Някои изброимо безкрайни множества

Иво Стратев

12 юни 2019 г.

Увод

С този документ целя да докажа, че няколко множества са изброимо безкрайни. Идеята се зароди от желанието ми да докажа, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно, както и следното обобщение: ако $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ и $A_1, \ \ldots, \ A_n$ са непразни множества и поне едно от тях е изброимо безкрайно, то $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ е изброимо безкрайно. Ще се опитам да подам идеите как се достига до съответните биекции, но преди това ще формулирам и докажа няколко помощни твърдения, които ще използвам в доказателствата, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно.

Лема 1.

Нека разгледаме следното множество $\mathbb{N}_< = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < j\}$, това всъщност е релацията "по-малко"над множеството на естествените числа. Няма да се интересуваме от този факт. Ще разглеждаме $\mathbb{N}_<$ като множество и ще докажем, че е изброимо безкрайно.

Твърдение:

Множеството $\mathbb{N}_<$ е изброимо безкрайно.

Идея за биекция:

Очевидно е вярно $\mathbb{N}_< = \{(i, j) \mid j \in \mathbb{N}, \ j > 0, \ i \in \{0, 1, \ldots, j-1\}\}$. Нека фиксираме $n \in \mathbb{N}$ и нека $n > 0$. Тогава наредените двойки от $\mathbb{N}_<$ с втората компонента n са: $(0, n), (1, n), \ldots, (n-1, n)$. Те очевидно са n на брой и очевидно броят на тези с втора компонента строго по-малка от n е $1 + 2 + \cdots + n - 1$, тоест $\dfrac{(n-1)n}{2}$ на брой. Тогава на наредената двойка (i, j) от $\mathbb{N}_<$ ще съпоставим естественото число $\dfrac{(j-1)j}{2} + i$.

Доказателство:

Дефинираме функцията $f := \left\{ \left((i, j), \dfrac{(j-1)j}{2} + i \right) \ \middle| \ (i, j) \in \mathbb{N}_< \right\}$ Ще докажем, че f е биекция между $\mathbb{N}_<$ и $\mathbb{N}$. Това, че f е функция от $\mathbb{N}_<$ в $\mathbb{N}$ вземаме за очевидно. Очевидно е също, че $f((0, 1)) = 0, f((0, 2)) = 1, f((1, 2)) = 2$ и така нататък.

f е инекция:

Нека (i, j) и (l, k) са различни елементи на $\mathbb{N}_<$. Тогава имаме два случая:
Случай 1 $j \neq k$:
Нека без ограничение на общноста $j < k$. Тогава

$$f((i,j)) = \frac{(j-1)j}{2} + i = \sum_{m=1}^{j-1} m + i < \sum_{m=1}^{j-1} m + j =$$
$$\sum_{m=1}^{j} m \leq \sum_{m=1}^{k-1} m = \frac{(k-1)k}{2} \leq \frac{(k-1)k}{2} + l = f((l,k)).$$

Така $f((i, j)) < f((l, k))$ тоест $f((i, j)) \neq f((l, k))$.
Случай 2 $j = k \ \land \ i \neq l$:
Нека $n = j$, тогава

$$f((i,j)) = f((i,n)) = \frac{(n-1)n}{2} + i \neq \frac{(n-1)n}{2} + l = f((l,n)) = f((l,k)).$$

Тоест $f((i, j)) \neq f((l, k))$.
Така в и двата случая доказахме, че е в сила импликацията

$$(i,j) \neq (l,k) \longrightarrow f((i,j)) \neq f((l,k)).$$

Понеже (i, j) и (l, k) бяха произволни е в сила

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_< \ \forall (l,k) \in \mathbb{N}_< \ (i,j) \neq (l,k) \longrightarrow f((i,j)) \neq f((l,k)).$$

Тоест f е инекция.

f е сюрекция:

