

Теоритично контролно №3 1, I, Информатика

Иво Стратев

11 януари 2019 г.

1

1.1 Определение за полилинейна функция

\mathbb{V} - Л.П. над числовото поле \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$

$$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F} \quad (f : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{F})$$

f е полилинейна ако $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n, v', v'' \in \mathbb{V}$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} : v_i = \lambda v' + \mu v''$$

$$f(v_1, \dots, v_n) = \lambda f(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n) + \mu f(v_1, \dots, v_{i-1}, v'', v_{i+1}, \dots, v_n)$$

1.2 Определение за антисиметрична функция

\mathbb{V} - Л.П. над числовото поле \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$

$$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F} \quad (f : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{F})$$

f е антисиметрична ако $\forall i, j : 1 \leq i \neq j \leq n$

$$\forall v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n \in \mathbb{V}$$

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

1.3 Необходимо и достатъчно условие една полилинейна функция да е антисиметрична

\mathbb{V} - Л.П. над числовото поле \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$

$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$ ($f : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{F}$) е полилинейна функция

f е антисиметрична $\iff \forall i, j : 1 \leq i \neq j \leq n$

$\forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n, v \in \mathbb{V}$

$f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n) = 0$

1.4 Определение за пермутация

Нека $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$S(\Omega_n) = \{\sigma : \Omega_n \rightarrow \Omega_n \mid \sigma \text{ е биекция}\}$

$\forall \sigma \in S(\Omega_n)$, σ е пермутация

$|S(\Omega_n)| = n!$

1.5 Определение за инверсия в пермутация

$\sigma \in S(\Omega_n)$, $\forall i, j : 1 \leq i \neq j \leq n \in \Omega_n$

$\sigma(i), \sigma(j)$ образуват инверсия $\iff \sigma(i) > \sigma(j)$, но $i < j$

$[\sigma]$ - брой инверсии $\implies 1 \leq [\sigma] \leq \frac{n(n-1)}{2}$

1.6 Определение за транспозиция

$\sigma \in S(\Omega_n)$, $\forall i, j : 1 \leq i \neq j \leq n \in \Omega_n$

$\sigma \in S(\Omega_n) \implies \sigma = \{\sigma(1), \dots, \sigma(i), \dots, \sigma(j), \dots, \sigma(n)\}$

$\sigma_t \in S(\Omega_n)$ е транспозиция $\iff \sigma_t = \{\sigma(1), \dots, \sigma(j), \dots, \sigma(i), \dots, \sigma(n)\}$

1.7 Определение за четност на пермутация

$\sigma \in S(\Omega_n)$

$$\sigma \begin{cases} \text{четна} & [\sigma] \bmod 2 = 0 \\ \text{нечетна} & [\sigma] \bmod 2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{sign} \sigma = \begin{cases} 1 & \text{четна} \\ -1 & \text{нечетна} \end{cases} = (-1)^{[\sigma]}$$

1.8 Определение за детерминантна функция

$$f : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F} \quad (f : (\mathbb{F}^n)^n \rightarrow \mathbb{F})$$

f е детерминантна функция, ако е полилинейна, антисиметрична и

$$f(e_1, \dots, e_n) = 1, \quad \{e_1, \dots, e_n\} \text{ е стандартният базис на } \mathbb{F}^n$$

2 Детерминанта и нейните свойства

2.1 Определение за Детерминанта

\mathbb{F} е числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$ $\det A$

е стойността на единствената детерминантна функция:

$$f : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F} \quad (f : (\mathbb{F}^n)^n \rightarrow \mathbb{F})$$

на редовете на $A : (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{F}^n$

2.2 Формула за пресмятане на Детерминанта

\mathbb{F} - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(\Omega_n)} \text{sign} \sigma \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

2.3 Връзката между детерминантите на една матрица и транспонираната ѝ матрица

$$\det A = \det A^t$$

2.4 Промяна на детерминанта на една матрица, ако заменим един нейн ред с нулев ред

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A

$$\text{Тогава } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad i \in \{1, \dots, n\}, a_i = (0, \dots, 0) \implies \det A = 0$$

2.5 Промяна на детерминантата на една матрица, ако заменим един нейн стълб с нулев стълб

