Теоритично контролно №2 1, I, Информатика

Иво Стратев

9 август 2018 г.

1 Линейно изображение и линеен оператор

1.1 Определение линеен оператор

Нека $\mathbb{V}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V},\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) \implies \varphi \in \mathrm{Hom}\mathbb{V}$

1.2 Определение линейно изображение

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V},\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) \implies \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

1.3 Теорема $\exists!\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\dim\mathbb{V} = n$

$e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

$w_1, \ldots, w_n -$ произволни вектори от $\mathbb{W}$

$\implies \exists!\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})\ :\ i = 1, \ldots, n \quad \varphi(e_i) = w_i$

1.4 Определение за изоморфизъм на линейни пространства

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$ и $\varphi\ :\ \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ е изображение.

φ е изоморфизъм между $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$ ($\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$), ако:

1) $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$ (φ е лин. изображение)

2) φ е биекция

1.5 Н.Д.У две крайно мерни Л.П. да са изоморфни

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F}$

$\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \iff \dim\mathbb{V} = \dim\mathbb{W} \in \mathbb{N}$

2 Доказателства за линейни изображения

2.1 Докажете, че $\forall\ \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U},\ \mathbb{V}) \implies \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \theta_{\mathbb{V}}$

Доказателство 1:

Нека $u \in \mathbb{U}$ $\theta_{\mathbb{V}} = 0\varphi(u) = \varphi(0u) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad \square$

Доказателство 2:

Нека $u \in \mathbb{U}$ $\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(u - u) = \varphi(u + (-1)u) =$

$= \varphi(u) + (-1)\varphi(u) = \varphi(u) - \varphi(u) = \theta_{\mathbb{V}} \quad \square$

Доказателство 3:

$\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}} + \theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \mid -\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies$

$\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies$

$\theta_{\mathbb{V}} = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad \square$

2.2 Докажете, че $\forall\ \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U},\ \mathbb{V})$ $\forall u \in \mathbb{U} \implies \varphi(-u) = -\varphi(u)$

Доказателство:

$\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U},\ \mathbb{V}),\ \forall u \in \mathbb{U},\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \implies \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$

$\implies \lambda = -1 \implies \varphi(-u) = \varphi(-1u) = -1\varphi(u) = -\varphi(u)$

$\implies \varphi(-u) = -\varphi(u) \quad \square$

2.3 Докажете, че $\forall\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}) \implies \varphi(\theta) = \theta$

Доказателство 1:

Нека $v \in \mathbb{V}$ $\theta = 0\varphi(v) = \varphi(0v) = \varphi(\theta)$ $\quad\square$

Доказателство 2:

Нека $v \in \mathbb{V}$ $\varphi(\theta) = \varphi(v - v) = \varphi(v + (-1)v) =$

$= \varphi(v) + (-1)\varphi(v) = \varphi(v) - \varphi(v) = \theta \quad \square$

Доказателство 3:

$\varphi(\theta) = \varphi(\theta + \theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta) \mid -\varphi(\theta) \implies$

$\varphi(\theta) - \varphi(\theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta) - \varphi(\theta) \implies$

$\theta = \varphi(\theta) \quad \square$

2.4 Докажете, че $\forall\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V})$ $\forall v \in \mathbb{V} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$

Доказателство:

$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}),\ \forall v \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

$\implies \lambda = -1 \implies \varphi(-v) = \varphi(-1v) = -1\varphi(v) = -\varphi(v)$

$\implies \varphi(-v) = -\varphi(v) \quad \square$

2.5 Докажете, че едно линейно изображение изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори

Доказателство:

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $v_1,\ \ldots,\ v_n \in \mathbb{V}$ - (линейно зависими)

$\implies \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}\ :\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)\ :\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}}$

Нека $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \implies v = \theta_{\mathbb{V}} \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}},\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0) \implies$$

Векторите $\varphi(v_1),\ \ldots,\ \varphi(v_n)$ (образите на векторите $v_1,\ \ldots,\ v_n$) са линейно зависими $\square$

2.6 Докажете, че един линеен оператор изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори)

Доказателство:

Нека $\mathbb{V}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V})$

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $v_1,\ \ldots,\ v_n \in \mathbb{V}$ - (линейно зависими)

$$\implies \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}\ :\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)\ :\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta$$

