Отговори на теоритично контролно №2, Линейна алгебра, Информатика

Иво Стратев

20 декември 2019 г.

Определение 1 (Линейно изображение)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi : V \to W$ *е изображение от* V *във* W. φ *е линейно изображение, ако:*

$$(\forall v_1 \in V)(\forall v_2 \in V)[\ \varphi(v_1 \underset{V}{+} v_2) = \varphi(v_1) \underset{W}{+} \varphi(v_2)\ ]$$
$$(\forall \lambda \in F)(\forall v \in V)[\ \varphi(\lambda \underset{V}{.} v) = \lambda \underset{W}{.} \varphi(v)\ ]$$

Забележка 1. *Пишем* $\varphi \in Hom(V, W)$, *ако* $\varphi : V \to W$ *е линейно изображение.*

Определение 2 (Линеен оператор)**.** *Нека* $(V, \oplus, \odot)$ *е Л.П. над поле* $(F, +, .)$. *Нека* $\varphi : V \to V$ *е изображение от* V *във* V. φ *е линеен оператор, ако:*

$$(\forall v_1 \in V)(\forall v_2 \in V)[\ \varphi(v_1 \oplus v_2) = \varphi(v_1) \oplus \varphi(v_2)\ ]$$
$$(\forall \lambda \in F)(\forall v \in V)[\ \varphi(\lambda \odot v) = \lambda \odot \varphi(v)\ ]$$

Забележка 2. *Пишем* $\varphi \in Hom(V)$, *ако* φ *е линеен оператор.*

Теорема 1 (Съществуване и единственост на Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$.
Нека V *е крайномерно и* $n = dim(V)$. *Нека* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *е базис на* V.
Нека $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$. *Тогава съществува единствено* $\varphi \in Hom(V, W)$, *такова че*

$$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})[\ \varphi(b_i) = w_i\ ]$$

Определение 3 (Изоморфизъм на Л.П-ва)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{\cdot})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot})$*.* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot})$ *е изоморфно с* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{\cdot})$*, ако съществува* $\varphi \in Hom(V, W)$*, което е биекция.*

Забележка 3. *Пишем* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot}) \cong (W, \underset{W}{+}, \underset{W}{\cdot})$*, ако* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot})$ *е изоморфно с* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{\cdot})$*.*

Твърдение 1 (Н.Д.У. за изоморфизъм на К.М.Л.П-ва)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{\cdot})$ *са К.М.Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot})$*. В сила е:*

$$(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot}) \cong (W, \underset{W}{+}, \underset{W}{\cdot}) \iff dim(V) = dim(W)$$

Твърдение 2 (Образа на нулевия вектор е нулевия при Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{\cdot})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$*. Тогава* $\varphi(\theta_V) = \theta_W$*.*

Доказателство: Нека $v \in V$. Тогава

$$\varphi(\theta_V) = \varphi(0 \underset{V}{\cdot} v) = 0 \underset{W}{\cdot} \varphi(v) = \theta_W \quad \square$$

Твърдение 3 (Образа на противоположния вектор е противоположния на образа при Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{\cdot})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$*. Тогава* $(\forall v \in V)[\ \varphi(\underset{V}{-} v) = \underset{W}{-} \varphi(v)\ ]$*.*

Доказателство: Нека $v \in V$. Тогава

$$\varphi(\underset{V}{-} v) = \varphi((-1) \underset{V}{\cdot} v) = (-1) \underset{W}{\cdot} \varphi(v) = \underset{W}{-} \varphi(v) \quad \square$$

Твърдение 4 (Едно Л.И. изпраща Л.З-ми в Л.З-ми)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{\cdot})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{\cdot})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$*.*
Нека $k \in \mathbb{N}^+$*. Нека* $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ *са Л.З-ми. Тогава* $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_k)$ *са Л.З-ми.*

Доказателство: $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ са Л.З-ми. Тогава

$$\begin{aligned}(\exists \lambda_1 \in F)(\exists \lambda_2 \in F) \dots (\exists \lambda_k \in F)[\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq (0, 0, \dots, 0)& \\ \& \\ \lambda_1 \underset{V}{\cdot} v_1 \underset{V}{+} \lambda_2 \underset{V}{\cdot} v_2 \underset{V}{+} \dots \underset{V}{+} \lambda_k \underset{V}{\cdot} v_k = \theta_V\ ]\end{aligned}$$

