Езици и автомати

Иво Стратев

23 ноември 2017 г.

Недетерминирани крайни автомати

Определение

Недермининар краен автомат представлява:

$N = (\Sigma,\ Q,\ s,\ \Delta,\ F)$, където:

Σ - крайно множество от букви (азбука)

Q - крайно множество от състояния

$s \in Q$ - начално състояние

$\Delta\ :\ Q \times \Sigma \to 2^Q$ - функция на преходите. Тя е тотална. Ако за някоя двойка $(q,\ a)$ няма преход в автомата, то $\Delta(q,\ a) = \emptyset$;

$F \subseteq Q$ - множество от финални състояния

Дефиниция за Δ^*

$\Delta^*\ :\ Q \times \Sigma^* \to 2^Q\ :$

$\Delta^*(q,\ \varepsilon) = q$

$$\Delta^*(q,\ a\alpha) = \bigcup_{p \in \Delta(q,\ a)} \Delta^*(p,\ \alpha)$$

Език на недетерминирания автомат Δ^*, $\mathcal{L}(N)$

$\mathcal{L}(N) = \{\omega \in \Sigma^* \mid \Delta^*(s,\ \omega) \in F\}$

"Действия"с недетерминирани автомати

Нека Σ е азбука.

Нека $N_1 = (\Sigma,\ Q_1,\ s_1,\ \Delta_1,\ F_1)$ и $N_2 = (\Sigma,\ Q_2,\ s_2,\ \Delta_2,\ F_2)$ - К.Н.А и $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Нека $N = (\Sigma,\ Q,\ s,\ \Delta,\ F)$

Конкатенация, $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N_1)\ .\ \mathcal{L}(N_2)$

$Q = Q_1 \cup Q_2$

$s = s_1$

$$\Delta(q,\ a) = \begin{cases} \Delta_1(q,\ a), & q \in Q_1 \backslash F_1 \\ \Delta_2(q,\ a), & q \in Q_2 \\ \Delta_1(q,\ a) \cup \Delta_2(s_2,\ a), & q \in F_1 \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2, & s_2 \in F_2 \\ F_2, & s_2 \notin F_2 \end{cases}$$

Обединение, $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N_1) \cup \mathcal{L}(N_2)$

$s \notin Q_1 \cup Q_2$

$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$

$$\Delta(q,\ a) = \begin{cases} \Delta_1(q,\ a), & q \in Q_1 \\ \Delta_2(q,\ a), & q \in Q_2 \\ \Delta_1(s_1,\ a) \cup \Delta_2(s_2,\ a), & q = s \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s\}, & s_1 \in F_1\ \vee\ s_2 \in F_2 \\ F_1 \cup F_2, & s_1 \notin F_1\ \wedge\ s_2 \notin F_2 \end{cases}$$

Позитивна обвивка, $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N_1)^+$

$Q = Q_1$

$s = s_1$

$$\Delta(q,\ a) = \begin{cases} \Delta_1(q,\ a), & q \in Q_1 \backslash F_1 \\ \Delta_1(q,\ a) \cup \Delta_1(s,\ a), & q \in F_1 \end{cases}$$

$F = F_1$

Звезда на Клини, $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N_1)^* = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{L}(N_1)^+$

$E = (\Sigma,\ \{s_\varepsilon\},\ s_\varepsilon,\ \Delta_\varepsilon,\ \{s_\varepsilon\})$

$s_\varepsilon \notin Q_1$

$\Delta_\varepsilon(s_\varepsilon,\ \varepsilon) = \{s_\varepsilon\}$

$\forall a \in \Sigma \quad \Delta_\varepsilon(s_\varepsilon,\ a) = \emptyset$

$Q = Q_1 \cup \{s_\varepsilon\}$

$s = s_\varepsilon$

$$\Delta(q,\ a) = \begin{cases} \Delta_1(q,\ a), & q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \Delta_1(q,\ a) \cup \Delta_1(s,\ a), & q \in F_1 \\ \Delta_1(s,\ a), & q = s_\varepsilon \end{cases}$$

$F = F_1 \cup \{s_\varepsilon\}$

Лема за покачването (Pumping Lemma)

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е безкраен регулярен език.

