Линейни пространства

Иво Стратев

24 октомври 2019 г.

Съдържание

1 Еквивалентни дефиниции на поле

1.1 Стандартна със съществуване

$(\mathbb{F}, +, .)$ е поле ако:

1. $\mathbb{F}$ е непразно множество и $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})[\, a + b \in \mathbb{F} \;\wedge\; a.b \in \mathbb{F}\,]$;
2. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})(\forall c \in \mathbb{F})[\, (a + b) + c = a + (b + c)\,]$;
3. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})[\, a + b = b + a\,]$;
4. $(\exists 0 \in \mathbb{F})(\forall a \in \mathbb{F})[\, 0 + a = a \;\wedge\; (\exists - a \in \mathbb{F})[\, a + (-a) = 0\,]\,]$;
5. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})(\forall c \in \mathbb{F})[\, (a.b).c = a.(b.c)\,]$;
6. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})[\, a.b = b.a\,]$;
7. $(\exists 1 \in \mathbb{F})(\forall a \in \mathbb{F})[\, 1.a = a\,]$;
8. $(\forall a \in \mathbb{F})[\, a \neq 0 \implies (\exists a^{-1} \in \mathbb{F})[\, a.a^{-1} = 1\,]\,]$;
9. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})(\forall c \in \mathbb{F})[\, a.(b + c) = a.b + a.c\,]$;

1.2 Еквивалентна с операции и константи (инфиксен запис)

$(\mathbb{F}, 0, 1, +, -, .)$ е поле ако:

1. $\mathbb{F}$ е непразно множество, $0 \in \mathbb{F}$, $1 \in \mathbb{F}$, $+ \;:\; \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $- \;:\; \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ и $. \;:\; \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$;
2. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})(\forall c \in \mathbb{F})[\, (a + b) + c = a + (b + c)\,]$;
3. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})[\, a + b = b + a\,]$;
4. $(\forall a \in \mathbb{F})[\, 0 + a = a\,]$;
5. $(\forall a \in \mathbb{F})[\, a + (-a) = 0\,]$;
6. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})(\forall c \in \mathbb{F})[\, (a.b).c = a.(b.c)\,]$;
7. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})[\, a.b = b.a\,]$;
8. $(\forall a \in \mathbb{F})[\, 1.a = a\,]$;
9. $(\forall a \in \mathbb{F})[\, a \neq 0 \implies (\exists a^{-1} \in \mathbb{F})[\, a.a^{-1} = 1\,]\,]$;
10. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})(\forall c \in \mathbb{F})[\, a.(b + c) = a.b + a.c\,]$;

1.3 Еквивалентна с функции и константи (функционален запис)

$(\mathbb{F}, 0, 1, add, inv, mul)$ е поле ако:

1. $\mathbb{F}$ е непразно множество, $0 \in \mathbb{F}$, $1 \in \mathbb{F}$, $add\ :\ \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $inv\ :\ \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ и $mul\ :\ \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$;
2. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})(\forall c \in \mathbb{F})[\ add(add(a,b),c) = add(a, add(b,c))\ ]$;
3. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})[\ add(a,b) = add(b,a)\ ]$;
4. $(\forall a \in \mathbb{F})[\ add(0,a) = a\ ]$;
5. $(\forall a \in \mathbb{F})[\ add(a, inv(a)) = 0\ ]$;
6. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})(\forall c \in \mathbb{F})[\ mul(mul(a,b),c) = mul(a, mul(b,c))\ ]$;
7. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})[\ mul(a,b) = mul(b,a)\ ]$;
8. $(\forall a \in \mathbb{F})[\ mull(1,a) = a\ ]$;
9. $(\forall a \in \mathbb{F})[\ a \neq 0 \implies (\exists a^{-1} \in \mathbb{F})[\ mul(a, a^{-1}) = 1\ ]\ ]$;
10. $(\forall a \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{F})(\forall c \in \mathbb{F})[\ mul(a, add(b,c)) = add(mul(a,b), mul(a,c))\ ]$;