Нека $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \implies v = \theta \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta) = \theta \implies$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0) \implies$$

Векторите $\varphi(v_1),\ \ldots,\ \varphi(v_n)$ (образите на векторите $v_1,\ \ldots,\ v_n$) са линейно зависими $\square$

3 Действия с линейни изображения

3.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

$\varphi + \psi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}\ :\ \forall v \in \mathbb{V}\ (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$

3.2 Определение за произведение на линейно изображение със скалар

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$, $\lambda \in \mathbb{F}$

$\lambda\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W} \ : \ \forall v \in \mathbb{V} \ (\lambda\varphi)(v) = \lambda.\varphi(v)$

3.3 Определение за произведение на линейни изображения

$\mathbb{V}, \ \mathbb{W}, \ \mathbb{U}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}, \ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \ \mathbb{W}), \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{W}, \ \mathbb{U})$

$\psi\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{U} \ : \ \forall v \in \mathbb{V} \ (\psi\varphi)(v) = (\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v))$

3.4 Определението за матрица на линейно изображение

Нека $\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F}, \ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \ \mathbb{W}), \ n = \dim\mathbb{V}, \ m = \dim\mathbb{W}$

$e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

$f_1, \ldots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

$i = 1, \ldots, n \quad \varphi(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ji} f_j, \quad \lambda_{ji} \in \mathbb{F}$

$A = (\lambda_{ji})_{m \times n} = M_{e \to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрица на φ в базисите $e, \ f$

Тоест стълбовете на матрицата A са образите на векторите $e_1, \ldots, e_n$

$A = (\varphi(e_1) \ \ldots \ \varphi(e_n))$

3.5 изобразяване на координатите на образа на вектор под действието на линейно изображение чрез координатите на вектора и матрицата на линейното изображение

Нека $\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F}, \ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \ \mathbb{W}), \ n = \dim\mathbb{V}, \ m = \dim\mathbb{W}$

$e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

$f_1, \ldots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

$A = (\lambda_{ji})_{m \times n} = M_{e \to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрица на φ в базисите $e, \ f$

Нека $v \in \mathbb{V} \implies v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ - координатите на v спрямо базиса e на $\mathbb{V}$

$$\varphi(v) \in \mathbb{W} \implies \exists(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{F}^m \ : \ \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i$$

$(\mu_1, \dots, \mu_m)$ - координатите на образа на v спрямо базиса f на $\mathbb{W}$

Тогава $(\mu_1, \dots, \mu_m)^t = A(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$

4 Матрици на линейни изображения, получени след действия с ЛИ

4.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

$\varphi + \psi : \mathbb{V} \to \mathbb{W} \ : \ \forall v \in \mathbb{V} \ (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$

4.2 Определение за матрица на линейно изображение, което е сумата на две линейни изображения

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \varphi,\ \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}),\ n = \mathrm{dim}\mathbb{V},\ m = \mathrm{dim}\mathbb{W}$

Нека $\tau = \varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Нека $e_1, \dots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

Нека $f_1, \dots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

Нека $A = M_{e \to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на φ спрямо базисите $e,\ f$

Нека $B = M_{e \to f}(\psi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на ψ спрямо базисите $e,\ f$

Нека $C = M_{e \to f}(\tau) = M_{e \to f}(\varphi + \psi) = M_{e \to f}(\varphi) + M_{e \to f}(\psi) = A + B \in \mathbb{F}_{m \times n}$

Тогава C е матрицата на $\tau = \varphi + \psi$ спрямо базисите $e,\ f$

4.3 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на линейно изображение със скалар

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \lambda \in \mathbb{F},\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}),\ n = \mathrm{dim}\mathbb{V},\ m = \mathrm{dim}\mathbb{W}$

Нека $\tau = \lambda\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Нека $e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

Нека $f_1, \ldots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

Нека $A = M_{e\to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на φ спрямо базисите $e,\ f$

Нека $C = M_{e\to f}(\tau) = M_{e\to f}(\lambda\varphi) = \lambda.M_{e\to f}(\varphi) = \lambda.A \in \mathbb{F}_{m \times n}$

