

# Теоритично контролно №2 1, I, Информатика

Иво Стратев

14 декември 2017 г.

## 1 Линейно изображение и линейен оператор

### 1.1 Определение линейен оператор

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$$

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) \implies \varphi \in \text{Hom } \mathbb{V}$$

### 1.2 Определение линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$$

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) \implies \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$$

### 1.3 Теорема $\exists! \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$

$e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

$w_1, \dots, w_n$  - произволни вектори от  $\mathbb{W}$

$$\implies \exists! \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) : i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = w_i$$

### 1.4 Определение за изоморфизъм на линейни пространства

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$  и  $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  е изображение.

$\varphi$  е изоморфизъм между  $\mathbb{V}$  и  $\mathbb{W}$  ( $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$ ), ако:

1)  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  ( $\varphi$  е лин. изображение)

2)  $\varphi$  е биекция

## 1.5 Н.Д.У две крайно мерни Л.П. да са изоморфни

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$$\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \iff \dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W} \in \mathbb{N}$$

## 2 Доказателства за линейни изображения

### 2.1 Докажете, че $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \implies \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \theta_{\mathbb{V}}$

Доказателство 1:

$$\text{Нека } u \in \mathbb{U} \quad \theta_{\mathbb{V}} = 0\varphi(u) = \varphi(0u) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad \square$$

Доказателство 2:

$$\begin{aligned} \text{Нека } u \in \mathbb{U} \quad \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) &= \varphi(u - u) = \varphi(u + (-1)u) = \\ &= \varphi(u) + (-1)\varphi(u) = \varphi(u) - \varphi(u) = \theta_{\mathbb{V}} \quad \square \end{aligned}$$

Доказателство 3:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) &= \varphi(\theta_{\mathbb{U}} + \theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad | \quad -\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies \\ \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) &= \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies \\ \theta_{\mathbb{V}} &= \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad \square \end{aligned}$$

### 2.2 Докажете, че $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$

$$\forall u \in \mathbb{U} \implies \varphi(-u) = -\varphi(u)$$

Доказателство:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V}), \forall u \in \mathbb{U}, \forall \lambda \in \mathbb{F} &\implies \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) \\ \implies \lambda = -1 &\implies \varphi(-u) = \varphi(-1u) = -1\varphi(u) = -\varphi(u) \\ \implies \varphi(-u) &= -\varphi(u) \quad \square \end{aligned}$$

**2.3 Докажете, че  $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}) \implies \varphi(\theta) = \theta$**

Доказателство 1:

$$\text{Нека } v \in \mathbb{V} \quad \theta = 0\varphi(v) = \varphi(0v) = \varphi(\theta) \quad \square$$

Доказателство 2:

$$\begin{aligned} \text{Нека } v \in \mathbb{V} \quad \varphi(\theta) &= \varphi(v - v) = \varphi(v + (-1)v) = \\ &= \varphi(v) + (-1)\varphi(v) = \varphi(v) - \varphi(v) = \theta \quad \square \end{aligned}$$

Доказателство 3:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \varphi(\theta + \theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta) \quad | \quad -\varphi(\theta) \implies \\ \varphi(\theta) - \varphi(\theta) &= \varphi(\theta) + \varphi(\theta) - \varphi(\theta) \implies \\ \theta &= \varphi(\theta) \quad \square \end{aligned}$$

**2.4 Докажете, че  $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V})$   
 $\forall v \in \mathbb{V} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$**

Доказателство:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}), \forall v \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{F} &\implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \\ \implies \lambda = -1 &\implies \varphi(-v) = \varphi(-1v) = -1\varphi(v) = -\varphi(v) \\ \implies \varphi(-v) &= -\varphi(v) \quad \square \end{aligned}$$

**2.5 Докажете, че едно линейно изображение изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори**

Доказателство:

$$\text{Нека } \mathbb{V}, \mathbb{W} - \text{Л.П. над полето } \mathbb{F}, \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$$

$$\text{Нека } n \in \mathbb{N} \text{ и нека } v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V} - (\text{линейно зависими})$$

$$\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}}$$

$$\text{Нека } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \implies v = \theta_{\mathbb{V}} \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \implies$$

Векторите  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  (образите на векторите  $v_1, \dots, v_n$ ) са линейно зависими  $\square$

## 2.6 Докажете, че един линеен оператор изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори)

Доказателство:

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V})$

Нека  $n \in \mathbb{N}$  и нека  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$  - (линейно зависими)

$$\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \theta$$

$$\text{Нека } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \implies v = \theta \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta) = \theta \implies$$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta \implies$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \implies$$

Векторите  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  (образите на векторите  $v_1, \dots, v_n$ ) са линейно зависими  $\square$

## 3 Действия с линейни изображения

### 3.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$$\varphi + \psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} : \forall v \in \mathbb{V} (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$$

