

Околности. Определения за граница на редица и функция

Иво Стратев

5 февруари 2017 г.

1 Околности

1.1 Околност на $a \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0; |x - a| < \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

1.2 Пробита околност на $a \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0; 0 < |x - a| < \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

1.3 Околност на $a = 0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0; a - \varepsilon < x < a \iff x \in (a - \varepsilon, a)$$

1.4 Околност на $a = 0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0; a < x < a + \varepsilon \iff x \in (a, a + \varepsilon)$$

1.5 Околност на ∞

$$\forall M > 0 \in \mathbb{R} \quad x > M \iff x \in (M, \infty)$$

1.6 Околност на $-\infty$

$$\forall M < 0 \in \mathbb{R} \quad x < M \iff x \in (-\infty, M)$$

2 Редици

$$2.1 \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon \exists \nu; n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

$$2.2 \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\forall C > 0 \exists \nu; n > \nu \implies a_n > C$$

$$2.3 \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

$$\forall C < 0 \exists \nu; n > \nu \implies a_n < C$$

$$2.4 \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + 0$$

$$\forall \varepsilon \exists \nu; n > \nu \implies a < a_n < a + \varepsilon$$

$$2.5 \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - 0$$

$$\forall \varepsilon \exists \nu; n > \nu \implies a - \varepsilon < a_n < a$$

3 Функции

$$3.1 \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \in \mathbb{D}, x_n \neq x_0 \\ \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \end{aligned}$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, x \in \mathbb{D}; \quad 0 < |x - x_0| < \delta \\ \implies |f(x) - A| < \varepsilon \end{aligned}$$

3.2 Лява (Дясна) граница

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0(x_0 + 0)} A$$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0(x_0 + 0)} A$$

$$\begin{aligned} \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 - 0(x_0 + 0), \\ x_n \in \mathbb{D}, x_n < x_0 (x_n > x_0) \\ \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \end{aligned}$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0(x_0 + 0)} A$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, x \in \mathbb{D}; \\ x_0 - \delta < x_n < x_0 (x_0 < x_n < x_0 + \delta) \\ \implies |f(x) - A| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\mathbf{3.3} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} A \in \mathbb{R}$$

<p>Хайне</p> $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} A \in \mathbb{R}$ $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty, x_n \in \mathbb{D}$ $\implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$	<p>Коши</p> $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} A \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 (M < 0), x \in \mathbb{D}; x > M (x < M)$ $\implies f(x) - A < \varepsilon$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$\mathbf{3.4} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm\infty \text{ при } c = a \in R \text{ или } c = a - 0 \text{ или } c = a + 0$$

$$\text{или } c = \pm\infty$$

$$\mathbf{3.4.1} \quad \text{Хайне за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm\infty \text{ при } c = a \in R \text{ или } c = a - 0 \text{ или } c = a + 0$$

$$\text{или } c = \pm\infty)$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm\infty$$

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \quad x_n \in \mathbb{D}$$

$$\implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty$$

$$\mathbf{3.4.2} \quad \text{Коши за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} \pm\infty$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$$

$$\forall A > 0 (A < 0) \exists \delta > 0, x \in \mathbb{D}; 0 < |x - a| < \delta$$

$$\implies f(x) > A (f(x) < A)$$

$$\mathbf{3.4.3} \quad \text{Коши за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \pm 0} \pm\infty$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \pm 0} \pm\infty$$

$$\forall A > 0 (A < 0) \exists \delta > 0, x \in \mathbb{D}; a < x < a + \delta (a - \delta < x < a)$$

$$\implies f(x) > A (f(x) < A)$$

$$\mathbf{3.4.4} \quad \text{Коши за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$$

$$\forall A > 0 (A < 0) \exists B > 0 (B < 0), x \in \mathbb{D}; x > B (x < B)$$

$$\implies f(x) > A (f(x) < A)$$

4 Отрицания на определения за граници на Функции

4.1 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$

<p>Хайне</p> <p>$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$</p> <p>$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$</p> <p>$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \in \mathbb{D}, x_n \neq x_0$</p> <p>$\Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$</p>	<p>Коши</p> <p>$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$</p> <p>$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$</p> <p>$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0, x \in \mathbb{D}; 0 < x - x_0 < \delta$</p> <p>$\Rightarrow f(x) - A \geq \varepsilon$</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

4.2 Лява (Дясна) граница

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0(x_0 + 0)} A$

<p>Хайне</p> <p>$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$</p> <p>$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0(x_0 + 0)} A$</p> <p>$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 - 0(x_0 + 0),$</p> <p>$x_n \in \mathbb{D}, x_n < x_0 (x_n > x_0)$</p> <p>$\Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$</p>	<p>Коши</p> <p>$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$</p> <p>$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0(x_0 + 0)} A$</p> <p>$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0, x \in \mathbb{D};$</p> <p>$x_0 - \delta < x_n < x_0 (x_0 < x_n < x_0 + \delta)$</p> <p>$\Rightarrow f(x) - A \geq \varepsilon$</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

4.3 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} A \in \mathbb{R}$

<p>Хайне</p> <p>$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$</p> <p>$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} A \in \mathbb{R}$</p> <p>$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty, x_n \in \mathbb{D}$</p> <p>$\Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$</p>	<p>Коши</p> <p>$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$</p> <p>$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} A \in \mathbb{R}$</p> <p>$\exists \varepsilon > 0 \forall M > 0 (M < 0), x \in \mathbb{D}; x > M (x < M)$</p> <p>$\Rightarrow f(x) - A \geq \varepsilon$</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

4.4 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm \infty$ при $c = a \in R$ или $c = a - 0$ или $c = a + 0$
или $c = \pm \infty$

4.4.1 Хайне за $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm \infty$ при $c = a \in R$ или $c = a - 0$ или $c = a + 0$
или $c = \pm \infty$)

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm \infty$

$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \quad x_n \in \mathbb{D}$

$$\not\Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty$$

4.4.2 Коши за $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} \pm \infty$

$$f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty$$

$$\exists A > 0 (A < 0) \forall \delta > 0, x \in \mathbb{D}; 0 < |x - a| < \delta$$

$$\implies f(x) \leq A (f(x) \geq A)$$

4.4.3 Коши за $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \pm 0} \pm \infty$

$$f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \pm 0} \pm \infty$$

$$\exists A > 0 (A < 0) \forall \delta > 0, x \in \mathbb{D}; a < x < a + \delta (a - \delta < x < a)$$

$$\implies f(x) \leq A (f(x) \geq A)$$

4.4.4 Коши за $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \pm \infty$

$$f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \pm \infty$$

$$\exists A > 0 (A < 0) \forall B > 0 (B < 0), x \in \mathbb{D}; x > B (x < B)$$

$$\implies f(x) \leq A (f(x) \geq A)$$