

Теория за ДИС 1.1

Иво Стратев

5 декември 2017 г.

Околности. Определения за граница на редица и функции

Околности

Околност на $a \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x - a| < \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Пробита околност на $a \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 < |x - a| < \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

Околност на $a - 0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a - \varepsilon < x < a \iff x \in (a - \varepsilon, a)$$

Околност на $a + 0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a < x < a + \varepsilon \iff x \in (a, a + \varepsilon)$$

Околност на ∞

$$\forall M > 0 \in \mathbb{R} \quad x > M \iff x \in (M, \infty)$$

Околност на $-\infty$

$$\forall M < 0 \in \mathbb{R} \quad x < M \iff x \in (-\infty, M)$$

Редици

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu \implies a_n > C$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

$$\forall C \in \mathbb{R}^- \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu \implies a_n < C$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + 0$$

$$\forall \varepsilon \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu \implies a < a_n < a + \varepsilon$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - 0$$

$$\forall \varepsilon \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu \implies a - \varepsilon < a_n < a$$

Функции

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \in \mathbb{D} : x_n \neq x_0 \\ \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \end{aligned}$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, x \in \mathbb{D} : 0 < |x - x_0| < \delta \\ \implies |f(x) - A| < \varepsilon \end{aligned}$$

Лява (Дясна) граница

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0 \ (x_0 + 0)} A$$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0 \ (x_0 + 0)} A$$

$$\begin{aligned} \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 - 0 \ (x_0 + 0), \\ x_n \in \mathbb{D} : x_n < x_0 \ (x_n > x_0) \\ \implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \end{aligned}$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 - 0 \ (x_0 + 0)} A$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, x \in \mathbb{D} : \\ x_0 - \delta < x_n < x_0 \ (x_0 < x_n < x_0 + \delta) \\ \implies |f(x) - A| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} A \in \mathbb{R}$$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} A \in \mathbb{R}$$

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty, x_n \in \mathbb{D}$$

$$\implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} A \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 (M < 0), x \in \mathbb{D} : x > M (x < M)$$

$$\implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm\infty \text{ при } c = a \in R \text{ или } c = a - 0 \text{ или } c = a + 0 \text{ или } c = \pm\infty$$

$$\text{Хайне за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm\infty \text{ при } c = a \in R \text{ или } c = a - 0 \text{ или } c = a + 0 \text{ или } c = \pm\infty$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm\infty$$

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \quad x_n \in \mathbb{D}$$

$$\implies \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty$$

$$\text{Коши за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} \pm\infty$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$$

$$\forall A > 0 (A < 0) \exists \delta > 0, x \in \mathbb{D} : 0 < |x - a| < \delta$$

$$\implies f(x) > A (f(x) < A)$$

$$\text{Коши за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \pm 0} \pm\infty$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \pm 0} \pm\infty$$

$$\forall A > 0 (A < 0) \exists \delta > 0, x \in \mathbb{D} : a < x < a + \delta (a - \delta < x < a)$$

$$\implies f(x) > A (f(x) < A)$$

$$\text{Коши за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$$

$$\forall A > 0 (A < 0) \exists B > 0 (B < 0), x \in \mathbb{D} : x > B (x < B)$$

$$\implies f(x) > A (f(x) < A)$$

Отрицания на определения за граници на Функции

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$$

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, x_n \in \mathbb{D}, x_n \neq x_0$$

$$\Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A \in \mathbb{R}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0, x \in \mathbb{D} : 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Лява (Дясна) граница

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 = 0 (x_0 + 0)} A$$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 = 0 (x_0 + 0)} A$$

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 - 0 (x_0 + 0),$$

$$x_n \in \mathbb{D} : x_n < x_0 (x_n > x_0)$$

$$\Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0 = 0 (x_0 + 0)} A$$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0, x \in \mathbb{D};$$

$$x_0 - \delta < x_n < x_0 (x_0 < x_n < x_0 + \delta)$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} A \in \mathbb{R}$$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} A \in \mathbb{R}$$

