Решения на задачи от Писмения изпит по Линейна алгебра на спец. на Информатика 2017/18г.

Иво Стратев

25 февруари 2018 г.

Задача 1.

Нека $\mathbb{P} = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}$ е линейното пространство на полиномите от степен строго по-ниска от 4 с коефициенти реални числа и нека $\psi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ действа по правилото $\forall p \in \mathbb{P}\ \psi(p) = p'' - 3p'$, където $' = \frac{d}{dx}$ и $'' = \frac{d^2}{dx^2}$ (тоест операторите на диференциране, които познавате).

а) Докажете, че ψ е линеен оператор за $\mathbb{P}$.

Решение:

$\forall p,\ q \in \mathbb{P}\ \ \psi(p+q) = (p+q)'' - 3(p+q) = p'' + q'' - 3p' - 3q' = (p'' - 3p') + (q'' - 3q') = \psi(p) + \psi(q)$

$\forall p \in \mathbb{P}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ \psi(\lambda p) = (\lambda p)'' - 3(\lambda p)' = \lambda p'' - 3\lambda p' = \lambda(p'' - 3p') = \lambda\psi(p)$

$\implies \psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{P})$

б) Напишете матрицата на ψ спрямо стандартния базис $S = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ на $\mathbb{P}$.

Решение:

$$\varphi(1) = 1'' - 3.1' = 0 - 0 = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\varphi(x) = x'' - 3x' = 0 - 3 = -3 = -3 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\varphi(x^2) = (x^2)'' - 3(x^2)' = 2 - 6x = 2 - 6x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\varphi(x^3) = (x^3)'' - 3(x^3)' = 6x - 9x^2 = 0 + 6x - 9x^2 + 0x^3$$

$$\implies M_S(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в) Напишете дефиницията за ядро на ψ.

Решение:

$\mathrm{Ker}\psi = \{p \in \mathbb{P} \mid \psi(p) = 0\}$

г) Докажете, че ядро на ψ е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

$\psi(0) = 0'' - 3.0' = 0 - 0 = 0$

$\forall p,\ q \in \mathrm{Ker}\psi \quad \psi(p) = 0 \wedge \psi(q) = 0 \implies \psi(p+q) = \psi(p) + \psi(q) = 0 + 0 = 0 \implies p + q \in \mathrm{Ker}\psi$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall p \in \mathrm{Ker}\psi \quad \psi(p) = 0 \implies \psi(\lambda p) = \lambda\psi(p) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda p \in \mathrm{Ker}\psi$

$\implies \mathrm{Ker}\psi \leq \mathbb{P}$

д) Намерете базиси на ядрото и образа на ψ.

Решение:

Базис на $\mathrm{Ker}\psi$

$$M_S(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Ker}\psi = \left\{ p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P} \ \middle|\ \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \{p \in \mathbb{P} \mid \exists c \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \mathbb{R}\ p(x) = c\} = l(1)$$

Отговор: един базис на $\mathrm{Ker}\psi$ е $\{1\}$ - константния полином 1.

Базис на $\mathrm{Im}\psi$

$$[M_S(\psi)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Im}\psi = l(1,\ x,\ x^2)$$

Отговор: един базис на $\mathrm{Im}\psi$ е $\{1,\ x,\ x^2\}$.

Нека $\mathbb{D} =$
$\{d_1x^3 + d_2x^2 + d_3x + d_4 \in \mathbb{P} \mid \forall p = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P},\ ad_1 + bd_2 + cd_3 + dd_4 = 0\}$

е) Докажете, че $\mathbb{D}$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

Решение:

Нека разгледаме, кои полиноми са в множеството $\mathbb{D}$ преди да тръгнем да доказваме, че е линейно пространство над $\mathbb{R}$. Сещаме се да направим това разглеждане, заради универсалния квантор $\forall$, участващ в дефиницията на множеството $\mathbb{D}$.