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})^t, \dots, a_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \dots a_n) \quad i \in \{1, \dots, n\}, a_i = (0, \dots, 0)^t \implies \det A = 0$

2.6 Промяна на детерминантата на една матрица, ако разменим два нейни реда

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и нека $i, j : 1 \leq i \neq j \leq n$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.7 Промяна на детерминантата на една матрица, ако разменим два нейни стълба

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})^t, \dots, a_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \dots a_n)$ и нека $i, j : 1 \leq i \neq j \leq n$

$$\det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) = - \det(a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_n)$$

2.8 Промяна на детерминантата на една матрица, ако умножим един нейн ред с някакво число

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A

$$\text{Тогава } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad i \in \{1, \dots, n\}, \lambda \in \mathbb{F}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.9 Промяна на детерминантата на една матрица, ако умножим един нейн стълб с някакво число

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})^t, \dots, a_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \dots a_n) \quad i \in \{1, \dots, n\}, \lambda \in \mathbb{F}$

$$\det(a_1 \dots \lambda a_i \dots a_n) = \lambda \det(a_1 \dots a_i \dots a_n)$$

2.10 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн ред заменим с друг, различен от него, ред

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A

$$\text{Тогава } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{и нека } i, j : 1 \leq i \neq j \leq n$$

$$a_i := a_j \implies \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

2.11 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб заменим с друг, различен от него, стълб

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})^t, \dots, a_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \dots a_n)$ и нека $i, j : 1 \leq i \neq j \leq n$

$$a_i := a_j \implies \det(a_1 \dots a_j \dots a_j \dots a_n) = 0$$

2.12 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн ред заменим с умножен с число друг, различен от него, ред

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и нека $i, j : 1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{F}$

$$a_i := \lambda a_j \implies \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda 0 = 0$$

2.13 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб заменим с умножен с число друг, различен от него, стълб

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})^t, \dots, a_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \dots a_n)$ и нека $i, j : 1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{F}$

$$a_i := \lambda a_j \implies \det(a_1 \dots \lambda a_j \dots a_j \dots a_n) =$$

$$= \lambda \det(a_1 \dots a_j \dots a_j \dots a_n) = \lambda 0 = 0$$

2.14 Промяна на детерминантата на една матрица, ако към един нейн ред прибавим друг, различен от него, ред

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и нека $i, j : 1 \leq i \neq j \leq n$

$$a_i := a_i + a_j \implies \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + 0 = \det A$$

2.15 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб прибавим друг, различен от него, стълб

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})^t, \dots, a_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \dots a_n)$ и нека $i, j : 1 \leq i \neq j \leq n$

$$a_i := a_i + a_j \implies \det(a_1 \dots a_i + a_j \dots a_j \dots a_n) =$$

$$= \det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) + \det(a_1 \dots a_j \dots a_j \dots a_n) = \det A + 0 = \det A$$

2.16 Промяна на детерминантата на една матрица, ако към един нейн ред прибавим умножен с число друг, различен от него, ред

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и нека $i, j : 1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{F}$

$$a_i := a_i + \lambda a_j \implies \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \det A + \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + \lambda 0 = \det A + 0 = \det A$$

2.17 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб прибавим умножен с число друг, различен от него, стълб

\mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})^t, \dots, a_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \dots a_n)$ и нека $i, j : 1 \leq i \neq j \leq n, \lambda \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} a_i &:= a_i + \lambda a_j \implies \det(a_1 \dots a_i + \lambda a_j \dots a_j \dots a_n) = \\ &= \det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) + \det(a_1 \dots \lambda a_j \dots a_j \dots a_n) = \\ &= \det A + \lambda \det(a_1 \dots a_j \dots a_j \dots a_n) = \det A + \lambda 0 = \det A + 0 = \det A \end{aligned}$$

2.18 $\det A = 0 \iff$ редовете на A са линейно зависими

2.19 $\det A = 0 \iff$ стълбовете на A са линейно зависими

3 $A \in M_n, \det A = 3$

3.1 $B = A^t \implies \det B = \det A = 3$

3.2 $B = A := a_{i,*} = (0, \dots, 0) \implies \det B = 0$

3.3 $B = A := a_{*,i} = (0, \dots, 0)^t \implies \det B = 0$

3.4 $B = A := a_{i,*} = a_{j,*} + a_{k,*} \implies \det B = 0$

3.5 $B = A := a_{*,i} = a_{*,j} + a_{*,k} \implies \det B = 0$

3.6 $B = A := a_{i,*} = 4a_{i,*} \implies \det B = 4 \det A = 4 \cdot 3 = 12$

3.7 $B = A := a_{*,i} = -4a_{*,i} \implies \det B = -4 \det A = -4 \cdot 3 = -12$