Тогава C е матрицата на $\tau = \lambda.\varphi$ спрямо базисите $e,\ f$

4.4 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на две линейни изображения

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W},\ \mathbb{U}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F}$

$\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}),\ \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{W},\ \mathbb{U}),\ n = \mathrm{dim}\mathbb{V},\ m = \mathrm{dim}\mathbb{W},\ k = \mathrm{dim}\mathbb{U}$

Нека $\tau = \psi\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{U})$

Нека $e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

Нека $f_1, \ldots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

Нека $g_1,\ \ldots,\ g_k -$ базис на $\mathbb{U}$

Нека $A = M_{e\to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на φ спрямо базисите $e,\ f$

Нека $B = M_{f\to g}(\psi) \in \mathbb{F}_{k \times m}$ - матрицата на ψ спрямо базисите $f,\ g$

Нека $C = M_{e\to g}(\tau) = M_{e\to g}(\psi\varphi) = M_{e\to g}(\psi \circ \varphi) =$

$= M_{f\to g}(\psi).M_{e\to f}(\varphi) = B.A \in \mathbb{F}_{k \times n}$

Тогава C е матрицата на $\tau = \psi\varphi$ спрямо базисите $e,\ g$

4.5 Размерност на Л.П. на всички лин. изображения между две крайно мерни Л.П

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F},\ n = \mathrm{dim}\mathbb{V},\ m = \mathrm{dim}\mathbb{W}$

Тогава $\mathrm{dimHom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}) = m.n$

5 Ядро и Образ на Линейно изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

5.1 Определение за ядро на лин. изображение

$\mathrm{Ker}\varphi = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = \theta\}$

5.2 Определение за образ за лин. изображение

$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{V}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists v \in \mathbb{V}\ :\ \varphi(v) = w\}$

5.3 Определение за образ на подпространство

Нека $\mathbb{Y} \leq \mathbb{V}$, тогава образа на $\mathbb{Y}$ под действието на φ се дефинира като:

$\varphi(\mathbb{Y}) = \mathrm{Im}\varphi_{|\mathbb{Y}} = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{Y}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists y \in \mathbb{Y}\ :\ \varphi(y) = w\}$

5.4 Определение за ранг на лин. изображение

$r(\varphi) = \mathrm{dimIm}\varphi$

5.5 Определение за дефект на лин. изображение

$d(\varphi) = \mathrm{dimKer}\varphi$

5.6 Теорема(За ранга и дефекта)

$\mathbb{U},\ \mathbb{S}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{U},\ \mathbb{S})$

$dim\mathbb{U} = p \implies r(\psi) + d(\psi) = p$

5.7 Връзката между ранга на едно лин. изображение и ранга на една неговата матрица относно един всеки (в частност и един) базис е:

Нека $e_1, \ldots, e_n -$ произволен базис на $\mathbb{V}$

Нека $f_1, \ldots, f_m -$ произволен базис на $\mathbb{W}$

Ако $A = M_{e \to f}(\varphi) \implies r(\varphi) = r(A)$

6 Обратомост на ЛИ и ЛО

6.1 Определение за обратимо линейно изображение

Нека $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

φ е обратимо Л.И, ако $\exists \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{W},\ \mathbb{V})\ :\ \varphi.\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{W}},\ \psi.\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}$

6.2 Определение за обратното линейно изображение на дадено линейно изображение

Нека $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Ако φ е обратимо Л.И, то

$\exists!\ \varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{W},\ \mathbb{V})\ :\ \varphi.\varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{W}},\ \varphi^{-1}.\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}$

φ^{-1} е обратното Л.И. на φ

6.3 Доказателство обратният на обратим линеен оператор също е обратим

Нека $\mathbb{V}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}\mathbb{V}$

φ - обратим Л.О. $\implies \varphi.\varphi^{-1} = \varphi^{-1}.\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}$

Ако φ^{-1} е обратим Л.О, то $(\varphi^{-1})^{-1}.\varphi^{-1} = \varphi^{-1}.(\varphi^{-1})^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}$

$\varphi = \varphi.\mathrm{id}_{\mathbb{V}} = \varphi(\varphi^{-1}.(\varphi^{-1})^{-1}) = (\varphi.\varphi^{-1}).(\varphi^{-1})^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}.(\varphi^{-1})^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1}$

