

Теоремки, преди теоремите за средни СТОЙНОСТИ

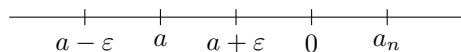
Иво Стратев

12 ноември 2017 г.

$$1 \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \forall n \in \mathbb{N} \ a_n > 0 \implies a \geq 0$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \nu; \forall n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

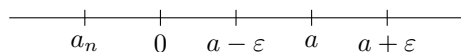
$$\text{Допс. } a < 0 \implies (a_n - a) > 0 \implies |a_n - a| > \varepsilon \implies \nexists (\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a)$$



$$2 \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \forall n \in \mathbb{N} \ a_n < 0 \implies a \leq 0$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \nu; \forall n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\text{Допс. } a > 0 \implies (a_n - a) < 0 \implies |a_n - a| > \varepsilon \implies \nexists (\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a)$$



3 Th(За непрекъснатите ф-ци)

Ако $f(x)$ е непрекъсната в околност на x_0 , $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$) и $f(x)$ е непрекъсната в x_0

$$\exists \delta > 0; f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \ (f(x) < \frac{f(x_0)}{2}) \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Д-во: $f(x)$ е непрекъсната в околност на x_0

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} = y_0, \forall y_0 \exists \delta_{y_0} > 0; |x - x_0| < \delta_{y_0}$$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| < y_0 \iff f(x_0) - y_0 < f(x) < f(x_0) + y_0$$

$$\implies \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \implies f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

4 Th(Вайерщрас)

Нека $f(x) \in C[a, b]$ то тя е ограничена и има НГС и НМС.

Д-во: $f(x)$ - ограничена $\iff \exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq M$
 Доп., че $f(x)$ е неограничена $\implies \forall M \in \mathbb{R} \exists x_M \in [a, b]; f(x_M) > M$
 $\implies \forall n \in \mathbb{N}; \exists x_n \in [a, b]; f(x_n) \geq n$
 От Th(Болцано-Вайерщрас за редици)
 $\implies \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - сходяща подредица на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
 и $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in [a, b]$.
 От $f(x) \in C[a, b] \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$
 $f(x_0) \geq n \implies f(x_{n_k}) \geq n_k > k / \lim_{k \rightarrow \infty}$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty \implies \nexists (\{f(x_{n_k})\})$ е ограничена

$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ Доп., че $\forall x \in [a, b] \quad f(x) < M$
 $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$
 От аритметични действия с неп. функции $\implies g(x)$ е непрекъснатата
 $\implies \exists C > 0; \forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq C$
 $\implies \frac{1}{M-f(x)} \leq C / \frac{M-f(x)}{C}$
 $\frac{1}{C} \leq M - f(x)$
 $f(x) \leq M - \frac{1}{C} \quad \forall x \in [a, b] \implies \nexists (M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\})$
 $\implies \exists x_{max}; f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b], f(x_{max}) = M$

$m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ Доп., че $\forall x \in [a, b] \quad f(x) > m$
 $h(x) = \frac{1}{f(x)-m}$
 От аритметични действия с неп. функции $\implies h(x)$ е непрекъснатата
 $\implies \frac{1}{f(x)-m} \leq C / \frac{f(x)-m}{C}$
 $\frac{1}{C} \leq f(x) - m$
 $\frac{1}{C} + m \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies \nexists (m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\})$
 $\implies \exists x_{min}; f(x) \geq m \quad \forall x \in [a, b], f(x_{min}) = m$

5 Th(Болцано)

Нека $f(x) \in C[a, b], f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b); f(c) = 0$

Д-во: БОО $f(a) > 0, f(b) < 0$

$A = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\} \subset [a, b] \implies A$ е ограничено
 $c = \limsup A$

5.1 $f(c) > 0$

$f(c) > 0 \implies \exists \delta > 0; \forall x \in (c - \delta, c + \delta) f(x) > \frac{f(c)}{2} > 0$
 $\forall x > c; f(x) \leq 0 \implies \nexists (f(c) > 0)$

5.2 $f(c) < 0$

$$\begin{aligned} f(c) < 0 &\implies \exists \varepsilon > 0; \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \ f(x) < \frac{f(c)}{2} < 0 \\ \forall x > c; f(x) \geq 0 &\implies \nexists (f(c) < 0) \end{aligned}$$

$$\text{От 3.1 и 3.2} \implies \exists c \in (a, b); f(c) = 0$$

6 Тh Болцано-Вайерщрас (за междинните стойности)

Нека $f(x) \in C[a, b]$, $m = \min f(x)$ и $n = \max f(x)$

$$\implies \forall c \in [m, n] \exists x_c \in [a, b]; f(x_c) = c$$

Д-во: $h(x) = f(x) - c$

$$\text{Ако } c = m \text{ или } c = n \implies \exists x_c \in [a, b]; f(x_c) = c$$

$$\text{Ако } c \in (m, n) \quad d = \min\{x_{\min}, x_{\max}\} \quad e = \max\{x_{\min}, x_{\max}\}$$

$$h(x) : [d, e], \quad h(d)h(e) < 0$$

$$\text{От Тh(Болцано) за } h \text{ в } [d, e] \implies \exists x_c; h(x_c) = f(x_c) - c = 0$$

$$\implies \exists x_c \in [a, b]; f(x_c) = c$$