ĐỀ CƯƠNG

HÌNH HỌC 10 NÂNG CAO

NĂM HỌC 2014 – 2015

CHƯƠNG I : VECTƠ

BÀI 1 – 2 - 3 : CÁC ĐỊNH NGHĨA – TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI – TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Các định nghĩa :

1. **Khái niệm về Vectơ :** Vectơ là một *đoạn thẳng có hướng*, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu , điểm nào là điểm cuối.

Kí hiệu: $\overrightarrow{AB}$ chỉ có :

+ Gốc (điểm đầu) là A.
+ Ngọn (điểm cuối) là B.

2. **Giá của vectơ:** Đường thẳng d chứa đoạn thẳng AB là giác của $\overrightarrow{AB}$

3. **Độ dài của vectơ :** Độ dài của đoạn thẳng AB là độ dài của $\overrightarrow{AB}$

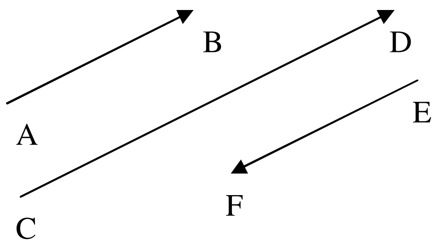
Kí hiệu là : $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Như vậy ta có : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.

4. **Hướng của vectơ :** Chiều từ gốc A đến ngọn B là hướng của $\overrightarrow{AB}$.

5. **Vectơ đơn vị :** Vectơ có độ dài bằng 1 được gọi là đơn vị.

6. **Hai vectơ cùng phương :** Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng *song song* hoặc *trùng nhau*.

Lưu ý : Hai vectơ cùng phương thì chúng có thể *cùng hướng* hay *ngược hướng*.



Ta có : + $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ cùng phương với nhau.

+ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng với nhau.

+ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$: ngược hướng với nhau

7. **Hai vectơ bằng nhau :** Hai vectơ $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

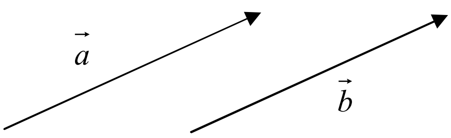
Kí hiệu : $\vec{a} = \vec{b}$.

Tính chất :

i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

iii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *và* $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$



8. **Vectơ $\vec{0}$:** Vectơ không là vectơ có gốc và ngọn trùng nhau. Kí hiệu là : $\vec{0}$

Ta có : i) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$.

ii) $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ... = \vec{0}$

Nhận xét : Vectơ $\vec{0}$ có độ dài bằng 0 và có phương bất kỳ (cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ)

9. **Vectơ tự do :**

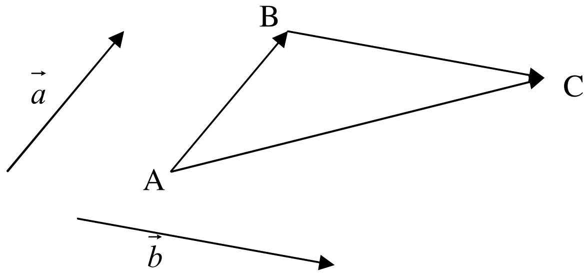
Có rất nhiều vectơ bằng một vectơ $\overrightarrow{AB}$ cho trước. Tập hợp các vectơ này được coi là một vectơ (Vectơ tự do). Một vectơ tự do hoàn toàn được xác định nếu biết hướng và độ dài của nó. Vectơ tự do thường được kí hiệu đơn giản là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}$,...

10. **Xác định một điểm bằng đẳng thức vectơ:**

Cho điểm O có định và vectơ $\vec{v}$ không đổi. Khi đó tồn tại duy nhất một điểm M sao cho : $\overrightarrow{OM} = \vec{v}(1)$
Ta nói điểm M được xác định bởi đẳng thức (1).

II. Tổng và hiệu của hai :

1. Tổng hai vectơ



a. Định nghĩa:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. Lấy điểm A bất kỳ , ta vẽ : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, sau đó vẽ tiếp $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Vectơ $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ được xác định như trên được gọi là *tổng* của $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. Kí hiệu : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

b. Tính chất :

* Giao hoan : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

* Keghzp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

* Tsnh chagcộng với vectz ¹ khohg: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

* Bất đẳng thức tam giác : $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$

c. Các qui tắc :

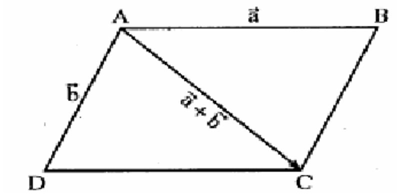
i. *Quy tắc 3 điểm* : (Qui tắc chèn điểm)

Cho A, B ,C tuy y. Ta co : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Mở rộng cho n điểm : Cho n điểm A_1 , A_2, A_3,...., A_n, ta có :

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$$

ii. *Quy tắc hình bình hành :* Neg ABCD la hmh bmh hanh thr $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



2. Hiệu của hai vectơ

a. Vectơ đối : Cho vectơ $\vec{a}$. Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$. Kí hiệu : $-\vec{a}$.

Nói cách khác nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ thì ta nói $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$ hay $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$

- *Các tính chất :*

i) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

ii) I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

iii) $-(-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$

b. Định nghĩa hiệu của hai Vectơ : Cho hai vectơ $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$.

Hiệu của $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$ được định nghĩa bởi : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

- *Qui tắc 3 điểm:* Cho $\overrightarrow{BC}$, với điểm O tuy y ta co : $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$.

III. Tích của với một số với một Vectơ:

1. Định nghĩa : Cho vectơ $\vec{a} \ne \vec{0}$ và số thực $k \ne 0$. Tsch của số k với vectơ $\vec{a}$, kí hiệu k.$\vec{a}$, la một vectz cùng phương với $\vec{a}$ thỏa các tính chất :

* $k > 0$: cùng hướng với $\vec{a}$.

* $k < 0$: ngược hướng với $\vec{a}$.

* Có độ dài : $|k.\vec{a}| = |k|.|\vec{a}|$

Quy ước : $k.\vec{0} = 0.\vec{a} = \vec{0}$

• *Tính chất :*

a) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$

b) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$

c) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

d) $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$

e) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoaq $\vec{a} = \vec{0}$

2. Hai vectơ cùng phương: $\vec{b}$ cung phl zng $\vec{a}\,(\vec{a} \neq \vec{0})$ *khi và chỉ khi* co sogk thoa $\vec{b} = k\vec{a}$.

3. Ba điểm thẳng hàng : A , B , C thang hang *khi và chỉ khi* tồn tại soghực $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Biểu diễn một vectơ qua hai vectơ không cùng phương:

Cho $\vec{b}$ khohg cungphl zng $\vec{a}$, $\forall \vec{x}$ luoh wl zu biek dien $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (m, n duy nhag).

IV. Một số tính chất quan trọng cần nhớ

1. Tính chất trung điểm : Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có :

i) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

ii) $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$, với M bất kỳ .

2. Tính chất trọng tâm tam giác : Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có :

i) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

ii) $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$, với M bất kỳ.

3. Tính chất đường trung tuyến:

Nếu AM là một trung tuyến của tam giác ABC thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

4. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng :

A , B , C thang hang *khi và chỉ khi* thỏa mãn một trong các điều kiện sau :

a. tồn tại soghực $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

b. Cho một điểm I bất kỳ khi đó tồn tại một số thực t sao cho : $\overrightarrow{IA} = t\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$.

5. Công thức chia điểm :

Cho đoạn thẳng AB và số thực k khác 0 và 1. Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k nếu : $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$.

Khi đó với điểm C bất kỳ , ta có : $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{CA} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CB}$ (Công thức điểm chia)

B. PHƯƠNG PHÁP TOÁN

VẤN ĐỀ 1: ĐẠI CƯƠNG VỀ

<u>PHƯƠNG PHÁP CHUNG :</u>
Sử dụng các định nghĩa, tính chất và phép toán của vectơ và các tính chất hình học đã học ở các lớp dưới.

Bài 1. Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$. Chứng minh rằng :

a) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{b}|\vec{a} = |\vec{a}|\vec{b}$

b) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{b}|\vec{a} = -|\vec{a}|\vec{b}$

Bài 2. Gọi C là trung điểm đoạn AB. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.
b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng.
c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.
d) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$
e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$
f) $|\overrightarrow{AB}| = 2.|\overrightarrow{BC}|$

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm của AB.

a) Đẳng thức $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ đúng hay sai?
b) Các vectơ nào cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$?
c) Các vectơ nào ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$
d) Các vectơ nào bằng nhau?

Bài 4. Cho ba điểm A, B, C . Có nhận xét gì về ba điểm đó nếu :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
c) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Bài 5. Cho ba điểm A, B, C. Mệnh đề nào sau đây đúng?

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$
b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow A \equiv C$ và $B \equiv D$.
c) Nếu $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ thì $B \equiv C$
d) Nếu $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$ thì $B \equiv C$

Bài 6. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Kết luận gì về ba điểm A, B, C nếu :

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.
b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD. Hãy chỉ ra các véctơ $\left(\neq \vec{0}\right)$ có điểm đầu và điểm cuối là một trong bốn điểm ABCD. Trong số các véctơ trên, hãy chỉ ra

a) Các véctơ cùng phương.
b) Các cặp véctơ cùng phương nhưng ngược hướng.
c) Các cặp véctơ bằng nhau.

Bài 8. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O.

a) Tìm các véctơ khác các véctơ không $\left(\neq \vec{0}\right)$ và cùng phương với $\overrightarrow{AO}$.
b) Tìm các véctơ bằng với các véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.
c) Hãy vẽ các véctơ bằng với véctơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu là O, D, C.
d) Hãy vẽ các véctơ bằng với véctơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm gốc là O, D, C.

Bài 9. Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

a) Tìm các véctơ bằng với véctơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm các véctơ bằng với véctơ $\overrightarrow{OA}$.

c) Vẽ các véctơ bằng với $\overrightarrow{OA}$ và có điểm ngọn là A, B, C, D.

Bài 10. Cho 3 điểm A, B, C phân biệt. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đó ?

Bài 11. Cho 5 điểm A, B, C, D, E phân biệt. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đó ?

Bài 12. Cho véctơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C. Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Bài 13. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ thì $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

b) Nếu I là trung điểm của MN thì $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} = \vec{0}$.

c) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

d) Nếu $\overrightarrow{AC}$ *và* $\overrightarrow{AB}$ là hai đối nhau thì $A \equiv C$.

e) $\vec{a} + \vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a} - \vec{b}$

Bài 14. Cho tam giác ABC và điểm M tùy ý . Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MC}$

c) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

Bài 15. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}|$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

d) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Bài 16. Cho 4 điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Có 5 hệ thức véctơ và 5 mệnh đề được đặt ở hai cột tương ứng, hãy nối chúng lại với nhau để tạo thành một suy luận đúng ?

Cột I	Cột II
1/ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$	A : "ABCD là hình bình hành"
2/ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$	B: "ABDC là hình bình hành"
3/ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	C: "ACBD là hình bình hành"
4/ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$	D: "D là trung điểm AB"
5/ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$	E: "$C \in AB$"

Bài 17. Cho hình ngũ giác đều ABCDE tâm O. Chứng minh :

a) Hai vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

Bài 19. Cho tam giác ABC . Chứng minh điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Bài 20. Các tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm lần lượt là G và G'. Chứng minh rằng :
$\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$

Bài 21. Cho ΔABC có A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{A'B'}$.

b) Tìm các véctơ bằng với $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$.

Bài 22. Cho ΔABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AD. Dựng $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{CP}$ và $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{BN}$

a) CMR : $\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{PN}$

b) Hình tính tứ giác AKBN

c) CMR : $\overrightarrow{AL}=\vec{0}$

Bài 23. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm của ΔABC, B' là điểm đối xứng với B qua O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{B'C}$.

Bài 24. Cho ΔABC. Vẽ D đối xứng với A qua B, E đối xứng với B qua C và F đối xứng với C qua A. Gọi G là giao điểm giữa trung tuyến AM của ΔABC với trung tuyến DN của ΔDEF. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của GA và GD. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$

b) $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{NI}$.

Bài 25. Cho ΔABC và M là một điểm không thuộc các cạnh của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Vẽ điểm P đối xứng với M qua D, điểm Q đối xứng với P qua E, điểm N đối xứng với Q qua F. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{NA}$.

Bài 26. Cho hai ΔABC và ΔAEF có cùng trọng tâm G. Chứng minh: $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FC}$.

Bài 27. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC.

Chứng minh: $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{QN}$, $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{PN}$.