$\implies (\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$

6.4 Теорема

Нека $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

φ е интективно $\iff \mathrm{Ker}\varphi = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$

Доказателство (в двете посоки):

Доказателство ($\implies$) $\{\theta_{\mathbb{V}}\} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$ ($\theta_{\mathbb{V}} \in \mathrm{Ker}\varphi$)

Нека $v \in \mathrm{Ker}\varphi \implies \varphi(v) = \theta_{\mathbb{W}} = \varphi(\theta_{\mathbb{V}})$

φ - инективно $\implies v = \theta_{\mathbb{V}} \implies \mathrm{Ker}\varphi \subseteq \{\theta_{\mathbb{V}}\} \implies \mathrm{Ker}\varphi = \{\theta\}$

Доказателство ($\Leftarrow$)

Нека $u,\ v \in \mathbb{V}\ :\ \varphi(u) = \varphi(v) \implies$

$\theta_{\mathbb{V}} = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v) \implies$

$u - v = \theta_{\mathbb{V}},\ \{\theta_{\mathbb{V}}\} = \mathrm{Ker}\varphi \implies$

$u = v \implies \varphi$ е инективно

6.5 Обратимо линейно изображение изпраща линейно независими вектори в линейно независими вектори

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \dim\mathbb{V} = n,\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$ - обратимо Л.И.

Нека $k \in \mathbb{N}\ :\ k \leq n$ и нека $v_1,\ \ldots v_k \in \mathbb{V}$ са лин. независи вектори

Допускаме, че техните образи са лин. зависими, тоест:

$$\exists\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k \in \mathbb{F}\ :\ (\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k) \neq (0,\ \ldots,\ 0) \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}}\ |\ \varphi^{-1} \implies$$

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\varphi(v_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\varphi^{-1}(\varphi(v_i)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \varphi^{-1}(\theta_{\mathbb{W}}) = \theta_{\mathbb{V}} \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}} \implies v_1,\ \ldots v_k \text{ - лин. зависими } \implies \lightning$$

$\implies \varphi(v_1),\ \ldots\varphi(v_k)$ - лин. независими

7 Смяна на базиса

7.1 Определението за матрица на прехода между два базиса

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \dim\mathbb{V} = n$
$e_1, \ldots, e_n$ - един базис на $\mathbb{V}$

$f_1, \ldots, f_n$ - друг базис на $\mathbb{V}$

$$i = 1, \ldots, n \quad f_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ji}e_j, \quad j,\ i = 1, \ldots, n,\ \tau_{ji} \in \mathbb{F}$$

$T_{e\to f} = (\tau_{ji})_{n\,\times\,n} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите $e,\ f$ на $\mathbb{V}$

7.2 Промяна на координатите на вектор при смяна на базиса

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F}$, $\dim\mathbb{V} = n$

Нека $e_1, \ldots, e_n$ - един базис на $\mathbb{V}$

Нека $f_1, \ldots, f_n$ - друг базис на $\mathbb{V}$

Нека $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i \in \mathbb{V}, \quad i = 1, \ldots, n\ \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{F}$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t = T_{e\to f}(\mu_1, \ldots, \mu_n)^t,\ T_{e\to f}$ - матрицата на прехода между базисите e и f.

7.3 Промяна на матрицата на линейно изображение при смяна на базиса

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \dim\mathbb{V} = n,\ \dim\mathbb{W} = m,\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Нека $s_1, \ldots, s_n$ е един базис на $\mathbb{V}$

Нека $s'_1, \ldots, s'_n$ е друг базис на $\mathbb{V}$

Нека $u_1, \ldots, u_m$ е базис на $\mathbb{W}$

Нека $u'_1, \ldots, u'_m$ е друг базис на $\mathbb{W}$

Нека $A = M_{s\to u}(\varphi)$ е матрицата на оператора φ спрямо базисите $s,\ u$

и нека $B = T_{s\to s'}$ е матрицата на прехода между базисите s и s'

и нека $C = T_{u\to u'}$ е матрицата на прехода между базисите u и u'

и нека $D = M_{s'\to u'}(\varphi)$ е матрицата на оператора φ спрямо базисите $s',\ u'$.

