Нормални подгрупи. Факторгрупи. Теореми за хомоморфизмите

Иво Стратев

3 август 2017 г.

Определение: Нормална група

Нека G е група и $H \leq G$. H е нормална подгрупа на G, ако:

$$\forall g \in G gH = \{gh \mid h \in H\} = Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

Означение: Нормална група

Ако H е нормална подгрупа на G ще използваме означението: $H \trianglelefteq G$ или $H \triangleleft G$, ако $H < G$.

Твърдение 1:

Нека G е група и $H \leq G$ и нека $g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$. Тогава $g^{-1}Hg \leq G$.

Доказателство:

$$\begin{aligned} H \leq G \implies e \in H \implies e^{-1}ee = eee = e \in g^{-1}Hg \\ \implies \forall h_1, h_2 \in H h_1 h_2 \in H \implies (g^{-1}h_1 g)(g^{-1}h_2 g) = g^{-1}h_1 h_2 g \in g^{-1}Hg \\ \implies \forall h \in H \implies h^{-1} \in H \implies (g^{-1}hg)^{-1} = g^{-1}h^{-1}g \in g^{-1}Hg \\ \implies g^{-1}Hg \leq G \quad \square \end{aligned}$$

Твърдение 2:

Нека G е група и $H \leq G$. Ако $\forall g \in G\ g^{-1}Hg \subseteq H$, то $g^{-1}Hg = H$.

Доказателство:

$$\begin{aligned} \forall g \in G\ g^{-1}Hg \subseteq H \implies gHg^{-1} \subseteq H \implies \\ \forall h \in H\ ghg^{-1} \in H \implies \exists k \in H:\ ghg^{-1} = k \implies gh = kg \implies \\ H \ni h = g^{-1}kg \in g^{-1}Hg \subseteq H \implies g^{-1}Hg = H \quad \square \end{aligned}$$

Твърдение 3:

Нека G е група и $H \leq G$. Тогава $\forall g \in G\ \forall h \in H\ g^{-1}hg \in H \iff H \trianglelefteq G$.

Доказателство:

$$\forall g \in G\ \forall h \in H\ g^{-1}hg \in H \iff \forall g \in G\ g^{-1}Hg \subseteq H \iff$$

От Твърдение 2

$$\forall g \in G\ g^{-1}Hg = H \iff Hg = gH \iff H \trianglelefteq G \quad \square$$

Твърдение 4:

Нека G е група, $n \in \mathbb{N}$ и $H_1,\ H_2,\ \ldots, H_n \trianglelefteq G$, тогава $\bigcap\limits_{k=1}^{n} H_k \trianglelefteq G$.

Доказателство:

Нека $H = \bigcap\limits_{k=1}^{n} H_k,\ I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$

$$\begin{aligned} \forall k \in I_n\ e \in H_k \implies e \in H \implies H \neq \emptyset \\ \forall h \in H \implies \forall k \in I_n\ h \in H_k \implies h^{-1} \in H_k \implies h^{-1} \in H \\ \forall a, b \in H \implies \forall k \in I_n\ a, b \in H_k \implies ab \in H_k \implies ab \in H \\ \implies H \leq G \end{aligned}$$

От Твърдение 3

$$\begin{aligned} \forall h \in H \implies \forall k \in I_n\ \forall g \in G\ g^{-1}hg \in H_k \implies \\ g^{-1}hg \in H_k \implies g^{-1}hg \in H \implies H \trianglelefteq G \quad \square \end{aligned}$$

Твърдение 5:

Нека G е група. Тогава $\forall H \leq G:\ |G:\ H| = 2 \implies H \trianglelefteq G$

Доказателство:

$$\forall H \leq G:\ |G : H| = 2\ \forall g \in G$$

Ако $g \in H \implies gH = H = Hg \implies H \trianglelefteq G$
Ако $g \notin H \implies$

$$\begin{aligned} gH \neq H \wedge Hg \neq H \wedge H \cup gH = \emptyset = H \cup Hg \implies \\ G = H \cap gH = H \cap Hg \implies G \backslash H = Hg = gH \implies H \trianglelefteq G \quad \square \end{aligned}$$

Означение

Нека G е група и $H \trianglelefteq G$ и нека $G/H = \{gH \mid g \in G\}$

Нека $\cdot_{G/H}:\ G/H \times G/H \to G/H:\ \forall a, b \in G\ aH.bH = abH$

Твърдение 6:

Нека G е група и $H \trianglelefteq G$. Тогава $(G/H, \cdot_{G/H})$ е група.

Доказателство:

Коректност на операцията:
Нека $a,\ b,\ c,\ d \in G:\ aH = cH \wedge bH = dH \implies$

$$\begin{aligned} a^{-1}cH = H \implies a^{-1}c \in H \\ b^{-1}dH = H \implies b^{-1}d \in H \\ (ab)^{-1}cd = b^{-1}a^{-1}cd = b^{-1}a^{-1}c(bb^{-1})d = (b^{-1}(a^{-1}c)b)(b^{-1}d) \\ H \trianglelefteq G \implies b^{-1}(a^{-1}c)b \in H \implies (b^{-1}(a^{-1}c)b)(b^{-1}d) \in H \implies \\ (ab)^{-1}cd \in H \implies abH = cdH \implies \end{aligned}$$

Бинарната операцията е дефинирана коректно.

$\forall a, b, c \in G\ a(bc)H = \{a(bc)h \mid h \in H\} = \{abch \mid h \in H\} = \{(ab)ch \mid h \in H\} = (ab)cH \implies$
Бинарната операцията е асоциативна.

$$e \in G \implies eH = H$$
$$\forall a \in G aH = aeH = aH.eH = Ha = Hae = Ha.He \implies$$

H играе ролята на единичен елемент.

$$\forall a \in G\ aH.a^{-1}H = aa^{-1}H = eH = H = a^{-1}aH = a^{-1}H.aH \implies$$
$$\forall a \in G\ \exists b \in G:\ aH.bH = H \wedge b = a^{-1}$$

$\implies (G/H, \cdot_{G/H})$ е група $\quad \square$.

Нека G, G' са групи и нека $\varphi:\ G \to G'$ е хомоморфизъм на групи.
Множеството $Ker_\varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = e\}$ ще наричаме ядро на φ, а
множеството $Im_\varphi = \{b \in G' \mid \exists a \in G:\ \varphi(a) = b\} = \{\varphi(a) \mid a \in G\}$ ще наричаме образ на φ.

Твърдение 7:

Нека G, G' са групи и нека $\varphi:\ G \to G'$ е хомоморфизъм на групи. Тогава $\varphi(e_G) = e_{G'}$.

Доказателство:

$$\forall a \in G\ \varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a)\varphi(e) \mid \varphi(a)^{-1} \implies e_{G'} = \varphi(e_G) \quad \square$$

Твърдение 8:

Нека G, G' са групи и нека $\varphi:\ G \to G'$ е хомоморфизъм на групи. Тогава $\forall a \in G\ \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

Доказателство:

$\forall a \in G\ \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = e \mid \varphi(a)^{-1} \implies \varphi(a)^{-1}\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \implies \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \quad \square$