightarrowtail B$ и $g : C \rightarrowtail D$ и $A \cap C = \emptyset$ и $B \cap D = \emptyset$.
Тогава $f \cup g : A \cup C \rightarrowtail B \cup D$.

Доказателство:

Понеже $Dom(f) \cap Dom(g) = \emptyset$, то f и g са съвместими и $f \cup g\ :\ A \cup C \to B \cup D$. Нека $x \in A \cup C$ и $y \in A \cup C$ и $x \neq y$. Възможни са три случая:

Случай 1. $x \in A$ & $y \in A$

Тогава $(f \cup g)(x) = f(x) \neq f(y) = (f \cup g)(y)$, понеже f е инекция.

Случай 2. $x \in C$ & $y \in C$

Тогава $(f \cup g)(x) = g(x) \neq g(y) = (f \cup g)(y)$, понеже g е инекция.

Случай 3. $x \in A$ & $y \in C$

Тогава $(f \cup g)(x) = f(x) \in B$ и $(f \cup g)(y) = g(y) \in D$ и $B \cap D = \emptyset$ следователно $(f \cup g)(x) \neq (f \cup g)(y)$.

Заключение:

Следователно понеже x и y бяха произволни, то $f \cup g : A \cup C \rightarrowtail B \cup D$.
$\square$

Задача 4.

Нека $< A, \leq_A >$ и $< B, \leq_B >$ са линейно наредени множества и $< A, \leq_A >$ е изоморфно с начален отрез на $< B, \leq_B >$, а $< B, \leq_B >$ е изоморфно с финален отрез на $< A, \leq_A >$. Тогава $< A, \leq_A > \cong < B, \leq_B >$.

Съкращения:

Нека $< L, \leq >$ е линейно наредено множество. Тогава

$$\begin{aligned} StartingCut(S, L, \leq) &\leftrightharpoons S \subseteq L \;\&\; (\forall y \in S)(\forall x \in L)(x \leq y \implies x \in S) \\ FinalCut(F, L, \leq) &\leftrightharpoons F \subseteq L \;\&\; (\forall x \in F)(\forall y \in L)(x \leq y \implies y \in F) \end{aligned}$$

Лема 1:

Нека $< L, \leq >$ е линейно наредено множество.
Тогава $StartingCut(S, L, \leq) \implies FinalCut(L \setminus S, L, \leq)$.

Доказателство:

Нека S е такова, че $StartingCut(S, L, \leq)$. Тогава $S \subseteq L$ и значи $L \setminus S \subseteq L$. Нека $x \in L \setminus S$. Нека $y \in L$ и нека $x \leq y$. Тогава да допуснем, че $y \notin L \setminus S$, Но тогава $y \in S$ и тогава $x \in S$, защото $StartingCut(S, L, \leq)$. Това е Абсурд! Следователно $y \in L \setminus S$. Следователно $FinalCut(L \setminus S, L, \leq))$. $\square$

Лема 2:

Нека $< L, \leq >$ е линейно наредено множество.
Тогава $FinalCut(F, L, \leq) \implies StartingCut(L \setminus F, L, \leq)$.

Доказателство:

Нека F е такова, че $FinalCut(F, L, \leq)$. Тогава $F \subseteq L$ и значи $L \setminus F \subseteq L$. Нека $y \in L \setminus F$. Нека $x \in L$ и нека $x \leq y$. Тогава да допуснем, че $x \notin L \setminus F$, Но тогава $x \in F$ и тогава $y \in F$, защото $FinalCut(F, L, \leq)$. Това е Абсурд! Следователно $x \in L \setminus F$. Следователно $StartingCut(L \setminus F, L, \leq))$. $\square$

Решение:

$< A, \leq_A >$ е изоморфно с начален отрез на $< B, \leq_B >$ нека тогава S е такова, че $StartingCut(S, B, \leq_B)$ и $< A, \leq_A > \cong < S, \leq_B^S >$. Нека тогава $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S$ е изоморфзъм на $< A, \leq_A >$ върху $< S, \leq_B^S >$. В частност $f : A \rightarrowtail B$. $< B, \leq_B >$ е изоморфно с финален отрез на $< A, \leq_A >$ нека тогава F е такова, че $FinalCut(F, A, \leq_A)$ и $< B, \leq_B > \cong < F, \leq_A^F >$. Нека тогава $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F$ е изоморфзъм на $< B, \leq_B >$ върху $< F, \leq^F_A >$. В частност $g : B \rightarrowtail A$.

Ще построим изоморфизъм на $< A, \leq_A >$ върху $< B, \leq_B >$. Идеята да е разделим множеството A на две части X_0 и $A \setminus X_0$. Като ще искаме $X_0 \subseteq Range(g)$, което да е финален отрез и елементите на X_0 ще изпращаме с g^{-1}, а на $A \setminus X_0$, което ще е начален отрез с f. За тези цел ще поискаме да разделим и елементите на B на две части. Ще искаме
$g^{-1}[X_0] = B \setminus f[A \setminus X_0]$ или $X_0 = g[B \setminus f[A \setminus X_0]]$.

Нека $X \in \mathcal{P}(A)$, тогава $X \subseteq A$ и значи $A \setminus X \subseteq A$. Тогава $f[A \setminus X] \subseteq S \subseteq B$ и значи $B \setminus f[A \setminus X] \subseteq B$. Следователно $g[B \setminus f[A \setminus X]] \subseteq F \subseteq A$ и значи $g[B \setminus f[A \setminus X]] \in \mathcal{P}(A)$. Тоест $(\forall T \in \mathcal{P}(A))(g[B \setminus f[A \setminus T]] \in \mathcal{P}(A))$. Тогава разглеждаме фукцията $h : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, за която
$(\forall T \in \mathcal{P}(A))(h(T) = g[B \setminus f[A \setminus T]] \in \mathcal{P}(A))$.

Ще покажем, че h е монотонна. Нека $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$ тогава $A \setminus X_2 \subseteq A \setminus X_1$ и значи $f[A \setminus X_2] \subseteq f[A \setminus X_1]$, но тогава $B \setminus f[A \setminus X_1] \subseteq B \setminus f[A \setminus X_2]$ и значи $g[B \setminus f[A \setminus X_1]] \subseteq g[B \setminus f[A \setminus X_2]]$. Тоест $h(X_1) \subseteq h(X_2)$. Следователно $h : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е монотонна.

Ще построим неподвижна точка на h, която да е финален отрез на $< A, \leq_A >$. За целта ще докажем две леми.

Лема 3: $\forall M(StartingCut(M, A, \leq_A) \implies StartingCut(f[M], B, \leq_B))$

Нека M е такова, че $StartingCut(M, A, \leq_A)$. Нека $y \in f[M]$. Нека $x \in B$ и $x \leq_B y$. От $y \in f[M]$ следва, че $y \in f[A] = S$, защото $M \subseteq A$. Но от $StartingCut(S, B, \leq_B)$, следва че $x \in S = Range(f)$. Понеже $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S$ и f е изоморфизъм, то $f^{-1}(x) \leq_A f^{-1}(y)$. Но $y \in f[M]$ следователно $f^{-1}(y) \in M$. Но $StartingCut(M, A, \leq_A)$ и $f^{-1}(x) \leq_A f^{-1}(y)$ следователно $f^{-1}(x) \in M$ и значи $x = f(f^{-1}(x)) \in f[M]$.
Заключение: $StartingCut(f[M], B, \leq_B)$. $\square$

Лема 4: $\forall M(FinalCut(M, B, \leq_B) \implies FinalCut(g[M], A, \leq_A))$

Нека M е такова, че $FinalCut(M, B, \leq_B)$. Нека $x \in g[M]$. Нека $y \in A$ и $x \leq_A y$. От $x \in g[M]$ следва, че $x \in g[B] = F$, защото $M \subseteq B$. Но от $FinalCut(F, A, \leq_A)$, следва че $y \in F = Range(g)$. Понеже $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow F$ и g е изоморфизъм, то $g^{-1}(x) \leq_B g^{-1}(y)$. Но $x \in g[M]$ следователно $g^{-1}(x) \in M$. Но $FinalCut(M, B, \leq_B)$ и $g^{-1}(x) \leq_B g^{-1}(y)$ следователно $g^{-1}(y) \in M$ и значи $y = g(g^{-1}(y)) \in g[M]$.
Заключение: $FinalCut(g[M], A, \leq_A)$. $\square$

Нека $P = \{X \mid FinalCut(X, A, \leq_A) \ \& \ X \subseteq h(X)\}$. P е множество, защото отделяме от $\mathcal{P}(A)$ със свойството

$$(\forall z \in X)(\forall y \in A)(z \leq_A y \implies y \in X) \ \& \ X \subseteq h(X).$$

Ще се нуждаем от следната Лема:

Лема 5: $(\forall X \in P)(h(X) \in P)$

Нека $X \in P$. Тогава $X \subseteq h(X)$ следователно $h(X) \subseteq h(h(X))$, защото h е монотонна. Но от $X \in P$ следва и $FinalCut(X, A, \leq_A)$. Тогава
по Лема 1 $StartingCut(A \setminus X, A, \leq_A)$. Тогава от Лема 3
$StartingCut(f[A \setminus X], B, \leq_B)$. Тогава от Лема 2
$FinalCut(B \setminus f[A \setminus X], B, \leq B)$. Тогава от Лема 4
$FinalCut(g[B \setminus f[A \setminus X]], A \leq_A)$. Следователно $FinalCut(h(X), A, \leq_A)$.
Така $FinalCut(h(X), A, \leq_A)$ и $h(X) \subseteq h(h(X))$ следователно $h(X) \in P$.
Заключение: $(\forall u \in P)(h(u) \in P)$. $\square$

Ще покажем, че $\cup P \in P$.