Тогава е в сила равенството $D = CAB^{-1}$.

Бележка: $M_{s'\to u'}(\varphi) = T_{u\to u'} \circ M_{s\to u}(\varphi) \circ T_{s'\to s}$.

Комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} V_s \arrow[d, "A"'] & V_{s'} \arrow[l, "B^{-1}"'] \arrow[d, "D"] \\ W_u \arrow[r, "C"'] & W_{u'} \end{tikzcd}$$

7.4 Промяна на матрицата на линеен оператор при смяна на базиса

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \dim\mathbb{V} = n,\ \varphi \in \mathrm{Hom}\mathbb{V}$

Нека $b_1, \ldots, b_n$ - един базис на $\mathbb{V}$

Нека $b'_1, \ldots, b'_n$ - друг базис на $\mathbb{V}$

Нека $A = M_b(\varphi)$ - матрицата на оператора φ в базиса b

и нека $B = T_{b\to b'}$ - матрицата на прехода между базисите b и b'.

Тогава $C = B^{-1}AB$ е матрицата на оператора φ в базиса b'.

Тоест $C = T_{b'\to b}M_b(\varphi)T_{b\to b'} = M_{b'}(\varphi)$.

7.5 Първа теорема за ранг на матрици

Нека $m,\ n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{F}_{m\times n} \implies r(A) = r(A^t)$

8 Дуалност

8.1 Определение за дуалното пространство на дадено линейно пространство

Нека $\mathbb{V}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$

Тогава $\mathbb{V}^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{F})$ е дуалното пространство на Л.П. на $\mathbb{V}$

8.2 Определение за линеен функционал

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$

f е линеен функционал на $\mathbb{V} \iff f \in \mathbb{V}^*$

8.3 Определение за дуалното изображение на дадено линейно изображение

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$

$\mathbb{V}^*,\ \mathbb{W}^*$ - Дуалните пространства на Л.П. $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$

Ако $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}) \implies \varphi^* \in \text{Hom}(\mathbb{W}^*,\ \mathbb{V}^*)$

$\forall f \in \mathbb{W}^*\ \varphi^*(f) = f \circ \varphi$

8.4 Определение за за дуален базис

Нека $\mathbb{V}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \dim\mathbb{V} = n,\ \mathbb{V}^*$ - дуалното пространство на $\mathbb{V}$

$e_1, \ldots, e_n$ - базис на $\mathbb{V}$

$f^1, \ldots, f^n$ - дуален базис на базиса $e_1, \ldots, e_n$

$j,\ i = 1, \ldots, n \quad f^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

8.5 Дуално изображение на произведението на две линейни изображения

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W},\ \mathbb{U}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F},\ \in \text{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}), \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W},\ \mathbb{U})$

$\psi\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{U}) \implies (\psi\varphi)^* \in Hom(\mathbb{U}^*, \mathbb{V}^*)$

$\forall f \in \mathbb{U}^*\ (\psi\varphi)^*(f) = f \circ (\psi\varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi =$

$= \varphi^*(f \circ \psi) = \varphi^*(\psi^*(f)) = (\varphi^*\psi^*)(f)$

$\implies (\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$

8.6 Връзката между матриците на едно линейно изображение и неговото дуално изображение

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П. над полето $\mathbb{F}$

$\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}),\ \varphi^* \in \text{Hom}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$

Нека $e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

Нека $e'_1, \ldots, e'_n -$ дуален базис на базиса $e_1, \ldots, e_n$

Нека $f_1, \dots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

Нека $f'_1, \dots, f'_m -$ дуален базис на базиса $f_1, \dots, f_m$

Тогава $M_{f' \to e'}(\varphi^*) = (M_{e \to f}(\varphi))^t$

8.7 Определение за анихилатор $\mathbb{U}^0$ на едно линейно подпрансво $\mathbb{U}$ на едно линейно пространство $\mathbb{V}$

Нека $\mathbb{V}$ - Л.П. над полето $\mathbb{F}$

$\mathbb{U} < \mathbb{V} \implies \mathbb{U}^0 = \{f \in \mathbb{V}^* \mid \forall u \in \mathbb{U}\ f(u) = 0\}$