Задачата (с лека модификация), която казах че ще разпиша

Иво Стратев

9 октомври 2019 г.

Да се намери алгебричния вид на числото

$$\left(\frac{8-8\sqrt{3}i}{-4\sqrt{3}+4i}\right)^{463}$$

Решение:

Нека $z = \dfrac{8-8\sqrt{3}i}{-4\sqrt{3}+4i}$. Тогава

$$z = \frac{8(1-\sqrt{3}i)}{4(-\sqrt{3}+i)} = 2.\frac{1-\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}+i} = 2.\frac{(1-\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)} =$$
$$2.\frac{-\sqrt{3}-i+3i-\sqrt{3}}{3-i^2} = 2.\frac{-2\sqrt{3}+2i}{4} = -\sqrt{3}+i$$

Търсим тригонометричния вид на z:

$$\begin{aligned}
Re(z) &= -\sqrt{3} < 0 \\
Im(z) &= 1 \geq 0 \\
|z| &= \sqrt{3+1} = 2 \\
y &= Arg(z) \\
\sin(x) = |\sin(y)| &= \left|\frac{Im(z)}{|z|}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \\
x &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\
x &= \frac{\pi}{6} \\
y = \pi - x &= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}
\end{aligned}$$

Така значи $z = |z|(\cos(Arg(z)) + isin(Arg(z))) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

От първата формула на Моавър, знаем че

$$z^n = |z|^n(\cos(n.Arg(z)) + isin(n.Arg(z))) \text{ за } n \in \mathbb{N}^+$$

Нека сега разгледаме частния случай когато $Arg(z) = \frac{p}{q}\pi$.
Тоест $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 2)$. Така $n.Arg(z) = n\frac{p}{q}\pi$.
Сега делим с частно и остатък np на $2q$.
Тоест $np = 2qk + r$ и $k \in \mathbb{Z}$ и $r \in \mathbb{Z}$ и $0 \le r < 2q$.
Така $n.Arg(z) = n\frac{p}{q}\pi = (2qk + r)\frac{\pi}{q} = 2k\pi + \frac{r}{q}\pi$.
Също така имаме $0 \le r < 2q$ или $0 \le \frac{r}{q}\pi < 2\pi$. Тоест $\frac{r}{q}\pi \in [0, 2\pi)$.
Следователно в този случай $z^n = |z|^n\left(\cos\left(\frac{r}{q}\pi\right) + i\sin\left(\frac{r}{q}\pi\right)\right)$.

В задачата, която решаваме

$$n = 463$$
$$p = 5$$
$$q = 6$$

$np = 463.5 = 400.5 + 50.5 + 13.5 = 2000 + 250 + 65 = 2315 =$
$2400 - 85 = 2400 - 60 - 25 = 12.200 - 12.5 - 12.2 - 1 = 12(200 - 7) - 1 =$
$12.193 - 1 = 12.192 + 12 - 1 = 12.192 + 11$. Значи

$$k = 192$$
$$r = 11$$

Следователно $z^{463} = 2^{463}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$. Превръщаме в алгебричен вид.

$$\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

Числото се намира в четвърти квадрант в комплексната равнина. Тогава $Re(z^{463}) \ge 0$ и $Im(z^{463}) < 0$. И значи
$z^{463} = 2^{463}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2^{463}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2^{462}(\sqrt{3} - i)$.

Отговор:

$$2^{462}\sqrt{3}+i(-2^{462}).$$