

# Неопределимост

Иво Стратев

24 октомври 2019 г.

## Съдържание

# 1 Хомоморфизми

## 1.1 Слаб хомоморфизъм

Нека  $\mathcal{L}$  е език на предикатното смятане от първи ред. Нека  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  са две структури за  $\mathcal{L}$ . Нека  $h : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{B}|$ .

$h$  е слаб хомоморфизъм ( $h \in WeakHom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ), ако

- $(\forall c \in Const_{\mathcal{L}})[h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}];$
- $(\forall f \in Func_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#f} \in |\mathcal{A}|)[h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\#f})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{\#f}))];$
- $(\forall p \in Pred_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#p} \in |\mathcal{A}|)[< a_1, \dots, a_{\#p} > \in p^{\mathcal{A}} \longrightarrow < h(a_1), \dots, h(a_{\#p}) > \in p^{\mathcal{B}}];$

Накратко слабия хомоморфизъм запазва операциите (функциите) и запазва истинността на свойствата/вързките/релациите.

## 1.2 Рефлектирац хомоморфизъм или просто хомоморфизъм

Нека  $\mathcal{L}$  е език на предикатното смятане от първи ред. Нека  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  са две структури за  $\mathcal{L}$ . Нека  $h : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{B}|$ .

$h$  е рефлектирац (reflective) хомоморфизъм ( $h \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ), ако

- $(\forall c \in Const_{\mathcal{L}})[h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}];$
- $(\forall f \in Func_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#f} \in |\mathcal{A}|)[h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\#f})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{\#f}))];$
- $(\forall p \in Pred_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#p} \in |\mathcal{A}|)[< a_1, \dots, a_{\#p} > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), \dots, h(a_{\#p}) > \in p^{\mathcal{B}}];$

Забележа: Разликата е в последното свойство.

Накратко рефлектирац хомоморфизъм или просто хомоморфизъм е слаб хомоморфизъм, който запазва и лъжата (неистинността) на свойствата/вързките/релациите.

## 1.3 Изоморфизъм

Изоморфизъм е хомоморфизъм, който е и биекция!

## 1.4 Автоморфизъм

Аutomорфизъм е изоморфизъм на една структура в себе си. Но тъй като понятието за нас е с особена важност ще го напишем!

Нека  $\mathcal{L}$  е език на предикатното смятане от първи ред. Нека  $\mathcal{A}$  е структура за  $\mathcal{L}$ . Нека  $h : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{A}|$ .

$h$  е автоморфизъм ( $h \in Aut(\mathcal{A})$ ), ако  $h$  е биекция и още:

- $(\forall c \in Const_{\mathcal{L}})[h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}}];$
- $(\forall f \in Func_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#f} \in |\mathcal{A}|)[ h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\#f})) = f^{\mathcal{A}}(h(a_1), \dots, h(a_{\#f})) ];$
- $(\forall p \in Pred_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#p} \in |\mathcal{A}|)$   
 $[ < a_1, \dots, a_{\#p} > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), \dots, h(a_{\#p}) > \in p^{\mathcal{A}}];$

Забелжка: в сила е  $\{id_{|\mathcal{A}|}\} \subseteq Aut(\mathcal{A})$ .