### 3.2 Определение за произведение на линейно изображение със скалар

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\lambda\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} : \forall v \in \mathbb{V} (\lambda\varphi)(v) = \lambda.\varphi(v)$$

### 3.3 Определение за произведение на линейни изображения

$\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$

$$\psi\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U} : \forall v \in \mathbb{V} (\psi\varphi)(v) = (\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v))$$

### 3.4 Определението за матрица на линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ,  $n = \dim \mathbb{V}$ ,  $m = \dim \mathbb{W}$

$e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

$f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

$$i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} f_j, \quad \lambda_{ji} \in \mathbb{F}$$

$A = (\lambda_{ji})_{m \times n} = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$  - матрица на  $\varphi$  в базисите  $e, f$

Тоест стълбовете на матрицата  $A$  са образите на векторите  $e_1, \dots, e_n$

$$A = (\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n))$$

### 3.5 изобразяване на координатите на образа на вектор под действието на линейно изображение чрез координатите на вектора и матрицата на линейното изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ,  $n = \dim \mathbb{V}$ ,  $m = \dim \mathbb{W}$

$e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

$f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

$A = (\lambda_{ji})_{m \times n} = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$  - матрица на  $\varphi$  в базисите  $e, f$

$$\text{Нека } v \in \mathbb{V} \implies v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  - координатите на  $v$  спрямо базиса  $e$  на  $\mathbb{V}$

$$\varphi(v) \in \mathbb{W} \implies \exists(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{F}^m : \varphi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^m \mu_i f_i$$

$(\mu_1, \dots, \mu_m)$  - координатите на образа на  $v$  спрямо базиса  $f$  на  $\mathbb{W}$

$$\text{Тогава } (\mu_1, \dots, \mu_m)^t = A(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$$

## 4 Матрици на линейни изображения, получени след действия с ЛИ

### 4.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$$\varphi + \psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} : \forall v \in \mathbb{V} (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$$

### 4.2 Определение за матрица на линейно изображение, което е сумата на две линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ,  $n = \dim \mathbb{V}$ ,  $m = \dim \mathbb{W}$

Нека  $\tau = \varphi + \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

Нека  $A = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$  - матрицата на  $\varphi$  спрямо базисите  $e, f$

Нека  $B = M_{e \rightarrow f}(\psi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$  - матрицата на  $\psi$  спрямо базисите  $e, f$

Нека  $C = M_{e \rightarrow f}(\tau) = M_{e \rightarrow f}(\varphi + \psi) = M_{e \rightarrow f}(\varphi) + M_{e \rightarrow f}(\psi) = A + B \in \mathbb{F}_{m \times n}$

Тогава  $C$  е матрицата на  $\tau = \varphi + \psi$  спрямо базисите  $e, f$

### 4.3 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на линейно изображение със скалар

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ,  $n = \dim \mathbb{V}$ ,  $m = \dim \mathbb{W}$

Нека  $\tau = \lambda\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  – базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  – базис на  $\mathbb{W}$

Нека  $A = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$  – матрицата на  $\varphi$  спрямо базисите  $e, f$

Нека  $C = M_{e \rightarrow f}(\tau) = M_{e \rightarrow f}(\lambda\varphi) = \lambda.M_{e \rightarrow f}(\varphi) = \lambda.A \in \mathbb{F}_{m \times n}$

Тогава  $C$  е матрицата на  $\tau = \lambda.\varphi$  спрямо базисите  $e, f$

#### 4.4 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на две линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$  – К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{U}), n = \dim \mathbb{V}, m = \dim \mathbb{W}, k = \dim \mathbb{U}$

Нека  $\tau = \psi\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{U})$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  – базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  – базис на  $\mathbb{W}$

Нека  $g_1, \dots, g_k$  – базис на  $\mathbb{U}$

Нека  $A = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \in \mathbb{F}_{m \times n}$  – матрицата на  $\varphi$  спрямо базисите  $e, f$

Нека  $B = M_{f \rightarrow g}(\psi) \in \mathbb{F}_{k \times m}$  – матрицата на  $\psi$  спрямо базисите  $f, g$

Нека  $C = M_{e \rightarrow g}(\tau) = M_{e \rightarrow g}(\psi\varphi) = M_{e \rightarrow g}(\psi \circ \varphi) =$   
 $= M_{f \rightarrow g}(\psi).M_{e \rightarrow f}(\varphi) = B.A \in \mathbb{F}_{k \times n}$

Тогава  $C$  е матрицата на  $\tau = \psi\varphi$  спрямо базисите  $e, g$

#### 4.5 Размерност на Л.П. на всички лин. изображения между две крайно мерни Л.П

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  – К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}, n = \dim \mathbb{V}, m = \dim \mathbb{W}$

