Теоритично контролно №3 1, I, Информатика

Иво Стратев

3 септември 2018 г.

1

1.1 Определение за полилинейна фунцкия

$\mathbb{V}$ - Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$

$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \to \mathbb{F} \quad (f : \mathbb{V}^n \to \mathbb{F})$

f е полилинейна ако $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n, v', v'' \in \mathbb{V}$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} : v_i = \lambda v' + \mu v''$

$$f(v_1, \dots, v_n) = \begin{array}{l} \lambda f(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n) \\ + \\ \mu f(v_1, \dots, v_{i-1}, v'', v_{i+1}, \dots, v_n) \end{array}$$

1.2 Определение за антисиметрична фунцкия

$\mathbb{V}$ - Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$

$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \to \mathbb{F} \quad (f : \mathbb{V}^n \to \mathbb{F})$

f е антисиметрична ако $\forall i, j : 1 \leq i \neq j \leq n$

$\forall v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n \in \mathbb{V}$

$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$

1.3 Необходимо и достатъчно условие една полилинейна функция да е антисиметрична

$\mathbb{V}$ - Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n \in \mathbb{N}$

$f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \to \mathbb{F} \quad (f : \mathbb{V}^n \to \mathbb{F})$ е полилинейна функция

f е антисиметрична $\iff \forall i,\ j\ :\ 1 \leq i \neq j \leq n$

$\forall v_1,\ \ldots,\ v_{i-1},\ v_{i+1},\ \ldots,\ v_{j-1},\ v_{j+1},\ \ldots,\ v_n,\ v \in \mathbb{V}$

$f(v_1,\ \ldots,\ v_{i-1},\ v,\ v_{i+1},\ \ldots,\ v_{j-1},\ v,\ v_{j+1},\ \ldots,\ v_n) = 0$

1.4 Определение за пермутация

Нека $n \in \mathbb{N},\ \Omega_n = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$

$S(\Omega_n) = \{\sigma\ :\ \Omega_n \to \Omega_n \mid \sigma \text{ е биекция}\}$

$\forall \sigma \in S(\Omega_n),\ \sigma$ е пермутация

$|S(\Omega_n)| = n!$

1.5 Определение за инверсия в пермутация

$\sigma \in S(\Omega_n),\ \forall i,\ j\ :\ 1 \leq i \neq j \leq n \in \Omega_n$

$\sigma(i),\ \sigma(j)$ образуват инверсия $\iff \sigma(i) > \sigma(j),$ но $i < j$

$[\sigma]$ - брой инверсии $\implies 1 \leq [\sigma] \leq n$

1.6 Определение за транспозиция

$\sigma \in S(\Omega_n),\ \forall i,\ j\ :\ 1 \leq i \neq j \leq n \in \Omega_n$

$\sigma \in S(\Omega_n) \implies \sigma = \{\sigma(1),\ \ldots,\ \sigma(i),\ \ldots,\ \sigma(j),\ \ldots,\ \sigma(n)\}$

$\sigma_t \in S(\Omega_n)$ е транспозиция $\iff \sigma_t = \{\sigma(1),\ \ldots,\ \sigma(j),\ \ldots,\ \sigma(i),\ \ldots,\ \sigma(n)\}$

1.7 Определение за четност на пермутация

$\sigma \in S(\Omega_n)$

$$\sigma \begin{cases} \text{четна} & [\sigma] \mod 2 = 0 \\ \text{нечетна} & [\sigma] \mod 2 = 1 \end{cases}$$

$$sign\sigma = \begin{cases} 1 & \text{четна} \\ -1 & \text{нечетна} \end{cases} = (-1)^{[\sigma]}$$

1.8 Определение за детерминантна функция

$f\ :\ \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F} \quad (f : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F})$

f е детерминантна функция, ако е полилинейна, антисиметрична и

$f(e_1,\ \ldots,\ e_n) = 1, \quad \{e_1,\ \ldots,\ e_n\}$ е стандартният базис на $\mathbb{F}^n$

2 Детерминанта и нейните свойства

2.1 Определение за Детерминанта

F е числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})\ \det A$

е стойността на единствената детерминантна фунцкия:

$D : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F} \quad (f : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F})$

