# Лексикографското произведение на фундирани множества е фундирано множество

Иво Стратев

21 март 2019 г.

Нека функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ е дефинирана по следния начин:

$$f(0) = 0$$
$$f(2n) = \frac{f(n)}{f(n)+1}$$
$$f(2n+1) = f(n) + 1.$$

Да означим с $\mathbb{Q}_+$ множеството от неотрицателните рационални числа. Тоест

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{x}{y} \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{N}^2 \;\&\; y > 0 \;\&\; gcd(x, y) = 1 \right\}$$

## Лема 1.

$(\forall n \in \mathbb{N})[n > 0 \longrightarrow f(n) > 0]$

### Доказателство (с индукция):

**База:**

$$f(1) = f(2.0 + 1) = f(0) + 1 = 0 + 1 = 1 > 0$$

**Индукционна стъпка:**

Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ и нека $(\forall m \in \mathbb{N})[1 \leq m < n \longrightarrow f(m) > 0]$ (*)
Възможни са два случая:

- $n \equiv 0 \pmod 2$
  Тогава $(\exists! k \in \mathbb{N})[n = 2k]$. Нека тогава $k \in \mathbb{N} \;\&\; n = 2k$. $n > 1$ и $n = 2k$ така $n \geq 2$ следователно $1 \leq k < n$. Тогава $f(n) = f(2k) = \dfrac{f(k)}{f(k)+1}$ и от (*), следва че $f(k) > 0$. Но тогава и $f(k) + 1 > 0$ и значи
  $f(n) = f(k)(f(k) + 1)^{-1} > 0$.

- $n \equiv 1 \pmod 2$
  Тогава $(\exists! k \in \mathbb{N})[n = 2k + 1]$. Нека тогава $k \in \mathbb{N} \;\&\; n = 2k + 1$. $n > 1$ и $n = 2k+1$ така $n \geq 3$ следното $1 \leq k < n$. Тогава $f(n) = f(2k+1) = f(k)+1$ и от (*) $f(k) > 0$. Следователно $f(n) > 1 > 0$.

Така $f(n) > 0$.

### Заключение:

$(\forall n \in \mathbb{N})[n > 0 \longrightarrow f(n) > 0]$. $\square$

## Следствие:

$f[\mathbb{N} \setminus \{0\}] \subseteq \mathbb{Q} \cap \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q}_+$.

# Лема 2.

$Range(f) \subseteq \mathbb{Q}_+$

## Доказателство:

$Range(f) = f[Dom(f)] = f[\mathbb{N}] = f[(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{0\}] \subseteq \mathbb{Q}_+ \cup f[\{0\}] = \mathbb{Q}_+ \cup \{f(0)\} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} = \mathbb{Q}_+$, защото от следствието на Лема 1. имаме, че $f[\mathbb{N} \setminus \{0\}] \subseteq \mathbb{Q}_+$. Следователно $Range(f) \subseteq \mathbb{Q}_+$. $\square$

# Лема 3.

$(\forall n \in \mathbb{N})[n \equiv 0 \pmod 2 \longrightarrow 0 \leq f(n) < 1]$

## Доказателство:

Възможни са два случая:

- $n = 0$
  Тогава $f(0) = 0$ и $0 \leq 0 < 1$. Тоест $0 \leq f(n) < 1$
- $(\exists k \in \mathbb{N})[k > 0 \;\&\; n = 2k]$
  Нека $k \in \mathbb{N} \;\&\; k > 0 \;\&\; n = 2k$. Тогава $f(n) = f(2k) = \dfrac{f(k)}{f(k)+1}$. Но $k \in \mathbb{N} \;\&\; k > 0$ и от Лема 1. $f(k) > 0$. Следователно $0 < f(k) < f(k) + 1$ и значи $0 < \dfrac{f(k)}{f(k)+1} = f(2k) = f(n) < 1$.

### Заключение:

$(\forall n \in \mathbb{N})[n \equiv 0 \pmod 2 \longrightarrow 0 \leq f(n) < 1]$ $\square$

# Лема 4.

$(\forall n \in \mathbb{N})[n \equiv 1 \pmod 2 \longrightarrow f(n) \geq 1]$

## Доказателство:

Нека $n \in \mathbb{N}$. Тогава $f(2n+1) = f(n) + 1$ по дефиниция. От Лема 2. следва, че $f(n) \geq 0$. Следователно $1 \leq f(n) + 1 = f(2n+1)$.

### Заключение:

$(\forall n \in \mathbb{N})[n \equiv 1 \pmod 2 \longrightarrow f(n) \geq 1]$ $\square$

# Лема 5.

$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})[n \not\equiv m \pmod 2 \longrightarrow f(n) \neq f(m)]$

## Доказателство:

Нека $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ и $n \not\equiv m \pmod 2$. Нека без ограничение на общността $n \equiv 0 \pmod 2$ & $m \equiv 1 \pmod 2$. Тогава от Лема 3. $0 \leq f(n) < 1$. От Лема 4. $f(m) \geq 1$. Следователно $f(n) \neq f(m)$.

