Задача 1.

Нека p и q са прости числа. Нека n е естествно число, такова че $n \geqslant 2$.

- (5т) Докажете, че $\varphi(pq) \geqslant |p - q|$;
- (5т) Докажете, че $\varphi(p^n) \leqslant (2p)^n$;
- (5т) Докажете, че ако $p \neq 2$, то $\varphi(p^n) \geqslant np$;
- (5т) Намерете решенията на уравнението $\varphi(p^s q^k) = \varphi(q^l)$;
- (5т) Намерете решенията на уравнението $\varphi(\varphi(n)) = p$.

Задача 2.

Нека G е непразно множество и нека, то образува група относно бинарна операция $*$. Нека f е функция от G в G, която е хомоморфизъм на групата образувана от G относно $*$ в себе си.
Нека $\mathsf{K} = \{(x, y) \in \mathsf{G} \times \mathsf{G} \mid (\exists g \in \mathsf{G})(y = f(g))\}$.
Въвеждаме бинарна операция $\otimes$ в K по правилото

$$(x, y) \otimes (z, t) = (x * z, y * t).$$

- (5т) Докажете, че K образува група относно операцията $\otimes$;
- (5т) Докажете, че групата, която K образува относно $\otimes$ има подгрупа, която е изоморфна на групата образувана от G относно $*$;
- (5т) Докажете, че групата, която K образува относно $\otimes$ има подгрупа, която е изоморфна на подгрупата образувана от $\mathrm{Ker}(f)$ на групата образувана от G относно $*$;
- (5т) Докажете, че групата, която K образува относно $\otimes$ има подгрупа, която е изоморфна на подгрупата образувана от $\mathrm{Im}(f)$ на групата образувана от G относно $*$;
- (5т) Нека $h : \mathsf{G} \times \mathsf{G} \to \mathsf{G}$, която действа по правилото $h(a, b) = f(a) * b$. Докажете, че h задава действие на групата, образувана от G относно $*$, върху множеството G.

Задача 3.

Нека R е непразно множество, което образува пръстен. Нека този пръстен означим с $\mathcal{R}$. Нека $\mathsf{Root} : \mathcal{P}(\mathsf{R}) \to \mathcal{P}(\mathsf{R})$ е функция, действаща по правилото $\mathsf{Root}(\mathsf{K}) = \{x \in \mathsf{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}_+)(x^n \in \mathsf{K})\}$. Нека $\mathsf{f} : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ и f е хомоморфизъм на $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$.
Нека $\mathsf{Image} : \mathcal{P}(\mathsf{R}) \to \mathcal{P}(\mathsf{R})$ е функция, действаща по правилото $\mathsf{Image}(\mathsf{K}) = \{y \in \mathsf{R} \mid (\exists x \in \mathsf{K})(y = \mathsf{f}(x))\}$.
Нека $\mathsf{PreImage} : \mathcal{P}(\mathsf{R}) \to \mathcal{P}(\mathsf{R})$ е функция, действаща по правилото $\mathsf{PreImage}(\mathsf{K}) = \{x \in \mathsf{R} \mid (\exists y \in \mathsf{K})(y = \mathsf{f}(x))\}$.
Нека $I \in \mathcal{P}(\mathsf{R}) \setminus \{\varnothing\}$ и I образува идеал на $\mathcal{R}$.

- (5т) Докажете, че $\mathsf{Image}(\mathsf{Root}(I)) \subseteq \mathsf{Root}(\mathsf{Image}(I))$;
- (10т) $\mathsf{Root}(\mathsf{PreImage}(I)) = \mathsf{PreImage}(\mathsf{Root}(I))$;
- (10т) Ако $\mathrm{Img}(\mathsf{f}) = \mathsf{R}$ и $\mathrm{Ker}(\mathsf{f}) \subseteq I$, то $\mathsf{Image}(\mathsf{Root}(I)) = \mathsf{Root}(\mathsf{Image}(I))$.

Забележка: $\mathcal{P}(\mathsf{R})$ е означение за степенното множество на R, тоест множеството от всички подмножества на R.

Задача 4. (4т + 4т + 4т)

Нека p е просто число. Нека f, g и h са полиноми с комплексни коефициенти, такива че

$$f(x) = x^3 - 2x - p$$
$$g(x) = x^3 + 5x + 3$$
$$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Нека x_1, x_2 и x_3 са корените на f. Определете коефициентите a, b и c, така че $g(x_1)$, $g(x_2)$ и $g(x_3)$ да са корените на h.