Предложение за КР1

Иво Стратев

26 март 2019 г.

Задача 1.

Да се намерят всички естествени числа n, които са решения на системата:

$$\begin{cases} \Big((p+q)^{\varphi(p^2)}.(p-2)!\Big)\, x \equiv 3p + r \pmod p \\ \varphi(n) = (a,b)x \\ 0 < x < p \end{cases}$$

За задачата:

$p \in \{13, 19, 23\}$, $q \in \{2, 3, \dots p-1\}$, $r \in \{1, 2, 3, 6\}$ и $(a,b)x = 6$.
Отговори: $x = r,\ (a,b) = \dfrac{6}{r},\ n \in \{7, 14, 9, 18\}$

Примерна задача:

Да се намерят всички естествени числа n, които са решения на системата:

$$\begin{cases} \Big(26^{\varphi(23^2)}.21!\Big)\, x \equiv 70 \pmod{23} \\ \varphi(n) = (42, 66)x \\ 0 < x < 23 \end{cases}$$

$p = 23,\ q = 3,\ a = 42,\ b = 66$ и $x = r = 1,\ (a,b) = 6$

Задача 2.

Нека n и m са естествени числа. Дефинираме операцията $*$ така:

$$* \ : \ (\mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m) \times (\mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m) \to \mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m\ \forall (a,b) \in \mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m\ (x,y) * (a,b) = (xa, yb).$$

а)

Докажете, че $(\mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m, *)$ е абелева група.

б)

Какъв е реда на $(\mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m, *)$?

в)

Докажете, че $(\mathbb{C}_k \times \mathbb{C}_l, *)$ е подгрупа на $(\mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m, *)$ Т.С.Т.К. $k \mid n$ и $l \mid m$.

г)

Докажете, че броят на подгрупите на $(\mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m, *)$ е $(n - \varphi(n) + 1)(m - \varphi(m) + 1)$.

д)

Докажете, че всяка подгрупа на $(\mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m, *)$ е нормална.

е)

Намерете всички двойки $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ такива, че

$$(\mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_y, *)/(\mathbb{C}_3 \times \mathbb{C}_2, *) \cong (\mathbb{C}_8 \times \mathbb{C}_6, *)$$

ж)

Намерете всички двойки $(s, t) \in \mathbb{N}^2$ такива, че

$$(\mathbb{C}_{12} \times \mathbb{C}_4, *)/(\mathbb{C}_s \times \mathbb{C}_t, *) \cong (\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_3, *)$$

з)

Докажете, че $(\mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m, *)$ е циклична група Т.С.Т.К. $[n, m] = nm$.

и)

Докажете, че $(\mathbb{C}_n \times \mathbb{C}_m, *)$ е циклична група Т.С.Т.К. $\mathbb{C}_n \cap \mathbb{C}_m = \{1\}$.

Задача 3.

Нека $(G, .)$ група с тривиален център от краен ред и нека n е естествено число по-голямо от 3.

а)

Да се докаже, че $(G^n, \star)$ е група. Където:

$$\begin{aligned} \forall (g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1n}) \in G^n \ \forall (g_{21}, g_{22}, \ldots, g_{2n}) \in G^n \\ (g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1n}) \star (g_{21}, g_{22}, \ldots, g_{2n}) = (g_{11}.g_{21}, g_{12}.g_{22}, \ldots, g_{1n}.g_{2n}) \end{aligned}$$

б)

Нека $\psi \ : \ G \to (G \to G)$ е дефинирано по следния начин:

$$\forall g \in G \ \forall h \in G \ \psi(g)(h) = g^{-1}.h.g.$$

Да се докаже, че $\psi \in Hom(G, S_G)$. Проверете, че $\forall g \in G \ \psi(g) \in S_G$.

в)

Докажете, че $Hom(G, S_G)$ има поне $|G|$ елемента.

г)

Нека $\delta \in Hom(G, S_G)$ и нека $\Gamma : G \to (G^n \to G^n)$ е дефинирано по следния начин:

$$\forall g \in G \; \forall (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$$
$$\Gamma(g)((g_1, g_2, \ldots, g_n)) = (\delta(g)(g_1), \delta(g)(g_2), \ldots, \delta(g)(g_n)).$$

Да се докаже, че $\Gamma \in Hom(G, S_{G^n})$. Проверете, че $\forall g \in G \; \Gamma(g) \in S_{G^n}$.
Докажете още, че $St_{G^n,\Gamma}((g_1, g_2, \ldots, g_n)) = St_{G,\delta}(g_1) \bigcap St_{G,\delta}(g_2) \bigcap \cdots \bigcap St_{G,\delta}(g_n)$.

д)

Нека $\tau \in Hom(G, S_G)$ и нека $\Psi : G^n \to (G^n \to G^n)$ е дефинирано по следния начин:

$$\forall (g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1n}) \in G^n \; \forall (g_{21}, g_{22}, \ldots, g_{2n}) \in G^n$$
$$\Psi((g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1n}))((g_{21}, g_{22}, \ldots, g_{2n})) = (\tau(g_{11})(g_{21}), \tau(g_{12})(g_{22}), \ldots, \tau(g_{1n})(g_{2n})).$$

Да се докаже, че $\Psi \in Hom(G^n, S_{G^n})$. Проверете, че $\forall p \in G^n \; \Psi(p) \in S_{G^n}$.
Докажете още, че $St_{G^n,\Psi}((g_1, g_2, \ldots, g_n)) = St_{G,\tau}(g_1) \times St_{G,\tau}(g_2) \times \cdots \times St_{G,\tau}(g_n)$.

Забележка:

Ако $(H, \oplus)$ е група, $M \neq \emptyset$ и $\pi \in Hom(H, S_M)$, то
$\forall m \in M \; St_{H,\pi}(m) = \{h \in H \mid \pi(h)(m) = m\}$.