Неопределимост

Иво Стратев

24 октомври 2019 г.

Съдържание

1 Хомоморфизми

1.1 Слаб хомоморфизъм

Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане от първи ред. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две структури за $\mathcal{L}$. Нека $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$.
h е слаб хомоморфизъм ($h \in WeakHom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$), ако

- $(\forall c \in Const_{\mathcal{L}})[h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}]$;
- $(\forall f \in Func_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#f} \in |\mathcal{A}|)[\ h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\#f})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{\#f}))\ ]$;
- $(\forall p \in Pred_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#p} \in |\mathcal{A}|)$
  $[< a_1, \dots, a_{\#p} > \in p^{\mathcal{A}} \longrightarrow < h(a_1), \dots, h(a_{\#p}) > \in p^{\mathcal{B}}]$;

Накратко слабия хомоморфизъм запазва операциите (функциите) и запазва истинността на свойствата/връзките/релациите.

1.2 Рефлектиращ хомоморфизъм или просто хомоморфизъм

Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане от първи ред. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две структури за $\mathcal{L}$. Нека $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$.
h е рефлектиращ (reflective) хомоморфизъм ($h \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$), ако

- $(\forall c \in Const_{\mathcal{L}})[h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}]$;
- $(\forall f \in Func_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#f} \in |\mathcal{A}|)[\ h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{\#f})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{\#f}))\ ]$;
- $(\forall p \in Pred_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \dots (\forall a_{\#p} \in |\mathcal{A}|)$
  $[< a_1, \dots, a_{\#p} > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), \dots, h(a_{\#p}) > \in p^{\mathcal{B}}]$;

Забележа: Разликата е в последното свойство.
Накратко рефлектиращ хомоморфизъм или просто хомоморфизъм е слаб хомоморфизъм, който запазва и лъжата (неистинността) на свойствата/връзките/релациите.

1.3 Изоморфизъм

Изоморфизъм е хомоморфизъм, който е и биекция!

1.4 Автоморфизъм

Автоморфизъм е изоморфизъм на една структура в себе си. Но тъйкато понятието за нас е с особена важност ще го напишем!

Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане от първи ред. Нека $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$. Нека $h : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{A}|$.
h е автоморфизъм ($h \in Aut(\mathcal{A})$), ако h е биекция и още:

- $(\forall c \in Const_{\mathcal{L}})[h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}}]$;
- $(\forall f \in Func_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \ldots (\forall a_{\#f} \in |\mathcal{A}|)[\ h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_{\#f})) = f^{\mathcal{A}}(h(a_1), \ldots, h(a_{\#f}))\ ]$;
- $(\forall p \in Pred_{\mathcal{L}})(\forall a_1 \in |\mathcal{A}|) \ldots (\forall a_{\#p} \in |\mathcal{A}|)$
  $[< a_1, \ldots, a_{\#p} > \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow < h(a_1), \ldots, h(a_{\#p}) > \in p^{\mathcal{A}}]$;

Забележка: в сила е $\{id_{|\mathcal{A}|}\} \subseteq Aut(\mathcal{A})$.