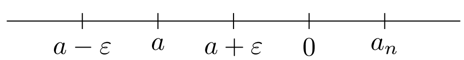
Теоремки, преди теоремите за средни стойности

Иво Стратев

5 февруари 2017 г.

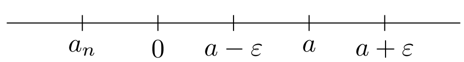
1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a,\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0 \implies a \geq 0$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu;\ \forall n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$
Допс. $a < 0 \implies (a_n - a) > 0 \implies |a_n - a| > \varepsilon \implies \lightning(\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a)$



2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a,\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n < 0 \implies a \leq 0$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu;\ \forall n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$
Допс. $a > 0 \implies (a_n - a) < 0 \implies |a_n - a| > \varepsilon \implies \lightning(\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a)$



3 Th(За непрекъснатите ф-ци)

Ако $f(x)$ е непрекъсната в околност на x_0, $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$) и $f(x)$ е непрекъсната в x_0
$\exists \delta > 0;\ f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ ($f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Д-во: $f(x)$ е непрекъсната в околност на x_0
$\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} = y_0,\ \forall y_0\ \exists \delta_{y_0} > 0;\ |x - x_0| < \delta_{y_0}$
$\implies |f(x) - f(x_0)| < y_0 \iff f(x_0) - y_0 < f(x) < f(x_0) + y_0$
$\implies \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \implies f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$

4 Th(Вайерщрас)

Нека $f(x) \in C[a,b]$ то тя е ограничена и има НГС и НМС.

Д-во: $f(x)$ - ограничена $\iff \exists M \in \mathbb{R};\ \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq M$
Доп., че $f(x)$ е неограничена $\implies \forall M \in \mathbb{R}\ \exists x_M \in [a,b];\ f(x_M) > M$
$\implies \forall n \in \mathbb{N}; \exists x_n \in [a,b];\ f(x_n) \geq n$
От Th(Болцано-Вайерщрас за редици)
$\implies \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – сходяща подредица на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
и $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in [a,b]$.
От $f(x) \in C[a,b] \implies \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$
$f(x_0) \geq n \implies f(x_{n_k}) \geq n_k > k / \lim\limits_{k\to\infty}$
$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq \lim\limits_{k\to\infty} k = \infty \implies \lightning(\{f(x_{n_k})\}$ е ограничена)

$M = sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ Доп., че $\forall x \in [a,b] \quad f(x) < M$
$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$
От аритметични действия с неп. функции $\implies g(x)$ е непрекъсната
$\implies \exists C > 0;\ \forall x \in [a,b] \quad g(x) \leq C$
$\implies \frac{1}{M-f(x)} \leq C / \frac{M-f(x)}{C}$
$\frac{1}{C} \leq M - f(x)$
$f(x) \leq M - \frac{1}{C}\ \forall x \in [a,b] \implies \lightning(M = sup\{f(x) : x \in [a,b]\})$
$\implies \exists x_{max};\ f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b],\ f(x_{max}) = M$

$m = inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ Доп., че $\forall x \in [a,b] \quad f(x) > m$
$h(x) = \frac{1}{f(x) - m}$
От аритметични действия с неп. функции $\implies h(x)$ е непрекъсната
$\implies \frac{1}{f(x)-m} \leq C / \frac{f(x)-m}{C}$
$\frac{1}{C} \leq f(x) - m$
$\frac{1}{C} + m \leq f(x)\ \forall x \in [a,b] \implies \lightning(m = inf\{f(x) : x \in [a,b]\})$
$\implies \exists x_{min};\ f(x) \geq m \quad \forall x \in [a,b],\ f(x_{min}) = m$

5 Th(Болцано)

Нека $f(x) \in C[a,b],\ f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a,b);\ f(c) = 0$

Д-во: БОО $f(a) > 0,\ f(b) < 0$

$A = \{\forall x \in [a,b] : f(x) > 0\} \subset [a,b] \implies A$ е ограчено
$c = limsupA$

5.1 $f(c) > 0$

$f(c) > 0 \implies \exists \delta > 0;\ \forall x \in (c-\delta, c+\delta)\ f(x) > \frac{f(c)}{2} > 0$
$\forall x > c;\ f(x) \leq 0 \implies \lightning(f(c) > 0)$

5.2 $f(c) < 0$

$f(c) < 0 \implies \exists \varepsilon > 0;\ \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)\ f(x) < \frac{f(c)}{2} < 0$
$\forall x > c;\ f(x) \geq 0 \implies \lightning(f(c) < 0)$

От 3.1 и 3.2 $\implies \exists c \in (a, b);\ f(c) = 0$

6 Th Болцано-Вайерщрас (за междинните стойности)

Нека $f(x) \in C[a, b],\ m = minf(x)$ и $n = maxf(x)$
$\implies \forall c \in [m, n]\ \exists x_c \in [a, b];\ f(x_c) = c$
Д-во: $h(x) = f(x) - c$
Ако $c = m$ или $c = n \implies \exists x_c \in [a, b];\ f(x_c) = c$
Ако $c \in (m, n) \quad d = min\{x_{min}, x_{max}\} \quad e = max\{x_{min}, x_{max}\}$
$h(x) : [d, e],\ h(d)h(e) < 0$
От Th(Болцано) за h в $[d, e] \implies \exists x_c;\ h(x_c) = f(x_c) - c = 0$
$\implies \exists x_c \in [a, b];\ f(x_c) = c$