Първо ще покажем, че $FinalCut(\cup P, A, \leq_A)$. В сила е $(\forall u \in P)(u \subseteq A)$ следователно $\cup P \subseteq A$. Нека $x \in \cup P$. Нека $y \in A$ и нека $x \leq_A y$. От $x \in \cup P$, следва $(\exists u \in P)(x \in u)$. Нека тогава $u \in P$ е такова, че $x \in u$. $u \in P$ следователно $FinalCut(u, A, \leq_A)$ но $x \in u$ и $x \leq_A y$. Следователно $y \in u$. Следователно $y \in \cup P$. Следователно $FinalCut(\cup P, A, \leq_A)$.

Остава да покажем, че $\cup P \subseteq h(\cup P)$. Нека $a \in \cup P$. Тогавва
$(\exists M \in P)(a \in M)$. Нека тогава $M \in P$ е такова, че $a \in M$. От $M \in P$

следва $M \subseteq \cup P$. Но h е монотонна, следователно $h(M) \subseteq h(\cup P)$.
Но $M \in P$ значи $M \subseteq h(M)$. Така $M \subseteq h(\cup P)$ и значи $a \in h(\cup P)$. Следователно $\cup P \subseteq h(\cup P)$. Така $\cup P \in P$.

Тогава от $\cup P \in P$ и Лема 5 следва $h(\cup P) \in P$ и значи $h(\cup P) \subseteq \cup P$. Следователно $\cup P = h(\cup P)$ и $FinalCut(\cup P, A, leqA_A)$.

Нека тогава $X_0 = \cup P$. В сила са:

$$\begin{aligned} X_0 = g[B \setminus f[A \setminus X_0]] \\ FinalCut(X_0, A, \leq_A) \\ StartingCut(A \setminus X_0, A, \leq_A) \text{ (по Лема 2)} \\ StartingCut(f[A \setminus X_0], B, \leq_B) \text{ (по Лема 3)} \\ FinalCut(B \setminus f[A \setminus X_0], B, \leq_B) \text{ (по Лема 1)} \end{aligned}$$

Така $X_0 \subseteq Range(g)$ и значи $X_0 \subseteq Dom(g^{-1})$. Нека $u = (g^{-1})_{\restriction X_0}$ и $v = f_{\restriction A \setminus X_0}$. Тогава $Dom(u) = X_0$ и $Dom(v) = A \setminus X_0$ са непресичащи и значи u и v са съвместими. Нека тогава $t = u \cup v$. Тогава $Dom(t) = Dom(u) \cup Dom(v) = X_0 \cup (A \setminus X_0) = A$ и $Range(t) = Range(u) \cup Range(v) = Range(f_{\restriction A \setminus X_0}) \cup Range(g^{-1}_{\restriction X_0}) = f[A \setminus X_0] \cup g^{-1}[X_0]$
$= f[A \setminus X_0] \cup g^{-1}[g[B \setminus f[A \setminus X_0]]] = f[A \setminus X_0] \cup B \setminus f[A \setminus X_0] = B$. Следователно $t : A \twoheadrightarrow B$. Понеже f и g^{-1} са инекции, то и u и v са инекции, но и $Dom(u) \cap Dom(v) = \emptyset$ и $Range(u) \cap Range(v) = \emptyset$ и от Лемата за разделените инекции, следва че $t : A \rightarrowtail B$. Така $t : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$. Ще покажем, че t е силен хомоморфизъм на линейни наредби. Нека $a_1 \in A$ и $a_2 \in A$ и нека $a_1 <_A a_2$. Възможни са три случая.

Случай 1 $a_1 \in A \setminus X_0$ & $a_2 \in A \setminus X_0$:

Тогава $t(a_1) = v(a_1) = f(a_1) <_B f(a_2) = v(a_2) = t(a_1)$.

Случай 2 $a_1 \in X_0$ & $a_2 \in X_0$:

Тогава $t(a_1) = u(a_1) = g^{-1}(a_1) <_B g^{-1}(a_2) = u(a_2) = t(a_1)$.

Случай 3 $a_1 \in A \setminus X_0$ & $a_2 \in X_0$:

Понеже t е инекция да допуснем, че $t(a_2) <_B t(a_1)$. Тогава $u(a_2) <_B v(a_1)$, обаче $Range(v) = f[A \setminus X_0]$ и $StartingCut(f[A \setminus X_0], A, \leq_A)$. Тогава $u(a_2) \in f[A \setminus X_0]$. Но това е Абсурд, защото $Range(u) = B \setminus f[A \setminus X_0]$. Следователно $t(a_1) <_B t(a_2)$, защото t е инекция, а $a_1 \in A \setminus X_0$ & $a_2 \in X_0$.

Не е възможно $a_1 \in X_0$ & $a_2 \in A \setminus X_0$ & $a_1 <_A a_2$, защото $FinalCut(X_0, A, \leq_A)$ и значи $a_2 \in X_0$.

Така получаваме $(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(a_1 \leq_A a_2 \implies t(a_1) \leq_B t(a_2))$.

Нека сега $b_1 \in B$, $b_2 \in B$ и $b_1 \leq_B b_2$. $< A, \leq_A >$ е л.н.м. В частност всеки два елемента на A са $\leq_A$ сравними. Да допуснем, че $t^{-1}(b_2) <_A t^{-1}(b_1)$. Тогава $t(t^{-1}(b_2)) <_B t(t^{-1}(b_1))$ и значи $b_2 <_B b_1$. Но това е Абсурд! Следователно $t^{-1}(b_1) <_A t^{-1}(b_2)$. Следователно $(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)(b_1 \leq_B b_2 \implies t^{-1}(b_1) \leq_A t^{-1}(b_2))$. Следователно $(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(t(a_1) \leq_B t(a_2) \implies a_1 \leq_A a_2)$. Така t е силен хомоморфизъм на $< A, \leq_A >$ върху $< B, \leq_B >$ и значи t е изоморфизъм. Следователно $< A \leq_A > \cong < B \leq_B >$. $\square$

Задача 5.

Нека $\mathcal{W}_1 = < W_2, \leq_1 >$ и $\mathcal{W}_2 = < W_2, \leq_2 >$ са добре наредени множества. Тогава е в сила точно едно от трите:

- $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$ са изоморфни;
- $\mathcal{W}_1$ е изоморфно на начален сегмент на $\mathcal{W}_2$;
- $\mathcal{W}_2$ е изоморфно на начален сегмент на $\mathcal{W}_1$.

Преди да преминем към решението ще формулираме и докажем две леми.

Лема 1:

Нека $\mathcal{A} = < A, \leq_A >$ и $\mathcal{B} = < B, \leq_B >$ са добре наредени множества. Нека $a \in A$, $b \in B$, $d \in B$ и $< seg_A(a), \leq_A^a > \cong < seg_B(b), \leq_B^b >$ и $< seg_A(a), \leq_A^a >$

$\cong < seg_B(d), \leq_B^d >$. Тогава $b = d$.

Доказателство:

Да допуснем, че $b \neq d$. Тогава нека Б.О.О. $b \leq_B d$. Тогава $b \in seg_B(d) \setminus seg_B(b)$ и $seg_B(b) \subseteq seg_B(d)$. Но очевидно тогава $seg_B(b) = seg_{seg_B(d)}(b) \subseteq seg_B(d)$. Понеже $< seg_A(a), \leq_A^a > \cong < seg_B(b), \leq_B^b >$, то нека $f : seg_A(a) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow seg_B(b)$ е изоморфизъм. Понеже $< seg_A(a), \leq_A^a > \cong < seg_B(d), \leq_B^d >$, то нека $g : seg_A(a) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow seg_B(d)$ е изоморфизъм. Тогава очевидно $f^{-1} \circ g : seg_B(b) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow seg_B(d)$ е изоморфизъм. Но тогава $seg_B(b) = seg_{seg_B(d)}(b) \subset seg_B(d)$ и $< seg_B(b), \leq_B^b > \cong < seg_B(d), \leq_B^d >$. Но това знаем, че е невъзможно, защото никое добре наредено множество не е изоморфно на свой собствен начален сегмет. Следователно $b = d$. $\square$

Лема 2:

Нека $\mathcal{A} = < A, \leq_A >$ и $\mathcal{B} = < B, \leq_B >$ са добре наредени множества. Нека $a \in A$, $b \in B$, $c \in B$ и нека $a <_A c$. Нека $f : seg_A(c) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow seg_B(b)$ е изоморфизъм на $< seg_A(c), \leq_A^c >$ върху $< seg_B(b), \leq_B^b >$. Тогава $f_{\restriction seg_A(a)}$ е изоморфизъм на $< seg_A(a), \leq_A^c >$ върху $< seg_B(f(a)), \leq_B^{f(a)} >$.

