Решени задачи по СЕП

Иво Стратев

25 юни 2019 г.

Зад. 1. от второ контролно по СЕП (10/05/2019)

Да се докаже, че операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$, дефиниран с условието

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y, & f(x,y) \simeq 0 \\ f(x,y+1), & f(x,y) > 0 \\ \neg!, & \neg! f(x,y) \end{cases}$$

има безброй много неподвижни точки.

Решение:

Забелязваме, че когато $f(x,y) > 0$, то $\Gamma(f)(x,y)$ зависи само от y. Тоест свободно можем да се възползваме от факта, че стойността x остава фиксирана!.
Понеже $fix(\Gamma) = \{f \in \mathcal{F}_2 \mid \Gamma(f) = f\} \subseteq \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_2$ е неизброймо безкрайно множество, то е напълно достатъчно да покажем, че за някое $S \subseteq \mathcal{F}_2$, което е неизброймо безкрайно ще е изпълнено $S \subseteq fix(\Gamma)$.
Нека $F_1^+ \rightleftharpoons \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+\}$ и нека $F_2^+ \rightleftharpoons \{f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^+\}$.
Нека $\Delta : F_1^+ \to F_2^+$ и $\Delta(f)(x,y) = f(x)$.
Нека $S \rightleftharpoons \{\Delta(f) \mid f \in F_1^+\}$.
Очевидно S е неизброймо безкрайно понеже F_1^+ е и $S \subseteq F_2^+ \subseteq \mathcal{F}_2$.
Ще докажем, че $S \subseteq fix(\Gamma)$.
Нека $f \in S$ тогава $(\exists h \in F_1^+)[f = \Delta(h)]$. Нека тогава $h \in F_1^+$ и $f = \Delta(h)$.
Имаме $(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[f(x,y) = \Delta(h)(x,y) = h(x) > 0]$.
Нека $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ тогава $\Gamma(f)(x,y) \simeq f(x,y+1) = h(x) = f(x,y)$.
Следователно $(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[\Gamma(f)(x,y) = f(x,y)]$. Тоест $f \in fix(\Gamma)$.
Следователно $(\forall f \in S)[f \in fix(\Gamma)]$. Следователно $S \subseteq fix(\Gamma)$.
Извод: $fix(\Gamma)$ е неизброймо безкрайно и значи има безброй много неподвижни точки.

Зад. 2. от второ контролно по СЕП (10/05/2019)

Нека операторът $\Gamma\ :\ \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ е дефиниран по следния начин:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ \dfrac{x}{2}, & x > 1\ \&\ x \equiv 0 \pmod 2 \\ f\left(f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right), & x > 1\ \&\ x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Докажете, че:
а) Γ е компактен (непрекъснат) оператор.
б) $(\forall x \in \mathbb{N})\left[!f_\Gamma(x)\ \&\ x > 1 \implies f_\Gamma(x) \leq \dfrac{x}{2}\right]$, където $f_\Gamma = lfp(\Gamma)$.

Решение:

а)

Γ е компактен (непрекъснат) оператор, когато Γ е монотоннен и краен, което ще докажем.
Нека $f,\ g \in \mathcal{F}_1$ и $f \subseteq g$. Нека $x \in Dom(\Gamma(f))$.

- $x \leq 1$

  Имаме $\Gamma(f)(x) \simeq 1 \simeq \Gamma(g)(x)$.

- $x > 1\ \&\ x \equiv 0 \pmod 2$

  Имаме $\Gamma(f)(x) \simeq \dfrac{x}{2} \simeq \Gamma(g)(x)$.

- $x > 1\ \&\ x \equiv 1 \pmod 2$

  Имаме $!\Gamma(f)(x)$ значи $!f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\ \&\ !f\left(f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right)$.

  Следователно $!g\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\ \&\ !g\left(g\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right)$ и

  $g\left(\dfrac{3x+1}{2}\right) = f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)$ и $g\left(g\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right) = f\left(f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right)$.
  Понеже $f \subseteq g$.

  Така $\Gamma(f)(x) \simeq f\left(f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right) = f\left(g\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right) =$
  $g\left(g\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right) \simeq \Gamma(g)(x)$.

Така $!\Gamma(f)(x) \implies \Gamma(f)(x) \simeq \Gamma(g)(x)$.
Следователно $(\forall x \in \mathbb{N})[!\Gamma(f)(x) \implies \Gamma(f)(x) \simeq \Gamma(g)(x)]$.
Така $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$. От тук $(\forall (f,g) \in \mathcal{F}_1^2)[f \subseteq g \implies \Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)]$.
Тоест Γ е монотоннен. (1)
Нека $h \in \mathcal{F}_1$ и нека $x \in Dom(\Gamma(h))$.

