Решения на домашна работа № 4 по Линейна Алгебра за спец. Информатика 2017/18г.

Иво Стратев

19 януари 2018 г.

Задача 1.

Да се пресметне детерминантата:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -5 & -5 & -5 & \dots & -5 \\ -8 & 9+n.1 & 9 & 9 & 9 & \dots & 9 \\ -8 & 9 & 9+1.2 & 9 & 9 & \dots & 9 \\ -8 & 9 & 9 & 9+2.3 & 9 & \dots & 9 \\ -8 & 9 & 9 & 9 & 9+3.4 & \dots & 9 \\ & & & \dots & & & \\ -8 & 9 & 9 & 9 & 9 & \dots & 9+(n-1).n \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че ако например умножим първия ред с $\frac{9}{5}$ и го прибавим към останалите ще получим много нули, което ни е основната цел при пресмятането на детерминанти. Така получаваме, че:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -5 & -5 & -5 & \dots & -5 \\ -\frac{49}{5} & n.1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 1.2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 2.3 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 3.4 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).n \end{vmatrix}$$

Лесно можем да съобразим, че получената и дадената детерминанта всъщност са детерминанти от така наречения "вид - Пачи крак".

Забелязваме, че изключвайки елемента -1 елементите по главния диагонал са точно n на брой (това лесно се вижда, например от факта, че всички са произведние на две числа и второто число в тези пройзведения са мени от 1 до n). Тоест дадената ни детерминанта е от $n+1$ ред.

Същото така лесно можем да забележим, че елементите по главния диагонал започвайки от 1.2 до $(n-1).n$ имат еднакъв вид и могат да бъдат записани като $(i-1).i$ за $i=2,\ \ldots,\ n$, а елементът $n.1$ не е от техният вид, затова още тук ще се спрем и ще разгледаме частния случай, когато $n=1$, тогава

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -\frac{49}{5} & 1 \end{vmatrix} = -1.1 - \left(-5.-\frac{49}{5}\right) = -1-49 = -50$$

Сега нека $n>1$. Тогава всички елементите по главния диагонал са различни от нула и спокойно можем да делим на всеки от тях. Съобразявайки, че както вече казахме вида на получената детерминанта е Пачи крак. То можем или да нулираме всички елементи на първия ред с изключение на елемента -1 или да нулираме всички елементи на първия стълб с изключение на елемента -1. Понеже сме свикнали да работим по редове ще предпочетем да нулираме елементите на първия ред. За целта забелязваме, че всеки ред с изключение на първия трябва да разделим първо на елемента в главния диагонал, след това да го уножим с 5 и да го прибавим към първия. Последователно пресмятаме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1-\frac{49}{5}.\frac{5}{n.1} & 0 & -5 & -5 & -5 & \ldots & -5 \\ -\frac{49}{5} & n.1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 1.2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 2.3 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 3.4 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & & & \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1).n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1-49.\frac{1}{n.1}-\frac{49}{5}.\frac{5}{1.2} & 0 & 0 & -5 & -5 & \ldots & -5 \\ -\frac{49}{5} & n.1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 1.2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 2.3 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 3.4 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & & & \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1).n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1-49.\frac{1}{n.1}-49.\frac{1}{1.2}-\frac{49}{5}.\frac{5}{2.3} & 0 & 0 & 0 & -5 & \ldots & -5 \\ -\frac{49}{5} & n.1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 1.2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 2.3 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 3.4 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & & & \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1).n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1-49.\frac{1}{n.1}-49.\frac{1}{1.2}-49.\frac{1}{2.3}-\frac{49}{5}.\frac{5}{3.4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -5 \\ -\frac{49}{5} & n.1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 1.2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 2.3 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 3.4 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).n \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= \begin{vmatrix} -1-49.\frac{1}{n.1}-49.\frac{1}{1.2}+\dots+(-49).\frac{1}{(n-1).n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & n.1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 1.2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 2.3 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 3.4 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).n \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че можем да изкараме общия множител -49 пред скоби, както и че сумата $\frac{1}{n.1}+\frac{1}{1.2}+\dots+\frac{1}{(n-1).n}$ можем да запишем като $\frac{1}{n.1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1).i}$ използвайки наблюденията ни за общия вид на всички без първото събираемо. Получаваме, че

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1-49\left(\frac{1}{n.1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1).i}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & n.1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 1.2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 2.3 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 3.4 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ -\frac{49}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).n \end{vmatrix}$$