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty, x_n \in \mathbb{D}$$

$$\Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} A \in \mathbb{R}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall M > 0 (M < 0), x \in \mathbb{D} : x > M (x < M)$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm \infty \text{ при } c = a \in R \text{ или } c = a - 0 \text{ или } c = a + 0 \text{ или } c = \pm \infty$$

$$\text{Хайне за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm \infty \text{ при } c = a \in R \text{ или } c = a - 0 \text{ или } c = a + 0 \text{ или } c = \pm \infty$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} \pm \infty$$

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \quad x_n \in \mathbb{D}$$

$$\Rightarrow \{f(x_n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty$$

$$\text{Коши за } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} \pm \infty$$

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty$$

$$\exists A > 0 (A < 0) \forall \delta > 0, x \in \mathbb{D} : 0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x) \leq A (f(x) \geq A)$$

Коши за $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \pm 0} \pm \infty$

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \pm 0} \pm \infty$

$\exists A > 0 \ (A < 0) \ \forall \delta > 0, x \in \mathbb{D} : a < x < a + \delta \ (a - \delta < x < a)$
 $\implies f(x) \leq A \ (f(x) \geq A)$

Коши за $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \pm \infty$

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \pm \infty$

$\exists A > 0 \ (A < 0) \ \forall B > 0 \ (B < 0), x \in \mathbb{D} : x > B \ (x < B)$
 $\implies f(x) \leq A \ (f(x) \geq A)$

Аритметични действия със сходящи редици

” + ”

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$
 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$

$0 \leq |a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$
 $(|a_n - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, |b_n - b| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0)$

$\implies \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b \quad \square$

” - ”

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$
 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$

$0 \leq |a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$
 $(|a_n - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, |b_n - b| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0)$

$\implies \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b \quad \square$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu \implies |b_n - b| = |-(b_n - b)| = |-b_n - (-b)| < \varepsilon$

$\implies \{-b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -b \quad \square$

$\implies \{a_n + (-b_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + (-b) = a - b$

$\implies \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - b \quad \square$

” * ”

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$
 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$

$$\begin{aligned}
0 &\leq |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab \pm a_n b| = \\
&= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&(|b_n - b| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, |a_n - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0) \\
\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ е ограничена} &\implies |a_n||b_n - b| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
\implies |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies |a_n b_n - ab| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
\implies \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab
\end{aligned}$$

” / ”

$$\begin{aligned}
\{a_n\}_{n=1}^{\infty} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \\
\{b_n\}_{n=1}^{\infty} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab \pm a_n b| = \\
&= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
|b_n - b| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, |a_n - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ е ограничена} &\implies |a_n||b_n - b| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
\implies |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies |a_n b_n - ab| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
\implies \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{БОО } b > 0 &\implies \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b > 0 \\
\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu \\
\implies |b_n - b| < \varepsilon &\implies b_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon := \frac{b}{2} \implies b_n \in (b - \frac{b}{2}, b + \frac{b}{2}) \implies b_n \in (\frac{b}{2}, \frac{3b}{2})$$

$$\implies n < \nu \implies b_n \notin (\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}) \implies n > \nu \implies b_n > \frac{b}{2} > 0$$

$$\implies \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b b_n} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b| |b_n|}$$

$$b_n > \frac{b}{2}, |b - b_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon$$

$$\implies \frac{|b - b_n|}{|b| |b_n|} < \frac{2}{b^2} |b - b_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

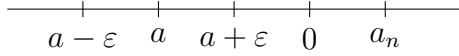
$$\implies \left\{ \frac{1}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \quad \square$$

$$\implies \left\{ a_n \frac{1}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \frac{1}{b} \implies \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \quad \square$$

$$\text{Th } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \forall n \in \mathbb{N} \ a_n > 0 \implies a \geq 0$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

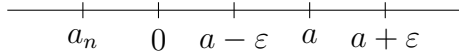
$$\text{Допс. } a < 0 \implies (a_n - a) > 0 \implies |a_n - a| > \varepsilon \implies \not\rightarrow (\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a)$$



$$\text{Th } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \forall n \in \mathbb{N} \ a_n < 0 \implies a \leq 0$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\text{Допс. } a > 0 \implies (a_n - a) < 0 \implies |a_n - a| > \varepsilon \implies \not\rightarrow (\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a)$$