Трябва да докажем $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists (i, j) \in \mathbb{N}_< \ f((i, j)) = n$ Доказателството ще извършим по индукция.
База:

$$f((0,1)) = \frac{(1-1)1}{2} + 0 = 0 + 0 = 0.$$

Индукционна хипотеза:
Допускаме, че е вярно $\exists m \in \mathbb{N} \ \exists (i, j) \in \mathbb{N}_< \ f((i, j)) = m$.
Индукционна стъпка: Ще докажем за $n = m+1$. От индукционната хипотеза имаме $\exists (i, j) \in \mathbb{N}_< \ f((i, j)) = m$. Нека тогава $(i, j) \in \mathbb{N}_< \ f((i, j)) = m$. Следователно $f((i, j)) + 1 = m + 1 = n$. Има две възможности:
Случай 1 $j = i + 1$:
Тогава

$$n = f((i,j)) + 1 = f((i,i+1)) + 1 = \left(\frac{(i+1-1)(i+1)}{2} + i\right) + 1 =$$
$$\frac{i(i+1)}{2} + i + 1 = \frac{(i+1)(i+2)}{2} = \frac{j(j+1)}{2} = \frac{(j+1-1)(j+1)}{2} + 0 = f((0,j+1)).$$

Очевидно $(0, j + 1) \in \mathbb{N}_<$ и $f((0, j + 1)) = n$.
Случай 2 $i < j - 1$:
Тогава

$$n = f((i,j)) + 1 = \left(\frac{(j-1)j}{2} + i\right) + 1 = \frac{(j-1)j}{2} + (i+1) = f((i+1,j)).$$

Очевидно $i+1 < j-1+1 = j$ и значи $(i+1,j) \in \mathbb{N}_<$ и $f((i+1,j)) = n$.
Така и в двата случая доказахме $\exists (l,k) \in \mathbb{N}_< \ f((l,k)) = n = m+1$.
Заключение: $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists (i,j) \in \mathbb{N}_< \ f((i,j)) = n$.
Което искахме да докажем. Тоест f е сюрекция.
Следователно f е биекция между $\mathbb{N}_<$ и $\mathbb{N}$ от където $\mathbb{N}_<$ е изброимо безкрайно.
$\square$

Дефиниция (Композиция).

Нека A, B и C са множества и нека f е функция от B в C и нека g е функция от A в B. Тогава множеството $f \circ g := \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B \ g(a) = b \ \wedge \ f(b) = c\}$ наричаме композицията на f и g.

Лема 2.

Нека A, B и C са множества и нека f е функция от B в C и нека g е функция от A в B. Тогава $f \circ g$ е функция от A в C и $\forall a \in A \ (f \circ g)(a) = f(g(a))$.

Доказателство:

Нека $a \in A$ тогава понеже g е функция от A в B то $\exists! b \in B \ g(a) = b$.
Нека тогава $b \in B \ g(a) = b$. f е функция от B в C следователно $\exists! c \in C \ f(b) = c$.
Тогава $(a,c) \in f \circ g$, при това е вярно $\exists! (a,c) \in A \times C \ (a,c) \in f \circ g$ и значи $(f \circ g)(a) = c = f(b) = f(g(a))$. Следователно
$\forall a \in A \ \exists! c \in C \ (a,c) \in f \circ g \ \wedge \ (f \circ g)(a) = f(g(a))$ и значи $f \circ g$ е функция от A в C и $\forall a \in A \ (f \circ g)(a) = f(g(a))$. $\square$

Лема 3.

Нека A, B и C са множества и нека f е биекция от B в C и нека g е биекция от A в B. Тогава $f \circ g$ е биекция от A в C.