Нека вземем един произволен полином от $\mathbb{D}$, $d = d_1x^3 + d_2x^2 + d_3x + d_4 \in \mathbb{D}$, тогава за него е изпълнено $\forall p = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P},\ ad_1 + bd_2 + cd_3 + dd_4 = 0$. В частност това е изпълнено и за базиса $S = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$, тоест:

$$\begin{cases} 0d_1 + 0d_2 + 0d_3 + 1d_4 = 0 \\ 0d_1 + 0d_2 + 1d_3 + 0d_4 = 0 \\ 0d_1 + 1d_2 + 0d_3 + 0d_4 = 0 \\ 1d_1 + 0d_2 + 0d_3 + 0d_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} d_4 = 0 \\ d_3 = 0 \\ d_2 = 0 \\ d_1 = 0 \end{cases} \implies d = 0 \implies \mathbb{D} \subseteq \{0\}.$$

Включването $\{0\} \subseteq \mathbb{D}$ е очевидно. Тогава $\mathbb{D} = \{0\}$. Тоест $\mathbb{D}$ е нулевото подпространство на $\mathbb{P}$. Следователно $\mathbb{D}$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$, защото $\mathbb{D} = \{0\} < \mathbb{P}$.

ж) Определете размерността на $\mathbb{D}$.

Решение:

В предната подточка получихме, че $\mathbb{D} = \{0\} \implies \dim\mathbb{D} = \dim\{0\} = 0$.

з) Конструирайте линеен оператор γ, такъв че ядрото на γ да съвпада с образа на ψ и образа на γ да съвпада с ядрото на ψ.

Решение:

Искаме да констуираме линеен оператор γ, такъв че

$\mathrm{Ker}\gamma = \mathrm{Im}\psi = l(1,\ x,\ x^2)$ и $\mathrm{Im}\gamma = \mathrm{Ker}\psi = l(1)$.

$\mathrm{Ker}\gamma = l(1,\ x,\ x^2) = \{a + bx + cx^2 \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\} = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P} \;\middle|\; \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ c \in \mathbb{R} \\ d = 0 \end{cases} \right\}$. Тогава $M_S(\gamma)$ трябва да съдържа например реда $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и всички останали редове трябва да представляват координатни вектори, линейно зависими с координатния вектор $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$.

От условието $\mathrm{Im}\gamma = l(1)$ следва, че $M_S(\gamma)$ трябва да съдържа например стълба $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ и всички останали стълбове трябва да представляват координатни вектори, линейно зависими с координатния вектор $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$. От полученото досега имаме $M_S(\gamma) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ m_1 & m_2 & m_3 & 0\\ m_4 & m_5 & m_6 & 0\\ m_7 & m_8 & m_8 & 0\end{pmatrix}$. Ние знаем, че нулевия координатен вектор $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ е линейно зависим със всеки друг. Тогава лесно се съобразява, че ако изберем всичките неизвестни $m_i = 0,\ i = 1,\ \ \dots,\ 7$. Условията, които получихме за редовете и стълбовете на $M_S(\gamma)$ са изпълнени. Следователно търсения линеен оператор γ е определен само от матрицата си спрямо стандартния базис, която получихме $M_S(\gamma) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

и) Конструирайте линеен оператор δ, такъв че ядрото на δ да съвпада с $\mathbb{D}$ и образа на δ да съвпада с ядрото на ψ.

Решение:

Знаем, че за линейните изображения (оператор) е изпълнена теоремата за ранга и дефекта. Тоест ако $\delta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{P})$, то $\dim\mathrm{Ker}\delta + \dim\mathrm{Im}\delta = \dim\mathbb{P}$. В случая $\mathrm{Ker}\delta = \mathbb{D} \implies \dim\mathrm{Ker}\delta = \dim\mathbb{D} = 0$. $\mathrm{Im}\delta = \mathrm{Ker}\psi = l(1) \implies \dim\mathrm{Ker}\gamma = \dim l(1) = 1$. Тогава $0 + 1 \neq 4$, което е противоречие и следователно не съществува линеен оператор с търсените свойства.

Отговор: търсения ленеен опратор не може да бъде конструиран.

Задача 2.

Нека спрямо стандартния базис на $\mathbb{R}^3$ линейният оператор ϕ има матрица

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -4\\ -2 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

а) Намерете собствените стойности и вектори на оператора ϕ.

