

Езици и автомати. Решения на теоретично контролно вариант 1 от 19.01.2017г.

Иво Стратев

11 януари 2018 г.

1 Задача 1.

1.1 Дайте дефиниция за контекстно-свободна граматика.

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$, където:

- V е крайно множество от променливи (нетерминали)
- Σ е азбука (крайно множество от терминали) и $\Sigma \cap V = \emptyset$
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ е крайно множество от правила
- $S \in V$ е началната променлива

G е контекстно-свободна граматика, ако $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$

1.2 Дефинирайте кога една дума $u \in (V \cup \Sigma)^*$ е изводима от думата $v \in (V \cup \Sigma)^*$ с граматиката G ($v \xRightarrow{*} u$).

Нека $\Lambda = (V \cup \Sigma)^*$

Нека $R_{\vec{G}} = \{(w, w') \in \Lambda^2 \mid \exists \alpha, \beta, \beta', \gamma \in \Lambda : w = \alpha\beta\gamma \wedge w' = \alpha\beta'\gamma \wedge \exists \beta \rightarrow \beta' \in P\}$

и нека $R_{\vec{G}}^n = \begin{cases} R_{\vec{G}} & , n = 0 \\ \left\{ (\alpha, \gamma) \in \Lambda^2 \mid \exists \beta \in \Lambda, \exists m \in \mathbb{N} : m < n \wedge (\alpha, \beta), (\beta, \gamma) \in R_{\vec{G}}^m \right\} & , n > 0 \end{cases}$

Тогава $R_{\vec{G}}^{\Rightarrow*} = \{(w, w) \mid w \in \Lambda\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_{\vec{G}}^n$

тоест $R_{\vec{G}}^{\Rightarrow*}$ е рефлексивното и транзитивното затваряне на $R_{\vec{G}}$.

$v \xRightarrow{*} u \iff (v, u) \in R_{\vec{G}}^{\Rightarrow*}$

1.3 G е контекстно-свободна граматика определете езика $\mathcal{L}(G)$

$$\mathcal{L}(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \xRightarrow{*} w\}$$

1.4

Нека $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow ABBa, A \rightarrow aA \mid a, B \rightarrow bBb \mid b\}, S)$

1.4.1 Покажете, че думите $abba$ и $aabbbba$ са изводими от G и покажете синтактично дърво за тях.

За $abba$:

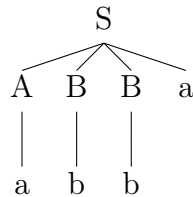
$$S \Rightarrow (S \rightarrow ABBa)$$

$$ABBa \Rightarrow (A \rightarrow a)$$

$$aBBa \Rightarrow (B \rightarrow b)$$

$$abBa \Rightarrow (B \rightarrow b)$$

$abba$



За $aabbbba$:

$$S \Rightarrow (S \rightarrow ABBa)$$

$$ABBa \Rightarrow (A \rightarrow aA)$$

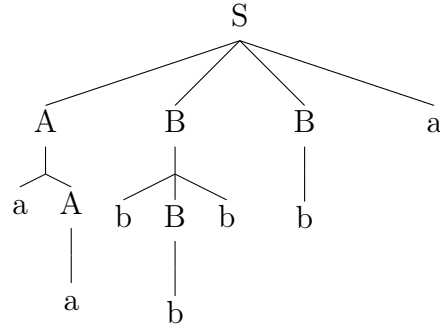
$$aABBa \Rightarrow (A \rightarrow a)$$

$$aaBBa \Rightarrow (B \rightarrow bBb)$$

$$aabBbBa \Rightarrow (B \rightarrow b)$$

$$aabbbBa \Rightarrow (B \rightarrow b)$$

$aabbbba$



1.4.2 Вярно ли е, че езикът $\mathcal{L}(G) \cap \{a^{2n}b^{2k}a \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ е контекстно-свободен?

Лесно се вижда, че $\mathcal{L}(G) = \{a^n b^{2k} a \mid n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ следователно

$$\mathcal{L}(G) \cap \{a^{2n}b^{2k}a \mid n, k \in \mathbb{N}\} = \{a^{2n}b^{2k}a \mid n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Една граматика, която описва $\{a^{2n}b^{2k}a \mid n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ е:

$$(\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow AABBa, A \rightarrow aAa \mid a, B \rightarrow bBb \mid b\}, S)$$

Следователно $\mathcal{L}(G) \cap \{a^{2n}b^{2k}a \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ е контекстно-свободен.

