

# Теоритично контролно №3, I, Информатика

Иван Йочев

Кристиян Симов

26 май 2019 г.

## 1 Полиноми на една променлива

### 1.1 Теорема за деление с частно и остатък за полиноми

Нека  $F$  - поле

Нека  $f, g \in F[x], g \neq 0$

$\Rightarrow \exists! q, r \in F[x] : f = g \cdot q + r, \deg(r) < \deg(g)$

### 1.2 Схема на Хорнер

Нека  $F$  - поле

Нека  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}, g = \alpha - x \in F[x]$

$q, r \in F[x] : f = g \cdot q + r, \deg(r) < \deg(g)$

$q = b_0 x^{n-1} + \dots + b_n$

Схема на Хорнер:

$$b_0 = a_0$$

$$b_1 = a_1 + \alpha b_0$$

$$b_2 = a_2 + \alpha b_1$$

$\vdots$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}$$

$$r = a_n + \alpha b_{n-1}$$

### 1.3 Идеали в пръстена от полиномите с коефициенти от дадено поле

Ако  $F$  - поле, то всеки идеал на  $F[x]$  е главен.

### 1.4 Максимален брой различни корени на ненулев полином с коефициенти от дадена област и от степен $n$

Нека  $A$  - област

Нека  $f \in A[x] : f \neq 0, \deg(f) = n$

$\Rightarrow f$  има най-много  $n$  различни корена

## 1.5 Принцип за сравняване на коефициентите на полиноми

Нека  $A$  - област

Нека  $g_1, g_2 \in A[x] : \deg(g_1), \deg(g_2) \leq n$

Ако  $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1} \in A$  - различни и

$\forall i \in \{1, \dots, n+1\} : g_1(\alpha_i) = g_2(\alpha_i)$

тогава  $g_1 = g_2$

## 2 Аритметика в пръстена на полиномите

### 2.1 Определение за деление на полиноми

Нека  $F$  - поле. Нека  $g, f \in F[x], g \neq 0$

$g$  дели  $f$  ( $g \mid f$ ) ако:

$\exists h \in F[x] : f = g.h$

### 2.2 Полином дели произведението на два полинома и е взаимно прост с един от тях

Нека  $F$  - поле Нека  $g, f_1, f_2 \in F[x]$

Ако  $g \mid f_1 f_2 \wedge (g, f_1) = 1 \Rightarrow g \mid f_2$

### 2.3 Най-голям общ делител на два полинома

Нека  $F$  - поле

Нека  $f, g \in F[x], \text{BOO } g \neq 0$

$\Rightarrow d \in F[x]$  е НОД на  $f$  и  $g$  ( $(f, g) = d$ ), ако:

1)  $d \mid f \wedge d \mid g$

2)  $(\exists d_1 \in F[x] : d_1 \mid f \wedge d_1 \mid g) \rightarrow d_1 \mid d$

### 2.4 Тъждество на Безу за два полинома

Нека  $F$  - поле

Нека  $f, g \in F[x]$

Нека  $d \in F[x] : (f, g) = d$

$\Rightarrow \exists u, v \in F[x] : uf + vg = d$

### 2.5 Най-малко общо кратно на два полинома

Нека  $F$  - поле

Нека  $f, g \in F[x]$

$k \in F[x]$  е НОК на  $f$  и  $g$  ( $[f, g] = k$ ), ако:

1)  $f \mid k \wedge g \mid k$

2)  $(\exists k_1 \in F[x] : f \mid k_1 \wedge g \mid k_1) \rightarrow k \mid k_1$

## 2.6 Пораждащ елемент на идеала $(f) + (g)$

Нека  $F$  - поле

Нека  $f, g \in F[x]$

Тогава идеалът  $(f) + (g)$  се поражда от елемента  $(f, g) \in F[x]$

т.е  $(f) + (g) = ((f, g))$

## 2.7 Пораждащ елемент на идеала $(f) \cap (g)$

Нека  $F$  - поле

Нека  $f, g \in F[x]$

Тогава идеалът  $(f) \cap (g)$  се поражда от елемента  $[f, g] \in F[x]$

т.е  $(f) \cap (g) = ([f, g])$

## 2.8 Неразложим полином над дадено поле

Нека  $F$  - поле

Нека  $f \in F[x]$ ,  $\deg(f) > 0$

$f$  - неразложим, ако:

$\nexists g, h \in F[x] : f = gh \wedge (0 < \deg(g), \deg(h) < \deg(f))$

## 2.9 Неразложим полином дели произведението на два други

Нека  $F$  - поле

Нека  $p, f_1, f_2 \in F[x]$ ,  $p$  - неразложим

Тогава  $(p \mid f_1 f_2) \leftrightarrow p \mid f_1 \vee p \mid f_2$

## 2.10 Теорема за разлагане на полином на неразложими множители

Нека  $F$  - поле

Нека  $f \in F[x] : \deg(f) > 0$

$\Rightarrow \exists^! p_1, \dots, p_k \in F[x] \ (p_i \text{ - неразложим, } i = 1, \dots, k) : f = p_1 p_2 \dots p_k$

\*Разлагането е единствено с точност до реда на полиномите и мултипликативни ненулеви константи, т.е:

Ако  $f = p_1, \dots, p_k = q_1, \dots, q_s$

$\Rightarrow k = s \wedge q_i = a_i p_i,$

$a_i \in F (a_i \neq 0), i = 1, \dots, k$

### 3 Корени на полиномите

#### 3.1 Какъв е полином $f$ , ако факторпръстенът $F[x]/(f)$ е поле

Нека  $F$  - поле

Нека  $f \in F[x] : \deg(f) > 0$

Тогава ако  $F[x]/(f)$  е поле  $\Rightarrow f$  - неразложим

#### 3.2 Какъв е факторпръстенът $F[x]/(f)$ , ако $f$ е неразложим

Нека  $F$  - поле

Нека  $f \in F[x] : \deg(f) > 0$

Тогава ако  $f$  - неразложим  $\Rightarrow F[x]/(f)$  е поле

#### 3.3 Определение за поле на разлагане

Нека  $F$  - поле

Нека  $f \in F[x] : \deg(f) > 0$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  са всички корени на  $f$