Доказателство:

Инекция:

Нека $a_1, a_2 \in A$ и $a_1 \neq a_2$. g е биекция от A в B, в частност g е инекция следователно $g(a_1) \neq g(a_2)$, но f е биекция от B в C, в частност f е инекция и значи $f(g(a_1)) \neq f(g(a_2))$. От **Лема 2.** $(f \circ g)(a_1) = f(g(a_1)) \neq f(g(a_2)) = (f \circ g)(a_2)$. Следователно $\forall a_1 \in A \ \forall a_2 \in A \ a_1 \neq a_2 \longrightarrow (f \circ g)(a_1) \neq (f \circ g)(a_2)$. Значи $f \circ g$ е инекция.

Сюрекция:

Нека $c \in C$ f е биекция, в частност f е сюрекция следователно $\exists b \in B \ f(b) = c$. Нека тогава $b \in B$ и $f(b) = c$. g е биекция, в частност g е сюрекция следователно $\exists a \in A \ g(a) = b$. Нека тогава $a \in A$ и $g(a) = b$. Тогава $f(g(a)) = f(b) = c$. От **Лема 2.** $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = c$. Следователно $\forall c \in C \ \exists a \in A \ (f \circ g)(a) = c$. Значи $f \circ g$ е сюрекция.

Заключение:

$f \circ g$ е инекция и $f \circ g$ е сюрекция следователно $f \circ g$ е биекции. $\square$

Лема 4.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е равномощно с $\mathbb{N}_<$.

Идея за биекция:

Нека фиксираме произволно естествено число n. Нека $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е такава, че $i + j = n$. Тогава е вярно, че $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и $j = n - i$. Следователно има $n + 1$ на брой наредени двойки $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, за които е вярно $i + j = n$. От друга страна е вярно, че има $n + 1$ на брой наредени двойки $(k, n + 1) \in \mathbb{N}_<$. Тогава на наредената двойка (i, j) от $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ще съпоставим наредената двойка $(i, i + j + 1)$.

Доказателство:

Дефинираме функцията $f := \{((i, j), (i, i+j+1)) \mid (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ Ще докажем, че f е биекция между $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_<$. Това, че f е функция от $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}_<$ вземаме за очевидно. Очевидно е също, че $f((0, 0)) = (0, 1), f((0, 1)) = (0, 2), f((1, 1)) = (1, 2)$ и така нататък.

f е инекция:

Нека $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $(l, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $(i, j) \neq (l, k)$. Тогава имаме два случая:
Случай 1 $i \neq l$:
Тогава $f((i, j)) = (i, i + j + 1) \neq (l, l + k + 1) = f((l, k))$.
Случай 2 $i = l \ \wedge \ j \neq k$:
Тогава е вярно $i + j \neq i + k = l + k$ и значи $i + j + 1 \neq l + k + 1$. Следователно $f((i, j)) = (i, i + j + 1) \neq (i, i + k + 1) = (l, l + k + 1) = f((l, k))$.
Заключение: Тогава е в сила $(i, j) \neq (l, k) \longrightarrow f((i, j)) \neq f((l, k))$.
Тогава $\forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \forall (l, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ (i, j) \neq (l, k) \longrightarrow f((i, j)) \neq f((l, k))$ следователно f е инекция.

f е сюрекция:

Нека $(i, k) \in \mathbb{N}_<$ и нека $j = k-i-1$. $k > i$ тогава $k-i > 0$ и значи $k-i \geq 1$ тогава $j = k - i - 1 \geq 0$ и $(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ следователно $j \in \mathbb{N}$. $f((i, j)) = (i, i + j + 1) = (i, i + (k - i - 1) + 1) = (i, k)$. Тоест $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $f((i, j)) = (i, k)$. Тогава $\forall (i, k) \in \mathbb{N}_< \ \exists (l, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ f((l, j)) = (i, k)$ следователно f е сюрекция.

Заключение:

f е инекция и f е сюрекция следователно f е биекции. $\square$

Теорема 1.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно.

