Теоремки за средни стойности. Връзка между знак на първа производна и монотоност на функция. + Теоремка за константа функция

Иво Стратев

8 февруари 2017 г.

1 Th(Ферма)

Нека $f(x)$ е дефинирна в x_0 - лок. екст. и $f(x)$ е диференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$

Д-во:

1.1 x_0 е т. лок. макс.

$\exists \delta > 0;\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \leq f(x_0)$
$\implies f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

1.1.1 $x > x_0$

$x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$\implies \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

1.1.2 $x < x_0$

$x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$\implies \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

От 1.1.1 и 1.1.2 $\implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$

1.2 x_0 е т. лок. мин.

$\exists \delta > 0;\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \geq f(x_0)$
$\implies f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

1.2.1 $x > x_0$

$x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$\implies \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

1.2.2 $x < x_0$

$x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$\implies \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$
От 1.2.1 и 1.2.2 $\implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$

2 Th(Рол)

Нека $f(x) \in C[a, b]$ и $f(x)$ е диференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$
$\exists c \in (a, b);\ f'(c) = 0$

Д-во:

2.1 $f(x) \equiv const$

$f'(x) = 0$

2.2 $f(x) \not\equiv const$

От Th(Вайерщрас) $\implies$
$\exists x_{min}, x_{max} \in [a, b];$
$f(x_{max}) = max\{f(x) :\ x \in [a, b]\}$
$f(x_{min}) = min\{f(x) :\ x \in [a, b]\}$

2.2.1 $x_{min}, x_{max} \notin (a, b)$

$x_{min} \neq x_{max}, f(a) = f(b) \implies minf(x) = maxf(x)$
$\implies f(x) \equiv const \implies \lightning(f(x) \not\equiv const)$

2.2.2 Ако поне една от x_{min} или $x_{max} \in (a, b)$

Ако $x_{max} \in (a, b), c = x_{max}$ в противен случай $c = x_{min}$
$\implies c \in (a, b)$ - лок. екст. от Th(Ферма)
$\implies f'(c) = 0$

3 Th(За крайните нараствания на Лагранж)

Нека $f(x) \in C[a, b]$ и $f(x)$ е диференцируема в (a, b)
$\exists c \in (a, b);\ f(b) - (a) = f'(c)(b - a)$

Д-во:

$h(x) = f(x) - kx$
$h(a) = f(a) - ka = f(b) - kb = h(b)$
$k;\ f(a) - ka = f(b) - kb$
$kb - ka = f(b) - f(a)$
$k(b-a) = f(b) - f(a)$
$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
От Th(Рол) за $h(x) \implies \exists c \in (a,b);\ h'(c) = 0$
$h'(c) = f'(c) - k = 0$
$\implies f'(c) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$\implies f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$

4 Обобщена Th(За крайните нараствания на Коши)

Нека $f(x), g(x) \in C[a,b]$ и $f(x), g(x)$ са диференцируеми в (a,b),
като $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$
$\exists c \in (a,b);\ \frac{f(b)-(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Д-во:

Коректност:

Допс., че $g(b) - g(a) = 0$ то от Th(Рол)
$\implies \exists c_2 \in (a,b);\ g'(c_2) = 0$
$\implies \lightning (g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b))$
$h(x) = f(x) - kg(x)$
$k;\ h(a) = f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) = h(b)$
$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$
$kg(b) - kg(a) = f(b) - f(a)$
$k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$
$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
От Th(Рол) за $h(x) \implies \exists c \in (a,b);\ h'(c) = 0$
$h'(c) = f'(c) - kg'(x) = 0$
$\implies f'(c) = kg'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$
$\implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

5 Th($f(x) \uparrow \in C(a,b) \iff f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$)

5.1 Th($f(x) \uparrow \in C(a,b) \implies f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$)

$t \in (a,b)$

5.1.1 $x > t$

$x > t,\ f(x)\uparrow \implies f(x) \geq f(t)$
$\implies f(x) - f(t) \geq 0,\ x - t > 0$
$\implies \lim\limits_{x\to t} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \geq 0$

5.1.2 $x < t$

$x < t,\ f(x)\uparrow \implies f(x) \leq f(t)$
$\implies f(x) - f(t) \leq 0,\ x - t < 0$
$\implies \lim\limits_{x\to t} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \geq 0$

От 5.1.1 и 5.1.2 $\implies \forall x \in (a,b) f'(x) \geq 0$

5.2 Th($f(x) \in C(a,b);\ f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b) \implies f(x)\uparrow$)

$f(x)\uparrow \implies \forall x_1, x_2 \in (a,b);\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
Доп., че $\exists t_1, t_2 \in (a,b);\ t_1 < t_2;\ f(t_1) > f(t_2)$
От Th(Лагранж за крайните нараствания) $\implies \exists c \in (t_1, t_2)$;
$f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$
$f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b) \implies f'(c) \geq 0$
$t_1 < t_2 \implies t_2 - t_1 > 0$
$\implies f(t_2) - f(t_1) \geq 0 \implies f(t_2) \geq f(t_1) \implies \lightning(f(t_1) > f(t_2))$
$\implies f(x) \in C(a,b);\ f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b) \implies f(x)\uparrow$

6 Th($f(x)\downarrow \in C(a,b) \iff f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b)$)

6.1 Th($f(x)\downarrow \in C(a,b) \implies f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b)$)

$t \in (a,b)$

6.1.1 $x > t$

$x > t,\ f(x)\downarrow \implies f(x) \leq f(t)$
$\implies f(x) - f(t) \leq 0,\ x - t > 0$
$\implies \lim\limits_{x\to t} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \leq 0$

6.1.2 $x < t$

$x < t,\ f(x)\downarrow \implies f(x) \geq f(t)$
$\implies f(x) - f(t) \geq 0,\ x - t < 0$
$\implies \lim\limits_{x\to t} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \leq 0$

От 6.1.1 и 6.1.2 $\implies \forall x \in (a,b) f'(x) \leq 0$

6.2 Th($f(x) \in C(a,b);\ f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b) \implies f(x) \downarrow$)

$f(x) \downarrow \implies \forall x_1, x_2 \in (a,b);\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
Доп., че $\exists t_1, t_2 \in (a,b);\ t_1 < t_2;\ f(t_1) < f(t_2)$
От Th(Лагранж за крайните нараствания) $\implies \exists c \in (t_1, t_2);$
$f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$
$f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b) \implies f'(c) \leq 0$
$t_1 < t_2 \implies t_2 - t_1 > 0$
$\implies f(t_2) - f(t_1) \leq 0 \implies f(t_2) \leq f(t_1) \implies \lightning(f(t_1) < f(t_2))$
$\implies f(x) \in C(a,b);\ f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b) \implies f(x) \downarrow$

7 $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b) \implies f(x) \equiv const\ \forall x \in (a,b)$

Нека $f(x)$ е дефинирна и диференцируема в (a,b) и
$f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b) \implies f(x) \equiv const\ \forall x \in (a,b)$

Д-во:
$x_0 \in (a,b)$
От Th(Лагранж за крайните нараствания)
$\implies \exists c \in (a,b); f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)\ \forall x \in (a,b)$
$f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b) \implies f'(c) = 0 \implies f(x) - f(x_0) = 0$
$\implies f(x) = f(x_0)\ \forall x \in (a,b) \implies f(x) \equiv const\ \forall x \in (a,b)$