Зад. 1. Нека $\Gamma\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ и $\Delta\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ са следните оператори:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases} \quad \text{и} \quad \Delta(f) = f \circ f.$$

а) Определете операторите $\Gamma \circ \Delta$ и $\Delta \circ \Delta$.
б) Намерете явния вид на функциите $\Gamma(f)$, $(\Gamma \circ \Delta)(f)$ и $(\Delta \circ \Delta)(f)$,
където $f(x) = x + 1$ за всяко $x \in \mathbb{N}$.

Решение на Зад. 1. а) $(\Gamma \circ \Delta)(f)(x) \simeq \Gamma(\Delta(f))(x) \simeq \Gamma(f \circ f)(x) \simeq \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x.f(f(x-1)) & , x > 0 \end{cases}.$

$(\Delta \circ \Delta)(f) = \Delta(\Delta(f)) = \Delta(f \circ f) = (f \circ f) \circ (f \circ f) = f^4.$

б) $\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x.((x-1)+1) & , x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases}.$

$(\Gamma \circ \Delta)(f)(x) \simeq \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x.(((x-1)+1)+1) & , x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x(x+1) & , x > 0 \end{cases}.$

$(\Delta \circ \Delta)(f)(x) \simeq f^4(x) \simeq ((((x+1)+1)+1)+1) = x + 4.$

Зад. 2. а) Определете дали следната функция $f\colon\ \mathbb{N}_\perp^2 \to \mathbb{N}_\perp$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x.y, & \text{ако } x > 0 \ \&\ y \geq 0 \\ \perp, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

е точна, монотонна или непрекъсната. Обосновете се.

б) Нека f, g_1 и g_2 са функции от $\mathcal{F}_2^\perp$. Вярно ли е, че:

– ако f, g_1 и g_2 са точни функции, то и $f(g_1, g_2)$ е точна;

– ако f, g_1 и g_2 са монотонни, то и $f(g_1, g_2)$ е монотонна?

Обосновете отговорите си.

Решение на Зад. 2. а) От лекции знаем, че ако една функция е точна, то тя е монотонна и една функция е монотонна ТСТК е непрекъсната.
Тоест ако покажем, че f е точна, то тя ще е и монотонна и непрекъсната.
Обаче f не е точна, защото $f(0, \perp) = 0 \neq \perp$. Нека проверим дали е монотонна, като се възползваме от следното твърдение от лекции:
Една функция е монотонна ТСТК е монотонна по всеки аргумент.

- (по първия аргумент): Нека $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}_\perp$. Тогава $f(\perp, b) = \perp \sqsubseteq f(a, b)$ и значи f е монотнна по първия си аргумент.

- (по втория): Нека $a \in \mathbb{N}_\perp$ и $b \in \mathbb{N}$. Тогава са възможни два случая.

  1. $a = \perp$. Тогава $f(a, \perp) = \perp = f(a, b)$.
  2. $a \in \mathbb{N}$. Тогава $f(a, \perp) = \perp \sqsubseteq a.b = f(a, b)$.

  Следователно f е монотнна по втория си аргумент.

Следователно f е монотнна и непрекъсната.

б)

- (*точност*): Нека $a, b \in \mathbb{N}_\perp$ са такива, че $a = \perp \vee b = \perp$.
  Тогава $g_1(a, b) = \perp$ и значи $(f(g_1, g_2))(a, b) = f(g_1(a, b), g_2(a, b)) = f(\perp, g_2(a, b)) = \perp$.
  Следователно $f(g_1, g_2)$ е точна, защото g_1, g_2, f са точни.

- (*монотонност*): Нека $a, b, c, d \in \mathbb{N}_\perp$ са такива, че $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$.
  Тогава $g_1(a, b) \sqsubseteq g_1(c, d)$ и $g_2(a, b) \sqsubseteq g_2(c, d)$.
  Следователно $(g_1(a, b), g_2(a, b)) \sqsubseteq (g_1(c, d), g_2(c, d))$.
  Следователно $(f(g_1, g_2))(a, b) \sqsubseteq (f(g_1, g_2))(c, d)$, понеже f е монотонна.
  Следователно $f(g_1, g_2)$ е монотонна.