Доказателство:

Понеже $a <_A c$, то $seg_A(a) \subseteq seg_A(c)$. Тогава нека $g = f_{\restriction seg_A(a)}$.
Понеже $f : seg_A(c) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow seg_B(b)$, то $g : seg_A(a) \rightarrowtail seg_B(b)$.
$Range(g) = Range(f_{\restriction seg_A(a)}) = f[seg_A(a)] = f[\{x \in A \mid x <_A a\}]$
$= \{f(x) \mid x \in A \;\&\; x <_A a\} = \{f(x) \mid x \in seg_A(a) \;\&\; f(x) <_B f(a)\}$
$= \{f(f^{-1}(y)) \mid y \in seg_B(c) \;\&\; f(f^{-1}(y)) <_B f(a)\}$
$= \{y \mid y \in seg_B(c) \;\&\; y <_B f(a)\} = \{y \mid y \in B \;\&\; y <_B f(a)\}$
$= seg_B(f(a))$. Следователно $g : seg_A(a) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow seg_B(f(a))$. Понеже
$(\forall x \in seg_A(a))(\forall y \in seg_A(a))(x \leq_A^a y \iff x \leq_A y$
$\iff f(x) \leq_B f(y) \iff g(x) \leq_B g(y) \iff g(x) \leq_B^{f(a)} g(y))$,
то следва че $g : seg_A(a) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow seg_B(f(a))$ е изоморфизъм на
$< seg_A(a), \leq_A^a >$ върху $< seg_B(f(a)), \leq_B^{f(a)} >$. $\square$

Решение:

Нека $f \subseteq W_1 \times W_2$ е следната релация:

$$f = \{< x, y > \in W_1 \times W_2 \mid \ < seg_{W_1}(x), \leq_1^x > \cong < seg_{W_2}(y), \leq_2^y >\}.$$

f е функция:

Нека $x \in W_1$, $y \in W_2$ и $z \in W_2$ са такива, че $< x, y > \in f$ и $< x, z > \in f$. Тогава $< seg_{W_1}(x), \leq_1^x > \cong < seg_{W_2}(y), \leq_2^y >$ и $< seg_{W_1}(x), \leq_1^x > \cong < seg_{W_2}(z), \leq_2^z >$. Но тогава по Лема 1 $y = z$. Следователно $Funct(f)$.

f е инекция:

Нека $x \in W_1$, $y \in W_2$ и $s \in W_1$ са такива, че $< x, y > \in f$ и $< s, y > \in f$. Тогава $< seg_{W_1}(x), \leq_1^x > \cong < seg_{W_2}(y), \leq_2^y >$ и $< seg_{W_1}(s), \leq_1^s > \cong < seg_{W_2}(y), \leq_2^y >$. Следователно $< seg_{W_2}(y), \leq_2^y > \cong < seg_{W_1}(x), \leq_1^x >$ и $< seg_{W_2}(y), \leq_2^y > \cong < seg_{W_1}(s), \leq_1^s >$. Но тогава по Лема 1 $x = s$. Следователно f е инекция.

f запазва наредбата:

Нека $x \in Dom(f)$, $s \in Dom(f)$ и $x <_1 s$. След като $s \in Dom(f)$, то $(\exists y \in W_2)(< seg_{W_1}(s), \leq_1^s > \cong < seg_{W_2}(y), \leq_2^y >)$. Нека тогава $y \in W_2$ и $< seg_{W_1}(s), \leq_1^s > \cong < seg_{W_2}(y), \leq_2^y >$. Тогава нека $h : seg_{W_1}(s) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow seg_{W_2}(y)$ е изоморфизъм на $< seg_{W_1}(s), \leq_1^s >$ върху $< seg_{W_2}(y), \leq_2^y >$. Тогава според Лема 2 $< seg_{W_1}(x), \leq_1^x > \cong < seg_{W_2}(g(x)), \leq_2^{g(x)} >$. Но $g(x) \in seg_{W_2}(y)$ и значи $g(x) <_2 y$. Но тогава $f(x) = g(x) <_2 y = f(s)$. Следователно $(\forall a \in Dom(f))(\forall b \in Dom(f))(a <_1 b \implies f(a) <_2 f(b))$.

$Dom(f)$ е начален сегмент:

$Dom(f) \subseteq W_1$. Нека $v \in Dom(f)$. Нека $u \in W_1$ и $u <_1 v$. Нека $t = f(v)$. От $v \in Dom(f)$, следва че $< seg_{W_1}(v), \leq_1^v > \cong < seg_{W_2}(t), \leq_2^t >$. Тогава нека $h : seg_{W_1}(v) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow seg_{W_2}(t)$ е изоморфизъм. Тогава според Лема 2
$< seg_{W_1}(u), \leq_1^u > \cong < seg_{W_2}(h(u)), \leq_2^{h(u)} >$. Следователно $< u, h(u) > \in f$. Тогава $u \in Dom(f)$. Следователно $Dom(f)$ е начален сегмент на W_1.

$Range(f)$ **е начален сегмент:**

$Range(f) \subseteq W_2$. Нека $v \in Range(f)$. Нека $u \in W_2$ и $u <_2 v$. Нека $z \in W_1$ и $v = f(z)$. От $z \in Dom(f)$, следва че $< seg_{W_1}(z), \leq_1^z > \cong < seg_{W_2}(v), \leq_2^v >$. Тогава нека $h : seg_{W_2}(v) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow seg_{W_1}(z)$ е изоморфизъм. Тогава според Лема 2 $< seg_{W_2}(u), \leq_2^u > \cong < seg_{W_1}(h(u)), \leq_1^{h(u)} >$. Следователно $< h(u), u > \in f$. Тогава $u \in Range(f)$. Следователно $Range(f)$ е начален сегмент на W_2.

Така понеже f запазва наредбата и е инекция, то f е изоморфизъм на $< Dom(f), \leq_1 \cap (Dom(f) \times Dom(f)) >$ върху $< Range(f), \leq_2 \cap (Range(f) \times Range(f)) >$.

$Dom(f) = W_1 \ \vee \ Range(f) = W_2$**:**

Допускаме, че $Dom(f) \neq W_1$ & $Range(f) \neq W_2$. Но понеже $Dom(f) \subseteq W_1$ и $Range(f) \subseteq W_2$, следва че $W_1 \setminus Dom(f) \neq \emptyset$ и $W_2 \setminus Range(f) \neq \emptyset$.
Нека тогава $x = \min\limits_{\leq_1}(W_1 \setminus Dom(f))$ и $y = \min\limits_{\leq_2}(W_2 \setminus Range(f))$.
Понеже $(\forall s \in W_1)(s \in W_1 \setminus Dom(f) \implies x \leq_1 s)$, то $(\forall s \in W_1)(s <_1 x \implies s \in Dom(f))$. Следователно $seg_{W_1}(x) \subseteq Dom(f)$.
Нека $s \in Dom(f)$. Допускаме, че $s \notin seg_{W_1}(x)$. Тогава $x \leq_1 s$. Но понеже $x \notin Dom(f)$, то $x <_1 s$. Понеже $s \in Dom(f)$, то $< seg_{W_1}(s), \leq_1^s > \cong < seg_{W_2}(f(s)), \leq_2^{f(s)} >$. Нека тогава $h : seg_{W_1}(s) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow seg_{W_2}(f(s))$ е изоморфизъм на $< seg_{W_1}(s), \leq_1^s >$ върху $< seg_{W_2}(f(s)), \leq_2^{f(s)} >$. Тогава според Лема 2 $< seg_{W_1}(x), \leq_1^x > \cong < seg_{W_2}(h(x)), \leq_2^{h(x)} >$. Но тогава $x \in Dom(f)$. Това е Абсурд! Следователно $s \in seg_{W_1}(x)$. Следователно $Dom(f) \subseteq seg_{W_1}(x)$. Така $Dom(f) = seg_{W_1}(x)$.
С аналогични разсъждения получаваме $Range(f) = seg_{W_2}(y)$.
Понеже f е инекция, то $f : seg_{W_1}(x) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow seg_{W_2}(y)$. Но f запазва и наредбата, следователно f е изоморфизъм на $< seg_{W_1}(x), \leq_1^x >$ върху $< seg_{W_2}(y), \leq_2^y >$. Така $< x, y > \in f$. Следователно $x \in Dom(f)$ и $y \in Range(f)$. Това е Абсурд!
Следователно $Dom(f) = W_1 \ \vee \ Range(f) = W_2$.

Възможни са три случая.

Случай 1 $Dom(f) = W_1$ & $Range(f) = W_2$:

Тогава понеже f е изоморфизъм, то $\mathcal{W}_1 \cong \mathcal{W}_2$.

Случай 2 $Dom(f) = W_1$ & $Range(f) \neq W_2$:

Тогава понеже $Rage(f)$ е начален сегмент на W_2 относно $\leq_2$ и f е изоморфизъм, то $\mathcal{W}_1$ е изоморфно на $Range(f)$, което е собствен начален сегмент на $\mathcal{W}_2$.

Случай 3 $Dom(f) \neq W_1$ & $Range(f) = W_2$:

Тогава понеже $Dom(f)$ е начален сегмент на W_1 относно $\leq_1$ и f е изоморфизъм, то $\mathcal{W}_2$ е изоморфно на $Dom(f)$, което е собствен начален сегмент на $\mathcal{W}_1$.