на редовете на $A :\ (a_{11},\ \ldots,\ a_{1n}),\ \ldots,\ (a_{n1},\ \ldots,\ a_{nn}) \in \mathbb{F}^n$

2.2 Формула за пресмятане на Детерминанта

$\mathbb{F}$ - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F}),\ A = (a_{ij})_{n\times n}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S(\Omega_n)} sign\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

2.3 Връзката между детерминантите на една матрица и транспониранаta й матрица

$\det A = \det A^t$

2.4 Промяна на детерминантата на една матрица, ако заменим един нейн ред с нулев ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11},\ \ldots,\ a_{1n}),\ \ldots,\ a_n = (a_{n1},\ \ldots,\ a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad i \in \{1,\ \ldots,\ n\},\ a_i = (0.\ \ldots,\ 0) \implies \det A = 0$

2.5 Промяна на детерминантата на една матрица, ако заменим един нейн стълб с нулев стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11},\ \dots,\ a_{n1})^t,\ \dots,\ a_n = (a_{1n},\ \dots,\ a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1\ \dots\ a_n) \quad i \in \{1,\ \dots,\ n\},\ a_i = (0.\ \dots,\ 0)^t \implies \det A = 0$

2.6 Промяна на детерминантата на една матрица, ако разменим два нейни реда

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11},\ \dots,\ a_{1n}),\ \dots,\ a_n = (a_{n1},\ \dots,\ a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и нека $i,\ j\ :\ 1 \leq i \neq j \leq n$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.7 Промяна на детерминантата на една матрица, ако разменим два нейни стълба

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11},\ \dots,\ a_{n1})^t,\ \dots,\ a_n = (a_{1n},\ \dots,\ a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1\ \dots\ a_n)$ и нека $i,\ j\ :\ 1 \leq i \neq j \leq n$

$\det(a_1\ \dots\ a_i\ \dots\ a_j\ \dots\ a_n) = -\det(a_1\ \dots\ a_i\ \dots\ a_j\ \dots\ a_n)$

2.8 Промяна на детерминантата на една матрица, ако умножим един нейн ред с някакво число

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11},\ \dots,\ a_{1n}),\ \dots,\ a_n = (a_{n1},\ \dots,\ a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad i \in \{1,\ \dots,\ n\},\ \lambda \in \mathbb{F}$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.9 Промяна на детерминантата на една матрица, ако умножим един нейн стълб с някакво число

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11},\ \dots,\ a_{n1})^t,\ \dots,\ a_n = (a_{1n},\ \dots,\ a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad i \in \{1,\ \dots,\ n\},\ \lambda \in \mathbb{F}$

$\det(a_1\ \dots\ \lambda a_i\ \dots\ a_n) = \lambda \det(a_1\ \dots\ a_i\ \dots\ a_n)$

2.10 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн ред заменим с друг, различен от него, ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11},\ \dots,\ a_{1n}),\ \dots,\ a_n = (a_{n1},\ \dots,\ a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и нека $i,\ j\ :\ 1 \leq i \neq j \leq n$

$$a_i := a_j \implies \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

2.11 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб заменим с друг, различен от него, стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11},\ \ldots,\ a_{n1})^t,\ \ldots,\ a_n = (a_{1n},\ \ldots,\ a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1\ \ldots\ a_n)$ и нека $i,\ j\ :\ 1 \leq i \neq j \leq n$

$a_i := a_j \implies \det(a_1\ \ldots\ a_j\ \ldots\ a_j\ \ldots\ a_n) = 0$

2.12 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн ред заменим с умножен с число друг, различен от него, ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11},\ \ldots,\ a_{1n}),\ \ldots,\ a_n = (a_{n1},\ \ldots,\ a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и нека $i,\ j\ :\ 1 \leq i \neq j \leq n,\ \lambda \in \mathbb{F}$

$$a_i := \lambda a_j \implies \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda 0 = 0$$

2.13 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб заменим с умножен с число друг, различен от него, стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \ \dots, \ a_{n1})^t, \ \dots, \ a_n = (a_{1n}, \ \dots, \ a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$ и нека $i, \ j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n, \ \lambda \in \mathbb{F}$

$a_i := \lambda a_j \implies \det(a_1 \ \dots \ \lambda a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) =$