Решение:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}-2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 1-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 1-\lambda & -4\\ 0 & -3-\lambda & -3-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda+3)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 1-\lambda & -4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+3)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 4 & 0\\ 2 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = -(\lambda+3).(-1)^{3+3}.1.\begin{vmatrix}-2-\lambda & 4\\ 2 & 5-\lambda\end{vmatrix} =$$

$= -(\lambda+3)[(\lambda-5)(\lambda+2)-8] = -(\lambda+3)(\lambda^2-3\lambda-18) = -(\lambda+3)(\lambda-6)(\lambda+3) = -(\lambda-6)(\lambda+3)^2$

Следователно собствените стойности са $\lambda_1 = 6,\ \lambda_{2,\,3} = -3$.

Търсим собствен вектор за $\lambda = 6$, тоест търсим решение на уравнението $\phi(v) = A.v = 6.v$, което е еквивалентно да търсим ненулево решение на хомогенната система $(A - 6E).v = \theta$.

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 2 & -5 & -4 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$\begin{cases} v_2 = -v_3 \\ v_1 = -\frac{v_3}{2} \\ v_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \implies v = (-1,\ -2,\ 2)$. По аналогичен начин за $\lambda = -3$ търсим ФСР на хомогенната система $(A + 3E)x = \theta$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Тогава една фундаментална система от решения е: $\{(-2,\ 1,\ 0),\ (2,\ 0,\ 1)\}$.

Отговор:

$\lambda = 6 \implies (-1,\ -2,\ 2)$

$\lambda = -3 \implies (-2,\ 1,\ 0),\ (2,\ 0,\ 1)$

б) Намерете ортонормиран базис d на $\mathbb{R}^3$ в който матрицата D на ϕ е диагонална. Напишете матрица D.

Решение:

От теорията знаем, че векторите отговарящи на различни сосбствени стойности са ортогонални помежду си. Тогава е необходимо да ортогонализираме по метода на Грам-Шмид само векторите съотвестващи на собствената стойност -3. Нека $b_1 = (-2,\ 1,\ 0)$ и $a = (2,\ 0,\ 1)$, тогава вектора b_2 ще търсим по следния начин $b_2 = \lambda b_1 + a$, където $\lambda \in \mathbb{R}$. Искаме b_2 да е ортогонален на b_1, тогава $(b_2,\ b_1) = 0$. Тоест $0 = (b_2,\ b_1) = (\lambda b_1 + a,\ b_1) = (\lambda b_1,\ b_1) + (a,\ b_1) = \lambda(b_1,\ b_1) + (a,\ b_1) \implies \lambda(b_1,\ b_1) = -(a,\ b_1) \implies \lambda = -\frac{(a,\ b_1)}{(b_1,\ b_1)} = -\frac{-4+0+0}{4+1+0} = \frac{4}{5} \implies$

$b_2 = \left(\frac{-8}{5},\ \frac{4}{5},\ 0\right) + (2,\ 0,\ 1) = \left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ 1\right)$, но и вектора $5.b_2$ е ортогонален на b_1. Остава да нормираме намерения ортогонален базис. Полагаме:

$d_1 = \frac{1}{\|(-1,\ -2,\ 2)\|}(-1,\ -2,\ 2) = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}}(-1,\ -2,\ 2) = \frac{1}{3}(-1,\ -2,\ 2) = \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

$d_2 = \frac{1}{\|(-2,\ 1,\ 0)\|}(-2,\ 1,\ 0) = \frac{1}{\sqrt{4+1+0}}(-2,\ 1,\ 0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\ 1,\ 0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right)$

$d_3 = \frac{1}{\|(2,\ 4,\ 5)\|}(2,\ 4,\ 5) = \frac{1}{\sqrt{4+16+25}}(2,\ 4,\ 5) = \frac{1}{\sqrt{45}}(2,\ 4,\ 5) = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,\ 4,\ 5) = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\ \frac{4}{3\sqrt{5}},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

За векторите $d_1,\ d_2,\ d_3$ е изпълнено:

$$\phi(d_1) = 6d_1 = 6d_1 + 0d_2 + 0d_3$$
$$\phi(d_2) = -3d_2 = 0d_1 - 3d_2 + 0d_3$$
$$\phi(d_3) = -3d_3 = 0d_1 + 0d_2 - 3d_3$$

Тогава търсеният базис е: $d = \{d_1,\ d_2,\ d_3\}$ и спрямо него търсената матирца е:

$$D = M_d(\phi) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

в) Намерете матрицата на оператора ϕ^{99} спрямо базиса d.