Доказателство:

От **Лема 4.** $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ е равномощно с $\mathbb{N}_<$. Следователно съществува биекция между $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_<$. Нека тогава g е една биекция между $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_<$. От **Лема 1.** $\mathbb{N}_<$ е изброимо безкрайно, тоест съществува биекция между $\mathbb{N}_<$ и $\mathbb{N}$. Нека тогава f е една биекция между $\mathbb{N}_<$ и $\mathbb{N}$. Според **Лема 3.** $f \circ g$ е биекция между $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. Следователно $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ е изброимо безкрайно. $\square$

Теорема 2.

$\mathbb{Z}$ е изброимо безкрайно.

Идея за биекция:

Множеството на целите числа се разбива на две множества - отрицателни и неотрицателни. От друга страна множеството на естествените числа се разбива на нечетни и на четни. Тогава ако $z \in \mathbb{Z}$ и $z < 0$ на цялото отрицателно число z ще съпоставим нечетно естественото число $2(-z) - 1$. Ако $z \in \mathbb{Z}$ и $z \geq 0$ на цялото неотрицателно число z ще съпоставим четно естественото число $2z$.

Доказателство:

Дефинираме функцията $f \ : \ \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(z) = \begin{cases} 2z & , \ z \geq 0 \\ 2(-z) - 1 & , \ z < 0 \end{cases}$$

Очевидно $f(0) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 2$, $f(-2) = 3$ и така нататък.

f е инекция:

Нека $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ и $z_1 \neq z_2$. Тогава без ограничение на общността има три случая.
Случай 1 $z_1 \geq 0 \ \wedge \ z_2 \geq 0$**:**

$$z_1 \neq z_2 \longrightarrow 2z_1 \neq 2z_2 \longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

Случай 2 $z_1 \geq 0 \ \wedge \ z_2 < 0$**:**
В такъв случай $f(z_1) = 2z_1$ и $f(z_2) = 2(-z_2) - 1$. Това са две естествени числа с различна четност и значи не са равни. Тоест $f(z_1) \neq f(z_2)$.
Случай 3 $z_1 < 0 \ \wedge \ z_2 < 0$**:**

$$z_1 \neq z_2 \longrightarrow 2(-z_1) \neq 2(-z_2) \longrightarrow 2(-z_1) - 1 \neq 2(-z_2) - 1 \longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

Заключение:
В сила е $\forall z_1 \in \mathbb{Z} \ \forall z_2 \in \mathbb{Z} \ z_1 \neq z_2 \longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$.
Тоест f е инекция.

f е сюрекция:

Нека $n \in \mathbb{N}$ тогава има два случая.
Случай 1 n **е четно:** Тогава $\exists k \in \mathbb{N} \ n = 2k$. Нека $k \in \mathbb{N}$ и $n = 2k$. $k \in \mathbb{N}$ значи $k \in \mathbb{Z}$ и $n = 2k = f(k)$.

Случай 2 n е нечетно: Тогава $\exists k \in \mathbb{N}\ n = 2k + 1$. Нека $k \in \mathbb{N}$ и $n = 2k + 1$. Разглеждаме уравнението $f(z) = n$ и търсим целите решения.

$$\begin{aligned} f(z) = 2(-z) - 1 = 2k + 1 = n \longrightarrow \\ 2(-z) = 2k + 2 \longrightarrow \\ -z = k + 1 \longrightarrow \\ z = -(k + 1) \end{aligned}$$

Ако $k \in \mathbb{N}$, то очевидно $-(k + 1) \in \mathbb{Z}$ и при това

$$k \geq 0 \longrightarrow k + 1 > 0 \longrightarrow -(k + 1) < 0.$$

Значи ако $z = -(k + 1)$, то $z \in \mathbb{Z}\ \wedge\ z < 0\ \wedge\ f(z) = n$.
Заключение:
Вярно е $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{Z}\ f(z) = n$. Тоест f е сюрекция.

