

# Теоритично контролно №2 1, I, Информатика

Иво Стратев

14 декември 2018 г.

## 1 Линейно изображение и линейен оператор

### 1.1 Определение линейен оператор (Учебник)

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) \implies \varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$$

#### 1.1.1 Алтернативно (Лекции)

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$

$\forall a, b \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{F} \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \wedge \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$

$\implies \varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$

### 1.2 Определение линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) \implies \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$$

#### 1.2.1 Алтернативно (Лекции)

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$

$\forall a, b \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{F} \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \wedge \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$

$\implies \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

### 1.3 Теорема $\exists!$ $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$

$e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

$w_1, \dots, w_n$  - произволни вектори от  $\mathbb{W}$

$\implies \exists! \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) : i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = w_i$

### 1.4 Определение за изоморфизъм на линейни пространства

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$  и  $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  е изображение.

$\varphi$  е изоморфизъм между  $\mathbb{V}$  и  $\mathbb{W}$  ( $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$ ), ако:

1)  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  ( $\varphi$  е лин. изображение)

2)  $\varphi$  е биекция

### 1.5 Н.Д.У две крайно мерни Л.П. да са изоморфни

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \iff \dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W} \in \mathbb{N}$

## 2 Доказателства за линейни изображения

### 2.1 Докажете, че $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \implies \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \theta_{\mathbb{V}}$

Доказателство 1:

Нека  $u \in \mathbb{U} \quad \theta_{\mathbb{V}} = 0\varphi(u) = \varphi(0u) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \quad \square$

Доказателство 2:

Нека  $u \in \mathbb{U} \quad \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(u - u) = \varphi(u + (-1)u) =$   
 $= \varphi(u) + (-1)\varphi(u) = \varphi(u) - \varphi(u) = \theta_{\mathbb{V}} \quad \square$

Доказателство 3:

$\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}} + \theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \mid -\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies$

$\varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) = \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) + \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) - \varphi(\theta_{\mathbb{U}}) \implies$

$$\theta_V = \varphi(\theta_U) \quad \square$$

**2.2 Докажете, че  $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$   
 $\forall u \in \mathbb{U} \implies \varphi(-u) = -\varphi(u)$**

Доказателство:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{V}), \forall u \in \mathbb{U}, \forall \lambda \in \mathbb{F} &\implies \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) \\ \implies \lambda = -1 &\implies \varphi(-u) = \varphi(-1u) = -1\varphi(u) = -\varphi(u) \\ \implies \varphi(-u) &= -\varphi(u) \quad \square \end{aligned}$$

**2.3 Докажете, че  $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}) \implies \varphi(\theta) = \theta$**

Доказателство 1:

$$\text{Нека } v \in \mathbb{V} \quad \theta = 0\varphi(v) = \varphi(0v) = \varphi(\theta) \quad \square$$

Доказателство 2:

$$\begin{aligned} \text{Нека } v \in \mathbb{V} \quad \varphi(\theta) &= \varphi(v - v) = \varphi(v + (-1)v) = \\ &= \varphi(v) + (-1)\varphi(v) = \varphi(v) - \varphi(v) = \theta \quad \square \end{aligned}$$

Доказателство 3:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \varphi(\theta + \theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta) \quad | \quad -\varphi(\theta) \implies \\ \varphi(\theta) - \varphi(\theta) &= \varphi(\theta) + \varphi(\theta) - \varphi(\theta) \implies \\ \theta &= \varphi(\theta) \quad \square \end{aligned}$$

**2.4 Докажете, че  $\forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V})$   
 $\forall v \in \mathbb{V} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$**

Доказателство:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}), \forall v \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{F} &\implies \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \\ \implies \lambda = -1 &\implies \varphi(-v) = \varphi(-1v) = -1\varphi(v) = -\varphi(v) \\ \implies \varphi(-v) &= -\varphi(v) \quad \square \end{aligned}$$

## 2.5 Докажете, че едно линейно изображение изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори

Доказателство:

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека  $n \in \mathbb{N}$  и нека  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$  - (линейно зависими)

$$\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}}$$

$$\text{Нека } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \implies v = \theta_{\mathbb{V}} \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta_{\mathbb{V}}) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \implies$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \implies$$

Векторите  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  (образите на векторите  $v_1, \dots, v_n$ ) са линейно зависими  $\square$

## 2.6 Докажете, че един линейен оператор изпраща линейно зависими вектори в линейно зависими вектори

Доказателство:

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V})$

Нека  $n \in \mathbb{N}$  и нека  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$  - (линейно зависими)

$$\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \theta$$

$$\text{Нека } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \implies v = \theta \mid \varphi \implies \varphi(v) = \varphi(\theta) = \theta \implies$$