Решение:

Нека пресметнем матрицата на ϕ^2 спрямо базиса d.

$$\phi^2 = \phi \circ \phi \implies M_d(\phi^2) = M_d(\phi \circ \phi) = M_d(\phi).M_d(\phi) = D^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6.6 + 0.0 + 0.0 & 6.0 - 3.0 + 0.0 & 6.0 + 0.0 - 3.0 \\ 0.6 - 3.0 + 0.0 & 0.0 + (-3).(-3) + 0.0 & 0.0 - 3.0 + 0.(-3) \\ 0.6 + 0.(-3) - 3.0 & 0.0 + 0.(-3) - 3.0 & 0.0 + 0.0 + (-3).(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^2 \end{pmatrix}$$

Нека пресметнем и матирцата на ϕ^3 спрямо базиса d. $\phi^3 = \phi^2 \circ \phi \implies$

$$M_d(\phi^3) = M_d(\phi^2 \circ \phi) = M_d(\phi^2).M_d(\phi) = D^2.D = D^3 = \begin{pmatrix} 6^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6^2.6 + 0.0 + 0.0 & 6^2.0 - 3.0 + 0.0 & 6^2.0 + 0.0 - 3.0 \\ 0.6(-3)^2.0 + 0.0 & 0.0 + (-3)^2.(-3) + 0.0 & 0.0 + (-3)^2.0 + 0.(-3) \\ 0.6 + 0.(-3) + (-3)^2.0 & 0.0 + 0.(-3) + (-3)^2.0 & 0.0 + 0.0 + (-3)^2.(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^3 \end{pmatrix}$$

Тогава си изграждаме хипотезата, че $\forall n \in \mathbb{N}^+\ M_d(\phi^n) = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$

Ще го докажем по индукция от където със сигурност ще знаем $M_d(\phi^{99})$ на колко е равна.

База: $M_d(\phi^1) = M_d(\phi) = D$.

Индукционна хипотеза: допускаме, че $\exists k \in \mathbb{N}^+\ :\ M_d(\phi^k) = \begin{pmatrix} 6^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}$.

Индукционна стъпка:

$$M_d(\phi^{k+1}) = M_d(\phi^k \circ \phi) = M_d(\phi^k).M_d(\phi) = \begin{pmatrix} 6^k & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6^k.6 + 0.0 + 0.0 & 6^k.0 - 3.0 + 0.0 & 6^k.0 + 0.0 - 3.0 \\ 0.6(-3)^k.0 + 0.0 & 0.0 + (-3)^k.(-3) + 0.0 & 0.0 + (-3)^k.0 + 0.(-3) \\ 0.6 + 0.(-3) + (-3)^k.0 & 0.0 + 0.(-3) + (-3)^k.0 & 0.0 + 0.0 + (-3)^k.(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{k+1} \end{pmatrix}$$

Заключение: $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; M_d(\phi^n) = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = D^n$

Тогава $M_d(\phi^{99}) = D^{99} = \begin{pmatrix} 6^{99} & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^{99} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{99} \end{pmatrix}$

г) Намерете как би изглеждала матрицата на ϕ^{99} спрямо произволен базис на $\mathbb{R}^3$.

Решение:

Нека b е произволен различен от d базис на $\mathbb{R}^3$.

