

# Теоритично контролно №1 1, I, Информатика

Иво Стратев

13 ноември 2019 г.

## 1 Комплексни числа ( $\mathbb{C}$ )

$$z = -5 - 4i$$

### 1.1 $Re\ z$

$$Re\ z = -5$$

### 1.2 $Im\ z$

$$Im\ z = -4$$

### 1.3 $|z|$

$$|z| = \sqrt{(Re\ z)^2 + (Im\ z)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

### 1.4 $\operatorname{tg} Arg\ z$

$$\operatorname{tg} Arg\ z = \frac{Im\ z}{Re\ z} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

### 1.5 $\sin Arg\ z$

$$\sin Arg\ z = \frac{Im\ z}{|z|} = \frac{-4}{\sqrt{41}} \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{-4\sqrt{41}}{41}$$

### 1.6 $\cos Arg\ z$

$$\cos Arg\ z = \frac{Re\ z}{|z|} = \frac{-5}{\sqrt{41}} \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{-5\sqrt{41}}{41}$$

$$2 \quad z = \frac{5-3i}{4+i} \quad Re\ z + Im\ z$$

$$z = \frac{5-3i}{4+i}$$

$$z = \frac{5-3i}{4+i} \frac{4-i}{4-i}$$

$$z = \frac{(5-3i)(4-i)}{4^2+1^2}$$

$$z = \frac{20-5i-12i-3}{17}$$

$$z = \frac{17-17i}{17}$$

$$z = 1 - i$$

$$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

## 3 Формули на Моавър

### 3.1 $z^n$

$$z^n = |z|^n (\cos (n \operatorname{Arg} z) + i \sin (n \operatorname{Arg} z))$$

### 3.2 $\sqrt[n]{z}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

## 4 Системи линейни уравнения

### 4.1 съвместима

Една система от линейни уравнения се нарича съвместима, когато има поне едно решение.

### 4.2 несъвместима

Една система от линейни уравнения се нарича несъвместима, когато няма решение.

### 4.3 определена

Една система от линейни уравнения се нарича определена, когато е съвместима и има точно едно решение.

### 4.4 неопределена

Една система от линейни уравнения се нарича неопределена, когато е съвместима и има повече от едно решение.

## 5 Релации и изображения

### 5.1 Релации

$$R \subseteq A \times A;$$

#### 5.1.1 симетрична релация

$$(\forall x \in A) (\forall y \in A) [ (x, y) \in R \implies (y, x) \in R ]$$

### 5.1.2 транзитивна релация

$$(\forall x \in A) (\forall y \in A) (\forall z \in A) [ (x, y), (y, z) \in R \implies (x, z) \in R ]$$

### 5.1.3 рефлексивна релация

$$(\forall x \in A) [ (x, x) \in R ]$$

## 5.2 Изображения

$$f : X \rightarrow Y$$

### 5.2.1 инективно изображение

$$(\forall x_1 \in X) (\forall x_2 \in X) [ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) ]$$

### 5.2.2 сюрективно изображение

$$(\forall y \in Y) (\exists x \in X) [ y = f(x) ]$$

### 5.2.3 биекция

Биекция наричаме изображение, което е едновременно инекция и сюрекция. Тоест

$$f : X \rightarrow Y$$

$$(\forall x_1 \in X) (\forall x_2 \in X) [ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) ]$$

$$(\forall y \in Y) (\exists x \in X) [ y = f(x) ]$$

## 6 Бинарни операции

$$* : M \times M \rightarrow M$$

### 6.1 асоциативност

$$(\forall a \in M) (\forall b \in M) (\forall c \in M) [ (a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c ]$$

### 6.2 комутативност

$$(\forall a \in M) (\forall b \in M) [ a * b = b * a ]$$

### 6.3 неутрален елемент

$$(\exists \theta \in M) (\forall x \in M) [ x * \theta = \theta * x = x ]$$

## 7 Матрици

### 7.1 $A^t$

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F) \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

$$B = (b_{ij})_{n \times m} = A^t \in M_{n \times m}(F) : b_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m);$$

### 7.2 $A + B$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$$

$$A + B = C = (c_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

### 7.3 $\lambda A$

$$\lambda \in F, A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$$

$$\lambda A = C = (c_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$$

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

## 8 Вектори в линейно пространство

Нека  $(F, +, \cdot)$  е числово поле. Нека  $(V, +, \cdot)$  е линейно пространство над  $(F, +, \cdot)$ .