Тогава  $\dim \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = m.n$

## 5 Ядро и Образ на Линейно изображение

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

### 5.1 Определение за ядро на лин. изображение

$$\text{Ker}\varphi = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = \theta\}$$

### 5.2 Определение за образ за лин. изображение

$$\text{Im}\varphi = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{V}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists v \in \mathbb{V} : \varphi(v) = w\}$$

### 5.3 Определение за образ на подпространство

Нека  $\mathbb{Y} \leq \mathbb{V}$ , тогава образа на  $\mathbb{Y}$  под действието на  $\varphi$  се дефинира като:

$$\varphi(\mathbb{Y}) = \text{Im}\varphi|_{\mathbb{Y}} = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{Y}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists y \in \mathbb{Y} : \varphi(y) = w\}$$

### 5.4 Определение за ранг на лин. изображение

$$r(\varphi) = \dim \text{Im}\varphi$$

### 5.5 Определение за дефект на лин. изображение

$$d(\varphi) = \dim \text{Ker}\varphi$$

### 5.6 Теорема(За ранга и дефекта)

$\mathbb{U}, \mathbb{S}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$

$$\dim \mathbb{U} = p \implies r(\psi) + d(\psi) = p$$

### 5.7 Връзката между ранга на едно лин. изображение и ранга на една неговата матрица относно един всеки (в частност и един) базис е:

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - произволен базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  - произволен базис на  $\mathbb{W}$

$$\text{Ако } A = M_{e \rightarrow f}(\varphi) \implies r(\varphi) = r(A)$$



## 6 Обратимость на ЛИ и ЛО

### 6.1 Определение за обратимо линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$\varphi$  е обратимо Л.И, ако  $\exists \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{V}) : \varphi \cdot \psi = \text{id}_{\mathbb{W}}, \psi \cdot \varphi = \text{id}_{\mathbb{V}}$

### 6.2 Определение за обратното линейно изображение на дадено линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Ако  $\varphi$  е обратимо Л.И, то

$\exists! \varphi^{-1} \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{V}) : \varphi \cdot \varphi^{-1} = \text{id}_{\mathbb{W}}, \varphi^{-1} \cdot \varphi = \text{id}_{\mathbb{V}}$

$\varphi^{-1}$  е обратното Л.И. на  $\varphi$

### 6.3 Доказателство обратният на обратим линейен оператор също е обратим

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$

$\varphi$  - обратим Л.О.  $\implies \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = \text{id}_{\mathbb{V}}$

Ако  $\varphi^{-1}$  е обратим Л.О, то  $(\varphi^{-1})^{-1} \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot (\varphi^{-1})^{-1} = \text{id}_{\mathbb{V}}$

$\varphi = \varphi \cdot \text{id}_{\mathbb{V}} = \varphi(\varphi^{-1} \cdot (\varphi^{-1})^{-1}) = (\varphi \cdot \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})^{-1} = \text{id}_{\mathbb{V}} \cdot (\varphi^{-1})^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1}$

$\implies (\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$

### 6.4 Теорема

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$\varphi$  е инективно  $\iff \text{Ker} \varphi = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$

Доказателство (в двете посоки):

Доказателство ( $\implies$ )  $\{\theta_{\mathbb{V}}\} \subseteq \text{Ker} \varphi$  ( $\theta_{\mathbb{V}} \in \text{Ker} \varphi$ )

Нека  $v \in \text{Ker} \varphi \implies \varphi(v) = \theta_{\mathbb{W}} = \varphi(\theta_{\mathbb{V}})$

$\varphi$  - инективно  $\implies v = \theta_{\mathbb{V}} \implies \text{Ker} \varphi \subseteq \{\theta_{\mathbb{V}}\} \implies \text{Ker} \varphi = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$

Доказателство (  $\Leftarrow$  )

Нека  $u, v \in \mathbb{V} : \varphi(u) = \varphi(v) \implies$

$\theta_{\mathbb{V}} = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v) \implies$

$u - v = \theta_{\mathbb{V}}, \{ \theta_{\mathbb{V}} \} = \text{Ker} \varphi \implies$

$u = v \implies \varphi$  е инективно

## 6.5 Обратно линейно изображение изпраща линейно независими вектори в линейно независими вектори

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  - обратимо Л.И.

