# Теоритично контролно №2 1, I, Информатика

Иво Стратев

13 декември 2017 г.

## 1 Линейно изображение и линеен оператор

### 1.1 Определение линеен оператор

Нека $\mathbb{V}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V},\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\varphi\left(\sum_{i=n}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=n}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) \in \mathbb{V} \implies \varphi \in \mathrm{Hom}\mathbb{V}$$

### 1.2 Определение линейно изображение

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V},\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\varphi\left(\sum_{i=n}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=n}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) \in \mathbb{V} \implies \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$$

### 1.3 Теорема $\exists!\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\dim\mathbb{V} = n$

$e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

$w_1, \ldots, w_n -$ произволни вектори от $\mathbb{W}$

$\implies \exists!\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})\ :\ i = 1, \ldots, n \quad \varphi(e_i) = w_i$

### 1.4 Определение за изоморфизъм на линейни пространства

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$ и $\varphi\ :\ \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ е изображение.

$\varphi$ е изоморфизъм между $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$ ($\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$), ако:

1) $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$ ($\varphi$ е лин. изображение)

2) $\varphi$ е биекция

### 1.5 Н.Д.У две крайно мерни Л.П. да са изоморфни

Нека $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$

$\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \iff \mathrm{dim}\mathbb{V} = \mathrm{dim}\mathbb{W} \in \mathbb{N}$

## 2 Доказателства за линейни изображения

### 2.1 Докажете, че $\forall\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{U},\ \mathbb{V}) \implies \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \theta_{\mathbb{V}}$

Доказателство 1:

Нека $u \in \mathbb{U}$ $\theta_{\mathbb{V}} = 0\varphi(u) = \varphi(0u) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad \square$

Доказателство 2:

Нека $u \in \mathbb{U}$ $\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(u - u) = \varphi(u + (-1)u) =$

$= \varphi(u) + (-1)\varphi(u) = \varphi(u) - \varphi(u) = \theta_{\mathbb{V}} \quad \square$

Доказателство 3:

$\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}} + \theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \mid -\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies$

$\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies$

$\theta_{\mathbb{V}} = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad \square$

### 2.2 Докажете, че $\forall\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{U},\ \mathbb{V})$ $\forall u \in \mathbb{U} \implies \varphi(-u) = -\varphi(u)$

Доказателство:

$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{U},\ \mathbb{V}),\ \forall u \in \mathbb{U},\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \implies \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$

$\implies \lambda = -1 \implies \varphi(-u) = \varphi(-1u) = -1\varphi(u) = -\varphi(u)$

$\implies \varphi(-u) = -\varphi(u) \quad \square$

## 2.3 Докажете, че $\forall\, \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}) \implies \varphi(\theta) = \theta$

Доказателство 1:

Нека $v \in \mathbb{V}$ $\theta = 0\varphi(v) = \varphi(0v) = \varphi(\theta) \quad \square$

Доказателство 2:

Нека $v \in \mathbb{V}$ $\varphi(\theta) = \varphi(v - v) = \varphi(v + (-1)v) =$

$= \varphi(v) + (-1)\varphi(v) = \varphi(v) - \varphi(v) = \theta \quad \square$

Доказателство 3:

$\varphi(\theta) = \varphi(\theta + \theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta) \mid -\varphi(\theta) \implies$

$\varphi(\theta) - \varphi(\theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta) - \varphi(\theta) \implies$

$\theta = \varphi(\theta) \quad \square$

## 2.4 Докажете, че $\forall\, \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V})$ $\forall v \in \mathbb{V} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$

Доказателство:

$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}),\ \forall v \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

$\implies \lambda = -1 \implies \varphi(-v) = \varphi(-1v) = -1\varphi(v) = -\varphi(v)$

$\implies \varphi(-v) = -\varphi(v) \quad \square$

## 2.5 Докажете, че едно линейно изображение изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори

Доказателство:

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $v_1,\ \ldots,\ v_n \in \mathbb{V}$ - (линейно зависими)

$\implies \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F} \ :\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0) \ :\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}}$

