Теоритично контролно №2 1, I, Информатика

Иво Стратев

3 февруари 2017 г.

1 Линейно изображение и линеен оператор

1.1 Определение линеен оператор

$\mathbb{V}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$
$\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V},\ \varphi \in Hom\mathbb{V}$
$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \in \mathbb{F}$
$\implies \varphi(\sum_{i=n}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=n}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) \in \mathbb{V}$

1.2 Определение линейно изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$
$\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W},\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \in \mathbb{F}$
$\implies \varphi(\sum_{i=n}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=n}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) \in \mathbb{W}$

1.3 Th $\exists!\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$
$e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$
$w_1, \ldots, w_n -$ вектори от $\mathbb{W}$
$\implies \exists!\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W});\ \varphi(e_i) = w_i,\ i = 1, \ldots, n$

1.4 $\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \iff dim\mathbb{V} = dim\mathbb{W}$

2 Доказателства за линейни изображения

2.1 $\forall\ \varphi \in Hom(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \implies \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \theta_{\mathbb{V}}$

$\theta_{\mathbb{V}} = 0\varphi(u) = \varphi(0u) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}})\ u \in \mathbb{U}$

2.2 $\forall\ \varphi \in Hom(\mathbb{U}, \mathbb{V}),\ \forall u \in \mathbb{U} \implies \varphi(-u) = -\varphi(u)$

$\varphi \in Hom(\mathbb{U}, \mathbb{V}),\ \forall u \in \mathbb{U},\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \implies \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$
$\implies \lambda = -1 \implies \varphi(-1u) = -1\varphi(u) \implies \varphi(-u) = -\varphi(u)$

2.3 $\forall\ \varphi \in HomV \implies \varphi(\theta) = \theta$

$\varphi(\theta) = \varphi(\theta + \theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta) \mid + (-\varphi(\theta))$
$\varphi(\theta) - \varphi(\theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta) - \varphi(\theta)$
$\theta = \theta + \varphi(\theta) \implies \varphi(\theta) = \theta$

2.4 $\forall\ \varphi \in Hom\mathbb{V},\ \forall v \in \mathbb{V} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$

$\varphi \in Hom\mathbb{V},\ \forall v \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \implies \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$
$\implies \lambda = -1 \implies \varphi(-1v) = -1\varphi(v) \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$

2.5 Едно линейно изображение изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори)

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F},\ dim\mathbb{V} = n$
$\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \implies \varphi(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}}$
$e_1, \ldots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$
$v \in \mathbb{V},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F};\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \theta_{\mathbb{V}},\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$
$v = \theta_{\mathbb{V}} \mid\varphi$
$\varphi(v) = \theta_{\mathbb{W}}$
$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \theta_{\mathbb{W}}$
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \theta_{\mathbb{W}},\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$

2.6 Един линеен оператор изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори)

$\mathbb{V}$ - Л.П над полето $\mathbb{F},\ dim\mathbb{V} = n$
$\varphi \in Hom\mathbb{V} \implies \varphi(\theta) = \theta$
$e_1, \ldots, e_n -$ един базис на $\mathbb{V}$
$v \in \mathbb{V},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F};\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \theta,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$
$v = \theta \mid\varphi$
$\varphi(v) = \theta$
$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \theta$
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \theta,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$

3 Действия с линейни изображения

3.1 Определение за сума на линейни изображения

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F},\ \varphi, \psi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
$\varphi + \psi : \mathbb{V} \to \mathbb{W};\ \forall v \in \mathbb{V}(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) \in \mathbb{W}$

3.2 Определение за произведение на линейно изображение със скалар

$\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in Hom(\mathbb{V},\mathbb{W}),\ \lambda \in \mathbb{F}$
$\lambda\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W};\ \forall v \in \mathbb{V}(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v) \in \mathbb{W}$

