Аритметични действия със сходящи редици

Иво Стратев

12 ноември 2017 г.

1 ” + ”

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$
$0 \leq |a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$
$|a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ |b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\implies \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b$

2 ” − ”

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$
$0 \leq |a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$
$|a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ |b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\implies \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$
$\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu;\ \forall n > \nu \implies |b_n - b| = |-(b_n - b)| = |-b_n + b| < \varepsilon$
$\implies \{-b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} -b$
$\implies \{a_n + (-)b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + (-b) = a - b$
$\implies \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a - b$

3 ” ∗ ”

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$
$0 \leq |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab \pm a_n b| =$
$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$
$|b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ |a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\implies |a_n||b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\implies |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies |a_n b_n - ab| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\implies \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$

4 "/"

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$
$0 \le |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab \pm a_n b| =$
$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$
$|b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ |a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\implies |a_n||b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\implies |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies |a_n b_n - ab| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\implies \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$
БОО $b > 0 \implies \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b > 0$
$\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu;\ \forall n > \nu$
$\implies |b_n - b| < \varepsilon \implies b_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$
$\varepsilon := \frac{b}{2} \implies b_n \in (b - \frac{b}{2}, b + \frac{b}{2}) \implies b_n \in (\frac{b}{2}, \frac{3b}{2})$
$\implies n < \nu \implies b_n \notin (\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}) \implies n > \nu \implies b_n > \frac{b}{2} > 0$
$\implies |\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b - b_n}{b b_n}| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|}$
$b_n > \frac{b}{2},\ |b - b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon$
$\implies \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} < \frac{2}{b^2}|b - b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\implies \{\frac{1}{b}{}_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{b}$
$\implies \{a_n \frac{1}{b}{}_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a\frac{1}{b}$
$\implies \{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{b}$