- $x \leq 1$

  Имаме $\Gamma(h)(x) \simeq 1 \simeq \Gamma(\emptyset)(x)$ и очевидно $\emptyset \underset{fin}{\subseteq} h$.

- $x > 1 \ \& \ x \equiv 0 \pmod 2$

  Имаме $\Gamma(h)(x) \simeq \dfrac{x}{2} \simeq \Gamma(\emptyset)(x)$ и очевидно $\emptyset \underset{fin}{\subseteq} h$.

- $x > 1 \ \& \ x \equiv 1 \pmod 2$

  Имаме

  $\Gamma(h)(x) \simeq h\left(h\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right) \simeq \Gamma\left(h \restriction \left\{\dfrac{3x+1}{2}, h\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right\}\right)(x)$

  и очевидно $h \restriction \left\{\dfrac{3x+1}{2}, h\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right\} \underset{fin}{\subseteq} h$.

Следователно $(\forall x \in Dom(\Gamma(h)))(\exists \theta \in \mathcal{F}_1)[\theta \underset{fin}{\subseteq} h \ \& \ \Gamma(h)(x) \simeq \Gamma(\theta)(x)]$.
Следователно
$(\forall h \in \mathcal{F}_1)(\forall x \in \mathbb{N})[!\Gamma(h)(x) \implies (\exists \theta \in \mathcal{F}_1)[\theta \underset{fin}{\subseteq} h \ \& \ \Gamma(h)(x) \simeq \Gamma(\theta)(x)]]$.
Тоест Γ е креан. (2).
От (1) и (2) следва, че Γ е компактен (непрекъснат) оператор.

б)

Нека Q, R са свойства в $\mathcal{F}_1$ дефинирани по следния начин:

$$Q(f) \rightleftharpoons (\forall x \in \mathbb{N})[!f(x) \ \& \ x \leq 1 \implies f(x) = 1]$$
$$R(f) \rightleftharpoons (\forall x \in \mathbb{N})\left[!f(x) \ \& \ x > 1 \implies f(x) \leq \frac{x}{2}\right]$$

Q и R са свойства от тип частична коректност и следователно са непрекъснати. Нека $P(f) \rightleftharpoons Q(f) \ \& \ R(f)$. P е конюнкцията на Q и R, които са непрекъснати, следователно P е непрекъснато. (3)
Имаме $(\forall x \in \mathbb{N})[\neg!\emptyset(x)]$ следователно
$(\forall x \in \mathbb{N})[!\emptyset(x) \ \& \ x \leq 1 \implies \emptyset(x) = 1] \ \& \ (\forall x \in \mathbb{N})\left[!\emptyset(x) \ \& \ x > 1 \implies \emptyset(x) \leq \dfrac{x}{2}\right]$
тоест $Q(\emptyset) \ \& \ R(\emptyset)$. Следователно $P(\emptyset)$. (4)
Нека $f \in \mathcal{F}_1$ и $P(f)$. Нека $x \in Dom(\Gamma(f))$.

- $x \leq 1$

  Имаме $\Gamma(f)(x) = 1$.

- $x > 1$

  Възможни са два подслучая:

– $x \equiv 0 \pmod 2$

Тогава $\Gamma(f)(x) = \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{x}{2}$.

– $x \equiv 1 \pmod 2$

Тогава $\Gamma(f)(x) = f\left(f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)\right)$

Понеже $x \equiv 1 \pmod 2$, то $\dfrac{3x+1}{2} > 1$. Но тогава от $P(f)$, в частност $R(f)$. Получаваме $f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right) \leq \dfrac{3x+1}{4}$.

Нека $z := f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)$. Тогава за z са възможни два случая.

* $z \leq 1$
  Тогава $\Gamma(f)(x) = f(z) = 1$.
  Понеже $x > 1$, то $1 \leq \dfrac{x}{2}$.
  Следователно $\Gamma(f)(x) = 1 \leq \dfrac{x}{2}$.
* $z > 1$
  Тогава от $R(f)$ получаваме
  $\Gamma(f)(x) = f(z) \leq \dfrac{z}{2} \leq \dfrac{3x+1}{8} \leq \dfrac{4x}{8} = \dfrac{x}{2}$.

