Езици и автомати. Решения на теоретично контролно вариант 1 от 19.01.2017г.

Иво Стратев

11 януари 2018 г.

1 Задача 1.

1.1 Дайте дефиниция за контекстно-свободна граматика.

Нека $G = (V,\ \Sigma,\ P,\ S)$, където:

- V е крайно множество от променливи (нетерминали)
- Σ е азбука (крайно множество от терминали) и $\Sigma \cap V = \emptyset$
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ е крайно множество от правила
- $S \in V$ е началната променлива

G е контекстно-свободна граматика, ако $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$

1.2 Дефинирайте кога една дума $u \in (V \cup \Sigma)^*$ е изводима от думата $v \in (V \cup \Sigma)^*$ с граматиката $G \quad (v \overset{*}{\Longrightarrow} u)$.

Нека $\Lambda = (V \cup \Sigma)^*$

Нека $R_{\underset{G}{\rightarrow}} \ = \ \{(w,\ w') \in \Lambda^2 \mid \exists \alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma \in \ \Lambda \ : \ w = \alpha\beta\gamma \wedge \ w' = \alpha\beta'\gamma \wedge \exists\ \beta \to \beta' \in P\}$

и нека $R_{\underset{G}{\overset{n}{\rightarrow}}} = \begin{cases} R_{\underset{G}{\rightarrow}} & ,n = 0 \\ \left\{(\alpha,\ \gamma) \in \Lambda^2 \mid \exists \beta \in \Lambda,\ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ m < n \wedge (\alpha,\ \beta),\ (\beta,\ \gamma) \in R_{\underset{G}{\overset{m}{\rightarrow}}}\right\} & ,n > 0 \end{cases}$

Тогава $R_{\overset{*}{\Longrightarrow}} \ = \ \{(w,\ w) \mid w \in \Lambda\} \ \cup \ \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} R_{\underset{G}{\overset{n}{\rightarrow}}}$

тоест $R_{\overset{*}{\Longrightarrow}}$ е рефлексивното и транзитивното затваряне на $R_{\underset{G}{\rightarrow}}$.

$v \ \overset{*}{\Longrightarrow} \ u \iff (v,\ u) \in R_{\overset{*}{\Longrightarrow}}$

1.3 G е контекстно-свободна граматика определете езика $\mathcal{L}(G)$

$\mathcal{L}(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Longrightarrow} w\}$

1.4

Нека $G = (\{S,\ A,\ B\},\ \{a,\ b\},\ \{S \to ABA \mid ab,\ A \to aA \mid a,\ B \to bBb \mid b\},\ S)$

1.4.1 Покажете, че думите $aaba$ и $abbba$ са изводими от G и покажете синтактично дърво за тях.

За $aaba$:

$S \implies (S \to ABA)$

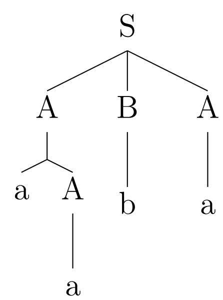
$ABBA \implies (A \to aA)$

$aABA \implies (A \to a)$

$aaBA \implies (B \to b)$

$aabA \implies (A \to a)$

$aaba$



За $abbba$:

$S \implies (S \to ABA)$

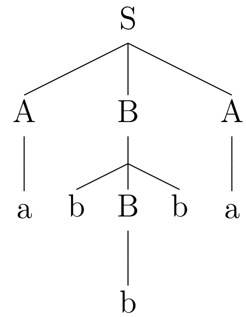
$ABA \implies (A \to a)$

$aBA \implies (B \to bBb)$

$abBbA \implies (B \to b)$

$abbbA \implies (A \to a)$

$abbba$



1.4.2 Вярно ли е, че езикът $\mathcal{L}(G) \cap \{a^{2n}b^{2k+1}a \mid n,\ k \in \mathbb{N}\}$ е контекстно-свободен?

Лесно се вижда, че $\mathcal{L}(G) = \{a^n b^{2k-1} a^m \mid n,\ k,\ m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ следователно

$\mathcal{L}(G) \cap \{a^{2n}b^{2k+1}a \mid n,\ k \in \mathbb{N}\} = \{a^{2n}b^{2k-1}a \mid n,\ k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$

Една граматика, която описва $\{a^{2n}b^{2k-1}a \mid n,\ k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ е:

$(\{S,\ A,\ B\},\ \{a,\ b\},\ \{S \to AABa,\ A \to aAa \mid a,\ B \to bBb \mid b\},\ S)$

Следователно $\mathcal{L}(G) \cap \{a^{2n}b^{2k}a \mid n,\ k \in \mathbb{N}\}$ е контекстно-свободен.

1.4.3 Вярно ли е, че езикът $\{a,\ b\}^*\backslash\mathcal{L}(G)$ е контекстно-свободен?

Лесно се вижда, че $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(a^+(bbb\ +\ b)^+a^+)$, тоест че $\mathcal{L}(G)$ всъщност е регулярен език.