$= \lambda \det(a_1 \ \dots \ a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) = \lambda 0 = 0$

2.14 Промяна на детерминантата на една матрица, ако към един нейн ред прибавим друг, различен от него, ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \ \dots, \ a_{1n}), \ \dots, \ a_n = (a_{n1}, \ \dots, \ a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и нека $i, \ j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n$

$$a_i := a_i + a_j \implies \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + 0 = \det A$$

2.15 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб прибавим друг, различен от него, стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \ \dots, \ a_{n1})^t, \ \dots, \ a_n = (a_{1n}, \ \dots, \ a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$ и нека $i, \ j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n$

$a_i := a_i + a_j \implies \det(a_1 \ \dots \ a_i + a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) =$

$= \det(a_1 \ \dots \ a_i \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) + \det(a_1 \ \dots \ a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) = \det A + 0 =$ $\det A$

2.16 Промяна на детерминантата на една матрица, ако към един нейн ред прибавим м умножен с число друг, различен от него, ред

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \ \dots, \ a_{1n}), \ \dots, \ a_n = (a_{n1}, \ \dots, \ a_{nn})$ са редовете на A

Тогава $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и нека $i, \ j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n, \ \lambda \in \mathbb{F}$

$$a_i := a_i + \lambda a_j \implies \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \det A + \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + \lambda 0 = \det A + 0 = \det A$$

2.17 Промяна на детерминантата на една матрица, ако един нейн стълб прибавим м умножен с число друг, различен от него, стълб

$\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

Нека $a_1 = (a_{11}, \ \dots, \ a_{n1})^t, \ \dots, \ a_n = (a_{1n}, \ \dots, \ a_{nn})^t$ са стълбовете на A

Тогава $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$ и нека $i, \ j \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n, \ \lambda \in \mathbb{F}$

$a_i := a_i + \lambda a_j \implies \det(a_1 \ \dots \ a_i + \lambda a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) =$

$= \det(a_1 \ \dots \ a_i \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) + \det(a_1 \ \dots \ \lambda a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) =$

$= \det A + \lambda \det(a_1 \ \dots \ a_j \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) = \det A + \lambda 0 = \det A + 0 = \det A$

2.18 $\det A = 0 \iff$ **редовете на A са линейно зависими**

2.19 $\det A = 0 \iff$ **стълбовете на A са линейно зависими**

3 $A \in M_n, \ \det A = 3$

3.1 $B = A^t \implies \det B = \det A = 3$

3.2 $B = A := a_{i,*} = (0, \ \ldots, \ 0) \implies \det B = 0$

3.3 $B = A := a_{*,i} = (0, \ \ldots, \ 0)^t \implies \det B = 0$

3.4 $B = A := a_{i,*} = a_{j,*} + a_{k,*} \implies \det B = 0$

3.5 $B = A := a_{*,i} = a_{*,j} + a_{*,k} \implies \det B = 0$

3.6 $B = A := a_{i,*} = 4a_{i,*} \implies \det B = 4 \det A = 4.3 = 12$

3.7 $B = A := a_{*,i} = -4a_{*,i} \implies \det B = -4 \det A = -4.3 = -12$

3.8 $B = A := a_{i,*} = a_{j,*} \implies \det B = 0$

3.9 $B = A := a_{*,i} = a_{*,j} \implies \det B = 0$

3.10 $B = A := a_{i,*} = 8a_{j,*} \implies \det B = 8.0 = 0$

3.11 $B = A := a_{*,i} = 6a_{*,j} \implies \det B = 6.0 = 0$

3.12 $B = A := a_{i,*} + 5a_{j,*} \implies \det B = \det A + 5.0 = \det A + 0 = \det A$

3.13 $B = A := a_{*,i} + 4a_{*,j} \implies \det B = \det A + 4.0 = \det A + 0 = \det A$

3.14 $B = A := a_{i,*} = a_{j,*}, \ a_{j,*} = a_{i,*} \implies \det B = -\det A$

3.15 $B = A := a_{*,i} = a_{*,j}, \ a_{*,j} = a_{*,i} \implies \det B = -\det A$

3.16 $B = A := a_{i,*} = \sum_{j=1, \ j \neq i}^{n} a_{j,*} \implies \det B = 0$

3.17 $B = A := a_{*,i} = \sum_{j=1, \ j \neq i}^{n} a_{*,j} \implies \det B = 0$

4

4.1

$A \in M_{n \geq 8} \ \sum_{k=1}^{n} a_{8k} A_{1k} = \delta_{81} \det A = 0. \det A = 0$

