Домашно 1

Информатика 2017/18

19 септември 2018 г.

Релация

Нека $D = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ и нека $R \subseteq D^3 \times D^3$ е следната релация:

$$(a,\ b,\ c)\, R\, (x,\ y,\ z) \iff ac \equiv xz \pmod 5.$$

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

б) Намерете броят на класовете на еквивалентност относно R.

в) Намерете броят на елементите във всеки клас на еквивалентност относно R.

Решение:

а)

- R е рефлексивна, защото $\forall (a,\ b,\ c) \in D^3\ ac \equiv ac \pmod 5 \implies (a,\ b,\ c) R (a,\ b,\ c)$ (Рефлексивност на релацията $\equiv_{\text{mod } 5}$).

- R е симетрична, защото $\forall (a,\ b,\ c),\ (x,\ y,\ z) \in D^3\ :\ (a,\ b,\ c)\, R\, (x,\ y,\ z) \implies ac \equiv xz \pmod 5 \implies ac \equiv xz \pmod 5 \implies (x,\ y,\ z)\, R\, (a,\ b,\ c)$
(Симетричност на релацията $\equiv_{\text{mod } 5}$).

- R е транзитивна, защото
$\forall (a,\ b,\ c),\ (x,\ y,\ z),\ (m,\ n,\ k) \in D^3\ :\ (a,\ b,\ c) R (m,\ n,\ k) \wedge (m,\ n,\ k) R (x,\ y,\ z) \implies ac \equiv mk \pmod 5\ \wedge\ mk \equiv xz \pmod 5 \implies ac \equiv xz \pmod 5 \implies (a,\ b,\ c)\, R\, (x,\ y,\ z)$ (Транзитивност на релацията $\equiv_{\text{mod } 5}$).

R е рефлексивна, симетрична и транзитивна следователно е релация на еквивалентност.

б)

Нека фиксираме един елемент на домейна $(a,\ b,\ c) \in D^3$ тогава класът на $(a,\ b,\ c)$ по дефиниция е:

$$\begin{aligned}[(a,\ b,\ c)] = \{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid (a,\ b,\ c)\, R\, (x,\ y,\ z)\} = \\ = \{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid ac \equiv xz \pmod 5\},\end{aligned}$$

но понеже $(a,\ b,\ c)$ е фиксиран елемент на домейна на релацията, то и ac е фиксирана константа, която е с фиксиран остатък при делеление с частно и остатък на 5. Ние знаем, че има точно пет различни остатъци "по модул" 5, това са елементите на множеството D. Тогава множеството от класовете на еквивалентност относно R е:

$$\{\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv k \pmod 5\} \mid k \in D\}$$

и броят на елементите му съвпада с броят на елементите на множеството D, който е 5.
implies
в)

От комбинаторния принцип на умножението следва, че броят на елементие на домейна е: $|D^3| = |D|^3 = 5^3 = 125$.

Нека разгледаме подробно всеки един клас на еквивалентност.

Започваме със следното наблюдение ако $m,\ n \in D$, то $0 \leq mn \leq 16$.

Нека означим с M множеството от целите числата от 0 до 16, тоест $M = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 16\}$.

Започвайки от онези наредени тройки с елементи от D, за които

$$\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 0 \pmod 5\}.$$

Числата даващи остатък 0 при деление с частно и остатък на 5 са числата от множеството:

$$\{m \in M \mid 5 \mid m\} = \{0,\ 5,\ 10,\ 15\}$$

Понеже $5 \notin D$, то единственото число кратно на 5, което може да се получи като произведение на числа от D е 0. Тогава $\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 0 \pmod 5\} = \{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid x = 0\ \vee\ z = 0\} = \{(0,\ y,\ z) \in D^3\} \cup \{(x,\ y,\ 0) \in D^3\}$. Тогава от принципа на включването и изключването получаваме:

$$\begin{aligned}|\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 0 \pmod 5\}| &= |\{(0,\ y,\ z) \in D^3\} \cup \{(x,\ y,\ 0) \in D^3\}| = \\ = |\{(0,\ y,\ z) \in D^3\}| + |\{(x,\ y,\ 0) \in D^3\}| &- |\{(0,\ y,\ z) \in D^3\} \cap \{(x,\ y,\ 0) \in D^3\}| = \\ = |D^2| + |D^2| - |\{(0,\ y,\ 0) \mid y \in D\}| &= 2|D|^2 - |D| = 50 - 5 = 45.\end{aligned}$$

Числата даващи остатък 1 при деление с частно и остатък на 5 от M са: $1,\ 6,\ 11,\ 16$. 11 е просто число строго по-голямо от 4, следователно никой две числа от D не дават произведение 11. За останалите числа съществува единствено (с точност до реда) разлагане като произведение на числа от множеството D, по-кокретно: $1 = 1.1$, $6 = 2.3 = 3.2$ и $16 = 4.4$. Тогава:

$$\begin{aligned}|\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 1 \pmod 5\}| &= \\ = |\{(x,\ y,\ z) \mid y \in D,\ (x,\ z) \in \{(1,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 4)\}\}| &= \\ = |D|.|\{(1,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 4)\}| = 5.4 &= 20.\end{aligned}$$

Числата даващи остатък 2 при деление с частно и остатък на 5 от M са: $2,\ 7,\ 12$. 7 е просто число строго по-голямо от 4, следователно никой две числа от D не дават произведение 7. За 2 и 12 съществува единствено (с точност до реда) разлагане като произведение на числа от множеството D, по-кокретно: $2 = 1.2 = 2.1$ и $12 = 3.4 = 4.3$. Тогава:

$$\begin{aligned}|\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 1 \pmod 5\}| &= \\ = |\{(x,\ y,\ z) \mid y \in D,\ (x,\ z) \in \{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3)\}\}| &= \\ = |D|.|\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3)\}| = 5.4 &= 20.\end{aligned}$$