Нека $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_k \in F$ са такива, че $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$ и $\lambda_1 \underset{V}{.} v_1 \underset{V}{+} \lambda_2 \underset{V}{.} v_2 \underset{V}{+} \dots \underset{V}{+} \lambda_k \underset{V}{.} v_k = \theta_V$. Тогава от

$$\varphi(\lambda_1 \underset{V}{.} v_1 \underset{V}{+} \lambda_2 \underset{V}{.} v_2 \underset{V}{+} \dots \underset{V}{+} \lambda_k \underset{V}{.} v_k) = \lambda_1 \underset{W}{.} \varphi(v_1) \underset{W}{+} \lambda_2 \underset{W}{.} \varphi(v_2) \underset{W}{+} \dots \underset{W}{+} \lambda_k \underset{W}{.} \varphi(v_k)$$
$$\&$$
$$\lambda_1 \underset{V}{.} v_1 \underset{V}{+} \lambda_2 \underset{V}{.} v_2 \underset{V}{+} \dots \underset{V}{+} \lambda_k \underset{V}{.} v_k = \theta_V$$
$$\&$$
$$\varphi(\theta_V) = \theta_W$$

Получаваме $\lambda_1 \underset{W}{.} \varphi(v_1) \underset{W}{+} \lambda_2 \underset{W}{.} \varphi(v_2) \underset{W}{+} \dots \underset{W}{+} \lambda_k \underset{W}{.} \varphi(v_k) = \theta_W$.
Но имаме $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in F^k \backslash \{(0, 0, \dots, 0)\}$, следователно $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_k)$ са Л.З-ми. $\square$

Определение 4 (Сума на Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$ *и* $\psi \in Hom(V, W)$. *Тогава* $\varphi + \psi : V \to W$ *е сумата на* φ *и* ψ *и е в сила:*

$$(\forall v \in V)[\ (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) \underset{W}{+} \psi(v)\ ]$$

Определение 5 (Умножение на Л.И. със скалар)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$ *и нека* $\lambda \in F$. *Тогава* $\lambda.\varphi : V \to W$ *е умножението на* φ *с* λ *и е в сила:*

$$(\forall v \in V)[\ (\lambda.\varphi)(v) = \lambda \underset{W}{.} \varphi(v)\ ]$$

Определение 6 (Произведение на Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$, $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *и* $(U, \underset{U}{+}, \underset{U}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$ *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$ *и* $\psi \in Hom(U, V)$. *Тогава* $\varphi \circ \psi : U \to W$ *е произведението на* φ *и* ψ *и е в сила:*

$$(\forall v \in V)[\ (\varphi \circ \psi)(v) = \varphi(\psi(v))\ ]$$

Определение 7 (Матрица на Л.И. спрямо фиксирани базиси)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са К.М.Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$.

Нека $n = dim(V)$ и $m = dim(W)$. Нека $b_1, b_2, \ldots, b_n$ е базис на V и нека $a_1, a_2, \ldots, a_m$ е базис на W. Нека

$$\varphi(b_i) = \gamma_{1i} \underset{W}{.} a_1 \underset{W}{+} \gamma_{2i} \underset{W}{.} a_2 \underset{W}{+} \ldots \underset{W}{+} \gamma_{mi} \underset{W}{.} a_m$$

за $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогава матрицата на φ спрямо базисите $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и $a_1, a_2, \ldots, a_m$ е

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}$$

Забележка 4. *Матрицата на φ спрямо базисите $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ще белим с $\mathcal{M}_{a_1, a_2, \ldots, a_m}^{b_1, b_2, \ldots, b_n}(\varphi)$.*

Определение 8 (Действие на матрицата на Л.И.)**.** *Нека $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ и $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ са К.М.Л.П-ва над поле $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. Нека $\varphi \in Hom(V, W)$. Нека $n = dim(V)$ и $m = dim(W)$. Нека $b_1, b_2, \ldots, b_n$ е базис на V и нека $a_1, a_2, \ldots, a_m$ е базис на W. Нека $v = x_1 \underset{V}{.} b_1 \underset{V}{+} x_2 \underset{V}{.} b_2 \underset{V}{+} \ldots \underset{V}{+} x_n \underset{V}{.} b_n \in V$ и нека*

$$\varphi(b_i) = \gamma_{1i} \underset{W}{.} a_1 \underset{W}{+} \gamma_{2i} \underset{W}{.} a_2 \underset{W}{+} \ldots \underset{W}{+} \gamma_{mi} \underset{W}{.} a_m$$