Bài 28. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}$, $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=AC$.

b) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

d) Nếu $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right|$ thì ABCD là hình chữ nhật.

Bài 29. Cho hình bình hành ABCD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. AN và CM lần lượt cắt BD tại E và F. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FB}$**.**

b) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}$

Bài 30. Cho hình bình hành ABCD. Dựng $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$.Chứng minh :

$\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$

Bài 31. Cho hình bình hành ABCD và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Bài 32. Cho hình chữ nhật ABCD, kẻ $AH\perp BD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DH và BC. Kẻ

BK $\perp$ AM và cắt AH tại E. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EB}$

Bài 33. Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD với AB = 2CD. Từ C vẽ $\vec{CI} = \vec{DA}$. CMR :

a) I là trung điểm AB và $\vec{DI} = \vec{CB}$ b) $\vec{AI} = \vec{IB} = \vec{DC}$

Bài 34. Chứng minh các khẳng định sau :

a) Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng thì $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

b) Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$ thì $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.

c) $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Khi nào dấu đẳng thức sảy ra?

Bài 35.

1. Cho $|\vec{a}+\vec{b}| = 0$. So sánh về độ dài, phương và hướng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

2. Cho hai véctơ $\vec{a}$ **và** $\vec{b}$ là hai véctơ khác véctơ không. Khi nào có đẳng thức xảy ra ?

a) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. b) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$.

Bài 36. : Cho tam giac ABC , trong tam la G. Phat bieu nao la ung

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AC}|$ b) $|\overrightarrow{GA}| + |\overrightarrow{GB}| + |\overrightarrow{GC}| = 0$

c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = \overrightarrow{AC}$ d) $|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 0$

Bài 37. Tìm tính chất tam giác ABC, biegrang : $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|$

Bài 38. Tứ giác ABCD là hình gì nếu có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *và* $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$**.**

Bài 39. Cho tam giác ABC vuông tại A biết AC = a và AB = 2a. Tính độ dài của các vectơ : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Bài 40. Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = a, góc C = 60^0.

a) Xác định và tính độ dài $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) Gọi M là trung điểm BC. Vẽ tính $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}$. Chứng minh $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BM}$

Bài 41. Cho ΔABC vuông tại A. Biết AB = 6a, AC = 8a. Tính $|\vec{AB} - \vec{AC}|$

Bài 42. Cho ΔABC đều có cạnh là a. Tính độ dài các véctơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

Bài 43. Cho ΔABC đều cạnh a, trực tâm H. Tính độ dài của các $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}$.

Bài 44. Cho tam giác ABC đều cạnh a.

a) Xác định và tính độ dài các $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\vec{v} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC. Xác định và tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}$

Bài 45. Cho ΔABC đều cạnh a. Gọi I là trung điểm BC.

a) Tính $|\vec{AB} - \vec{AC}|$ b) Tính $|\vec{BA} - \vec{BI}|$

Bài 46. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Hãy biểu diễn các véctơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}$.

Bài 47. Cho hình thoi ABCD có tâm O, AB = a và góc $\angle ABC = 60^0$.
Xác định và tính độ dài các vectơ : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Bài 48. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 60^0$ và cạnh là a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.
Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$;$|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$;$|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$

Bài 49. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2a; AD = a. Hãy xác định và tính độ dài các vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$ b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}$

Bài 50. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 3a, AD = 4a.

a) Tính $|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}|$ b) Dựng $\vec{u} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}$. Tính $|\vec{u}|$

Bài 51. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính độ dài của các
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$

Bài 52. Cho hình vuông ABCD cạnh là a. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|$.

VẤN ĐỀ 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :
Để thực hiện phép biến đổi tương đương cho đẳng thức cần chứng minh khi đó ta lựa chọn một trong các biến đổi sau:

1. Biến đổi một vế thành vế còn lại.
- Xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Xuất phát từ vế đơn giản ta cần phân tích.

2. Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về đẳng thức đã biết là đúng
3. Biến đổi một đẳng thức đã biết là đúng thành đẳng thức cần chứng minh.
4. Tạo dựng các hình phụ.
5. Thường áp dụng các qui tắc sau :

- Quy tắc 3 điểm: $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$
  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$
- Quy tắc hình bình hành: với hình bình hành ABCD ta luôn có: $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC}$.
- Quy tắc trung điểm : Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có :
  i) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
  ii) $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$, với M bất kỳ.
- Quy tắc trọng tâm : Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có :
  i) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
  ii) $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$, với M bất kỳ.

Bài 1. Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$ b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Bài 2. Cho 5 điểm A, B, C, D, E tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

Bài 3. Cho 6 điểm: A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

c) Nếu $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Bài 4. Cho 7 điểm A, B, C, D, E, F, G. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{GF}$.

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

Bài 5. Cho 8 điểm A, B, C, D, E, F, G, H

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{HF}$.

Bài 6. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm là O. Chứng minh rằng: với M là điểm tùy ý thì ta luôn có:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}$.

d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}$.

e) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

Bài 7. Cho ΔABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

d) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}=\vec{0}$.

e) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

f) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

g) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

h) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$.

Bài 8. Cho ΔABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và O là điểm bất kỳ.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

Bài 9. Cho ΔABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC=2NA$.
Gọi K, D lần lượt là trung điểm của MN và BC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. b) $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC, có AM là trung tuyến. I là trun g điểm của AM.

a) Chứng minh: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Với điểm O bất kỳ, chứng minh: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Gọi E là trung điểm đoạn BC. Các điểm M, N theo thứ tự đó nằm trên cạnh BC sao cho E là trung điểm đoạn MN. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB và O là điểm bất kỳ .
Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ **b)** $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Bài 13. Cho ΔABC, các đường cao AA', BB', CC'.

Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ thì ΔABC là tam giác đều.

Bài 14. Cho ΔABC . Gọi M là một điểm trên đoạn BC sao cho MB=2MC.

CMR: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Bài 15 . Cho ΔABC. Gọi A' là điểm đối xứng của B qua A, B' là điểm đối xứng của C qua B, C' là điểm đối xứng của A qua C.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ (với O là điểm bất kỳ).

Bài 16. Cho ΔABC, vẽ bên ngoài các hình bình hành ABIF; BCPQ; CARS.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Bài 17. Cho ΔABC. Trên cạnh BC lấy các điểm D, E, F sao cho: $BD = DE = EF = FC$.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AE}$.

Bài 18. Cho đều ΔABC có tâm là O. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác và D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Bài 19. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn AB, CD.Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

b) Gọi O là điểm trên đoạn MN và $OM = 2ON$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Bài 20. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của đoạn thẳng BC, CD.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{DA} = \frac{3}{2}.\overrightarrow{DB}$

Bài 21. Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ AB và CD có cùng trung điểm.

Bài 22. Cho 4 điểm A, B, C, D bất kỳ. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. O là trung điểm của EF.
Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

Bài 23. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AF}) = 4\overrightarrow{AO}$ (O là trung điểm cua GF)

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}$.

Bài 24. Cho tứ giác ABCD có AB không song song với CD. Gọi M, N, P, Q lần lượt theo thứ từ là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC, DB.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$ và $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

b) Chứng minh các điểm M, N, P, Q là 4 đỉnh của một hình bình hành.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và O là điểm bất kỳ.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$.

Bài 25. Cho hình bình hành ABCD có tâm O và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$.

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

e) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

f) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

g)) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$

Bài 26. Cho hình bình hành ABCD có tâm là O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, DC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}\right)$.

c) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Bài 27. Cho hình bình hành ABCD có tâm O và E là trung điểm của AD. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{AB}$.

Bài 28. Cho hình thang OABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

b) $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$.

c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)$.

Bài 29. Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

a) G là trọng tâm ΔABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) G là trọng tâm ΔABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (Với M là điểm bất kỳ).

Bài 30. **Cho** ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G'.Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó, suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 31. **Cho lục giác ABCDEF.** Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD,DE, EF, FA. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$

b) Hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

c) Giả sử ABCDEF là hình lục giác đều tâm O. Chứng minh :

i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.

ii) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}$.

Bài 32. Cho tam giác ABC có D, E, F là ba điểm lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho :

$\overrightarrow{DB} = k.\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EC} = k.\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{FA} = k.\overrightarrow{FB}\,(k \neq 1)$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

b) Hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.

Bài 33.

1. **Cho hai tam giác ABC** và ΔA'B'C' có cùng trọng tâm là G. Gọi G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác: ΔBCA' , ΔCAB', ΔABC'. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của $\Delta G_1G_2G_3$.

2. **Cho ΔABC,** M là một điểm trong tam giác. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB.Chứng minh rằng M là trọng tâm của ΔABC khi và chỉ khi:
$a^2.\overrightarrow{MH} + b^2.\overrightarrow{MI} + c^2.\overrightarrow{MK} = \vec{0}$ với a, b, c là độ dài 3 cạnh BC, AC, AB.

3. **Cho ΔABC.** Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB.

CMR ΔABC và ΔMNP có cùng trọng tâm khi và chỉ khi: $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$.

4. **Cho hình bình hành ABCD** và một điểm E thuộc miền trong của hình bình hành. Chứng minh rằng hai ΔACE và ΔBDE có cùng trọng tâm. Điều đó còn đúng khi E nằm ở ngoài hình bình hành không ?

Bài 34. Cho ΔABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB. Chứng minh rằng hai tam giác ΔABC và ΔA'B'C' có chung trọng tâm.

Bài 35. Cho ΔABC và D là điểm bất kỳ. DA, DB, DC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A', B', C'.

Chứng minh rằng nếu ta có: $\overrightarrow{BA'} - \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$ thì D là trọng tâm ΔABC.

Bài 36. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi M thuộc cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$.

b/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Bài 37. Cho ΔABC có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$.

b) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{IC}$.

c) $\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MI}$.

Bài 38. Cho tam giác ABC. G là trọng tâm tam giác. G_1 đối xứng B qua G.

a) CMR : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

b) CMR : $\overrightarrow{MG_1} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}\right)$.

Bài 39. Cho tam giác *ABC*, gọi *G* là trọng tâm, *H* là điểm đối xứng của *B* qua *G* và *M* là trung điểm của *BC*. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

Bài 40. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, G là trọng tâm, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp , AA' là đường kính của đường tròn (O).

a) Chứng minh : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$.

b) Chứng minh : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

c) Chứng minh : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = 2\overrightarrow{HO}$

d) Chứng minh : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

Bài 41. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O có trực tâm H, kẻ đường kính AD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

b) Gọi H' là điểm đối xứng của H qua O. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH'}$.

Bài 42. Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Gọi H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. D là điểm đối xứng với A qua O.

a) Chứng minh rằng BHCD là hình bình hành. Từ đó hãy tính tổng $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) Có nhận xét gì về 3 điểm O, G, H ?

Bài 43. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của C qua G. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

c) $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$

Bài 44. Cho ΔABC. Gọi H là trực tâm của tam giác.

Chứng minh rằng: $\tan A.\overrightarrow{HA}+\tan B.\overrightarrow{HB}+\tan C.\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

Bài 45. Cho ΔABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Chứng minh rằng: $\sin A.\overrightarrow{IA}+\sin B.\overrightarrow{IB}+\sin C.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Bài 46. Cho ΔABC. Lấy điểm M tùy ý thuộc miền trong tam giác.

Chứng minh rằng: $S_{\Delta MBC}.\overrightarrow{MA}+S_{\Delta MAC}.\overrightarrow{MB}+S_{\Delta MAB}.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Kết quả trên còn đúng khi M ở ngoài tam giác không ?

HD: Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC. Ta có: $\overrightarrow{MA'}=\frac{A'C}{BC}.\overrightarrow{MB}+\frac{A'B}{BC}.\overrightarrow{MC}$.

Và $\frac{A'C}{BC}=\frac{S_{\Delta MA'C}}{S_{\Delta MA'B}}=\frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MAB}}$, $\frac{MA'}{MA}=\frac{S_{\Delta MA'B}}{S_{\Delta MAB}}=\frac{S_{\Delta MA'C}}{S_{\Delta MAC}}=\frac{S_{\Delta MA'B}+S_{\Delta MA'C}}{S_{\Delta MAB}+S_{\Delta MAC}}$.

Bài 47. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn AD và BC sao cho: $\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}=\frac{m}{n}$.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN}=\frac{n.\overrightarrow{AB}+m.\overrightarrow{DC}}{m+n}$.

Bài 48. Cho đoạn AB. Trên đoạn AB lấy điểm C sao cho $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$ và S là điểm bất kì.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SC}=\frac{n}{m+n}.\overrightarrow{SA}+\frac{n}{m+n}.\overrightarrow{SB}$.