Тогава от теорията знаем как се променя матрицата на ϕ^{99} при смяна на базиса:

$$M_b(\phi^{99}) = T_{b\to d}.M_d(\phi^{99}).T_{d\to b} = T_{b\to d}. \begin{pmatrix} 6^{99} & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^{99} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{99} \end{pmatrix} .T_{d\to b}$$

Бихе могли да достигнем до същото нещо, ако използваме знанието как се променя матрицата на ϕ при смяна на базиса: $M_b(\phi) = T_{b\to d}.M_d(\phi).T_{d\to b} = T_{b\to d}.D.T_{d\to b}$. Нека $B = T_{d\to b}$, тогава $B^{-1} = T_{b\to d}$ и тогава $M_b(\phi) = B^{-1}.D.B \implies M_b(\phi^{99}) = [M_b(\phi)]^{99} = (B^{-1}.D.B)^{99} = (B^{-1}.D.B).(B^{-1}.D.B).\ldots.(B^{-1}.D.B) = B^{-1}.D^{99}.B$.

д) Пресметнете матрицата на ϕ^{99} спрямо стандартния базис на $\mathbb{R}^3$.

Решение:

В подточка а) намерихме собствените стойности и вектори на оператора ϕ:

$\lambda = 6 \implies (-1,\ -2,\ 2)$

$\lambda = -3 \implies (-2,\ 1,\ 0),\ (2,\ 0,\ 1)$.

В подточка б) орнормирахме собствените вектори от а) и получихме матирцата $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Сега ще проверим и че сменяйки базиса с векторите от а) можем да достигнем до същата матрица. В подточка в) същност намерихме как се пресмята D^{99} и получения резултата от г) можем спокойно да приложим и за базиса от вектори от а). Това правим тъйкато значително по-лесно ще намерим обратната матрица на неортогонална матрица (матрцата $T_{e\to d}$ от ортонормираните собствени вектори е ортогонална), както и значително по-лесно ще сметнем $M_e(\phi^{99})$.

Нека $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ще пресметнем C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & -10 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 25 & 10 & 0 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -45 & 0 & 18 & 9 & 18 & 0 \\ 0 & 45 & -36 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -45 & 0 & 0 & 5 & 10 & -10 \\ 0 & 45 & 0 & -10 & 25 & 20 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right) \implies C^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Тогава пресмятаме $C^{-1}.A.C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -6 & 6 & -6 \\ -12 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 54 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = D$$

$$\implies M_e(\phi) = A = C.D.C^{-1} \implies M_e(\phi^{99}) = [M_e(\phi)]^{99} = A^{99} = C.D^{99}.C^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6^{99} & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^{99} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{99} \end{pmatrix} . \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}. \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -6^{99} & -2.6^{99} & 2.6^{99} \\ -2.(-3)^{99} & 5.(-3)^{99} & 4.(-3)^{99} \\ 2.(-3)^{99} & 4.(-3)^{99} & 5.(-3)^{99} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6^{99}+8.(-3)^{99} & 2.(6^{99}-(-3)^{99}) & 2.((-3)^{99}-6^{99}) \\ 2.(6^{99}-(-3)^{99}) & 4.6^{99}+5.(-3)^{99} & 4.((-3)^{99}-6^{99}) \\ 2.((-3)^{99}-6^{99}) & 4.((-3)^{99}-6^{99}) & 4.6^{99}+5.(-3)^{99} \end{pmatrix}$$

Отговор:

$M_e(\phi^{99}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} a & b & -b \\ b & c & -2b \\ -b & -2b & c \end{pmatrix}$, където

$(a,\ b,\ c) = (6^{99}+8.(-3)^{99},\ 2.(6^{99}-(-3)^{99}),\ 4.6^{99}+5.(-3)^{99})$.

Задача 3.

Нека $\mathbb{V} = \{ax+bx^2+cx^3 \mid a,\ b,\ c\ \in \mathbb{Q}\}$

а) Докажете, че $\mathbb{V}$ е линейно пространство над $\mathbb{Q}$.