Заключение:

f е функция от $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{N}$, f е инекция и f е сюрекция значи f е биекция от $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{N}$. Следователно $\mathbb{Z}$ е изброимо безкрайно. $\square$
Преминаваме към обобщението на **Теорема 1**. За целта дефинираме рекурсивна редица от подмножества на $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} J_0 &:= \emptyset \\ J_{n+1} &:= J_n \cup \{n\}. \end{aligned}$$

Очевидно ако $n > 0$ то $J_n = \{0, \dots, n - 1\}$.

Лема 5.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и $n > 0$ тогава $J_n \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно.

Идея за биекция:

Нека $m \in \mathbb{N}$ очевидно има n наредени двойки $(i, j) \in J_n \times \mathbb{N}$, за които $j = m$. Очевидно и броят на наредените двойки $(l, k) \in J_n \times \mathbb{N}$, за които $k < m$ е $m.n$. Тогава на наредената двойка $(a, b) \in J_n \times \mathbb{N}$ ще съпоставяме естественото число $bn + a$.

Доказателство:

Дефинираме следната функция $f := \{((i, j), jn + i) \mid (i, j) \in J_n \times \mathbb{N}\}$. Очевидно $f((0, 0)) = 0, f((1, 0)) = 1$ и $f((0, 1)) = n$ и очевидно f е фунцкия от $J_n \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Ще покажем, че f е биекция.

f е инекция:

Нека $(i, j) \in J_n \times \mathbb{N}$ и $(l, k) \in J_n \times \mathbb{N}$ и нека $f((i, j)) = f((l, k))$, Тогава $jn + i = kn + l$ и значи $i - l = (k - j)n$. $i \in J_n$ и $l \in J_n$ следователно $0 \leq |i - l| < n$. Понеже n дели $(k - j)n$, то n дели и $i - l$. Следователно $i - l = 0$, тоест $i = l$ от където $jn = kn$ и значи $j = k$. Следователно $(i, j) = (l, k)$. Тоест получихме, че е вярно $\forall (i, j) \in J_n \times \mathbb{N}\ \forall (l, k) \in J_n \times \mathbb{N}\ f((i, j)) = f((l, k)) \longrightarrow (i, j) = (l, k)$, което е контрапозитивното на f е инекция.

f е сюрекция:

Нека $m \in \mathbb{N}$. $n > 0$ тогава прилагаме теоремата за деление с частно и остатък за m и n и получаваме $\exists! q \in \mathbb{N}\ \exists! r \in \mathbb{N}\ m = qn + r \ \wedge \ r \in J_n$. Нека тогава $q \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$ и $m = qn + r \ \wedge \ r \in J_n$. Тогава очевидно $m = qn + r = f((r, q))$ и $(r, q) \in J_n \times \mathbb{N}$. Следователно е вярно $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists (i, j) \in J_n \times \mathbb{N}\ f((i, j)) = m$. Тоест f е сюрекция.

Заключение:

f е функция от $J_n \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, f е инекция и f е сюрекция значи f е биекция от $J_n \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Следователно $J_n \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно. $\square$
Нуждаем се от още четири помощни твърдения преди да докажем обобщението.

Лема 6.

Нека A и B са непразни множества. Тогава съществува биекция от $A \times B$ в $B \times A$.

Доказателство:

Дефинираме функцията $f := \{((a, b), (b, a)) \mid (a, b) \in A \times B\}$

f е инекция:

Нека $(a_1, b_1) \in A \times B$ и $(a_2, b_2) \in A \times B$ и $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$. Тогава очевидно $(b_1, a_1) \neq (b_2, a_2)$, тоест $f((a_1, b_1)) \neq f((a_2, b_2))$. Тогава е вярно $\forall (a_1, b_1) \in A \times B\ \forall (a_2, b_2) \in A \times B\ (a_1, b_1) \neq (a_2, b_2) \longrightarrow f((a_1, b_1)) \neq f((a_2, b_2)$. Тоест f е инекция.

f е сюрекция:

Нека $(b, a) \in B \times A$ тогава $f((a, b)) = (b, a)$. Тоест вярно е $\forall (b, a) \in B \times A\ \exists (a', b') \in A \times B\ f((a, b)) = (b, a)$. Значи f е сюрекция.