Bài 49. Cho ΔABC với M là điểm tùy ý.

a) Chứng minh rằng $\vec{a}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{a}$. CD cắt AB tại K. Chứng minh: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CK}$.

Bài 50. **Cho tam giác đều ABC.** Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.CMR:

$a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (a,b,c $\in R^{+}$)

Bài 51. Cho đường tròn tâm I nội tiếp trong ΔABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi a, b, c lần lượt theo thứ tự là độ dài của các cạnh BC, CA, AB của ΔABC.

Chứng minh: $a.\overrightarrow{IM}+b.\overrightarrow{IN}+c.\overrightarrow{IP}=\vec{0}$.

Bài 52. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, EF.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}\right)$ với I bất kì.

b) Hãy tìm điểm G sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\vec{0}$.

c) Gọi G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6 tương ứng là trọng tâm của ΔABC, ΔDEF, ΔBCD, ΔEFA, ΔCDE,

ΔFAB. Chứng minh rằng: G_1G_2, G_3G_4, G_5G_6 cùng đồng qui tại một điểm.

Bài 53. Chứng minh rằng: Nếu hai hình bình hành $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ cùng tâm thì

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} = \vec{0}.$$

Bài 54. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

Chứng minh rằng : $a\overrightarrow{IM} + b.\overrightarrow{IN} + c.\overrightarrow{IP} = \vec{0}$

Bài 55. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì trong tam giác. Đặt $S_{MBC} = S_a$; $S_{MCA} = S_b$; $S_{MAB} = S_c$;

Chứng minh rằng : $S_a\overrightarrow{MA} + S_b.\overrightarrow{MB} + S_c.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

VẤN ĐỀ 3: XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MỘT VECTƠ CHO TRƯỚC

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :

Xác định điểm **M** thỏa một đẳng thức véctơ cho trước ?

Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng xen điểm, hiệu 2 véctơ cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, …) về dạng: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Trong đó điểm O đã biết trước và véctơ $\vec{v}$ đã biết.

Bước 2. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy điểm O làm gốc, dựng 1 véctơ bằng 1 véctơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của véctơ này chính là điểm M.

Lưu ý

1. Thông thường, biểu thức $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn theo tỉ lệ $\vec{a} = k.\vec{b}$, hình bình hành,… Ta dựa vào biểu thức này để dựng hình.

2. Một số cách chứng minh thường dùng

i. *Để chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB*, ta cần chứng minh 1 trong các hệ thức:

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$.
- $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (O bất kỳ).

ii. *Để chứng minh điểm G là trọng tâm của ΔABC*, ta cần chứng minh 1 trong các hệ thức:

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Với I là trung điểm của cạnh BC thì $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
- Với O là điểm bất kì trong mặt phẳng thì: $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

iii. *Để chứng minh ABCD là hình bình hành* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{array}\right.$

iv. *Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau* ta có thể chứng minh 1 trong các hệ thức:

- $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm bất kỳ.

v. *Điều I kiện cần và đủ để ΔABC và ΔA'B'C' có cùng trọng tâm* là: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$.

vi. Nếu $\overrightarrow{MB} = k.\overrightarrow{MC}$ $(k \neq 1)$ thì $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - k.\overrightarrow{AC}}{1-k}$

(hay điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k $(k \neq 1)$.

Bài 1. Cho trước hai điểm A, B và hai số α,β sao cho $\alpha+\beta\neq 0$.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa : $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

b) Suy ra với mọi điểm M bất kỳ , ta có : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$ (1)

Bài 2. Cho trước ba điểm A, B,C và ba số α,β,δ sao cho $\alpha+\beta+\delta\neq 0$.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa : $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\delta\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

b) Suy ra với mọi điểm M bất kỳ , ta có : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MI}$ (2)

Lưu ý : Công thức (1), (2) thường dùng để rút gọn một tổng

Bài 3. Cho n điểm $A_1,A_2,...,A_n$, và n số $x_1,x_2,...,x_n$ *sao cho* : $x_1+x_2+...+x_n\neq 0$.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm *I* thỏa : $x_1\overrightarrow{IA_1}+x_2\overrightarrow{IA_2}+...+x_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

b) Suy ra rằng với mọi điểm M bất kỳ, ta có : $x_1\overrightarrow{MA_1}+x_2\overrightarrow{MA_2}+...+x_n\overrightarrow{A_n}=(x_1+x_2+...+x_n)\overrightarrow{MI}$.

(*Điểm I ở trên được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm* $A_1,A_2,...,A_n$, *với bộ số* $x_1,x_2,...,x_n$)

Bài 4.

1. **Cho hai điểm A, B.** Xác định điểm M, biết: $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (1)
2. **Cho đoạn thẳng** AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{BI}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

a) Tìm số k sao cho $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{AB}$.

b) CMR với mọi điểm M ,ta có $5\overrightarrow{MI}-2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Bài 5. Cho 2 điểm A, B và một $\vec{v}$. Xác định điểm M biết: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{v}$

Bai 6. Cho hai điểm A và B.

a) Dựng các điểm E, F sao cho $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh hai đoạn thẳng AB và EF có cùng trung điểm.

Bài 7. Cho ΔABC. Hãy dựng hình và

a) Tìm điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=0$.

b) Tìm điểm K sao cho: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$.

c) Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

d) Tìm điểm N sao cho: $\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}=0$.

e) Tìm điểm P sao cho: $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

f) Tìm điểm Q sao cho: $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}$.

g) Tìm điểm L sao cho: $2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

h) Tìm điểm H sao cho: $2\overrightarrow{HA}-3\overrightarrow{HB}=3\overrightarrow{BC}$.

i) Tìm điểm R sao cho: $2\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

j) Tìm điểm S sao cho: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{BC}$.

k) Tìm điểm T sao cho: $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

l) Tìm điểm U sao cho: $3\overrightarrow{UA}+\overrightarrow{UB}+\overrightarrow{UC}=\vec{0}$.

m) Tìm điểm X sao cho: $3\overrightarrow{XA}-2.\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=\vec{0}$.

Bài 8. Cho ΔABC . Hãy xác định điểm M thoả mãn điều kiện:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. c) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

d) $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ e) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ f) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài 9. Cho ΔABC. Hãy xác định các điểm I, J, K, L thoả các đẳng thức sau:

a) $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ b) $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{BC}$ d) $3\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$.

Bài 10. Cho ΔABC. Hãy xác định các điểm I, J, K, L thoả các đẳng thức sau:

a) $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{LA}-2\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

Bài 11.Cho ΔABC**.** Gọi M là trung điểm của AB. N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC=2NA$.

a) Xác định điểm K sao cho: $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}$

b) Xác định điểm D sao cho: $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

Bài 12. Cho ΔABC.

a) Xác định các điểm D và E sao cho: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh C là trung điểm của đoạn thẳng ED.

Bài 13. Cho ΔABC, hai điểm D và E.

1/ Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ thì O là trọng tâm ΔABC.

2/ Xác định điểm M thỏa: (+ dựng hình)

a) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}$. d) $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

3/ Xác định điểm N thỏa: (+ dựng hình)

a) $\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{NB}=\vec{0}$. b) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

c) $2\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{NB}+4\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. d) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+3\left(\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NE}\right)=\vec{0}$.

4/ Gọi P là điểm xác định bởi $5\overrightarrow{PA}-7\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PI}=\vec{0}$ và G là trọng tâm của ΔABC.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{GP}=2\overrightarrow{AB}$.

b) Với $AP\cap BG=Q$. Hãy tính tỉ số $\dfrac{QA}{QP}$.

5/ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C và C' là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh rằng hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm J.

Bài 14. Cho ΔABC.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta luôn có: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

b) Hãy dựng điểm D sao cho: $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Bài 15. Cho ΔABC.

a) Dựng điểm P sao cho $3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng véctơ $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Bài 16. Cho tam giác ABC và điểm M tùy ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$.

Chứng minh D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) So sánh 2 véc tơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

Bài 17. Cho tam giác ABC có D là trung điểm BC. Xác định vị trí của G biết $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$.

Bài 18. Cho tứ giác ABCD.

a) Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

Bài 19. Cho O, A, B, C là 4 điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

a) Hãy dựng các điểm D, E, F sao cho: $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

b) Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng DE và C là trung điểm của đoạn FD.

c) Chứng minh hệ thức: $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Bài 20. Cho tứ giác $ABCD$**,** M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho các đẳng thức sau thỏa mãn với mỗi điểm M.

a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MI}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MJ}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MK}$

Bài 21. Cho tứ giác ABCD.

1/ Tìm điểm cố định I để các hệ thức sau thỏa mãn.

. a) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = k.\overrightarrow{MI}$.

c) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MI}$.

2/ Nếu tồn tại $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh O xác định duy nhất.

3/ Nếu ABCD là hình bình hành. Với mọi M, hãy tìm k và điểm cố định I thỏa:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=k.\overrightarrow{MI}$.

c) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=k.\overrightarrow{MI}$.

4/ Xác định điểm S để: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$.

Bài 22. Cho hình bình hành ABCD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

b) Xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

Bài 23. Cho hình bình hành ABCD và ACEF.

a) Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{BD}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MN}$.

Bài 24. Cho hình bình ABCD.

a) Hãy xác định các điểm M, P sao cho $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh rằng P là trung điểm của đoạn thẳng DP.

Bài 26. Cho ΔABC, điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn đẳng thức: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

a) Chứng minh rằng: MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.
b) Gọi P là trung điểm của CN. Chứng minh: MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

<u>HD</u>: a/ $\overrightarrow{MN}=\left(1+5-1\right)\overrightarrow{MI}$. b/ $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}\right)=3\overrightarrow{MJ}$.

Bài 27. Cho tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c. Tìm điểm I sao cho : $a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

VẤN ĐỀ 4: BIỂU DIỄN VECTƠ QUA HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

<u>PHƯƠNG PHÁP CHUNG :</u>

1. <u>Định lý</u>: Cho trước hai $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương .

Với mọi $\vec{c}$ bao giờ cũng tìm được một cặp số thực α,β duy nhất ,sao cho:

$\vec{c}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}$

2. Để biểu diễn một vec tơ qua hai vec tơ không cùng phương, ta sử dụng các cách sau :

i. Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai cùng gốc.

ii. Từ giả thiết thiết lập được mối liên hệ giữa các đối tượng , rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai cùng gốc.

<u>Lưu ý:</u> Trong một vài trường hợp cần sử dụng cơ sở trung gian.

Bài 1. Cho ΔABC có trọng tâm G.

a) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

b) Gọi E, F là hai điểm xác định bởi biểu thức : $\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{EB}$, $3\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FC}=0$. Tính $\overrightarrow{EF}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài 2. Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $BI=2IC$. Tính vecto $\overrightarrow{AI}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

Bài 3. Cho ΔABC. Gọi J là điểm trên cạnh AC sao cho $JA=\frac{2}{3}JC$. Hãy tính vecto $\overrightarrow{BJ}$ *theo* $\overrightarrow{BA}$ *và* $\overrightarrow{BC}$.

Bài 4. Cho ΔABC**.** Gọi M là điểm thỏa mãn : $\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=0$. Tính $\overrightarrow{AM}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$

Bài 5. Cho ΔABC**.** Gọi M trên cạnh BC sao cho $MB=\frac{2}{3}MC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$

Bài 6. Cho ΔABC**.** Gọi K là điểm trên tia đối của AB sao cho $KB=4KA$. Hãy tính vecto $\overrightarrow{CK}$ *theo* $\overrightarrow{BA}$ *và* $\overrightarrow{BC}$.

Bài 7.Cho Δ**ABC ,** gọi G là trọng tâm tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, với M là trung điểm của BC.

Bài 8. Cho ΔABC**.** Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB=3IC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Gọi J, K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA=2IC, KB=3KA$.
Tính $\overrightarrow{JK}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

c) Tính $\overrightarrow{BC}$ *theo* $\overrightarrow{AI}$ *và* $\overrightarrow{JK}$.

Bài 9. Cho ΔABC**,** *I* thuộc đoạn *BC* , sao cho *2CI = 3BI*, *J* là điểm trên *BC* kéo dài sao cho *5JB=2JC*

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC.Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$

Bài 10. Cho ΔABC **có trọng tâm G**

a) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

b) Gọi E là điểm trên cạnh AB thỏa $AE=\frac{1}{2}BE$. F là điểm trên cạnh AC thỏa $AF=2CF$. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$.

c) AG cắt EF tại I.Xác định I và tính $\frac{AI}{AG}$.

d) Cọi P là trung điểm của EF. Tính $\overrightarrow{AP}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.AP cắt BC tại K. Tính $\frac{AP}{AK}$.