за $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Нека $y_1 \underset{W}{.} a_1 \underset{W}{+} y_2 \underset{W}{.} a_2 \underset{W}{+} \ldots \underset{W}{+} y_m \underset{W}{.} a_m$ Тогава матрицата на φ спрямо базисите $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и $a_1, a_2, \ldots, a_m$ е

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}$$

и връзката между координатите на един вектор и неговия образ е:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Забележка 5. *Нека* $V, \oplus, \odot$ *е К.М.Л.П. над поле* $(F, +, .)$. *Нека* $n = dim(V)$ *и нека* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *е базис на* V. *Нека* $v = \lambda_1 \odot b_1 \oplus \lambda_2 \odot b_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n \odot b_n \in V$. *Тогава с* $[v]_{b_1, b_2, \dots, b_n}$ *ще бележим координатния стълб сътвестващ на вектора* v. *Тоест*

$$[v]_{b_1,b_2,\dots,b_n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Забележка 6. *При така направените означения връзката между координатите от предното определение може да бъде записана съкратено, но не и на ТК-то, като*

$$[\varphi(v)]_{a_1,a_2,\dots,a_m} = \mathcal{M}^{b_1,b_2,\dots,b_n}_{a_1,a_2,\dots,a_m}(\varphi).[v]_{b_1,b_2,\dots,b_n}$$

Твърдение 5 (Матрица на сума на Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са К.М.Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$ *и* $\psi \in Hom(V, W)$. *Нека* $n = dim(V)$ *и* $m = dim(W)$. *Нека* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *е базис на* V *и нека* $a_1, a_2, \dots, a_m$ *е базис на* W. *Тогава*

$$\mathcal{M}^{b_1,b_2,\dots,b_n}_{a_1,a_2,\dots,a_m}(\varphi + \psi) = \mathcal{M}^{b_1,b_2,\dots,b_n}_{a_1,a_2,\dots,a_m}(\varphi) + \mathcal{M}^{b_1,b_2,\dots,b_n}_{a_1,a_2,\dots,a_m}(\psi)$$

Твърдение 6 (Матрица на умножение на Л.И. със скалар)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са К.М.Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$ *и нека* $\lambda \in F$. *Нека* $n = dim(V)$ *и* $m = dim(W)$. *Нека* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *е базис на* V *и нека* $a_1, a_2, \dots, a_m$ *е базис на* W. *Тогава*

$$\mathcal{M}^{b_1,b_2,\dots,b_n}_{a_1,a_2,\dots,a_m}(\lambda.\varphi) = \lambda.\mathcal{M}^{b_1,b_2,\dots,b_n}_{a_1,a_2,\dots,a_m}(\varphi)$$

Твърдение 7 (Матрица на произведение на Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$, $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *и* $(U, \underset{U}{+}, \underset{U}{.})$ *са К.М.Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$ *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$ *и* $\psi \in Hom(U, V)$. *Нека* $n = dim(V)$, $m = dim(W)$ *и* $k = dim(U)$. *Нека* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *е базис на* V, *нека* $a_1, a_2, \dots, a_m$ *е базис на* W *и нека* $c_1, c_2, \dots, c_k$ *е базис на* U. *Тогава*

$$\mathcal{M}^{c_1,c_2,\dots,c_k}_{a_1,a_2,\dots,a_m}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{M}^{b_1,b_2,\dots,b_n}_{a_1,a_2,\dots,a_m}(\varphi).\mathcal{M}^{c_1,c_2,\dots,c_k}_{b_1,b_2,\dots,b_n}(\psi)$$

Твърдение 8 (Размерност на Л.П-во на Л.И-ния между две К.К.Л.П-ва)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са К.М.Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$*. Тогава*

$$dim(Hom(V,W)) = dim(V).dim(W)$$

Определение 9 (Ядро на Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V,W)$*. Тогава ядро на* φ *наричаме следното множество:*

$$Ker(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \theta_W\}$$

Определение 10 (Образ на Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V,W)$*. Тогава образ на* φ *наричаме следното множество:*

$$Im(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$$

Определение 11 (Дефект на Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V,W)$*. Тогава дефект на* φ *наричаме* $dim(Ker(\varphi))$*. Бележим с* $d(\varphi)$*, тоест* $d(\varphi) = dim(Ker(\varphi))$*.*

Определение 12 (Ранг на Л.И.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V,W)$*. Тогава ранг на* φ *наричаме* $dim(Im(\varphi))$*. Бележим с* $r(\varphi)$*, тоест* $r(\varphi) = dim(Im(\varphi))$*.*

