

# Езици и автомати

Иво Стратев

24 ноември 2017 г.

## Регулярни езици

### Основни

Нека  $\Sigma$  е азбука. Тогава  $\emptyset$ ,  $\{\varepsilon\}$ ,  $\forall a \in \Sigma \{a\}$  - са регулярни езици

### Операции

#### Обединение

Ако  $L_1$ ,  $L_2$  са регулярни, то и  $L_1 \cup L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \vee \omega \in L_2\}$  е регулярен.

#### Конкатенация

Ако  $L_1$ ,  $L_2$  са регулярни, то и  $L_1 \cdot L_2 = \{\omega_1 \omega_2 \mid \omega_1 \in L_1 \wedge \omega_2 \in L_2\}$  е регулярен.

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ L^{n+1} = L^n \cdot L$$

#### Звезда на Клини

Ако  $L$  е регулярен, то и  $L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$  е регулярен.

### Дефиниция

Един език е регулярен, ако се получава от основните с помощта на краен брой прилагания на операциите: обединение, конкатенация и звезда на Клини.

## Регулярни изрази

### Базови

Символите  $\emptyset$ ,  $\varepsilon$ ,  $a$  са регулярни изрази ( $\forall a \in \Sigma$ )

## "Производни"

Ако  $r_1$  и  $r_2$  са регулярни изрази, то и  $r_1 + r_2$ ,  $r_1 \cdot r_2$  и  $r_1^*$  също са регулярни изрази.

### Език на регулярен израз

$$\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$$

$$\forall a \in \Sigma \quad \mathcal{L}(a) = \{a\}$$

Нека  $r_1$  и  $r_2$  са регулярни изрази и  $L_1 = \mathcal{L}(r_1)$ ,  $L_2 = \mathcal{L}(r_2)$ . Тогава:

$$L_1 \cup L_2 = \mathcal{L}(r_1) \cup \mathcal{L}(r_2) = \mathcal{L}(r_1 + r_2)$$

$$L_1 \cdot L_2 = \mathcal{L}(r_1) \cdot \mathcal{L}(r_2) = \mathcal{L}(r_1 \cdot r_2)$$

$$L_1^* = \mathcal{L}(r_1)^* = \mathcal{L}(r_1^*)$$

## Недетерминирани крайни автомати

### Определение

Недетерминирани краен автомат представлява:

$N = (\Sigma, Q, s, \Delta, F)$ , където:

$\Sigma$  - крайно множество от букви (азбука)

$Q$  - крайно множество от състояния

$s \in Q$  - начално състояние

$\Delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$  - функция на преходите. Тя е тотална. Ако за някоя двойка  $(q, a)$  няма преход в автомата, то  $\Delta(q, a) = \emptyset$ ;

$F \subseteq Q$  - множество от финални състояния

### Дефиниция за $\Delta^*$

$\Delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q :$

$$\Delta^*(q, \varepsilon) = q$$

$$\Delta^*(q, a\alpha) = \bigcup_{p \in \Delta(q, a)} \Delta^*(p, \alpha)$$

**Език на недетерминирания автомат  $\Delta^*$ ,  $\mathcal{L}(N)$**

$$\mathcal{L}(N) = \{\omega \in \Sigma^* \mid \Delta^*(s, \omega) \in F\}$$

**"Действия"с недетерминирани автомати**

Нека  $\Sigma$  е азбука.

Нека  $N_1 = (\Sigma, Q_1, s_1, \Delta_1, F_1)$  и  $N_2 = (\Sigma, Q_2, s_2, \Delta_2, F_2)$  - К.Н.А и  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Нека  $N = (\Sigma, Q, s, \Delta, F)$

**Конкатенация,  $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N_1) \cdot \mathcal{L}(N_2)$**

$$Q = Q_1 \cup Q_2$$

$$s = s_1$$

$$\Delta(q, a) = \begin{cases} \Delta_1(q, a), & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \Delta_2(q, a), & q \in Q_2 \\ \Delta_1(q, a) \cup \Delta_2(s_2, a), & q \in F_1 \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2, & s_2 \in F_2 \\ F_2, & s_2 \notin F_2 \end{cases}$$

**Обединение,  $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N_1) \cup \mathcal{L}(N_2)$**

$$s \notin Q_1 \cup Q_2$$

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$$

$$\Delta(q, a) = \begin{cases} \Delta_1(q, a), & q \in Q_1 \\ \Delta_2(q, a), & q \in Q_2 \\ \Delta_1(s_1, a) \cup \Delta_2(s_2, a), & q = s \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s\}, & s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2 \\ F_1 \cup F_2, & s_1 \notin F_1 \wedge s_2 \notin F_2 \end{cases}$$