Bài 11. Cho Δ**ABC**. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$ c) $\overrightarrow{AC}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$.

Bài 12. Cho Δ**ABC có trọng tâm G.** Gọi H là điểm đối xứng của B qua G.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Bài 13. Cho Δ**ABC.** Trên các đường thẳng BC, AC, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ b) Chứng minh: M, N, P thẳng hàng.

Bài 14. Cho Δ**ABC.** Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$

b) Đặt $\overrightarrow{BB_1}=\vec{u},\overrightarrow{CC_1}=\vec{v}$. Tính $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}$ theo $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Bài 16. Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho 2CI = 3BI. Gọi F là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho 5FB = 2FC.

a) Tính $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AF}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tính $\overrightarrow{AG}$ *theo* $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AF}$.

Bài 17. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi H là điểm đối xứng của G qua B.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{HA}-5\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG}=\vec{a},\ \overrightarrow{AH}=\vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 18. Cho ΔABC .Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB},\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Gọi P là điểm đối xứng của B qua C. Tình $\overrightarrow{AP}$ theo $\vec{u},\ \vec{v}$. Gọi Q, R là hai điểm xác định bởi biểu thức : $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Tính $\overrightarrow{RP},\ \overrightarrow{RQ}$ theo $\vec{u},\ \vec{v}$.

Bài 19. Cho ΔABC. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của CA, AB.Đặt $a=\overrightarrow{BN}$ *và* $b=\overrightarrow{CP}$.
Tính các vecto $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ theo các vecto $\vec{a},\vec{b}$.

Bài 20. Cho ΔABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là điểm thỏa :
$\overrightarrow{NC}=-2\overrightarrow{NA}$. Gọi K là trung điểm của MN.

a) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

b) Gọi D là trung điểm của BC . Chứng minh rằng : $\overrightarrow{KD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 21.

1. **Cho hình bình hành ABCD tâm O.** Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AO},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathbf{B}O}$. Hãy biểu diễn các vecto $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DA}$ theo $\vec{a},\ \vec{b}$
2. **Cho tam giác ABC có G là trọng tâm**. D là điểm đối xứng với G qua C.
Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AG},\ \vec{v}=\overrightarrow{AD}$. Tính $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{u},\ \vec{v}$.
3. **Cho hình lục giác đều ABCDEF tâm O.**
i) Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB},\ \vec{v}=\overrightarrow{AF}$. Biểu diễn $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{BF},\ \overrightarrow{CD},$ $\overrightarrow{CE},\ \overrightarrow{CF},\ \overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{DF},\ \overrightarrow{EF}$ theo $\vec{u},\ \vec{v}$.
ii) Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Tính các vecto trên theo $\vec{a},\ \vec{b}$.

Bài 22. Cho hình bình hành ABCD , M là một điểm trên AB, N là một điểm trên CD sao cho $AM=\frac{1}{3}AB,\ DN=\frac{1}{2}DC$

a) Tính $\overrightarrow{AN}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi I, J lần lượt là các điểm định bởi $\overrightarrow{BI}=\alpha\overrightarrow{BC}$ *và* $\overrightarrow{AJ}=\beta\overrightarrow{AI}$. Tính $\overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{AJ}$ *theo* $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ $,\alpha$ *và* β.

c) Định $\alpha,\ \beta$ để J là trọng tâm tam giác BMN.

Bài 23. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và CD . Hãy tính các vecto $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{AJ}$ theo các vecto $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AD}$.

Bài 24. Cho hình bình hành ABCD, đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Gọi I là trung điểm của CD, G là trọng tâm của tam giác BCI. Phân tích các $\overrightarrow{BI},\ \overrightarrow{AG}$ theo $\vec{a},\ \vec{b}$.

Bài 25. Cho hình thang OABC, AM là trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo các $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$.

Bài 26. Cho hình thang OABC. M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)$.

VẤN ĐỀ 5 : - CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG.
- CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :

1. Muốn chứng minh 3 điểm A,B,C thẳng hàng, ta đi chứng minh:

$\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$;(k∈R) (1)

Để nhận được (1) ta lựa chọn một trong hai hướng

- Hướng 1: Sử dụng các qui tắc biến đổi đã biết
- Hướng 2: Xác định $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

2. Để chứng minh đường thẳng d luôn đi qua điểm I, ta lấy hai điểm thích hợp A, B trên d và chứng minh ba điểm A, B, I thẳng hàng

Tính chất : Cho ba điểm A, B, C cố định và α,β,δ *sao cho* $:\alpha+\beta+\delta\neq 0$. Nếu : $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\delta\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (I cố định) thì $\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MI}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định I.

Bài 1.

1. **Cho điểm O cố định** và đường thẳng d đi qua hai điểm A, B cố định. CMR điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho : $OM=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$. Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn AB.
2. **Cho ba điểm A, B, C** và điểm O tùy ý. CMR : A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}}{1+k}(k\neq -1)$

Bài 2. Cho tam giác ABC

a) Gọi P,Q là hai điểm lần lượt thỏa $2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}\,(1)$ và $5\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\vec{0}$ (2)
CMR: P, Q, A thẳng hàng.

b) Gọi I là điểm đối xứng với B qua C, J là trung điểm của A, C, K là điểm trên AB sao cho AB = 3AK .
CMR: I, J, K thẳng hàng

Bài 3.

1. **Cho tam giác ABC,** lấy điểm I, J thỏa: $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (1) *và* $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}(2)$
   CMR: IJ đi qua trọng tâm cua tam giác ABC.
2. **Cho Δ ABC.** Gọi O, G, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của ΔABC. Chứng minh rằng: O, G, H thẳng hàng.

Bài 4.Cho ΔABC, trọng tâm G. Lấy điểm I, J sao cho:

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (1) *và* $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ (2)

a) CMR: M, N, J thẳng hàng, với M,N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

b) CMR: J là trung điểm của BI

Bài 5. Cho ΔABC. Lấy M, N, P thỏa mãn biểu thức : $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0},\quad \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

a) Tính $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ *theo* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng : M, N, P thẳng hàng.

Bài 6. Cho ΔABC. Lấy M, N, P thỏa mãn biểu thức: $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=0;\ 6\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA};\ \overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$

a) Tính $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ *theo* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng : M, N, P thẳng hàng.

Bài 7. Cho ΔABC với I, J, K lần lượt được xác định bởi: $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}$, $\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KB}$.

a) Vẽ hình và tính $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng .

Bài 8. Cho ΔABC. Hai điểm I, J được xác định bởi: $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh 3 điểm I, J, B thẳng hàng.

Bài 9. Cho ΔABC. Hai điểm M, N được xác định bởi: $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Chứng minh 3 điểm M, G, N thẳng hàng, với G là trọng tâm của ΔABC.

Bài 10. Cho ΔABC có trọng tâm G, I là trung điểm của cạnh BC. Gọi M, N thỏa $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

b) Chứng minh G, M, N thẳng hàng.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng BC, AC, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, D và E là hai điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

b) Tính $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ *theo* $\overrightarrow{AI}$. Suy ra ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Bài 13. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.

a) Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

b) Xác định x để đường thẳng MN đi trung điểm I của BC. Tính $\frac{IM}{IN}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC**.**Lấy các điểm M, N sao cho : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}, 2\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. G là trọng tâm tam giác.

a) Biết $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$ .Xác định x, y.

b) E là điểm thuộc BC thoả mãn $\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BE}$.Hỏi M,N,E có thẳng hàng hay không?vì sao?

Bài 15. Cho tam giác ABC.Cho các điểm M, N, P sao cho

$\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CM}=\vec{0}, \overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}, 2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

b) Biểu diễn $\overrightarrow{NP}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

c) CMR: 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài 16. Cho tam giác ABC **.** M là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. G là trọng tâm tam giác ACM .

a) CMR : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b) Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA}=k.\overrightarrow{IB}$ .Biểu diễn $\overrightarrow{GI}$ theo các véc tơ $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ .Tìm k để 3 điểm C, I, G thẳng hàng.

Bài 17. Cho tứ giác ABCD

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi M, N là các điểm được xác định bởi $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{NC}+3\overrightarrow{NA}=\vec{0}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh G, M, N thẳng hàng.

Bài 18. **Cho hình bình hành ABCD**, M là trung điểm của BD, P là điểm thỏa $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PD}=\vec{0}$. Q là điểm đối xứng với A qua B.

a) Tính $\overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{QP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$

b) Chứng minh rằng 3 điểm M, P, Q thẳng hàng

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác AQC. CMR : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{QD}=3\overrightarrow{QP}$.

Bài 19. Cho hình bình hành ABCD tâm O. lấy các điểm I, J sao cho : $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}(1)$, $\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}(2)$. CMR: I, J, O thẳng hàng.

Bài 20. Cho hình bình hành $ABCD$ **.** I là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{MI}=\vec{0}$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$; b) B, M, D thẳng hàng.

Bài 21. Cho bốn điểm O, A, B, C sao cho : $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Chứng tỏ rằng A, B, C thẳng hàng.

Bài 22. Cho hình bình hành ABCD. Trên các tia AD, AB lần lượt lấy các điểm F, E sao cho AD = $\frac{1}{2}$AF, AB = $\frac{1}{2}$AE. Chứng minh:

a) Ba điểm F, C, E thẳng hàng.

b) Các tứ giác BDCF, DBEC là hình bình hành.

Bài 23. Cho hình chữ nhật ABCD và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD sao cho : $\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{CD}=\frac{1}{3}$. Trên đường thẳng AN lấy điểm Q sao cho **:** $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AN}$**.**

a) Tính $\overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$.

b) Định k để M, P, Q thẳng hàng.

Bài 24. Cho ΔABC. Gọi A′, B′, C′ là các điểm định bởi: $2\overrightarrow{A'B}+3\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{B'C}+3\overrightarrow{B'A}=\vec{0}$, $2\overrightarrow{C'A}+3\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$. Chứng minh các tam giác ABC và A′B′C′ có cùng trọng tâm.

Bài 25. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các điểm M, N thoả mãn: $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Chứng minh đường thẳng MN đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Bài 26. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

a) Tìm điểm I thoả mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 27. Tìm điểm C trên đoạn AB sao cho : $\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$. Cho điểm M bất kỳ trong mặt phẳng và gọi MN là vectơ định bởi : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$. Chứng tỏ đường thẳng MN qua một điểm cố định.

Bài 28. Cho tứ giác lồi ABCD, điểm M trong mặt phẳng thỏa: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}$.

a) Chứng minh: MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

b) Gọi P là trọng tâm ΔABN. Chứng minh: MP luôn đi qua điểm cố định khi M thay đổi.

Bài 29. Cho hình bình hành ABCD có các điểm M, I, N lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD sao cho $AM=\frac{1}{3}AB;\ BI=k.BC;\ CN=\frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN . Định k để đường thẳng AI qua G.

Bài 30. Cho hình bình hành ABCD tâm O.

a) M, N là hai điểm lưu động sao cho : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) E, F là các điểm thỏa : $2\overrightarrow{EA}-3\overrightarrow{EB}=\vec{0},\ 3\overrightarrow{FB}+4\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ .I, J, K lần lượt là các điểm thỏa $\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB};\ \overrightarrow{IK}=3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}$. Chứng minh ba điểm E, I, J thẳng hàng; F, I, K thẳng hàng.

Bài 31. Cho tam giác ABC, lấy các điểm P, Q sao cho : $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB},\ 3\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QC}=\vec{0}$

a) Biểu thị $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh PQ đi qua trọng tâm tam giác ABC.

Bài 32. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P sao cho :
$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=6\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PA}=\vec{0}$.
Hãy biểu thị $\overrightarrow{AN}\ qua\ \overrightarrow{AM}\ và\ \overrightarrow{AP}$, từ đó suy ra M, N, P thẳng hàng.

Bài 33. Cho tam giác ABC. Điểm M, N, P là các điểm thỏa mãn :
$\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MC};\ \overrightarrow{NC}=\beta\overrightarrow{NA};\ \overrightarrow{PA}=\delta\overrightarrow{PB}\ (\alpha,\beta,\delta\neq 0,\neq -1)$.
Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi : $\alpha\beta\delta=1$

VẤN ĐỀ 6: TÌM TẬP ĐIỂM THỎA MÃN HỆ THỨC

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :

Để tìm tập hợp (quỹ tích) điểm M thỏa mãn điều kiện K, ta quy về một trong các dạng sau :

1. Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ với A, B cố định thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

2. $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\vec{v}\right|$ với A cố định , $\vec{v} \neq \vec{0}$ và có độ dài không đổi thì M thuộc đường tròn tâm A, bán kính bằng $\left|\vec{v}\right|$.