Заключение:

f е инекция и f е сюрекция следователно f е биекция. $\square$

Лема 7.

Нека A, B, C и D са непразни множества и нека $f : A \to C$ е биекция и нека $g : B \to D$ е биекция. Тогава съществува биекции между $A \times B$ и $C \times D$.

Доказателство:

Дефинираме функцията $h := \{((a, b), (f(a), g(b))) \mid (a, b) \in A \times B\}$

h е инекция:

Нека $(a_1, b_1) \in A \times B$ и $(a_2, b_2) \in A \times B$ и $h((a_1, b_1)) = h((a_2, b_2))$. Тогава $(f(a_1), g(b_1)) = (f(a_2), g(b_2))$ понеже f и g са биекции, в частност инекции. То $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ и значи $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Тогава е вярно
$\forall (a_1, b_1) \in A \times B\ \forall (a_2, b_2) \in A \times B\ h((a_1, b_1)) = h(a_2, b_2)) \longrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.
Тоест h е инекция.

h е сюрекция:

Нека $(c, d) \in C \times D$. f е биекция, в частност сюрекция. Тогава $\exists a \in A\ f(a) = c$.
Нека тогава $a \in A$ и $f(a) = c$. g е биекция, в частност сюрекция. Тогава
$\exists b \in B\ g(b) = d$. Нека тогава $b \in B$ и $g(b) = d$. Така $h((a, b)) = (f(a), g(b)) = (c, d)$. Следователно е вярно $\forall (c, d) \in C \times D\ \exists (a, b) \in A \times B\ h((a, b)) = (c, d)$.
Тоест h е сюрекция.

Заключение:

h е инекция и h е сюрекция следователно h е биекция. $\square$

Лема 8.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и $n > 2$ и нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са непразни множества. Тогава съществува биекция между $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ и $A_1 \times (A_2 \times \cdots \times A_n)$.

Доказателство:

Дефинираме функцията
$f := \{((a_1, a_2, \ldots, a_n), (a_1, (a_2, \ldots, a_n))) \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\}$.
Очевидно f е функция от $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ в $A_1 \times (A_2 \times \cdots \times A_n)$.

f е инекция:

Нека $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
и $(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ и нека $f((a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})) = f((a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}))$.
Тогава $(a_{11}, (a_{21}, \ldots, a_{n1})) = (a_{12}, (a_{22}, \ldots, a_{n2}))$ следователно $a_{11} = a_{12}$ и $(a_{21}, \ldots, a_{n1}) = (a_{22}, \ldots, a_{n2})$. Значи $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_{i1} = a_{i2}$, тоест $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$.
Тогава е вярно
$\forall a_1 \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\ \forall a_2 \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\ f(a_1) = f(a_2) \longrightarrow a_1 = a_2$.
Следователно f е инекция.

f е сюрекция:

Нека $(a_1, (a_2, \ldots, a_n)) \in A_1 \times (A_2 \times \cdots \times A_n)$. Очевидно $f((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = (a_1, (a_2, \ldots, a_n))$. Тогава е в сила
$\forall y \in A_1 \times (A_2 \times \cdots \times A_n)\ \exists x \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\ f(x) = y$. Следователно f е сюрекция.

Заключение:

f е инекция и f е сюрекция следователно f е биекция. $\square$

Лема 9.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и $n > 2$ и нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са непразни множества. Тогава съществува биекция между $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ и $(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$.

