

Теоритично контролно №2 1, I, Информатика

Иво Стратев

9 август 2018 г.

1 Линейно изображение и линейен оператор

1.1 Определение линейен оператор

Нека \mathbb{V} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$$

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) \implies \varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$$

1.2 Определение линейно изображение

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$$

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) \implies \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$$

1.3 Теорема $\exists!$ $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n$

e_1, \dots, e_n - базис на \mathbb{V}

w_1, \dots, w_n - произволни вектори от \mathbb{W}

$$\implies \exists! \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) : i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = w_i$$

1.4 Определение за изоморфизъм на линейни пространства

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} и $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ е изображение.

φ е изоморфизъм между \mathbb{V} и \mathbb{W} ($\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$), ако:

1) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ (φ е лин. изображение)

2) φ е биекция

1.5 Н.Д.У две крайно мерни Л.П. да са изоморфни

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F}

$$\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \iff \dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W} \in \mathbb{N}$$

2 Доказателства за линейни изображения

2.1 Докажете, че $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \implies \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \theta_{\mathbb{V}}$

Доказателство 1:

$$\text{Нека } u \in \mathbb{U} \quad \theta_{\mathbb{V}} = 0\varphi(u) = \varphi(0u) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad \square$$

Доказателство 2:

$$\begin{aligned} \text{Нека } u \in \mathbb{U} \quad \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) &= \varphi(u - u) = \varphi(u + (-1)u) = \\ &= \varphi(u) + (-1)\varphi(u) = \varphi(u) - \varphi(u) = \theta_{\mathbb{V}} \quad \square \end{aligned}$$

Доказателство 3:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) &= \varphi(\theta_{\mathbb{U}} + \theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad | \quad -\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies \\ \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) &= \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies \\ \theta_{\mathbb{V}} &= \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad \square \end{aligned}$$

2.2 Докажете, че $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$

$$\forall u \in \mathbb{U} \implies \varphi(-u) = -\varphi(u)$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V}), \forall u \in \mathbb{U}, \forall \lambda \in \mathbb{F} &\implies \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) \\ \implies \lambda = -1 &\implies \varphi(-u) = \varphi(-1u) = -1\varphi(u) = -\varphi(u) \\ \implies \varphi(-u) &= -\varphi(u) \quad \square \end{aligned}$$

2.3 Докажете, че $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}) \implies \varphi(\theta) = \theta$

Доказателство 1:

$$\text{Нека } v \in \mathbb{V} \quad \theta = 0\varphi(v) = \varphi(0v) = \varphi(\theta) \quad \square$$

Доказателство 2:

$$\begin{aligned} \text{Нека } v \in \mathbb{V} \quad \varphi(\theta) &= \varphi(v - v) = \varphi(v + (-1)v) = \\ &= \varphi(v) + (-1)\varphi(v) = \varphi(v) - \varphi(v) = \theta \quad \square \end{aligned}$$

Доказателство 3:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \varphi(\theta + \theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta) \mid -\varphi(\theta) \implies \\ \varphi(\theta) - \varphi(\theta) &= \varphi(\theta) + \varphi(\theta) - \varphi(\theta) \implies \\ \theta &= \varphi(\theta) \quad \square \end{aligned}$$

2.4 Докажете, че $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V})$ $\forall v \in \mathbb{V} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$

Доказателство:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}), \forall v \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{F} &\implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \\ \implies \lambda = -1 &\implies \varphi(-v) = \varphi(-1v) = -1\varphi(v) = -\varphi(v) \\ \implies \varphi(-v) &= -\varphi(v) \quad \square \end{aligned}$$

2.5 Докажете, че едно линейно изображение изпраца линейно зависими вектори в линейно зависими вектори

Доказателство:

$$\text{Нека } \mathbb{V}, \mathbb{W} - \text{Л.П. над полето } \mathbb{F}, \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$$

$$\text{Нека } n \in \mathbb{N} \text{ и нека } v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V} - (\text{линейно зависими})$$

$$\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}}$$

$$\text{Нека } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \implies v = \theta_{\mathbb{V}} \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \implies$$