4.2

$A \in M_{n\geq 8}$ $\sum_{k=1}^{n} a_{k8}A_{k1} = \delta_{81} \det A = 0. \det A = 0$

4.3

$A, B \in M_n, \ \det A = 8, \ \det B = 1$

$\det AB = \det A \det B = 8.1 = 8$

4.4

$A, B \in M_n, \ \det A = 8, \ \det B = 1$

$\det(AB)^t = \det AB = \det A \det B = 8.1 = 8$

4.5

$A, B \in M_{n\geq 8}, \ \det A = 9, \ \det B = 1$

A, B се различават само по 8-мия си ред/стълб

$\det(A + B) = 2^{n-1}(\det A + \det B) =$

$= 2^{n-1}(9 + 1) = 2^{n-1}.10 = 5.2^n$

5 Развитие на детерминанта по ред/стълб на

$$\Delta = \begin{vmatrix} -9 & -8 & 6 & 5 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 9 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

5.1 Развитие по първи ред

$$\Delta = -9.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & -6 \end{vmatrix} - 8.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$+ 6.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 9 & -6 \end{vmatrix} + 5.(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

5.2 Развитие по първи стълб

$$\Delta = -9.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 6 & 1\\ -2 & 1 & 5\\ 9 & 5 & -6\end{vmatrix} + 7.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-8 & 6 & 5\\ -2 & 1 & 5\\ 9 & 5 & -6\end{vmatrix}$$

$$+ 0.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-8 & 6 & 5\\ -2 & 6 & 1\\ 9 & 5 & -6\end{vmatrix} + 1.(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-8 & 6 & 5\\ -2 & 6 & 1\\ -2 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

5.3 Развитие по втори ред

$$\Delta = 7.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-8 & 6 & 5\\ -2 & 1 & 5\\ 9 & 5 & -6\end{vmatrix} - 2.(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-9 & 6 & 5\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix}$$

$$+ 6.(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-9 & -8 & 5\\ 0 & -2 & 5\\ 1 & 9 & -6\end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}-9 & -8 & 6\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 9 & 5\end{vmatrix}$$

5.4 Развитие по втори стълб

$$\Delta = -8.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}7 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix} - 2.(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-9 & 6 & 5\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix}$$

$$- 2.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-9 & 6 & 5\\ 7 & 6 & 1\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix} + 9.(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}-9 & 6 & 5\\ 7 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

6 Формули на Крамер

$$\left|\begin{array}{lll}-5x_1 & -2x_2 = & 2\\ 8x_1 & -7x_2 = & -5\end{array}\right.$$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}2 & -2\\ -5 & -7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-5 & -2\\ 8 & -7\end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 8 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-5 & -2\\ 8 & -7\end{vmatrix}}$$

7

7.1 Определение за обратима матрица

Нека $\mathbb{F}$ е поле и $A \in M_n(\mathbb{F}),\ A$ е обратима

$\iff \exists B \in M_n(\mathbb{F})\ :\ AB = BA = E$

7.2 Неособена матрица

Нека $\mathbb{F}$ е поле и $A \in M_n(\mathbb{F}),\ A$ е неособена $\iff \det A \neq 0$

7.3 Формула за обратна матрица на неособена матрица

Нека $\mathbb{F}$ е поле и $A \in M_n(\mathbb{F}),\ A$ е неособена, тогава $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ji}) = \frac{1}{\det A}((-1)^{j+i}\Delta_{ji})$

7.4 Определение за ранг на матрица

Нека $\mathbb{F}$ е поле и $A \in M_n(\mathbb{F}),\ r(A) = rr(A) = rc(A)$

7.5 Втора теорема за ранг на матрица

Нека $\mathbb{F}$ е поле и $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F}),\ r(A) = r \iff$

