Теоритично контролно №1 1, I, Информатика

Иво Стратев

3 ноември 2018 г.

1 Комплексни числа ($\mathbb{C}$)

$z = -5 - 4\imath$

1.1 $Re\, z$

$Re\, z = -5$

1.2 $Im\, z$

$Im\, z = -4$

1.3 $|z|$

$|z| = \sqrt{(Re\, z)^2 + (Im\, z)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

1.4 $\operatorname{tg} Arg\, z$

$\operatorname{tg} Arg\, z = \frac{Im\, z}{Re\, z} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$

1.5 $\sin Arg\, z$

$\sin Arg\, z = \frac{Im\, z}{|z|} = \frac{-4}{\sqrt{41}} \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{-4\sqrt{41}}{41}$

1.6 $\cos Arg\, z$

$\cos Arg\, z = \frac{Re\, z}{|z|} = \frac{-5}{\sqrt{41}} \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{-5\sqrt{41}}{41}$

2 $z = \frac{5-3\imath}{4+\imath}$ $Re\, z + Im\, z$

$z = \frac{5-3\imath}{4+\imath}$

$z = \frac{5-3\imath}{4+\imath} \frac{4-\imath}{4-\imath}$

$z = \frac{(5-3\imath)(4-\imath)}{4^2+1^2}$

$z = \frac{20-5\imath-12\imath-3}{17}$

$z = \frac{\cancel{17} - \cancel{17}\imath}{\cancel{17}}$

$z = 1 - \imath$

$Re\, z + Im\, z = 1 + (-1) = 1 - 1 = 0$

3 Формули на Моавър

3.1 z^n

$z^n = |z|^n (\cos n Arg\, z + \imath \sin n Arg\, z)$

3.2 $\sqrt[n]{z}$

$\sqrt[n]{z} \;=\; \sqrt[n]{|z|}(\cos \frac{Arg\, z + 2k\pi}{n} + \imath \sin \frac{Arg\, z + 2k\pi}{n}) \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1$

4 Системи линейни уравнения

4.1 съвместима

Една система от линейни уравнения се нарича съвместима, когато има поне едно решение.

4.2 несъвместима

Една система от линейни уравнения се нарича несъвместима, когато няма решение.

4.3 определена

Една система от линейни уравнения се нарича определена, когато е съвместима и има точно едно решение.

4.4 неопределена

Една система от линейни уравнения се нарича неопределена, когато е съвместима и има повече от едно решение.

5 Релации и изображения

5.1 Релации

$R \subseteq A \times A$;

5.1.1 симетрична релация

$\forall x,\ y \in A\ (x,\ y) \in R \implies (y,\ x) \in R$

5.1.2 транзитивна релация

$\forall x,\ y,\ z \in A\ (x,\ y),\ (y,\ z) \in R \implies (x,\ z) \in R$

5.1.3 рефлексивна релация

$\forall x \in A\ (x,\ x) \in R$

5.2 Изображения

$f\ :\ X \to Y$

5.2.1 инективно изображение

$\forall x_1,\, x_2 \in X\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

5.2.2 сюрективно изображение

$\forall y \in Y\ \exists x \in X\ :\ y = f(x)$

5.2.3 биекция

Биекция наричаме изображение, което е едновременно инкеция и сюрекция.

6 Бинарни операции

$* : M \times M \to M$

6.1 асоциативност

$\forall a,\, b,\, c \in M\ (a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$

6.2 комутативност

$\forall a,\, b \in M\ a * b = b * a$

6.3 неутрален елемент

$\exists \theta \in M\ :\ \forall x \in M\ x * \theta = \theta * x = x$

7 Матрици

7.1 A^t

$A = (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(F)\ (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$

$B = (b_{ij})_{n\times m} = A^t \in M_{n\times m}(F)\ :\ b_{ij} = a_{ji}\ (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m);$

7.2 $A + B$

$A = (a_{ij})_{m \times n},\ B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$

$A + B = C = (c_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$

7.3 λA

$\lambda \in F,\ A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$

$\lambda A = C = (c_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$

$c_{ij} = \lambda a_{ij}\ (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$

8 Вектори в линейно пространство

F - числово поле, V - линейно пространство над F

8.1 нулевият вектор е единствен

Нека θ' и θ'' са нулеви вектори от V. Тогава:

$\theta' + \theta'' = \theta''$ (защото θ' е нулев вектор)