Векторите $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ (образите на векторите v_1, \dots, v_n) са линейно зависими \square

2.6 Докажете, че един линеен оператор изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори)

Доказателство:

Нека \mathbb{V} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V})$

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ - (линейно зависими)

$$\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \theta$$

$$\text{Нека } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \implies v = \theta \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta) = \theta \implies$$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta \implies$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \implies$$

Векторите $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ (образите на векторите v_1, \dots, v_n) са линейно зависими \square

3 Действия с линейни изображения

3.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$$\varphi + \psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} : \forall v \in \mathbb{V} (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$$

3.2 Определение за произведение на линейно изображение със скалар

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\lambda\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} : \forall v \in \mathbb{V} (\lambda\varphi)(v) = \lambda.\varphi(v)$$

3.3 Определение за произведение на линейни изображения

$\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$ - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$

$$\psi\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U} : \forall v \in \mathbb{V} (\psi\varphi)(v) = (\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v))$$

3.4 Определението за матрица на линейно изображение

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, $n = \dim \mathbb{V}$, $m = \dim \mathbb{W}$

e_1, \dots, e_n - базис на \mathbb{V}

f_1, \dots, f_m - базис на \mathbb{W}

$$i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} f_j, \quad \lambda_{ji} \in \mathbb{F}$$

$A = (\lambda_{ji})_{m \times n} = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрица на φ в базисите e, f

Тоест стълбовете на матрицата A са образите на векторите e_1, \dots, e_n

$$A = (\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n))$$

3.5 изобразяване на координатите на образа на вектор под действието на линейно изображение чрез координатите на вектора и матрицата на линейното изображение

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, $n = \dim \mathbb{V}$, $m = \dim \mathbb{W}$

e_1, \dots, e_n - базис на \mathbb{V}

f_1, \dots, f_m - базис на \mathbb{W}

$A = (\lambda_{ji})_{m \times n} = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрица на φ в базисите e, f

$$\text{Нека } v \in \mathbb{V} \implies v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - координатите на v спрямо базиса e на \mathbb{V}

$$\varphi(v) \in \mathbb{W} \implies \exists(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{F}^m : \varphi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^m \mu_i f_i$$

(μ_1, \dots, μ_m) - координатите на образа на v спрямо базиса f на \mathbb{W}

$$\text{Тогава } (\mu_1, \dots, \mu_m)^t = A(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$$

4 Матрици на линейни изображения, получени след действия с ЛИ

4.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$$\varphi + \psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} : \forall v \in \mathbb{V} (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$$

4.2 Определение за матрица на линейно изображение, което е сумата на две линейни изображения

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, $n = \dim \mathbb{V}$, $m = \dim \mathbb{W}$

Нека $\tau = \varphi + \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека e_1, \dots, e_n - базис на \mathbb{V}

Нека f_1, \dots, f_m - базис на \mathbb{W}

Нека $A = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на φ спрямо базисите e, f

Нека $B = M_{e \rightarrow f}(\psi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на ψ спрямо базисите e, f

Нека $C = M_{e \rightarrow f}(\tau) = M_{e \rightarrow f}(\varphi + \psi) = M_{e \rightarrow f}(\varphi) + M_{e \rightarrow f}(\psi) = A + B \in \mathbb{F}_{m \times n}$

Тогава C е матрицата на $\tau = \varphi + \psi$ спрямо базисите e, f

4.3 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на линейно изображение със скалар

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F} , $\lambda \in \mathbb{F}$, $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, $n = \dim \mathbb{V}$, $m = \dim \mathbb{W}$

Нека $\tau = \lambda \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека e_1, \dots, e_n – базис на \mathbb{V}

Нека f_1, \dots, f_m – базис на \mathbb{W}

Нека $A = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ – матрицата на φ спрямо базисите e, f

Нека $C = M_{e \rightarrow f}(\tau) = M_{e \rightarrow f}(\lambda\varphi) = \lambda.M_{e \rightarrow f}(\varphi) = \lambda.A \in \mathbb{F}_{m \times n}$