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta \implies$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i) = \theta, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \implies$$

Векторите  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$  (образите на векторите  $v_1, \dots, v_n$ ) са линейно

зависими  $\square$

### 3 Действия с линейни изображения

#### 3.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$$\varphi + \psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} : \forall v \in \mathbb{V} (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$$

#### 3.2 Определение за произведение на линейно изображение със скалар

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\lambda\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} : \forall v \in \mathbb{V} (\lambda\varphi)(v) = \lambda \cdot \varphi(v)$$

#### 3.3 Определение за произведение на линейни изображения

$\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ,  $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$

$$\psi\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U} : \forall v \in \mathbb{V} (\psi\varphi)(v) = (\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v))$$

#### 3.4 Определението за матрица на линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ,  $n = \dim \mathbb{V}$ ,  $m = \dim \mathbb{W}$

$e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

$f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

$$i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} f_j, \quad \lambda_{ji} \in \mathbb{F}$$

$$M_e^f(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица на } \varphi \text{ в базисите } e, f$$

Забележка: Тоест стълбовете на матрицата са координатите на образите на векторите  $e_1, \dots, e_n$

$$M_e^f(\varphi) = (\sigma(\varphi(e_1)) \dots \sigma(\varphi(e_n)))$$

### 3.5 изобразяване на координатите на образа на вектор под действието на линейно изображение чрез координатите на вектора и матрицата на линейното изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$$n = \dim \mathbb{V}, m = \dim \mathbb{W}$$

$e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

$f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

$$\text{Нека } v \in \mathbb{V} \implies v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  - координатите на  $v$  спрямо базиса  $e$  на  $\mathbb{V}$

$$\varphi(v) \in \mathbb{W} \implies \exists (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{F}^m : \varphi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^m \mu_i f_i$$

$(\mu_1, \dots, \mu_m)$  - координатите на образа на  $v$  спрямо базиса  $f$  на  $\mathbb{W}$

$$\text{Тогава } (\mu_1, \dots, \mu_m)^t = M_e^f(\varphi)(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$$

## 4 Матрици на линейни изображения, получени след действия с ЛИ

### 4.1 Определение за сума на линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$$\varphi + \psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} : \forall v \in \mathbb{V} (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$$

### 4.2 Определение за матрица на линейно изображение, което е сумата на две линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,

$$\varphi, \psi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), n = \dim \mathbb{V}, m = \dim \mathbb{W}$$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

$$\text{Тогава } M_e^f(\varphi + \psi) = M_e^f(\varphi) + M_e^f(\psi)$$

### 4.3 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на линейно изображение със скалар

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,

$\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \lambda \in \mathbb{F}, n = \dim \mathbb{V}, m = \dim \mathbb{W}$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

Тогава  $M_e^f(\lambda\varphi) = \lambda M_e^f(\varphi)$

### 4.4 Определение за матрица на линейно изображение, което е произведение на две линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,

$\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{U}), n = \dim \mathbb{V}, m = \dim \mathbb{W}, s = \dim \mathbb{U}$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

Нека  $g_1, \dots, g_s$  - базис на  $\mathbb{U}$

Тогава  $M_e^g(\psi\varphi) = M_f^g(\psi)M_e^f(\varphi)$

### 4.5 Размерност на Л.П. на всички лин. изображения между две крайно мерни Л.П

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

Тогава  $\dim \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = \dim \mathbb{W} \cdot \dim \mathbb{V}$

## 5 Ядро и Образ на Линейно изображение

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}, \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

### 5.1 Определение за ядро на лин. изображение

$\text{Ker} \varphi = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = \theta\}$

## 5.2 Определение за образ за лин. изображение

$$\text{Im}\varphi = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{V}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists v \in \mathbb{V} : \varphi(v) = w\}$$

## 5.3 Определение за образ на подпространство

Нека  $\mathbb{Y} \leq \mathbb{V}$ , тогава образа на  $\mathbb{Y}$  под действието на  $\varphi$  се дефинира като:

$$\varphi(\mathbb{Y}) = \text{Im}\varphi|_{\mathbb{Y}} = \{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{Y}\} = \{w \in \mathbb{W} \mid \exists y \in \mathbb{Y} : \varphi(y) = w\}$$

## 5.4 Определение за ранг на лин. изображение

$$r(\varphi) = \dim \text{Im}\varphi$$

## 5.5 Определение за дефект на лин. изображение

$$d(\varphi) = \dim \text{Ker}\varphi$$

## 5.6 Теорема(За ранга и дефекта)

$\mathbb{U}, \mathbb{S}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\psi \in \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{S})$

$$r(\psi) + d(\psi) = \dim \mathbb{U}$$

## 5.7 Връзката между ранга на едно лин. изображение и ранга на една неговата матрица относно един всеки (в частност и един) базис е:

Нека  $e_1, \dots, e_n$  — произволен базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  — произволен базис на  $\mathbb{W}$

$$r(\varphi) = r(M_e^f(\varphi))$$

# 6 Обратомост на ЛИ и ЛО

## 6.1 Определение за обратимо линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$\varphi$  е обратимо Л.И, ако  $\exists \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{V}) : \varphi.\psi = \text{id}_{\mathbb{W}}, \psi.\varphi = \text{id}_{\mathbb{V}}$



## 6.2 Определение за обратното линейно изображение на дадено линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Ако  $\varphi$  е обратимо Л.И, то

$$\exists! \varphi^{-1} \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{V}) : \varphi \cdot \varphi^{-1} = \text{id}_{\mathbb{W}}, \varphi^{-1} \cdot \varphi = \text{id}_{\mathbb{V}}$$

$\varphi^{-1}$  е обратното Л.И. на  $\varphi$

## 6.3 Доказателство обратният на обратим линеен оператор също е обратим

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$

$$\varphi \text{ - обратим Л.О.} \implies \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = \text{id}_{\mathbb{V}}$$

$$\text{Ако } \varphi^{-1} \text{ е обратим Л.О, то } (\varphi^{-1})^{-1} \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot (\varphi^{-1})^{-1} = \text{id}_{\mathbb{V}}$$

$$\varphi = \varphi \cdot \text{id}_{\mathbb{V}} = \varphi(\varphi^{-1} \cdot (\varphi^{-1})^{-1}) = (\varphi \cdot \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})^{-1} = \text{id}_{\mathbb{V}} \cdot (\varphi^{-1})^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1}$$

$$\implies (\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$$

## 6.4 Теорема

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

$$\varphi \text{ е инективно} \iff \text{Ker} \varphi = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$$

Доказателство (в двете посоки):

$$\text{Доказателство } (\implies) \quad \{\theta_{\mathbb{V}}\} \subseteq \text{Ker} \varphi \quad (\theta_{\mathbb{V}} \in \text{Ker} \varphi)$$

$$\text{Нека } v \in \text{Ker} \varphi \implies \varphi(v) = \theta_{\mathbb{W}} = \varphi(\theta_{\mathbb{V}})$$

$$\varphi \text{ - инективно} \implies v = \theta_{\mathbb{V}} \implies \text{Ker} \varphi \subseteq \{\theta_{\mathbb{V}}\} \implies \text{Ker} \varphi = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$$

Доказателство ( $\Leftarrow$ )

$$\text{Нека } u, v \in \mathbb{V} : \varphi(u) = \varphi(v) \implies$$

$$\theta_{\mathbb{W}} = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v) \implies$$

$$u - v = \theta_{\mathbb{V}}, \quad \{\theta_{\mathbb{V}}\} = \text{Ker} \varphi \implies$$

$u = v \implies \varphi$  е инективно

## 6.5 Обратно линейно изображение изпраща линейно независими вектори в линейно независими вектори

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$  - обратимо Л.И.

Нека  $k \in \mathbb{N} : k \leq n$  и нека  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{V}$  са лин. независими вектори

Допускаме, че техните образи са лин. зависими, тоест:

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F} : (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0) \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(v_i) = \theta_{\mathbb{W}} \mid \varphi^{-1} &\implies \\ \varphi^{-1} \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(v_i) \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi^{-1}(\varphi(v_i)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \varphi^{-1}(\theta_{\mathbb{W}}) = \theta_{\mathbb{V}} &\implies \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \theta_{\mathbb{V}} \implies v_1, \dots, v_k - \text{лин. зависими} &\implies \nexists \\ \implies \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k) - \text{лин. независими} \end{aligned}$$

## 7 Смяна на базиса

### 7.1 Определението за матрица на прехода между два базиса

Нека  $\mathbb{V}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$

$e_1, \dots, e_n$  - един базис на  $\mathbb{V}$

$f_1, \dots, f_n$  - друг базис на  $\mathbb{V}$

$$i = 1, \dots, n \quad f_i = \sum_{j=1}^n \tau_{ji} e_j, \quad j, i = 1, \dots, n, \tau_{ji} \in \mathbb{F}$$

$$T_{e \rightarrow f} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{m1} & \tau_{m2} & \dots & \tau_{mn} \end{pmatrix}$$

### 7.2 Промяна на координатите на вектор при смяна на базиса

Нека  $\mathbb{V}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - един базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $f_1, \dots, f_n$  - друг базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i f_i \in \mathbb{V}$ ,  $i = 1, \dots, n$   $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{F}$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t = T_{e \rightarrow f}(\mu_1, \dots, \mu_n)^t$ ,  $T_{e \rightarrow f}$  - матрицата на прехода между базисите  $e$  и  $f$ .

