1 Числови съвкупности

1.1 Естествени числа

1.1.1 def

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

1.1.2 Заб.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ Пеано

1.1.3 Операции: $+, \times$

1.2 Цели числа

1.2.1 def

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

1.2.2 Операции: $+, -, \times$

1.3 Рационални числа

1.3.1 def

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} = \{\forall \frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
$\iff$ $\forall$ крайна или безкрайна, но периодична десетична дроб

1.3.2 Операции: $+, -, \times, \div\, q \neq 0$

1.3.3 Примери:

$$5 = \frac{5}{1} \in \mathbb{Q}$$

$$-7 = \frac{7}{-1} \in \mathbb{Q}$$

$$\pm\frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$$

$$3.14 = \frac{314}{100} \in \mathbb{Q}$$

$$5.21414 = 5.2_{(14)} \in \mathbb{Q}\,(\text{безкрайна периодична дроб})$$

$$A = 5.21414$$

$$\begin{array}{r} 100 \times A = 521.414 \\ - \quad A = 5.21414 \\ \hline 99 \times A = 516.2 \\ A = \frac{516.2}{99} = \frac{5162}{990} \end{array}$$

(Умножаваме по $10^x - 1$, където x е дължината на периода и получаваме дроб от вида $\frac{p}{q}$)

1.3.4 Примери за числа $\notin \mathbb{Q}$:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{(доказва се чрез алгоритъма на Евклид)}$$
$$\pi = 3.141292\ldots \notin \mathbb{Q}$$
$$\epsilon \sim 2.71 \notin \mathbb{Q}\,\text{(неперово число)}$$
$$\epsilon^x \notin \mathbb{Q}\,\text{(експоненциялна функция)}$$
$$\log_\epsilon x = \ln x \notin \mathbb{Q}\,\text{(натурален логаритъм)}$$

1.4 Ирационални числа

1.4.1 def

$\mathbb{I} = \{\forall\, \frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\} \iff \forall$ безкрайна непериодична десетична дроб

1.4.2 Операции: $+, -, \times, \div\, q \neq 0$

1.4.3 Примери:

$\pi, \epsilon, \sqrt{x}\, x \in \mathbb{R},\ \sqrt[n]{x}\, n \in \mathbb{N}\, x \in \mathbb{R}, \ldots \notin \mathbb{Q} \in \mathbb{I}$

1.5 Реални числа

1.5.1 def

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \iff \forall$ крайна или безкрайна десетична дроб

1.5.2 Операции: $+, -, \times, \div\, q \neq 0, \lim$ (граничен преход)

1.5.3 Заб. $\mathbb{R}$ е пълно пространство:

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

1.5.4 Сравняване на две рационални числа:

$A = \pm\, a_1 a_2 a_3 \ldots . \, b_1 b_2 b_3 \ldots$
$C = \pm\, c_1 c_2 c_3 \ldots . \, d_1 d_2 d_3 \ldots$
$A > C$ когато:

1. $A > C$, $A > 0$ и $C <= 0$ или
2. $A > C$, $a_1 a_2 a_3 \ldots\ > c_1 c_2 c_3 \ldots$ или
3. $A > C$, $b_1 > d_1$ или $b_2 > d_2$ или $\ldots$ докато $b_n > d_n$ или $\exists b_n$ и $\nexists d_n$ $n \in \mathbb{N}$

1.6 Комплексни числа

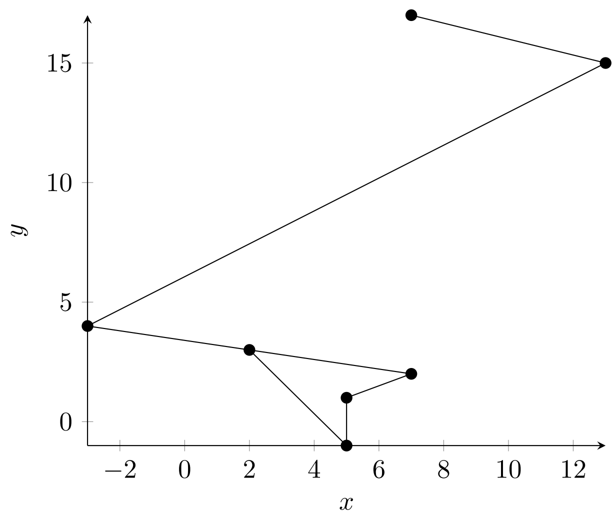
1.6.1 def

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \{(a,b) \,|\, a,b \in \mathbb{R}\} \iff \{\forall z = x + \imath \times y \,|\, x, y \in \mathbb{R},\ \imath^2 = -1 \iff \imath = \sqrt{-1}\}$

1.6.2 Комплексна равнина

$z = x + \imath \times y$ Съкратен запис: $z = x + y\imath$

1. $z \in \mathbb{C}$
2. x се нарича рялна част
3. y се нарича имагинерна част



Комплексните числа разширяват концепцията за едноизмерна числова линия до двуизмерна комплексна равнина, като двете координатни оси се използват като числови линии съответно за реалната и имагинерната част. Комплексното число $z = x + y\imath$ може да се идентифицира с точката (x, y), а рялното число $r = u + 0\imath$ с точката $(u, 0)$.