Ние знаем, че допълнението на всеки регулярен език е регулярен език, тоест $\{a,\ b\}^*\backslash\mathcal{L}(G)$ е регулярен.

Също така знаем, че всеки регулярен език е контекстно-свободен език, тогава $\{a,\ b\}^*\backslash\mathcal{L}(G)$ е контекстно-свободен.

2 Задача 2.

Нека $G_1 = (V_1,\ \Sigma,\ P_1,\ S_1)$ и $G_2 = (V_2,\ \Sigma,\ P_2,\ S_2)$ са контекстно-свободни граматики, за които $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Опишете контрукция за построяването на контекстно-свободна граматика $G = (V,\ \Sigma,\ P,\ S)$ с език

2.1 $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$

$S \notin V_1 \cup V_2,\ S \notin \Sigma,\ G = (\{S\} \cup V_1 \cup V_2,\ \Sigma, \{S \to S_1 \mid S_2\} \cup P_1 \cup P_2,\ S)$

2.2 $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1)^*$

$S \notin V_1,\ S \notin \Sigma,\ G = (\{S\} \cup V_1,\ \Sigma, \{S \to S_1S \mid \varepsilon\} \cup P_1,\ S)$

3 Задача 3.

Постройте граматика G, за която $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(A)$

за крайният автомат $A = (\{s,\ p,\ q\},\ \{a,\ b\},\ \delta,\ s,\ \{q\})$ за

$\delta(s,\ a) = p$

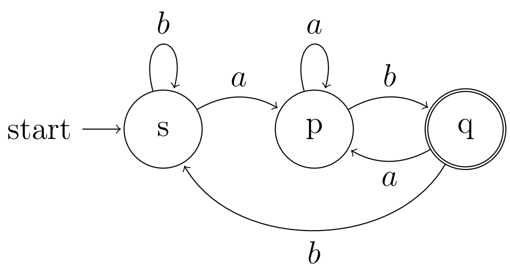
$\delta(s,\ b) = s$

$\delta(p,\ a) = p$

$\delta(p,\ b) = q$

$\delta(q,\ a) = p$

$\delta(q,\ b) = s$



3.1 Общ вид на конструкцията

Нека $A = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ s,\ F)$ е краен автомат. Тогава

$G = (Q,\ \Sigma,\ P,\ s)$ е регулярна граматика.

$P = \{q \to ap \mid a \in \Sigma,\ \delta(q,\ a) = p\} \cup \{q \to a \mid a \in \Sigma,\ \delta(q,\ a) = p \in F\} \cup$
$\{f \to \varepsilon \mid f \in F\}$

Обратно на задачата:
$G = (\{s,\ p,\ q\},\ \{a,\ b\},\ \{s \to bs \mid ap,\ p \to ap \mid bq \mid b,\ q \to ap \mid bs \mid \varepsilon\},\ s)$

4 Задача 4.

Нека $G = (V,\ \Sigma,\ P,\ S)$ е контекстно-свободна граматика. Дефинирайте стеков автомат M, завърващ с празен стек, за който $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$.

$M = (\{q\},\ \Sigma,\ \Sigma \cup V,\ S,\ q,\ \Delta,\ \emptyset)$

$\forall A \in V\ \Delta(q,\ \varepsilon,\ A) = \{(q,\ \alpha) \mid A \to \alpha \in P\}$

$\forall a \in \Sigma\ \Delta(q,\ a,\ a) = \{(q,\ \varepsilon)\}$

4.1 Дефинирайте стеков автомат M с горното свойство за G от Задача 1.

$M = (\{q\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ b,\ S,\ A,\ B\},\ S,\ q,\ \Delta,\ \emptyset)$

$\Delta(q,\ \varepsilon,\ S) = \{(q,\ ABA),\ (q,\ ab)\}$

$\Delta(q,\ \varepsilon,\ A) = \{(q,\ aA),\ (q,\ a)\}$

$\Delta(q,\ \varepsilon,\ B) = \{(q,\ bBb),\ (q,\ b)\}$

$\Delta(q,\ a,\ a) = \{(q,\ \varepsilon)\}$

$\Delta(q,\ b,\ b) = \{(q,\ \varepsilon)\}$

5 Задача 5.

Формулирайте Лемата за покачването (The Pumping Lemma) за контекстно-свободни езици.

Ако L е контекстно-свободен език то

$\exists p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ :\ \forall \alpha \in L\ :\ |\alpha| \geq p\ \exists x,\ y,\ u,\ v,\ z\ :\ \alpha = xyuvz \wedge |yv| \geq 1 \wedge |yuv| \leq p\ \wedge$
$\forall i \in \mathbb{N}\ xy^iuv^iz \in L.$

Контра позиция на лемата: Ако

$\forall p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ :\ \exists \alpha \in L\ :\ |\alpha| \geq p\ \forall x,\ y,\ u,\ v,\ z\ :\ \alpha = xyuvz \wedge |yv| \geq 1 \wedge |yuv| \leq p\ \wedge$
$\exists i \in \mathbb{N}\ xy^iuv^iz \notin L$ то L не е контекстно-свободен език.