Зад. 3. Нека $(A, \leqslant, a_0)$ и $(B, \leqslant', b_0)$ са ОС, а $f\colon A \to B$ е сюрективно изображение, такова че за всички $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \leqslant a_2 \implies f(a_1) \leqslant' f(a_2).$$

Докажете, че:

а) $f(a_0) = b_0$.

б) Ако редицата $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ е монотонно растяща в A, то редицата $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ е монотонно растяща в B.

в) За всяка монотонно растяща редица $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в A е изпълнено:

$$\operatorname*{lub'}_{n\in\mathbb{N}} f(a_n) \ \leqslant' \ f(\operatorname*{lub}_{n\in\mathbb{N}} a_n),$$

където с lub и lub' са означени т.г.гр. в A и B, съответно.

г) Дайте пример за ОС, за които $\operatorname*{lub'}_{n\in\mathbb{N}} f(a_n) \ \neq \ f(\operatorname*{lub}_{n\in\mathbb{N}} a_n)$.

Решение на Зад. 3. а) Понеже $f(a_0) \in B$, то $b_0 \leqslant' f(a_0)$. Но f е сюрекция. Нека тогава $a \in A$ е такова, че $b_0 = f(a)$. Тогава $a_0 \leqslant a$ и значи $f(a_0) \leqslant' f(a) = b_0$. Така $b_0 \leqslant' f(a_0)$ и $f(a_0) \leqslant' b_0$ и понеже $\leqslant'$ е антисиметрична, то $f(a_0) = b_0$.

б) Нека $n \in \mathbb{N}$. Тогава $a_n \leqslant a_{n+1}$ и значи $f(a_n) \leqslant' f(a_{n+1})$. Следователно $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ е монотонно растяща в $(B, \leqslant', b_0)$.

в) Нека $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ е монотонно растяща редица в $(A, \leqslant, a_0)$. Тогава от б) следва, че $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ е монотонно растяща в $(B, \leqslant', b_0)$ и значи $\operatorname*{lub'}_{n\in\mathbb{N}} f(a_n)$ съществува. Нека $n \in \mathbb{N}$ тогава $a_n \leqslant \operatorname*{lub}_{n\in\mathbb{N}} a_n$ и значи $f(a_n) \leqslant' f\left(\operatorname*{lub}_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)$.
Но тогава $f\left(\operatorname*{lub}_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)$ е горна граница за $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Следователно $\operatorname*{lub'}_{n\in\mathbb{N}} f(a_n) \ \leqslant' \ f(\operatorname*{lub}_{n\in\mathbb{N}} a_n)$.

г) Нека $K = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ и нека $\leqslant$ е следната наредба $a \leqslant b \overset{\mathrm{def}}{\iff} (a \in \mathbb{N} \ \& \ b \in \mathbb{N} \ \& \ a \leq_{\mathbb{N}} b) \ \vee \ b = \mathbb{N}$.
Ясно е, че $(K, \leqslant, 0)$ е ОС. Нека $T = \{\emptyset, \ \{\emptyset\}\}$ и нека $\prec = \{\{(\emptyset, \{\emptyset\})\}\}$. Нека $\preceq$ е рефлексивното затваряне на $\prec$ в T.
Тогава $(T, \preceq, \emptyset)$ е ОС. Нека $q = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогава q е монотонно растяща редица в $(K, \leqslant, 0)$ и т.г.гр. е $\mathbb{N}$.
Нека $f : K \to T$ е такава, че $f(x) = \begin{cases} \emptyset & , \ x \in \mathbb{N} \\ \{\emptyset\} & , \ x = \mathbb{N} \end{cases}$. Тогава $\operatorname*{lub_{\preceq}}_{n\in\mathbb{N}} f(q_n) = \operatorname*{lub_{\preceq}}_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \operatorname*{lub_{\preceq}}_{n\in\mathbb{N}} \emptyset = \emptyset$.
От друга страна $f\left(\operatorname*{lub_{\leqslant}}_{n\in\mathbb{N}} q_n\right) = f(\mathbb{N}) = \{\emptyset\}$ и значи $\operatorname*{lub_{\preceq}}_{n\in\mathbb{N}} f(q_n) = \emptyset \prec \{\emptyset\} = f\left(\operatorname*{lub_{\leqslant}}_{n\in\mathbb{N}} q_n\right)$.
Следователно $\operatorname*{lub_{\preceq}}_{n\in\mathbb{N}} f(q_n) \neq f\left(\operatorname*{lub_{\leqslant}}_{n\in\mathbb{N}} q_n\right)$.