Следователно получаваме $\Gamma(f)(x) \leq \dfrac{x}{2}$

Получихме, че $!\Gamma(f)(x)\ \&\ x \leq 1 \implies \Gamma(f)(x) = 1$ и $!\Gamma(f)(x)\ \&\ x > 1 \implies \Gamma(f)(x) \leq \dfrac{x}{2}$.
Следователно $Q(\Gamma(f))\ \&\ R(\Gamma(f))$ е истина, тоест $P(\Gamma(f))$. Следователно имаме $P(f) \implies P(\Gamma(f))$. Така $(\forall f \in \mathcal{F}_1)[P(f) \implies P(\Gamma(f))]$. (5)
Тогава от (3), (4), (5) и правилото на Скот получаваме $P(f_\Gamma)$. В частност $R(f_\Gamma)$. Тоест $(\forall x \in \mathbb{N})\left[!f_\Gamma(x)\ \&\ x > 1 \implies f_\Gamma(x) \leq \dfrac{x}{2}\right]$.

Трето контролно по СЕП (31/05/2019)

Нека P е следната рекурсивна програма:

$$\begin{aligned}
h(x,y) &= f(x,y,26,5,2) + 995 \ where \\
f(x,y,0,0,w) &= g(w,9) \\
f(x,y,0,t,w) &= g(x,y) + g(y,x) + f(x,y,0,t-1,w) \\
f(x,y,z,t,w) &= g(x,y) + f(x,y,z-1,t,w) \\
g(x,0) &= x \\
g(x,y) &= x.g(x,y-1)
\end{aligned}$$

Да се докаже, че:
а) $(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[!D_V[P](x,y) \implies D_V[P](x,y) \simeq 31x^{y+1} + 5y^{x+1} + 2019]$
б) $D_V[P]$ е тотална функция.

Решение:

а)

Дефинираме следните оператори: $\Gamma : \mathcal{F}_5 \times \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_5$ и $\Delta : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$.

$$\Gamma(f,g)(x,y,z,t,w) \simeq \begin{cases} g(w,9), & z = 0 \;\&\; t = 0 \\ g(x,y) + g(y,x) + f(x,y,0,t-1,w), & z = 0 \;\&\; t > 0 \\ g(x,y) + f(x,y,z,t,w), & z > 0 \end{cases}$$

$$\Delta(g)(x,y) \simeq \begin{cases} x, & y = 0 \\ x.g(x,y-1), & y > 0 \end{cases}$$

Γ и Δ са термални оператори, следователно са непрекъснати.
Тогава системата

$$\Gamma(f,g) = f$$
$$\Delta(g) = g$$

Има единствено най-малко решение.
Нека $p \in \mathcal{F}_2$ и $p(x,y) = x^{y+1}$. Ще доажем, че $fix(\Delta) = \{p\}$.
Проверяваме, че $\{p\} \subseteq fix(\Delta)$.
Нека $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. Тогава са възможни два случая.

- $y = 0$

  Тогава $\Delta(p)(x,y) \simeq \Delta(p)(x,0) \simeq x \simeq x^{0+1} \simeq x^{y+1} \simeq p(x,y)$.

- $y > 0$

  Тогава $\Delta(p)(x,y) \simeq x.p(x,y-1) \simeq x.x^{y-1+1} \simeq x.x^{y} \simeq x^{y+1} \simeq p(x,y)$.

Следователно $(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[\Delta(p)(x,y) \simeq p(x,y)]$. Следователно $p = \Delta(p)$. Следователно $p \in fix(\Delta)$. Така $\{p\} \subseteq fix(\Delta)$. (1)
Проверяваме, че $fix(\Delta) \subseteq \{p\}$.
Нека $f \in fix(\Delta)$. Ще докажем чрез индукция следното твърдение
$(\forall y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})[f(x,y) \simeq p(x,y)]$.

- База $y = 0$

  Нека $x \in \mathbb{N}$. Тогава

  $f(x,y) \simeq \Delta(f)(x,y) \simeq \Delta(f)(x,0) \simeq x \simeq x^{0+1} \simeq x^{y+1} \simeq p(x,y) \simeq p(x,0)$.

  Следователно $(\forall x \in \mathbb{N})[f(x,0) \simeq p(x,0)]$.

- Индукционна хипотеза: Допускаме $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})[f(x,n) \simeq p(x,n)]$.
  Нека тогава $n \in \mathbb{N}$ и $(\forall x \in \mathbb{N})[f(x,n) \simeq p(x,n)]$.