2 Еквивалентни дефиниции на линейно пространство

2.1 Стандартна със съществуване

Нека $(\mathbb{F}, +, .)$ е поле.
$(\mathbb{V}, \oplus, \odot)$ е линейно пространство над полето $(\mathbb{F}, +, .)$, ако:

1. $\mathbb{V}$ е непразно множество,
   $(\forall a \in \mathbb{V})(\forall b \in \mathbb{V})[\ a \oplus b \in \mathbb{V}\ ]$ и $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall v \in \mathbb{V})[\ \lambda \odot v \in \mathbb{V}\ ]$;
2. $(\forall a \in \mathbb{V})(\forall b \in \mathbb{V})(\forall c \in \mathbb{V})[\ (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\ ]$;
3. $(\forall a \in \mathbb{V})(\forall b \in \mathbb{V})[\ a \oplus b = b \oplus a\ ]$;
4. $(\exists \theta \in \mathbb{V})(\forall a \in \mathbb{V})[\ \theta \oplus a = a\ \wedge\ (\exists \ominus a \in \mathbb{V})[\ a \oplus (\ominus a) = \theta\ ]\ ]$;
5. $(\forall a \in \mathbb{V})[\ 1 \odot a = a\ ]$;
6. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in \mathbb{V})[\ (\lambda.\mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v)\ ]$;
7. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{V})(\forall c \in \mathbb{V})[\ \lambda \odot (b \oplus c) = (\lambda \odot b) \oplus (\lambda \odot c)\ ]$;
8. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in \mathbb{V})[\ (\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v)\ ]$;

2.2 Еквивалентна с операции и константи (инфиксен запис)

Нека $(\mathbb{F}, 0, 1, +, -, .)$ е поле.
$(\mathbb{V}, \theta, \oplus, \ominus, \odot)$ е линейно пространство над полето $(\mathbb{F}, 0, 1, +, -, .)$, ако:

1. $\mathbb{V}$ е непразно множество,
   $\theta \in \mathbb{V}$, $\oplus \ : \ \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $\ominus \ : \ \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ и $\odot \ : \ \mathbb{F} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$;
2. $(\forall a \in \mathbb{V})(\forall b \in \mathbb{V})(\forall c \in \mathbb{V})[\ (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\ ]$;
3. $(\forall a \in \mathbb{V})(\forall b \in \mathbb{V})[\ a \oplus b = b \oplus a\ ]$;
4. $(\forall a \in \mathbb{V})[\ \theta \oplus a = a\ ]$;
5. $(\forall a \in \mathbb{V})[\ a \oplus (\ominus a) = \theta\ ]$;
6. $(\forall a \in \mathbb{V})[\ 1 \odot a = a\ ]$;
7. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in \mathbb{V})[\ (\lambda.\mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v)\ ]$;
8. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{V})(\forall c \in \mathbb{V})[\ \lambda \odot (b \oplus c) = (\lambda \odot b) \oplus (\lambda \odot c)\ ]$;
9. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in \mathbb{V})[\ (\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v)\ ]$;

2.3 Еквивалентна с функции и константи (функционален запис)

Нека $(\mathbb{F}, 0, 1, add, inv, mul)$ е поле.
$(\mathbb{V}, \theta, vecAdd, vecInv, scalMul)$ е линейно пространство над полето $(\mathbb{F}, 0, 1, add, inv, mul)$, ако:

1. $\mathbb{V}$ е непразно множество,
   $\theta \in \mathbb{V}$, $vecAdd \ : \ \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $vecInv \ : \ \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ и $scalMul \ : \ \mathbb{F} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$;
2. $(\forall a \in \mathbb{V})(\forall b \in \mathbb{V})(\forall c \in \mathbb{V})[\ vecAdd(vecAdd(a, b), c) = avecAdd(a, vecAdd(b, c))\ ]$;
3. $(\forall a \in \mathbb{V})(\forall b \in \mathbb{V})[\ vecAdd(a, b) = vecAdd(b, a)\ ]$;
4. $(\forall a \in \mathbb{V})[\ vecAdd(\theta, a) = a\ ]$;
5. $(\forall a \in \mathbb{V})[\ vecAdd(a, vecInv(a)) = \theta\ ]$;
6. $(\forall a \in \mathbb{V})[\ scalMul(1, a) = a\ ]$;
7. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in \mathbb{V})[\ scalMul(mul(\lambda, \mu), v) = scalMul(\lambda, scalMul(\mu, v))\ ]$;
8. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall b \in \mathbb{V})(\forall c \in \mathbb{V})[\ scalMul(\lambda, vecAdd(b, c)) = vecAdd(scalMul(\lambda, b), scalMul(\lambda, c))\ ]$;
9. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in \mathbb{V})[\ scalMul(add(\lambda{+}\mu), v) = vecAdd(scalMul(\lambda, v), scalMul(\mu, v))\ ]$;