Развиваме детерминанта по първия ред, защото по този начин ще се отървем от първия стълб и ред (смъкваме размерността с единица) и получаваме:

$$\Delta = (-1)^{1+1}.\left[-1-49\left(\frac{1}{n.1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1).i}\right)\right].\begin{vmatrix} n.1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2.3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.4 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).n \end{vmatrix}$$

Получената детерминанта от n-ти ред можем да развием или по първия ред или по първия стълб и в двата случая ще получим:

$$\Delta = (-1)^{1+1}.\left[-1-49\left(\frac{1}{n.1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1).i}\right)\right].(n.1).\begin{vmatrix} 1.2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2.3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3.4 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1).n \end{vmatrix}$$

Отново можем да развием по първи ред/стълб и ще получим:

$$\Delta = (-1)^{1+1}.\left[-1-49\left(\frac{1}{n.1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1).i}\right)\right].(n.1).(1.2).\begin{vmatrix} 2.3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3.4 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & (n-1).n \end{vmatrix}$$

Очевидно можем да повторим развитието по първи ред/стълб и ще получим:

$$\Delta = \left[-1-49\left(\frac{1}{n.1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1).i}\right)\right].(n.1).(1.2).(2.3).(3.4).\dots.(n-1).n$$

Забелязваме, че произведението $(1.2).(2.3).(3.4).\dots.(n-1).n$ е произведение на елементите, които установихме, че имат един и същ вид тогава можем да го запишем по-компактно, чрез символа за произведение.

Тоест $(1.2).(2.3).(3.4).\dots.(n-1).n = \prod_{i=2}^{n}(i-1).i$, това произведение можем да запишем като произведение на две произведения, използвайки, че произведението на числа е комутативна операция, тоест $\prod_{i=2}^{n}(i-1).i = \prod_{i=1}^{n-1}i.\prod_{i=2}^{n}i$. Така получаваме

$$(n.1).(1.2).(2.3).(3.4).\dots.(n-1).n =$$
$$= (n.1).\prod_{i=1}^{n-1} i.\prod_{i=2}^{n} i = \prod_{i=1}^{n} i.\prod_{i=1}^{n} i = (n!).(n!) = (n!)^2.$$

Тоест получаваме, че:

$$\Delta = \left[-1 - 49\left(\frac{1}{n.1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1).i}\right)\right].(n!)^2$$

Сега единственото, което остава е да пресметнем стойността на израза

$$\frac{1}{n.1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1).i}$$

Нека пресметнем първите четири последователни стойности на израза за $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

$$\frac{1}{1.1} + \sum_{i=2}^{1} \frac{1}{(i-1).i} = 1 + 0 = 1$$
$$\frac{1}{2.1} + \sum_{i=2}^{2} \frac{1}{(i-1).i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} = 1$$
$$\frac{1}{3.1} + \sum_{i=2}^{3} \frac{1}{(i-1).i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2+3+1}{6} = 1$$
$$\frac{1}{4.1} + \sum_{i=2}^{3} \frac{1}{(i-1).i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3+6+2+1}{12} = 1$$

След като ги пресметнахме си изграждаме хипотезата, че стойността на израза е 1 за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ще докажем тази хипотеза чрез индукция по естествените числа.

Нека $\exists k \in \mathbb{N}\ :\ \frac{1}{k} + \displaystyle\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{(i-1).i} = 1.$

Тогава

$$\frac{1}{k+1}+\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{(i-1).i}=$$

$$=\frac{1}{k+1}+\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{(i-1).i}+\frac{1}{k.(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{(i-1).i}+\frac{1}{k.(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}+1+\frac{1}{k.(k+1)}=\frac{k-(k+1)+k.(k+1)+1}{k(.k+1)}=$$

$$=\frac{(k+1)-(k+1)+k.(k+1)}{k.(k+1)}=\frac{k.(k+1)}{k.(k+1)}=1$$

$$\Longrightarrow \ \forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{n}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1).i}=1.$$

Така получаваме, че

$$\Delta=\left[-1-49\left(\frac{1}{n.1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1).i}\right)\right].(n!)^2=$$

$$=(-1-49.1).(n!)^2=(-50).(n!)^2.$$

Тоест $\forall n\in\mathbb{N}\quad \Delta=(-50).(n!)^2$

Задача 2.

В линейното пространство $\mathbb{V}$ с базис $e_1,\ e_2,\ e_3$ е даден линейният оператор φ с матрица

$$\begin{pmatrix}-12 & 2 & 3\\ 6 & -13 & -6\\ -9 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

Да се намери базис, в който матрицата на φ е диагонална, както и матрицата на оператора в този базис.