- Индукционна стъпка $y = n + 1$

  Нека $x \in \mathbb{N}$. Тогава $f(x, y) \simeq f(x, n+1) \simeq \Delta(f)(x, n+1) \simeq x.f(x, n+1-1) \simeq x.f(x, n) \simeq x.p(x, n) \simeq x.x^{n+1} \simeq x^{n+1+1} \simeq x^{y+1} \simeq p(x, y)$.

  Следователно $(\forall x \in \mathbb{N})[f(x, y) \simeq p(x, y)]$.

- Заключение: $(\forall y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})[f(x, y) \simeq p(x, y)]$.

Следователно $f = p$, от тук $f \in \{p\}$. Следователно $(\forall f \in fix(\Delta))[f \in \{p\}]$.
Следователно $fix(\Delta) \subseteq \{p\}$. (2)
От (1) и (2), следва, че $fix(\Delta) = \{p\}$.
Тогава понеже p е тотална, можем свободно да заместим в първото функционално уравнение.
Разглеждаме оператор $\Psi : \mathcal{F}_5 \to \mathcal{F}_5$. Дефиниран така $\Psi(f) = \Gamma(f, p)$.
Тоест:

$$\Psi(f)(x, y, z, t, w) \simeq \begin{cases} w^{10}, & z = 0 \ \& \ t = 0 \\ x^{y+1} + y^{x+1} + f(x, y, 0, t-1, w), & z = 0 \ \& \ t > 0 \\ x^{y+1} + f(x, y, z-1, t, w), & z > 0 \end{cases}$$

Разглеждаме следното свойство в $\mathcal{F}_5$:
$Q(f) \rightleftharpoons (\forall (x, y, z, t, w) \in \mathbb{N}^5)[!f(x, y, z, t, w)$
$\implies f(x, y, z, t, w) \simeq (z+t)x^{y+1} + ty^{x+1} + w^{10}]$
Това свойство очевидно е непрекъснато понеже е от тип частична коректност. Очевидно е и, че $Q(\emptyset^{(5)})$ понеже $(\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2)[\neg !\emptyset^{(5)}(x, y)]$.
Ще докажем, че Q е монотонно.
Нека $h \in \mathcal{F}_5$ и нека $Q(h)$ е истина. Нека $(x, y, z, t, w) \in Dom(\Psi(h))$.
Възможни са три случая:

- $(z, t) = (0, 0)$

  Тогава $\Psi(h)(x, y, z, t, w) \simeq w^{10} \simeq 0 + 0 + w^{10} \simeq 0.x^{y+1} + 0.y^{x+1} + w^{10} \simeq (z+t)x^{y+1} + ty^{x+1} + w^{10}$.

- $z = 0 \ \& \ t > 0$

  Тогава $\Psi(h)(x, y, z, t, w) \simeq x^{y+1} + y^{x+1} + h(x, y, 0, t-1, w) \simeq x^{y+1} + y^{x+1} + (t-1)x^{y+1} + (t-1)y^{x+1} + w^{10} \simeq tx^{y+1} + ty^{x+1} + w^{10} \simeq (z+t)x^{y+1} + ty^{x+1} + w^{10}$.

- $z > 0$

  Тогава $\Psi(h)(x, y, z, t, w) \simeq x^{y+1} + h(x, y, z-1, t, w) \simeq (z-1+t)x^{y+1} + ty^{x+1} + w^{10} \simeq (z+t)x^{y+1} + ty^{x+1} + w^{10}$.

Следователно $Q(\Psi(h))$. Тогава $(\forall h \in \mathcal{F}_5)[Q(h) \implies Q(\Psi(h))]$.
Така Q е монотонно и от правилото на Скот получаваме $Q(f_\Psi)$. В частност $(\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2)[!f_\Psi(x, y, 26, 5, 2) \implies f_\Psi(x, y, 26, 5, 2) \simeq (26+5)x^{y+1} + 5y^{x+1} + 2^{10} \simeq 31x^{y+1} + 5y^{x+1} + (30+2)^2 \simeq 31x^{y+1} + 5y^{x+1} + 1024]$.
Следователно $(\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2)[!D_V[P](x, y) \implies$
$D_V[P](x, y) \simeq f_\Psi(x, y, 26, 5, 2) + 995 \simeq 31x^{y+1} + 5y^{x+1} + 2019]$.

