Задачи за (Не)Определимост №1

Задача 1 (Числа на Фибоначи) *Редицата* $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ *се дефинира така:*

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ и } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ за } n \geq 0.$$

Разглеждаме език $\mathcal{L}$ *без формално равенство и единствени нелогически символи: двуместен функционален символ* f *и едноместен предикатен символ* p.

$\mathcal{S}$ *е структурата за езика* $\mathcal{L}$ *с носител* $\mathbb{N}$ *и интерпретации на нелогическите символи:*

$$f^{\mathcal{S}}(x, y) = z \overset{def}{\longleftrightarrow} x + F_{y+1} = z$$
$$p^{\mathcal{S}}(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} x \in \{F_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Да се докаже, че в структурата $\mathcal{S}$ *са определими:*

1. $\{0\}$.
2. $\{1\}$.
3. $Eq = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.

Вярно ли е, че в $\mathcal{S}$ *е определимо множеството:*

$$Prev = \{(F_n, F_{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}\}?$$

Да се намерят с доказателство автоморфизмите на стуктурата $\mathcal{S}$.

Задача 2 (Комплексни числа) *Разглеждаме език* $\mathcal{L} =< p, q >$ *от два двумесни предикатни символа. Нека* $\mathcal{S} =< \mathbb{C};\ p^{\mathcal{S}}, q^{\mathcal{S}} >$ *е структура за* $\mathcal{L}$. *Където:*

$$< x, y > \in p^{\mathcal{S}} \overset{def}{\longleftrightarrow} y = ix$$
$$< x, y > \in q^{\mathcal{S}} \overset{def}{\longleftrightarrow} y = x^3 + i$$

Да са определят следните множества:

а) $\{0\}$ *и* $\{1\}$*;*

б) $\{x \mid x \in \mathbb{C}\ \&\ x^2 = -1\}$ *и* $\{x \mid x \in \mathbb{C}\ \&\ x^4 = 1\}$*;*

в) $\{x \mid x \in \mathbb{C} \ \& \ x^3 = 1\}$*;*

г) $\{< x, y > \ \mid x \in \mathbb{C} \ \& \ y \in \mathbb{C} \ \& \ y = x^3 + 1\}$*;*

д) $\{2\}$ *и* $\{9\}$*;*

е) $\{< 9, i >\}$*;*

ж) $\{x \mid x \in \mathbb{C} \ \& \ x^3 - 2x^2 - x = -2\}$*;*

з) $\{-2 + 3i\}$*;*

Задача 3 (Функции) *Разглеждаме език* $\mathcal{L} =< nat, result >$ *състоящ се от два предикатни символа. nat е едноместен, а result е четириместен.*

Нека $\mathbb{F} = \{f \mid f \ : \ \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}^2}\}$*.*

Нека $\mathcal{S} =< \mathbb{N} \cup \mathbb{F} \ ; \ nat^{\mathcal{S}}, result^{\mathcal{S}} >$ *е структура за* $\mathcal{L}$*.*

Където:

$$x \in nat^{\mathcal{S}} \overset{def}{\longleftrightarrow} x \in \mathbb{N}$$

$$< f, x, y, z > \in result^{\mathcal{S}} \overset{def}{\longleftrightarrow} f \in \mathbb{F} \ \& \ < x, y, z > \in \mathbb{N}^3 \ \& \ < y, z > \in f(x)$$

Ще използваме следния запис: $[\ x \mapsto$ *израз* $]$ *за да означаваме елемента на* $\mathbb{F}$*, който на* x *съпоставя израза "израз".*

а) Да се определят множествата:

1. $\{f \mid f \in \mathbb{F} \ \& \ f = [\ x \mapsto \emptyset\ ]\}$*;*

2. $\{f \mid f \in \mathbb{F} \ \& \ f = [\ x \mapsto \mathbb{N}^2\ ]\}$*;*

3. $\{< f, g, h > \ \mid \ < f, g, h > \in \mathbb{F}^3 \ \& \ h = [\ x \mapsto f(x) \cup g(x)\ ]\}$*;*