3.8 $B = A := a_{i,*} = a_{j,*} \implies \det B = 0$

3.9 $B = A := a_{*,i} = a_{*,j} \implies \det B = 0$

3.10 $B = A := a_{i,*} = 8a_{j,*} \implies \det B = 8 \cdot 0 = 0$

3.11 $B = A := a_{*,i} = 6a_{*,j} \implies \det B = 6 \cdot 0 = 0$

3.12 $B = A := a_{i,*} + 5a_{j,*} \implies \det B = \det A + 5 \cdot 0 = \det A + 0 = \det A$

3.13 $B = A := a_{*,i} + 4a_{*,j} \implies \det B = \det A + 4 \cdot 0 = \det A + 0 = \det A$

3.14 $B = A := a_{i,*} = a_{j,*}, a_{j,*} = a_{i,*} \implies \det B = -\det A$

3.15 $B = A := a_{*,i} = a_{*,j}, a_{*,j} = a_{*,i} \implies \det B = -\det A$

3.16 $B = A := a_{i,*} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{j,*} \implies \det B = 0$

3.17 $B = A := a_{*,i} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{*,j} \implies \det B = 0$

4

4.1

$$A \in M_{n \geq 8} \sum_{k=1}^n a_{8k} A_{1k} = \delta_{81} \det A = 0. \det A = 0$$

4.2

$$A \in M_{n \geq 8} \sum_{k=1}^n a_{k8} A_{k1} = \delta_{81} \det A = 0. \det A = 0$$

4.3

$$A, B \in M_n, \det A = 8, \det B = 1$$

$$\det AB = \det A \det B = 8.1 = 8$$

4.4

$$A, B \in M_n, \det A = 8, \det B = 1$$

$$\det(AB)^t = \det AB = \det A \det B = 8.1 = 8$$

4.5

$$A, B \in M_{n \geq 8}, \det A = 9, \det B = 1$$

A, B се различават само по 8-мия си ред/стълб

$$\det(A + B) = 2^{n-1}(\det A + \det B) =$$

$$= 2^{n-1}(9 + 1) = 2^{n-1}.10 = 5.2^n$$

Защото:

$$\det(A + B) = \det \left(\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{81} & a_{82} & \cdots & a_{8n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{81} & b_{82} & \cdots & b_{8n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{vmatrix} 2c_{11} & 2c_{12} & \cdots & 2c_{1n} \\ 2c_{21} & 2c_{22} & \cdots & 2c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{81} + b_{81} & a_{82} + b_{82} & \cdots & a_{8n} + b_{8n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2c_{n1} & 2c_{n2} & \cdots & 2c_{nn} \end{vmatrix} = 2^{n-1} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{81} + b_{81} & a_{82} + b_{82} & \cdots & a_{8n} + b_{8n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$2^{n-1}(\det A + \det B)$$

5 Развитие на детерминанта по ред/стълб на

$$\Delta = \begin{vmatrix} -9 & -8 & 6 & 5 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 9 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

5.1 Развитие по първи ред

$$\begin{aligned} \Delta &= -9.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} - 8.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} \\ &+ 6.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 9 & -6 \end{vmatrix} + 5.(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

5.2 Развитие по първи стълб

$$\begin{aligned} \Delta &= -9.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} + 7.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -8 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} \\ &+ 0.(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -8 & 6 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -8 & 6 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

5.3 Развитие по втори ред

$$\begin{aligned} \Delta &= 7.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -8 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} - 2.(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -9 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} \\ &+ 6.(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -9 & -8 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 9 & -6 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -9 & -8 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

5.4 Развитие по втори стълб

$$\begin{aligned} \Delta &= -8.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} - 2.(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -9 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} \\ &- 2.(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -9 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} + 9.(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} -9 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

6 Формули на Крамер

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 = 2 \\ 8x_1 - 7x_2 = -5 \end{cases}$$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}}$$