Решение:

$\forall v_1 = a_1x+b_1x^2+c_1x^3,\ v_2 = a_2x+b_2x^2+c_2x^3 \in \mathbb{V}$

$v_1+v_2 = (a_1x+b_1x^2+c_1x^3)+(a_2x+b_2x^2+c_2x^3) = (a_1+a_2)x+(b_1+b_2)x^2+(c_1+c_2)x^3$

$$\begin{cases} a_1,\ a_2 \in \mathbb{Q} \\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{Q} \\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{Q} \end{cases} \implies v_1+v_2 \in \mathbb{V}$$

$\forall \lambda \in Q,\ p = ax+bx^2+cx^3 \in \mathbb{V}\ \lambda p = \lambda(ax+bx^2+cx^3) = \lambda ax+\lambda bx^2+\lambda cx^3$

$\lambda,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{Q} \implies \lambda a,\ \lambda b,\ \lambda c \in \mathbb{Q} \implies \lambda p \in \mathbb{V}$.

Очевидно $0 \in \mathbb{V}$, тогава $\mathbb{V} < \mathbb{Q}^4[x] < \mathbb{Q}[x]$, тоест $\mathbb{V}$ е линейно прострaство над $\mathbb{Q}$.

б) Определете размерността на $\mathbb{V}$.

Решение:

$\mathbb{V} = \{ax+bx^2+cx^3 \mid a,\ b,\ c\ \in \mathbb{Q}\} = l(x,\ x^2,\ x^3) \implies \dim\mathbb{V} = \dim l(x,\ x^2,\ x^3) = 3$ (лесно се съобразява, че всеки полином от $\mathbb{V}$ еднозначно се определя от избора на точно три константи).

в) Напишете дефиницията за дуалното пространство на $\mathbb{V}$.

Решение:

$\mathbb{V}^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{V},\ \mathbb{Q})$ - дуалното пространство на $\mathbb{V}$.

г) Нека за всяко рационално число q, изображението $\varphi_q \ : \ \mathbb{V} \to \mathbb{Q}$ е такова изображение, че $\forall p \in \mathbb{V} \ \varphi_q(p) = p(q)$, докажете че то е елемент на дуалното пространство на $\mathbb{V}$.

Решение:

Нека $q \in \mathbb{Q}$ - произволно и нека $v_1, \ v_2 \in \mathbb{V}$, тогава

$\varphi_q(v_1+v_2) = (v_1+v_2)(q) = v_1(q)+v_2(q) = \varphi_q(v_1)+\varphi_q(v_2) \implies \forall v, \ u \in \mathbb{V} \ \varphi_q(v+u) = \varphi_q(v)+\varphi_q(u)$

Нека $p \in \mathbb{V}$ и нека $\lambda \in \mathbb{Q}$, тогава $\varphi_q(\lambda p) = (\lambda p)(q) = \lambda p(q) = \lambda\varphi_q(p) \implies$
$\forall v \in \mathbb{V} \ \forall \mu \in \mathbb{Q} \ \varphi_q(\mu v) = \mu\varphi_q(v)$

$\implies \varphi_q \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \ \mathbb{Q}) = \mathbb{V}^* \implies \forall y \in \mathbb{Q} \ \varphi_y \in \mathbb{V}^*$

д) Напишете определението за дуален базис на даден базис $A = \{a_1, \ a_2, \ a_3\}$ на $\mathbb{V}$.

Решение:

$A^* = \{a^1, \ a^2, \ a^3\} \subset V^*$ е дуален базис на базиса A, ако

$\forall i, \ j \in \{1, \ 2, \ 3\} \quad a^i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ i \neq j \\ 1 & , \ i = j \end{cases}$

е) Да се намерят координатите на φ_q относно дуалния базис $\{f_1, \ f_2, \ f_3\}$ на базиса $\{x, \ x^2, \ x^3\}$.