$\exists\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$

$\exists\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n\ :$

$$\exists \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_n j_1} & \cdots & a_{i_n j_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\forall\ k \in \mathbb{N}\ :\ r < k \leq n \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_n j_1} & \cdots & a_{i_n j_k} \end{vmatrix} = 0$$

8

Нека $\mathbb{F}$ е поле и

8.1 $A \in M_5(\mathbb{F}),\ \det A = 0 \implies 0 \leq r(A) < 5$

8.2 Th Руше

$A \in \mathbb{F}_{m \times n},\ B \in F^m\ Ax = B$ има решение $\iff r(A) = r(A|B)$

8.3 $x \in \mathbb{F}^n,\ Ax = B,\ r = r(A) = r(A|B)$

$\Longrightarrow$ **броя на неизвестните е** $n - r$

8.4 Една хомогенна система с равен брой неизвестни и уравнения $Ax = 0,\ A \in M_n(\mathbb{F})$, която има ненулево решение е с $\det A = 0$ (непълен ранг)

8.5 Една хомогенна система с квадратна матрица на $Ax = 0,\ A \in M_n(\mathbb{F})$, има единствено решение $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$ (пълен ранг)

8.6 Определение за Фундаментална система решения на хомогенна система уравнения

$\mathbb{F}$ - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$

Ф.С.Р. е всеки базис на пространството $\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \theta\}$

8.7 Размерността на множеството от решения на хомогенна система линейни уравнения, ако общият брой на неизвестните е n и рангът на матрицата на системата е равен на r

$\mathbb{F}$ - числово поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$

$dim\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \theta\} = n - r(A) = n - r$

9

9.1 Подобни матрици

Нека $\mathbb{F}$ - числово поле и $A,\ B \in M_n(\mathbb{F})$

$A \sim B \iff \exists\, T \in M_n(\mathbb{F})\ :\ \det T \neq 0,\ B = T^{-1}.A.T$

9.2 Определение за характеристичен полином на матрица

Нека $\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ - характеристичен полином на матрицата A

9.3 Определение за характеристичен полином на линеен оператор

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$

Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ A = M(\varphi) \in M_n(\mathbb{F})$ е матрицата на φ, в кой да е базис на $\mathbb{V}$

$\Longrightarrow\ f_\varphi(\lambda) = f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ - характеристичен полином на Л.О. φ

9.4 Определение за характеристичен корен

Нека $\mathbb{F}$ - числово поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$

λ_0 - характеристичен корен на характеристичния полином на A

$\Longleftrightarrow\ f_A(\lambda_0) = \det(A - \lambda_0 E) = 0$

9.5 Определение за собствена стойност на линеен оператор

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$

Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$

$\lambda_0 \in \mathbb{F}$ - собствена стойност на $\varphi \iff f_\varphi(\lambda_0) = \det(M(\varphi) - \lambda_0 E) = 0$

9.6 Определение за собствен вектор на линеен оператор

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$

Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$

$v_{\lambda_0} \in \mathbb{V}$ - собствен вектор на $\varphi \iff$

$$\begin{cases} (1) & v_{\lambda_0} \neq \theta & \text{вектора е ненулев} \\ (2) & \exists \lambda_0 \in \mathbb{F}\ :\ f_\varphi(\lambda_0) = \det(M(\varphi) - \lambda_0 E) = 0 & \lambda_0 \text{ е собствена стойност} \\ (3) & \varphi(v_{\lambda_0}) = \lambda_0 . v_{\lambda_0} & \end{cases}$$

9.7 Всички собствени стойности, които са част от полето над, което е дефинирано линейното пространство, за което даденото линейно изображение е линеен оператор са негови характеристични корени

9.8 Всички характеристични корени, които са част от полето над, което е дефинирано линейното пространство, за което даденото линейно изображение е линеен оператор са негови собствени стойности

9.9 Векторите съотвестващи на различни собствени стойности на даден линеен оператор са линейно независими

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$, $dim\mathbb{V} = n$

Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$, φ има n на брой различни собствени стойности $\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_n$,

тогава $\exists$ базис $v_1, \ \dots, \ v_n$ на $\mathbb{V}$, в който φ има диагонална матрица,

$$M_v(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

9.10 Връзка между степен на характеристичен полином на линеен оператор и размерност на пространството