б)

Ясно е, че $D_V[P]$ е тотална функция, точно когато и f_Ψ е.
За това ще докажем, че f_Ψ е тотална функция.
Да допуснем противното, тогава $\mathbb{N}^5 \setminus Dom(f_\Psi) \neq \emptyset$.
Имаме, че $(\mathbb{N}^5, <_{lex\mathbb{N}^5})$ е фундирано множество.
Тогава $\mathbb{N}^5 \setminus Dom(f_\Psi)$ има миналeн елемент относно $<_{lex\mathbb{N}^5}$.
Нека тогава $(x^*, y^*, z^*, t^*, w^*)$ е минимален елемент на $\mathbb{N}^5 \setminus Dom(f_\Psi)$.
Тогава $\neg ! f_\Psi(x^*, y^*, z^*, t^*, w^*)$.
Очевидно $(z^*, t^*) \neq (0, 0)$ понеже $f_\Psi(x^*, y^*, 0, 0, w) = w^{*10}$.
Тогава са възможни два случая:

- $z^* = 0 \ \& \ t^* > 0$

  Но това значи, че $\neg ! f_\Psi(x^*, y^*, 0, t^* - 1, w^*)$, но също така $(x^*, y^*, 0, t^* - 1, w^*) <_{lex\mathbb{N}^5} (x^*, y^*, z^*, t^*, w^*)$. Тогава $(x^*, y^*, z^*, t^*, w^*)$, не е минимален за $\mathbb{N}^5 \setminus Dom(f_\Psi)$ ... Абсурд!

- $z^* > 0$

  Но това значи, че $\neg ! f_\Psi(x^*, y^*, z^* - 1, t^*, w^*)$, но също така $(x^*, y^*, z^* - 1, t^*, w^*) <_{lex\mathbb{N}^5} (x^*, y^*, z^*, t^*, w^*)$. Тогава $(x^*, y^*, z^*, t^*, w^*)$, не е минимален за $\mathbb{N}^5 \setminus Dom(f_\Psi)$ ... Абсурд!

Достигнахме до противоречие и в двата случая. Противоречието идва от допускането, което направихме, че f_Ψ не е тотална. Но тогава f_Ψ е тотална. Следователно и $D_V[P]$ също е тотална!

Зад. 1. Писмен изпит по СЕП 07/02/2019

Дайте пример за оператор от тип $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$, който:
а) няма неподвижни точки;
б) има неподвижни точки, но няма най-малка неподвижна точка;
в) има най-малка неподвижна точка.
Обосновете се!

Решение:

а)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 9, & \neg ! f(x) \\ \neg !, & ! f(x) \end{cases}$$

Да допуснем, че така дефиниран Γ има неподвижна точка.
Нека $f \in fix(\Gamma)$. Нека $x \in \mathbb{N}$.
Възможни са два случая:

- $!f(x)$

  Тогава $\neg!\Gamma(f)(x)$, но тогава $\neg[f(x) \simeq \Gamma(f)(x)]$.

  Следователно $f \notin fix(\Gamma)$. Абсурд!

- $\neg!f(x)$

  Тогава $\Gamma(f)(x) = 9$ и значи $!\Gamma(f)(x)$, но тогава $\neg[f(x) \simeq \Gamma(f)(x)]$.

  Следователно $f \notin fix(\Gamma)$. Абсурд!

Достигнахме до противоречие. Следователно $fix(\Gamma) = \emptyset$.

б)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 9, & \neg!f(x) \\ f(x), & !f(x) \end{cases}$$

Нека $f \in \mathcal{F}_1$ и $Dom(f) = \mathbb{N}$. Нека $x \in \mathbb{N}$. Тогава имаме $\Gamma(f)(x) \simeq f(x)$. Следователно $(\forall x \in \mathbb{N})[\Gamma(f)(x) \simeq f(x)]$. Тогава $f = \Gamma(f)$ и значи $f \in fix(\Gamma)$. Така получаваме, че всяка тотална функция е неподвижна точка за Γ.
Да допуснем, че има ненотална функция h, която е неподвижна за Γ. h не е тотална, следователно $\mathbb{N} \setminus Dom(h) \neq \emptyset$. Нека тогава $x \in \mathbb{N} \setminus Dom(h)$. Тогава имаме $\neg!h(x)$ и $\Gamma(h)(x) = 9$. Очевидно тогава $h \neq \Gamma(h)$. Това е Абсурд!
Следователно $fix(\Gamma) = \{g \in \mathcal{F}_1 \mid Dom(g) = \mathbb{N}\} \neq \emptyset$.
Понеже всяка неподвижна точка на Γ е тотална, а всеки две различни тотални функции са несравними помеждуси чрез релацията "подфункция". И за всяка тотална функция няма частична функция, която да я разширява. Следователно всеки елемент на $fix(\Gamma)$ е минимален. И понеже $fix(\Gamma)$ е неизброимо безкрайно, то значи $fix(\Gamma)$ няма най-малък елемент. Следователно Γ има неподвижна точка, но няма най-малка неподвижна точка.