Нека $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \implies v = \theta_{\mathbb{V}} \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}},\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \implies$$

Векторите $\varphi(v_1),\ \dots,\ \varphi(v_n)$ (образите на векторите $v_1,\ \dots,\ v_n$) са линейно зависими $\square$

## 2.6 Докажете, че един линеен оператор изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори)

Доказателство:

Нека $\mathbb{V}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V})$

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $v_1,\ \dots,\ v_n \in \mathbb{V}$ - (линейно зависими)

$$\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}\ :\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)\ :\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta$$

Нека $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \implies v = \theta \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta) = \theta \implies$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \implies$$

Векторите $\varphi(v_1),\ \dots,\ \varphi(v_n)$ (образите на векторите $v_1,\ \dots,\ v_n$) са линейно зависими $\square$

# 3 Действия с линейни изображения

## 3.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

$\varphi + \psi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}\ :\ \forall v \in \mathbb{V}\ (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$

## 3.2 Определение за произведение на линейно изображение със скалар

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$, $\lambda \in \mathbb{F}$

$\lambda\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W} \ : \ \forall v \in \mathbb{V} \ (\lambda\varphi)(v) = \lambda.\varphi(v)$

## 3.3 Определение за произведение на линейни изображения

$\mathbb{V}, \ \mathbb{W}, \ \mathbb{U}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}, \ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \ \mathbb{W}), \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{W}, \ \mathbb{U})$

$\psi\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{U} \ : \ \forall v \in \mathbb{V} \ (\psi\varphi)(v) = (\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v))$

## 3.4 Определението за матрица на линейно изображение

Нека $\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}, \ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \ \mathbb{W}), \ n = \dim\mathbb{V}, \ m = \dim\mathbb{W}$

$e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

$f_1, \ldots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

$$i = 1, \ldots, n \quad \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ji} f_j, \quad \lambda_{ji} \in \mathbb{F}$$

$A = (\lambda_{ji})_{m \times n} = M_{e \to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрица на $\varphi$ в базисите $e, \ f$

Тоест стълбовете на матрицата $A$ са образите на векторите $e_1, \ldots, e_n$

$A = (\varphi(e_1) \ \ldots \ \varphi(e_n))$

## 3.5 изобразяване на координатите на образа на вектор под действието на линейно изображение чрез координатите на вектора и матрицата на линейното изображение

Нека $\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П над полето $\mathbb{F}, \ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \ \mathbb{W}), \ n = \dim\mathbb{V}, \ m = \dim\mathbb{W}$

$e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

$f_1, \ldots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

$A = (\lambda_{ji})_{m \times n} = M_{e \to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрица на $\varphi$ в базисите $e, \ f$

Нека $v \in \mathbb{V} \implies v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ - координатите на $v$ спрямо базиса $e$ на $\mathbb{V}$

$\varphi(v) \in \mathbb{W} \implies \exists(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{F}^m \;:\; \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i$

$(\mu_1, \dots, \mu_m)$ - координатите на образа на $v$ спрямо базиса $f$ на $\mathbb{W}$

Тогава $(\mu_1, \dots, \mu_m)^t = A(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$

# 4 Матрици на линейни изображения, получени след действия с ЛИ

## 4.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F},\ \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

$\varphi + \psi : \mathbb{V} \to \mathbb{W} \;:\; \forall v \in \mathbb{V}\ (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$

## 4.2 Определение за матрица на линейно изображение, което е сумата на две линейни изображения

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П над полето $\mathbb{F},\ \varphi,\ \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}),\ n = \mathrm{dim}\mathbb{V},\ m = \mathrm{dim}\mathbb{W}$

Нека $\tau = \varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Нека $e_1, \dots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

Нека $f_1, \dots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

Нека $A = M_{e \to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на $\varphi$ спрямо базисите $e,\ f$

Нека $B = M_{e \to f}(\psi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на $\psi$ спрямо базисите $e,\ f$