Решение:

Нека $A = M_e(\varphi) = \begin{pmatrix} -12 & 2 & 3 \\ 6 & -13 & -6 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Тогава търсим корените на полинома $f_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -12-\lambda & 2 & 3 \\ 6 & -13-\lambda & -6 \\ -9 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} -12-\lambda & 2 & 3 \\ 6 & -13-\lambda & -6 \\ 3+\lambda & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12-\lambda & 2 & 3 \\ 9+\lambda & -9-\lambda & -9-\lambda \\ 3+\lambda & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (9+\lambda) \begin{vmatrix} -12-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3+\lambda & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (9+\lambda) \begin{vmatrix} -10-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7+\lambda & 0 & -7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (9+\lambda)(7+\lambda) \begin{vmatrix} -10-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (9+\lambda)(7+\lambda) \begin{vmatrix} -9-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (9+\lambda)^2(7+\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (9+\lambda)^2(7+\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(9+\lambda)^2(7+\lambda)$$

$\implies f_A(\lambda) = -(9+\lambda)^2(7+\lambda) = 0$

$\implies \lambda_{1,2} = -9, \ \lambda_3 = -7$

Търсим базис от собствени вектори на подпространстовото на $\mathbb{V}$:

$$\mathbb{V}_{-9} = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = (-9).v\} =$$

$$= \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) - (-9).v = \theta\} =$$

$$= \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) + 9.id(v) = \theta\} =$$

$$= \{v \in \mathbb{V} \mid (\varphi + 9.id)(v) = \theta\} =$$

$$= Ker(\varphi + 9.id)$$

Спрямо дадния базис оператора $\varphi + 9.id$ има матрица $A - (-9).E$. Тогава търсим ФСР на хомогенната система $(A + 9.E).v = \theta$.

$$A + 9.E = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & -6 \\ -9 & 6 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Достигнахме до едно ЛНЗ уравнение на три променливи, тоест решенията зависи от два параметъра и размерността му съвпада с кратността на корена. Тогава полагаме $v_2 = p,\ v_3 = q$. Тогава общия вид на решенията на хомогенната система е:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}.p + q \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

При $p = 3,\ q = 0$ получаваме вектора $b_1 = 2.e_1 + 3.e_2$

При $p = 0,\ q = 1$ получаваме вектора $b_2 = e_1 + e_3$.

Сега ще търсим базис на подпространстовото

$$\mathbb{V}_{-9} = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = (-7).v\} = Ker(\varphi + 7.id)$$

Спрямо дадния базис оператора $\varphi + 7.id$ има матрица $A - (-7).E$. Тогава търсим ФСР на хомогенната система $(A + 7.E).v = \theta$.

$$A + 7.E = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 6 & -6 & -6 \\ -9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Получихме две ЛНЗ уравнения на три променливи, тоест решенията зависят от един параметъра и размерността му съвпада с кратността на корена. Тогава общия вид на решенията на хомогенната система е:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2.t \\ 3.t \end{pmatrix}.$$

Полагаме $t = 1$ и получаваме вектора $b_3 = e_1 - 2.e_2 + 3.e_3$.

Размерността на $\mathbb{V}$ е 3, получихме три ЛНЗ собствени вектора (векторите b_1 и b_2 са ЛНЗ, защото така си ги избрахме и вектора b_3, защото векторите отговарящи на различни собствени стойности са ЛНЗ). Тогава векторите:

$$\begin{aligned} b_1 &= 2.e_1 + 3.e_2 \\ b_2 &= e_1 + e_3 \\ b_3 &= e_1 - 2.e_2 + 3.e_3 \end{aligned}$$

образуват базис на $\mathbb{V}$.

Знаем също и че:

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) &= (-9).b_1 = (-9).b_1 + 0.b_2 + 0.b_3 \\ \varphi(b_2) &= (-9).b_2 = 0.b_1 + (-9).b_2 + 0.b_3 \\ \varphi(b_3) &= (-7).b_3 = 0.b_1 + 0.b_2 + (-7).b_3 \end{aligned}$$

Тогава знаем, как действа φ в базиса $b_1,\ b_2,\ b_3$. По-конкретно знаем как изглежда матрицата на φ в базиса $b_1,\ b_2,\ b_3$, записвайки по стълбове координатите на образите получаваме:

$$M_b(\varphi) = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Задача 4.

В Евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени векторите

$$a_1 = (3,\ -2,\ 4,\ 1), \quad a_2 = (-2,\ 4,\ -4,\ -1),$$
$$a_3 = (2,\ -2,\ 3,\ 1), \quad a_4 = (4,\ -2,\ 5,\ 1)$$

и векторът $a = (1,\ 7,\ 2,\ -1)$.
а) Да се намери ортоногонален базис по метода на Грам-Шмид на $\mathbb{U} = l(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$.
б) Да се намери проекцията a_0 на вектора a върху $\mathbb{U}$ и перпендикулярът h спуснат от a към $\mathbb{U}$.

