Тема 21 - Ранг на матрици

Иво Стратев

28 юни 2021 г.

1 Означения

1.1 Универсум на структура

Ако $\mathcal{S}$ е (алгебрическа) структура с универсум / домейн / носител множество E, то универсума на $\mathcal{S}$ ще белжим с $\mathcal{U}(\mathsf{S})$ и в сила е $\mathcal{U}(\mathcal{S}) = \mathsf{E}$.

Например ако F образува поле $\mathcal{F}$, то $\mathcal{U}(\mathcal{F}) = \mathsf{F}$ или ако V образува линейно пространство $\mathcal{L}$, то $\mathcal{U}(\mathcal{L}) = \mathsf{V}$.

1.2 Множество на матрици с фиксиран размер и над фиксирано поле

Ако $\mathsf{n}, \mathsf{m} \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле, то множеството на матриците с m реда и n стълба над поле $\mathcal{F}$ ще бележим с $\mathsf{M}_{\mathsf{m},\mathsf{n}}(\mathcal{F})$.

1.3 Линейно пространство на матрици с фиксиран размер и над фиксирано поле

Ако $\mathsf{n}, \mathsf{m} \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле, то линейното пространство, което $\mathsf{M}_{\mathsf{m},\mathsf{n}}(\mathcal{F})$ образува спрямо стандартните операции за действия с матрици ще бележим с $\mathcal{M}_{\mathsf{m},\mathsf{n}}(\mathcal{F})$.

Забележка: $\mathcal{U}(\mathcal{M}_{\mathsf{m},\mathsf{n}}(\mathcal{F})) = \mathsf{M}_{\mathsf{m},\mathsf{n}}(\mathcal{F})$.

1.4 Подпространство

Нека V образува Лин. п-во $\mathcal{L}$ над поле $\mathcal{F}$ и $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ и W образува подпространство на $\mathcal{L}$, тогава това подпространство ще бележим с $\mathsf{SubSpace}(\mathsf{W}, \mathcal{L})$ и така в сила ще е неравенството $\mathbf{dim}(\mathsf{SubSpace}(\mathsf{W}, \mathcal{L})) \leq \mathbf{dim}(\mathcal{L})$.

2 Ранг на крайно множество вектори (система)

Нека $\mathcal{L}$ е лин. п-во над поле $\mathcal{F}$. Нека A е крайно подмножество на $\mathcal{U}(\mathcal{L})$. Тогава рангът на A е равен на $\mathbf{dim}(\mathsf{SubSpace}(\mathsf{l}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}), \mathcal{L}))$ - размерността на подпространството на $\mathcal{L}$, образувано от линейната обивка на A спрямо $\mathcal{L}$. Рангът на A ще бележим с $\mathsf{rank}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A})$.

Забелжка: Ако $\mathsf{A} = \{\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n\}$, то

$$\mathsf{l}_{\mathcal{L}}(\mathsf{A}) = \{\mathsf{v} \in \mathcal{U}(\mathcal{L}) \mid (\exists \mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2, \ldots, \mathsf{c}_n \in \mathcal{U}(\mathcal{F}))[\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{c}_i \odot \mathsf{a}_i]\}.$$

3 Ранг по редове на матрица

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$ и редовете на A са $a_1, a_2, \dots, a_m$.
Тогава рангът по редове на матрицата е равен на $\mathtt{rank}_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathcal{F})}(\{a_1, a_2, \dots, a_m\})$.
Рангът по редове на A ще бележим с $\mathtt{rowRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.

4 Ранг по стълбове на матрица

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$ и стълбовете на A са $a^1, a^2, \dots, a^n$. Тогава рангът по стълбове на матрицата е равен на $\mathtt{rank}_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathcal{F})}(\{a^1, a^2, \dots, a^n\})$.
Рангът по стълбове на A ще бележим с $\mathtt{colRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.

5 Ранг на матрица

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$. Тогава рангът на A е равен на $\mathtt{rowRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$. Рангът на A ще бележим с $\mathtt{rank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.

6 Лема за ранговете

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$.
Тогава $\mathtt{rowRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A) \leq \mathtt{colRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.

6.1 Доказателство:

Нека $a_1, a_2, \dots, a_m$ са редовете на A, а $a^1, a^2, \dots, a^n$ са стълбовете.
Нека $t = \mathtt{colRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$. Тогава нека $c^1, c^2, \dots, c^t$ е базис на $\mathtt{SubSpace}(l_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathcal{F})}(\{a^1, a^2, \dots, a^n\}, \mathcal{M}_{m,1}(\mathcal{F}))$.
Нека тогава $R \in M_{t,n}(\mathcal{F})$ е такава, че

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})[a^i = R_{1i}c^1 + R_{2i}c^2 + \dots + R_{ti}c^t].$$

Нека C е матрицата със стълбове $c^1, c^2, \dots, c^t$. Така

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$a^i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} = R_{1i} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + R_{2i} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \dots + R_{ti} \begin{bmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{t} R_{ki}c_{1k} \\ \sum_{k=1}^{t} R_{ki}c_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{t} R_{ki}c_{mk} \end{bmatrix}$$