### 8.1 нулевият вектор е единствен

Нека  $\theta'$  и  $\theta''$  са нулеви вектори от  $V$ . Тогава:

$$\theta' + \theta'' = \theta'' \quad (\text{защото } \theta' \text{ е нулев вектор})$$

$$\theta' + \theta'' = \theta' \quad (\text{защото } \theta'' \text{ е нулев вектор})$$

$$\implies \theta' = \theta''$$

### 8.2 противоположният вектор е единствен

Нека  $a$  е вектор от  $V$  и нека  $a'$  и  $a''$  са негови противоположни вектори от  $V$ . Тогава:

$$a' + a + a'' = (a' + a) + a'' = \theta + a'' = a'' \quad (\text{защото } a' \text{ е противоположен вектор на } a)$$

$$a' + a + a'' = a' + (a + a'') = a' + \theta = a' \quad (\text{защото } a'' \text{ е противоположен вектор на } a)$$

$$\implies a' = a''$$

### 8.3 $0a = \theta$

Нека  $a \in V$ . Тогава

$$a + -a = \theta \implies$$

$$1.a + -a = \theta \implies$$

$$(1 + 0).a + -a = \theta \implies$$

$$1.a + 0.a + -a = \theta \implies$$

$$a + 0.a + -a = \theta \implies$$

$$\theta + 0.a = \theta \implies$$

$$0.a = \theta$$

### 8.4 $\lambda\theta = \theta$

$$a \in V$$

$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = a$$

$$a + 0a = a + (-a)$$

$$\theta + 0a = \theta$$

$$0a = \theta$$

Сега в равенството:  $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$  избираме  $\mu = 0$

и получаваме:  $\lambda\theta = 0a = \theta$

### 8.5 $-1a = -a$

$$a + (-1)a = 1.a + (-1)a = (1 + -1)a = 0a = \theta \implies -a = (-1)a$$

## 9 Линейно пространство, линейна комбинация и линейна зависимост/независимост

Нека  $(F, +, \cdot)$  е числово поле. Нека  $(V, +, \cdot)$  е линейно пространство над  $(F, +, \cdot)$ .

### 9.1 линейна комбинация

Нека  $n \in \mathbb{N}$ .

Нека  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ .

Нека  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ .

Тогава  $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in V$  е линейна комбинация на  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$  с коефициенти  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

## 9.2 линейно подпространство

Нека  $\emptyset \neq W \subseteq V$ .

$W$  е подпространство на  $V$ , ако  $(\forall w_1 \in W) (\forall w_2 \in W) [w_1 + w_2 \in W]$

$(\forall \lambda \in F) (\forall w \in W) [\lambda \cdot w \in W]$

## 9.3 линейна обвивка

Нека  $\emptyset \neq A \subseteq V$

Тогава  $l(A) = \bigcap_{A \subseteq W \subseteq V} W$  е линейната обвивка на множеството  $A$ .

## 9.4 линейна зависимост

Нека  $n \in \mathbb{N}$ .

Нека  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ . Векторите  $a_1, a_2, \dots, a_n$  са линейно зависими, ако

$$(\exists \lambda_1 \in F) (\exists \lambda_2 \in F) \dots (\exists \lambda_n \in F) \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \theta \wedge (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \right].$$

## 9.5 линейна независимост

Нека  $n \in \mathbb{N}$ .

