Теория за ДИС 1.1

Иво Стратев

21 ноември 2017 г.

Околности. Определения за граница на редица и функция

Околности

Околност на $a \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |x - a| < \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$

Пробита околност на $a \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 < |x - a| < \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon,\ a) \cup (a,\ a + \varepsilon)$

Околност на $a - 0 \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad a - \varepsilon < x < a \iff x \in (a - \varepsilon,\ a)$

Околност на $a + 0 \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad a < x < a + \varepsilon \iff x \in (a,\ a + \varepsilon)$

Околност на ∞

$\forall M > 0 \in \mathbb{R} \quad x > M \iff x \in (M,\ \infty)$

Околност на $-\infty$

$\forall M < 0 \in \mathbb{R} \quad x < M \iff x \in (-\infty,\ M)$

Редици

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n \to \infty]{} a \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n > \nu \implies a_n > C$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

$$\forall C \in \mathbb{R}^- \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n > \nu \implies a_n < C$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a+0$$

$$\forall \varepsilon \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n > \nu \implies a < a_n < a+\varepsilon$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a-0$$

$$\forall \varepsilon \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n > \nu \implies a-\varepsilon < a_n < a$$

Функции

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A \in \mathbb{R}$$

Хайне

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &\xrightarrow[x\to x_0]{} A \in \mathbb{R} \\ \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ x_n \in \mathbb{D} \ &: \ x_n \neq x_0 \\ \implies \{f(x_n)\} &\xrightarrow[n\to\infty]{} A \end{aligned}$$

Коши

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &\xrightarrow[x\to x_0]{} A \in \mathbb{R} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0,\ x \in \mathbb{D} \ &: \ 0 < |x - x_0| < \delta \\ \implies |f(x) - A| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Лява (Дясна) граница

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0-0 \ (x_0+0)]{} A$$

Хайне

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &\xrightarrow[x\to x_0-0 (x_0+0)]{} A \\ \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0-0 \ &(x_0+0), \\ x_n \in \mathbb{D} \ : \ x_n < x_0 \ &(x_n > x_0) \\ \implies \{f(x_n)\} &\xrightarrow[n\to\infty]{} A \end{aligned}$$

Коши

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &\xrightarrow[x\to x_0-0 \ (x_0+0)]{} A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0,\ x \in \mathbb{D} \ &: \\ x_0 - \delta < x_n < x_0 \ &(x_0 < x_n < x_0 + \delta) \\ \implies |f(x) - A| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} A \in \mathbb{R}$

Хайне

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$

$f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} A \in \mathbb{R}$

$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty,\ x_n \in \mathbb{D}$

$\implies \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

Коши

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$

$f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} A \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ (M < 0),\ x \in \mathbb{D}\ :\ x > M\ (x < M)$

$\implies |f(x) - A| < \varepsilon$

$f(x) \xrightarrow[x\to c]{} \pm\infty$ при $c = a \in R$ или $c = a - 0$ или $c = a + 0$ или $c = \pm\infty$

Хайне за $f(x) \xrightarrow[x\to c]{} \pm\infty$ при $c = a \in R$ или $c = a - 0$ или $c = a + 0$ или $c = \pm\infty$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow[x\to c]{} \pm\infty$
$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} c \quad x_n \in \mathbb{D}$
$\implies \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$

Коши за $f(x) \xrightarrow[x\to a\in\mathbb{R}]{} \pm\infty$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$
$\forall A > 0\ (A < 0)\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathbb{D}\ :\ 0 < |x - a| < \delta$
$\implies f(x) > A\ (f(x) < A)$

Коши за $f(x) \xrightarrow[x\to a\pm 0]{} \pm\infty$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a\pm 0]{} \pm\infty$
$\forall A > 0\ (A < 0)\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathbb{D}\ :\ a < x < a + \delta\ (a - \delta < x < a)$
$\implies f(x) > A\ (f(x) < A)$

Коши за $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$
$\forall A > 0\ (A < 0)\ \exists B > 0\ (B < 0),\ x \in \mathbb{D}\ :\ x > B\ (x < B)$
$\implies f(x) > A\ (f(x) < A)$