Нека  $L \geq F : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$

$\Rightarrow K = \bigcap_{\substack{F \leq P \leq L \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in P}} P$ , - поле на разлагане на  $f$  над  $F$

Ако  $K_1, K_2$  - полета на разлагане на  $f$  над  $F \Rightarrow K_1 \cong K_2$

т.е полето на разлагане е единствено с точност до изоморфизъм

#### 3.4 Формули на Виет за полином от четвърта степен

Нека  $F$  - поле

Нека  $f = \sum_{i=0}^4 a_i x^{4-i}$

Нека  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  - са корени на  $f$

т.е  $f = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$

Формули на Виет

1)  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{a_1}{a_0}$

2)  $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{a_2}{a_0}$

3)  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{a_3}{a_0}$

4)  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{a_4}{a_0}$

#### 3.5 Определение за $k$ -кратен корен на полином

Нека  $F$  - поле,  $K \geq F$

Нека  $f \in F[x]$ ,  $\alpha \in K$

$\alpha$  е  $k$ -кратен корен на  $f$ , ако:

$f = (x - \alpha)^k \cdot g$ ,  $g \in K[x] : g(\alpha) \neq 0$

### 3.6 НДУ полином над поле с характеристика 0 да има k-кратен корен

Нека  $F$  - поле и  $\text{char } F = 0$ ,  $K \geq F$

Нека  $f \in F[x]$ ,  $\alpha \in K$

$\alpha$  е k-кратен корен  $\leftrightarrow$

1)  $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$

2)  $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$

## 4 Симетрични полиноми

### 4.1 Лема за старшия едночлен за полиноми на много променливи

Нека  $A$  - област

Нека  $0 \neq f, g \in A[x_1, \dots, x_n]$

Нека  $u = a \prod_{k=1}^n x_k^{i_k}$  ( $0 \neq a \in A$ ) - старши едночлен на  $f$

Нека  $v = b \prod_{k=1}^n x_k^{j_k}$  ( $0 \neq b \in A$ ) - старши едночлен на  $g$

$$\Rightarrow u.v = ab \prod_{k=1}^n x_k^{i_k+j_k} \text{ - старши едночлен на } f.g$$

### 4.2 Лексикографска наредба на едночлени на n променливи

Нека  $A$  - област

Нека  $u = a \prod_{k=1}^n x_k^{i_k}$  ( $0 \neq a \in A$ )

Нека  $v = b \prod_{k=1}^n x_k^{j_k}$  ( $0 \neq a \in A$ )

$u$  и  $v$  са неподобни едночлени

$u > v$ , ако  $\exists k \in \mathbb{N}$  :

$$(\forall t \in \{1, 2, \dots, k-1\} \ i_t = j_t) \wedge (i_k > j_k)$$

### 4.3 Симетричен полином

Нека  $A$  - област

Нека  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A[x_1, x_2, \dots, x_n]$

$f$  е симетричен  $\leftrightarrow \forall \sigma \in S_n$  :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

## 4.4 Елементарни симетрични полиноми

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \sigma_2 &= \sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ \sigma_3 &= \sigma_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\ &\vdots \\ \sigma_n &= \sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2x_3\dots x_n\end{aligned}$$

За  $n = 4$

$$\sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

## 4.5 Основна теорема за симетричните полиноми

Нека  $A$  - област

$$\begin{aligned}\text{Нека } f &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A[x_1, x_2, \dots, x_n] \\ \Rightarrow \exists! g &\in A[x_1, x_2, \dots, x_n] : f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)\end{aligned}$$

## 4.6 Формули на Нютон

Нека  $A$  - област

$$\text{Нека } f = f(x_1, \dots, x_n) \in A[x_1, \dots, x_n]$$

$$\text{Нека } S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k \quad 1 < k \leq n$$

Формули на Нютон

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} S_1 + (-1)^k \sigma_k k = 0$$

## 5 Дискриминанта и резултанта

## 6 Полиноми с рационални коефициенти

### 6.1 Определение за примитивен полином

$$\text{Нека } f = a_0x^n + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$$

$$f \text{ - примитивен} \Leftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n) = 1$$

### 6.2 Лема на Гаус за полиноми с цели коефициенти

$$\text{Нека } g = a_0x^n + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$$

$$\text{Нека } h = b_0x^n + \dots + b_n \in \mathbb{Z}[x]$$

$f$  и  $g$  са примитивни полиноми

Тогава  $f = g.h$  също е примитивен полином

### 6.3 Редукционен критерий за неразложимост на полиноми с цели коефициенти

Нека  $f \in \mathbb{Z}[x]$

Нека  $p \in \mathbb{P}$  - произволно просто число

Нека  $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$  е полиномът  $f$ , редуциран по модул  $p$

$\bar{f}$  е неразложим над  $\mathbb{Z}_p \Rightarrow f$  е неразложим над  $\mathbb{Z}$

### 6.4 Критерий на Айзенщайн за неразложимост на полиноми с цели коефициенти

Нека  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} \in \mathbb{Z}[x]$

$f$  е неразложим над  $\mathbb{Q}$ , ако  $\exists p \in \mathbb{P}$  :

- 1)  $p \nmid a_0$
- 2)  $p \mid a_1, \dots, a_n$
- 3)  $p^2 \nmid a_n$