Числата даващи остатък 3 при деление с частно и остатък на 5 от M са: $3,\ 8,\ 13$. 13 е просто число строго по-голямо от 4, следователно никой две числа от D не дават произведение 13. За 3 и 8 съществува единствено (с точност до реда) разлагане като произведение на числа от множеството D, по-кокретно: $3 = 1.3 = 3.1$ и $8 = 2.4 = 4.2$. Тогава:

$$\begin{aligned}|\{(x,\ y,\ z) \in D^3 \mid xz \equiv 1 \pmod 5\}| =\\ = |\{(x,\ y,\ z) \mid y \in D,\ (x,\ z) \in \{(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)\}\}| =\\ = |D|.|\{(1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)\}| = 5.4 = 20.\end{aligned}$$

Получихме: $45 + 4.20 = 45 + 80 = 125$.

Биекция

Постройте биекция между множествата $P = \{x^2 + ax + b \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$ и

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a.b & -a.c \\ a.c & a.b \end{pmatrix} \middle| \ a \in [0,\ \infty),\ b,\ c \in [-1,\ 1]\ :\ b^2 + c^2 = 1 \right\}$$

Като използвате по точно една функция от функциите със сигнатури:
$\mathbb{C} \to [0,\ 2\pi),\ \mathbb{C} \to [0,\ \infty),\ [0,\ 2\pi) \times [0,\ \infty) \to M,\ P \to \mathbb{C},\ \mathbb{C} \to [0,\ 2\pi) \times [0,\ \infty)$.

Решение:

Първо ще разгледаме подробно на какво всъщност е равно всяко от множествата P и M.

От училище ни е известно, че всеки разложим полином $ax^2 + bx + c$ с реални коефициенти от втора степен се представя по единствен начин като произведение: $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$, където $r_1,\ r_2$ са неговите реални корени. Ако водещия коефициент е равен на 1, то разлагането е: $x^2+bx+c = (x-r_1)(x-r_2)$. От часовете по Линейна алгебра и ДИС 1 е известно, че всеки полином от втора степен с реални коефициенти (не непременно разложим над реалните числа) има точно два комплексни корена, които са комплексно спрегнати и се разлага по единствен начин. Известна ни е и формула за намирането на двата корена на полинома с реални коефициенти $x^2 + bx + c$:

$$r_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

Ако водещия коефицинет е единица, то полинома с реални коефициенти: x^2+bx+c се разлага по единствен начин като $(x-r)(x-\overline{r})$, където $r = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}$. Тогава лесно можем да построим биекция между множеството P и множеството на комплексните числа: $Root : P \to \mathbb{C}$

$$Root(x^2 + bx + c) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

От курса по Линейна алгебра ни е известно, че всяко комплексно число съществува представяне в тригонометричен вид. Като за всяко комплексно число различно от нула това представяне е единствено. За да се подсигурим, че нулата се представя по единствен начин, ще "разширим"дефинцията за функцията "главна стойност на аргумента"на едно комплексно число $Arg : \mathbb{C} \to [0,\ 2\pi)$

(приемаме, че главната стойност на едно ненулево комплексно число е онази стойност на аргумента в интервала $[0,\ 2\pi)$), като дефинираме функцията $Angle : \mathbb{C} \to [0,\ 2\pi)$ по следния начин:

$$Angle(z) = \begin{cases} 0 & ,\ z = 0 \\ Arg(z) & ,\ z \neq 0 \end{cases}$$

Функцията модул на комплексно число $|\ | : \mathbb{C} \to [0,\ \infty)$ знаем, че се дефинира по следния начин:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Така за всяко комплексно число $c = a + bi$ съществува единствено представяне във вида:

$$c = |c|(\cos(Angle(c)) + i \sin(Angle(c)))$$

Сега можем да дефинираме биекция между множеството на комплексните числа и декартовото произведение $[0,\ 2\pi) \times [0,\ \infty)$. $Trig : \mathbb{C} \to [0,\ 2\pi) \times [0,\ \infty)$

$$Trig(z) = (Angle(z),\ |z|).$$

Да разгледаме множеството M. От часовете по тригонометрия в училище или часовете по Линейна алгебра/ДИС 1 или от обща математичска култура ни е известно, че множеството от всички решения в реални числа на уравнението:

$$x^2 + y^2 = 1$$

е множеството $\{(\cos\varphi,\ \sin\varphi) \mid \varphi \in [0,\ 2\pi)\}$. Тогава е ясно, че

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a.\cos\varphi & -a.\sin\varphi \\ a.\sin\varphi & a.\cos\varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in [0,\ \infty),\ \varphi \in [0,\ 2\pi) \right\}$$

И значи можем да дефинираме биекция между множествата $[0,\ 2\pi) \times [0,\ \infty)$ и M. $RotMatrix : [0,\ 2\pi) \times [0,\ \infty) \to M$

$$RotMatrix((\varphi,\ a)) = \begin{pmatrix} a.\cos\varphi & -a.\sin\varphi \\ a.\sin\varphi & a.\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ясно е, че композиция на биекции отново е биекция.Тогава търсената биекция между множествата P и M, която използва по точно от една от дадените фунцкии е: $f : P \to M$

$$f = RotMatrix \circ Trig \circ Root$$