7

7.1 Определение за обратима матрица

Нека \mathbb{F} е поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$, A е обратима

$$\iff \exists B \in M_n(\mathbb{F}) : AB = BA = E$$

7.2 Неособена матрица

Нека \mathbb{F} е поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$, A е неособена $\iff \det A \neq 0$

7.3 Формула за обратна матрица на неособена матрица

Нека \mathbb{F} е поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$, A е неособена, тогава $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ji}) = \frac{1}{\det A} ((-1)^{j+i} \Delta_{ji})$

7.4 Определение за ранг на матрица

Нека \mathbb{F} е поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$, $r(A) = rr(A) = rc(A)$

7.5 Втора теорема за ранг на матрица

Нека \mathbb{F} е поле и $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$, $r(A) = r \iff$

$$\exists 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$$

$$\exists 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n :$$

$$\exists \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : r < k \leq n \quad \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} = 0$$

8

Нека \mathbb{F} е поле и

$$8.1 \quad A \in M_5(\mathbb{F}), \det A = 0 \implies 0 \leq r(A) < 5$$

8.2 Th Руше

$$A \in \mathbb{F}_{m \times n}, B \in F^m \quad Ax = B \text{ има решение} \iff r(A) = r(A|B)$$

$$8.3 \quad x \in \mathbb{F}^n, Ax = B, r = r(A) = r(A|B)$$

\implies броя на неизвестните е $n - r$

8.4 Една хомогенна система с равен брой неизвестни и уравнения $Ax = 0$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, която има ненулево решение е с $\det A = 0$ (непълнен ранг)

8.5 Една хомогенна система с квадратна матрица на $Ax = 0$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, има единствено решение $\iff \det A \neq 0$ (пълнен ранг)

8.6 Определение за Фундаментална система решения на хомогенна система уравнения

\mathbb{F} - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$

Ф.С.Р. е всеки базис на пространството $\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \theta\}$

8.7 Размерността на множеството от решения на хомогенна система линейни уравнения, ако общият брой на неизвестните е n и рангът на матрицата на системата е равен на r

\mathbb{F} - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$

$$\dim\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \theta\} = n - r(A) = n - r$$

9

9.1 Подобни матрици

Нека \mathbb{F} - числово поле и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

$$A \sim B \iff \exists T \in M_n(\mathbb{F}) : \det T \neq 0, B = T^{-1}.A.T$$

9.2 Определение за характеристичен полином на матрица

Нека \mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) - \text{характеристичен полином на матрицата } A$$

9.3 Определение за характеристичен полином на линейен оператор

Нека \mathbb{V} - К.М.Л.П. над числовото поле \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n$

Нека $\varphi \in \text{Hom } \mathbb{V}$, $A = M(\varphi) \in M_n(\mathbb{F})$ е матрицата на φ , в който да е базис на \mathbb{V}

$$\implies f_{\varphi}(\lambda) = f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) - \text{характеристичен полином на Л.О. } \varphi$$

9.4 Определение за характеристичен корен

Нека \mathbb{F} - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

λ_0 - характеристичен корен на характеристичния полином на A

$$\iff f_A(\lambda_0) = \det(A - \lambda_0 E) = 0$$

9.5 Определение за собствена стойност на линейен оператор

Нека \mathbb{V} - К.М.Л.П. над числовото поле \mathbb{F}

Нека $\varphi \in \text{Hom } \mathbb{V}$

$$\lambda_0 \in \mathbb{F} - \text{собствена стойност на } \varphi \iff f_{\varphi}(\lambda_0) = \det(M(\varphi) - \lambda_0 E) = 0$$

9.6 Определение за собствен вектор на линейен оператор

Нека \mathbb{V} - К.М.Л.П. над числовото поле \mathbb{F}

Нека $\varphi \in Hom \mathbb{V}$

$v_{\lambda_0} \in \mathbb{V}$ - собствен вектор на $\varphi \iff$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & v_{\lambda_0} \neq \theta \quad \text{вектора е ненулев} \\ (2) & \exists \lambda_0 \in \mathbb{F} : f_{\varphi}(\lambda_0) = \det(M(\varphi) - \lambda_0 E) = 0 \quad \lambda_0 \text{ е собствена стойност} \\ (3) & \varphi(v_{\lambda_0}) = \lambda_0 \cdot v_{\lambda_0} \end{array} \right.$$