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$

Нека $\varphi \in Hom\mathbb{V} \implies \deg(f_\varphi(\lambda)) = \dim \mathbb{V}$

9.11 Връзка между степен на характеристичен полином на линеен оператор и брой различни собствени стойности

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$ и нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$

$\implies \deg(f_\varphi(\lambda)) \geq$ брой различни собствени стойности ≥ 0

9.12 Връзка между броя на различните характеристични корени на линеен оператор и размерността на пространството

Нека $\mathbb{V}$ - К.М.Л.П. над числовото поле $\mathbb{F}$ и нека $\varphi \in Hom\mathbb{V}$

$\Longrightarrow \dim \mathbb{V} \geq$ брой различни характеристични корени ≥ 0

9.13 Матрицата на линеен оператор в базис от собствени вектори е диагонална

10

10.1 Определение за евклидово пространство

Л.П. $\mathbb{V}$ над $\mathbb{R}$ се нарича евклидово пространство,
ако в него е въведено скаларно произведение,
тоест изображение $(\ ,\ ) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, имащо свойствата:

1. $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{V}\ (a+b,\ c) = (a,\ c) + (b,\ c)$

2. $\forall a,\ b \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda a,\ b) = \lambda(a,\ b)$

3. $\forall a,\ b \in \mathbb{V}\ (a,\ b) = (b,\ a)$

4. $\forall a \in \mathbb{V}\ (a,\ a) \geq 0,\ (a,\ a) = 0 \iff a = \theta$

10.2 Определение за скаларно произведение

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство.

Скаларно произведение е изображение $(\ ,\ ) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, имащо свойствата:
1. $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{V}\ (a+b,\ c) = (a,\ c) + (b,\ c)$

2. $\forall a,\ b \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda a,\ b) = \lambda(a,\ b)$

3. $\forall a,\ b \in \mathbb{V}\ (a,\ b) = (b,\ a)$

4. $\forall a \in \mathbb{V}\ (a,\ a) \geq 0,\ (a,\ a) = 0 \iff a = \theta$

10.3 Определение за дължина на вектор

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство.

Нека $a \in \mathbb{V} \Longrightarrow |a| = \sqrt{(a,\ a)}$ е дължината на вектора a

10.4 Определение за ортогонални вектори

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство.

Нека $a, b \in \mathbb{V},\ a,\ b$ са ортогонални $(a \perp b) \iff (a,\ b) = 0$

10.5 Определение за ортогонален базис

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство. $dim\mathbb{V} = n$

Базисът $v_1,\ \dots,\ v_n \in \mathbb{V}$ е ортогонален

$\iff \forall i,\ j\ :\ 1 \leq i \neq j \leq n\ (v_i,\ v_j) = 0$

10.6 Определение за ортонормиран базис

Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство. $dim\mathbb{V} = n$

Базисът $e_1,\ \dots,\ e_n \in \mathbb{V}$ е ортонормиран

$\iff \forall i,\ j \in \{1,\ \dots,\ n\}\ (e_i,\ e_j) = \delta_{ij}$

10.7 Ортогонални по между си и ненулеви вектори в евклидово пространство са линейно независими

10.8 Определение за ортогонално допълнение на линейно подпространство в евклидово пространство

Нека $\mathbb{V}$ е К.М.Е.П. и $U < V \implies U^{\perp} = \{\forall v \in \mathbb{V} \mid \forall u \in \mathbb{U}\ (u,\ v) = 0\}$

10.9 Th(Питагор)

Ако векторите $a_1,\ \dots,\ a_n$ са два по два ортогонални, то $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$

10.10 Метод на Грам-Шмид

Нека векторите $e_1,\ \dots,\ e_n$ са ортогонални и ненулеви вектори

и нека вектора $a \notin l(e_1,\ \dots,\ e_n)$.

