Домашна работа 3. Вариант 2, № 45342, Група 3

Иво Стратев

2 юни 2017 г.

1 Задача 1.

Дадена е фунцкията $f(x,y) = (x^2 - xy)e^{-y}$

1.1 а) Да се изследва $f(x,y)$ за локални екстремуми.

Решение:

$$f(x,y) = (x^2 - xy)e^{-y} = xe^{-y}(x-y)$$

$$f'_x(x,y) = e^{-y}(x-y) + xe^{-y} = e^{-y}(2x-y)$$

$$f'_y(x,y) = -(x^2-xy)e^{-y} - xe^{-y} = xe^{-y}(y-x-1)$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{-y}(2x-y) = 0 \\ \\ xe^{-y}(y-x-1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ \\ x(y-x-1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ \\ 2x(2x-x-1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \{(0,0),\ (1,2)\}$$

$$f''_{xx}(x,y) = 2e^{-y}$$

$$f''_{xy}(x,y) = -e^{-y}(2x-y) - e^{-y} = e^{-y}(y-2x-1)$$

$$f''_{yx}(x,y) = e^{-y}(y-x-1) - xe^{-y} = e^{-y}(y-2x-1)$$

$$f''_{yy}(x,y) = -xe^{-y}(y-x-1) + xe^{-y} = xe^{-y}(x-y+2)$$

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{-y} & e^{-y}(y-2x-1) \\ \\ e^{-y}(y-2x-1) & xe^{-y}(x-y+2) \end{vmatrix} =$$

$$= 2xe^{-2y}(x-y+2) - e^{-2y}(y-2x-1)^2 =$$

$$= e^{-2y}(2x^2-2xy+4x) + e^{-2y}(-y^2+4xy+2y-4x^2-4x-1) =$$

$$= e^{-2y}(2xy-y^2-2x^2+2y-1)$$

$f''_{xx}(1,2) = \frac{2}{e^2} > 0$

$\Delta(1,2) = e^{-4}(4-4-2+4-1) = \frac{1}{e^4} > 0 \implies (1,2)$ е локален минимум

$\Delta(0,0) = -1 < 0 \implies (0,0)$ е седлова точка

1.2 б) Да се изследва $f(x,y)$ за глобални екстремуми в множеството $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 \leq 3\}$

Решение:

$(x^2 - xy)$ е непрекъсната фунцкия, като полином на две променливи е дефинирана навсякъде в $\mathbb{R}^2$ и $\frac{1}{e^y}$ е дефинирана и непрекъсната навсякъде в $\mathbb{R}$. Тоест $f(x,y)$ е непрекъсната и дефинирана навсякъде в $\mathbb{R}^2$ и множеството D е компакт тогава от теоремата на Вайерщрас за $f(x,y) \implies$

$\exists \ \min\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\} \ \wedge \ \exists \ \max\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$

От изследването ни досега знаем, че $f(x,y)$ има локален минимум в $(1,2)$

$1^2 - 2 + 4 = 3 \leq 3 \implies (1,2) \in D.$

От теоремата на Вайерщрас знаем, че глобалния минимум и максимум в компакт се реализират или във вътрешна точка или по контура на компактното множество. Тоест остава ни да разледаме $f(x,y)$ в множеството:

$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + y^2 = 3\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy = 3 - y^2\}.$

За целта разглеждаме функцията: $g(y) = f(x,y)|_{\overline{D}} = (3-y^2)e^{-y}$

$g'(y) = -e^{-y}(3-y^2) - 2ye^{-y} = e^{-y}(y^2-2y-3) \implies$

$$g'(y) = 0 \iff y^2 - 2y - 3 = 0 \iff (y+1)(y-3) = 0 \iff y = -1 \ \vee \ y = 3$$

$$g'(y):\ \begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 3 & \end{array} \implies g(y):\ \begin{array}{ccccc} \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ \hline & -1 & & 3 & \end{array}$$

$\implies$ $g(-1)$ е локален максимум, а $g(3)$ е локален минимум.

$$\lim_{y\to\infty} g(y) = \lim_{y\to\infty} (3-y^2)e^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{3-y^2}{e^y} = 0$$

$$\lim_{y\to-\infty} g(y) = \lim_{y\to-\infty} (3-y^2)e^{-y} = \lim_{y\to-\infty} (3-y^2)e^{y} = -\infty \implies$$

$g(y)$ е не ограничена при $y \to -\infty$

За $g(y)$ като произведение на непрекъснати фунцкии, дефинирани навсякъде в R можем да търсим глобалния минимум и максимум само в подходящ краен и затворен интервал, в който да приложим теоремата на Вайерщрас. Тогава:

$$\forall (x,y) \in D \ x^2 - xy + y^2 \le 3 \implies x^2 - 2x\tfrac{y}{2} + 4\left(\tfrac{y}{2}\right)^2 \le 3 \implies$$

$$0 \le \left(x - \tfrac{y}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}y^2 \le 3 \implies 0 \le \left(x - \tfrac{y}{2}\right)^2 \le 3 - \tfrac{3}{4}y^2 \implies 0 \le 3\left(1 - \tfrac{1}{4}y^2\right) \implies$$

$$0 \le 1 - \tfrac{1}{4}y^2 \implies y^2 \le 4 \implies |y| \le 2 \implies y \in [-2, 2]$$