Лема за най-голетмия елемент.

Нека $< L, \leq_L >$ е линейно наредено множество. Нека $\emptyset \neq M \subseteq L$ и M е крайно. Тогава в M има най-голям елемент относно $\leq_L$.

Доказателство:

Нека $< L, \leq_L >$ е линейно наредено множество. С индукция в множеството на естествените числа ще докажем следното твърдение:

$$\forall n \forall M(\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{s(n)}} \ \&\ M \subseteq L \implies (\exists m \in M)(\forall x \in M)(x \leq_L m)).$$

База: $n = 0$

Нека $M \subseteq L$ и $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{1}}$. Тогава $M = \{m\}$ и понеже $\leq_L$ е рефлексивна в L, то $m \leq m$ и значи $(\forall x \in M)(x \leq_L m)$.

Индукционно предположение:

Нека $n \in \omega$ и $\forall M(\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{s(n)}} \ \&\ M \subseteq L \implies (\exists m \in M)(\forall x \in M)(x \leq_L m))$.

Индукционна стъпка:

Нека $M \subseteq L$ и $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{s(s(n))}}$. Тогава $M \neq \emptyset$. Нека тогава $a \in M$. Тогава очевидно $\overline{\overline{M \setminus \{a\}}} = \overline{\overline{s(n)}}$ и $M \setminus \{a\} \subseteq L$. Тогава по И.П. за $M \setminus \{a\}$, следва че $(\exists b \in M \setminus \{a\})(\forall x \in M \setminus \{a\})(x \leq_L b)$. Нека тогава $b \in M$ и $(\forall x \in M \setminus \{a\})(x \leq_L b)$. Понеже $< L, \leq_L >$ е линейно наредено множество, то са възможни два случая.

Случай 1 $a \leq_L b$:

Нека $x \in M$. Тогава, ако $x \in M \setminus \{a\}$, то $x \leq_L b$ понеже b е най-голямия относно $\leq_L$ в $M \setminus \{a\}$, ако пък $x = a$, то директно $x \leq_L b$. Следователно $b \in M$ и $(\forall x \in M)(x \leq_L b)$.

Случай 2 $b \leq_L a$:

Нека $x \in M$. Тогава, ако $x \in M \setminus \{a\}$, то $x \leq_L b$ понеже b е най-голямия относно $\leq_L$ в $M \setminus \{a\}$ и от $b \leq_L a$ и транзитивността на $\leq_L$, следва че $x \leq_L a$, ако пък $x = a$, то от рефлексивността на $\leq_L$ следва $x \leq_L a$. Следователно $a \in M$ и $(\forall x \in M)(x \leq_L a)$.

Така и в двата случая е в сила $(\exists m \in M)(\forall x \in M)(x \leq_L m))$. Но M е произволно, следователно след обобщение получаваме
$\forall M(\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{s(s(n))}} \ \& \ M \subseteq L \implies (\exists m \in M)(\forall x \in M)(x \leq_L m))$.

Заключение:

$$\forall n \forall M(\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{s(n)}} \ \& \ M \subseteq L \implies (\exists m \in M)(\forall x \in M)(x \leq_L m)).$$

□

Лема за добрата наредба и ординала.

Нека $< W, \leq_W >$ е добре наредено множество. Тогава има при това единствен ординал α, такъв че $< W, \leq_W > \cong < \alpha, \leq_\alpha >$.

Доказателство:

Да допуснем, че за всяко α, $<\alpha, \leq_\alpha>$ е изоморфно със собствен начален сегмент на $<W, \leq_W>$. Тогава по аксиомната схема за замяната има множество A, такова че
$(\forall w \in W)(\exists a \in A)(ord(a) \ \& <seg(w), \leq^w_W> \cong <a, \leq_a>)$. Нега тогава A е такова множество и нека $B = \{a \mid a \in A \ \& \ ord(a)\}$. Тогава по аксиомната схема за отделянето B е множество. Нека тогава α е произволен ординал, тогава според допускането $(\exists w \in W)(<seg(w), \leq^w_W> \cong <a, \leq_a>)$. Тогава $a \in A$, но в сила е и $ord(a)$. Следователно $a \in B$. Следователно $\forall\alpha(\alpha \in B)$. Но това е Абсурд, защото няма множество, което да съдържа всички ординали! Но от Задача 5. следва, че наредбата на всеки ординал е сравнима с $\leq_W$. Тогава нека
$\alpha = \mu\beta[(\exists\gamma \leq \beta)(<W, \leq_W> \cong <\gamma, \leq_\gamma>)]$. Да допуснем, че $<W, \leq_W>$ не е изоморфно с $<\alpha, \leq_\alpha>$. Тогава от свойството, което α минимизира има ординал $\gamma \leq \alpha$, такъв че $<W, \leq_W> \cong <\gamma, \leq_\gamma>$. Нека тогава $\gamma \leq \alpha$ и $<W, \leq_W> \cong <\gamma, \leq_\gamma>$. Понеже $<W, \leq_W>$ не е изоморфно с $<\alpha, \leq_\alpha>$, то $\gamma < \alpha$ и $<W, \leq_W> \cong <\gamma, \leq_\gamma>$. Но това противоречи на факта, че α е най-малкият ординал със свойството $(\exists\delta \leq \alpha)(<W, \leq_W> \cong <\delta, \leq_\delta>)$. Следователно $<W, \leq_W> \cong <\alpha, \leq_\alpha>$. От фактите, че има единствен изоморфизъм между две добри наредби и изоморфизма на добри наредби е рефлексивно, симетрично и транзитивно свойство е ясно, че α е единствения ординал, за който стандартната ординална наредба е изоморфна с $\leq_W$. $\square$

Лема за образа на функция с краен домейн.

Нека $f : A \to B$ и нека A е крайно. Тогава $Range(f)$ е крайно и $\overline{\overline{Range(f)}} \leq \overline{\overline{A}}$.

Доказателство:

Нека $g = \{<b, f^{-1}[\{b\}]> \mid b \in Range(f)\}$. От аксиомните схеми за замяна и отделяне е ясно, че g е множество. Очевидно $Rel(g)$. Очевидно и $Funct(g)$. Нека $b_1 \in Range(f)$ и $b_2 \in Range(f)$ и $g(b_1) = g(b_2)$. Тогава $f^{-1}[\{b_1\}] = f^{-1}[\{b_2\}]$. Но тогава $\{b_1\} = \{b_2\}$ и значи $b_1 = b_2$. Следователно g е инекция. Следователно $g : Range(f) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Range(g)$. Нека

$b \in Range(f)$. Тогава $(\exists a \in A)(f(a) = b)$. Нека тогава $a \in A$ и $f(a) = b$. Тогава $a \in f^{-1}[\{b\}]$ и значи $g(b) \neq \emptyset$. Тогава $Range(g)$ е множество от непразни множества. Но очевидно $Range(g) \subseteq \mathcal{P}(A)$. Понеже A е крайно, то знаем и че $\mathcal{P}(A)$ е крайно. Следователно $Range(g)$ е крайно множество от непразни множества. Тогава $Range(g)$ има функция на избора. Нека тогава h е функция на избора за $Range(g)$ (Правим креан избор). Тогава $(\forall b \in Range(f))(h(g(b)) \in g(b) \subseteq A)$. Следователно $Range(g \circ h) \subseteq A$. Но A е крайно и значи $Range(g \circ h)$ също е крайно. Но тогава $g \circ h : Range(f) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow Range(g \circ h)$.
Следователно $\overline{\overline{Range(f)}} = \overline{\overline{Range(g \circ h)}} \leq \overline{\overline{A}}$. $\square$

Задача 6.

Нека A е множество. Тогава A е крайно тогава и само тогава когато има бинарна релация R, такава че $< A, R >$ и $< A, R^{-1} >$ са добре наредени.

Решение:

$(\implies)$ **Нека A е крайно.**

Тогава нека n е такова, че $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{n}}$. Нека тогава $f : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow n$. Дефинираме релация $\leq_f$ в A така

$$\leq_f = \{u \mid u \in A \times A \ \& \ \exists a \exists b(u =< a, b > \ \& \ f(a) \leq_n f(b))\}.$$

По аксиомната схема за отделянето следва, че $\leq_f$ е множество. От факта, че отделяме от $A \times A$ следва $Rel(\leq_f)$.

Нека $a \in A$. Тогава $< a, a > \in A \times A$, но също така $f(a) \leq_n f(a)$. Следователно $a \leq_f a$. Следователно $\leq_f$ е рефлексивна.

Нека $b \in A$ и $c \in A$ и $b \leq_f c$ и $c \leq_f b$. Тогава $f(b) \leq_n f(c)$ и $f(c) \leq_n f(b)$. Но $\leq_n$ е антисиметрична, следователно $f(b) = f(c)$. Но f е бикеция следователно $b = c$. Следователно $\leq_f$ е антисиметрична.

Нека $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$ и $x \leq_f y$ и $y \leq_f z$. Тогава $f(x) \leq_n f(y)$ и $f(y) \leq_n f(z)$. Но $\leq_n$ е транзитивна, следователно $f(x) \leq_n f(z)$. Следователно $x \leq_f z$. Следователно $\leq_f$ е транзитивна.