Теорема 2 (Теорема за ранга и дефекта)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V,W)$*. Тогава*

$$r(\varphi) + d(\varphi) = dim(V)$$

Твърдение 9 (Връзка между ранга на Л.И. и ранга на матрицата му спрямо произволни базиси)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са К.М.Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V,W)$*. Нека* $n = dim(V)$ *и* $m = dim(W)$*. Нека* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *е базис* V *и нека* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *е базис* W*. Тогава*

$$r(\varphi) = r\left(\mathcal{M}_{a_1,a_2,\ldots,a_m}^{b_1,b_2,\ldots,b_n}(\varphi)\right)$$

Определение 13 (Обратимо линейно изобрабжение)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$, φ *е обратимо линейно изобрабжение, ако*

$$(\exists \psi \in Hom(W, V))[\ \varphi \circ \psi = id_W \ \&\ \psi \circ \varphi = id_V\ ]$$

Определение 14 (Обратно линейно изобрабжение)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$ *е обратимо и нека* $\psi \in Hom(W, V)$. ψ *е обратното на* φ, *ако*

$$\varphi \circ \psi = id_W \ \&\ \psi \circ \varphi = id_V$$

Забележка 7. *Доказва се, че обратното изображение на* φ *е единствено и за това го бележим с* φ^{-1}.

Твърдение 10 (Обратния линеен оператор на един обратим линеен оператор е също обратим)**.** *Нека* $(V, \oplus, \odot)$ *е Л.П. над поле* $(F, +, .)$. *Нека* $\varphi \in Hom(V)$ *е обратим. Тогава* φ^{-1} *също е обратим.*

Доказателство: В сила е $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_V$ и $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_V$, тоест $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_V$ и $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_V$. Следователно φ^{-1} е обратим, защото $\varphi \in Hom(V)$. $\square$

Твърдение 11 (Едно Л.И. е инекция Т.С.Т.К. ядрото му е нулевото)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$. *Тогава* φ *е инекция Т.С.Т.К.* $Ker(\varphi) = \{\theta_V\}$.

Доказателство: 1. Нека φ е инекция. Нека $v \in Ker(\varphi)$. Тогава $\varphi(v) = \theta_W$, но $\varphi(\theta_V) = \theta_W$ и φ е инекция. Следователно $v = \theta_V$. Така $\{\theta_V\} \subseteq Ker(\varphi) \subseteq \{\theta_V\}$. Значи $Ker(\varphi) = \{\theta_V\}$.

2. Нека $Ker(\varphi = \{\theta_V\})$. Нека $v_1 \in V$ и $v_2 \in V$ и са такива, че $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. От тук последователно получаваме:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) \underset{W}{-} \varphi(v_2) &= \theta_W \\ \varphi(v_1 \underset{V}{-} v_2) &= \theta_W \\ v_1 \underset{V}{-} v_2 \in Ker(\varphi) &= \{\theta_V\} \\ v_1 \underset{V}{-} v_2 &= \theta_V \\ v_1 &= v_2 \end{aligned}$$

Следователно

$$(\forall a \in V)(\forall b \in V)[\ \varphi(a) = \varphi(b) \implies a = b\ ]$$

тоест

$$(\forall a \in V)(\forall b \in V)[\ a \neq b \implies \varphi(a) \neq \varphi(b)\ ]$$

и значи φ е инекция. $\square$

Твърдение 12 (Едно обратимо Л.И. изпраща Л.Н.З. в Л.Н.З.)**.** *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$*. Нека* $\varphi \in Hom(V, W)$ *е обратимо. Нека* $k \in \mathbb{N}^+$ *и нека* $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ *са Л.Н.З. Тогава* $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_k)$ *също са Л.Н.З.*

Доказателство: Да допуснем, че $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_k)$ са Л.З. Тогава нека $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in F$ и $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$ са такива, че $\lambda_1 \underset{W}{.} \varphi(v_1) \underset{W}{+} \lambda_2 \underset{W}{.} \varphi(v_2) \underset{W}{+} \dots \underset{W}{+} \lambda_k \underset{W}{.} \varphi(v_k) = \theta_W$. Тогава $\varphi^{-1}(\lambda_1 \underset{W}{.} \varphi(v_1) \underset{W}{+} \lambda_2 \underset{W}{.} \varphi(v_2) \underset{W}{+} \dots \underset{W}{+} \lambda_k \underset{W}{.} \varphi(v_k)) = \varphi^{-1}(\theta_W)$, тоест $\lambda_1 \underset{V}{.} \varphi^{-1}(\varphi(v_1)) \underset{V}{+} \lambda_2 \underset{V}{.} \varphi^{-1}(\varphi(v_2)) \underset{V}{+} \dots \underset{V}{+} \lambda_k \underset{V}{.} \varphi^{-1}(\varphi(v_k)) = \theta_V$ и значи $\lambda_1 \underset{V}{.} v_1 \underset{V}{+} \lambda_2 \underset{V}{.} v_2 \underset{V}{+} \dots \underset{V}{+} \lambda_k \underset{V}{.} v_k = \theta_V$, но $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Следователно $v_1, v_2, \dots, v_k$ са Л.З., но това е Абсурд, защото са Л.Н.З. $\square$

