

# Теоритично контролно №1 1, I, Информатика

Иво Стратев

23 октомври 2018 г.

## 1 Комплексни числа ( $\mathbb{C}$ )

$$z = -5 - 4i$$

### 1.1 $Re\ z$

$$Re\ z = -5$$

### 1.2 $Im\ z$

$$Im\ z = -4$$

### 1.3 $|z|$

$$|z| = \sqrt{(Re\ z)^2 + (Im\ z)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

### 1.4 $\operatorname{tg} Arg\ z$

$$\operatorname{tg} Arg\ z = \frac{Im\ z}{Re\ z} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

### 1.5 $\sin Arg\ z$

$$\sin Arg\ z = \frac{Im\ z}{|z|} = \frac{-4}{\sqrt{41}} \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{-4\sqrt{41}}{41}$$

### 1.6 $\cos Arg\ z$

$$\cos Arg\ z = \frac{Re\ z}{|z|} = \frac{-5}{\sqrt{41}} \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{-5\sqrt{41}}{41}$$

$$2 \quad z = \frac{5-3i}{4+i} \quad Re\ z + Im\ z$$

$$z = \frac{5-3i}{4+i}$$

$$z = \frac{5-3i}{4+i} \frac{4-i}{4-i}$$

$$z = \frac{(5-3i)(4-i)}{4^2+1^2}$$

$$z = \frac{20-5i-12i-3}{17}$$

$$z = \frac{17-17i}{17}$$

$$z = 1 - i$$

$$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

## 3 Формули на Моавър

### 3.1 $z^n$

$$z^n = |z|^n (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z)$$

### 3.2 $\sqrt[n]{z}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

## 4 Системи линейни уравнения

### 4.1 съвместима

Една система от линейни уравнения се нарича съвместима, когато има поне едно решение.

### 4.2 несъвместима

Една система от линейни уравнения се нарича несъвместима, когато няма решение.

### 4.3 определена

Една система от линейни уравнения се нарича определена, когато е съвместима и има точно едно решение.

### 4.4 неопределена

Една система от линейни уравнения се нарича неопределена, когато е съвместима и има повече от едно решение.

## 5 Релации и изображения

### 5.1 Релации

$$R \subseteq A \times A;$$

#### 5.1.1 симетрична релация

$$\forall x, y \in A \quad (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$$

### 5.1.2 транзитивна релация

$$\forall x, y, z \in A \ (x, y), (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$$

### 5.1.3 рефлексивна релация

$$\forall x \in A \ (x, x) \in R$$

## 5.2 Изображения

$$f : X \rightarrow Y$$

### 5.2.1 инективно изображение

$$\forall x_1, x_2 \in X \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

### 5.2.2 сюрективно изображение

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : y = f(x)$$

### 5.2.3 биекция

Биекция наричаме изображение, което е едновременно инекция и сюрекция.

## 6 Бинарни операции

$$* : M \times M \rightarrow M$$

### 6.1 асоциативност

$$\forall a, b, c \in M \ (a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$$

### 6.2 комутативност

$$\forall a, b \in M \ a * b = b * a$$

### 6.3 неутрален елемент

$$\exists \theta \in M : \forall x \in M \ x * \theta = \theta * x = x$$

## 7 Матрици

### 7.1 $A^t$

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F) \ (i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n)$$

$$B = (b_{ij})_{n \times m} = A^t \in M_{n \times m}(F) : b_{ij} = a_{ji} \ (i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2, \dots, m);$$

## 7.2 $A + B$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$$

$$A + B = C = (c_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

## 7.3 $\lambda A$

$$\lambda \in F, A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$$

$$\lambda A = C = (c_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$$

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

# 8 Вектори в линейно пространство

$F$  - числово поле,  $V$  - линейно пространство над  $F$

## 8.1 нулевият вектор е единствен

Нека  $\theta'$  и  $\theta''$  са нулеви вектори от  $V$ . Тогава:

$$\theta' + \theta'' = \theta'' \quad (\text{защото } \theta' \text{ е нулев вектор})$$

$$\theta' + \theta'' = \theta' \quad (\text{защото } \theta'' \text{ е нулев вектор})$$