3.3 Определение за произведение на линейни изображения

$\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$, $\mathbb{U}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\in Hom(\mathbb{V},\mathbb{W}), \psi \in Hom(\mathbb{W},\mathbb{U})$
$\psi\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{U};\ \forall v \in \mathbb{V}(\psi\varphi)(v) = (\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v)) \in \mathbb{U}$

3.4 Определението за матрица на линейно изображение

$\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in Hom(\mathbb{V},\mathbb{W}),\ n = dim\mathbb{V},\ m = dim\mathbb{W}$
$e_1, \dots, e_n =$ базис на $\mathbb{V}$
$f_1, \dots, f_m =$ базис на $\mathbb{W}$
$A = (\lambda_{ji})_{m\times n} = M_{e\to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m\times n}$
$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ji} f_j \in \mathbb{W}, i = 1, \dots, n,\ \lambda_{ji} \in \mathbb{F}$

3.5 изобразяване на координатите на образа на вектор под действието на линейно изображение чрез координатите на вектора и матрицата на линейното изображение

$\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F}$, $n = dim\mathbb{V},\ m = dim\mathbb{W}$
$e_1, \dots, e_n -$ базис на $\mathbb{V}$
$f_1, \dots, f_m -$ базис на $\mathbb{W}$
$A = M_{e\to f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m\times n}$
$v \in \mathbb{V} \implies v = \sum i = 1^n \lambda_i e_i,\ \lambda_i \in \mathbb{F},\ i = 1, \dots, n$
$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) -$ координатите на v спрямо базиса e на $\mathbb{V}$
$\implies \exists(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{F}^m -$ координатите на v спрямо базиса f на $\mathbb{W}$
$(\mu_1, \dots, \mu_m)^t = A(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$

4 Матрици на линейни изображения, получени след действия с ЛИ

4.1 Определение за сума на линейни изображения

$\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F}$, $\varphi, \psi \in Hom(\mathbb{V},\mathbb{W})$
$\varphi + \psi : \mathbb{V} \to \mathbb{W};\ \forall v \in \mathbb{V}(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) \in \mathbb{W}$

4.2 Определение за матрица на линейно изображение, което е сумата на две линейни изображения

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \varphi, \psi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}),\ n = dim\mathbb{V},\ m = dim\mathbb{W}$
$\tau = \varphi + \psi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
$A = M(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$
$B = M(\psi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$
$\implies C = M(\tau) = M(\varphi + \psi) = M(\varphi) + M(\psi) = A + B \in \mathbb{F}_{m \times n}$

4.3 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на линейно изображение със скалар

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}),\ \lambda \in \mathbb{F},\ n = dim\mathbb{V},\ m = dim\mathbb{W}$
$\psi = \lambda\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
$A = M(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$
$B = M(\psi) = M(\lambda\varphi) = \lambda M(\varphi) = \lambda A \in \mathbb{F}_{m \times n}$

4.4 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на две линейни изображения

$\mathbb{V},\ \mathbb{W},\ \mathbb{U}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in Hom(\mathbb{W}, \mathbb{U})$
$n = dim\mathbb{V},\ m = dim\mathbb{W},\ k = dim\mathbb{U}$
$\tau = \psi\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{U})$
$A = M(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$
$B = M(\psi) \in \mathbb{F}_{k \times m}$
$\implies C = M(\tau) = M(\psi\varphi) = M(\psi)M(\varphi) = BA \in \mathbb{F}_{k \times n}$

4.5 $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ n = dim\mathbb{V},\ m = dim\mathbb{W}$ $dimHom(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = m.n$

5 Ядро и Образ на Линейно изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - Л.П над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

5.1 $Ker\varphi = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = \theta\}$

5.2 $Im\varphi = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{V}\}$

5.3 $r(\varphi) = dimIm\varphi$

5.4 $d(\varphi) = dimKer\varphi$

5.5 Th За ранга и дефекта

$\mathbb{U},\ \mathbb{S}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \psi \in Hom(\mathbb{U}, \mathbb{S})$
$dim\mathbb{U} = p \implies r(\psi) + d(\psi) = p$

