Предложения за домашно 2019

Иво Стратев

25 февруари 2019 г.

Задача 1.

Нека $(\mathbb{G}, .)$ е група, която действа на множеството Ω.

а) Да се докаже, че ако $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$, то $(\mathbb{G}, .)$ действа на Ω^n

Нека $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$. $(\mathbb{G}, .)$ действа на множеството Ω следователно

$$\exists\, \phi \in Hom((\mathbb{G}, .), (S_\Omega, \circ))$$

Нека $\phi \in Hom((\mathbb{G}, .), (S_\Omega, \circ))$. Дефинираме

$$\begin{aligned} \Phi\ :\ \mathbb{G} \to (\Omega^n \to \Omega^n) \\ g \mapsto [(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto (\phi(g)(\omega_1), \ldots, \phi(g)(\omega_n))] \end{aligned}$$

Ще докажем, че $\Phi \in Hom((\mathbb{G}, .), (S_{\Omega^n}, \circ))$
Нека $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$ и $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$ тогава

$$\begin{aligned} \Phi(g_1.g_2)(\omega) = (\phi(g_1.g_2)(\omega_1), \ldots, \phi(g_1.g_2)(\omega_n)) \\ = (\phi(g_1)(\phi(g_2)(\omega_1)), \ldots, \phi(g_1)(\phi(g_2)(\omega_n))) \\ = \Phi(g_1)((\phi(g_2)(\omega_1), \ldots, \phi(g_2)(\omega_n))) \\ = \Phi(g_1)(\Phi(g_2)(\omega)) = (\Phi(g_1) \circ \Phi(g_2))(\omega) \end{aligned}$$

Следователно е в сила $\Phi(g_1.g_2) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$.
Тоест вярно е $\forall g_1 \in \mathbb{G}\ \forall g_2 \in \mathbb{G}\ \Phi(g_1.g_2) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$.
Следователно $\Phi \in Hom((\mathbb{G}, .), (S_{\Omega^n}, \circ))$. $\square$

б) Да се докаже, че $St_{\mathbb{G}}((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = St_{\mathbb{G}}(\omega_1) \cap \cdots \cap St_{\mathbb{G}}(\omega_n)$

Нека $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$ нека $g \in \mathbb{G}$. Очевидно $(\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \phi(g)(\omega_i) = \omega_i) \iff$ $\Phi(g)((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = (\phi(g)(\omega_1), \ldots, \phi(g)(\omega_n)) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$
Тоест $g \in S_{\mathbb{G}}(\omega_1) \cap \cdots \cap S_{\mathbb{G}}(\omega_n) \iff g \in S_{\mathbb{G}}((\omega_1, \ldots, \omega_n))$.
Следователно $St_{\mathbb{G}}((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = St_{\mathbb{G}}(\omega_1) \cap \cdots \cap St_{\mathbb{G}}(\omega_n)$. $\square$