$$\implies \theta' = \theta''$$

## 8.2 противоположният вектор е единствен

Нека  $a$  е вектор от  $V$  и нека  $a'$  и  $a''$  са негови противоположни вектори от  $V$ . Тогава:

$$a' + a + a'' = (a' + a) + a'' = \theta + a'' = a'' \quad (\text{защото } a' \text{ е противоположен вектор на } a)$$

$$a' + a + a'' = a' + (a + a'') = a' + \theta = a' \quad (\text{защото } a'' \text{ е противоположен вектор на } a)$$

$$\implies a' = a''$$

## 8.3 $0a = \theta$

$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = a$$

$$a + 0a = a + (-a)$$

$$\theta + 0a = \theta$$

$$0a = \theta$$

$$\mathbf{8.4} \quad \lambda\theta = \theta$$

$$a \in V$$

$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = a$$

$$a + 0a = a \mid + (-a)$$

$$\theta + 0a = \theta$$

$$0a = \theta$$

Сега в равенството:  $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$  избираме  $\mu = 0$

и получаваме:  $\lambda\theta = 0a = \theta$

$$\mathbf{8.5} \quad -1a = -a$$

$$a + (-1a) = \theta$$

$$1a + (-1a) = \theta$$

$$(1 + (-1))a = \theta$$

$$0a = \theta$$

$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = a$$

$$a + 0a = a \mid + (-a)$$

$$\theta + 0a = \theta$$

$$0a = \theta$$

## 9 Линейно пространство, линейна комбинация и линейна зависимость/независимость

$F$  - числово поле,  $V$  - линейно пространство над  $F$

### 9.1 линейна комбинация

$$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in V$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in V \text{ - линейна комбинация}$$

## 9.2 линейно подпространство

$$W \subseteq V$$

$$V \ni \theta \in W$$

$$\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 - w_2 \in W$$

$$\forall \lambda \in F, \forall w \in W \quad \lambda w \in W$$

## 9.3 линейна обвивка

$$\text{Нека } A \neq \emptyset \subset V$$

$$l(A) = \bigcap_{A \subseteq W \subseteq V} W$$

Алтернативна дефиниция:

$$l(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{|A|} \lambda_i a_i \mid \forall i \in \mathbb{N} : i \leq |A| \lambda_i \in F, a_i \in A \right\}$$

## 9.4 линейна зависимост

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in V$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \theta : (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

## 9.5 линейна независимост

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in V$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \theta \iff (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

## 10 Линейна зависимост/независимост

### 10.1 ако един вектор е линейно независим, то той е ненулев вектор

Отрицание на твърдението: "ако един вектор е линейно независим, то той е ненулев вектор" е: "ако един вектор е линейно зависим, то той е нулев вектор"

$$\lambda \in F, a \in V : \lambda a = \theta : \lambda \neq 0$$

$$\lambda a = \theta \mid \lambda^{-1}$$

$$1.a = \theta$$

$$a = \theta$$

$\implies$  ако един вектор е линейно независим, то той е ненулев вектор

### 10.2 ако един вектор е линейно зависим то, той е нулевият вектор

$$\lambda \in F, a \in V : \lambda a = \theta : \lambda \neq 0$$

$$\lambda a = \theta \mid \lambda^{-1}$$

$$1.a = \theta$$

$$a = \theta$$

### 10.3 всяка подсистема на линейно независима система от вектори е също линейно независима

$$n, k \in \mathbb{N} : k \leq n$$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  - линейно независима система от вектори

$B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  допускаме, че B е линейно зависима

$$\implies \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in F : \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \theta, \lambda_1 \neq 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i + \sum_{j=k+1}^n 0a_j = \theta$$

$\implies$  противоречие с факта, че A е линейно независима система от вектори

**10.4    ако една система от вектори съдържа линейно зависима подсистема, то тази система също е линейно зависима**

$n, k \in \mathbb{N} : k < n$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  - система от вектори

$B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  - линейно зависима подсистема от вектори

От  $B$  линейно зависима подсистема от вектори

$$\implies \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in F : \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \theta, \lambda_1 \neq 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i + \sum_{j=k+1}^n 0a_j = \theta$$