1.6.3 Операции: $\overline{z}, +, -, \times, \div\, q \neq 0$

$$
\begin{aligned}
z &= x + y\imath \\
\overline{z} &= x - y\imath \\
z_1 &= x_1 + y_1\imath \\
z_2 &= x_2 + y_2\imath \\
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\imath \\
z + \overline{z} &= (x + y\imath) + (x - y\imath) = 2x + (y - y)\imath = 2x \\
z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\imath \\
z - \overline{z} &= (x - x) + (y - (-y))\imath = 2y\imath \\
z_1 \times z_2 &= (x_1 + y_1\imath) \times (x_2 + y_2\imath) = x_1x_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\imath + y_1y_2\imath^2 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\imath \\
z \times z &= (x + y\imath)^2 = x^2 + 2xy\imath + y^2\imath^2 = x^2 - y^2 + 2xy\imath \\
z \times \overline{z} &= (x + y\imath) \times (x - y\imath) = x^2 + y^2 \geq 0 \in \mathbb{R} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 z_2}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\imath}{x_2^2 + y_2^2} \\
\frac{z}{\overline{z}} &= \frac{z}{\overline{z}}\frac{z}{z} = \frac{x^2 - y^2 + 2xy\imath}{x^2 + y^2}
\end{aligned}
$$

1.6.4 Примери за операции:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2 + 3\imath \\
z_2 &= 5 - \imath \\
z_1 + z_2 &= 7 + 2\imath \\
z_1 - z_2 &= -3 + 4\imath \\
\overline{z_2} &= 5 + \imath \\
z_1 z_2 = (2 + 3\imath)(5 - \imath) &= 10 - 2\imath + 15\imath - 3\imath^2 = 13 + 15\imath \\
\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3\imath}{5 - \imath} &= \frac{2 + 3\imath}{5 - \imath}\frac{5 + \imath}{5 + \imath} = \frac{10 + 2\imath + 15\imath + 3\imath^2}{5^2 + (-1)^2} = \frac{7 + 17\imath}{26}
\end{aligned}
$$

1.6.5 Необходимост от комплексните числа

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$D = b^2 - 4ac$$
$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$
$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_1, x_2 = \begin{cases} x_1 \neq x_2 \quad D > 0 \\ x_1 = x_2 \quad D = 0 \\ \nexists x_1 \text{ и } x_2 \in \mathbb{R} \quad D < 0 \end{cases}$$
$$\text{но при} \quad D < 0 \quad \exists x_1 \neq x_2, x_1 \text{ и } x_2 \in \mathbb{C}$$

Целта на комплексните числа е да дадат решения на всички уравнения с комплексни коефициенти!
Или ако за коефициентите на квадратния тричлен $ax^2 + bx + c$ е в сила:

$$a \in \mathbb{R} \implies a = a + 0\imath \in \mathbb{C}$$
$$b \in \mathbb{R} \implies b = b + 0\imath \in \mathbb{C}$$
$$c \in \mathbb{R} \implies c = c + 0\imath \in \mathbb{C}$$
$$x_1 \in \mathbb{R} \implies x_1 = x_1 + 0\imath \in \mathbb{C}$$
$$x_2 \in \mathbb{R} \implies x_2 = x_2 + 0\imath \in \mathbb{C}$$
$$x_1 \neq x_2$$

Следва, че и за произволни числа: $a, b, c \in \mathbb{C}$ от вида:

$$a = a_1 + a_2\imath, a_1 \text{ и } a_2 \in \mathbb{R}$$
$$b = b_1 + b_2\imath, b_1 \text{ и } b_2 \in \mathbb{R}$$
$$c = c_1 + c_2\imath, c_1 \text{ и } c_2 \in \mathbb{R}$$
$$\implies \exists\, x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \in \mathbb{C}$$

И когато за числата:
a, b, c в горното си представяне е известно, че: $a_2, b_2 \text{ и } c_2 \neq 0$
$\implies a_2, b_2 \text{ и } c_2 \in \mathbb{C} \cap \mathbb{R} = \{(p, q) \,|\, p, q \in \mathbb{R}, q \neq 0\}$
$\implies \exists x_1, x_2 \notin \mathbb{R} \in \mathbb{C}$

1.6.6 Примери:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2x + 5 &= 0 \\
D = 4 - 20 &= -16 \\
\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4\sqrt{-1} &= 4\imath \\
x_1, x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4\imath}}{2} &= -1 \pm 2\imath
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -1 + 2\imath \\
x_2 &= -1 - 2\imath \\
x_2 &= \overline{x_1} \\
x_1 + x_2 = -2 = \frac{-b}{a} &= \frac{-2}{1} \\
x_1 x_2 = 5 = \frac{c}{a} &= \frac{5}{1} \\
\implies x_1, x_2 \text{ са корени на уравнението } x^2 + 2x + 5 &= 0
\end{aligned}
$$

2 Основна теорема на алгебрата

3 Квантори

$$
\begin{aligned}
\forall &\quad \text{За всяко} \quad \text{For all} \\
\exists &\quad \text{Съществува} \quad \text{Exists} \\
\nexists &\quad \text{Не съществува} \quad \text{Not exists} \\
\forall x_1, x_2 \, \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 &= \forall x_2, x_1 \, \exists \varepsilon_2, \varepsilon_1 > 0 \\
\forall x \, \exists \varepsilon > 0 &\neq \exists \varepsilon > 0 \, \forall x
\end{aligned}
$$