в)

Нека $\Gamma = Id(\mathcal{F}_1)$. Тогава $fix(\Gamma) = \mathcal{F}_1$.
И понеже $(\mathcal{F}_1, \subset, \emptyset)$ е фундирано, то $\emptyset = f_\Gamma = lfp(\Gamma)$.

Зад. 2. Писмен изпит по СЕП 07/02/2019

Да разгледаме следния непрекъснат оператор $\Gamma : \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_3$, където:

$$\Gamma(f)(x,y,z) \simeq \begin{cases} 0, & y > 0 \;\&\; (z+1)y > x \\ f(x,y,z+1)+1, & y > 0 \;\&\; (z+1)y \leq x \\ f(x,0,z+1)+1, & y = 0 \end{cases}$$

Докажете, че най-малката неподвижна точка на Γ е следната частична функция:

$$h(x,y,z) \simeq \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor \ominus z, & y > 0 \\ \neg !, & y = 0 \end{cases}$$

където

$$a \ominus b = \begin{cases} a - b, & a \geq b \\ 0. & a < b \end{cases}$$

Решение:

Ще докажем, че f_Γ има еквивалетно представяне:

$$f_\Gamma(x,y,z) \simeq \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor - z, & y > 0 \,\&\, \left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor \geq z \\ 0, & y > 0 \,\&\, \left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor < z \\ \neg !, & y = 0 \end{cases}$$

Нека Q, R са свойства в $\mathcal{F}_3$ дефинирани по следния начин:

$$Q(f) \rightleftharpoons (\forall (x,y,z) \in \mathbb{N}^3)[!f(x,y,z) \,\&\, y > 0 \,\&\, \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \geq z \implies f(x,y,z) \simeq \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor - z]$$

$$R(f) \rightleftharpoons (\forall (x,y,z) \in \mathbb{N}^3)[!f(x,y,z) \,\&\, y > 0 \,\&\, \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor < z \implies f(x,y,z) \simeq 0]$$

Q и R са свойства от тип частична коректност и следователно са непрекъснати. Нека $P(f) \rightleftharpoons Q(f) \,\&\, R(f)$. P е конюнкцията на Q и R, които са непрекъснати, следователно P е непрекъснато. (3)
Имаме $(\forall x \in \mathbb{N})[\neg !\emptyset^{(3)}(x)]$ следователно $P(emptyset^{(3)})$ е изпълнено.
Ще докажем, че P е монотонно свойство.
Нека $f \in \mathcal{F}_3$ и $P(f)$. Нека $(x,y,z) \in Dom(\Gamma(f))$ и нека $y > 0$. Нека $k = \left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor$.
Тогава $k \leq \dfrac{x}{y} < k + 1$ и значи $ky \leq x \,\&\, x < (k+1)y$. Ако

- $k < z$ Тогава имаме $x < (k+1)y \,\&\, k < z$. Следователно $x < (z+1)y$. Но тогава $\Gamma(f)(x,y,z) \simeq 0$.
- $k \geq z$ Възможни са два подслучая:
  - $k = z$
    Тогава имаме $x < (z+1)y$ и значи
    $\Gamma(f)(x,y,z) \simeq 0 \simeq k - z = \left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor - z$.

– $z < k$

Тогава имаме $zy < (z+1)y \leq ky \leq x$. Следователно

$\Gamma(f)(x,y,z) \simeq f(x,y,z+1)+1 \simeq \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor - (z+1)+1 \simeq \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor - z.$

Следователно очевидно $P(\Psi(f))$ е истина. Тогава очевидно P е монотонно свойство.
Тогава от правилото на Скот получаваме

$$(\forall (x,y,z) \in \mathbb{N}^3)$$
$$\left[!f_\Psi(x,y,z) \;\&\; y > 0 \implies f_\Psi(x,y,z) \simeq \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor - z, & \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \geq z \\ 0, & \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor < z \end{cases} \right]$$