Th(За непрекъснатите ф-ци)

Ако $f(x)$ е непрекъснатата в околност на x_0 , $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$) и $f(x)$ е непрекъснатата в x_0

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \ (f(x) < \frac{f(x_0)}{2})$$

Д-во: $f(x)$ е непрекъснатата в околност на x_0

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} = y_0, \forall y_0 \ \exists \delta_{y_0} > 0 : |x - x_0| < \delta_{y_0}$$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| < y_0 \iff f(x_0) - y_0 < f(x) < f(x_0) + y_0$$

$$\implies \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \implies f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad \square$$

Th(Вайерщрас)

Нека $f(x) \in C[a, b]$ то тя е ограничена и има НГС и НМС.

$$\text{Д-во: } f(x) - \text{ограничена} \iff \exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in [a, b] \ f(x) \leq M$$

$$\text{Доп., че } f(x) \text{ е неограничена} \implies \forall M \in \mathbb{R} \ \exists x_M \in [a, b] \ f(x_M) > M$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a, b] \ f(x_n) \geq n$$

От Th(Болцано-Вайерщрас за редици)

$$\implies \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} - \text{сходяща подредица на } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\text{и } x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in [a, b].$$

$$\text{От } f(x) \in C[a, b] \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

$$f(x_0) \geq n \implies f(x_{n_k}) \geq n_k > k \mid \lim_{k \rightarrow \infty}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} k = \infty \implies \nexists (\{f(x_{n_k})\} \text{ е ограничена}) \quad \square$$

$$\text{Нека } M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \text{ Доп., че } \forall x \in [a, b] \quad f(x) < M$$

$$g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$$

$$\text{От аритметични действия с неп. функции} \implies g(x) \text{ е непрекъсната}$$

$$\implies \exists C > 0 : \forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq C$$

$$\implies \frac{1}{M-f(x)} \leq C \mid \frac{M-f(x)}{C}$$

$$\frac{1}{C} \leq M - f(x)$$

$$f(x) \leq M - \frac{1}{C} \quad \forall x \in [a, b] \implies \nexists (M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\})$$

$$\implies \exists x_{\max} f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b], f(x_{\max}) = M \quad \square$$

$$\text{Нека } m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \text{ Доп., че } \forall x \in [a, b] \quad f(x) > m$$

$$h(x) = \frac{1}{f(x)-m}$$

$$\text{От аритметични действия с неп. функции} \implies h(x) \text{ е непрекъсната}$$

$$\implies \frac{1}{f(x)-m} \leq C \mid \frac{f(x)-m}{C}$$

$$\frac{1}{C} \leq f(x) - m$$

$$\frac{1}{C} + m \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies \nexists (m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\})$$

$$\implies \exists x_{\min} f(x) \geq m \quad \forall x \in [a, b], f(x_{\min}) = m \quad \square$$

Th(Болцано)

$$\text{Нека } f(x) \in C[a, b], f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$$

$$\text{Д-во: БОО } f(a) > 0, f(b) < 0$$

$$A = \{\forall x \in [a, b] : f(x) > 0\} \subset [a, b] \implies A \text{ е ограничено}$$

$$c = \limsup A$$

$$\text{Допс. } f(c) > 0$$

$$f(c) > 0 \implies \exists \delta > 0 : \forall x \in (c - \delta, c + \delta) f(x) > \frac{f(c)}{2} > 0$$

$$\forall x > c \ f(x) \leq 0 \implies \nexists (f(c) > 0) \quad (1)$$

Допс. $f(c) < 0$

$$f(c) < 0 \implies \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \ f(x) < \frac{f(c)}{2} < 0$$

$$\forall x > c \ f(x) \geq 0 \implies \nexists (f(c) < 0) \quad (2)$$

$$\text{От (1) и (2)} \implies \exists c \in (a, b) \ f(c) = 0 \quad \square$$

Th Болцано-Вайерщрас (за междинните стойности)