Следователно

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{t} R_{k1}c_{ik} & \sum_{k=1}^{t} R_{k2}c_{ik} & \dots & \sum_{k=1}^{t} R_{kn}c_{ik} \end{bmatrix} =$$

$$c_{i1}\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \end{bmatrix} + c_{i2}\begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \end{bmatrix} + \dots + c_{it}\begin{bmatrix} R_{t1} & R_{t2} & \dots & R_{tn} \end{bmatrix}.$$

Сега ако означим с $r_1, r_2, \dots, r_t$ редовете на R получаваме

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, m\})[a_i = c_{i1}r_1 + c_{i2}r_2 + \dots + c_{it}r_t]$$

или

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, m\})[a_i = l_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathcal{F})}(r_1, r_2, \dots, r_t)].$$

Следователно $\dim(\mathtt{SubSpace}(l_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathcal{F})}(\{a_1, a_2, \dots, a_m\}, \mathcal{M}_{1,n}(\mathcal{F}))) \leq t$.
Следователно $\mathtt{rowRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A) \leq t = \mathtt{colRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$. $\square$

7 Теорема за ранговете

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$.
Тогава $\mathtt{rowRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A) = \mathtt{colRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.

7.1 Доказателство:

Прилагаме Лемата за ранговете за A^t и получаваме
$\mathtt{rowRank}_{n,m,\mathcal{F}}(A^t) \leq \mathtt{colRank}_{n,m,\mathcal{F}}(A^t)$, но съобразваме, че
$\mathtt{rowRank}_{n,m,\mathcal{F}}(A^t) = \mathtt{colRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$ и $\mathtt{colRank}_{n,m,\mathcal{F}}(A^t) = \mathtt{rowRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.
Следователно $\mathtt{colRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A) \leq \mathtt{rowRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$. Но ако приложим Лемата за ранговете за A получаваме и $\mathtt{rowRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A) \leq \mathtt{colRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.
Следователно $\mathtt{rowRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A) = \mathtt{colRank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$. $\square$

8 Система линейни уравнения

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}; \dots\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ и $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ и $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ тогава системата

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

наричаме система линейни уравнения.
Ако $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, то горната система ще записваме на кратко като $Ax = b$.

9 Множество от решения на СЛУ

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$ и $b \in M_{n,1}(\mathcal{F})$ тогава множеството $\{x \in M_{m,1}(\mathcal{F}) \mid Ax = b\}$ ще означаваме с $\mathtt{Sol}(A, b)$.

10 Съвместима система

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$ и $b \in M_{n,1}(\mathcal{F})$. Системата $Ax = b$ наричаме съвместима ако $\mathtt{Sol}(A, b) \neq \emptyset$.

11 Несъвместима система

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$ и $b \in M_{n,1}(\mathcal{F})$. Системата $Ax = b$ наричаме несъвместима ако не е съвместима.

12 Теорема на Руше

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$ и $b \in M_{n,1}(\mathcal{F})$. Тогава системата $Ax = b$ е съвместима тогава и само тогава когато $\mathtt{rank}_{m,n+1,\mathcal{F}}([A|b]) = \mathtt{rank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.

12.1 Доказателство:

Нека стълбовете на A са $a^1, a^2, \dots, a^n$ тогава $Ax = b$ е съвместима ТСТК $\mathsf{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ ТСТК $(\exists x \in M_{m,1}(\mathcal{F}))[Ax = b]$ ТСТК

$$\begin{aligned} \exists x_1, x_2, \dots, x_n &\in \mathcal{U}(F) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ТСТК

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{U}(F)$$
$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ТСТК

$$\begin{aligned} \exists x_1, x_2, \dots, x_n &\in \mathcal{U}(F) \\ x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_n a^n &= b \end{aligned}$$

ТСТК

$$b \in l_{M_{m,1}(\mathcal{F})}(\{a^1, a^2, \dots, a^n\})$$

ТСТК $\mathsf{rank}_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathcal{F})}(\{b\} \cup \{a^1, a^2, \dots, a^n\}) = \mathsf{rank}_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathcal{F})}(\{a^1, a^2, \dots, a^n\})$
ТСТК $\mathsf{rank}_{m,n+1,\mathcal{F}}([A|b]) = \mathsf{rank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.

Следователно $Ax = b$ е съвместима ТСТК $\mathsf{rank}_{m,n+1,\mathcal{F}}([A|b]) = \mathsf{rank}_{m,n,\mathcal{F}}(A)$.
$\square$

13 Хомогенна система

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$ и $b \in M_{n,1}(\mathcal{F})$. Системата $Ax = b$ наричаме хомогенна, ако $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})[b_i = 0_{\mathcal{F}}]$, тоест $b = \theta$.

14 Фундаментална система от решения

Нека $n, m \in \mathbb{N}_+$ и $\mathcal{F}$ е поле и нека $A \in M_{m,n}(\mathcal{F})$. Фундаментална система от решения на ситемата $Ax = \theta$ наричаме всеки базис на $\mathsf{SubSpace}(\mathsf{Sol}(A, \theta),\ \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{F}))$.