Следователно $\leq_f$ задава частична наредба в A.

Ще докажем, че всяко непразно подмножество на A има най-голям и най-малък елемент.

Нека $B \subseteq A$ и $B \neq \emptyset$. Нека $C = f[B]$. Тогава $C \subseteq n$ и $C \neq \emptyset$. Тогава C има най-малък елемент спрямо $\leq_n$. Нека това е m. Също така понеже n е крайно и добре наредено, то C е крайно и n е линейно наредено. Тогава според Лемата за най-големия елемент C има най-голям елемент спрямо $\leq_n$. Нека това е k. Тогава в сила е $(\forall l \in C)(m \leq_n l \; \& \; l \leq_n k)$. Нека $u \in B$. Тогава $m \leq_n f(u)$ и $f(u) \leq_n k$. Следователно $f^{-1}(m) \leq_f u$ и $u \leq_f f^{-1}(k)$. Понеже $m \in C$, $k \in C$, $C = f[B]$ и f е биекция, то $f^{-1}(m) \in B$ и $f^{-1}(k) \in B$. Така $f^{-1}(m)$ е най-малкия за B спрямо $\leq_f$ и $f^{-1}(k)$ е най-големия за B спрямо $\leq_f$. Но тогава $f^{-1}(m)$ е най-малкия за B спрямо $\leq_f$ и $f^{-1}(k)$ е най-малкия за B спрямо $\geq_f$. Понеже B беше произволно, то следва че $< A, \leq_f >$ и $< A, \geq_f >$ са добре наредени множества.

($\Longleftarrow$) Нека има бинарна релация R, таква че $< A, R >$ и $< A, R^{-1} >$ са добре наредени.

Нека тогава R е такава бинарна релация, че $< A, R >$ и $< A, R^{-1} >$ са добре наредени. $< A, R >$ е добре наредено тогава по Лемата за добрата наредба и ординала има ординал α, такъв че $< A, R > \cong < \alpha, \leq_\alpha >$. Нека тогава α е такъв че $< A, R > \cong < \alpha, \leq_\alpha >$. Нека тогава g е единствения изоморфизъм на $< A, R >$ върху $< \alpha, \leq_\alpha >$. Допускаме, че $\omega \leq \alpha$. Тогава $\omega \subseteq \alpha$ по свойствата на ординалите. Понеже $0 \in \omega$, то $\emptyset \neq \omega \subseteq \alpha$. Нека $D = g^{-1}[\omega]$. Тогава $\emptyset \neq D \subseteq A$ и значи D има най-малък елемент относно R^{-1}. Тогава нека $y \in D$ е такъв, че $(\forall d \in D)(< y, d > \in R^{-1})$. Следователно $(\forall d \in D)(< d, y > \in R)$. Следователно $(\forall d \in D)(g(d) \leq_\alpha g(y))$. Но $g(y) \in \omega$ и $s(g(y)) \in \omega$ и $g(y) < s(g(y))$ и $\neg(s(g(y)) \leq g(y))$. Следователно допускането $\omega \leq \alpha$ доведе до Абсурд, но от свойството трихотомия на сравнението на ординали следва $\alpha < \omega$. Следователно $\alpha \in \omega$ и значи $Nat(\alpha)$. Но понеже $g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \alpha$, то $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\alpha}}$ и значи A е крайно. $\square$

Задача 7.

Нека A е множество. Тогава A е крайно тогава и само тогава когато За всяко непразно подмножество B на A $< B, \subseteq >$ има максимален елемент.

Решение:

($\Longrightarrow$) **Нека A е крайно множество.**

Нека n е такова, че $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{n}}$. Тогава както знаем $\mathcal{P}(A)$ е крайно множество от крайни множества. Нека тогава $B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Тогава B е крайно множество от крайни множества. Нека тогава
$C = \{k \mid k \in \omega \ \& \ (\exists M \in B)(\overline{\overline{k}} = \overline{\overline{M}})\}$. От аксиомната схема за отделянето C е множество. Ако разгледаме id_C, то очевидно $id_C : C \rightarrowtail s(n)$, понеже $(\forall S \in \mathcal{P}(A))(Fin(S) \ \& \ \overline{\overline{S}} \leq \overline{\overline{A}})$ и $\emptyset \subset B \subseteq \mathcal{P}(A)$ и следователно
$Fin(C) \ \& \ \emptyset \neq C \subseteq s(n)$. Но $< s(n), \leq_{s(n)} >$ е добре наредено и крайно и значи линейно наредено и крайно и тогава по Лемата за най-големия елемент C има най-голям елемент. Нека това е m. Но $m \in C$ следователно $(\exists S \in B)(\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{m}})$. Нека тогава $S \in B$ и $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{m}}$. Да допуснем, че S не е максимален за B спрямо $\subseteq$. Тогава $(\exists Y \in B)(S \subset Y)$. Нека тогава $Y \in B$ и $S \subset Y$. Тогава понеже $Y \in B$, то $Fin(Y)$ и тогава $\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{Y}}$. Нека l е такова, че $\overline{\overline{l}} = \overline{\overline{Y}}$. Тогава е ясно, че $m < l$. От $Y \in B$ следва, че $l \in C$. Но тогава $l \leq m$, което е Абсурд! Следователно S е максимален за B спрямо $\subseteq$. Но понеже B е произволно, то след обобщение получаваме, че всяко непразно подмножество на A има максимален елемент спрямо $\subseteq$.

($\Longleftarrow$) **Нека всяко непразно подмножество на A има максимален елемент спрямо $\subseteq$.**

Нека тогава разгледаме $P = \{T \mid T \in \mathcal{P}(A) \ \& \ Fin(T)\}$. По аксиомната схема за отделянето P е множество. При това очевидно $P \subseteq \mathcal{P}(A)$. Също така понеже $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ и $Fin(\emptyset)$, то $\emptyset \in P$ и значи $P \neq \emptyset$. Но тогава P има максимален елемент относно $\subseteq$. Нека тогава $D \in P$ и $\neg(\exists M \in P)(D \subset M)$. Понеже $D \in P$, то $D \subseteq A$ и $Fin(D)$. Да допуснем, че $D \neq A$. Тогава $A \setminus D \neq \emptyset$. Нека тогава $x \in A \setminus D$. Тогава $D \cup \{x\} \subseteq A$ и както знаем $Fin(D \cup \{x\})$. Следователно $D \cup \{x\} \in P$ и $D \subset D \cup \{x\}$. Но това е Абсурд, защото D е максимален относно $\subseteq$. Следователно $A = D$ и така $Fin(A)$. $\square$

Задача 8.

Част 1 (ZF). $\forall A(\exists B(B \subset A \,\&\, \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}) \implies \neg Fin(A))$.

Твърдението е логически еквивалентно с:
$\forall A(Fin(A) \implies (\forall B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{A\})(\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}))$, което и ще докажем.

Нека A е крайно множество. Нека $B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$. Тогава понеже A е крайно, то както знаем и B е крайно. Обаче понеже $B \subset A$, то $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$ и следователно $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$. $\square$

Част 2 (ZF + ACC).

$$\forall A(\neg Fin(A) \implies (\exists B \in \mathcal{P}(A) \setminus A)(\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}))$$

Нека A е безкрайно множество, тоест не е крайно. Първо с индукция ще покажем, че $\forall n(\exists S \in \mathcal{P}(A))(\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{n}})$.

База: $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ и $\emptyset = 0$.

Индукционна хипотеза: Нека n е такова, че $(\exists S \in \mathcal{P}(A))(\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{n}})$.

Индукционна стъпка: От И.Х. знаем, че $(\exists S \in \mathcal{P}(A))(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{n}})$. Нека тогава $X \in \mathcal{P}(A)$ и $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{n}}$. Ако допуснем, че $A \setminus X = \emptyset$, то $X = A$ и значи $Fin(A)$, което е Абсурд! Тогава $A \setminus X \neq \emptyset$. Нека тогава $a \in A \setminus X$. Тогава както знаем $\overline{\overline{X \cup \{a\}}} = \overline{\overline{s(n)}}$ и $X \cup \{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

Заключение: $\forall n(\exists S \in \mathcal{P}(A))(\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{n}})$.