Тогава C е матрицата на $\tau = \lambda.\varphi$ спрямо базисите e, f

4.4 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на две линейни изображения

Нека $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$ – К.М.Л.П. над полето \mathbb{F}

$\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{U}), n = \dim \mathbb{V}, m = \dim \mathbb{W}, k = \dim \mathbb{U}$

Нека $\tau = \psi\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{U})$

Нека e_1, \dots, e_n – базис на \mathbb{V}

Нека f_1, \dots, f_m – базис на \mathbb{W}

Нека g_1, \dots, g_k – базис на \mathbb{U}

Нека $A = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ – матрицата на φ спрямо базисите e, f

Нека $B = M_{f \rightarrow g}(\psi) \in \mathbb{F}_{k \times m}$ – матрицата на ψ спрямо базисите f, g

Нека $C = M_{e \rightarrow g}(\tau) = M_{e \rightarrow g}(\psi\varphi) = M_{e \rightarrow g}(\psi \circ \varphi) =$

$= M_{f \rightarrow g}(\psi).M_{e \rightarrow f}(\varphi) = B.A \in \mathbb{F}_{k \times n}$

Тогава C е матрицата на $\tau = \psi\varphi$ спрямо базисите e, g

4.5 Размерност на Л.П. на всички лин. изображения между две крайно мерни Л.П

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} – К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F}, n = \dim \mathbb{V}, m = \dim \mathbb{W}$

Тогава $\dim \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = m.n$

5 Ядро и Образ на Линейно изображение

\mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

5.1 Определение за ядро на лин. изображение

$$\text{Ker}\varphi = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = \theta\}$$

5.2 Определение за образ за лин. изображение

$$\text{Im}\varphi = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{V}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists v \in \mathbb{V} : \varphi(v) = w\}$$

5.3 Определение за образ на подпространство

Нека $\mathbb{Y} \leq \mathbb{V}$, тогава образа на \mathbb{Y} под действието на φ се дефинира като:

$$\varphi(\mathbb{Y}) = \text{Im}\varphi|_{\mathbb{Y}} = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{Y}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists y \in \mathbb{Y} : \varphi(y) = w\}$$

5.4 Определение за ранг на лин. изображение

$$r(\varphi) = \dim \text{Im}\varphi$$

5.5 Определение за дефект на лин. изображение

$$d(\varphi) = \dim \text{Ker}\varphi$$

5.6 Теорема(За ранга и дефекта)

\mathbb{U}, \mathbb{S} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F} , $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$

$$\dim \mathbb{U} = p \implies r(\psi) + d(\psi) = p$$

5.7 Връзката между ранга на едно лин. изображение и ранга на една неговата матрица относно един всеки (в частност и един) базис е:

Нека e_1, \dots, e_n - произволен базис на \mathbb{V}

Нека f_1, \dots, f_m - произволен базис на \mathbb{W}

$$\text{Ако } A = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \implies r(\varphi) = r(A)$$

6 Обратомост на ЛИ и ЛО

6.1 Определение за обратимо линейно изображение

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

φ е обратимо Л.И, ако $\exists \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{V}) : \varphi \cdot \psi = \text{id}_{\mathbb{W}}, \psi \cdot \varphi = \text{id}_{\mathbb{V}}$

6.2 Определение за обратното линейно изображение на дадено линейно изображение

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Ако φ е обратимо Л.И, то

$\exists! \varphi^{-1} \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{V}) : \varphi \cdot \varphi^{-1} = \text{id}_{\mathbb{W}}, \varphi^{-1} \cdot \varphi = \text{id}_{\mathbb{V}}$

φ^{-1} е обратното Л.И. на φ

6.3 Доказателство обратният на обратим линеен оператор също е обратим

Нека \mathbb{V} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$

φ - обратим Л.О. $\implies \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = \text{id}_{\mathbb{V}}$

Ако φ^{-1} е обратим Л.О, то $(\varphi^{-1})^{-1} \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot (\varphi^{-1})^{-1} = \text{id}_{\mathbb{V}}$