Решение:

а)

Първо прилагаме метода на Гаус или Гаус-Жордан за да премахнем линейно зависимите и за да намалим коефициентите.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нека

$$b_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$b_2 = (0,\ 2,\ -1,\ 0)$$
$$b_3 = (0,\ -2,\ 1,\ 1)$$

тогава $\mathbb{U} = l(b_1,\ b_2,\ b_3)$.

Ще постройм ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Понеже вектора b_1 е с най-малки коефициенти ще изберем да започнем от него (бихме могли да изберем произволен вектор измежду $b_1,\ b_2,\ b_3$). Тогава нека $u_1 = b_1$. Ще търсим вектор u_2 в следния вид $u_2 = b_2 + \lambda.u_1$, който да е ортогонален на вектора u_1, тоест $(u_2,\ u_1) = 0$.
Пресмятаме

$$(u_2,\ u_1) = (b_2 + \lambda.u_1,\ u_1) =$$

$$= (b_2,\ u_1) + (\lambda.u_1,\ u_1) =$$

$$= (b_2,\ u_1) + \lambda.(u_1,\ u_1) = 0$$

$$\Longrightarrow\ \lambda.(u_1,\ u_1) = -(b_2,\ u_1).$$

Вектора u_1 е ненулев тогава $(u_1,\ u_1) > 0$. Следователно $\lambda = -\frac{(b_2,\, u_1)}{(u_1,\, u_1)}$.

Пресмятаме скаларния квадрат на u_1, защото ще ни трябва и по-натам.

$$(u_1,\ u_1) = 1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$

Така получаваме

$$\begin{aligned} \lambda = -\frac{(b_2,\ u_1)}{2} = \\ = -\frac{1.0 + 0.2 + 1.(-1) + 0.0}{2} = \\ = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тоест $u_2 = b_2 + \frac{1}{2}.b_1 = (\frac{1}{2},\ 2,\ -\frac{1}{2},\ 0) = \frac{1}{2}.(1,\ 4,\ -1,\ 0)$.

Сега ще търсим вектор u_3 в следния вид $u_3 = b_3 + \alpha.u_1 + \beta.u_2$, който да е едновременно ортогонален на вектора u_1 и на u_2, тоест $(u_3,\ u_1) = 0$ и $(u_2,\ u_1) = 0$. Пресмятаме

$$(u_3,\ u_1) = (b_3 + \alpha.u_1 + \beta.u_2,\ u_1) =$$

$$= (b_3,\ u_1) + (\alpha.u_1,\ u_1) + (\beta.u_2,\ u_1) =$$

$$= (b_3,\ u_1) + \alpha.(u_1,\ u_1) + \beta.(u_2,\ u_1) = 0.$$

Тук използваме, че u_2 го избрахме такъв, че да бъде ортогонален на u_1. Тоест $(u_2,\ u_1) = 0$. Отново ще използваме, че $(u_1,\ u_1) > 0$.

Така получаваме $\alpha = -\frac{(b_3,\, u_1)}{(u_1,\, u_1)} = -\frac{0.1+(-2).2+1.(-1)+1.0}{2} = -\frac{(-5)}{2} = \frac{5}{2}$.

За $(u_3,\ u_2)$ пресмятаме

$$(u_3,\ u_2) = (b_3 + \alpha.u_1 + \beta.u_2,\ u_2) =$$

$$= (b_3,\ u_2) + (\alpha.u_1,\ u_2) + (\beta.u_2,\ u_2) =$$

$$= (b_3,\ u_2) + \alpha.(u_1,\ u_2) + \beta.(u_2,\ u_2) = 0.$$

Отнвово ползваме, че $(u_2,\ u_1) = 0$, както и че $u_2 \neq \theta \implies (u_2,\ u_2) > 0$. Получаваме $\beta = -\frac{(b_3,\, u_2)}{(u_2,\, u_2)}$. Отново пресмятаме отделно скаларния квадрат на u_2.

$$(u_2,\ u_2) = \frac{1}{2^2}.(1^2 + 4^2 + (-1)^2 + 0^2) = \frac{1}{4}.18 = \frac{9}{2}$$