Нека $C = M_{e \to f}(\tau) = M_{e \to f}(\varphi + \psi) = M_{e \to f}(\varphi) + M_{e \to f}(\psi) = A + B \in \mathbb{F}_{m \times n}$

Тогава $C$ е матрицата на $\tau = \varphi + \psi$ спрямо базисите $e,\ f$

## 4.3 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на линейно изображение със скалар

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П над полето $\mathbb{F},\ \lambda \in \mathbb{F},\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}),\ n = \mathrm{dim}\mathbb{V},\ m = \mathrm{dim}\mathbb{W}$

Нека $\tau = \lambda\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Нека $e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

Нека $f_1, \ldots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

Нека $A = M_{e \to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на $\varphi$ спрямо базисите $e,\ f$

Нека $C = M_{e \to f}(\tau) = M_{e \to f}(\lambda\varphi) = \lambda.M_{e \to f}(\varphi) = \lambda.A \in \mathbb{F}_{m \times n}$

Тогава $C$ е матрицата на $\tau = \lambda.\varphi$ спрямо базисите $e,\ f$

### 4.4 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на две линейни изображения

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W},\ \mathbb{U}$ - К.М.Л.П над полето $\mathbb{F}$

$\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}),\ \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{W},\ \mathbb{U}),\ n = \mathrm{dim}\mathbb{V},\ m = \mathrm{dim}\mathbb{W},\ k = \mathrm{dim}\mathbb{U}$

Нека $\tau = \psi\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{U})$

Нека $e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$

Нека $f_1, \ldots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$

Нека $g_1,\ \ldots,\ g_k -$ базис на $\mathbb{U}$

Нека $A = M_{e \to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$ - матрицата на $\varphi$ спрямо базисите $e,\ f$

Нека $B = M_{f \to g}(\psi) \in \mathbb{F}_{k \times m}$ - матрицата на $\psi$ спрямо базисите $f,\ g$

Нека $C = M_{e \to g}(\tau) = M_{e \to g}(\psi\varphi) = M_{e \to g}(\psi \circ \varphi) =$

$= M_{f \to g}(\psi).M_{e \to f}(\varphi) = B.A \in \mathbb{F}_{k \times n}$

Тогава $C$ е матрицата на $\tau = \psi\varphi$ спрямо базисите $e,\ g$

### 4.5 Размерност на Л.П. на всички лин. изображения между две крайно мерни Л.П

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П над полето $\mathbb{F},\ n = \mathrm{dim}\mathbb{V},\ m = \mathrm{dim}\mathbb{W}$

Тогава $\mathrm{dimHom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W}) = m.n$

## 5 Ядро и Образ на Линейно изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

### 5.1 Определение за ядро на лин. изображение

$\mathrm{Ker}\varphi = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = \theta\}$

### 5.2 Определение за образ за лин. изображение

$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{V}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists v \in \mathbb{V} \ : \ \varphi(v) = w\}$

### 5.3 Определение за образ на подпространство

Нека $\mathbb{Y} \leq \mathbb{V}$, тогава образа на $\mathbb{Y}$ под действието на $\varphi$ се дефинира като:

$\varphi(\mathbb{Y}) = \mathrm{Im}\varphi_{|\mathbb{Y}} = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{Y}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists y \in \mathbb{Y} \ : \ \varphi(y) = w\}$

### 5.4 Определение за ранг на лин. изображение

$r(\varphi) = \mathrm{dimIm}\varphi$

### 5.5 Определение за дефект на лин. изображение

$d(\varphi) = \mathrm{dimKer}\varphi$

### 5.6 Теорема(За ранга и дефекта)

$\mathbb{U}, \ \mathbb{S}$ - К.М.Л.П над полето $\mathbb{F}, \ \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{U}, \ \mathbb{S})$

$dim\mathbb{U} = p \implies r(\psi) + d(\psi) = p$

### 5.7 Връзката между ранга на едно лин. изображение и ранга на една неговата матрица относно един всеки (в частност и един) базис е:

Нека $e_1, \ldots, e_n -$ произволен базис на $\mathbb{V}$

Нека $f_1, \ldots, f_m -$ произволен базис на $\mathbb{W}$

Ако $A = M_{e \to f}(\varphi) \implies r(\varphi) = r(A)$

## 6 Обратомост на ЛИ и ЛО

### 6.1 Определение за обратимо линейно изображение

Нека $\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П над полето $\mathbb{F}, \ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \ \mathbb{W})$

$\varphi$ е обратимо Л.И, ако $\exists \varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{W}, \ \mathbb{V}); \ \varphi.\varphi^{-1} = \varphi^{-1}.\varphi = \varepsilon$

## 6.2 Определение за обратното линейно изображение на дадено линейно изображение

Нека $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - К.М.Л.П над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{W})$

Ако $\varphi$ е обратимо Л.И, то

$\exists!\ \varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{W},\ \mathbb{V})\ :\ \varphi.\varphi^{-1} = \varphi^{-1}.\varphi = \varepsilon$

$\varphi^{-1}$ е обратното Л.И. на $\varphi$

**Редактирано до тук !!!**

## 6.3 Обратният на обратим линеен оператор също е обратим

Нека $\mathbb{V}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in \mathrm{Hom}\mathbb{V}$
$\varphi$ - обратим ЛО $\implies \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \varepsilon_{\mathbb{V}}$
$\implies \varphi^{-1} \circ (\varphi^{-1})^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1} \circ \varphi^{-1} = \varepsilon_{\mathbb{V}}$
$\implies (\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$

## 6.4

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
$\varphi$ е интективно $\iff Ker\varphi = \{\theta\}$
$(\implies)\ \{\theta\} \subset Ker\varphi,$ ако $v \in Ker\varphi$
$\implies \varphi(v) = \theta_{\mathbb{W}} = \varphi(\theta_{\mathbb{V}})$
$\varphi$ - инективно $\implies v = \theta_{\mathbb{V}}$
$\implies Ker\varphi \subset \{\theta\} \implies Ker\varphi = \{\theta\}$
$(\Leftarrow)\ u,\ v \in \mathbb{V};\ \varphi(u) = \varphi(v)$
$\implies \theta = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v)$
$\implies u - v = \theta = \{\theta\} = Ker\varphi$
$\implies u = v \implies \varphi$ е инективно

## 6.5 Обратимо линейно изображение изпраща линейно независими вектори в линейно независими вектори

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - ЛП над полето $\mathbb{F},\ ,divm\mathbb{V} = n,\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ - обратимо ЛИ
$v_1, \ldots, v_n$ - л.нз. вектори $\in \mathbb{V}$
Нека $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \in \mathbb{W},\ \lambda_i \in \mathbb{F}\ |\varphi^{-1}$
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi^{-1}(\varphi(v_i)) = \varphi^{-1}(\theta_{\mathbb{W}})$
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}},\ v_1, \ldots, v_n$ - л.нз. вектори
$\implies (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$
$\implies \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_1)$ - л.нз. вектори

# 7 Смяна на базиса

## 7.1 Определението за матрица на прехода между два базиса

$\mathbb{V}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$
$e_1, \dots, e_n$ - един базис на $\mathbb{V}$
$f_1, \dots, f_n$ - друг базис на $\mathbb{V}$
$f_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ji} e_j, \ i = 1, \dots, n, \ \tau_{ji} \in \mathbb{F}$
$T = (\tau_{ji})_{n \times n} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите $e, \ f$ на $\mathbb{V}$

## 7.2 Промяна на координатите на вектор при смяна на базиса

$\mathbb{V}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$
Нека $T = (\tau_{ji})_{n \times n} \in M_n$ е матрицата на прехода от $e \to f$
$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i \in \mathbb{V}, \ \lambda_i, \mu_u \in \mathbb{F}, \ i = 1, \dots, n$
$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t = T(\mu_1, \dots, \mu_n)^t$