$\exists\, p \in \mathbb{N}^+ \ :\ \forall\, \omega \in L \ :\ |\omega| \geq p,\ \exists\, x,\ y,\ z \in \Sigma^* \ :$

$\omega = xyz \ \wedge\ |xy| \leq p \ \wedge\ |y| \geq 1 \ \wedge\ (\forall\, i \in \mathbb{N}\ xy^iz \in L)$

Следствие (Контрапозиция на лемата за покачването)

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е безкраен език.

Ако е изпълнено, че:

$\forall\, p \in \mathbb{N}^+\ \exists\, \omega \in L \ :\ |\omega| \geq p,\ \forall x,\ y,\ z \in \Sigma^* \ :$

$\omega = xyz \ \wedge\ |xy| \leq p \ \wedge\ |y| \geq 1 \ \wedge\ (\exists\, i \in \mathbb{N}\ xy^iz \notin L).$

Тогава L не е регулярен.

Релация на Майхил-Нероуд и минимален автомат

Релация на Майхил-Нероуд

Нека Σ е азбука и $L \subseteq \Sigma^*$

$R_L = \{(x,\ y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \forall z \in \Sigma^*\ xz \in L \iff yz \in L\}$

$\Sigma^*/R_L = \{[\alpha]_{R_L} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$

Теорема за съществуване на минимален автомат

Ако съществува $n \in \mathbb{N} \ :\ n = |\Sigma^*/R_L|$. Тогава L е регулярен и съществува минимален Д.К.А $M = (\Sigma,\ Q_M,\ s_M,\ \delta_M,\ F_M)$, такъв че $\mathcal{L}(M) = L$.

$Q_M = \Sigma^*/R_L$

$s_M = [\varepsilon]_L$

$\delta_M([\alpha]_{R_L},\ a) = [\alpha.a]_L$

$F_M = \{[\alpha]_{R_L} \mid \alpha \in L\} = \{q \in Q_M \mid q \subseteq L\}$

Лема δ_M **е коректно дефинирана (**δ_M **задава функция)**

Лема $\delta^*_M([\varepsilon]_{R_L},\ \omega) = [\omega]_{R_L}$

Лема $\mathcal{L}(M) = L$

Еквивалетност на състояния на автомат и минимален автомат

Нека Σ е азбука и $A = (\Sigma,\ Q,\ s,\ \delta,\ F)$ е свързан, тотален Д.К.А

Еквивалетност на състояния на автомат

$R_\equiv = \{(p,\ q) \in Q \mid \forall \omega \in \Sigma^*\ \delta^*(p,\ \omega) \in F \iff \delta^*(q,\ \omega) \in F\}$

Минимален Д.К.А построен по състояния на класовете на еквивалентност на $R_\equiv$

Нека $A_\equiv = (\Sigma,\ Q_\equiv,\ s_\equiv,\ \delta_\equiv,\ F_\equiv)$

$Q_\equiv = Q/R_\equiv = \{[q]_{R_\equiv} \mid q \in Q\}$

$s_\equiv = [s]_{R_\equiv}$

$\delta_\equiv([q]_{R_\equiv},\ a) = [\delta(q,\ a)]_{R_\equiv}$

$F_\equiv = \{[q]_{R_\equiv} \mid q \in Q,\ [q]_{R_\equiv} \subseteq F\} = \{[q]_{R_\equiv} \mid q \in Q,\ [q]_{R_\equiv} \cap F \neq \emptyset\}$

Лема $\delta_\equiv$ **е коректно дефинирана (**$\delta_\equiv$ **задава функция)**

Лема $\delta^*_\equiv([s]_{R_\equiv},\ \omega) = [\delta^*(s,\ \omega)]_{R_\equiv} \implies \mathcal{L}(A_\equiv) = L$

Лема $A_\equiv$ **е с минимален брой състояния**