5.6 $A = M(\varphi) \implies r(\varphi) = r(A)$

6 Обратомост на ЛИ и ЛО

6.1 Определение за обратимо линейно изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
$\exists \varphi^{-1} \in Hom(\mathbb{W}, \mathbb{V});\ \varphi.\varphi^{-1} = \varphi^{-1}.\varphi = \varepsilon \iff \varphi$ е биекция

6.2 Определение за обратното линейно изображение на дадено линейно изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
Ако φ е обратимо ЛИ, то
$\implies \exists!\ \varphi^{-1} \in Hom(\mathbb{W}, \mathbb{V});\ \varphi.\varphi^{-1} = \varphi^{-1}.\varphi = \varepsilon$
φ^{-1} е обратното ЛИ на φ

6.3 Обратният на обратим линеен оператор също е обратим

$\mathbb{V}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in Hom\mathbb{V}$
φ - обратим ЛО $\implies \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \varepsilon_{\mathbb{V}}$
$\implies \varphi^{-1} \circ (\varphi^{-1})^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1} \circ \varphi^{-1} = \varepsilon_{\mathbb{V}}$
$\implies (\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$

6.4

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F},\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
φ е интективно $\iff Ker\varphi = \{\theta\}$
$(\implies)\ \{\theta\} \subset Ker\varphi,$ ако $v \in Ker\varphi$
$\implies \varphi(v) = \theta_{\mathbb{W}} = \varphi(\theta_{\mathbb{V}})$
φ - инективно $\implies v = \theta_{\mathbb{V}}$
$\implies Ker\varphi \subset \{\theta\} \implies Ker\varphi = \{\theta\}$
$(\Leftarrow)\ u,\ v \in \mathbb{V};\ \varphi(u) = \varphi(v)$
$\implies \theta = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v)$
$\implies u - v = \theta = \{\theta\} = Ker\varphi$
$\implies u = v \implies \varphi$ е инективно

6.5 Обратимо линейно изображение изпраща линейно независими вектори в линейно независими вектори

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - ЛП над полето $\mathbb{F},\ ,divm\mathbb{V} = n,\ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ - обратимо ЛИ
$v_1, \ldots, v_n$ - л.нз. вектори $\in \mathbb{V}$
Нека $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \in \mathbb{W},\ \lambda_i \in \mathbb{F}\ |\varphi^{-1}$
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi^{-1}(\varphi(v_i)) = \varphi^{-1}(\theta_{\mathbb{W}})$
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}},\ v_1, \ldots, v_n$ - л.нз. вектори

$\Longrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$
$\Longrightarrow \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_1)$ - л.нз. вектори

7 Смяна на базиса

7.1 Определението за матрица на прехода между два базиса

$\mathbb{V}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$
$e_1, \ldots, e_n$ - един базис на $\mathbb{V}$
$f_1, \ldots, f_n$ - друг базис на $\mathbb{V}$
$f_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ji} e_j,\ i = 1, \ldots, n,\ \tau_{ji} \in \mathbb{F}$
$T = (\tau_{ji})_{n \times n} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите $e,\ f$ на $\mathbb{V}$

7.2 Промяна на координатите на вектор при смяна на базиса

$\mathbb{V}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$
Нека $T = (\tau_{ji})_{n \times n} \in M_n$ е матрицата на прехода от $e \to f$
$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \in \mathbb{V},\ \lambda_i, \mu_u \in \mathbb{F},\ i = 1, \ldots, n$
$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t = T(\mu_1, \ldots, \mu_n)^t$