$\theta' + \theta'' = \theta'$ (защото θ'' е нулев вектор)

$\implies \theta' = \theta''$

8.2 противоположният вектор е единствен

Нека a е вектор от V и нека a' и a'' са негови противоположни вектори от V. Тогава:

$a' + a + a'' = (a' + a) + a'' = \theta + a'' = a''$ (защото a' е противоположен вектор на a)

$a' + a + a'' = a' + (a + a'') = a' + \theta = a'$ (защото a'' е противоположен вектор на a)

$\implies a' = a''$

8.3 $0a = \theta$

Нека $a \in V$. Тогава

$a + -a = \theta \implies$

$1.a + -a = \theta \implies$

$(1+0).a + -a = \theta \implies$

$1.a + 0.a + -a = \theta \implies$

$a + 0.a + -a = \theta \implies$

$\theta + 0.a = \theta \implies$

$0.a = \theta$

8.4 $\lambda\theta = \theta$

$a \in V$

$a + 0a = 1a + 0a = (1+0)a = a$

$a + 0a = a \,|+(-a)$

$\theta + 0a = \theta$

$0a = \theta$

Сега в равенството: $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ избираме $\mu = 0$

и получаваме: $\lambda\theta = 0a = \theta$

8.5 $-1a = -a$

$a + (-1)a = 1.a + (-1)a = (1 + -1)a = 0a = \theta \implies -a = (-1)a$

9 Линейно пространство, линейна комбинация и линейна зависимост/независимост

F - числово поле, V - линейно пространство над F

9.1 линейна комбинация

$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in V$ - линейна комбинация

9.2 линейно подпространство

$W \subseteq V$

$V \ni \theta \in W$

$\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$

$\forall \lambda \in F, \forall w \in W \quad \lambda w \in W$

9.3 линейна обвивка

Нека $\emptyset \neq A \subseteq V$

$$l(A) = \bigcap_{A \subseteq W \leq V} W$$

Алтернативна дефиниция:

$$l(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{|A|} \lambda_i a_i \mid \forall i \in \mathbb{N} : \ i \leq |A| \ \lambda_i \in F, \ a_i \in A \right\}$$

9.4 линейна зависимост

$n \in \mathbb{N}$

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$

Ако $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \theta \ : \ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Тогава $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са ЛЗ.

9.5 линейна независимост

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$

Ако $\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \theta \implies (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Тогава $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са ЛНЗ.

10 Линейна зависимост/независимост

10.1 ако един вектор е линейно независим, то той е ненулев вектор

Логически еквивалетно твърдение на "ако един вектор е линейно независим, то той е ненулев вектор"е "ако един вектор е линейно зависим, то той е нулев вектор"

За това ще докажем него, от което ще следва и исканото твърдение.

$\lambda \in F,\, a \in V : \lambda a = \theta \;:\; \lambda \neq 0$

$\lambda a = \theta \,|\, \lambda^{-1}$

$1.a = \theta$

$a = \theta$

$\Longrightarrow$ ако един вектор е линейно независим, то той е ненулев вектор

10.2 ако един вектор е линейно зависим то, той е нулевият вектор

$\lambda \in F,\, a \in V \;:\; \lambda a = \theta \;:\; \lambda \neq 0$

$\lambda a = \theta \,|\, \lambda^{-1}$

$1.a = \theta$

$a = \theta$

10.3 всяка подсистема на линейно независима система от вектори е също линейно независима

$n,\, k \in \mathbb{N} \;:\; k \leq n$

$A = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n\}$ - линейно независима система от вектори

Нека БОО $B = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k\}$ допускаме, че B е линейно зависима

$\Longrightarrow \exists \lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_k \in F \;:\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \theta,\, \lambda_1 \neq 0$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{j=k+1}^{n} 0 a_j = \theta$

$\Longrightarrow$ противоречие с факта, че A е линейно независима система от вектори

10.4 ако една система от вектори съдържа линейно зависима подсистема, то тази система също е линейно зависима

$n,\, k \in \mathbb{N} \;:\; k < n$

$A = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n\}$ - система от вектори

Нека БОО $B = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k\}$ - линейно зависима подсистема от вектори

От B линейно зависима подсистема от вектори

$$\Longrightarrow \exists \lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_k \in F \;:\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \theta,\; \lambda_1 \neq 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{j=k+1}^{n} 0 a_j = \theta$$