Определение 15 (Матрица на прехода от един базис към друг)**.** *Нека* $(V, \oplus, \odot)$ *е К.М.Л.П. над поле* $(F, +, .)$*. Нека* $n = dim(V)$ *и нека* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *и* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *са два базиса на* V*.*
Нека още $a_i = \lambda_{1i} \odot b_1 \oplus \lambda_{2i} \odot b_2 \oplus \dots \oplus \lambda_{ni} \odot b_n$*. Тогава*

$$T_{b_1, b_2, \dots, b_n \to a_1, a_2, \dots, a_n} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

е матрицата на прехода от $b_1, b_2, \dots, b_n$ *към* $a_1, a_2, \dots, a_n$*.*

Твърдение 13 (Връзка между координатите при смяна на базиса)**.** *Нека* $(V, \oplus, \odot)$ *е К.М.Л.П. над поле* $(F, +, .)$*. Нека* $n = dim(V)$ *и нека* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *и* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *са два базиса на* V*.*
Нека още $a_i = \lambda_{1i} \odot b_1 \oplus \lambda_{2i} \odot b_2 \oplus \dots \oplus \lambda_{ni} \odot b_n$*.*

Нека $v = y_1 \odot b_1 \oplus y_2 \odot b_2 \oplus \dots \oplus y_n \odot b_n = x_1 \odot a_1 \oplus x_2 \odot a_2 \oplus \dots \oplus x_n \odot a_n$.
Тогава в сила е връзката:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Забележка 8. *Горната връзка може да се запише още така при въведените означения, но не и на ТК-то :)*

$$[v]_{b_1,b_2,\dots,b_n} = T_{b_1,b_2,\dots,b_n \to a_1,a_2,\dots,a_n}.[v]_{a_1,a_2,\dots,a_n}$$

Твърдение 14 (Промяна на матрицата на Л.И. при смяна на базисите). *Нека* $(V, \underset{V}{+}, \underset{V}{.})$ *и* $(W, \underset{W}{+}, \underset{W}{.})$ *са К.М.Л.П-ва над поле* $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{.})$. *Нека* $\varphi \in Hom(V,W)$. *Нека* $n = dim(V)$ *и* $m = dim(W)$. *Нека* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *и* $d_1, d_2, \dots d_n$ *са два базиса на* V *и нека* $a_1, a_2, \dots, a_m$ *и* $c_1, c_2, \dots c_m$ *са два базиса на* W. *Тогава в сила е връзката:*

$$\mathcal{M}^{d_1,d_2,\dots,d_n}_{c_1,c_2,\dots,c_m}(\varphi) = T_{c_1,c_2,\dots,c_m \to a_1,a_2,\dots,a_m}.\mathcal{M}^{b_1,b_2,\dots,b_n}_{a_1,a_2,\dots,a_m}(\varphi).T_{b_1,c_2,\dots,b_n \to d_1,d_2,\dots,d_n}$$

Твърдение 15 (Промяна на матрицата на Л.О. при смяна на базиса). *Нека* $(V, \oplus, \odot)$ *е К.М.Л.П. над поле* $(F, +, .)$. *Нека* $n = dim(V)$ *и нека* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *и* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *са два базиса на* V.
Тогава в сила е връзката:

$$\mathcal{M}_{a_1,a_2,\dots,a_n}(\varphi) = \left(T_{b_1,b_2,\dots,b_n \to a_1,a_2,\dots,a_n}\right)^{-1}.\mathcal{M}_{b_1,b_2,\dots,b_n}(\varphi).T_{b_1,b_2,\dots,b_n \to a_1,a_2,\dots,a_n}$$

Теорема 3 (Първа теорема за ранг на матрици). *Нека* $(F, +, .)$ *е поле и* $m, n \in \mathbb{N}^+$ *и* $A \in M_{m \times n}(F)$. *Тогава* $r(A) = r(A^t)$.