Решение:

Нека $q, \in \mathbb{Q}, \ f = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = \varphi_q$, тогава

$$\begin{aligned} f(x) = (\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) = \\ = \alpha\delta_{11} + \beta\delta_{21} + \gamma\delta_{31} = \alpha.1 + \beta.0 + \gamma.0 = \alpha = \varphi_q(x) = (x)(q) = q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^2) = (\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3)(x^2) = \alpha f_1(x^2) + \beta f_2(x^2) + \gamma f_3(x^2) = \\ = \alpha\delta_{12} + \beta\delta_{22} + \gamma\delta_{32} = \alpha.0 + \beta.1 + \gamma.0 = \beta = \varphi_q(x^2) = (x^2)(q) = q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^3) = (\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3)(x^3) = \alpha f_1(x^3) + \beta f_2(x^3) + \gamma f_3(x^3) = \\ = \alpha\delta_{13} + \beta\delta_{23} + \gamma\delta_{33} = \alpha.0 + \beta.0 + \gamma.1 = \gamma = \varphi_q(x^3) = (x^3)(q) = q^3 \end{aligned}$$

$\implies \varphi_q = qf_1 + q^2 f_2 + q^3 f_3$

ж) Докажете, че $\{\varphi_{19}, \ \varphi_{-111}, \ \varphi_{32}\}$ е базис на дуалното пространство на $\mathbb{V}$.

Решение:

От предната подточка имаме:

$$\varphi_{19} = 19f_1 + 19^2 f_2 + 19^3 f_3$$

$$\varphi_{-111} = (-111)f_1 + (-111)^2 f_2 + (-111)^3 f_3$$

$$\varphi_{32} = 32f_1 + 32^2 f_2 + 32^3 f_3$$

Имаме три дуални вектора, тогава те ще образуват базис на $\mathbb{V}^*$ ако са линейно независими. Тоест, ако уравнението $\alpha\varphi_{19}+\beta\varphi_{-111}+\gamma\varphi_{32} = \theta$ има единствено решение: $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (0,\ 0,\ 0)$.

$$\alpha\varphi_{19} + \beta\varphi_{-111} + \gamma\varphi_{32} = \theta \implies$$

$$\alpha[19f_1 + 19^2 f_2 + 19^3 f_3] \ + \beta[-111f_1 + 111^2 f_2 - 111^3 f_3] + \gamma[32f_1 + 32^2 f_2 + 32^3 f_3] = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3$$

$$\implies [19\alpha - 111\beta + 32\gamma]f_1 + [19^2\alpha + 111^2\beta + 32^2\gamma]f_2 + [19^3\alpha - 111^3\beta + 32^3\gamma]f_3 = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3$$

$$\implies \begin{cases} 19\alpha - 111\beta + 32\gamma = 0 \\ 19^2\alpha + 111^2\beta + 32^2\gamma = 0 \\ 19^3\alpha - 111^3\beta + 32^3\gamma = 0 \end{cases}$$

От теорията знаем, че тази система има единствено нулевото решение, когато детерминантата на системата е различна от 0. Нека я пресметнем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 19 & -111 & 32 \\ 19^2 & 111^2 & 32^2 \\ 19^3 & -111^3 & 32^3 \end{vmatrix} = 19.(-111).32. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 19 & -111 & 32 \\ 19^2 & 111^2 & 32^2 \end{vmatrix} = 19.(-111).32.W(19,\ -111,\ 32)$$

Получихме детерминанта на Вандермонд $W(19,\ -111,\ 32)$ и понеже числата $19,\ -111,\ 32$ са различни то тя е различна от 0. Нека все пак я пресметнем честно:

$$W(19,\ -111,\ 32) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 19 & -111 & 32 \\ 19^2 & 111^2 & 32^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 19 & -111 & 32 \\ 19^2 - 19^2 & 111^2 - (-111).19 & 32^2 - 32.19 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 19 - 19 & -111 - 19 & 32 - 19 \\ 19^2 - 19^2 & 111^2 - (-111).19 & 32^2 - 32.19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -111 - 19 & 32 - 19 \\ 0 & 111(111 + 19) & 32.(32 - 19) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -130 & 13 \\ 111.(130) & 32.13 \end{vmatrix} = -130.13. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -111 & 32 \end{vmatrix} = -130.13.(32 + 111) = -130.13.143.$$

Получихме $\Delta = 19.(-111).32.(-130).13.143 = 19.111.32.130.13.143 > 0$

з) Ако знаете, че $\beta = \{\varphi_1,\ \varphi_{-1},\ \varphi_2\}$ е базис на дуалното пространство на $\mathbb{V}$ намерете базис b на $\mathbb{V}$, на който β е дуален базис.