### Заключение:

$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})[n \not\equiv m \pmod 2 \longrightarrow f(n) \neq f(m)]$ $\square$

# Твърдение 1: $f$ е инекция.

## Доказателство:

Да допуснем противното, тоест че $f$ не е инекция. Тогава

$$(\exists (n,m) \in \mathbb{N}^2)[n \neq m \;\&\; f(n) = f(m)]$$

Да разгледаме следното множество:

$$I := \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m \;\&\; f(n) = f(m)\}$$

От допускането следва, че $I \neq \emptyset$. Както знаем $(\mathbb{N}^2, <_{lex\mathbb{N}})$ е фундирано.
$I \subseteq \mathbb{N}^2$ & $I \neq \emptyset$ тогава $I$ има минимален елемент спрямо $<_{lex\mathbb{N}}$.
Нека тогава $(x,y)$ е минимален елемент на $I$ спрямо $<_{lex\mathbb{N}}$.
От контрапозицията на Лема 5. следва, че $x \equiv y \pmod 2$.
Тогава са възможни са два случая:

- $x \equiv y \equiv 0 \pmod 2$
  Тогава $(\exists! n \in \mathbb{N})(\exists! m \in \mathbb{N})[x = 2n \;\&\; y = 2m \;\&\; n < m]$. Нека тогава $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ & $x = 2n$ & $y = 2m$ & $n < m$.
  Понеже $(x,y) \in I$ то $f(x) = f(y)$. Тогава

$$\begin{aligned} f(x) = f(2n) = \frac{f(n)}{f(n)+1} = \frac{f(m)}{f(m)+1} = f(2m) = f(y) &\longleftrightarrow \\ f(n)(f(m)+1) = f(m)(f(n)+1) &\longleftrightarrow \\ f(n)f(m) + f(n) = f(m)f(n) + f(m) &\longleftrightarrow \\ f(n) = f(m). \end{aligned}$$

  Имаме $x < y$ & $x = 2n$ & $y = 2m$ & $n < m$. Също така $0 \leq x < y$ и значи $y \geq 2$, но тогава $m < y$. Следователно $m < y$ & $(x = n \;\vee\; n < x)$. Тогава $x = n$ & $m < y \;\vee\; n < x$ и значи $(n,m) <_{lex\mathbb{N}} (x,y)$ & $n < m$ & $f(n) = f(m)$ и значи $(n,m) <_{lex\mathbb{N}} (x,y)$ & $(n,m) \in I$, което е Абсурд понеже $(x,y)$ е минимален.

- $x \equiv y \equiv 1 \pmod 2$
  Тогава $(\exists! n \in \mathbb{N})(\exists! m \in \mathbb{N})[x = 2n+1 \;\&\; y = 2m+1 \;\&\; n < m]$. Нека тогава $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ & $x = 2n+1$ & $y = 2m+1$ & $n < m$.
  Понеже $(x,y) \in I$ то $f(x) = f(y)$. Тогава

$$\begin{aligned} f(x) = f(2n+1) = f(n)+1 = f(m)+1 = f(2m+1) = f(y) &\longleftrightarrow \\ f(n) = f(m). \end{aligned}$$

Имаме $x < y$ & $x = 2n + 1$ & $y = 2m + 1$ & $n < m$ & $f(n) = f(m)$ & $n < x$ тоест $(n, m) <_{lex\mathbb{N}} (x, y)$ & $(n, m) \in I$, което е Абсурд понеже $(x, y)$ е минимален.

Няма друг възможен случай. И в двата случая получихме противоречие с минималността на $(x, y)$, което е Абсурд. Тоагва не е вярно, че $f$ не е инекция, тоест $f$ е инекция. $\square$

# Твърдение 2: $Range(f) = \mathbb{Q}_+$

## Доказателство:

Ще докажем следното твърдение

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2)\left[y > 0 \;\&\; gcd(x, y) = 1 \longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\left[f(n) = \frac{x}{y}\right]\right]$$

с индукция в $(\mathbb{N}^2, <_{lex\mathbb{N}})$.

## База:

- $(0, 0)$
  $\neg(0 > 0)$ следователно предпоставката на импликацията е лъжа и значи твърдението е истина за $(0, 0)$.

- $(0, 1)$
  $1 > 0$ & $gcd(0, 1) = 1$ & $f(0) = 0$ & $0 \in \mathbb{N}$ е истина. Следователно твърдението е истина за $(0, 1)$.