9.7 Всички собствени стойности, които са част от полето над, което е дефинирано линейното пространство, за което даденото линейно изображение е линейен оператор са негови характеристични корени

9.8 Всички характеристични корени, които са част от полето над, което е дефинирано линейното пространство, за което даденото линейно изображение е линейен оператор са негови собствени стойности

9.9 Векторите съответстващи на различни собствени стойности на даден линейен оператор са линейно независими

Нека \mathbb{V} - К.М.Л.П. над числовото поле \mathbb{F} , $\dim \mathbb{V} = n$

Нека $\varphi \in Hom \mathbb{V}$, φ има n на брой различни собствени стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,

тогава \exists базис v_1, \dots, v_n на \mathbb{V} , в който φ има диагонална матрица,

$$M_v(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

9.10 Връзка между степен на характеристичен полином на линейен оператор и размерност на пространството

Нека \mathbb{V} - К.М.Л.П. над числовото поле \mathbb{F}

Нека $\varphi \in Hom \mathbb{V} \implies \deg(f_{\varphi}(\lambda)) = \dim \mathbb{V}$

9.11 Връзка между степен на характеристичен полином на линеен оператор и брой различни собствени стойности

Нека V - К.М.Л.П. над числовото поле \mathbb{F} и нека $\varphi \in \text{Hom} V$

$$\implies \deg(f_\varphi(\lambda)) \geq \text{брой различни собствени стойности} \geq 0$$

9.12 Връзка между броя на различните характеристични корени на линеен оператор и размерността на пространството

Нека V - К.М.Л.П. над числовото поле \mathbb{F} и нека $\varphi \in \text{Hom} V$

$$\implies \dim V \geq \text{брой различни характеристични корени} \geq 0$$

9.13 Матрицата на линеен оператор в базис от собствени вектори е диагонална

10

10.1 Определение за евклидово пространство

Л.П. V над \mathbb{R} се нарича евклидово пространство, ако в него е въведено скалярно произведение, тоест изображение $(\ , \) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, имащо свойствата:

1. $\forall a, b, c \in V \ (a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
2. $\forall a, b \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \ (\lambda a, b) = \lambda(a, b)$
3. $\forall a, b \in V \ (a, b) = (b, a)$
4. $\forall a \in V \ (a, a) \geq 0, (a, a) = 0 \iff a = \theta$

10.2 Определение за скалярно произведение

Нека V е евклидово пространство.

Скалярно произведение е изображение $(\ , \) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, имащо свойствата:

1. $\forall a, b, c \in V \ (a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
2. $\forall a, b \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \ (\lambda a, b) = \lambda(a, b)$
3. $\forall a, b \in V \ (a, b) = (b, a)$

$$4. \forall a \in \mathbb{V} \ (a, a) \geq 0, \ (a, a) = 0 \iff a = \theta$$

10.3 Определение за дължина на вектор

Нека \mathbb{V} е евклидово пространство.

Нека $a \in \mathbb{V} \implies |a| = \sqrt{(a, a)}$ е дължината на вектора a

10.4 Определение за ортогонални вектори

Нека \mathbb{V} е евклидово пространство.

Нека $a, b \in \mathbb{V}$, a, b са ортогонални $(a \perp b) \iff (a, b) = 0$

10.5 Определение за ортогонален базис

Нека \mathbb{V} е евклидово пространство. $\dim \mathbb{V} = n$

Базисът $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ е ортогонален

$$\iff \forall i, j : 1 \leq i \neq j \leq n \ (v_i, v_j) = 0$$

10.6 Определение за ортонормиран базис

Нека \mathbb{V} е евклидово пространство. $\dim \mathbb{V} = n$

Базисът $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{V}$ е ортонормиран

$$\iff \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \ (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

10.7 Ортогонални по между си и ненулеви вектори в евклидово пространство са линейно независими

10.8 Определение за ортогонално допълнение на линейно подпространство в евклидово пространство

Нека \mathbb{V} е К.М.Е.П. и $U < V \implies U^\perp = \{\forall v \in \mathbb{V} \mid \forall u \in U \ (u, v) = 0\}$

10.9 Th(Питагор)

Ако векторите a_1, \dots, a_n са два по два ортогонални, то $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$

10.10 Метод на Грам-Шмид

Нека векторите e_1, \dots, e_n са ортогонални и ненулеви вектори

и нека вектора $a \notin l(e_1, \dots, e_n)$.