Нека $f(x) \in C[a, b]$, $m = \min f(x)$ и $n = \max f(x)$

$$\implies \forall c \in [m, n] \ \exists x_c \in [a, b] : f(x_c) = c$$

Д-во: $h(x) = f(x) - c$

$$\text{Ако } c = m \text{ или } c = n \implies \exists x_c \in [a, b] : f(x_c) = c$$

$$\text{Ако } c \in (m, n) \quad d = \min\{x_{\min}, x_{\max}\} \quad e = \max\{x_{\min}, x_{\max}\}$$

$$h(x) : [d, e], \ h(d)h(e) < 0$$

$$\text{От Th(Болцано) за } h \text{ в } [d, e] \implies \exists x_c : h(x_c) = f(x_c) - c = 0$$

$$\implies \exists x_c \in [a, b] : f(x_c) = c \quad \square$$

Теоремки за средни стойности. Връзка между знак на първа производна и монотоност на функция. + Теоремка за константа функция

Th(Ферма)

Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на x_0 - лок. екст. и $f(x)$ е диференцируема в x_0 , тогава $f'(x_0) = 0$

Д-во:

Ако x_0 е т. лок. макс.

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

$$\implies f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Ако $x > x_0$

$$x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\implies \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (1)$$

Ако $x < x_0$

$$x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\implies \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{От (1) и (2)} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$$

Ако x_0 **е т. лок. мин.**

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x) \geq f(x_0)$$

$$\implies f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Ако $x > x_0$

$$x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\implies \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (3)$$

Ако $x < x_0$

$$x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\implies \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (4)$$

$$\text{От (3) и (4)} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0 \quad \square$$

Th(Рол)

Нека $f(x) \in C[a, b]$ и $f(x)$ е диференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$
 $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Д-во:

Ако $f(x) \equiv \text{const} \implies f'(x) = 0$

Нека $f(x) \not\equiv \text{const}$

От Th(Вайерштрасс) \implies

$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b] :$

$$f(x_{max}) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

$$f(x_{min}) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

Ако $x_{min}, x_{max} \notin (a, b)$

$$x_{min} \neq x_{max}, f(a) = f(b) \implies \min f(x) = \max f(x)$$

$$\implies f(x) \equiv \text{const} \implies \nmid (f(x) \neq \text{const})$$

Ако поне една от x_{min} **или** $x_{max} \in (a, b)$

$$\text{Ако } x_{max} \in (a, b), c = x_{max} \text{ в противен случай } c = x_{min}$$

$$\implies c \in (a, b) - \text{лок. екст. от Th(Ферма)}$$

$$\implies f'(c) = 0 \quad \square$$

Th(За крайните нараствания на Лагранж)

Нека $f(x) \in C[a, b]$ и $f(x)$ е диференцируема в (a, b) .
Тогав $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Д-во:

$$h(x) = f(x) - kx$$

$$h(a) = f(a) - ka = f(b) - kb = h(b)$$

$$k : f(a) - ka = f(b) - kb$$

$$kb - ka = f(b) - f(a)$$

$$k(b - a) = f(b) - f(a)$$

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{От Th(Рол)} \text{ за } h(x) \implies \exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$$

$$h'(c) = f'(c) - k = 0$$

$$\implies f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\implies f'(c)(b - a) = f(b) - f(a) \quad \square$$

Обобщена Th(За крайните нараствания на Коши)

Нека $f(x), g(x) \in C[a, b]$ и $f(x), g(x)$ са диференцируеми в (a, b) ,
като $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Тогав $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Д-во:

Коректност:

Допус., че $g(b) - g(a) = 0$ то от $\text{Th}(\text{Рол})$

$$\implies \exists c_2 \in (a, b) : g'(c_2) = 0$$

$$\implies \nexists (g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)) \quad \square$$

$$h(x) = f(x) - kg(x)$$

$$k : h(a) = f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) = h(b)$$

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$$

$$kg(b) - kg(a) = f(b) - f(a)$$

$$k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$$

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\text{От } \text{Th}(\text{Рол}) \text{ за } h(x) \implies \exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$$

$$h'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0$$

$$\implies f'(c) = kg'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$$

$$\implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \square$$

$$\text{Th}(f(x) \uparrow \in C(a, b) \iff \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0)$$

$$\text{Th}(f(x) \uparrow \in C(a, b) \implies \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0)$$

