Домашна работа 2, № 45342, Група 3

Иво Стратев

31 март 2017 г.

1 Задача 5. а)

$3^0 = 1 = 0!$
$3^1 = 3,\ 1! = 1 \implies 3^1 > 1!$
$3^2 = 9,\ 2! = 2 \implies 3^2 > 2!$
$3^3 = 27,\ 3! = 6 \implies 3^3 > 3!$
$3^4 = 81,\ 4! = 24 \implies 3^4 > 4!$
$3^5 = 243,\ 5! = 120 \implies 3^5 > 5!$
$3^6 = 729,\ 6! = 720 \implies 3^6 > 6!$
$3^7 = 2187,\ 7! = 5040 \implies 3^7 < 7!$

$P(n):\ 3^n < n!\ ,\ n \geq 7$

1.1 База:

$P(7):\ 2187 = 3^7 < 7! = 5040$

1.2 Индукт. предположение:

$P(k):\ 3^k < k!\ ,\ \text{за някое } k \geq 7$

1.3 Индукт. стъпка:

$P(k+1):\ 3^{k+1} < (k+1)!$
$3^k < k!\ |.3$
$3^{k+1} = 3^k.3 < 3k! < (k+1)k! = (k+1)! \implies$
$3^{k+1} < (k+1)!$

1.4 Заключение:

$\forall n \geq 7 P(n)$

2 Задача 6. а)

$P(n):\ 3|2^{2n} - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$

2.1 База:

$P(0):\ 3|2^{2.0} - 1$

$$\begin{aligned} 2^{2.0} - 1 & \\ = & \quad 2^0 - 1 \\ = & \quad 1 - 1 \\ = & \quad 0 \end{aligned}$$

$3|0 \implies 3|2^{2.0} - 1$

2.2 Индукт. предположение:

$P(k):\ 3|2^{2k}-1,\ \text{ за някое } k \in \mathbb{N} \implies$

$\exists d \in \mathbb{N}:\ 2^{2k}-1 = 3.d$

2.3 Индукт. стъпка:

$P(k+1):\ 3|2^{2(k+1)}-1$

$$
\begin{aligned}
2^{2(k+1)}-1 & \\
&= & 2^{2k+2}-1 \\
&= & 2^{2k}.4-1 \\
&= & 2^{2k}.4-4+3 \\
&= & 4(2^{2k}-1)+3 \\
&= & 4.3.d+3 \\
&= & 3(4.d+1)
\end{aligned}
$$

$3|3(4.d+1) \implies 3|2^{2(k+1)}-1$

2.4 Заключение:

$\forall n \in \mathbb{N} P(n)$