1.4.3 Вярно ли е, че езикът $\{a, b\}^* \setminus \mathcal{L}(G)$ е контекстно-свободен?

Лесно се вижда, че $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(a^+(bb)^+a)$, тоест че $\mathcal{L}(G)$ всъщност е регулярен език.

Ние знаем, че допълнението на всеки регулярен език е регулярен език, тоест $\{a, b\}^* \setminus \mathcal{L}(G)$ е регулярен.

Също така знаем, че всеки регулярен език е контекстно-свободен език, тогава $\{a, b\}^* \setminus \mathcal{L}(G)$ е контекстно-свободен.

2 Задача 2.

Нека $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ и $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ са контекстно-свободни граматики, за които $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Опишете контрукция за построяването на контекстно-свободна граматика $G = (V, \Sigma, P, S)$ с език

2.1 $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \cdot \mathcal{L}(G_2)$

$$S \notin V_1 \cup V_2, S \notin \Sigma, G = (\{S\} \cup V_1 \cup V_2, \Sigma, \{S \rightarrow S_1 S_2\} \cup P_1 \cup P_2, S)$$

2.2 $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1)^*$

$$S \notin V_1, S \notin \Sigma, G = (\{S\} \cup V_1, \Sigma, \{S \rightarrow S_1 S \mid \varepsilon\} \cup P_1, S)$$

3 Задача 3.

Постройте краен недетерминиран автомат A , за който $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(G)$

за $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon \mid aB, A \rightarrow a \mid aB, B \rightarrow bS \mid bA\}, S)$

3.1 Общ вид на конструкцията

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$ е регулярна граматика. Тогава

$$F \notin V, F \notin \Sigma, A = (V \cup \{F\}, \Sigma, \Delta, S, \{F\} \cup \{T \in V \mid T \rightarrow \epsilon \in P\})$$

$$\Delta = \{((T, a), \{Y \in V \mid T \rightarrow aY \in P\} \cup \{F \mid T \rightarrow a \in P\}) \mid T \in V, a \in \Sigma\}$$

Обратно на задачата:

$$A = (\{S, A, B, F\}, \{a, b\}, \Delta, S, \{F, S\})$$

$$\Delta = \{((S, a), \{B\}), ((A, a), \{B, F\}), ((B, b), \{S, A\})\} \text{ или}$$

$$\Delta(S, a) = \{B\}$$

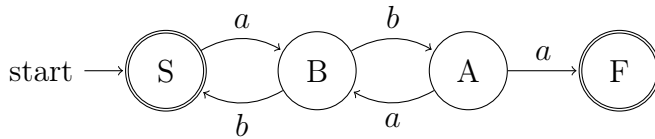
$$\Delta(S, b) = \emptyset$$

$$\Delta(A, a) = \{B, F\}$$

$$\Delta(A, b) = \emptyset$$

$$\Delta(B, a) = \emptyset$$

$$\Delta(B, b) = \{S, A\}$$



4 Задача 4.

Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$ е контекстно-свободна граматика. Дефинирайте стеков автомат M , завърващ с празен стек, за който $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$.

$$M = (\{q\}, \Sigma, \Sigma \cup V, S, q, \Delta, \emptyset)$$

$$\forall A \in V \Delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \alpha) \mid A \rightarrow \alpha \in P\}$$

$$\forall a \in \Sigma \Delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$$

4.1 Дефинирайте стеков автомат M с горното свойство за G от Задача 1.

$$M = (\{q\}, \{a, b\}, \{a, b, S, A, B\}, S, q, \Delta, \emptyset)$$

$$\Delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, ABba)\}$$

$$\Delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, aA), (q, a)\}$$

$$\Delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, bBb), (q, b)\}$$

$$\Delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$$

5 Задача 5.

Формулирайте Лемата за покачването (The Pumping Lemma) за контекстно-свободни езици.

Ако L е контекстно-свободен език то

$$\exists p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \forall \alpha \in L : |\alpha| \geq p \exists x, y, u, v, z : \alpha = xyuvz \wedge |yv| \geq 1 \wedge |yuv| \leq p \wedge \forall i \in \mathbb{N} xy^iuv^iz \in L.$$

Контра позиция на лемата: Ако

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \exists \alpha \in L : |\alpha| \geq p \forall x, y, u, v, z : \alpha = xyuvz \wedge |yv| \geq 1 \wedge |yuv| \leq p \wedge \exists i \in \mathbb{N} xy^iuv^iz \notin L \text{ то } L \text{ не е контекстно-свободен език.}$$