$\varphi = \varphi \cdot \text{id}_{\mathbb{V}} = \varphi(\varphi^{-1} \cdot (\varphi^{-1})^{-1}) = (\varphi \cdot \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})^{-1} = \text{id}_{\mathbb{V}} \cdot (\varphi^{-1})^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1}$

$\implies (\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$

6.4 Теорема

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

φ е инективно $\iff \text{Ker} \varphi = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$

Доказателство (в двете посоки):

Доказателство (\implies) $\{\theta_{\mathbb{V}}\} \subseteq \text{Ker} \varphi$ ($\theta_{\mathbb{V}} \in \text{Ker} \varphi$)

Нека $v \in \text{Ker} \varphi \implies \varphi(v) = \theta_{\mathbb{W}} = \varphi(\theta_{\mathbb{V}})$

φ - инективно $\implies v = \theta_{\mathbb{V}} \implies \text{Ker} \varphi \subseteq \{\theta_{\mathbb{V}}\} \implies \text{Ker} \varphi = \{\theta\}$

Доказателство (\Leftarrow)

Нека $u, v \in \mathbb{V} : \varphi(u) = \varphi(v) \implies$

$\theta_{\mathbb{V}} = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v) \implies$

$u - v = \theta_{\mathbb{V}}, \{\theta_{\mathbb{V}}\} = \text{Ker}\varphi \implies$

$u = v \implies \varphi$ е инективно

6.5 Обратно линейно изображение изпраща линейно независими вектори в линейно независими вектори

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n$, $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ - обратимо Л.И.

Нека $k \in \mathbb{N} : k \leq n$ и нека $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{V}$ са лин. независими вектори

Допускаме, че техните образи са лин. зависими, тоест:

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F} : (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0) \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \mid \varphi^{-1} &\implies \\ \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(v_i) \right) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi^{-1}(\varphi(v_i)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \varphi^{-1}(\theta_{\mathbb{W}}) = \theta_{\mathbb{V}} \implies \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}} &\implies v_1, \dots, v_k - \text{лин. зависими} \implies \text{ } \nexists \\ \implies \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k) &- \text{лин. независими} \end{aligned}$$

7 Смяна на базиса

7.1 Определението за матрица на прехода между два базиса

Нека \mathbb{V} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n$

e_1, \dots, e_n - един базис на \mathbb{V}

f_1, \dots, f_n - друг базис на \mathbb{V}

$$i = 1, \dots, n \quad f_i = \sum_{j=1}^n \tau_{ji} e_j, \quad j, i = 1, \dots, n, \tau_{ji} \in \mathbb{F}$$

$T_{e \rightarrow f} = (\tau_{ji})_{n \times n} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите e, f на \mathbb{V}

7.2 Промяна на координатите на вектор при смяна на базиса

Нека \mathbb{V} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n$

Нека e_1, \dots, e_n - един базис на \mathbb{V}

Нека f_1, \dots, f_n - друг базис на \mathbb{V}

Нека $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i f_i \in \mathbb{V}$, $i = 1, \dots, n$ $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{F}$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t = T_{e \rightarrow f}(\mu_1, \dots, \mu_n)^t$, $T_{e \rightarrow f}$ - матрицата на прехода между базисите e и f .

7.3 Промяна на матрицата на линейно изображение при смяна на базиса

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n$, $\dim \mathbb{W} = m$, $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека s_1, \dots, s_n - един базис на \mathbb{V}

Нека s'_1, \dots, s'_n - друг базис на \mathbb{V}

Нека u_1, \dots, u_m - базис на \mathbb{W}

Нека u'_1, \dots, u'_m - базис на \mathbb{W}

Нека $A = M_{s \rightarrow u}(\varphi)$ е матрицата на оператора φ спрямо базисите s, u

и нека $B = T_{s \rightarrow s'}$ е матрицата на прехода между базисите s и s'

и нека $C = T_{u \rightarrow u'}$ е матрицата на прехода между базисите u и u'

и нека $D = M_{s' \rightarrow u'}(\varphi)$ е матрицата на оператора φ спрямо базисите s', u' .

Тогава е в сила равенството $D = CAB^{-1}$.