3 НДУ за подпространство

Нека $(\mathbb{V}, \oplus, \odot)$ е ЛП над поле $(\mathbb{F}, +, .)$.
$(\mathbb{U}, \oplus, \odot)$ е подпространство на $(\mathbb{V}, \oplus, \odot)$ ТСТК:

1. $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$;
2. $(\forall a \in \mathbb{U})(\forall b \in \mathbb{U})[\ a \oplus b \in \mathbb{U}\ ]$;
3. $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall u \in \mathbb{U})[\ \lambda \odot u \in \mathbb{U}\ ]$.

4 Две доказателства на подпространства

4.1 Нечетни реални функции

Да се докаже, че множеството от нечетните реални функции е линейно пространство над полето на реалните числа относо стандартните операции за събиране на функции и умножение на функция с число.

4.1.1 Решение:

Очевидно множеството от нечетните функции е подмножество на всички реални функции. Показваме затвореност.
Нека f и g са нечетни функции. Тогава

$$(\forall x \in \mathbb{R})[\ f(-x) = -f(x)\ ] \ \wedge\ (\forall x \in \mathbb{R})[\ g(-x) = -g(x)\ ]$$

Нека $x \in \mathbb{R}$ тогава $(f \oplus g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) = -(f(x) + g(x)) = -(f \oplus g)(x)$. Следователно
$(\forall x \in \mathbb{R})[\ (f \oplus g)(-x) = -(f \oplus g)(x)\ ]$. Тоест сума на нечетни функции е отново нечетна функция. Тоест доказахме затвореност относно събирането.
Нека h е нечетна функция и нека $\lambda \in \mathbb{R}$. Нека $x \in \mathbb{R}$ тогава $(\lambda \odot h)(-x) = \lambda.h(-x) = \lambda.(-h(x)) = -\lambda.h(x) = -(\lambda \odot h)(x)$. Следователно
$(\forall x \in \mathbb{R})[\ (\lambda \odot h)(-x) = -(\lambda \odot h)(x)\ ]$. Тоест нечетна функция умножена с число отново е нечетна функция. Тоест доказахме затвореност относно умножение с число.
Така множеството на нечетните функции относно стандартните операции е линейно подпространство. В частност линейо пространство над реалните числа.

4.2 "Интересни" функции

Нека $\mathbb{W} = \{(a \odot sinx) \oplus (b \odot x^2) \oplus c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. Да се докаже, че $\mathbb{W}$ е линейно пространство относно стандартните операции за събиране на функции и умножение на функция с число.

4.2.1 Решение:

Очевидно всеки елемент на множеството $\mathbb{W}$ е функция от реални числа в реални числа. Тоест очевидно $\mathbb{W} \subseteq \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
Ние знаем (може би още не съвсем, но вие ще го докажете, вярвам във вас!), че относно стандартните операции за събиране на функции и умножение на функция с число $\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ е ЛП над полето на реалните числа.
Тогава ни остава да докажем затвореност относно операциите!
Нека $w_1 \in \mathbb{W}$ и нека $w_2 \in \mathbb{W}$ и са произволни.
Тогава съществуват $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$, такива че $w_1 = (a_1 \odot sinx) \oplus (b_1 \odot x^2) \oplus c_1$ и съществуват $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$, такива че $w_2 = (a_2 \odot sinx) \oplus (b_2 \odot x^2) \oplus c_2$. Нека тогава $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ и нека $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ и нека $w_1 = (a_1 \odot sinx) \oplus (b_1 \odot x^2) \oplus c_1$ и $w_2 = (a_2 \odot sinx) \oplus (b_2 \odot x^2) \oplus c_2$. Така $w_1 \oplus w_2 = ((a_1 \odot sinx) \oplus (b_1 \odot x^2) \oplus c_1) \oplus ((a_2 \odot sinx) \oplus (b_2 \odot x^2) \oplus c_2) = ((a_1 + a_2) \odot sinx) \oplus ((b_1 + b_2) \odot x^2) \oplus (c_1 + c_2)$ и $(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \in \mathbb{R}^3$. Следователно $w_1 \oplus w_2 \in \mathbb{W}$.
Следователно $(\forall w_1 \in \mathbb{W})(\forall w_2 \in \mathbb{W})[\ w_1 \oplus w_2 \in \mathbb{W}\ ]$.
Нека $\mu \in \mathbb{R}$ и нека $w \in \mathbb{W}$ и са произволни. Тогава съществуват $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, такива че $w = (a \odot sinx) \oplus (b \odot x^2) \oplus c$. Нека тогава $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ и нека $w = (a \odot sinx) \oplus (b \odot x^2) \oplus c$. Така $\mu \odot w = \mu \odot ((a \odot sinx) \oplus (b \odot x^2) \oplus c) = ((\mu.a) \odot sinx) \oplus ((\mu.b) \odot x^2) \oplus (\mu.c)$ и $(\mu.a, \mu.b, \mu.c) \in \mathbb{R}^3$. Следователно $\mu \odot w \in \mathbb{W}$. Следователно $(\forall \mu \in \mathbb{F})(\forall w \in \mathbb{W})[\ \mu \odot w \in \mathbb{W}\ ]$.
Значи $(\mathbb{W}, \oplus, \odot)$ е подпространсто на функците от реални в реални числа.
В частност $(\mathbb{W}, \oplus, \odot)$ е линейно пространство.

5 Задачи за домашно

5.1 Задачи, които са задължителни

5.1.1 Всяко поле е ЛП над себе си

Докажете, че ако $(F, +, .)$ е поле, то $(F, +, .)$ е ЛП над полето $(F, +, .)$.

5.1.2 Задачата за функциите

Нека X е непразно множество и нека $(F, +, .)$ е поле.
Нека $Func(X, F) = \{f \mid f : X \to F\}$.
Дефинираме естествените операции събиране на функции и умножение на функция с число по следните правила:

$$(\forall f \in Func(X, F))(\forall g \in Func(X, F))(\forall x \in X)[\ (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)\ ]$$
$$(\forall \lambda \in F)(\forall f \in Func(X, F))(\forall x \in X)[\ (\lambda \odot f)(x) = \lambda.f(x)\ ]$$

Докажете, че $(Func(X, F), \oplus, \odot)$ е ЛП над $(F, +, .)$.
Асоциативността е по желание!

Равенство на функции се дефинира като равенство между функционалните им стойности. Тоест

$$(\forall f \in Func(X, F))(\forall g \in Func(X, F))[\ f = g \iff (\forall x \in X)[\ f(x) = g(x)\ ]\ ]$$

Нулевата функция се дефинира така:

$$(\forall x \in X)[\ \theta(x) = 0\ ]$$

Тоест константа 0, която е нулата на полето!
Противоположна функция се дефинира така:

$$(\forall f \in Func(X, F))(\forall x \in X)[\ (\ominus f)(x) = -f(x)\ ]$$

Тоест функцията, която връща противоположните стойности.

5.2 Задачи за упражнение

5.2.1 Четните реални функции образуват ЛП

5.2.2 Полиномите състоящи се само от четни степени образуват ЛП

5.2.3 Множеството $\{(p, 0, -p) \mid p \in \mathbb{Q}\}$ образува ЛП

5.2.4 Задача 3.9 от сборника

5.2.5 Задача 3.7 от сборника

5.3 Нека $(V, \oplus, \odot)$ е ЛП над $(F, +, .)$ и A е крайно подмножество на V. Тогава $l(A)$ е ЛП