Отрицания на определения за граници на Функции

$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to x_0]{}} A \in \mathbb{R}$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to x_0]{}} A \in \mathbb{R}$$
$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ x_n \in \mathbb{D},\ x_n \neq x_0$$
$$\cancel{\Longrightarrow} \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to x_0]{}} A \in \mathbb{R}$$
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0,\ x \in \mathbb{D}\ :\ 0 < |x - x_0| < \delta$$
$$\Longrightarrow\ |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

Лява (Дясна) граница

$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to x_0-0\ (x_0+0)]{}} A$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to x_0-0\ (x_0+0)]{}} A$$
$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 - 0\ (x_0 + 0),$$
$$x_n \in \mathbb{D}\ :\ x_n < x_0\ (x_n > x_0)$$
$$\cancel{\Longrightarrow} \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to x_0-0\ (x_0+0)]{}} A$$
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0, x \in \mathbb{D};$$
$$x_0 - \delta < x_n < x_0\ (x_0 < x_n < x_0 + \delta)$$
$$\Longrightarrow\ |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}} A \in \mathbb{R}$

Хайне

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}} A \in \mathbb{R}$$
$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty,\ x_n \in \mathbb{D}$$
$$\cancel{\Longrightarrow} \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Коши

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}} A \in \mathbb{R}$$
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall M > 0\ (M < 0),\ x \in \mathbb{D}\ :\ x > M\ (x < M)$$
$$\Longrightarrow\ |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

$f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to c]{}} \pm\infty$ при $c = a \in R$ или $c = a - 0$ или $c = a + 0$ или $c = \pm\infty$

Хайне за $f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to c]{}} \pm\infty$ **при** $c = a \in R$ **или** $c = a - 0$ **или** $c = a + 0$ **или** $c = \pm\infty$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to c]{}} \pm\infty$
$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} c \quad x_n \in \mathbb{D}$
$\cancel{\Longrightarrow} \{f(x_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$

Коши за $f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to a\in\mathbb{R}]{}} \pm\infty$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) \cancel{\xrightarrow[x\to a]{}} \pm\infty$
$\exists A > 0\ (A < 0)\ \forall \delta > 0,\ x \in \mathbb{D}\ :\ 0 < |x - a| < \delta$
$\Longrightarrow\ f(x) \leq A\ (f(x) \geq A)$

Коши за $f(x) \underset{x \to a\pm 0}{\not\longrightarrow} \pm\infty$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) \underset{x \to a\pm 0}{\not\longrightarrow} \pm\infty$
$\exists A > 0 \ (A < 0) \ \forall \delta > 0, \ x \in \mathbb{D} \ : \ a < x < a + \delta \ (a - \delta < x < a)$
$\implies f(x) \leq A \ (f(x) \geq A)$

Коши за $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\not\longrightarrow} \pm\infty$

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \quad f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\not\longrightarrow} \pm\infty$
$\exists A > 0 \ (A < 0) \ \forall B > 0 \ (B < 0), x \in \mathbb{D} \ : \ x > B \ (x < B)$
$\implies f(x) \leq A \ (f(x) \geq A)$

Аритметични действия със сходящи редици

$" + "$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

$0 \leq |a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$
$(|a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \ |b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$

$\implies \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b \quad \square$

$" - "$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

$0 \leq |a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$
$(|a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \ |b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$

$\implies \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b \quad \square$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$
$\implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ n > \nu \implies |b_n - b| = |-(b_n - b)| = |-b_n - (-b)| < \varepsilon$
$\implies \{-b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} -b \quad \square$

$\implies \{a_n + (-)b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + (-b) = a - b$
$\implies \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a - b \quad \square$

$" * "$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

$$0 \le |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab \pm a_n b| =$$

$$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

$$(|b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ |a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\implies |a_n||b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\implies |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies |a_n b_n - ab| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\implies \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$$

"/"

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

$$0 \le |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab \pm a_n b| =$$

$$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

$$|b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ |a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\implies |a_n||b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\implies |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies |a_n b_n - ab| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\implies \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab \quad \square$$