Тогава $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F} : e_{n+1} = a + \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$

$\implies e_1, \dots, e_{n+1}$ са ортогонални и ненулеви вектори

и $l(e_1, \dots, e_n, a) = l(e_1, \dots, e_{n+1})$

11

11.1 Детерминанта на Грам

Нека \mathbb{V} е Е.П. и $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{V}$

$$\Gamma(a_1, \dots, a_m) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_m) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (a_m, a_1) & (a_m, a_2) & \dots & (a_m, a_m) \end{vmatrix}$$

11.2 $\Gamma(a_1, \dots, a_m) = 0 \iff a_1, \dots, a_m$ са линейно зависими

11.3 Неравенството на Коши-Буняковски

Нека \mathbb{V} е Е.П. и $a, b \in \mathbb{V} \implies |(a, b)| \leq |a| \cdot |b|$

$|(a, b)| = |a| \cdot |b| \iff a, b$ са линейно зависими.

11.3.1 Координатна форма на неравенството на Коши-Буняковски

Нека $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогава

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

11.3.2 Интегрална форма на неравенството на Коши-Буняковски

Нека $a, b \in R : a < b$ и $f, g \in C[a, b]$. Тогава

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

11.4 Нека \mathbb{V} е Е.П., $a, b \in \mathbb{V} \implies \cos \angle(a, b) = \frac{(a, b)}{|a||b|}$

$$\implies \angle(a, b) = \arccos \frac{(a, b)}{|a||b|}$$

11.5 Неравенство на триъгълника за вектори в евклидово пространство

Нека \mathbb{V} е Е.П. и $a, b \in \mathbb{V} \implies |a + b| \leq |a| + |b|$

$$|a + b| = |a| + |b| \iff a \uparrow b \text{ или } a = \theta \text{ или } b = \theta$$

12 Симетричен Линеен оператор

12.1 Симетрична матрица

Нека $A \in M_n(\mathbb{R})$, A е симетрична $\iff A^t = A$

12.2 Определение за симетричен оператор

Нека \mathbb{V} е Е.П. и $\varphi \in \text{Hom } \mathbb{V}$, φ е симетричен

$$\iff \forall u, v \in \mathbb{V} (\varphi(v), u) = (v, \varphi(u))$$

12.3 Матрицата на симетричен оператор в ортонормиран базис е симетрична

12.4 Собствените стойности на симетричен оператор са реални и съвпадат с характеристичните му корени

12.5 Собствените вектори на симетричен оператор, съответстващи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си

12.6 Основна Теорема за симетричен оператор

Нека \mathbb{V} е Е.П. и $\varphi \in \text{Hom } \mathbb{V}$, φ е симетричен оператор

$$\implies \exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V} \text{ ортонормиран базис на } \mathbb{V},$$

в който матрицата на φ е диагонална

и по главния диагонал са собствените стойности на φ .

13 Ортогонален Линеен оператор

13.1 Ортогонална матрица

Нека $A \in M_n(\mathbb{R})$, A е ортогонална $\iff AA^t = E$

13.2 Определение за ортогонален оператор

Нека \mathbb{V} е Е.П. и $\varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$, φ е ортогонален

$$\iff \forall u, v \in \mathbb{V} (\varphi(v), \varphi(u)) = (v, u)$$

13.3 Необходимото и достатъчно условие един оператор да е ортогонален е той да изпраща един ортонормиран базис в друг ортонормиран базис

13.4 Матрицата на ортогонален оператор в ортонормиран базис е ортогонална

13.5 Собствените стойности на ортогонален оператор са равни на ± 1

13.6 Собствените вектори на ортогонален оператор, съответстващи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си

13.7 Основна Теорема за ортогонален оператор

Нека \mathbb{V} е Е.П. и $\varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$, φ е ортогонален оператор

$$\implies \exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V} \text{ ортонормиран базис на } \mathbb{V},$$

в който матрицата на φ е клетачно диагонална.