Както знаем $\forall n\ Fin(\mathcal{P}(n))$. Нека тогава
$U = \{P \mid P \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \,\&\, \exists n(\forall S \in P)(\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(n)}})\}$. Тогава по аксиомната схема за отделянето U е множество. От $\forall n(\exists S \in \mathcal{P}(A))(\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{n}})$ и $\forall n\ Fin(\mathcal{P}(n))$ следва $(\forall P \in U)(P \neq \emptyset)$. Нека
$f = \{< n, P > \mid n \in \omega \,\&\, P \in U \,\&\, (\forall S \in P)(\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(n)}})\}$. По аксиомните схеми за замяна и отделяне следва, че f е множество. От $f \subseteq \omega \times U$ следва

$Rel(f)$. От факта $\forall n \forall m(n \neq m \iff \overline{\overline{P(n)}} \neq \overline{\overline{P(m)}})$ следва, че $f : \omega \rightarrowtail U$. Очевидно $Range(f) = U$ и значи $f : \omega \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow U$. Следователно U е изброимо. Но също така U е множество от непразни множества. Тогава от (ACC) U има функция на избора. Нека тогава g е функция на избора за U. Тогава очевидно $\forall n((f \circ g)(n) \in f(n) \;\&\; \overline{\overline{(f \circ g)(n)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(n)}} \;\&\; (f \circ g)(n) \subseteq A)$. Нека

$$
\begin{aligned}
&G(x, y) \leftrightharpoons \\
&(Funct(x) \;\&\; (\exists n \in \omega)(Dom(x) = n \;\&\; y = (f \circ g)(n) \setminus (\cup Range(x))) \\
&\vee \\
&(\neg(Funct(x) \;\&\; (\exists n \in \omega)(Dom(x) = n)) \;\&\; y = \emptyset)
\end{aligned}
$$

Очевидно G задава формулна операция. Тогава според Теоремата за трансфинитна рекурсия има при това единствена формулна операция F такава, че $\forall \alpha(F(\alpha) = G(F_{\restriction \alpha}))$. Тогава нека $h = F_{\restriction \omega}$. Тогава очевидно $\forall n(h(n) = (f \circ g)(n) \setminus (\cup Range(h_{\restriction n})))$.

По индукция ще докажем $\forall n(\overline{\overline{\cup Range(h_{\restriction n})}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(n) \setminus \{\emptyset\}}} \;\&\; h(n) \neq \emptyset)$.

База: $0 = \emptyset$ и значи $Range(h_{\restriction 0}) = Range(\emptyset) = \emptyset$. Както видяхме $\mathcal{P}(0) \setminus \{\emptyset\} = \emptyset$. Следователно $\overline{\overline{\cup Range(h_{\restriction 0})}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(0) \setminus \{\emptyset\}}}$.
Имаме и $h(0) = (f \circ g)(0) \setminus (\cup Range(h_{\restriction 0})) = (f \circ g)(0) \setminus \emptyset = (f \circ g)(0)$.
Но $\overline{\overline{(f \circ g)(0)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(0)}} = \overline{\overline{\{\emptyset\}}} = \overline{\overline{\{0\}}} = \overline{\overline{1}}$ и така $\exists e(h(0) = \{e\})$.
Следователно $h(0) \neq \emptyset$.

Индукционна хипотеза: Нека $n \in \omega$ е такова, че
$\overline{\overline{\cup Range(h_{\restriction n})}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(n) \setminus \{\emptyset\}}} \;\&\; h(n) \neq \emptyset$.

Индукционна стъпка: $Range(h_{\restriction s(n)}) = Range(h_{\restriction n}) \cup \{h(n)\}$.
$h(n) = (f \circ g)(n) \setminus (\cup Range(h_{\restriction n}))$. Също така
$\mathcal{P}(s(n)) = \mathcal{P}(n \cup \{n\}) = \mathcal{P}(n) \cup \{n \cup p \mid p \in \mathcal{P}(n)\}$. И тогава
$\mathcal{P}(s(n)) \setminus \{\emptyset\} = (\mathcal{P}(n) \setminus \emptyset) \cup \{n \cup p \mid p \in \mathcal{P}(n)\}$.
От И.Х. $\overline{\overline{\cup Range(h_{\restriction n})}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(n) \setminus \{\emptyset\}}}$.
Нека тогава $u : \cup Range(h_{\restriction n}) \rightarrowtail \mathcal{P}(n) \setminus \{\emptyset\}$. Имаме още $\overline{\overline{(f \circ g)(n)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(n)}}$.
Нека тогава $v : (f \circ g)(n) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(n)$. Но $h(n) \subseteq (f \circ g)(n)$ и значи $v_{\restriction h(n)} : h(n) \rightarrowtail \mathcal{P}(n)$. Очевидно $r : \mathcal{P}(n) \to \{n \cup p \mid p \in \mathcal{P}(n)\}$, за която $r(p) = n \cup p$ е биекция. Следователно $v_{\restriction h(n)} \circ r : h(n) \rightarrowtail \{n \cup p \mid p \in \mathcal{P}(n)\}$.

В сила е $\cup Range(h_{\restriction s(n)}) = (\cup Range(h_{\restriction n})) \cup h(n)$. Но
$h(n) = (f \circ g)(n) \setminus (\cup Range(h_{\restriction n}))$. Следователно $(\cup Range(h_{\restriction n})) \cap h(n) = \emptyset$. Очевидно и $P(n) \cap \{n \cup p \mid p \in \mathcal{P}(n)\} = \emptyset$. Тогава е приложима Лемата за разделените инекции. От нея следва
$u \cup (v_{\restriction h(n)} \circ r) : \cup Range(h_{\restriction s(n)}) \rightarrowtail \mathcal{P}(s(n)) \setminus \{\emptyset\}$.
Следователно $\overline{\overline{\cup Range(h_{\restriction s(n)})}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(s(n)) \setminus \{\emptyset\}}}$.
В сила са:

$$\begin{aligned} h(s(n)) &= (f \circ g)(s(n)) \setminus (\cup Range(h_{\restriction s(n)}) \\ \overline{\overline{(f \circ g)(s(n))}} &= \overline{\overline{\mathcal{P}(s(n))}} \ \& \ Fin((f \circ g)(s(n))) \\ \overline{\overline{\cup Range(h_{\restriction s(n)})}} &\leq \overline{\overline{\mathcal{P}(s(n)) \setminus \{\emptyset\}}} \end{aligned}$$

Да допуснем, че $h(s(n)) = \emptyset$. Тогава получаваме $\overline{\overline{\cup Range(h_{\restriction s(n)})}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(s(n))}}$, което е Абсурд! Следователно $h(s(n)) \neq \emptyset$.

Заключение: $\forall n(\overline{\overline{\cup Range(h_{\restriction n})}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(n) \setminus \{\emptyset\}}} \ \& \ h(n) \neq \emptyset)$.

Да допуснем, че $\exists n \exists m(n \neq m \ \& \ h(n) \cap h(m) \neq \emptyset)$. Нека тогава n и m са такива, че $n \neq m \ \& \ h(n) \cap h(m) \neq \emptyset$. Тогава Б.О.О. $m < n$. Но $h(n) = (f \circ g)(n) \setminus (\cup Range(h_{\restriction n}))$ и $h(m) \subseteq \cup Range(h_{\restriction n})$, следователно $h(n) \cap h(m) = \emptyset$. Така $h(n) \cap h(m) \neq \emptyset$ и $h(n) \cap h(m) = \emptyset$, което е Абсурд! Следователно $\forall n \forall m(n \neq m \iff h(n) \cap h(m) \neq \emptyset)$. Така директно следва $h : \omega \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Range(h)$. Понеже $\forall n((f \circ g)(n) \subseteq A)$ и от до тук доказаното получаваме $\forall n(h(n) \subseteq A \ \& \ h(n) \neq \emptyset)$. Следователно $Range(h)$ е изброимо множество от непразни множества. Следователно от ACC $Range(h)$ има функция на избора. Нека тогава t е функция на избора за $Range(h)$. Така $\forall n((h \circ t)(n) \in h(n) \ \& \ (h \circ t)(n) \in A)$. Обаче $Range(h)$ е множество от непресичащи се множества, от където $(h \circ t) : \omega \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Range(h \circ t)$ и $Range(h \circ t) \subseteq A$. Нека $M = Range(h \circ t)$. Нека $y = h \circ t$. Нека $z = (y^{-1} \circ s_{\restriction \omega}) \circ y$. Очевидно $z : M \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow M \setminus \{y(0)\}$. Тогава прилагаме Лемата за разделените инекции и получаваме $z \cup id_{\restriction A \setminus M} : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \setminus \{y(0)\}$. Така от $A \setminus \{y(0)\} \subseteq A$ и $y(0) \in M \subseteq A$ следва $A \setminus \{y(0)\} \subset A$ и $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \setminus \{y(0)\}}}$.
$\square$

Задача 9. Да се докаже

$$\forall A \forall a \forall b(a \notin A \ \& \ b \notin \mathcal{P}(A) \ \& \ \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{a\}}} \implies \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{b\}}})$$

Решение:

Нека A, a и b са такива, че $a \notin A \ \& \ b \notin \mathcal{P}(A) \ \& \ \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{a\}}}$. Понеже $id_{\mathcal{P}(A)} : \mathcal{P}(A) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$, то $id_{\mathcal{P}(A)} : \mathcal{P}(A) \rightarrowtail \mathcal{P}(A) \cup \{b\}$. Следователно $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{b\}}}$. Имаме $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{a\}}}$ тогава нека $f : A \cup \{a\} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$. Нека $g = f_{\restriction A}$ тогава $g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \setminus \{f(a)\}$. Нека тогава $h : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ и $(\forall S \in \mathcal{P}(A))(h(S) = g[S])$. Ще покажем, че h е инекция.
Нека $X \in \mathcal{P}(A)$ и $Y \in \mathcal{P}(A)$ и нека са такива, че $h(X) = h(Y)$. Тогава $g[X] = g[Y]$ и тогава понеже $g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \setminus \{f(a)\}$, то $X = g^{-1}[g[X]] = g^{-1}[g[Y]] = Y$. Следователно $(\forall X \in \mathcal{P}(A))(\forall Y \in \mathcal{P}(A))(h(X) = h(Y) \implies X = Y)$. Следователно $h : \mathcal{P}(A) \rightarrowtail \mathcal{P}(A)$. Понеже $f : A \cup \{a\} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$, то $f(a) \in A$ и значи $\{f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$. От $g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \setminus \{f(a)\}$, следва че $(\forall S \in \mathcal{P}(A))(h(S) = g[S] \subseteq A \setminus \{f(a)\})$. Следователно $(\forall S \in \mathcal{P}(A))(f(a) \notin h(S))$. Следователно $\{f(a)\} \notin Range(h)$. Тогава $Funct(\{< b, \{f(a)\} >\})$ и $b \notin Dom(h)$ и $\{f(a)\} \notin Range(h)$ и така по Лемата за разделените инекции $h \cup \{< b, \{f(a)\} >\} : \mathcal{P}(A) \cup \{b\} \rightarrowtail Range(h) \cup \{\{f(a)\}\}$. Също така имаме $(\forall S \in \mathcal{P}(A))(h(S) = g[S] \subseteq A \setminus \{f(a)\})$ и значи $Range(h) \subseteq \mathcal{P}(A)$. Но $f(a) \in A$ и така $Range(h) \cup \{\{f(a)\}\} \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A)$. Следователно $h \cup \{< b, \{f(a)\} >\} : \mathcal{P}(A) \cup \{b\} \rightarrowtail \mathcal{P}(A)$. Така $\overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{b\}}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$ и от Теоремата на Кантор-Шрьодер-Бернщайн следва, че $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{b\}}}$.
$\square$

Задача 12. В (ZFC) всяко множество от непразни крайни множества има минимална трансверзала

$\forall A((\forall x \in A)(\exists n \in \omega)(\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{s(n)}}) \implies \exists Y((\forall x \in A)(Y \cap x \neq \emptyset) \ \& \ \forall Z((Z \subseteq Y \ \& \ (\forall x \in A)(Z \cap x \neq \emptyset)) \implies Z = Y)))$

Решение:

Нека A е такова, че $(\forall x \in A)(\exists n \in \omega)(\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{s(n)}})$. Нека
$T = \{Y \mid Y \in \mathcal{P}(\cup A) \ \& \ (\forall x \in A)(Y \cap x \neq \emptyset)\}$. T е множество, защото отделяме от $\mathcal{P}(\cup A)$ със свойството "е трансверзала за A". Също така $< T, \supseteq_T>$ е частично наредено множество. В (ZFC) е сила Лемата на Цорн, така че ще я приложим. Първо в сила е следното $(\forall x \in A)(x \cap (\cup A) = x \neq \emptyset)$. Следователно $\cup A \in T$ и значи $T \neq \emptyset$. Нека C е произволна непразна верига в $< T, \supseteq_T>$. Тогава $< C, \supseteq_T \cap (C \times C) >$ е линейно наредено множество. Нека $Y = \cap C$. Тогава $(\forall X \in C)(C \supseteq Y)$. Понеже $C \subseteq T \subseteq \mathcal{P}(\cup A)$, то $Y \in \mathcal{P}(\cup A)$. Да допуснем, че $Y \notin T$. Тогава $(\exists x \in A)(Y \cap x = \emptyset)$. Нека тогава $x \in A$ и $Y \cap x = \emptyset$. Тогава
$(\forall s \in x)(x \notin Y)$. Тогава $(\forall s \in x)(\exists t \in C)(x \notin t)$. Нека
$\varphi(s, U, x, C) \leftrightharpoons (s \in x \ \& \ U = \{t \mid t \in C \ \& \ s \notin t\}) \ \vee \ (s \notin x \ \& \ U = \emptyset)$. Очевидно φ е функционално свойство относно s при фиксирани параметри x и C. Тогава по аксиомната схема за замяната относно φ и x с параметри x и C има множество B, такова че $(\forall s \in x)(\exists U \in B)(\varphi(s, U, x, C))$. Нека тогава $D = \{U \mid U \in B \ \& \ (\exists s \in x)(\varphi(s, U, x, C))\}$. D е множество според аксиомната схема за отделянето. Също така очевидно $D = \{U \mid (\exists s \in x)(U = \{t \mid t \in C \ \& \ s \notin t\})\}$ и $\overline{\overline{D}} \leq \overline{\overline{x}}$. Но x е крайно и непразно и значи D също. От $(\forall s \in x)(\exists t \in C)(x \notin t)$ следва, че $(\forall U \in D)(U \neq \emptyset)$. Тогава нека f е функция на избора за D (правим краен избор). Тогава очевидно $(\forall U \in D)(f(U) \in U \ \& \ (\exists s \in x)(f(U) \in C \ \& \ s \notin f(U)))$. Така $\emptyset \neq Range(f) \subseteq C$ и от Лемата за образа на фунцкия с креан домейн имаме $\overline{\overline{Range(f)}} \leq \overline{\overline{D}}$ значи $Range(f)$ е крайно и е подмножество на линейно наредено множество. Тогава по Лемата за най-големия елемент $Range(f)$ има най-голям елемент относно $\supseteq_T \cap (C \times C)$. Нека тогава $t \in Range(f)$ и $(\forall v \in Range(f))(t \subseteq v)$. Очевидно $\cap Range(f) \subseteq t$. Нека $w \in t$. Нека $r \in Range(f)$. Тогава понеже $t \subseteq r$, то $w \in r$. Така $(\forall v \in Range(f))(w \in v)$. Следователно $w \in \cap Range(f)$. Следователно $t \subseteq \cap Range(f)$. Понеже $t \in Range(f) \subseteq C$, то $t \in C$. Нека $s \in x$, ако допуснем, че $s \in t$, то $(\forall v \in Range(f))(s \in v)$. Но тогава $(\forall U \in D)(s \in f(U))$. Нека $U \in D$ и $\varphi(s, U, x, C)$. Тогава $(\forall v \in U)(s \notin v)$. В частност $s \notin f(U)$. Но това е Абсурд! Следователно $(\forall s \in x)(s \notin t)$. Следователно $t \cap x = \emptyset$. Но тогава $t \notin C$, което е Абсурд! Следователно $(\forall c \in C)(Y \supseteq_T c) \ \& \ Y \in T$. Така всяка непразна верига в $< T, \supseteq_T>$ има горна граница в T. Следователно по Лемата на Цорн в T има максимален елемент относно $\supseteq_T>$. Нека тогава $V \in T$ и V е максимален относно $\supseteq_T>$.

Тогава V е минимален относно $\subseteq_T$. Нека $Z \subseteq V$ и $(\forall a \in A)(Z \cap a \neq \emptyset)$. Тогава понеже $V \in \mathcal{P}(\cup A)$, то $Z \in \mathcal{P}(\cup A)$. Но тогава $Z \in T$. Понеже V е минимален относно $\subseteq_T$, то $Z \not\subset V$ и значи $Z = V$. $\square$

Задача 13.

Нека $\varphi(A, B, C) \leftrightharpoons$
$A \subseteq B \mathbin{\&} \forall f((f : C \to B) \implies (\cap Range(f) \in B \mathbin{\&} \cup Range(f) \in B))$.
Тогава $\forall C \forall A((A \neq \emptyset \mathbin{\&} C \neq \emptyset) \implies \exists! B(\varphi(A, B, C) \mathbin{\&} \forall D(\varphi(A, D, C) \implies B \subseteq D)))$.

Решение:

Нека A и C са непразни множества.

Наблюдение 1:

$(\forall a \in A)(a \subseteq \cup A) \implies (\forall a \in A)(a \in \mathcal{P}(\cup A)) \implies A \subseteq \mathcal{P}(\cup A)$ следователно $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$.

Наблюдение 2:

Нека $X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$. Нека $f : C \to X$. Тогава $Range(f) \subseteq X \subseteq \mathcal{P}(\cup A)$. Следователно $Range(f) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$. Но тогава очевидно
$\cap Range(f) \in \mathcal{P}(\cup A)$ и $\cup Range(f) \in \mathcal{P}(\cup A)$. Тогава по аксиомната схема за отделянето следните две са множества:

$$\{U \mid U \in \mathcal{P}(\cup A) \mathbin{\&} \exists g((g : C \to X) \mathbin{\&} U = \cap Range(g))\}$$
$$\{U \mid U \in \mathcal{P}(\cup A) \mathbin{\&} \exists g((g : C \to X) \mathbin{\&} U = \cup Range(g))\}$$

Нека тогава $N = \{U \mid U \in \mathcal{P}(\cup A) \mathbin{\&} \exists g((g : C \to X) \mathbin{\&} U = \cup Range(g))\}$ и $S = \{U \mid U \in \mathcal{P}(\cup A) \mathbin{\&} \exists g((g : C \to X) \mathbin{\&} U = \cap Range(g))\}$. Тогава очевидно $N \subseteq \mathcal{P}(\cup A)$ и $S \subseteq \mathcal{P}(\cup A)$. Следователно $N \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$ и $S \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$. Следователно $\cup\{X, N, S\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$.

Наблюдение 3:

По аксиомната схема за отделянето
$\{T \mid T \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A)) \mathbin{\&} A \subseteq T\}$ е множество.