Нека  $k \in \mathbb{N} : k \leq n$  и нека  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{V}$  са лин. независими вектори

Допускаме, че техните образи са лин. зависими, тоест:

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F} : (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0) \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \mid \varphi^{-1} \implies \\ \varphi^{-1} \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(v_i) \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi^{-1}(\varphi(v_i)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \varphi^{-1}(\theta_{\mathbb{W}}) = \theta_{\mathbb{V}} \implies \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}} \implies v_1, \dots, v_k - \text{лин. зависими} \implies \nexists \\ \implies \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k) - \text{лин. независими} \end{aligned}$$

## 7 Смяна на базиса

### 7.1 Определението за матрица на прехода между два базиса

Нека  $\mathbb{V}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$   
 $e_1, \dots, e_n$  - един базис на  $\mathbb{V}$

$f_1, \dots, f_n$  - друг базис на  $\mathbb{V}$

$$i = 1, \dots, n \quad f_i = \sum_{j=1}^n \tau_{ji} e_j, \quad j, i = 1, \dots, n, \tau_{ji} \in \mathbb{F}$$

$T_{e \rightarrow f} = (\tau_{ji})_{n \times n} \in M_n$  е матрица на прехода между базисите  $e, f$  на  $\mathbb{V}$

## 7.2 Промяна на координатите на вектор при смяна на базиса

Нека  $\mathbb{V}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - един базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_n$  - друг базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i f_i \in \mathbb{V}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{F}$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t = T_{e \rightarrow f}(\mu_1, \dots, \mu_n)^t$ ,  $T_{e \rightarrow f}$  - матрицата на прехода между базисите  $e$  и  $f$ .

## 7.3 Промяна на матрицата на линейно изображение при смяна на базиса

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ ,  $\dim \mathbb{W} = m$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - един базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_n$  - друг базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $g_1, \dots, g_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

Нека  $A = M_{e \rightarrow g}(\varphi)$  - матрицата на оператора  $\varphi$  спрямо базисите  $e, g$

и нека  $B = T_{e \rightarrow f}$  - матрицата на прехода между базисите  $e$  и  $f$ .

Тогава  $C = AB$  е матрицата на оператора  $\varphi$  спрямо базисите  $f, g$ .

Тоест  $C = M_{e \rightarrow g}(\varphi)T_{e \rightarrow f}$

## 7.4 Промяна на матрицата на линейен оператор при смяна на базиса

Нека  $\mathbb{V}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ ,  $\varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - един базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_n$  - друг базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $A = M_e(\varphi)$  - матрицата на оператора  $\varphi$  в базиса  $e$

и нека  $B = T_{e \rightarrow f}$  - матрицата на прехода между базисите  $e$  и  $f$ .

Тогава  $C = B^{-1}AB$  е матрицата на оператора  $\varphi$  в базиса  $f$ .

Тоест  $C = T_{f \rightarrow e} M_e(\varphi) T_{e \rightarrow f}$

## 7.5 Първа теорема за ранг на матрици

Нека  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathbb{F}_{m \times n} \implies r(A) = r(A^t)$

# 8 Дуалност

## 8.1 Определение за дуалното пространство на дадено линейно пространство

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

Тогава  $\mathbb{V}^* = \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{F})$  е дуалното пространство на Л.П. на  $\mathbb{V}$

## 8.2 Определение за линеен функционал

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$f$  е линеен функционал на  $\mathbb{V} \iff f \in \mathbb{V}^*$

## 8.3 Определение за дуалното изображение на дадено линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$\mathbb{V}^*, \mathbb{W}^*$  - Дуалните пространства на Л.П.  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$

Ако  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \implies \varphi^* \in \text{Hom}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$

$\forall f \in \mathbb{W}^* \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi$

## 8.4 Определение за дуален базис

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ ,  $\mathbb{V}^*$  - дуалното пространство на  $\mathbb{V}$

$e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

$f^1, \dots, f^n$  - дуален базис на базиса  $e_1, \dots, e_n$

$$j, i = 1, \dots, n \quad f^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

### 8.5 Дуално изображение на произведението на две линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$

$$\psi\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{U}) \implies (\psi\varphi)^* \in \text{Hom}(\mathbb{U}^*, \mathbb{V}^*)$$

$$\forall f \in \mathbb{U}^* (\psi\varphi)^*(f) = f \circ (\psi\varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi =$$

$$= \varphi^*(f \circ \psi) = \varphi^*(\psi^*(f)) = (\varphi^*\psi^*)(f)$$

$$\implies (\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$$

### 8.6 Връзката между матриците на едно линейно изображение и неговото дуално изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$$\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \varphi^* \in \text{Hom}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $e'_1, \dots, e'_n$  - дуален базис на базиса  $e_1, \dots, e_n$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

Нека  $f'_1, \dots, f'_m$  - дуален базис на базиса  $f_1, \dots, f_m$

$$\text{Тогава } M_{f' \rightarrow e'}(\varphi^*) = (M_{e \rightarrow f}(\varphi))^t$$

### 8.7 Определение за аниhilатор $\mathbb{U}^0$ на едно линейно подпространство $\mathbb{U}$ на едно линейно пространство $\mathbb{V}$

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$$\mathbb{U} < \mathbb{V} \implies \mathbb{U}^0 = \{f \in \mathbb{V}^* \mid \forall u \in \mathbb{U} f(u) = 0\}$$