Тогава $\exists \lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n \in \mathbb{F}\ :\ e_{n+1} = a + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$

$\implies e_1,\ \dots,\ e_{n+1}$ са ортогонални и ненулеви вектори

и $l(e_1,\ \dots,\ e_n, a) = l(e_1,\ \dots,\ e_{n+1})$

11

11.1 Детерминанта на Грам

Нека $\mathbb{V}$ е Е.П. и $a_1,\ \dots,\ a_m \in \mathbb{V}$

$$\Gamma(a_1,\ \dots,\ a_m) = \begin{vmatrix} (a_1,\ a_1) & (a_1,\ a_2) & \dots & (a_1,\ a_m) \\ (a_2,\ a_1) & (a_2,\ a_2) & \dots & (a_2,\ a_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (a_m,\ a_1) & (a_m,\ a_2) & \dots & (a_m,\ a_m) \end{vmatrix}$$

11.2 $\Gamma(a_1,\ \dots,\ a_m) = 0 \iff a_1,\ \dots,\ a_m$ са линейно зависими

11.3 Неравенството на Коши-Буняковски

Нека $\mathbb{V}$ е Е.П. и $a,\ b \in \mathbb{V} \implies |(a,\ b)| \leq |a|.|b|$

$|(a,\ b)| = |a|.|b| \iff a,\ b$ са линейно зависими.

11.3.1 Координатна форма на неравенството на Коши-Буняковски

Нека $a = (a_1,\ \dots,\ a_n),\ b = (b_1,\ \dots,\ b_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогава

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

11.3.2 Интегрална форма на неравенството на Коши-Буняковски

Нека $a,\ b \in R\ :\ a < b$ и $f,\ g \in C[a,\ b]$. Тогава

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\ dx. \int_a^b g^2(x)\ dx$$

11.4 Нека $\mathbb{V}$ е Е.П., $a,\ b \in \mathbb{V} \implies \cos\measuredangle(a,\ b) = \frac{(a,\ b)}{|a||b|}$

$$\implies \measuredangle(a,\ b) = \arccos\frac{(a,\ b)}{|a||b|}$$

11.5 Неравенство на триъгълника за вектори в евклидово пространство

Нека $\mathbb{V}$ е Е.П. и $a,\ b \in \mathbb{V} \implies |a+b| \leq |a| + |b|$

$|a+b| = |a| + |b| \iff a \uparrow\uparrow b$ или $a = \theta$ или $b = \theta$

12 Симетричен Линеен оператор

12.1 Симетрична матрица

Нека $A \in M_n(\mathbb{R}),\ A$ е симетрична $\iff A^t = A$

12.2 Определение за симетричен оператор

Нека $\mathbb{V}$ е Е.П. и $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ \varphi$ е симетричен

$\iff \forall u,\ v \in \mathbb{V}\ (\varphi(v),\ u) = (v,\ \varphi(u))$

12.3 Матрицата на симетричен оператор в ортонормиран базис е симетрична

12.4 Собствените стойности на симетричен оператор са реални и съвпадат с характеристичните му корени

12.5 Собствените вектори на симетричен оператор, съответстващи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си

12.6 Основна Теорема за симетричен оператор

Нека $\mathbb{V}$ е Е.П. и $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ \varphi$ е симетричен оператор

$\implies \exists v_1,\ \ldots,\ v_n \in \mathbb{V}$ ортонормиран базис на $\mathbb{V}$,

в който матрицата на φ е диагонална

и по главния диагонал са собствените стойности на φ.

13 Ортогонален Линеен оператор

13.1 Ортогонална матрица

Нека $A \in M_n(\mathbb{R}),\ A$ е ортогонална $\iff AA^t = E$

13.2 Определение за ортогонален оператор

Нека $\mathbb{V}$ е Е.П. и $\varphi \in Hom\mathbb{V},\ \varphi$ е ортогонален

$\iff \forall u,\ v \in \mathbb{V}\ (\varphi(v), \varphi(u)) = (v, u)$

13.3 Необходимото и достатъчно условие един оператор да е ортогонален е той да изпраща един ортнормиран базис в друг ортнормиран базис

13.4 Матрицата на ортогонален оператор в ортонормиран базис е ортогонална

13.5 Собствените стойности на ортогонален оператор са равни на ± 1

13.6 Собствените вектори на ортогонален оператор, съответстващи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си

13.7 Основна Теорема за ортогонален оператор

Нека $\mathbb{V}$ е Е.П. и $\varphi \in Hom\mathbb{V}$, φ е ортогонален оператор

$\Longrightarrow \exists v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ ортонормиран базис на $\mathbb{V}$,

в който матрицата на φ е клетъчно диагонална.