Задачи за групи

Иво Стратев

25 октомври 2019 г.

Еквивалентна дефиниция за Група

$(G, e, *, inv)$ е група тогава и само тогава когато:

1. G е непразно множество;
2. $e \in G$;
3. $* : G \times G \to G$ - бинарна операция;
4. $inv : G \to G$ - унарна операция;
5. $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)[\ (a * b) * c = a * (b * c)\ ]$;
6. $(\forall g \in G)[\ g * e = g = e * g\ ]$;
7. $(\forall g \in G)[\ g * inv(g) = e = inv(g) * g\ ]$

Задача 1.

Нека $(G, e_G, *, inv_G)$ и $(K, e_K, \odot, inv_K)$ са групи.
Разглеждаме декартовото произведение на G и K.
Тоест $G \times K = \{< g, k > \ | \ g \in G,\ k \in K\}$.
Дефинираме

$$\begin{aligned} < a, b > \ \oplus \ < c, d > &= < a * c, b \odot d > \\ e &= < e_G, e_K > \\ inv(< g, k >) &= < inv_G(g), inv_K(k) > \end{aligned}$$

Докажете, че

- $(\forall a \in G)(\forall c \in G)(\forall b \in K)(\forall d \in K)[\ < a, b > \ \oplus \ < c, d > \in G \times K]$
- $(\forall g \in G)(\forall k \in K)[\ inv(< g, k >) \in G \times K\ ]$
- $(G \times K, e, \oplus, inv)$ е група.

Задача 2.

Нека $(G, e_G, *, inv_G)$ е група. Нека X е непразно множество.
Нека $Func(X, G) = \{f \mid f : X \to G\}$ е множеството на фукциите от X в G.
Нека $\theta = (x \mapsto e_G) \in Func(X, G)$ е константната функция, която на всеки елемент от X съпоставя e_G.
Нека $inv(f) = (x \mapsto inv_G(f(x)))$. Тоест $inv = (f \mapsto (x \mapsto inv_G(f(x))))$.
Проверете, че $inv : Func(X, G) \to Func(X, G)$.
Нека $f \in Func(X, G)$ и $g \in Func(X, G)$ и нека означим
$f \otimes g = (x \mapsto f(x) * g(x))$.
Проверете, че $(\forall f \in Func(X, G))(\forall g \in Func(X, G))[\, f \otimes g \in Func(X, G)\,]$.
Докажете, че $(Func(X, G), \theta, \otimes, inv)$ е група.