Нека $S = \{T \mid T \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A)) \ \&\ A \subseteq T\}$. Очевидно $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$.
От Наблюдение 1 $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$, следователно
$A \subseteq \mathcal{P}(\cup A)$ и $\mathcal{P}(\cup A) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$. Следователно $\mathcal{P}(\cup A) \in S$.
Нека $Y \subseteq S$ е произволно и $Y \neq \emptyset$. Понеже $(\forall Z \in Y)(Z \in S)$,
то $(\forall Z \in Y)(A \subseteq Z \ \&\ Z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A)))$. Следователно
$A \subseteq \cap Y \ \&\ \cap Y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A))$. Следователно $\cap Y \in S$.
Следователно $(\forall Y \in \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\})(\cap Y \in S)$.

Същинско решение:

Нека $P = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup A)))$ и нека $S = \{T \mid T \in P \ \&\ A \subseteq T\}$.
Дефинираме три оператора. Нека $h_\cap : P \to P$, $h_\cup : P \to P$ и $h : S \to S$ и

$$(\forall X \in P)(h_\cap(X) = \{U \mid U \in \mathcal{P}(\cup A) \ \&\ \exists g((g : C \to X) \ \&\ U = \cap Range(g))\})$$
$$\&$$
$$(\forall X \in P)(h_\cup(X) = \{U \mid U \in \mathcal{P}(\cup A) \ \&\ \exists g((g : C \to X) \ \&\ U = \cup Range(g))\})$$
$$\&$$
$$(\forall X \in S)(h(X) = \cup\{X, h_\cap(X), h_\cup(X)\}).$$

От Наблюдение 2 е ясно, че $h_\cap$ и $h_\cup$ са коректно дефинирани.
Нека $X \in S$. Тогава $X \subseteq \cup\{X, h_\cap(X), h_\cup(X)\}$. Понеже $X \in S$, то $X \in P$ и $A \subseteq X$. Следователно $\cup\{X, h_\cap(X), h_\cup(X)\} \in P$ и $A \subseteq \cup\{X, h_\cap(X), h_\cup(X)\}$. Следователно $\cup\{X, h_\cap(X), h_\cup(X)\} \in S$. Тогава очевидно $h : S \to S$.
Нека $Y \in S$ и $Z \in S$ и $Y \subseteq Z$. От $Y \subseteq Z$ следва ${}^{C}Y \subseteq {}^{C}Z$. Тогава очевидно $h_\cap(Y) \subseteq h_\cap(Z)$ и $h_\cup(Y) \subseteq h_\cup(Z)$. Следователно очевидно $h(Y) \subseteq h(Z)$. Следователно h е монотонен в S. Но тогава от Наблюдение 3 следва, че е приложима Задача 3. Нека тогава B е най-малката неподвижна точка за h. Ще покажем, че $\varphi(A, B, C)$ е в сила. Понеже B е неподвижна точка за h, то $B \in S$ и значи $A \subseteq B$. Нека f е произволно, такова че $f : C \to B$. Нека $I = \cap Range(f)$ и $U = \cup Range(f)$. От Наблюдение 2 следва, че $I \in \mathcal{P}(\cup A)$ и $U \in \mathcal{P}(\cup A)$. Така $I \in h_\cap(B)$ и $U \in h_\cup(B)$. Но $B = h(B) = \cup\{B, h_\cap(B), h_\cup(B)\}$, следователно $h_\cap(B) \subseteq B$ и $h_\cup(B) \subseteq B$. Значи $I \in B$ и $U \in B$. Но f беше произволно, следователно $\varphi(A, B, C)$. Нека D е произволно и такова, че $\varphi(A, D, C)$. Тогава $A \subseteq D$. Но $A \subseteq \mathcal{P}(\cup A)$ и значи $\emptyset \neq A \subseteq (D \cap \mathcal{P}(\cup A))$. Нека $T = D \cap \mathcal{P}(\cup A)$. Тогава $A \subseteq T$ и $T \subseteq D$ и $T \subseteq \mathcal{P}(\cup A)$. Следователно $T \in P$ и $A \subseteq T$. Следователно $T \in S$. Понеже $T \subseteq T$, то $T \subseteq h(T)$. Нека $R \in h_\cap(T)$ и

R е произволно. Тогава $\exists g((g : C \to T)\ \&\ R = \cap Range(g))$. Нека тогава g е такова, че $g : C \to T$ и $R = \cap Range(g)$. Понеже $g : C \to T$ и $T \subseteq D$, то $g : C \to D$. Но тогава от $\varphi(A, D, C)$, следва че $R \in D$. Но $R \in h_{\cap}(T)$ и значи $R \in \mathcal{P}(\cup A)$. Така $R \in D$ и $R \in \mathcal{P}(\cup A)$, следователно $R \in T$. Но понеже R беше произволно, то $h_{\cap}(T) \subseteq T$. По аналогични разсъждения $h_{\cup}(T) \subseteq T$. Но също така $T \subseteq T$ и така $h(T) \subseteq T$. Следователно $h(T) = T$ и $T \in S$. Но B е най-малката неподвижна точка за h, следователно $B \subseteq T$. Но $T \subseteq D$, следователно $B \subseteq D$. Понеже D е произволно, то следва че $\forall D(\varphi(A, D, C) \implies B \subseteq D)$. Нека V е такова, че $\varphi(A, V, C)$ и $\forall D(\varphi(A, D, C) \implies V \subseteq D)$. Тогава понеже $\varphi(A, B, C)$, то $V \subseteq B$. Но от $\varphi(A, V, C)$ и доказаното следва, че $B \subseteq V$. Следователно $V = B$. Следователно B е единствено със свойството $\varphi(A, B, C)$ и $\forall D(\varphi(A, D, C) \implies B \subseteq D)$. $\square$

Задача 14.

Нека $< A, \leq_1 >$ е добре наредено множество и $\forall n(\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{n}})$. Тогава има добра наредба $\leq_2$ в A, такава че $< A, \leq_1 >$ и $< A, \leq_2 >$ не са изоморфни.

Решение:

От Лемата за добрата наредба и ординала има единствен ординал α, такъв че
$< A, \leq_1 > \cong < \alpha, \leq_\alpha >$. Нека тогава α е този ординал. Нека тогава
$g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \alpha$ е единствения изоморфизъм между $< A, \leq_1 >$ и $< \alpha, \leq_\alpha >$. Ако допуснем, че $\alpha < \omega$, то $\alpha \in \omega$ и $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{\alpha}}$, което е Абсурд. Следователно $\omega \leq \alpha$. Тогава $f(\beta) = \begin{cases} 0 & , \beta = \alpha \\ \beta & , \omega \leq \beta < \alpha \\ s(\beta) & , \beta < \omega \end{cases}$ е биекция от α към $s(\alpha)$. Но α е собствен начален сегмент на $s(\alpha)$ относно наредбата на $s(\alpha)$ по свойствата на ординалите. Следователно f не запазва наредбата, защото ако я запазваше f щеше да е изоморфизъм между $< \alpha, \leq_\alpha >$ и $< s(\alpha), \leq_{s(\alpha)} >$, което е невъзможно. Очевидно $g \circ f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow s(\alpha)$. В A въвеждаме релацията $\leq_2$ по следния начин $a_1 \leq_2 a_2 \iff < a_1, a_2 > \in A \times A\ \&\ (g \circ f)(a_1) \leq (g \circ f)(a_2)$. Очевидно $\leq_2$ е добра наредба в A пренесена от $< s(\alpha), \leq_{s(\alpha)} >$. Тоест $< A, \leq_2 > \cong < s(\alpha), \leq_{s(\alpha)} >$. Ако допуснем,

че $< A, \leq_1 > \cong < A, \leq_2 >$, то ще получим, че $< \alpha, \leq_\alpha > \cong < s(\alpha), \leq_{s(\alpha)} >$, защото свойството изоморфизъм на добри наредби е симетрично и транзитивно, което ще доведе до противоречие. Следователно $< A, \leq_1 >$ и $< A, \leq_2 >$ не са изоморфни. $\square$

Задача 15. $\forall A(\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{\mathcal{H}(A)}})$

Решение:

Нека $B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times \mathcal{H}(A))$. Тогава $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{\mathcal{H}(A)}}$.
Нека $zero : A \to \{0\} \times A$ е такава, че $(\forall a \in A)(zero(a) =< 0, a >)$.
Тогава очевидно $zero : A \rightarrowtail B$ и значи $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$. Да допуснем, че $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.
Нека тогава $f : B \twoheadrightarrow A$. Тогава $f_{\upharpoonright\{1\}\times\mathcal{H}(A)} : \{1\} \times \mathcal{H}(A) \rightarrowtail A$.
Нека $one : \mathcal{H}(A) \to \{1\} \times \mathcal{H}(A)$ е такава, че $(\forall x \in \mathcal{H}(A))(one(x) =< 1, x >)$. Очевидно $one : \mathcal{H}(A) \twoheadrightarrow \{1\} \times \mathcal{H}(A)$. Следователно $one \circ f : \mathcal{H}(A) \rightarrowtail A$. Така $\overline{\overline{\mathcal{H}(A)}} \leq \overline{\overline{A}}$, което е Абсурд! Следователно $\forall A(\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{\mathcal{H}(A)}})$. $\square$