Бележка: $V_{s'} \rightarrow W_{u'} = W_u \rightarrow W_{u'} \circ V_s \rightarrow W_u \circ V_{s'} \rightarrow V_s$.

Комутативна диаграма

$$\begin{array}{ccc}
V_s & \xleftarrow{B^{-1}} & V_{s'} \\
A \downarrow & & \downarrow D \\
W_u & \xrightarrow{C} & W_{u'}
\end{array}$$

7.4 Промяна на матрицата на линеен оператор при смяна на базиса

Нека \mathbb{V} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n$, $\varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$

Нека b_1, \dots, b_n - един базис на \mathbb{V}

Нека b'_1, \dots, b'_n - друг базис на \mathbb{V}

Нека $A = M_b(\varphi)$ - матрицата на оператора φ в базиса b

и нека $B = T_{b \rightarrow b'}$ - матрицата на прехода между базисите b и b' .

Тогава $C = B^{-1}AB$ е матрицата на оператора φ в базиса b' .

Тоест $C = T_{b' \rightarrow b} M_b(\varphi) T_{b \rightarrow b'} = M_{b'}(\varphi)$.

7.5 Първа теорема за ранг на матрици

Нека $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{F}_{m \times n} \implies r(A) = r(A^t)$

8 Дуалност

8.1 Определение за дуалното пространство на дадено линейно пространство

Нека \mathbb{V} - Л.П. над полето \mathbb{F}

Тогава $\mathbb{V}^* = \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{F})$ е дуалното пространство на Л.П. на \mathbb{V}

8.2 Определение за линеен функционал

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F}

f е линеен функционал на $\mathbb{V} \iff f \in \mathbb{V}^*$

8.3 Определение за дуалното изображение на дадено линейно изображение

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - Л.П. над полето \mathbb{F}

$\mathbb{V}^*, \mathbb{W}^*$ - Дуалните пространства на Л.П. \mathbb{V}, \mathbb{W}

Ако $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \implies \varphi^* \in \text{Hom}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$

$$\forall f \in \mathbb{W}^* \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

8.4 Определение за дуален базис

Нека \mathbb{V} - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n$, \mathbb{V}^* - дуалното пространство на \mathbb{V}

e_1, \dots, e_n - базис на \mathbb{V}

f^1, \dots, f^n - дуален базис на базиса e_1, \dots, e_n

$$f^i, i = 1, \dots, n \quad f^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

8.5 Дуално изображение на произведението на две линейни изображения

Нека $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$ - Л.П. над полето \mathbb{F} , $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$

$$\psi \circ \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{U}) \implies (\psi \circ \varphi)^* \in \text{Hom}(\mathbb{U}^*, \mathbb{V}^*)$$

$$\forall f \in \mathbb{U}^* \quad (\psi \circ \varphi)^*(f) = f \circ (\psi \circ \varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi =$$

$$= \varphi^*(f \circ \psi) = \varphi^*(\psi^*(f)) = (\varphi^* \psi^*)(f)$$

$$\implies (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \psi^*$$

8.6 Връзката между матриците на едно линейно изображение и неговото дуално изображение

Нека \mathbb{V}, \mathbb{W} - К.М.Л.П. над полето \mathbb{F}

$$\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \quad \varphi^* \in \text{Hom}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$$

Нека e_1, \dots, e_n - базис на \mathbb{V}

Нека e'_1, \dots, e'_n - дуален базис на базиса e_1, \dots, e_n

Нека f_1, \dots, f_m – базис на \mathbb{W}

Нека f'_1, \dots, f'_m – дуален базис на базиса f_1, \dots, f_m

Тогава $M_{f' \rightarrow e'}(\varphi^*) = (M_{e \rightarrow f}(\varphi))^t$

8.7 Определение за аниhilатор \mathbb{U}^0 на едно линейно подпространство \mathbb{U} на едно линейно пространство \mathbb{V}

Нека \mathbb{V} – Л.П. над полето \mathbb{F}

$\mathbb{U} < \mathbb{V} \implies \mathbb{U}^0 = \{f \in \mathbb{V}^* \mid \forall u \in \mathbb{U} f(u) = 0\}$