Проект по ЧМДУ-практикум 2019/2020г. Вариант 3

Иво Стратев

18 декември 2019 г.

Задача 1 *Разглеждаме следната диференциална задача:*

$$u''(x) - x^2 u(x) = x^2 \ln(x) + x^{-2} \ , \ x \in (1, 2) \tag{1}$$

$$u(1) = 0 \tag{2}$$

$$u'(2) = \frac{1}{2} \tag{3}$$

Съставяме диференчна схема, за която искаме локалната грешка на апроксимация да е $O(h^2)$, където h е стъпката.

Въвеждаме мрежа от $n+1$ точки в интервала $[1, 2]$. Нека $h = \frac{1}{n}$. Нека $x_i = 1 + (i-1)h$ за $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Нека $y_i \approx u(x_i)$.

В уравнение (1) апроксимираме $u''(x_i)$ с

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

с ЛГА $O(h^2)$.
И така последователно получаваме

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i^2 y_i = x_i^2 \ln(x_i) + x_i^{-2}$$

$$y_{i-1} - (2 + h^2 x_i^2) y_i + y_{i+1} = h^2 x_i^2 \ln(x_i) + h^2 x_i^{-2}$$

за $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

Граничното условие (2) се апроксимира точно без грешка от $y_1 = 0$.

За апроксимация на граничното условие (3) с ЛГА $O(h^2)$ въвеждаме временна извън конурна точка $x_{n+2} = x_{n+1} + h = 2 + h$. Допускаме, че уравнението (1) се удовлетворява в x_{n+1}. Апроксимираме $u'(2)$ с централна разлика с ЛГА $O(h^2)$.

Последователно получаваме:

$$\begin{aligned} y_n - (2 + h^2 x_{n+1}^2) y_{n+1} + y_{n+2} = h^2 x_{n+1}^2 \ln(x_{n+1}) + h^2 x_{n+1}^{-2} \\ \frac{y_{n+2} - y_n}{2h} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n - (2 + h^2 2^2) y_{n+1} + y_{n+2} = h^2 2^2 \ln(2) + h^2 2^{-2} \\ y_{n+2} = y_n + h \end{aligned}$$

$$2y_n - 2(1 + 2h^2) y_{n+1} + h = 4h^2 \ln(2) + \frac{h^2}{4}$$

$$y_n - (1 + 2h^2) y_{n+1} = h^2 \left(\ln 4 + \frac{1}{8} \right) - \frac{h}{2}$$

Тоест крайната диференчна схема е

$$\begin{aligned} y_1 = 0 \\ y_{i-1} - (2 + h^2 x_i^2) y_i + y_{i+1} = h^2 \left(x_i^2 \ln(x_i) + x_i^{-2} \right) \ , \ i \in \{2, 3, \ldots, n\} \\ y_n - (1 + 2h^2) y_{n+1} = h^2 \left(\ln 4 + \frac{1}{8} \right) - \frac{h}{2} \end{aligned}$$