БОО $b > 0 \implies \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} b > 0$
$\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > \nu$
$\implies |b_n - b| < \varepsilon \implies b_n \in (b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$

$$\varepsilon := \tfrac{b}{2} \implies b_n \in (b - \tfrac{b}{2}, b + \tfrac{b}{2}) \implies b_n \in (\tfrac{b}{2}, \tfrac{3b}{2})$$

$$\implies n < \nu \implies b_n \notin (\tfrac{b}{2}, \tfrac{3b}{2}) \implies n > \nu \implies b_n > \tfrac{b}{2} > 0$$

$$\implies |\tfrac{1}{b_n} - \tfrac{1}{b}| = |\tfrac{b - b_n}{b b_n}| = \tfrac{|b - b_n|}{|b||b_n|}$$

$$b_n > \tfrac{b}{2},\ |b - b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon$$

$$\implies \tfrac{|b - b_n|}{|b||b_n|} < \tfrac{2}{b^2}|b - b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\implies \{\tfrac{1}{b}{}_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tfrac{1}{b} \quad \square$$

$$\implies \{a_n \tfrac{1}{b_n}\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a\tfrac{1}{b} \implies \{\tfrac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tfrac{a}{b} \quad \square$$

Th $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a,\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0 \implies a \geq 0$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \implies \forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$

Допс. $a < 0 \implies (a_n - a) > 0 \implies |a_n - a| > \varepsilon \implies \lightning(\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a)$

$a-\varepsilon \quad a \quad a+\varepsilon \quad 0 \quad a_n$

Th $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a,\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n < 0 \implies a \leq 0$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \implies \forall\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ n > \nu \implies |a_n - a| < \varepsilon$

Допс. $a > 0 \implies (a_n - a) < 0 \implies |a_n - a| > \varepsilon \implies \lightning(\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} a)$

$a_n \quad 0 \quad a-\varepsilon \quad a \quad a+\varepsilon$

Th(За непрекъснатите ф-ци)

Ако $f(x)$ е непрекъсната в околност на $x_0,\ f(x_0) > 0\ (f(x_0) < 0)$ и $f(x)$ е непрекъсната в x_0
$\exists\delta > 0\ :\ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)\ f(x) > \frac{f(x_0)}{2}\ (f(x) < \frac{f(x_0)}{2})$

Д-во: $f(x)$ е непрекъсната в околност на x_0
$\implies \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} = y_0,\ \forall y_0\ \exists\delta_{y_0} > 0\ :\ |x - x_0| < \delta_{y_0}$

$\implies |f(x) - f(x_0)| < y_0 \iff f(x_0) - y_0 < f(x) < f(x_0) + y_0$

$\implies \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \implies f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \quad \square$

Th(Вайерщрас)

Нека $f(x) \in C[a,\ b]$ то тя е ограничена и има НГС и НМС.

Д-во: $f(x)$ - ограничена $\iff \exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a,\ b] \quad f(x) \leq M$

Доп., че $f(x)$ е неограничена $\implies \forall M \in \mathbb{R}\ \exists x_M \in [a,\ b]\ f(x_M) > M$

$\implies \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a,\ b]\ f(x_n) \geq n$

От Th(Болцано-Вайерщрас за редици)

$\implies \exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – сходяща подредица на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

и $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in [a,\ b]$.

От $f(x) \in C[a,\ b] \implies \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

$f(x_0) \geq n \implies f(x_{n_k}) \geq n_k > k \mid \lim\limits_{k\to\infty}$

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq \lim\limits_{k\to\infty} k = \infty \implies \lightning(\{f(x_{n_k})\}$ е ограничена$) \quad \square$

Нека $M = sup\{f(x) \mid x \in [a,\ b]\}$ Доп., че $\forall x \in [a,\ b] \quad f(x) < M$

$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$

От аритметични действия с неп. функции $\implies g(x)$ е непрекъсната

$\implies \exists C > 0\ :\ \forall x \in [a,\ b] \quad g(x) \leq C$

$\implies \frac{1}{M-f(x)} \leq C \mid \frac{M-f(x)}{C}$

$\frac{1}{C} \leq M - f(x)$

$f(x) \leq M - \frac{1}{C}\ \forall x \in [a,\ b] \implies \lightning(M = sup\{f(x) \mid x \in [a,\ b]\})$