## Индукционна стъпка:

Нека $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ и $y > 0$ & $gcd(x, y) = 1$ и $(x, y) \neq (0, 1)$ и нека (*):
$(\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2)\left[(n, m) <_{lex\mathbb{N}} (x, y) \longrightarrow \left(m > 0 \;\&\; gcd(n, m) = 1 \longrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\left[f(k) = \frac{n}{m}\right]\right)\right]$.
(*) е логически еквивалентно на следното твърдение (**):
$(\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2)\left[(n, m) <_{lex\mathbb{N}} (x, y) \;\&\; m > 0 \;\&\; gcd(n, m) = 1 \longrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\left[f(k) = \frac{n}{m}\right]\right]$.
Възможни са два случая:

- $x = y$
  Тогава $gcd(x, y) = x = 1$ & $gcd(x, y) = y = 1$. Тоест $(x, y) = 1$. От дефиницията на $f$ имаме $f(1) = f(2.0 + 1) = f(0) + 1 = 0 + 1 = 1 = \frac{1}{1}$ и тогава твърдението е истина.

- $x \neq y$
  Възможни са два алтернативни подслучая:

  - $x < y$
    Тогава $\frac{x}{y} < 1$. Поглеждайки как е дефинирана $f$ върху четни числа се досещаме да разгледаме множеството от решения на уравнието

$$\frac{z}{z + 1} = \frac{x}{y}.$$

Така

$$\frac{z}{z+1} = \frac{x}{y} \longleftrightarrow zy = x(z+1) \longleftrightarrow zy = zx + x \longleftrightarrow z = \frac{x}{y-x} \longleftrightarrow z \in \left\{\frac{x}{y-x}\right\}$$

Понеже $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ & $y > x$, то $y - x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Нека $d = gcd(x, y-x)$. Тогава $d \mid x$ & $d \mid y-x$. Следователно $d \mid y$ и така $d \mid gcd(x,y) = 1$. Следователно $d = 1$. Така в сила е $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}_+ \longleftrightarrow \frac{x}{y-x} \in \mathbb{Q}_+$. Имаме $(x, y-x) <_{lex\mathbb{N}} (x,y)$ & $y-x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ & $gcd(x, y-x) = 1$ следователно от (**) $(\exists k \in \mathbb{N})\left[f(k) = \frac{x}{y-x}\right]$. Нека тогава $k \in \mathbb{N}$ и $f(k) = \frac{x}{y-x}$. Тогава $\frac{x}{y} = \frac{f(k)}{f(k)+1} = f(2k)$ & $2k \in \mathbb{N}$.

– $x > y$

Тогава $\frac{x}{y} \geq 1$. Поглеждайки как е дефинирана $f$ върху нечетни числа се досещаме да разгледаме множеството от решения на уравнието

$$z + 1 = \frac{x}{y}.$$

Така

$$z + 1 = \frac{x}{y} \longleftrightarrow z = \frac{x}{y} - 1 \longleftrightarrow z = \frac{x-y}{y} \longleftrightarrow z \in \left\{\frac{x-y}{y}\right\}$$

Понеже $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ & $x > y$, то $x - y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Нека $d = gcd(x-y, y)$. Тогава $d \mid x-y$ & $d \mid y$. Следователно $d \mid x$ и така $d \mid gcd(x,y) = 1$. Следователно $d = 1$. Така в сила е $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}_+ \longleftrightarrow \frac{x-y}{y} \in \mathbb{Q}_+$. Имаме $(x-y, x) <_{lex\mathbb{N}} (x,y)$ & $x - y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ & $gcd(x-y, y) = 1$ следователно от (**) $(\exists k \in \mathbb{N})\left[f(k) = \frac{x-y}{y}\right]$. Нека тогава $k \in \mathbb{N}$ и $f(k) = \frac{x-y}{y}$. Тогава $\frac{x}{y} = f(k) + 1 = f(2k+1)$ & $2k+1 \in \mathbb{N}$.

### Заключение:

$(\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2)\left[y > 0 \;\&\; gcd(x,y) = 1 \longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\left[f(n) = \frac{x}{y}\right]\right]$ е истина, което е еквивалентно с $(\forall q \in \mathbb{Q}_+)(\exists n \in \mathbb{N})[f(n) = q]$ е истина, което пък е еквивалентно с $(\forall q \in \mathbb{Q}_+)[q \in Range(f)]$ е истина. Тоест $\mathbb{Q}_+ \subseteq Range(f)$ е истина. От Лема 2. имаме, че $Range(f) \subseteq \mathbb{Q}_+$. Следователно $Range(f) = \mathbb{Q}_+$. $\square$

## Твърдение 3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ е биекция.

### Доказателство:

От Твърдение 2. имаме, че $Range(f) = \mathbb{Q}_+$. От Твърдение 1. имаме, че $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ е инекция, но тогава $f : \mathbb{N} \to Range(f)$ е биекция и следователно $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ е биекция. $\square$