## 7.3 Промяна на матрицата на линейно изображение при смяна на базиса

$\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \ n = dim\mathbb{V}, \ m = dim\mathbb{W}$
$e_1, \dots, e_n$ - един базис на $\mathbb{V}$
$g_1, \dots, g_n$ - друг базис на $\mathbb{V}$
$f_1, \dots, f_m$ - един базис на $\mathbb{W}$
$h_1, \dots, h_m$ - друг базис на $\mathbb{W}$
$A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}$ - матрица на $\varphi$ между базисите $e, \ f$
$B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}$ - матрица на $\varphi$ между базисите $g, \ h$
$T = (\tau_{ij})_{n \times n} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите $e, \ g$ на $\mathbb{V}$
$K = (\kappa_{ij})_{m \times m} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите $f, \ h$ на $\mathbb{W}$
$B = T^{-1}AK \ (M_{g \to h} = M_{g \to e} M_{e \to f} M_{f \to h})$

## 7.4 Промяна на матрицата на линеен оператор при смяна на базиса

$\mathbb{V}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in Hom\mathbb{V}, \ n = dim\mathbb{V}$
$e_1, \dots, e_n$ - един базис на $\mathbb{V}$
$f_1, \dots, f_n$ - друг базис на $\mathbb{V}$
$A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n$ - матрица на $\varphi$ в базиса $e$
$B = (b_{ij})_{n \times n} \in M_n$ - матрица на $\varphi$ в базиса $f$
$T = (\tau_{ij})_{n \times n} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите $e, \ f$
$B = T^{-1}AT \ (M_f = M_{f \to e} M_e M_{e \to f})$

### 7.5 $r(A) = r(A^t)$

## 8 Дуалност

### 8.1 Определение за дуалното пространство на дадено линейно пространство

$\mathbb{V}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
$V^* = Hom(\mathbb{V}, \mathbb{F})$ е дуалното пространство на ЛП $\mathbb{V}$

### 8.2 Определение за линеен функционал

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
$f$ е линеен функционал на $\mathbb{V} \iff f \in V^*$

### 8.3 Определение за дуалното изображение на дадено линейно изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
$\mathbb{V}^*,\ \mathbb{W}^*$ - Дуалните пространства на ЛП $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$
Ако $\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \implies \varphi^* \in Hom(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$
$\varphi^*(f) = f \circ \varphi,\ f \in \mathbb{W}^*$

### 8.4 Определение за за дуален базис

$\mathbb{V}$ - ЛП над полето $\mathbb{F},\ dim\mathbb{V} = n,\ \mathbb{V}^*$ - дуалното пространство на $\mathbb{V}$
$e_1, \ldots, e_n$ - базис на $\mathbb{V}$
$f^1, \ldots, f^n$ - дуален базис на $\mathbb{V}^*$
$f^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},\ j,\ i = 1, \ldots, n$

### 8.5 Дуално изображение на произведението на две линейни изображения

$\mathbb{V},\ \mathbb{W},\ \mathbb{U}$ - ЛП над полето $\mathbb{F},\ \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in Hom(\mathbb{W}, \mathbb{U})$
$\psi\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{U}) \implies (\psi\varphi)^* \in Hom(\mathbb{U}^*, \mathbb{V}^*)$
$(\psi\varphi)^* = f \circ (\psi\varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi =$
$= \varphi^* \circ (f \circ \psi) = \varphi^*(\psi^*(f)) = (\varphi^*\psi^*)(f),\ f \in \mathbb{U}^*$
$\implies (\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$

### 8.6 Връзката между матриците на едно линейно изображение и неговото дуално изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
$\mathbb{V}^*,\ \mathbb{W}^*$ - Дуалните пространства на ЛП $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$

$\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}),\ \varphi^* \in Hom(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$
$M(\varphi^*) = (M(\varphi))^t$

## 8.7 Определение за анихилатор $\mathbb{U}^0$ на едно линейно подпространсво $\mathbb{U}$ на едно линейно пространство $\mathbb{V}$

$\mathbb{V}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
$\mathbb{U} < \mathbb{V} \implies \mathbb{U}^0 = \{f \in \mathbb{V}^* \mid \forall u \in \mathbb{U}\ f(u) = 0\}$