Остава да покаже, че ако $y > 0$, то f_Ψ е дефинирана и ако $y = 0$ не е.
Първо ще докажем, че $(\forall (x,y,z) \in \mathbb{N}^3)[y > 0 \implies !f_\Psi(x,y,z)]$.
Нека допуснем противното. Тогава нека
$(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{N}^3$ и $y^* > 0$ и $\neg !f_\Psi(x^*, y^*, z^*)]$.
Очевидно ако $(z^*+1)y^* > x^*$, то $\Psi(f_\Psi)(x^*, y^*, z^*) = 0$ и значи $!f_\Psi(x^*, y^*, z^*)$.
Тогава за следната редица от точки $\{(x^*, y^*, z^*+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$
имаме $(\forall n \in \mathbb{N})[(x^*, y^*, z^*+n) \in \mathbb{N}^3 \setminus Dom(f_\Psi)]$, което значи, че
$(\forall n \in \mathbb{N})[(z^*+n+1)y^* \leq x^*]$. Но тогава $(z^*+x^*+1)y^* \leq x^*$ при положение, че $y^* > 0$. Това е Абсурд! Следователно е в сила
$(\forall (x,y,z) \in \mathbb{N}^3)[y > 0 \implies !f_\Psi(x,y,z)]$.
За второ твърдение нека допуснем, че за някоя двойка $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ е в сила $!f_\Psi(a,0,b)$. Нека тогава $n = f_\Psi(a,0,b)$. Тогава получаваме $n = f_\Psi(a,0,b) = \Psi(f_\Psi)(a,0,b) = f_\Psi(a,0,b+1)+1 = \Psi(f_\Psi)(a,0,b+1)+1 = f_\Psi(a,0,b+2)+2 = \cdots = f_\Psi(a,0,b+n+1)+n+1$. Но тогава $n = f_\Psi(a,0,b+n+1)+n+1$ и $f_\Psi(a,0,b+n+1) \in \mathbb{N}$. Това е пълен Абсурд! Следователно
$(\forall (x,z) \in \mathbb{N}^2)[\neg !f_\Psi(x,0,z)]$.
Тогава излиза, че

$$f_\Gamma(x,y,z) \simeq \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor - z, & y > 0 \;\&\; \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \geq z \\ 0, & y > 0 \;\&\; \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor < z \\ \neg !, & y = 0 \end{cases}$$

Зад. 3. Писмен изпит по СЕП 07/02/2019

Нека $\Gamma,\ \Delta\ :\ \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$ са непрекъснати, където:

$$\Gamma(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & x = 0 \\ f(x-1,y).g(x,y), & x > 0 \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & x = 0 \ \&\ y = 0 \\ 3.g(0, y-1), & x = 0 \ \&\ y > 0 \\ 2.g(x-1, y+1), & x > 0 \end{cases}$$

Нека $(f_0, g_0) = lfp(\Gamma \times \Delta)$. Докажете, че

$(\forall x \in \mathbb{N})[!f_0(x,0) \implies f_0(x,0) \simeq 6^{\frac{x(x+1)}{2}}]$

Решение:

Разглеждаме $\Phi\ :\ \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$, за който:

$$\Phi(g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & x = 0 \ \&\ y = 0 \\ 3.g(0, y-1), & x = 0 \ \&\ y > 0 \\ 2.g(x-1, y+1), & x > 0 \end{cases}$$

Дефинираме следното свойство в $\mathcal{F}_2$:
$P(f) \rightleftharpoons (\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq 6^x.3^y]$
Очевидно то е непрекъснато понеже е от тип частична коректност.
Очевидно е и, че $P(\emptyset)$ понеже $(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[\neg!\emptyset(x,y)]$.
Ще докаже, че $(\forall f \in \mathcal{F}_2)[P(f) \implies P(\Phi(f))]$.
Нека $f \in \mathcal{F}_2$ и $P(f)$. Нека $(x,y) \in Dom(\Phi(f))$.

- $(x,y) = (0,0)$

  Тогава $\Phi(f)(x,y) \simeq 1 \simeq 6^0.3^0 \simeq 6^x.3^y$.

- $x = 0 \ \&\ y > 0$

  Тогава $\Phi(f)(x,y) \simeq 3.f(0,y-1) \simeq 3.(6^0.3^{y-1}) \simeq 6^x.3^y$.

- $x > 0$

  Тогава $\Phi(f)(x,y) \simeq 2.f(x-1,y+1) \simeq 2.(6^{x-1}.3^{y+1}) \simeq 6.6^{x-1}.3^y \simeq 6^x.3^y$.