Доказателство:

Дефинираме функцията
$f := \{((a_1, a_2, \ldots, a_n), ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)) \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\}$.
Очевидно f е функция от $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ в $(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$.

f е инекция:

Нека $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
и $(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ и нека $f((a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})) = f((a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}))$. Тогава $((a_{11}, \ldots, a_{n-1,1}), a_{n1}) = ((a_{12}, \ldots, a_{n-1,2}), a_{n2})$ следователно $(a_{11}, \ldots, a_{n-1,1}) = (a_{12}, \ldots, a_{n-1,2})$ и $a_{n1} = a_{n2}$. Значи $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $a_{i1} = a_{i2}$, тоест $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$. Тогава е вярно
$\forall a_1 \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \ \forall a_2 \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \ f(a_1) = f(a_2) \longrightarrow a_1 = a_2$. Следователно f е инекция.

f е сюрекция:

Нека $((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n) \in (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$. Очевидно $f((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$. Тогава е в сила
$\forall y \in (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n \ \exists x \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \ f(x) = y$. Следователно f е сюрекция.

Заключение:

f е инекция и f е сюрекция следователно f е биекция. $\square$

Теорема 3.

Нека $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ и $A_1, \ \ldots, \ A_n$ са непразни множества и поне едно от тях е изброимо безкрайно. Тогава $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ е изброимо безкрайно.

Доказателство:

Доказателството ще направим чрез индукция по броя на множествата.

База:

При $n = 1$ твърдението е че ако A е непразно и е изброимо безкрайно, то A е изброимо безкрайно. Което очевидно е вярно.

При $n = 2$ Нека A и B са непразни множества и нека поне едно от тях е изброимо безкрайно. Ще докажем, че $A \times B$ е изброимо безкрайно. Възможни са два случая.

Случай 1 A е изброимо безкрайно:

Тогава съществува биекция от A в $\mathbb{N}$. Нека си вземем една биекция $f : A \to \mathbb{N}$.

Има два подслучая за B:

Случай 1.1 B **е изброимо безкрайно:**

Тогава съществува биекция от B в $\mathbb{N}$. Нека си вземем една биекция $g : B \to \mathbb{N}$. Тогава от **Лема 7.** съществува биекция от $A \times B$ в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Нека тогава $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е биекция. От **Теорема 1.** знаем, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо. Тоест съществува биекция от $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Нека тогава $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция. От **Лема 3.** $p \circ h$ е биекция от $A \times B$ в $\mathbb{N}$. Следователно $A \times B$ е изброимо безкрайно.

Случай 1.2 B **е крайно:**

Тогава нека $n = |B|$ и съществува биекция между B и J_n. Нека си вземем една биекция $g : B \to J_n$. Тогава от **Лема 7.** съществува биекция от $A \times B$ в $\mathbb{N} \times J_n$. Нека $h : A \times B \to \mathbb{N} \times J_n$ е биекция. От **Лема 6.** съществува биекция от $\mathbb{N} \times J_n$ в $J_n \times \mathbb{N}$. Нека $r : \mathbb{N} \times J_n \to J_n \times \mathbb{N}$ е биекция. От **Лема 3.** $r \circ h$ е биекция от $A \times B$ в $J_n \times \mathbb{N}$. От **Лема 5.** $J_n \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно. Тоест съществува биекция от $J_n \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Нека тогава $p : J_n \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция. От **Лема 3.** $p \circ (r \circ h)$ е биекция от $A \times B$ в $\mathbb{N}$. Следователно $A \times B$ е изброимо безкрайно.

Случай 2 A **е крайно и** B **е изброимо безкрайно:**

Тогава нека $n = |A|$ и съществува биекция между A и J_n. Нека си вземем една биекция $f : A \to J_n$. B е изброимо безкрайно тогава съществува биекция от B в $\mathbb{N}$. Нека си вземем една биекция $g : B \to \mathbb{N}$. Тогава от **Лема 7.** съществува биекция от $A \times B$ в $J_n \times \mathbb{N}$. Нека $h : A \times B \to J_n \times \mathbb{N}$ е биекция. От **Лема 5.** $J_n \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно. Тоест съществува биекция от $J_n \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Нека тогава $p : J_n \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция. От **Лема 3.** $p \circ h$ е биекция от $A \times B$ в $\mathbb{N}$. Следователно $A \times B$ е изброимо безкрайно.