Нека  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ . Векторите  $a_1, a_2, \dots, a_n$  са линейно независими, ако

$$(\forall \lambda_1 \in F) (\forall \lambda_2 \in F) \dots (\forall \lambda_n \in F) \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \theta \implies (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0) \right].$$

# 10 Линейна зависимост/независимост

## 10.1 Ако един вектор е линейно независим, то той е ненулев вектор

Логически еквивалентно твърдение на "ако един вектор е линейно независим, то той е ненулев вектор" е "ако един вектор е линейно зависим, то той е нулев вектор"

За това ще докажем него, от което ще следва и исканото твърдение.

Нека  $\lambda \in F$ ,  $a \in V$  и  $\lambda a = \theta$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Тогава  $\lambda a = \theta \mid \lambda^{-1}$

$$1.a = \theta$$

$$a = \theta$$

$\implies$  ако един вектор е линейно независим, то той е ненулев вектор

## 10.2 Ако един вектор е линейно зависим то, той е нулевият вектор

Нека  $\lambda \in F$ ,  $a \in V$  и  $\lambda a = \theta$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Тогава  $\lambda a = \theta \mid \lambda^{-1}$

$$1.a = \theta$$

$$a = \theta.$$

## 10.3 Всяка подсистема на линейно независима система от вектори е също линейно независима

Нека  $n, k \in \mathbb{N}$ , са такива, че  $k \leq n$ .

Нека  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  е линейно независима система от вектори.

Нека БОО  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  допускаме, че  $B$  е линейно зависима

$$\implies (\exists \lambda_1 \in F) (\exists \lambda_2 \in F) \dots (\exists \lambda_k \in F) [(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0) \wedge \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \theta].$$

Нека тогава  $\lambda_1 \in F, \dots, \lambda_k \in F$  и  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0) \wedge \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \theta$ . Тога-

ва  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) \neq (0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$  и  $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i + \sum_{j=k+1}^n 0 a_j = \theta$ . Следователно

$a_1, a_2, \dots, a_n$  са линейно зависими и значи  $A$  е линейно зависима система от вектори. Но това е Абсурд, понеже  $A$  е линейно независима. Следователно  $B$  е линейно зависима.

#### 10.4 Ако една система от вектори съдържа линейно зависима подсистема, то тази система също е линейно зависима

Нека  $n, k \in \mathbb{N}$ , са такива, че  $k \leq n$ .

Нека  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  са система от вектори

Нека БОО  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  е линейно зависима подсистема от вектори

От  $B$  линейно зависима подсистема от вектори, следва

$$(\exists \lambda_1 \in F) (\exists \lambda_2 \in F) \dots (\exists \lambda_k \in F) [(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0) \wedge \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \theta]$$

Нека тогава  $\lambda_1 \in F, \dots, \lambda_k \in F$  и  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0) \wedge \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \theta$ . Тогава

$(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) \neq (0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$  и  $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i + \sum_{j=k+1}^n 0 a_j = \theta$ . Следователно

$a_1, a_2, \dots, a_n$  са линейно зависими и значи  $A$  е линейно зависима система от вектори.

#### 10.5 Ако една система от вектори съдържа два пропорционални вектора, то тя е линейно зависима

Нека  $n \in \mathbb{N}$  и  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  - система от вектори.

Нека БОО  $a_2 = \lambda a_1 \implies \lambda a_1 - a_2 = \theta$

$$\implies \lambda a_1 + (-1)a_2 + \sum_{i=3}^n 0 a_i = \theta$$

$\implies A$  е линейно зависима система от вектори

#### 10.6 Ако в една система от поне два вектора един от векторите е линейна комбинация на останалите, то системата е линейно зависима

Нека  $n \in \mathbb{N}^+$ ,

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  - система от вектори.

$$\text{Нека БОО } a_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i$$

$$\implies -a_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i = \theta$$



$$\implies (-1)a_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i = \theta$$

$\implies A$  е линейно зависима система от вектори

## 10.7 В една линейно зависима система от поне два вектора поне един вектор е линейна комбинация на останалите

Нека  $n \in \mathbb{N}^+$ ,

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  - линейно зависима система от поне два вектора. Тогава

$$(\exists \lambda_1 \in F) (\exists \lambda_2 \in F) \dots (\exists \lambda_n \in F) [(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \wedge \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \theta]$$

Нека тогава  $\lambda_1 \in F, \dots, \lambda_n \in F$  и  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \wedge \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \theta$ .