Следователно $!\Phi(f)(x,y) \implies \Phi(f)(x,y) \simeq 6^x.3^y$. Следователно $P(\Phi(f))$.
Следователно $(\forall f \in \mathcal{F}_2)[P(f) \implies P(\Phi(f))]$.
Така от до тук доказаното и правилото на Скот получаваме, че
$(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[!f_\Phi(x,y) \implies f_\Phi(x,y) \simeq 6^x.3^y]$.
Сега ще докажем, че f_Φ е тотална.
Нека допуснем противното. Тогава $\mathbb{N}^2 \setminus Dom(f_\Phi) \neq \emptyset$.
$(\mathbb{N}^2, <_{lex\mathbb{N}^2})$ е фундирано множество.
Тогава $\mathbb{N}^2 \setminus Dom(f_\Phi)$ има миналeн елемент относно $<_{lex\mathbb{N}^2}$.
Нека тогава (x^*, y^*) е минимален елемент на $\mathbb{N}^2 \setminus Dom(f_\Phi)$.
Тогава $\neg!f_\Phi(x^*, y^*)$. Очевидно $(x^*, y^*) \neq (0,0)$ понеже $f_\Phi(0,0) = 1$.

- $x^* = 0 \ \&\ y^* > 0$

  Тогава $\neg!f_\Phi(0, y^*-1)$, но $(0, y^*-1) \in \mathbb{N}^2$

  следователно $(x^*, y^*-1) \in \mathbb{N}^2 \setminus Dom(f_\Phi)$ и $(x^*, y^*-1) <_{lex\mathbb{N}^{\not 2}} (x^*, y^*)$.

  Но тогава (x^*, y^*) не е минимален ... Абсурд!

- $x^* > 0$

  Тогава $\neg!f_\Phi(x^*-1, y^*+1)$, но $(x^*-1, y^*+1) \in \mathbb{N}^2$

  следователно $(x^*-1, y^*+1) \in \mathbb{N}^2 \setminus Dom(f_\Phi)$ и $(x^*-1, y^*+1) <_{lex\mathbb{N}^2}$ (x^*, y^*).

  Но тогава (x^*, y^*) не е минимален ... Абсурд!

Получихме противоречие с допускането, че $\mathbb{N}^2 \setminus Dom(f_\Phi) \neq \emptyset$.
Следователно $Dom(f_\Phi) = \mathbb{N}^2$.
От тук и от $P(f_\Phi)$ получаваме $(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[f_\Phi(x,y) = 6^x.3^y]$.
Тогава разглеждаме $\Psi \ : \ \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$.
$\Psi(f)(x,y) \simeq \Gamma(f, g_0)(x,y) \simeq \Gamma(f, f_\Phi)(x,y)$. Следователно

$$\Psi(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 6^x.3^y.f(x-1,y), & x > 0 \end{cases}$$

Дефинираме следното свойство в $\mathcal{F}_2$:
$Q(f) \rightleftharpoons (\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq 6^{\frac{x(x+1)}{2}}.3^{xy}]$
Очевидно то е непрекъснато понеже е от тип частична коректност.
Очевидно е и, че $Q(\emptyset)$ понеже $(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)[\neg!\emptyset(x,y)]$.
Ще докаже, че $(\forall f \in \mathcal{F}_2)[Q(f) \implies Q(\Phi(f))]$.
Нека $f \in \mathcal{F}_2$ и $Q(f)$. Нека $(x,y) \in Dom(\Psi(f))$.

- $x = 0$

  Тогава $\Psi(f)(x,y) \simeq \Psi(f)(0,y) \simeq 1 \simeq 6^0.3^{0.y} \simeq 6^{\frac{x(x+1)}{2}}.3^{xy}$.

- $x > 0$

  Тогава

  $\Psi(f)(x,y) \simeq 6^x.3^y.f(x-1,y) \simeq 6^x.3^y.6^{\frac{x(x-1)}{2}}.3^{(x-1)y} \simeq 6^{\frac{x(x+1)}{2}}.3^{xy}$.

Следователно $Q(\Psi(f))$. Следователно $(\forall f \in \mathcal{F}_2)[Q(f) \implies Q(\Phi(f))]$.
Тогава използвайки правилото на Скот получаваме $Q(f_0)$.
В частност $(\forall x \in \mathbb{N})[!f_0(x,0) \implies f_0(x,0) \simeq 6^{\frac{x(x+1)}{2}}]$.