3. Nếu $\overrightarrow{MA} = k.\vec{v}$ với điểm A cố định, $\vec{v}$ cho trước thì tập hợp điểm M là đường thẳng qua A và cùng phương với $\vec{v}$.

Bài 1.

1. **Cho 2 điểm cố định A, B.** Tìm tập hợp các điểm M sao cho:
   a) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right|$.
   b) $\left|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$.
2. **Cho đoạn thẳng *AB = 3a*.** Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right| = 3$.
3. **Cho hai điểm A, B và đường thẳng d.** Với mỗi điểm N trên d ta dựng điểm M thỏa $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB}$. Tìm tập hợp các điểm M khi N thay đổi trên d.
4. **Cho hai điểm A, B và đường tròn (O; R).** Với mỗi điểm N trên (O; R) ta dựng điểm M thỏa $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB}$. Tìm tập hợp các điểm M khi N thay đổi trên (O; R).

Bài 2. Cho ΔABC tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}\ (1)$$

Bài 3. Cho ΔABC và điểm D nằm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DC}$

a) Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) M là một điểm di động thỏa mãn điều kiện : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) = 0$.
Chứng minh M luôn thuộc một đường tròn cố định mà ta phải xác định tâm và bán kính.

Bài 4. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right|$.

c) $\left|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$

d) $\left|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

e) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3$

f) $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right| = 12$

Bài 5. Cho ΔABC.

a) Xác định điểm I sao cho: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng nối 2 điểm M, N xác định bởi hệ thức: $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm tập hợp các điểm H sao cho: $\left|3\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}\right|$.

d) Tìm tập hợp các điểm K sao cho: $2\left|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right| = 3\left|\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right|$.

Bài 6. Cho ΔABC.

a) Xác định điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Xác định điểm D sao cho: $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

c) Chứng minh 3 điểm A, I, D thẳng hàng.

d) Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

Bài 7. Cho ΔABC, M là điểm tùy ý trong mặt phẳng.

a) Chứng minh: $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ không đổi.

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $\left|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$.

<u>HD</u>: a/ Chứng minh: $\vec{v} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$. b/ M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $\frac{1}{3}BC$.

Bài 8. Cho ΔABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn:

a) $k\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$, $(k \in \mathbb{R})$. b) $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

<u>HD</u>: a/ Đường thẳng qua B, // AC. b/ Đường trung bình // AC.

Bài 9. Cho ΔABC. Lấy hai điểm M, N di động trên các tia AB và AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CA}$. Dựng hình bình MNCP. Tìm tập hợp những điểm P.

Bài 10. Cho ΔABC, các điểm M, N, P di động trên các tia BC, CA và AB sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$. Dựng hình bình hành MNPQ. Tìm tập hợp điểm Q.

Bài 11. Cho tam giác ABC.

a) Xác định điểm D thỏa : $\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa : $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right| = 8$

Bài 12. Cho hình bình hành ABCD. Tìm tập hợp điểm M thỏa : $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4AB$

Bài 13. Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm M tùy ý .

a) CMR : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

b) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho : $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\right|$

Bài 14. Cho tứ giác ABCD .

a) Xác định điểm O sao cho : $\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa hệ thức :

Bài 15. Cho hình chữ nhật ABCD tam O , wiekn M la~1 wiekn bagky~:

a) Tsnh $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ theo $\overrightarrow{MO}$

Tl ~wo suy ra wl zng thang MS quay quanh 1 wiekn cogwnh

b) Trm tap hzp wiekn M thoa $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = a$ ($a > 0$ cho trl zc)

c) Trm tap hzp wiekn N thoa $|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}| = |\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}|$

Bài 16. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}\ (k \in \mathbb{R})$.

b) $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} + (1+k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}\,(k \in \mathbb{R})$

c) $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC} = \vec{0}\,(k \in \mathbb{R})$

Bài 17. Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp điểm M sao cho :

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|$$

Bài 18. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$

VẤN ĐỀ 7: MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Bài 1. Cho lục giác $ABCDEF$ **đều** .Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\right| + \left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF}\right| \text{ nhỏ nhất.}$$

Bài 2. Cho ΔABC và đường thẳng d cố định. Tìm điểm M trên d sao cho

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

c) $\vec{x} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

d) $\vec{y} = 5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất

Bài 3. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm trên d điểm M sao cho : $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Tìm điểm M thuộc (O) sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất , lớn nhất

BÀI 4 : HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

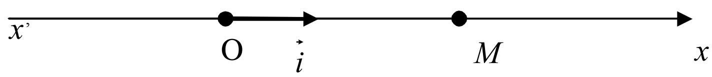
1. <u>Trục tọa độ và độ dài đại số trên trục</u> :

a. <u>Định nghĩa :</u> Truu tọa độ (gọi tắt là trục) la~wl zng thang treh wo xac wnh wiekn O cố định va~l vectz đơn vị $\vec{i}$ co wojdai-bang 1.

+ Ky hieụ truu (O; $\vec{i}$) hoặc $x'Ox$

+ Điểm O được gọi là gốc tọa độ

+ Hướng của vectơ đơn vị là hướng của trục



b. <u>Tọa độ điểm :</u> Cho điểm tùy ý M nằm trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$. Khi đó có duy nhất số k xác định để : $\overrightarrow{OM}=k.\vec{i}$.

Số k được gọi là tọa độ của điểm M đối với trục $\left(O;\vec{i}\right)$.

Kshiệu : $M = (\ k\ )$ hoặc $M(\ k\ )$

c. <u>Tọa độ vectơ :</u> Cho vectơ $\vec{a}$ nằm trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$. Khi đó có duy nhất số ***t*** xác định để : $\vec{a}=t.\vec{i}$.

Số ***t*** được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với trục $\left(O;\vec{i}\right)$.

Kshiệu : $\vec{a}=(t)$ hoặc $\vec{a}(t)$

- *Nhận xét :* Vậy ta có tọa độ của điểm M cũng chính là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$
- *Tính chất :* Cho $\vec{a}=(x);\ \vec{b}=(x')$. Khi đó:
  - i) $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow x=x'$.
  - ii) $\alpha.\vec{a}+\beta.\vec{b}=(\alpha.x+\beta.x'),\ \forall\alpha,\beta\in R$.

d. <u>Độ dài đại số của vectơ :</u> Cho hai điểm A, B nằm trên trục *Ox*. Khi đó có duy nhất số t sao cho $\overrightarrow{AB}=t.\vec{i}$.

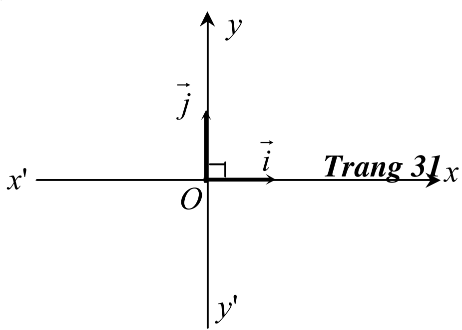
Ta gọi số t đó là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho. Kí hiệu $\overline{AB}$.

Như vậy : $\overrightarrow{AB}=\overline{AB}.\vec{i}$

- *Nhận xét :*
  - i) Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với vectơ $\vec{i}$ thr $\overline{AB}=AB$.
  - ii) Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với vectơ $\vec{i}$ thr $\overline{AB}=-AB$.

- *Tính chất :* Cho A(a) , B(b). Khi đó :
  - i) $\overline{AB}=b-a$
  - ii) $\overline{AB}=-\overline{BA}$
  - iii) $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$
  - iv) $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ (Hệ thức Sa – lơ), với A, B, C bất kỳ trên trục *Ox*
  - *v)* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overline{AB}=\overline{CD}$

2. <u>Hệ trục tọa độ :</u>



a. <u>Định nghĩa :</u> Hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ gồm hai trục $\left(O;\vec{i}\right)$ và $\left(O;\vec{j}\right)$ vuông góc với nhau. Trong đó :

- $\left(O;\vec{i}\right)$: truu hoanh , ks hiệu là Ox
- $\left(O;\vec{j}\right)$: truu tung , ks hiệu là Oy
- O : gog toauwoj
- $\vec{i},\vec{j}$: vec tz wzn vx ($\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1$ va $\vec{i}\perp\vec{j}$)
- Hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ còn được gọi là *Oxy*.

Chú ý : Mặt phẳng mà trên đó đã chọn một hệ trục tọa độ Oxy được gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy (hay mặt phẳng Oxy)

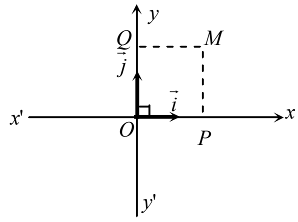
b. <u>Toạ độ của một điểm và của một véc tơ</u>:

i . <u>Định nghĩa 1</u> : Cho $M\in mp(Oxy)$. Khi wo vec tz $\overrightarrow{OM}$ wl zu biek diek moj cach duy nhagtheo $\vec{i},\vec{j}$ bzi hejthl c co dang : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ vzi x,y ∈ .

Cap sog *(x;y)* trong hejthl c treh wl zu goi la toauwojcua wiekn M.

Ký hiệu: *M(x ; y)* hay *M = (x; y)*

(*x:* hoanh wojcua wiekn M; *y:* tung wojcua wiekn M)

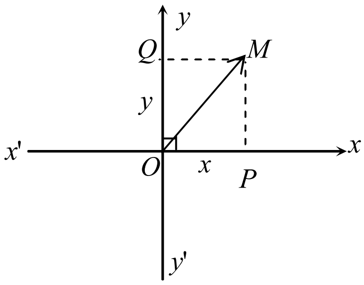


- *Ý nghĩa hình học:*

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ox, Oy thr : $M(x;y)\overset{đ/n}{\Leftrightarrow}\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$

Mà : $\overrightarrow{OP}=\overline{OP}.\vec{i}$; $\overrightarrow{OQ}=\overline{OQ}.\vec{j}$

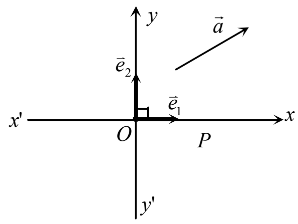
Suy ra: $x=\overline{OP}$ va $y=\overline{OQ}$



ii. <u>Định nghĩa 2</u>: Cho $\vec{a}\in mp(Oxy)$. Khi wo vec tz $\vec{a}$ wl zu biek diek moj cach duy nhagtheo $\vec{i},\vec{j}$ bzi hejthl c co dang : $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ vzi $a_1,a_2\in$.

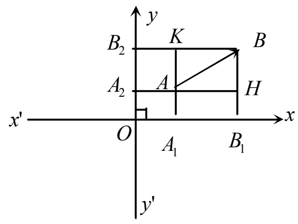
Cap sog *(a_1; a_2)* trong hejthl c treh wl zu goi la toauwojcua vec tz $\vec{a}$.

Ký hiệu: $\vec{a}=(a_1;a_2)$ hay $\vec{a}\left(a_1;\ a_2\right)$



$$\boxed{\vec{a}=(a_1;a_2)\overset{đ/n}{\Leftrightarrow}\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}}$$

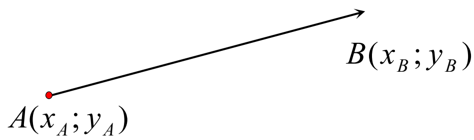
- *Ý nghĩa hình học:* $a_1=\overline{A_1B_1}$ va $a_2=\overline{A_2B_2}$



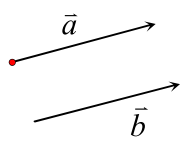
iii. <u>Các công thức và định lý về toạ độ điểm và toạ độ véc tơ :</u>

- **<u>Định lý 1</u> :** Neg $A(x_A;y_A)$ va $B(x_B;y_B)$ thr

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)}$$



- **<u>Định lý 2</u> :** Neg $\vec{a}=(a_1;a_2)$ va $\vec{b}=(b_1;b_2)$ thr



* $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \end{cases}$
* $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2)$
* $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2)$
* $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2) \qquad (k\in \mathbb{R})$

- **<u>Định lý 3</u> :** $\vec{a}$ **cùng phương với vectơ** $\vec{b}$ $\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right) \Leftrightarrow \exists k\in R: \begin{cases} a_1=ka_2 \\ b_1=kb_2 \end{cases}$
- **<u>Định lý 4</u> : Cho hai điểm** $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Trung điểm I của đoạn AB có tọa độ là :
$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$
- **<u>Định lý 5</u> : Cho ba điểm** $A(x_A;y_A);\ B(x_B;y_B)$ và $C(x_C;y_C)$ **.** Khi đó trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là : $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases}$
- **<u>Định lý 6</u> : Điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k**
Định nghĩa : "Điểm M chia đoạn *AB* theo tỉ số *k* khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$".
Khi đó, tọa độ điểm M được xác định như sau : $\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A-k.x_B}{1-k} \\ y_M=\dfrac{y_A-k.y_B}{1-k} \end{cases} \quad (k\neq 1)$
Nếu M là trung điểm của đoạn AB (ứng với k=-1).Khi đó , tọa độ điểm M được xác định như sau:
$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+.x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+.y_B}{2} \end{cases}$$

B. PHƯƠNG PHÁP TOÁN

VẤN ĐỀ 1: TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM HAY MỘT VECTƠ .