Нека БОО  $\lambda_1 \neq 0$ . Тогава

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \theta | \lambda_1^{-1} &\implies a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} a_i = \theta \\ \implies a_1 &= \sum_{i=2}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} a_i \end{aligned}$$

## 11 Базис и размерност

Нека  $(V, +, \cdot)$  е линейно пространство над числовото поле  $(F, +, \cdot)$ .

### 11.1 Основна лема на алгебрата

Нека  $n, k \in \mathbb{N}$ .

Нека  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ .

Нека  $b_1, b_2, \dots, b_k \in l(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Ако  $k > n$ , то  $b_1, b_2, \dots, b_k$  са линейно зависими вектори.

### 11.2 Базис

Нека  $n \in \mathbb{N}$ .

Нека  $b_1, b_2, \dots, b_n \in V$ .  $b_1, b_2, \dots, b_n$  са базис на  $V$ , ако  $b_1, b_2, \dots, b_n$  са линейно независими и  $V = l(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

### 11.3 Крайномерно линейно пространство

Нека  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Нека  $b_1, b_2, \dots, b_n \in V$ .  $b_1, b_2, \dots, b_n$  са базис на  $V$ , ако  $b_1, b_2, \dots, b_n$  са линейно независими и  $V = l(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

## 11.4 Крайнопородено линейно пространство

$V$  е крайнопородено линейно пространство, ако  
 $(\exists n \in \mathbb{N}^+) (\exists b_1 \in V) \dots (\exists b_n \in V) [ V = l(b_1, b_2, \dots, b_n) ]$ .

## 11.5 Размерност на линейно пространство

Нека  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Нека  $b_1, b_2, \dots, b_n \in V$  - са базис на  $V$ . Тогава размерността на  $V$  е  $n$ , бележим с  $\dim V$ .

С други думи казано размерността дефинираме като броя на векторите в който да е базис на  $V$

Ако едно крайномерно линейно пространство и едно негово линейно подпространство имат една и съща размерност, то те съвпадат!

## 11.6 Координати на вектор в даден базис

Нека  $n = \dim V$ . Нека  $b_1, b_2, \dots, b_n \in V$  - са базис на  $V$ .

Нека  $v \in V$ . Нека още  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$  са такива, че  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ . Тогава  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  са координатите на  $v$  в базиса  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

## 12 Сума на подпространства, директна сума на подпространства и ранг на система вектори

### 12.1 Сума на подпространства и директна сума на подпространства

Нека  $(V, +, \cdot)$  е линейно пространство над числовото поле  $(F, +, \cdot)$ .

Нека  $V_1, V_2$  са линейни подпространства на  $V$ .

Тогава  $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ .

#### 12.1.1 Връзка между размерностите на сумата и сечението на две крайномерни линейни подпространства на дадено линейно пространство

$$\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2).$$

#### 12.1.2 НДУ едно линейно пространство да е директна сума на две свои подпространства

$$V = V_1 \oplus V_2 \iff V = V_1 + V_2, V_1 \cap V_2 = \{\theta\}.$$

## 12.2 Ранг на система вектори

### 12.2.1 Максимална линейно независима подсистема вектори на дадена система вектори

Нека  $(V, +, \cdot)$  е линейно пространство над числовото поле  $(F, +, \cdot)$ .

Нека  $\emptyset \neq T \subseteq V$ . Нека  $\emptyset \neq S \subseteq T$ .  $S$  е максимална линейно независима подсистема вектори на дадена система вектори, ако

$(\forall v \in T \setminus S) [S \cup \{v\} \text{ - е лин. зависима система }]$

### 12.2.2 Ранг на система вектори

Нека  $(V, +, \cdot)$  е линейно пространство над числовото поле  $(F, +, \cdot)$ .

Нека  $\emptyset \neq T \subseteq V$ . Ранга на  $T$  бележим с  $r(T)$  и  $r(T) = \dim(l(T))$ .