4. $\{< f, g, h > \ \mid \ < f, g, h > \in \mathbb{F}^3 \ \& \ h = [\ x \mapsto f(x) \cap g(x)\ ]\}$*;*

5. $\{< f, f > \ \mid f \ \in \mathbb{F}\}$*;*

6. $\{< f, g > \ \mid \ < f, g > \in \mathbb{F}^2 \ \& \ (\forall x \in \mathbb{N}) \ f(x) \subseteq g(x)\}$*;*

7. $\{< f, g, h > \ \mid \ < f, g, h > \in \mathbb{F}^3 \ \& \ h = [\ x \mapsto f(x) \setminus g(x)\ ]\}$*;*

8. $\{f \mid f \in \mathbb{F} \;\&\; (\exists n \in \mathbb{N})\; f = [x \mapsto \{(n,n)\}]\}$;

9. $\{f \mid f \in \mathbb{F} \;\&\; (\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\; (n \neq m \;\&\; f = [x \mapsto \{(n,n),(m,m)\}])\}$;

10. $\{< f,g,h > \mid < f,g,h > \in \mathbb{F}^3 \;\&\; (\forall < x,y,z > \in \mathbb{N}^3)$
 $< y,z > \in h(x) \longleftrightarrow (\exists < u,t > \in f(x))\; < y,z > \in g(u) \cup g(t)\}$.

б) Да се докаже, че точно два елемента на домейна/универсума/носителя на $\mathcal{S}$) са определими.

Задача 4 ("Ориентирани графи" над фиксирано множество от върхове)
Разглеждаме език $\mathcal{L} =< node, edge >$ състоящ се от два предикатни символа. node е едноместен, а edge триместен. Нека $\mathbb{V} = \{1,2,\dots 2019\}$. Нека $\mathbb{G} = 2^{\mathbb{V}^2}$ Разглеждаме следната структура $\mathcal{S} =< \mathbb{V} \cup \mathbb{G}\ ;\ node^{\mathcal{S}}, edge^{\mathcal{S}} >$ за $\mathcal{L}$.

Където:

$$x \in node^S \overset{def}{\longleftrightarrow} x \in \mathbb{V}$$
$$< x,g,y > \in edge^S \overset{def}{\longleftrightarrow} g \in \mathbb{G} \;\&\; < x,y > \in g$$

а) Да се определят следните множества:

1. $\emptyset$;

2. $\{\emptyset\}$;

3. $\mathbb{V}^2$;

4. $\{< g,r,h > \mid < g,r,h > \in \mathbb{G}^3 \;\&\; h = g \cup r\}$;

5. $\{< g,r,h > \mid < g,r,h > \in \mathbb{G}^3 \;\&\; h = g \cap r\}$;

6. $\{< g,g > \mid g \in \mathbb{G}\}$;

7. $\{< v,v > \mid v \in \mathbb{V}\}$;

8. $\{< x,x > \mid x \in \mathbb{V} \cup \mathbb{G}\}$;

9. $\{< g,h > \mid < g,h > \in \mathbb{G}^2 \;\&\; g \subseteq h\}$;

10. $\{< g,h > \mid < g,h > \in \mathbb{G}^2 \;\&\; h = \mathbb{V}^2 \setminus g\}$;

11. $\{\{< n, n >\} \mid n \in \mathbb{V}\}$;

12. $\{\{< n, n >, < m, m >\} \mid \; < n, m > \in \mathbb{V}^2\}$;

13. $\{\{< n, m >\} \mid \; < n, m > \in \mathbb{V}^2\}$;

14. $\{\{< n, m >, < m, k >\} \mid \; < n, m, k > \in \mathbb{V}^3\}$;

15. $\{\{< n, m >, < m, k >, < k, n >\} \mid \; < n, m, k > \in \mathbb{V}^3\}$.

б) Да се докаже, че точно два елемента на домейна/универсума/носителя на $\mathcal{S}$ са определими.