$\implies \exists x_{max}\ f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,\ b],\ f(x_{max}) = M \quad \square$

Нека $m = inf\{f(x) \mid x \in [a,\ b]\}$ Доп., че $\forall x \in [a,\ b] \quad f(x) > m$

$h(x) = \frac{1}{f(x) - m}$

От аритметични действия с неп. функции $\implies h(x)$ е непрекъсната

$\implies \frac{1}{f(x)-m} \leq C \mid \frac{f(x)-m}{C}$

$\frac{1}{C} \leq f(x) - m$

$\frac{1}{C} + m \leq f(x)\ \forall x \in [a,\ b] \implies \lightning(m = inf\{f(x) \mid x \in [a,\ b]\})$

$\implies \exists x_{min}\ f(x) \geq m \quad \forall x \in [a,\ b],\ f(x_{min}) = m \quad \square$

Th(Болцано)

Нека $f(x) \in C[a,\ b],\ f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a,\ b)\ :\ f(c) = 0$

Д-во: БОО $f(a) > 0,\ f(b) < 0$

$A = \{\forall x \in [a,\ b] : f(x) > 0\} \subset [a,\ b] \implies A$ е ограчено
$c = limsupA$

Допс. $f(c) > 0$

$f(c) > 0 \implies \exists \delta > 0\ :\ \forall x \in (c - \delta, ; c + \delta)\ f(x) > \frac{f(c)}{2} > 0$

$\forall x > c\ f(x) \le 0 \implies \lightning(f(c) > 0)$ (1)

Допс. $f(c) < 0$

$f(c) < 0 \implies \exists \varepsilon > 0\ :\ \forall x \in (c - \varepsilon, ; c + \varepsilon)\ f(x) < \frac{f(c)}{2} < 0$

$\forall x > c\ f(x) \ge 0 \implies \lightning(f(c) < 0)$ (2)

От (1) и (2) $\implies \exists c \in (a,\ b)\ f(c) = 0 \quad \square$

Th Болцано-Вайерщрас (за междинните стойностии)

Нека $f(x) \in C[a,\ b],\ m = minf(x)$ и $n = maxf(x)$

$\implies \forall c \in [m,\ n]\ \exists x_c \in [a,\ b]\ :\ f(x_c) = c$

Д-во: $h(x) = f(x) - c$

Ако $c = m$ или $c = n \implies \exists x_c \in [a,\ b]\ :\ f(x_c) = c$

Ако $c \in (m,\ n) \quad d = min\{x_{min},\ x_{max}\} \quad e = max\{x_{min},\ x_{max}\}$

$h(x) : [d,\ e],\ h(d)h(e) < 0$

От Th(Болцано) за h в $[d,\ e] \implies \exists x_c\ :\ h(x_c) = f(x_c) - c = 0$

$\implies \exists x_c \in [a,\ b]\ :\ f(x_c) = c \quad \square$

Теоремки за средни стойности. Връзка между знак на първа производна и монотоност на функция. + Теоремка за константа функция

Th(Ферма)

Нека $f(x)$ е дефинирна в околност на x_0 - лок. екст. и $f(x)$ е диференцируема в x_0, тогава $f'(x_0) = 0$

Д-во:

Ако x_0 е т. лок. макс.

$\exists \delta > 0\ :\ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \quad f(x) \le f(x_0)$

$\implies f(x) - f(x_0) \le 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$

Ако $x > x_0$

$x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$

$$\implies \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \ (1)$$

Ако $x < x_0$

$x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$

$$\implies \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \ (2)$$

От (1) и (2) $\implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$

Ако x_0 е т. лок. мин.