Нека $t \in (a, b)$

Ако $x > t$

$$x > t, f(x) \uparrow \implies f(x) \geq f(t)$$

$$\implies f(x) - f(t) \geq 0, x - t > 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \geq 0 \quad (1)$$

Ако $x < t$

$$x < t, f(x) \uparrow \implies f(x) \leq f(t)$$

$$\implies f(x) - f(t) \leq 0, x - t < 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{От } (1) \text{ и } (2) \implies \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0 \quad \square$$

$$\mathbf{Th}(f(x) \in C(a, b) : \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0 \implies f(x) \uparrow)$$

$$f(x) \uparrow \implies \forall x_1, x_2 \in (a, b); x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$\text{Доп., че } \exists t_1, t_2 \in (a, b); t_1 < t_2; f(t_1) > f(t_2)$$

$$\text{От Th(Лагранж за крайните нараствания)} \implies$$

$$\exists c \in (t_1, t_2) : f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$$

$$f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \implies f'(c) \geq 0$$

$$t_1 < t_2 \implies t_2 - t_1 > 0$$

$$\implies f(t_2) - f(t_1) \geq 0 \implies f(t_2) \geq f(t_1) \implies \not\vdash (f(t_1) > f(t_2))$$

$$f(x) \in C(a, b) : \forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0 \implies f(x) \uparrow \quad \square$$

$$\mathbf{Th}(f(x) \downarrow \in C(a, b) \iff \forall x \in (a, b) f'(x) \leq 0)$$

$$\mathbf{Th}(f(x) \downarrow \in C(a, b) \implies \forall x \in (a, b) f'(x) \leq 0)$$

$$\text{Нека } t \in (a, b)$$

$$\mathbf{Ако } x > t$$

$$x > t, f(x) \downarrow \implies f(x) \leq f(t)$$

$$\implies f(x) - f(t) \leq 0, x - t > 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \leq 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{Ако } x < t$$

$$x < t, f(x) \downarrow \implies f(x) \geq f(t)$$

$$\implies f(x) - f(t) \geq 0, x - t < 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \leq 0 \quad (4)$$

$$\text{От (3) и (4)} \implies \forall x \in (a, b) f'(x) \leq 0 \quad \square$$

$$\mathbf{Th}(f(x) \in C(a, b); f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \implies f(x) \downarrow)$$

$$f(x) \downarrow \implies \forall x_1, x_2 \in (a, b); x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\text{Доп., че } \exists t_1, t_2 \in (a, b); t_1 < t_2; f(t_1) < f(t_2)$$

От Th(Лагранж за крайните нараствания) \implies

$$\exists c \in (t_1, t_2) : f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$$

$$f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \implies f'(c) \leq 0$$

$$t_1 < t_2 \implies t_2 - t_1 > 0$$

$$\implies f(t_2) - f(t_1) \leq 0 \implies f(t_2) \leq f(t_1) \implies \nmid (f(t_1) < f(t_2))$$

$$\implies f(x) \in C(a, b); f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \implies f(x) \downarrow \quad \square$$

Th $\forall x \in (a, b) f'(x) = 0 \implies \forall x \in (a, b) f(x) \equiv \text{const}$

Нека $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в (a, b) и

$$\forall x \in (a, b) f'(x) = 0 \implies \forall x \in (a, b) f(x) \equiv \text{const}$$

Д-во:

Нека $x_0 \in (a, b)$ От Th(Лагранж за крайните нараствания)

$$\implies \exists c \in (a, b) : \forall x \in (a, b) f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

$$f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \implies f'(c) = 0 \implies f(x) - f(x_0) = 0$$

$$\implies \forall x \in (a, b) f(x) = f(x_0) \implies \forall x \in (a, b) f(x) \equiv \text{const} \quad \square$$

Формула на Лайбниц за производна от по-висок ред на произведение на две функции

Нека функциите f и g са n пъти диференцируеми. Тогава n -та производна на функцията $f.g$ съществува и се дава с формулата:

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$$

Уравнение на допирателна към графика на функцията

Полином на Тейлор

$$(T_n(f, a))(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Уравнение на допирателна към графика на функцията

$$y = T_1(f, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Нека $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

f е изпъкнала \smile , ако:

$$\forall x, x_0 \in (a, b) \implies f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2) \quad (f' \uparrow)$$

$$\forall x \in (a, b) \implies f''(x) \geq 0$$

f е вдълбната \frown , ако:

$$\forall x, x_0 \in (a, b) \implies f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \geq f'(x_2) \quad (f' \downarrow)$$

$$\forall x \in (a, b) \implies f''(x) \leq 0$$

Задачи:

Задача 1.

Нека $f : [0, 6) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 6-0} f(x) = 3$

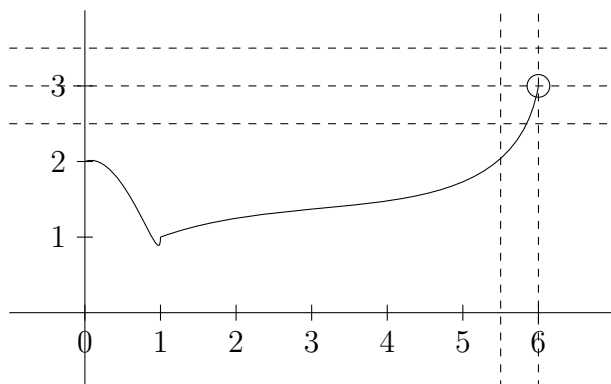
Докажете, че $\exists \min f(x)$, $x \in [0, 6)$

Док-во:

$$\exists \delta < 1 \quad \forall x \in (6 - \delta, 6) \quad f(x) \in (2, 5, 3, 5)$$

$$x > 6 - \delta \implies f(x) > 2,5 \implies x \in [0, 6 - \delta] \quad \exists \min f(x) \leq 1$$

Дайте пример за графика на функцията, която няма максимум



Задача 2.

Нека $f : [0, 6) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 4$, $f(4) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 6-0} f(x) = 1$

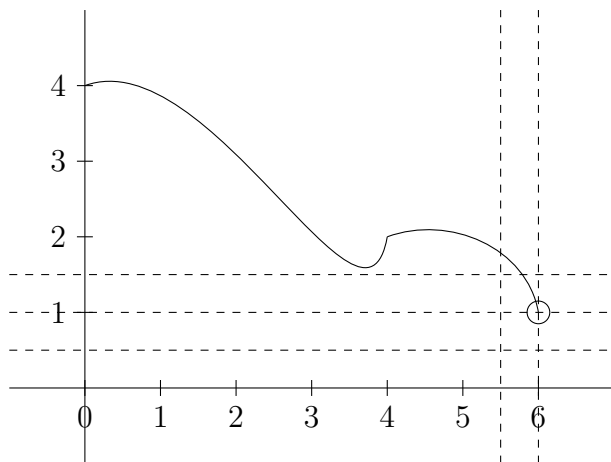
Докажете, че $\exists \max f(x)$, $x \in [1, 6)$

Док-во:

$$\exists \delta < 1 \forall x \in (6 - \delta, 6) f(x) \in (0, 5, 1, 5)$$

$$x > 6 - \delta \implies f(x) < 1, 5 \implies x \in [0, 6 - \delta] \exists \max f(x) \geq 4$$

Дайте пример за графика на функцията, която няма минимум



Използвана литература:

1. Записки от лекциите на доц. д-р. Първан Първанов от курса Диференциално и интегрално смятане 1, воден през зимния семестър на 2016г. на спец. Информатика във ФМИ към СУ "Св. Климент Охридски"

2. П. Джаков Р. Малеев Р. Леви С. Троянски, Диференциално и интегрално смятане Функции на една променлива, Факултет по Математика и Информатика СУ "Св. Климент Охридски 2007 г.

3. Е. Любенова П. Недевски К. Николов Л. Николова В. Попов, РЪКОВОДСТВО ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ ПЪРВА ЧАСТ, СОФТЕХ София 2008