Решение:

Нека търсения базис е $b = \{v_1,\ v_2,\ v_3\} \subset \mathbb{V}$. Естествено е да запишем търсените полиноми като:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1x + b_1x^2 + c_1x^3 \\ v_2 &= a_2x + b_2x^2 + c_2x^3 \\ v_3 &= a_3x + b_3x^2 + c_3x^3 \end{aligned}$$

тогава ествено е да запишем дадения базис като $v^1 = \varphi_1,\ v^2 = \varphi_{-1},\ v^3 = \varphi_2$ и тогава от дефиницията за дуален базис имаме $\forall i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\} \quad v^i(v_j) = \delta_{ij}$. За v_1 имаме:

$$\begin{aligned} v^1(v_1) = \varphi_1(v_1) = v_1(1) = (a_1x + b_1x^2 + c_1x^3)(1) = a_1 + b_1 + c_1 = \delta_{11} = 1 \\ v^2(v_1) = \varphi_{-1}(v_1) = v_1(-1) = (a_1x + b_1x^2 + c_1x^3)(-1) = -a_1 + b_1 - c_1 = \delta_{21} = 0 \\ v^3(v_1) = \varphi_2(v_1) = v_1(2) = (a_1x + b_1x^2 + c_1x^3)(2) = 2.a_1 + 4.b_1 + 8.c_1 = \delta_{31} = 0 \end{aligned}$$

Тогава за v_1 получаваме следната система:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 1 \\ -a_1 + b_1 - c_1 = 0 \\ 2a_1 + 4b_1 + 8c_1 = 0 \end{cases}$$

Нека я решим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$c_1 = -\frac{1}{2},\ b_1 = \frac{1}{2} \implies 2.a_1 = 1 - 2c_1 = 1 + 1 = 2 \implies a_1 = 1 \implies v_1 = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$

По аналогичен начин за v_2 получаваме системата:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ -a_2 + b_2 - c_2 = 1 \\ 2a_2 + 4b_2 + 8c_2 = 0 \end{cases}$$

Нека я решим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$c_2 = -\frac{1}{6},\ b_2 = \frac{1}{2} \implies 2a_2 = -1 - 2c_2 = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \implies a_2 = -\frac{1}{3} \implies v_2 = -\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$

Също така по аналогичен начин за v_3 получаваме системата:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 = 0 \\ -a_3 + b_3 - c_3 = 0 \\ 2a_3 + 4b_3 + 8c_3 = 1 \end{cases}$$

Нека я решим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$\implies c_3 = \frac{1}{6},\ b_3 = 0 \implies a_3 = -c_3 = -\frac{1}{6} \implies v_3 = -\frac{x}{6} + \frac{x^3}{6}$. Получихме:

$$v_1 = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$$
$$v_2 = -\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$
$$v_3 = -\frac{x}{6} + \frac{x^3}{6}$$

и) Постройте изоморфизъм между $\mathbb{V}$ и неговото дуално пространство.

Решение:

Построяваме следното изображение $\sigma\ :\ \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$, за което

$$\sigma(v_1) = v^1$$
$$\sigma(v_2) = v^2$$
$$\sigma(v_3) = v^3$$

Разширяваме σ до линейно изображение:
$\forall \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3 \in \mathbb{Q}\ \sigma(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3) = \mu_1 v^1 + \mu_2 v^2 + \mu_3 v^3$.

От теорията знаем, че $\dim\mathbb{V}^* = \dim\mathbb{V} = 3$ построихме σ, така че да е линейно изображение, тогава от теорията (теоремата за изомофризъм между крайно мерни линейни пространства със съвпадаща размерност) следва, че σ е изоморфизъм между $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$.

й) Напишете каква е матрицата на построения от вас изоморфизъм спрямо базисите b на $\mathbb{V}$ и β на дуалното пространство на $\mathbb{V}$.

Решение:

От начина, по който построихме σ следва, че $M_b^\beta(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$.