<u>PHƯƠNG PHÁP CHUNG :</u>
1. Sử dụng công thức về tọa độ điểm – vectơ
2. Sử dụng điều kiện của hai vectơ cùng phương, ba điểm thẳng hàng, …

Bài 1. Viết tọa độ của các sau:

a) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j};\ \vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{i}-5\vec{j};\ \vec{c}=3\vec{i};\ \vec{d}=-2\vec{j}$.

b) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}; \vec{b}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}; \vec{c}=-\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}; \vec{d}=-4\vec{j}; \vec{e}=3\vec{i}$.

Bài 2. Viết dưới dạng $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ khi biết toạ độ của $\vec{u}$ là:

a) $\vec{u}=(2;-3); \vec{u}=(-1;4); \vec{u}=(2;0); \vec{u}=(0;-1)$.

b) $\vec{u}=(1;3); \vec{u}=(4;-1); \vec{u}=(1;0); \vec{u}=(0;0)$.

Bài 3. Cho $\vec{a}=(1;-2), \vec{b}=(0;3)$**.** Tìm toạ độ của các sau:

a) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}; \vec{y}=\vec{a}-\vec{b}; \vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}$. b) $\vec{u}=3\vec{a}-2\vec{b}; \vec{v}=2+\vec{b}; \vec{w}=4\vec{a}-3\vec{b}$.

Bài 4. Cho $A\left(x_0;y_0\right)$**.** Tìm điểm đối xứng của A lần lượt qua các trục tọa độ.

Bài 5. Cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$**.**

a) Tìm toạ độ điểm C sao cho: $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm điểm D đối xứng của A qua C.

c) Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-3$.

d) Tìm điểm C để tam giác ABC nhận O là trọng tâm.

Bài 6. Cho ba điểm A(1; –2), B(0; 4), C(3; 2).

a) Tìm toạ độ các $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho: $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

c) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.

d) Tìm N sao cho: $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}-4\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Bài 7. Cho ba điểm A(1; –2), B(2; 3), C(–1; –2).

a) Tìm toạ độ điểm D đối xứng của A qua C.

b) Tìm toạ độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 8. Cho ΔABC có A(4; 3) , B(–1; 2) , C(3; –2).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.

b) Tìm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành. Tìm tọa độ O là giao điểm của AC và BD.

Bài 9 .Cho A(2; 3), B(–1; –1), C(6; 0).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.

c) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABDC là hình bình hành.

d) Tìm tọa độ điểm E đối xứng với C qua B

Bài 10. Cho A(0; 2) , B(6; 4) , C(1; –1). Tìm toạ độ các điểm M, N, P sao cho:

a) Tam giác ABC nhận các điểm M, N, P làm trung điểm của các cạnh.

b) Tam giác MNP nhận các điểm A, B, C làm trung điểm của các cạnh.

Bài 11. Cho tam giác ABC có trung điểm các cạnh BC, AC, AB lần lượt là M(-1; 1) , N(1; 9) , P (9; 1) .

Tìm tọa độ A, B, C.

VẤN ĐỀ 2: CHỨNG MINH HAI CÙNG PHƯƠNG.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG:

1. Sử dụng điều kiện hai vectơ cùng phương:

Ta có $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{b}\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists k \in R : \begin{cases} a_1 = ka_2 \\ b_1 = kb_2 \end{cases} \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}\left(a_2 . b_2 \neq 0\right) \end{array}\right.$

2. Sử dụng điều kiện 3 điểm thẳng hàng:

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ tồn tại số thực k $\neq 0$ sao cho: $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$

Lưu ý : Để chứng minh 3 điểm A, B, C lập thành tam giác , ta chứng minh $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương

Bài 1. Các cặp vectơ sau đây có cùng phương không?

a) $\vec{a} = (-3;\ 2), \vec{b} = (6; -4)$ **b)** $\vec{c} = (-4;\ 8), \vec{b} = (-0{,}5; 1)$

c) $\vec{u} = (2013; 0), \vec{v} = (6;\ 0)$ **d)** $\vec{m} = \left(3;\ \sqrt{5}\right), \vec{n} = \left(\sqrt{5}; 3\right)$

Bài 2. Cho $\vec{a} = (1;\ 2); \vec{b} = (-3;\ 1)$ *và* $\vec{c} = (6;5)$ **.** Tìm m để vectơ $m\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$.

Bài 3. Trong mặt phẳng *Oxy* cho : $\vec{a} = \left(x^2 + 1; 3x - 2\right); \vec{b} = (2;\ 1)$ *và* $A(0;1)$ **.**

a) Tìm x để $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$.

b) Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục hoành để $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{b}$.

Bài 4. Trong mặt phẳng *Oxy* cho : $\vec{b} = (2;\ 1)$ *và* $A(0;1)$ **.**Tìm tọa độ của M để $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{b}$ và có độ dài bằng $\sqrt{5}$.

Bài 5. Cho $A(1;\ 4), B(-3; 2)$ và $\vec{u} = (2m + 1; 3 - 4m)$. Tìm m để $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{u}$ cùng phương.

Bài 6. Cho ba điểm A(–1; 1), B(1; 3), C(–2; 0). Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 7. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho ba điểm $A(-3;\ 4),\ B(1;\ 1),\ C(9; -5)$ **.**

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho A là trung điểm của BD.

c) Tìm tọa độ điểm E trên trục *Ox,* sao cho A, B, E thẳng hàng.

Bài 8. Cho ba điểm $A(2;\ 5),\ B(1;\ 2),\ C(4; -7)$ **.**

a) Tìm tọa độ điểm M sao cho : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5.\vec{i}$.

b) Tìm điểm N trên trục *Ox* sao cho A, B, N thẳng hàng.

Bài 9. Trong mặt phẳng *Oxy* cho $A(-1;\ 4),\ B(1;\ 1),\ C(-4; -2)$ **.**

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác .

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là 1 hình bình hành.

c) Tìm tọa độ điểm $E(x;\ 6)$ sao cho A, B, E thẳng hàng.

Bài 10. Trong mặt phẳng *Oxy* cho $A(-4;1),\ B(2;\ 4),\ C(2; -2)$ **.**

a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác .
b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
c) Tìm tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm của tam giác ABC.
d) Tìm tọa độ điểm E trên trục Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.
e) Tìm tọa độ điểm F sao cho ABCF là hình bình hành.

VẤN ĐỀ 3: PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO HAI KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :

Để phân tích vec tơ $\vec{u} = (u_1; u_2)$ theo hai vec tơ không cùng phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$, ta thực hiện các bước sau:

1. Giả sử $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Khi đó ta có hệ phương trình : $\begin{cases} u_1 = xa_1 + yb_1 \\ u_2 = xa_2 + yb_2 \end{cases}$
2. Giải hệ phương trình này ta tìm được *x, y*.
3. Kết luận : $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$

Bài 1. Cho $\vec{a} = (2;0), \vec{b} = \left(-1;\frac{1}{2}\right), \vec{c} = (4;-6)$.

a) Tìm toạ độ của $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.

b) Tìm 2 số *m, n* sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$.

c) Biểu diễn $\vec{c}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

d) Tìm m để $\vec{e} = (m-1;2)$ cùng phương với $\vec{b}$

Bài 2. Cho hai vectơ $\vec{a} = (-3;2), \vec{b} = (4;5)$.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ qua hai vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.

b) Tìm tọa độ các vectơ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$; $\vec{d} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; $\vec{u} = \vec{a} + 4\vec{b}$. Biểu thị vectơ $\vec{u}$ qua hai vectơ $\vec{c}, \vec{d}$.

Bài 3. Cho hai vectơ $\vec{a} = (-3;4), \vec{b} = (-1;3), \vec{c} = (2;0)$.

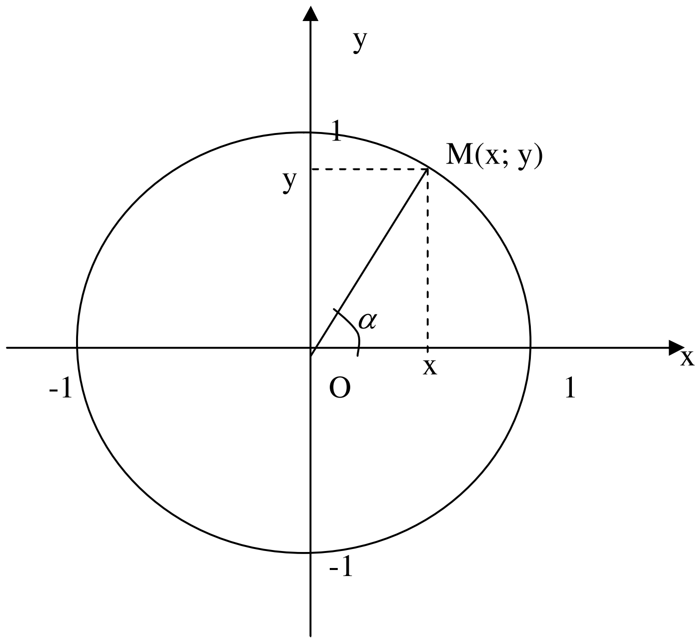
a) Tìm tọa độ các vectơ $2\vec{a} + \vec{b}$; $-\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{b}$.
b) Xác định k, l sao cho : $k\vec{a} + l\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
c) Xác định k, l sao cho vectơ $\vec{c}$ cùng phương với vectơ $\vec{v} = k\vec{a} + l\vec{b}$ và $|\vec{v}| = 5$.

CHƯƠNG 2 :TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG
BÀI 1. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

I. <u>Giá trị lượng giác của một góc bất kỳ (từ 0^0 đến 180^0)</u>

Với mỗi góc α $\left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$ ta xác định một điểm M trên nữa đường tròn đơn vị sao cho $\angle MOx = \alpha$. Gọi $(x;y)$là tọa độ của điểm M , ta có :



- ***tung độ*** y của M là sin của góc α , kí hiệu là $\sin\alpha$
- ***hoành độ*** x của M là cos của góc α , kí hiệu là $\cos\alpha$
- tỉ số $\frac{y}{x}(x \ne 0)$ là tang của góc α , kí hiệu là $\tan\alpha$.
- tỉ số $\frac{x}{y}(y \ne 0)$ là cotang của góc $\frac{y}{x}(x \ne 0)$, kí hiệu là $\cot\alpha$.

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là giá trị lượng giác của góc α . Ta có các tính chất sau:

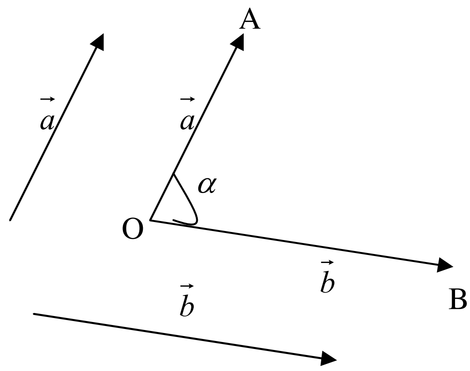
$$\sin\left(180^0 - \alpha\right) = \sin\alpha; \qquad \cos\left(180^0 - \alpha\right) = -\cos\alpha$$
$$\tan\left(180^0 - \alpha\right) = -\tan\alpha; \qquad \cot\left(180^0 - \alpha\right) = -\cot\alpha$$

<u>BẢNG GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT SỐ GÓC ĐẶC BIỆT:</u>

Góc	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ

2. Góc giữa hai vectơ:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kỳ , vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\alpha = \angle AOB$ (với $0^0 \le \alpha \le 180^0$) là góc của $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. Ta kí hiệu : $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.



Chú ý :

i) Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thr ta xem góc của $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ là tùy ý từ 0^0 đến 180^0.