$\exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \quad f(x) \geq f(x_0)$

$\implies f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$

Ако $x > x_0$

$x > x_0 \implies x - x_0 > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$

$$\implies \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \ (3)$$

Ако $x < x_0$

$x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$

$$\implies \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \ (4)$$

От (3) и (4) $\implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0 \quad \square$

Th(Рол)

Нека $f(x) \in C[a,\ b]$ и $f(x)$ е диференцируема в $(a,\ b)$ и $f(a) = f(b)$
$\exists c \in (a,\ b) \ : \ f'(c) = 0$

Д-во:

Ако $f(x) \equiv const \implies f'(x) = 0$

Нека $f(x) \not\equiv const$

От Th(Вайерщрас) $\implies$
$\exists x_{min},\ x_{max} \in [a,\ b] \ :$

$f(x_{max}) = max\{f(x) \mid x \in [a,\ b]\}$
$f(x_{min}) = min\{f(x) \mid x \in [a,\ b]\}$

Ако $x_{min},\ x_{max} \notin (a,\ b)$

$x_{min} \neq x_{max}, f(a) = f(b) \implies minf(x) = maxf(x)$
$\implies f(x) \equiv const \implies \lightning(f(x) \not\equiv const)$

Ако поне една от x_{min} **или** $x_{max} \in (a,\ b)$

Ако $x_{max} \in (a,\ b),\ c = x_{max}$ в противен случай $c = x_{min}$
$\implies c \in (a,\ b)$ - лок. екст. от Th(Ферма)
$\implies f'(c) = 0 \quad \square$

Th(За крайните нараствания на Лагранж)

Нека $f(x) \in C[a,\ b]$ и $f(x)$ е диференцируема в $(a,\ b)$.
Тогава $\exists c \in (a,\ b)\ :\ f(b) - (a) = f'(c)(b - a)$

Д-во:

$h(x) = f(x) - kx$

$h(a) = f(a) - ka = f(b) - kb = h(b)$

$k\ :\ f(a) - ka = f(b) - kb$

$kb - ka = f(b) - f(a)$

$k(b - a) = f(b) - f(a)$

$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

От Th(Рол) за $h(x) \implies \exists c \in (a,\ b)\ :\ h'(c) = 0$

$h'(c) = f'(c) - k = 0$

$\implies f'(c) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\implies f'(c)(b - a) = f(b) - f(a) \quad \square$

Обобщена Th(За крайните нараствания на Коши)

Нека $f(x),\ g(x) \in C[a,\ b]$ и $f(x),\ g(x)$ са диференцируеми в $(a,\ b)$,
като $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,\ b)$. Тогава $\exists c \in (a,\ b)\ :\ \frac{f(b)-(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Д-во:

Коректност:

Допс., че $g(b) - g(a) = 0$ то от Th(Рол)
$\implies \exists c_2 \in (a,\ b)\ :\ g'(c_2) = 0$

$\implies \lightning (g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,\ b)) \quad \square$

$h(x) = f(x) - kg(x)$

$k\ :\ h(a) = f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) = h(b)$

$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b)$

$kg(b) - kg(a) = f(b) - f(a)$

$k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$

$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

От Th(Рол) за $h(x) \implies \exists c \in (a,\ b)\ :\ h'(c) = 0$

$h'(c) = f'(c) - kg'(x) = 0$

$\implies f'(c) = kg'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$

$\implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \square$

Th($f(x) \uparrow \in C(a,\ b) \iff \forall x \in (a,\ b)\ f'(x) \geq 0$)

Th($f(x) \uparrow \in C(a,\ b) \implies \forall x \in (a,\ b)\ f'(x) \geq 0$)

Нека $t \in (a,\ b)$

Ако $x > t$

$x > t,\ f(x) \uparrow \implies f(x) \geq f(t)$

$\implies f(x) - f(t) \geq 0,\ x - t > 0$

$$\implies \lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \geq 0 \quad (1)$$

Ако $x < t$

$x < t,\ f(x) \uparrow \implies f(x) \leq f(t)$

$\implies f(x) - f(t) \leq 0,\ x - t < 0$

$$\implies \lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \geq 0 \quad (2)$$

От (1) и (2) $\implies \forall x \in (a,\ b) f'(x)\ \geq 0 \quad \square$

Th($f(x) \in C(a,\ b)\ :\ \forall x \in (a,\ b)\ f'(x) \geq 0 \implies f(x) \uparrow$ **)**