От  $\lambda_1 \neq 0 \implies A$  е линейно зависима система от вектори

**10.5    ако една система от вектори съдържа два пропорционални вектора, то тя е линейно зависима**

$n \in \mathbb{N} : A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  - система от вектори

$$a_2 = \lambda a_1 \implies \lambda a_1 - a_2 = \theta$$

$$\implies \lambda a_1 + (-1)a_2 + \sum_{i=3}^n 0a_i = \theta$$

$\implies A$  е линейно зависима система от вектори

**10.6    ако в една система от поне два вектора един от векторите е линейна комбинация на останалите, то системата е линейно зависима**

$n \in \mathbb{N} : n > 1$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  - система от вектори

$$a_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i$$

$$\implies -a_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i = \theta$$

$$\implies (-1)a_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i = \theta$$

$\implies A$  е линейно зависима система от вектори



## 10.7 в една линейно зависима система от поне два вектора поне един вектор е линейна комбинация на останалите

$$n \in \mathbb{N} : n > 1$$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  - линейно зависима система от поне два вектора

$$\implies \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F : \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \theta, \lambda_1 \neq 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \theta \mid \lambda_1^{-1} \implies a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} a_i = \theta$$

$$\implies a_1 = \sum_{i=2}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} a_i$$

## 11 Базис и размерност

$V$  - линейно пространство над числовото поле  $F$

### 11.1 Основна лема на алгебрата

$$n, k \in \mathbb{N}$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k \mid \forall j = 1, 2, \dots, k \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F : b_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\}$$

Ако  $k > n \implies B$  е линейно зависима система от вектори

### 11.2 Базис

$$B \neq \emptyset \subset V \neq \{\theta\}$$

$$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  - линейно независима система от вектори

$$\text{Ако } V = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mid \forall i \in \mathbb{N} : i \leq n \lambda_i \in F \right\} = l(B)$$

### 11.3 Крайномерно линейно пространство

$$B \neq \emptyset \subset V \neq \{\theta\}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  - линейно независима система от вектори

$$\text{Ако } V = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mid \forall i \in \mathbb{N} : i \leq n \lambda_i \in F \right\} = l(B)$$

## 11.4 Крайнопородено линейно пространство

$\exists n \in \mathbb{N}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  - линейно независима система от вектори :

$$V = l(B)$$

## 11.5 Размерност на линейно пространство

$$\forall B \neq \emptyset \subset V \neq \{\emptyset\}$$

$$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  - линейно независима система от вектори

$$\text{и } V = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mid \forall i \in \mathbb{N} : i \leq n \lambda_i \in F \right\} = l(B)$$

$$\dim(V) = n$$

С други думи казано размерността дефинираме като броя на векторите в кой да е базис на  $V$

Ако едно крайномерно линейно пространство и едно негово линейно подпространство имат една и съща размерност, то те съвпадат

## 11.6 Координати на вектор в даден базис

$$\dim V = n$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} : V = l(B)$$

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in V \quad \lambda_i \in F, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  са координатите на  $v$  в базиса  $b_1, b_2, \dots, b_n$

## 12 Сума на подпространства, директна сума на подпространства и ранг на система вектори

### 12.1 Сума на подпространства и директна сума на подпространства

$V$  - линейно пространство над числовото поле  $F$

$V_1, V_2$  - крайномерни линейни подпространства на  $V$

**12.1.1** връзка между размерностите на сумата и сечението на две крайномерни линейни подпространства на дадено линейно пространство

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

**12.1.2** НДУ едно линейно пространство да е директна сума на две свои подпространства

$$V = V_1 \oplus V_2 \iff V = V_1 + V_2, V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$$

**12.2** Ранг на система вектори

**12.2.1** Максимална линейно независима подсистема вектори на дадена система вектори

$T$  - система вектори,  $S \subseteq T$  - лин. независима подсистема вектори,

$\forall v \in T \setminus S = \{a \in T \mid a \notin S\}$   $S \cup \{v\}$  - е лин. зависима система

**12.2.2** Ранг на система вектори

$$S \subseteq V, r(S) = \dim(l(S))$$