и така получаваме

$$\begin{aligned} \beta = -\frac{(b_3,\ u_2)}{(u_2,\ u_2)} = -\frac{2}{9}.(b_3,\ u_3) = \\ = -\frac{2}{9}.\frac{1}{2}.((0,\ -2,\ 1,\ 1),\ (1,\ 4,\ -1,\ 0)) = \\ = -\frac{1}{9}.(0.1 + (-2).4 + 1.(-1) + 1.0) = -\frac{1}{9}.(-9) = 1. \end{aligned}$$

Тоест $u_3 = b_3 + \frac{5}{2}.u_1 + u_2 = \frac{1}{2}.(2.(0,\ -2,\ 1,\ 1) + 5.(1,\ 0,\ 1,\ 0) + (1,\ 4,\ -1,\ 0)) =$

$= \frac{1}{2}.(6,\ 0,\ 6,\ 2) = (3,\ 0,\ 3,\ 1).$

Така достигнахме до ортогоналният базис на $\mathbb{U}$

$$u_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$u_2 = \frac{1}{2}.(1,\ 4,\ -1,\ 0)$$
$$u_3 = (3,\ 0,\ 3,\ 1)$$

От свойството на скаларното произведение получаваме:

$$(u_2,\ u_1) = \frac{1}{2}.((1,\ 4,\ -1,\ 0),\ u_1) = 0 \implies ((1,\ 4,\ -1,\ 0),\ u_1) = 0$$

$$(u_2,\ u_3) = \frac{1}{2}.((1,\ 4,\ -1,\ 0),\ u_1) = 0 \implies ((1,\ 4,\ -1,\ 0),\ u_3) = 0.$$

Тоест за ортогонален базис на $\mathbb{U}$ можем да изберем, базисът

$$d_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$$
$$d_2 = (1,\ 4,\ -1,\ 0)$$
$$d_3 = (3,\ 0,\ 3,\ 1)$$

б)

$a = (1,\ 7,\ 2,\ -1)$

a_0 е проекцията на вектора a върху $\mathbb{U}$. Тогава $a_0 \in \mathbb{U}$. h е перпендикулярът спуснат от a към $\mathbb{U}$. Тогава $h \in \mathbb{U}^{\perp}$. От свойството на ортогоналното допълнение $\mathbb{R}^4 = U \oplus \mathbb{U}^{\perp}$ имаме, че $a = a_0 + h$. Тогава $h = a - a_0$, но $a_0 \in \mathbb{U}$ следователно вектора a_0 има координати спрямо базиса $d_1,\ d_2,\ d_3$.

Нека тогава $a_0 = \gamma_1.d_1 + \gamma_2.d_2 + \gamma_3.d_3$. Тогава $h = a - \gamma_1.d_1 - \gamma_2.d_2 - \gamma_3.d_3$.

$h \in \mathbb{U}^{\perp} \implies \forall i \in \{1,\ 2,\ 3\}\ (h, d_i) = 0 \implies (a - \gamma_1.d_1 - \gamma_2.d_2 - \gamma_3.d_3,\ d_i) =$

$= (a,\ d_i) - \sum\limits_{j \in \{1,\ 2,\ 3\}} \gamma_j.(d_j,\ d_i) = 0.$

Тъйкато за $i \neq j \quad (d_j,\ d_i) = 0$, то $\forall i \in \{1,\ 2,\ 3\} \quad (h, d_i) = (a,\ d_i) - \gamma_i.(d_i,\ d_i) = 0$

$\implies \gamma_i = \frac{(a,\ d_i)}{(d_i,\ d_i)}.$

$$\gamma_1 = \frac{(a,\ d_1)}{(d_1,\ d_1)} = \frac{1.1 + 7.0 + 2.1 + (-1).0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\gamma_2 = \frac{(a,\ d_2)}{(d_2,\ d_2)} = \frac{1.1 + 7.4 + 2.(-1) + (-1).0}{9} = \frac{31}{9}$$

$$\gamma_3 = \frac{(a,\ d_3)}{(d_3,\ d_3)} = \frac{1.3 + 7.0 + 2.3 + (-1).1}{3^2 + 0^2 + 3^2 + 1^2} = \frac{10}{19}.$$

Тогава $a_0 = \frac{3}{2}.d_1 + \frac{31}{9}.d_2 + \frac{10}{19}.d_3 = \frac{1}{342}.(172.d_1 + 18.d_2 + 38.d_3) =$

$= \frac{1}{342}.(172 + 18 + 114,\ 18.3,\ 172 - 18 + 18.3,\ 38) =$

$= \frac{1}{342}.(304,\ 54,\ 208,\ 38)$ и $h = a - a_0 = (1,\ 7,\ 2,\ -1) - \frac{1}{342}.(304,\ 54,\ 208,\ 38)$