$f(x) \uparrow \implies \forall x_1,\ x_2 \in (a,\ b);\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

Доп., че $\exists t_1,\ t_2 \in (a,\ b);\ t_1 < t_2;\ f(t_1) > f(t_2)$

От Th(Лагранж за крайните нараствания) $\implies$

$\exists c \in (t_1,\ t_2)\ :\ f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$

$f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,\ b) \implies f'(c) \geq 0$

$t_1 < t_2 \implies t_2 - t_1 > 0$

$\implies f(t_2) - f(t_1) \geq 0 \implies f(t_2) \geq f(t_1) \implies \lightning(f(t_1) > f(t_2))$

$f(x) \in C(a,\ b)\ :\ \forall x \in (a,\ b)\ f'(x) \geq 0 \implies f(x) \uparrow \quad \square$

Th($f(x) \downarrow \in C(a,\ b) \iff \forall x \in (a,\ b)\ f'(x) \leq 0$)

Th($f(x) \downarrow \in C(a,\ b) \implies \forall x \in (a,\ b)\ f'(x) \leq 0$)

Нека $t \in (a,\ b)$

Ако $x > t$

$x > t,\ f(x) \downarrow \implies f(x) \leq f(t)$

$\implies f(x) - f(t) \leq 0,\ x - t > 0$

$\implies \lim\limits_{x \to t} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \leq 0\ (3)$

Ако $x < t$

$x < t,\ f(x) \downarrow \implies f(x) \geq f(t)$

$\implies f(x) - f(t) \geq 0,\ x - t < 0$

$\implies \lim\limits_{x \to t} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t) \leq 0\ (4)$

От (3) и (4) $\implies \forall x \in (a,\ b)\ f'(x) \leq 0 \quad \square$

Th($f(x) \in C(a,\ b);\ f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,\ b) \implies f(x) \downarrow$)

$f(x) \downarrow \implies \forall x_1,\ x_2 \in (a,\ b);\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Доп., че $\exists t_1,\ t_2 \in (a,\ b);\ t_1 < t_2;\ f(t_1) < f(t_2)$

От Th(Лагранж за крайните нараствания) $\implies$

$\exists c \in (t_1,\ t_2)\ :\ f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$

$f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,\ b) \implies f'(c) \leq 0$

$t_1 < t_2 \implies t_2 - t_1 > 0$

$\implies f(t_2) - f(t_1) \leq 0 \implies f(t_2) \leq f(t_1) \implies \lightning(f(t_1) < f(t_2))$

$\implies f(x) \in C(a,\ b);\ f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,\ b) \implies f(x) \downarrow \quad \square$

Th $\forall x \in (a,\ b)\ f'(x) = 0 \implies \forall x \in (a,\ b)\ f(x) \equiv const$

Нека $f(x)$ е дефинирна и диференцируема в $(a,\ b)$ и

$\forall x \in (a,\ b)\ f'(x) = 0 \implies \forall x \in (a,\ b)\ f(x) \equiv const$

Д-во:
Нека $x_0 \in (a,\ b)$ От Th(Лагранж за крайните нараствания)

$\implies \exists c \in (a,\ b)\ :\ \forall x \in (a,\ b)\ f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$

$f'(x) = 0\ \forall x \in (a,\ b) \implies f'(c) = 0 \implies f(x) - f(x_0) = 0$

$\implies \forall x \in (a,\ b)\ f(x) = f(x_0) \implies \forall x \in (a,\ b)\ f(x) \equiv const \quad \square$

Формула на Лайбниц за производна от по-висок ред на произведение на две функции

Нека функциите f и g са n пъти диференцируеми. Тогава n-та производна на функцията $f.g$ съществува и се дава с формулата:

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$$

Уравнение на допирателна към графика на функция

Полином на Тейлор

$$(T_n(f,\ a))(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Уравнение на допирателна към графика на фунцкия

$y = T_1(f,\ x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Нека $f : (a, b) \to \mathbb{R}$

f е изпъкнала $\smile$, ако:

$\forall x,\ x_0 \in (a,\ b) \implies f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\forall x_1,\ x_2 \in (a,\ b)\ :\ x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2) \quad (f' \uparrow)$

$\forall x \in (a,\ b) \implies f''(x) \geq 0$

f е вдълбната $\frown$, ако:

$\forall x,\ x_0 \in (a,\ b) \implies f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\forall x_1,\ x_2 \in (a,\ b)\ :\ x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \geq f'(x_2) \quad (f' \downarrow)$

$\forall x \in (a,\ b) \implies f''(x) \leq 0$

Задачи:

Задача 1.