Колегата Данчо (*Йордан Петров*) се сети за аналогичен на този пример.
Може би неговият беше по-ясен, но този е малко по-*интересен*.

Зад. 4. Нека $\Gamma\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ е непрекъснат оператор. Докажете, че за всяко $n \geq 1$ са еквивалентни условията:

- $f \in \mathcal{F}_1$ е най-малката функция със свойството $\Gamma(f) \subseteq f$;
- $f \in \mathcal{F}_1$ е най-малката функция със свойството $\Gamma^n(f) \subseteq f$.

Решение на Зад. 4. Както знаем от лекции понеже Γ е непрекъснат,
то най-малката функция със свойството $\Gamma(f) \subseteq f$ съвпада с най-малката неподвижна точка на Γ.
Лесно се доказва по индукция, че за всяко $n \in \mathbb{N}_+$ операторът Γ^n е непрекъснат.
Нека $n \in \mathbb{N}$. Ще докажем, че е в сила $\mathrm{lfp}(\Gamma^{n+1}) = \mathrm{lfp}(\Gamma)$. От където ще следва условието на задачата.

От теорията знаем, че $\mathrm{lpf}(\Gamma^{n+1}) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (\Gamma^{n+1})^k(\emptyset) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Gamma^{kn+k}(\emptyset)$ и $\mathrm{lfp}(\Gamma) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Gamma^k(\emptyset)$
и редиците $\{\Gamma^{kn+k}(\emptyset)\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\Gamma^k(\emptyset)\}_{k\in\mathbb{N}}$ са монотонно растящи и сходящи.

Сега ще докажем частен случай на добре познато твърдение от Анализа:
Границата на подредица на сходяща редица съвпада с границата на самата редицата.

Нека $k \in \mathbb{N}$. Тогава $\Gamma^k \subseteq \Gamma^{kn+k} \subseteq \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} \Gamma^{ln+l}(\emptyset) = \mathrm{lfp}(\Gamma^{n+1})$ и значи $\mathrm{lfp}(\Gamma^{n+1})$ е горна граница за редицата $\{\Gamma^l(\emptyset)\}_{l\in\mathbb{N}}$.
Следователно $\mathrm{lfp}(\Gamma) = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} \Gamma^l(\emptyset) \subseteq \mathrm{lfp}(\Gamma^{n+1})$.

Нека $k \in \mathbb{N}$. Тогава $\Gamma^{kn+k} \subseteq \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} \Gamma^l(\emptyset) = \mathrm{lfp}(\Gamma)$, защото $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} \Gamma^l(\emptyset)$ е т.г.гр. на редицата $\{\Gamma^l(\emptyset)\}_{l\in\mathbb{N}}$, а $kn + k \in \mathbb{N}$.
Следователно $\mathrm{lfp}(\Gamma)$ е горна граница за редицата $\{\Gamma^{ln+l}(\emptyset)\}_{l\in\mathbb{N}}$. Следователно $\mathrm{lfp}(\Gamma^{n+1}) = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} \Gamma^{ln+l}(\emptyset) \subseteq \mathrm{lfp}(\Gamma)$.

Така $\mathrm{lfp}(\Gamma^{n+1}) = \mathrm{lfp}(\Gamma)$ и от това следва условието на задачата.