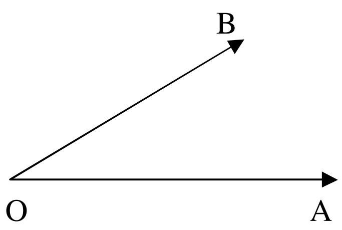
ii) $\alpha = 0^0 \Leftrightarrow \vec{a}$ *và* $\vec{b}$ cùng hướng.

iii) $\alpha = 180^0 \Leftrightarrow \vec{a}$ *và* $\vec{b}$ ngược hướng.

3. Tích vô hướng của hai vectơ:

a. Định nghĩa : Cho hai vectơ $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vecto $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ là một số , kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Từ định nghĩa ta có : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos AOB$



Nhận xét :

i) $\vec{a}.\vec{a} = \left(\vec{a}\right)^2 = \vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$

ii) $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

iii) $\vec{0}.\vec{a} = \vec{a}.\vec{0} = 0$, $\forall \vec{a}$

iv) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^0 \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$

v) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^0 \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$

vi) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) < 90^0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} > 0$

vii) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) > 90^0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} < 0$

viii) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$ **(điều kiện vuông góc)**

ix) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a}=\vec{0} \vee \vec{b}=\vec{0} \;\vee (\vec{a}=\vec{0} \wedge \vec{b}=\vec{0}) \\ \vec{a}\perp\vec{b} \;\; khi \;\; \vec{a}\neq\vec{0} \wedge \vec{b}\neq\vec{0} \end{array}\right.$

b. <u>Tính chất</u> : với mọi vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ và\ m \in \Re$

i) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (Tính chất giao hoán)

ii) $\vec{a}.\left(\vec{b}\pm\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}\pm\vec{a}.\vec{c}$ (Tính chất phân phối đối với phép cộng, phép trừ)

iii) $m.\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\left(m.\vec{a}\right)\vec{b}=\left(m.\vec{b}\right)\vec{a}$ (Tính chất kết hợp)

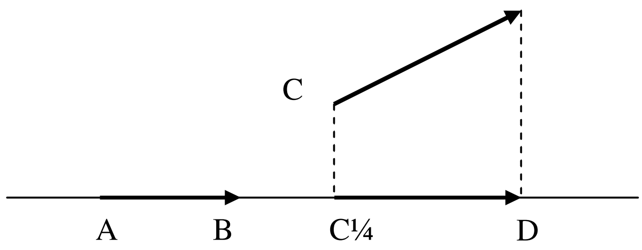
c. <u>Các hằng đẳng thức đáng nhớ :</u>

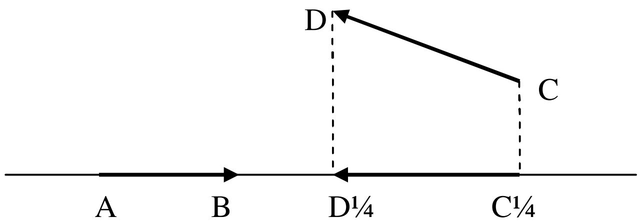
i) $\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\pm 2.\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$

ii) $\vec{a}^2-\vec{b}^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

d. <u>Định lý về hình chiếu vectơ :</u>

Gọi C', D' là hình chiếu của C, D lên đường thẳng chứa đoạn thẳng AB, ta có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$





4. <u>Biểu thức tọa độ của tích vô hướng</u>

***a)* <u>Biểu thức giải tích của tích vô hướng</u>**

Cho hai vecto $\vec{a}=(a_1;\,a_2);\ \vec{b}=(b_1;\ b_2)$, ta có: $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

***b)* <u>Độ dài của vecto :</u>** Cho vecto $\vec{a}=(a_1;\,a_2)$, ta có : $\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^2=\vec{a}.\vec{a}=a_1.a_1+a_2.a_2=a_1^{\;2}+a_2^{\;2}$

Do đó, độ dài của vecto $\vec{a}$ được xác định bởi công thức : $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^{\;2}+a_2^{\;2}}$

***c)* <u>Khoảng cách giữa hai điểm :</u>**

Cho hai điểm $A(x_A;y_A);\ B(x_B;\,y_B)$, ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\,y_B-y_A)$.

Do đó, khoảng cách giữa hai điểm A, B bằng độ dài vecto $\overrightarrow{AB}$.

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

***d)* <u>Góc giữa hai vecto</u>**

Cho hai vecto $\vec{a}=(a_1;\,a_2);\ \vec{b}=(b_1;\ b_2)$, ta có :

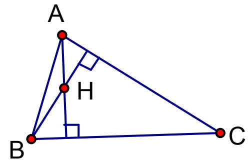
$$\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos(\vec{a},\vec{b}) \Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\;2}+a_2^{\;2}}.\sqrt{b_1^{\;2}+b_2^{\;2}}}$$

Đặc biệt : $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$

5. Một số công thức nâng cao :

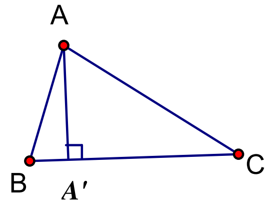
1. Cho ΔABC với $\overrightarrow{AB}=(a_1;\,a_2)$; $\overrightarrow{AC}=(b_1;\,b_2)$, ta có :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$$



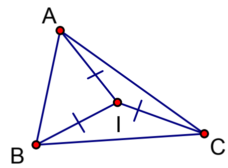
2. Diện tích ΔABC tính công thức : $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$

3. H la trl u tahn tam giac ABC $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$



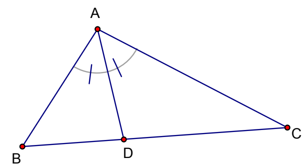
4. A' la chah wl zng cao ke tl A $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BA'}\text{ cung phl zng }\overrightarrow{BC}\end{cases}$

5. I la tahn wl zng tron ngoaiutiep tam giac ABC $\Leftrightarrow \begin{cases}\text{IA=IB}\\ \text{IA=IC}\end{cases}$



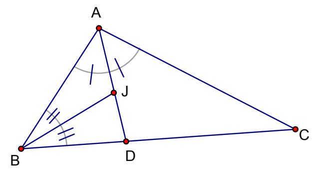
6. D là chân đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC

$$\overrightarrow{DB}=-\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$$



7. D’ là chân đường phân giác ngoài của góc A của tam giác ABC

$$\overrightarrow{D'B}=-\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{D'C}$$



8. J la tahn wl zng tron noj tiep ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{JA}=-\dfrac{AB}{BD}.\overrightarrow{JD}$

B. PHƯƠNG PHÁP TOÁN .

VẤN ĐỀ 1: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

PHƯƠNG PHÁP CHUNG:

1. Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác.
2. Sử dụng mối quan hệ giữa hai góc phụ nhau, bù nhau.
3. Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $a\sin 0^0 + b\cos 0^0 + c\sin 90^0$ b) $a\cos 90^0 + b\sin 90^0 + c\sin 180^0$

c) $a^2\sin 90^0 + b^2\cos 90^0 + c^2\cos 180^0$ d) $3 - \sin^2 90^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\tan^2 45^0$

e) $4a^2\sin^2 45^0 - 3(a\tan 45^0)^2 + (2a\cos 45^0)^2$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin x + \cos x$ khi x bằng 0^0; 45^0; 60^0. b) $2\sin x + \cos 2x$ khi x bằng 45^0; 30^0.

Bài 3. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại:

a) $\sin\beta = \frac{1}{4}$, β nhọn. b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ c) $\tan x = 2\sqrt{2}$

Bài 4. Biết $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Tính $\cos 15^0$, $\tan 15^0$, $\cot 15^0$.

Bài 5. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính giá trị của một biểu thức:

a) $\sin x = \frac{1}{3}$, $90^0 < x < 180^0$. Tính $A = \frac{\tan x + 3\cot x + 1}{\tan x + \cot x}$.

b) $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha}$

c) $\tan a = \frac{1}{4}$. Tính $C = \frac{\sin x + 2\cos x}{3\sin + \cos x}$

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x.\cos x$ b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$ d) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x$

e) $\sin x.\cos x(1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + 2\sin x.\cos x$

Bài 7. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\cos y + \sin y.\tan y$ b) $\sqrt{1+\cos b}.\sqrt{1-\cos b}$ c) $\sin a\sqrt{1+\tan^2 a}$

d) $\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} + \tan x.\cot x$ e) $\frac{1-4\sin^2 x.\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$

f) $\sin(90^0 - x) + \cos(180^0 - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

Bài 8. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\cos^2 12^0 + \cos^2 78^0 + \cos^2 1^0 + \cos^2 89^0$

b) $\sin^2 3^0 + \sin^2 15^0 + \sin^2 75^0 + \sin^2 87^0$

VẤN ĐỀ 2: TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ, GÓC CỦA HAI VECTƠ, ĐỘ DÀI VECTƠ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG:

1. Để tính tích vô hướng của hai vectơ , ta có thể sử dụng :

+ Định nghĩa, tính chất của tích vô hướng.
+ Định lý hình chiếu
+ Công thức : $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2.\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$

2. Để tính góc của hai vectơ , ta sử dụng công thức :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad (\vec{a} \neq \vec{0} \text{ và } \vec{b} \neq \vec{0})$$

3. Áp dụng quy tắc sau : $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ (chuyển phép tính độ dài đoạn thẳng thành phép tính tích vô hướng)

Áp dụng công thức tọa độ : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ (nếu bài toán có liên quan đến tọa độ)

Bài 1. Tính tích vô hướng hai vecto $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ **:**

a) $|\vec{a}| = 8;\ |\vec{b}| = 5$ *và* $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^0$ b) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ *và* $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^0$

c) $|\vec{a}| = 3;\ |\vec{b}| = 2$ *và* $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^0$ d) $|\vec{a}| = 5;\ |\vec{b}| = 3$ *và* $(\vec{a}, \vec{b}) = 150^0$

Bài 2. Tính $\vec{a}.\vec{b};\ (\vec{a} + \vec{b})^2;\ (\vec{a} - \vec{b})^2$ **biết :**

a) $|\vec{a}| =;\ |\vec{b}| = 6$ *và* $(\vec{a}, \vec{b}) = 150^0$ b) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ *và* $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^0$

Bài 3. Tính $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b});\ (2\vec{a} - \vec{b}).(2\vec{a} + \vec{b})$ biết :

a) $|\vec{a}| = 5;\ |\vec{b}| = 3$ b) $|\vec{a}| = 13;\ |\vec{b}| = 12$

Bài 4. a) $|\vec{a}| = 5;\ |\vec{b}| = 6$ *và* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ *.Tính* $\vec{a}.\vec{b}$.

b) $|\vec{a}| = 1;\ |\vec{b}| = 7$ *và* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ *.Tính* $\vec{a}.\vec{b}$.

Bài 5. Cho $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$**.** Tính góc của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Biết :

a) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$ b) $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$

c) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}|.|\vec{b}|$ d) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3};\ |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

Bài 6.a) $|\vec{a}| = 3;\ |\vec{b}| = 4$ *và* $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^0$ *.Tính* $|\vec{a} + \vec{b}|;\ |\vec{a} - \vec{b}|$

b) $|\vec{a}| = 13;\ |\vec{b}| = 19$ *và* $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$*.Tính* $|\vec{a} - \vec{b}|$.

c) $|\vec{a}| = 2;\ |\vec{b}| = 3$ *và* $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$*.Tính* $|\vec{a} + \vec{b}|$

d) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2.\ |\vec{a} - \vec{b}| = 4$ *và* $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b})$*Tính* $|\vec{a}|,\ |\vec{b}|$

Bài 7. Cho tam giác ABC đều cạnh a có G là trọng tâm của tam giác. Tính các tích vô hướng sau :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC})$

Bài 8. Cho tam giác đều ABC cạnh a, đường cao AH. Tính các tích vô hướng sau :

a) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$;

b) $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$; $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

c) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

d) $\overrightarrow{AB}\left(2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}\right)$

Bài 9. Cho tam giác ABC , trực tâm H, độ dài BC = a. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tích vô hướng sau : $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}$

Bài 10. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính các tích vô hương sau :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$.

b) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right).\left(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$.

c) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right)$.

d) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}$ với O là tâm hình vuông.

Bài 11. Cho tam giác ABC .

a) CMR : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Biết AB = 5 ; AC = 8 ; BC = 7 . Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Từ đó suy ra góc A.

c) Lấy D thuộc cạnh AC sao cho CD = 3. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$.

d) Gọi M là trung điểm BC . CMR : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = MA^2 = MB^2$.

Bài 12. Cho tam giác ABC biết AB = 3; BC = 6; AC = 8.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$.

b) Gọi D là điểm cố định xác định bởi biểu thức : $2\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{DA}$. Tsnh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. Tsnh BD.