Нека $f : [0, 6) \to \mathbb{R},\ f(0) = 2,\ f(1) = 1,\ \lim\limits_{x \to 6-0} f(x) = 3$

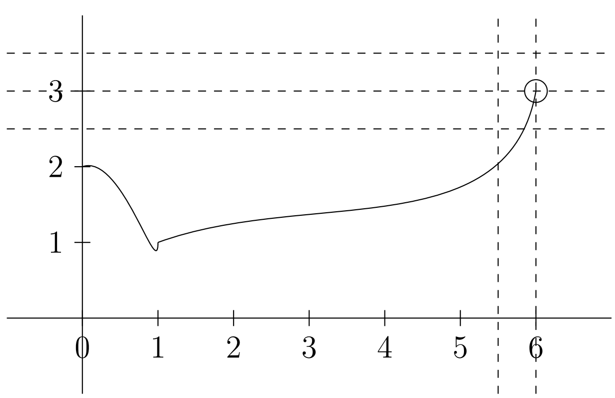
Докажете, че $\exists \min f(x),\ x \in [0, 6)$

Док-во:

$\exists \delta < 1\ \forall x \in (6 - \delta,\ 6)\ f(x) \in (2,5,\ 3,5)$

$x > 6 - \delta \implies f(x) > 2,5 \implies x \in [0,\ 6 - \delta]\ \exists \min f(x) \leq 1$

Дайте пример за графика на фунцкия, която няма максимум



Задача 2.

Нека $f : [0, 6) \to \mathbb{R},\ f(0) = 4,\ f(4) = 2,\ \lim\limits_{x \to 6-0} f(x) = 1$

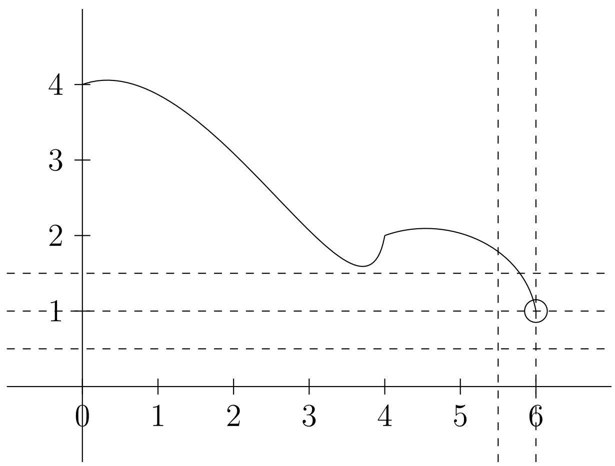
Докажете, че $\exists \max f(x),\ x \in [1, 6)$

Док-во:

$\exists \delta < 1\ \forall x \in (6 - \delta,\ 6)\ f(x) \in (0{,}5,\ 1{,}5)$

$x > 6 - \delta \implies f(x) < 1{,}5 \implies x \in [0,\ 6 - \delta]\ \exists \max f(x) \geq 4$

Дайте пример за графика на фунцкия, която няма минимум



Използвана литература:

1. Записки от лекциите на доц. д-р. Първан Първанов от курса Диференциално и интегрално смятене 1, воден през зимния семестър на 2016г. на спец. Информатика във ФМИ към СУ "Св. Климент Охридкси"

2. П. Джаков Р. Малеев Р. Леви С. Троянски, Диференциално и интегрално смятане Функции на една променлива, Факултет по Математика и Информатика СУ "Св. Климент Охридкси 2007 г.

3. Е. Любенова П. Недевски К. Николов Л. Николова В. Попов, РЪКОВОДСТВО ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ ПЪРВА ЧАСТ, СОФТЕХ София 2008