**Позитивна обвивка,  $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N_1)^+$**

$$Q = Q_1$$

$$s = s_1$$

$$\Delta(q, a) = \begin{cases} \Delta_1(q, a), & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \Delta_1(q, a) \cup \Delta_1(s, a), & q \in F_1 \end{cases}$$

$$F = F_1$$

**Звезда на Клини**,  $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N_1)^* = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{L}(N_1)^+$

$$E = (\Sigma, \{s_\varepsilon\}, s_\varepsilon, \Delta_\varepsilon, \{s_\varepsilon\})$$

$$s_\varepsilon \notin Q_1$$

$$\Delta_\varepsilon(s_\varepsilon, \varepsilon) = \{s_\varepsilon\}$$

$$\forall a \in \Sigma \quad \Delta_\varepsilon(s_\varepsilon, a) = \emptyset$$

$$Q = Q_1 \cup \{s_\varepsilon\}$$

$$s = s_\varepsilon$$

$$\Delta(q, a) = \begin{cases} \Delta_1(q, a), & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \Delta_1(q, a) \cup \Delta_1(s, a), & q \in F_1 \\ \Delta_1(s, a), & q = s_\varepsilon \end{cases}$$

$$F = F_1 \cup \{s_\varepsilon\}$$

## Лема за покачването (Pumping Lemma)

Нека  $L \subseteq \Sigma^*$  е безкраен регулярен език.

$$\exists p \in \mathbb{N}^+ : \forall \omega \in L : |\omega| \geq p, \exists x, y, z \in \Sigma^* :$$

$$\omega = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1 \wedge (\forall i \in \mathbb{N} \ xy^i z \in L)$$

## Следствие (Контрапозиция на лемата за покачването)

Нека  $L \subseteq \Sigma^*$  е безкраен език.

Ако е изпълнено, че:

$$\forall p \in \mathbb{N}^+ \exists \omega \in L : |\omega| \geq p, \forall x, y, z \in \Sigma^* :$$

$$\omega = xyz \wedge |xy| \leq p \wedge |y| \geq 1 \wedge (\exists i \in \mathbb{N} \ xy^i z \notin L).$$

Тогава  $L$  не е регулярен.

## Релация на Майхил-Нероуд и минимален автомат

### Релация на Майхил-Нероуд

Нека  $\Sigma$  е азбука и  $L \subseteq \Sigma^*$

$$R_L = \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \forall z \in \Sigma^* \ xz \in L \iff yz \in L\}$$

$$\Sigma^*/R_L = \{[\alpha]_{R_L} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$$

### Теорема за съществуване на минимален автомат

Ако съществува  $n \in \mathbb{N} : n = |\Sigma^*/R_L|$ . Тогава  $L$  е регулярен и съществува минимален Д.К.А  $M = (\Sigma, Q_M, s_M, \delta_M, F_M)$ , такъв че  $\mathcal{L}(M) = L$ .

$$Q_M = \Sigma^*/R_L$$

$$s_M = [\varepsilon]_L$$

$$\delta_M([\alpha]_{R_L}, a) = [\alpha.a]_L$$

$$F_M = \{[\alpha]_{R_L} \mid \alpha \in L\} = \{q \in Q_M \mid q \subseteq L\}$$

Лема  $\delta_M$  е коректно дефинирана ( $\delta_M$  задава функция)

$$\text{Лема } \delta_M^*([\varepsilon]_{R_L}, \omega) = [\omega]_{R_L}$$

$$\text{Лема } \mathcal{L}(M) = L$$

### Еквивалентност на състояния на автомат и минимален автомат

Нека  $\Sigma$  е азбука и  $A = (\Sigma, Q, s, \delta, F)$  е свързан, тотален Д.К.А

#### Еквивалентност на състояния на автомат

$$R_{\equiv} = \{(p, q) \in Q \mid \forall \omega \in \Sigma^* \ \delta^*(p, \omega) \in F \iff \delta^*(q, \omega) \in F\}$$

#### Минимален Д.К.А построен по състояния на класовете на еквивалентност на $R_{\equiv}$

$$\text{Нека } A_{\equiv} = (\Sigma, Q_{\equiv}, s_{\equiv}, \delta_{\equiv}, F_{\equiv})$$

$$Q_{\equiv} = Q/R_{\equiv} = \{[q]_{R_{\equiv}} \mid q \in Q\}$$

$$s_{\equiv} = [s]_{R_{\equiv}}$$

$$\delta_{\equiv}([q]_{R_{\equiv}}, a) = [\delta(q, a)]_{R_{\equiv}}$$

$$F_{\equiv} = \{[q]_{R_{\equiv}} \mid q \in Q, [q]_{R_{\equiv}} \subseteq F\} = \{[q]_{R_{\equiv}} \mid q \in Q, [q]_{R_{\equiv}} \cap F \neq \emptyset\}$$

**Лема  $\delta_{\equiv}$  е коректно дефинирана ( $\delta_{\equiv}$  задава функция)**

**Лема  $\delta_{\equiv}^*([s]_{R_{\equiv}}, \omega) = [\delta^*(s, \omega)]_{R_{\equiv}} \implies \mathcal{L}(A_{\equiv}) = L$**

**Лема  $A_{\equiv}$  е с минимален брой състояния**

## **Задачи:**

Ако  $L \subseteq \{a, b\}^*$  е регулярен език.

То езикът  $\{(ab)^n(ba)^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$  е регулярен, защото очевидно се описва от регулярния израз  $(ab)^*(ba)^*$ .

Ако  $D$  е краен език над  $\{a, b\}^*$ , то  $L \cup \overline{D}$  винаги е регулярен, защото щом  $D$  е регулярен, то и  $\overline{D}$  е регулярен, следователно и  $L \cup \overline{D}$  е регулярен.

Ако  $K \subseteq \{a, b\}^*$  не е регулярен. То  $L \cap K$  може да е не регулярен, но може и да е регулярен, например ако  $L \cap K = \emptyset$  то той ще е регулярен.