### 7.3 Промяна на матрицата на линейно изображение при смяна на базиса

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ ,  $\dim \mathbb{W} = m$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$

Нека  $s_1, \dots, s_n$  е един базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $s'_1, \dots, s'_n$  е друг базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $u_1, \dots, u_m$  е базис на  $\mathbb{W}$

Нека  $u'_1, \dots, u'_m$  е друг базис на  $\mathbb{W}$

Тогава  $M_{s'}^{u'}(\varphi) = T_{u' \rightarrow u} \circ M_s^u(\varphi) \circ T_{s \rightarrow s'}$

### 7.4 Промяна на матрицата на линейен оператор при смяна на базиса

Нека  $\mathbb{V}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ ,  $\varphi \in \text{Hom} \mathbb{V}$

Нека  $b_1, \dots, b_n$  - един базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $b'_1, \dots, b'_n$  - друг базис на  $\mathbb{V}$

Тогава  $M_{b'}(\varphi) = T_{b' \rightarrow b} M_b(\varphi) T_{b \rightarrow b'}$

### 7.5 Първа теорема за ранг на матрици

Нека  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathbb{F}_{m \times n} \implies r(A) = r(A^t)$

## 8 Дуалност

### 8.1 Определение за дуалното пространство на дадено линейно пространство

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

Тогава  $\mathbb{V}^* = \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{F})$  е дуалното пространство на Л.П. на  $\mathbb{V}$

### 8.2 Определение за линеен функционал

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$f$  е линеен функционал на  $\mathbb{V} \iff f \in \mathbb{V}^*$

### 8.3 Определение за дуалното изображение на дадено линейно изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$\mathbb{V}^*, \mathbb{W}^*$  - Дуалните пространства на Л.П.  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$

Ако  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \implies \varphi^* \in \text{Hom}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$

$\forall f \in \mathbb{W}^* \varphi^*(f) = f \circ \varphi$

### 8.4 Определение за дуален базис

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ ,  $\mathbb{V}^*$  - дуалното пространство на  $\mathbb{V}$

$e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

$f^1, \dots, f^n$  - дуален базис на базиса  $e_1, \dots, e_n$

$$j, i = 1, \dots, n \quad f^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

### 8.5 Дуално изображение на произведението на две линейни изображения

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{U}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$ ,  $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \psi \in \text{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$

$\psi \circ \varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{U}) \implies (\psi \circ \varphi)^* \in \text{Hom}(\mathbb{U}^*, \mathbb{V}^*)$

$\forall f \in \mathbb{U}^* (\psi \circ \varphi)^*(f) = f \circ (\psi \circ \varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi =$

$$= \varphi^*(f \circ \psi) = \varphi^*(\psi^*(f)) = (\varphi^*\psi^*)(f)$$

$$\implies (\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$$

## 8.6 Връзката между матриците на едно линейно изображение и неговото дуално изображение

Нека  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  - К.М.Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$$\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \varphi^* \in \text{Hom}(\mathbb{W}^*, \mathbb{V}^*)$$

Нека  $e_1, \dots, e_n$  - базис на  $\mathbb{V}$

Нека  $e'_1, \dots, e'_n$  - дуален базис на базиса  $e_1, \dots, e_n$

Нека  $f_1, \dots, f_m$  - базис на  $\mathbb{W}$

Нека  $f'_1, \dots, f'_m$  - дуален базис на базиса  $f_1, \dots, f_m$

$$\text{Тогава } M_{f'}^{e'}(\varphi^*) = (M_e^f(\varphi))^t$$

## 8.7 Определение за аниhilатор $\mathbb{U}^0$ на едно линейно подпространство $\mathbb{U}$ на едно линейно пространство $\mathbb{V}$

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$$\mathbb{U} < \mathbb{V} \implies \mathbb{U}^0 = \{f \in \mathbb{V}^* \mid \forall u \in \mathbb{U} f(u) = 0\}$$

## 8.8 Определение за анулатор $\mathbb{U}_0$ на едно линейно подпространство $\mathbb{U}$ на едно линейно пространство $\mathbb{V}$

Нека  $\mathbb{V}$  - Л.П. над полето  $\mathbb{F}$

$$\mathbb{U} < \mathbb{V} \implies \mathbb{U}_0 = \{u \in \mathbb{U} \mid \forall f \in \mathbb{V}^* f(u) = 0\}$$