От $\lambda_1 \neq 0 \Longrightarrow$ A е линейно зависима система от вектори

10.5 ако една система от вектори съдържа два пропорционални вектора, то тя е линейно зависима

$n \in \mathbb{N} \;:\; A = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n\}$ - система от вектори

Нека БОО $a_2 = \lambda a_1 \Longrightarrow \lambda a_1 - a_2 = \theta$

$$\Longrightarrow \lambda a_1 + (-1) a_2 + \sum_{i=3}^{n} 0 a_i = \theta$$

$\Longrightarrow$ A е линейно зависима система от вектори

10.6 ако в една система от поне два вектора един от векторите е линейна комбинация на останалите, то системата е линейно зависима

$n \in \mathbb{N} \;:\; n > 1$

$A = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n\}$ - система от вектори

Нека БОО $a_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i a_i$

$$\Longrightarrow -a_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i a_i = \theta$$

$$\Longrightarrow (-1) a_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i a_i = \theta$$

$\Longrightarrow$ A е линейно зависима система от вектори

10.7 в една линейно зависима система от поне два вектора поне един вектор е линейна комбинация на останалите

$n \in \mathbb{N} \;:\; n > 1$

$A = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n\}$ - линейно зависима система от поне два вектора

$\Longrightarrow \exists \lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n \in F \;:\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \theta$, Нека БОО $\lambda_1 \neq 0$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \theta \,|\lambda_1^{-1} \implies a_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} a_i = \theta$$

$$\implies a_1 = \sum_{i=2}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} a_i$$

11 Базис и размерност

V - линейно пространство над числовото поле F

11.1 Основна лема на алгебрата

$n, k \in \mathbb{N}$

$A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$

$B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k \mid \forall j = 1,\ 2,\ \ldots k\ \exists\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n \in F\ :\ b_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\}$

Ако $k > n \implies$ B е линейно зависима система от вектори

11.2 Базис

$B \neq \emptyset \subset V \neq \{\theta\}$

$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots b_n\}$ - линейно независима система от вектори

Ако $V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \mid \forall i \in \mathbb{N} :\ i \leq n\ \lambda_i \in F \right\} = l(B)$

11.3 Крайномерно линейно пространство

$B \neq \emptyset \subset V \neq \{\theta\}$

$n \in \mathbb{N}$

$B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots b_n\}$ - линейно независима система от вектори

Ако $V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \mid \forall i \in \mathbb{N} :\ i \leq n\ \lambda_i \in F \right\} = l(B)$

11.4 Крайнопородено линейно пространство

$\exists n \in \mathbb{N},\ B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots b_n\}\ V = l(B)$

11.5 Размерност на линейно пространство

$\forall B \neq \emptyset \subset V \neq \{\theta\}$

$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$B = \{b_1, b_2, \dots b_n\}$ - линейно независима система от вектори

и $V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \mid \forall i \in \mathbb{N} : \ i \leq n \ \lambda_i \in F \right\} = l(B)$
$dim(V) = n$

С други думи казано размерността дефинираме като броя на векторите в кой да е базис на V

Ако едно крайномерно линейно пространство и едно негово линейно подпространство имат една и съща размерност, то те съвпадат

11.6 Координати на вектор в даден базис

$dimV = n$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \ : \ V = l(B)$

$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V \quad \lambda_i \in F, \ i = 1, 2, \dots, n$
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ са координатите на v в базиса $b_1, b_2, \dots, b_n$

12 Сума на подпространства, директна сума на подпространства и ранг на система вектори

12.1 Сума на подпространства и директна сума на подпространства

V - линейно пространство над числовто поле F
V_1, V_2 - крайномерни линейни подпространства на V

12.1.1 връзка между размерностите на сумата и сечението на две крайномерни линейни подпространства на дадено линейно пространство

$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

12.1.2 НДУ едно линейно пространство да е директна сума на две свои подпространства

$V = V_1 \oplus V_2 \iff V = V_1 + V_2, \ V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$

12.2 Ранг на система вектори

12.2.1 Максимална линейно независима подсистема вектори на дадена система вектори

T - система вектори, $S \subseteq T$ - лин. независима подсистема вектори,

$\forall v \in T \backslash S = \{a \in T \mid a \notin S\}\ S \cup \{v\}$ - е лин. зависима система

12.2.2 Ранг на система вектори

$S \subseteq V,\ r(S) = dim(\,l(S))$