7.3 Промяна на матрицата на линейно изображение при смяна на базиса

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}),\ n = dim\mathbb{V},\ m = dim\mathbb{W}$
$e_1, \ldots, e_n$ - един базис на $\mathbb{V}$
$g_1, \ldots, g_n$ - друг базис на $\mathbb{V}$
$f_1, \ldots, f_m$ - един базис на $\mathbb{W}$
$h_1, \ldots, h_m$ - друг базис на $\mathbb{W}$
$A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}$ - матрица на φ между базисите $e,\ f$
$B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}$ - матрица на φ между базисите $g,\ h$
$T = (\tau_{ij})_{n \times n} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите $e,\ g$ на $\mathbb{V}$
$K = (\kappa_{ij})_{m \times m} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите $f,\ h$ на $\mathbb{W}$
$B = T^{-1}AK\ (M_{g \to h} = M_{g \to e} M_{e \to f} M_{f \to h})$

7.4 Промяна на матрицата на линеен оператор при смяна на базиса

$\mathbb{V}$ - КМЛП над полето $\mathbb{F}$, $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ n = dim\mathbb{V}$
$e_1, \ldots, e_n$ - един базис на $\mathbb{V}$
$f_1, \ldots, f_n$ - друг базис на $\mathbb{V}$
$A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n$ - матрица на φ в базиса e
$B = (b_{ij})_{n \times n} \in M_n$ - матрица на φ в базиса f

$T = (\tau_{ij})_{n \times n} \in M_n$ е матрица на прехода между базисите $e,\ f$
$B = T^{-1}AT$ $(M_f = M_{f \to e} M_e M_{e \to f})$

7.5 $r(A) = r(A^t)$

8 Дуалност

8.1 Определение за дуалното пространство на дадено линейно пространство

$\mathbb{V}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
$V^* = Hom(\mathbb{V}, \mathbb{F})$ е дуалното пространство на ЛП $\mathbb{V}$

8.2 Определение за линеен функционал

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
f е линеен функционал на $\mathbb{V} \iff f \in V^*$

8.3 Определение за дуалното изображение на дадено линейно изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
$\mathbb{V}^*,\ \mathbb{W}^*$ - Дуалните пространства на ЛП $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$
Ако $\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \implies \varphi^* \in Hom(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$
$\varphi^*(f) = f \circ \varphi,\ f \in \mathbb{W}^*$

8.4 Определение за за дуален базис

$\mathbb{V}$ - ЛП над полето $\mathbb{F},\ dim\mathbb{V} = n,\ \mathbb{V}^*$ - дуалното пространство на $\mathbb{V}$
$e_1, \ldots, e_n$ - базис на $\mathbb{V}$
$f^1, \ldots, f^n$ - дуален базис на $\mathbb{V}^*$
$f^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},\ j,\ i = 1, \ldots, n$

8.5 Дуално изображение на произведението на две линейни изображения

$\mathbb{V},\ \mathbb{W},\ \mathbb{U}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}, \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in Hom(\mathbb{W}, \mathbb{U})$
$\psi\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{U}) \implies (\psi\varphi)^* \in Hom(\mathbb{U}^*, \mathbb{V}^*)$
$(\psi\varphi)^* = f \circ (\psi\varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi =$
$= \varphi^* \circ (f \circ \psi) = \varphi^*(\psi^*(f)) = (\varphi^*\psi^*)(f),\ f \in \mathbb{U}^*$
$\implies (\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$

8.6 Връзката между матриците на едно линейно изображение и неговото дуално изображение

$\mathbb{V},\ \mathbb{W}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
$\mathbb{V}^*,\ \mathbb{W}^*$ - Дуалните пространства на ЛП $\mathbb{V},\ \mathbb{W}$
$\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W}),\ \varphi^* \in Hom(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$
$M(\varphi^*) = (M(\varphi))^t$

8.7 Определение за анихилатор $\mathbb{U}^0$ на едно линейно подпространсво $\mathbb{U}$ на едно линейно пространство $\mathbb{V}$

$\mathbb{V}$ - ЛП над полето $\mathbb{F}$
$\mathbb{U} < \mathbb{V} \implies \mathbb{U}^0 = \{f \in \mathbb{V}^* \mid \forall u \in \mathbb{U}\ f(u) = 0\}$