

Неопределимост

Иво Стратев

24 октомври 2019 г.

Съдържание

1	Хомоморфизми	2
1.1	Слаб хомоморфизъм	2
1.2	Рефлектиращ хомоморфизъм или просто хомоморфизъм . . .	2
1.3	Изоморфизъм	2
1.4	Аutomорфизъм	2

1 Хомоморфизми

1.1 Слаб хомоморфизъм

Нека \mathcal{L} е език на предикатното смятане от първи ред. Нека \mathcal{A} и \mathcal{B} са две структури за \mathcal{L} . Нека $h : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{B}|$.

h е слаб хомоморфизъм ($h \in WeakHom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$), ако

- $(\forall c \in Const_{\mathcal{L}})[h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}];$
- $(\forall f \in Func_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#f} \in |\mathcal{A}|)[h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\#f})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{\#f}))];$
- $(\forall p \in Pred_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#p} \in |\mathcal{A}|)[< a_1, \dots, a_{\#p} > \in p^{\mathcal{A}} \longrightarrow < h(a_1), \dots, h(a_{\#p}) > \in p^{\mathcal{B}}];$

Накратко слабия хомоморфизъм запазва операциите (функциите) и запазва истинността на свойствата/вързките/релациите.

1.2 Рефлектирац хомоморфизъм или просто хомоморфизъм

Нека \mathcal{L} е език на предикатното смятане от първи ред. Нека \mathcal{A} и \mathcal{B} са две структури за \mathcal{L} . Нека $h : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{B}|$.

h е рефлектирац (reflective) хомоморфизъм ($h \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$), ако

- $(\forall c \in Const_{\mathcal{L}})[h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}];$
- $(\forall f \in Func_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#f} \in |\mathcal{A}|)[h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\#f})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{\#f}))];$
- $(\forall p \in Pred_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#p} \in |\mathcal{A}|)[< a_1, \dots, a_{\#p} > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), \dots, h(a_{\#p}) > \in p^{\mathcal{B}}];$

Забележа: Разликата е в последното свойство.

Накратко рефлектирац хомоморфизъм или просто хомоморфизъм е слаб хомоморфизъм, който запазва и лъжата (неистинността) на свойствата/вързките/релациите.

1.3 Изоморфизъм

Изоморфизъм е хомоморфизъм, който е и биекция!

1.4 Автоморфизъм

Аutomорфизъм е изоморфизъм на една структура в себе си. Но тъй като понятието за нас е с особена важност ще го напишем!

Нека \mathcal{L} е език на предикатното смятане от първи ред. Нека \mathcal{A} е структура за \mathcal{L} . Нека $h : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{A}|$.

h е автоморфизъм ($h \in Aut(\mathcal{A})$), ако h е биекция и още:

- $(\forall c \in Const_{\mathcal{L}})[h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}}];$
- $(\forall f \in Func_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#f} \in |\mathcal{A}|)[h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\#f})) = f^{\mathcal{A}}(h(a_1), \dots, h(a_{\#f}))];$
- $(\forall p \in Pred_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#p} \in |\mathcal{A}|)$
 $[< a_1, \dots, a_{\#p} > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), \dots, h(a_{\#p}) > \in p^{\mathcal{A}}];$

Забелжка: в сила е $\{id_{|\mathcal{A}|}\} \subseteq Aut(\mathcal{A})$.