Следователно търсим глобален минимум и максимум на $g(y)$ в интервала $[-2, 2]$:

$3 \notin [-2, 2]$

$g(-1) = (3-1)e^1 = 2e$

$g(2) = (3-4)e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$

$g(-2) = (3-4)e^2 = -e^2$

$f(1,2) = 1e^{-2}(1-2) = -\frac{1}{e^2} \implies$

$\min\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\} = g(-2) = -e^2$

$\max\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\} = g(-1) = 2e$

$3 - y^2 = x^2 - xy$

При $y = -1 \implies 2 = x^2 + x \implies$

$x^2 + x - 2 = 0 \implies x = 1 \lor x = -2$

При $y = -2 \implies -1 = x^2 + 2x \implies$

$x^2 + 2x + 1 = 0 \implies x = -1$

Отговор:

Глобалният минимум на $f(x, y)$ за $(x, y) \in D$ е: $-e^2$ и той се достига в точката с координати $(-1, -2)$.

Глобалният максимум на $f(x, y)$ за $(x, y) \in D$ е: $2e$ и той се достига в точките с координати $(1, -1)$, $(-2, -1)$

Проверка чрез използването на множители на Лагранж

Нека $h(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3$

Тогава разглеждаме Лагранжиана:

$\Phi(x, y, \lambda) = (\Lambda(f, h, \lambda))(x, y) = f(x, y) + \lambda h(x, y) =$

$= (x^2 - xy)e^{-y} + \lambda(x^2 - xy + y^2 - 3) = (x^2 - xy)(e^{-y} + \lambda) + \lambda y^2 = 3\lambda$

$\Phi'_x(x, y, \lambda) = (e^{-y} + \lambda)(x, y) + x(e^{-y} + \lambda) = (e^{-y} + \lambda)(2x - y)$

$\Phi'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + (\lambda(x^2 - xy + y^2 - 3))'_y = xe^{-y}(y - x - 1) + \lambda(2y - x)$

$\Phi'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 - xy + y^2 - 3$

$$\begin{cases} \Phi'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ \Phi'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ \Phi'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (e^{-y} + \lambda)(2x - y) = 0 \\ xe^{-y}(y - x - 1) + \lambda(2y - x) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \implies$$

$(e^{-y} + \lambda) = 0 \lor (2x - y) = 0$

Ако $e^{-y} + \lambda = 0 \implies \begin{cases} \lambda = -e^{-y} \\ xe^{-y}(y - x - 1) - e^{-y}(2y - x) = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \implies$

$$\begin{cases}\lambda = -e^{-y}\\ e^{-y}(yx - x^2 - x) = e^{-y}(2y - x)\\ x^2 - xy + y^2 - 3 = 0\end{cases} \implies \begin{cases}\lambda = -e^{-y}\\ yx - x^2 = 2y\\ x^2 - xy + y^2 - 3 = 0\end{cases} \implies$$

$$\begin{cases}\lambda = -e^{-y}\\ x^2 = xy - 2y\\ xy - 2y - xy + y^2 - 3 = 0\end{cases} \implies \begin{cases}\lambda = -e^{-y}\\ x^2 = xy - 2y\\ y^2 - 2y - 3 = 0\end{cases} \implies \begin{cases}\lambda = -e^{-y}\\ x^2 = xy - 2y\\ (y-3)(y+1) = 0\end{cases} \implies$$

$$\begin{cases}\lambda = -e^{-3}\\ x^2 - 3x + 6 = 0\\ y = 3\end{cases} \bigvee \begin{cases}\lambda = -e\\ x^2 + x - 2 = 0\\ y = -1\end{cases} \implies$$

$$\begin{cases}\lambda = -e^{-3}\\ x \notin \mathbb{R}\\ y = 3\end{cases} \bigvee \begin{cases}\lambda = -e\\ (x-1)(x+2) = 0\\ y = -1\end{cases} \implies \begin{cases}\lambda = -e\\ x = -2\\ y = -1\end{cases} \bigvee \begin{cases}\lambda = -e\\ x = 1\\ y = -1\end{cases}$$

Ако $2x - y = 0 \implies \begin{cases}y = 2x\\ xe^{-2x}(2x - x - 1) + \lambda(4x - x) = 0\\ x^2 - 2x^2 + 4x^2 - 3 = 0\end{cases} \implies$

$$\begin{cases}y = 2x\\ xe^{-2x}(x-1) + 3\lambda x = 0\\ 3x^2 = 3\end{cases} \implies$$

$$\begin{cases}y = 2x\\ xe^{-2x}(x-1) + 3\lambda x = 0\\ |x| = 1\end{cases} \implies$$

$$\begin{cases}y = -2\\ 2e^2 - 3\lambda = 0\\ x = -1\end{cases} \bigvee \begin{cases}y = 2\\ 0 - 3\lambda = 0\\ x = 1\end{cases} \implies \begin{cases}y = -2\\ \frac{2}{3}e^2 = \lambda\\ x = -1\end{cases} \bigvee \begin{cases}y = 2\\ \lambda = 0\\ x = 1\end{cases} \implies$$

$$\{(-2,-1),\ (1,-1),\ (-1,-2),\ (1,2)\}$$