Индукционна хипотеза:

Допускаме, че съществува $m \in \mathbb{N}$ и $m \geq 2$ и за всеки m непразни подмножества $A_1, \dots A_m$ поне едно, от които е изброимо безкрайно е вярно, че $A_1 \times \dots \times A_m$ е изброимо безкрайно.

Индукционно стъпка:

Нека $A_1, \dots A_m, A_{m+1}$ са непразни подмножества и поне едно от тях е изброимо безкрайно. Тогава са възможни два случая за A_1.

Случай 1 A_1 **е изброимо безкрайно:**

Тогава от индукционната хипотеза $A_1 \times \dots \times A_m$ е изброимо безкрайно и следователно съществува биекция между $A_1 \times \dots \times A_m$ и $\mathbb{N}$. Нека $f : A_1 \times \dots \times A_m \to \mathbb{N}$ е биекция. От **Лема 9.** съществува биекция h от $A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ в $(A_1 \times \dots \times A_m) \times A_{m+1}$. Нека $g : A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1} \to (A_1 \times \dots \times A_m) \times A_{m+1}$ е биекция. От **Лема 7.** за f и $id_{A_{m+1}}$ съществува биекция между $(A_1 \times \dots \times A_m) \times A_{m+1}$ и $\mathbb{N} \times A_{m+1}$. Нека $h : (A_1 \times \dots \times A_m) \times A_{m+1} \to \mathbb{N} \times A_{m+1}$ е биекция. Тогава от **Лема 3.** $h \circ g$ е биекция от $A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ в $\mathbb{N} \times A_{m+1}$. От базата $\mathbb{N} \times A_{m+1}$ е изброимо безкрайно. Тогава съществува биекция от $\mathbb{N} \times A_{m+1}$ в $\mathbb{N}$. Нека $p : \mathbb{N} \times A_{m+1} \to \mathbb{N}$ е биекция. Тогава от **Лема 3.** $p \circ (h \circ g)$ е биекция от $A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ в $\mathbb{N}$. Следователно $A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ е изброимо безкрайно.

Случай 2 A_1 е крайно:

Тогава някое от $A_2, \dots, A_{m+1}$ е изброимо безкрайно. Тогава от индукционната хипотеза $A_2 \times \dots \times A_{m+1}$ е изброимо безкрайно и следователно съществува биекция между $A_2 \times \dots \times A_{m+1}$ и $\mathbb{N}$. Нека $f : A_2 \times \dots \times A_{m+1} \to \mathbb{N}$ е биекция. От **Лема 8.** съществува биекция h от $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ в $A_1 \times (A_2 \dots \times A_m \times A_{m+1})$. Нека $g : A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1} \to A_1 \times (A_2 \times \dots \times A_{m+1})$ е биекция. От **Лема 7.** за id_{A_1} и f съществува биекция между $A_1 \times (A_2 \dots \times A_m \times A_{m+1})$ и $A_1 \times \mathbb{N}$. Нека $h : A_1 \times (A_2 \dots \times A_m \times A_{m+1}) \to \mathbb{N} \times A_{m+1}$ е биекция. Тогава от **Лема 3.** $h \circ g$ е биекция от $A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ в $A_1 \times \mathbb{N}$. От базата $A_1 \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно. Тогава съществува биекция от $A_1 \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Нека $p : A_1 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция. Тогава от **Лема 3.** $p \circ (h \circ g)$ е биекция от $A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ в $\mathbb{N}$. Следователно $A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ е изброимо безкрайно.

Заключение:

За всяко $n \in \mathbb{N}$, такова че $n > 0$ и за всеки $A_1, \dots, A_n$ непразни множества поне едно, от които е изброимо безкрайно. Множеството $A_1 \times \dots \times A_n$ е изброимо безкрайно. $\square$