Bài 13. **Cho tam giác ABC biết AB = 6; BC = 11; AC = 8.**

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ .Suy ra góc A tù.

b) Trên AB lấy điểm M sao cho AM = 2. Gọi N là trung điểm cạnh AC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$. Tsnh MN.

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB=3; AC=5; BC=7.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và tính cos A.

b) Tính $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ và tính cos B.

c) Tính cosC

Bài 5. **Cho tam giác ABC có AB=5; AC=3;** $\hat{A} = 120^0$ .Tính BC; độ dài trung tuyến BM và CN của tam giác ABC.

Bài 6. **Cho tam giác ABC vuông tại A** và đường cao AH; HB=3 và HC =5.

a) Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ *và* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

b) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ *và* $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AC}$

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết BC =6

a) Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ *và* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

b) Cho $\hat{B} = 60^0$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH}$

Bài 8. Cho tam giác ABC có BC =5; CA=6; AB=8.

a) Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ rồi suy ra giá trị của góc B.

b) Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD=3. Tính $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có AB = 2, BC = 4, CA = 3.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra cosA.

b) Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Tính $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$.

c) Tính giá trị biểu thức S = $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$.

d) Gọi AD là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ (D ∈ BC). Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, suy ra AD.

HD: a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}$, $\cos A = -\frac{1}{4}$ *b)* $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}$ *c)* $S = -\frac{29}{6}$

d) Sử dụng tính chất đường phân giác $\overrightarrow{DB} = \frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $AD = \frac{\sqrt{54}}{5}$

Bài 10. Cho tam giác ABC có AB = 2, AC = 3, A = 60^0. M là trung điểm của BC.

a) Tính BC, AM.

b) Tính IJ, trong đó I, J được xác định bởi: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, CA = 9

a) Tính cosA, cosB, cosC b) Tính trung tuyến BM, CN.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = $a\sqrt{3}$, M là trung điểm BC. Biết $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính AB, AC

Bài 13. Cho hình bình hành ABCD có AB = 13, AD = 19, AC = 24. Tính độ dài BD.

Bài 14. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 5, BC = 4. Gọi M , N là trung điểm BC, CD.

a) Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AD}$ b) $\left|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right|$

Bài 15. Cho hình bình hành ABCD với $AB = \sqrt{3};\ AD = 1$ *và* $\angle BAD = 30^0$**.**

a) Tính $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

b) Tsnh ¢độ dài hai đường chéo AC và BD.

c) Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)$

Bài 16. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao $AB = a,\ AD = 3a,\ BC = \frac{9a}{2}$

a) Tính các tích vô hướng sau : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ *suy ra góc* $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\right)$.

b) Gọi M là trung điểm của AC . Tính $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BD}$. Suy ra *cosMBD.*

Bài 17. Cho hình thang vuông ABCD , có đường cao AB, cạnh đáy AD = a; BC = 2a . Hãy tính độ dài đoạn AB trong các trường hợp sau :

a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = a^2$

b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = a^2$

c) $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} = a^2$ (I là trung điểm của AB)

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm A(5; 4) , B(3; -2) . Một điểm M di động trên *Ox* . Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$.

Bài 19. Cho ba điểm A(1; 2) , B(-2; 3) , C(2; -1) . Tìm m sao cho độ dài $\left|\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}\right|$.

VẤN ĐỀ 3: CHỨNG MINH SỰ VUÔNG GÓC CỦA HAI VECTƠ – HAI ĐƯỜNG THẲNG

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :

1. Để chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{CD}$ vuông gốc với nhau, ta chứng minh : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

2. Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau ta tìm trên hai đường thẳng đó hai vectơ khác vectơ không có tích vô hướng bằng không.

3. Dùng biểu thức tọa độ (nếu đề bài có liên quan đến tọa độ) : cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;\,b_1)$ *và* $\vec{b}=(a_2;\,b_2)$. Khi đó : $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1.a_2+b_1.b_2=0$

Bài 1. Cho tam giác ABC với *A(10; 5) , B(3; 2) , C(6; -5)* .Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại B.

Bài 2. Cho tam giác ABC có *A(5; 3) , B(2; -1), C(-1; 5)* . Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.

Bài 3. Trên mặt phẳng *Oxy* cho điểm *A(-2; 1)*. Gọi B là điểm đối xứng với điểm A qua góc tọa độ O. Tìm tọa độ điểm C có tung độ bằng 2 sao cho tam giác ABC vuông ở C.

Bài 4. Chứng minh rằng : $AB^2-BC^2+CD^2-DA^2=2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ với A, B, C, D là 4 điểm bất kỳ. Từ đó suy ra điều kiện để hai đường chéo trong tứ giác vuông góc với nhau.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N, P là các điểm thỏa :

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB};$. $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA};$ $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh : $MN\perp AP$

Bài 6. Cho tam giác ABC có *AB = 3;AC = 4*. D, E là hai điểm thỏa : $4\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=0;$ $4\overrightarrow{EB}-3\overrightarrow{EC}=0$

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh $AD\perp AE$

Bài 7. Cho hình thoi ABCD. Gọi I là trung điểm của CD; J là trung điểm của BC. Chứng minh rằng nếu : $AI\perp DJ$ thì ABCD là hình vuông.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi H là trung điểm của BC và D là hình chiếu của H lên AC. Gọi M là trung điểm của HD. Chứng minh $AM\perp BD$.

Bài 9. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\frac{1}{4}BC^2$

Bài 10. Cho tứ giác ABCD có AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H, J là trực tâm của tam giác ABO và CDO. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

Chứng minh $HK\perp IJ$

Bài 11. Cho tam giác ABC có AB =2a; AC =a ; $\hat{A}=120^0$ **.**

a) Tính độ dài BC và trung tuyến AM

b) Gọi N trên BC sao cho BN = x .Biểu diễn $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}$.

Từ đó suy ra giá trị x để $AN\perp BM$.

Bài 12. Cho vecto $\vec{a},\ \vec{b}$ **thỏa** $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $(\vec{a}+2\vec{b})\perp(5\vec{a}-4\vec{b})$. Tính $(\vec{a},\,\vec{b})$.

Bài 13. Cho $\vec{a},\ \vec{b}\neq\vec{0}$**, thỏa điều kiện :** $(3\vec{a}-5\vec{b})\perp(2\vec{a}+\vec{b})$ và $(\vec{a}+4\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$. Tính $\cos(\vec{a},\,\vec{b})$.

Bài 14. a) Cho $\vec{a}\perp\vec{b}$ **và** $|\vec{a}|=1,\,|\vec{b}|=\sqrt{2}$ **.** CMR : $(2\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$.

b) Cho $\vec{a},\ \vec{b}\neq\vec{0}$ **thỏa** $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$. $CMR:\vec{a}\perp\vec{b}$

Bài 15. Cho tam giác ABC có đường cao AH. Chứng minh tam giác vuông tại A nếu

a) $AB^2=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ b) $AH^2=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}$

Bài 16. Chứng minh $MA\perp MB\Leftrightarrow 4OM^2=AB^2$ với O là trung điểm của AB.

Bài 17. Cho tam giác cân ABC tại A. H là chân đường cao hạ từ A, điểm D là hình chiếu của H lên AC. Gọi M là trung điểm của HD. Chứng minh $AM \perp BD$

HD: $2\overrightarrow{AM}\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}\right) = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}$

Bài 18. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N là trung điểm của BC, CD. Chứng minh $AM \perp BN$

Bài 19. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a, AD = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AD. CM: BM $\perp$ AC

Bài 20. Cho tam giác ABC có $AB = c, BC = a, AC = b$. Gọi BM và CN là hai trung tuyến.

Chứng minh $BM \perp CN \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$

Bài 21. Cho tam giác ABC có AB = a, AC = 2a. Gọi D là trung điểm của AC, M là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. CMR : $BD \perp AM$.

Bài 22. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = AB^2$.

Bài 23. Cho hai đường thẳng vuông góc tại S lần lượt cắt đường tròn (O) tại A, B và C, D. Chứng minh trung tuyến kẻ từ S của tam giác SAC vuông góc với BD.

Bài 24. Cho đường tròn (O; R) . Chứng minh điều kiện cần và đủ để AM là tiếp tuyến của đường tròn tại M là : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = R^2$

Bài 25. Cho hình thang vuông ABCD đường cao AB = h, cạnh đáy AD = a,BC = b.Tìm điều kiện a, b, h để :

a) AC và BD vuông góc.

b) Góc $\angle AIB = 90^0$ với I là trung điểm của CD.

Bài 26. Cho tam giác ABC có I là trung điểm của BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là điểm xác định bởi hệ thức : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

a) Tính $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$. Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa độ dài a, b, c của ba cạnh BC, AC, AB sao cho OH vuông góc với AI.

Bài 27. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Trên ba cạnh BA, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{AP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích $\overrightarrow{MP}$ *theo* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN}$ *theo* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh : MP vuông góc với AN.

Bà 28. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, AB = AC =a và các điểm I, J, K sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = k\overrightarrow{CA}$. Tìm k để $AJ \perp IK$.

VẤN ĐỀ 4. CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG- ĐẲNG THỨC VỀ ĐỘ DÀI.

PHƯƠNG PHÁP :
Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, định nghĩa, định lý hình chiếu, các qui tắc : ba điểm, trung điểm, hình bình hành, trọng tâm và lưu ý $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

Bài 1. Cho tam giác ABC. M là trung điểm của BC. CMR : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AM^2 = MB^2$.
Bài 2. Cho hình chữ nhật ABCD . M là điểm bất kỳ
CMR:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$
b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$
c) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

Bài 3. Cho hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$. Gọi A', B' là hình chiếu của A, B lên đường thẳng CD. Chứng minh : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD}$.
Bài 4. Cho tam giác ABC có 3 đường cao AA', BB', CC'. Gọi H là trực tâm.

a) Chứng minh : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'}$; $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'}$.
b) Chứng minh : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}$

Bài 5. Cho tam giác ABC với 3 trung tuyến AD, BE, CF.
CMR : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$
Bài 6. Cho 4 điểm A, B, C, D bất kỳ .

a) CMR : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0$
b) Từ đó chứng minh định lý :" Ba đường cao trong tam giác thì đồng quy"

Bài 7. Cho tam giác ABC và điểm H thuộc BC.
CMR : $AH \perp BC \Leftrightarrow HB^2 - HC^2 = AB^2 - AC^2$

Bài 8. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, M là điểm tùy ý. CMR : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

Bài 9. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC.CMR :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$
b) $\cos \hat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}$
c) $AM^2 = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$

Bài 10. Cho tam giác ABC có 3 đường trung tuyến AD, BE, CF . CMR :
$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{3}{4}(BC^2 + AB^2 + AC^2)$$
Bài 11. Cho tứ giác ABCD .Gọi I, J là trung điểm của AC và BD.Chứng minh :
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$
Bài 12. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là điểm bất kỳ.

a) Chứng minh : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + CG^2$.
b) Cho M chạy trên đường thẳng cố định d. Tìm vị trí M để :
$MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 13. Cho hình chữ nhật ABCD, M là một điểm bất kì. Chứng minh:

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

c) $MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$ (O là tâm của hình chữ nhật).

Bài 14. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

Bài 15. Cho tam giác ABC có trực tâm H, M là trung điểm của BC**.** Chứng minh: $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

Bài 16. Cho AA' là một dây cung của đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên dây cung đó. Chứng minh rằng : $2.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = MA(MA - MA')$.

Bài 17. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn khi và chỉ khi : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC và hai điểm M, M' bất kỳ . Gọi I và I', H và H', K và K' theo thứ tự là hình chiếu của M và M' lên BC, CA, AB. Chứng minh : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KK'} = 0$.

Bài 19. Cho hình bình hành ABCD . Chứng minh rằng : $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

Bài 20. Cho đường tròn (O) với dây cung BC và đường kính AD vuông góc với BC**.** Trên đường thẳng BC lấy điểm M , đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại M' . CMR :

a) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = AB^2$

Bài 21. Trên mp *Oxy* cho hai điểm A(1 ; 3), B(4 ; 2).

a) Tìm tọa độ điểm D nằm trên *Ox* sao cho DA = DB.

b) Tính chu vi tam giác OAB.

c) Chứng tỏ OA vuông góc với AB và từ đó tính diện tích tam giác OAB.

d) Tìm tọa độ của vectơ đơn vị cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ cho bốn điểm A(2; 3), B (-1; -1) , C(6; 0) và D(*x*; -3) .

a) Chứng minhtam giác ABC vuông cân.

b) Tìm *x* để A, B, D thẳng hàng.

c) Tìm M thuộc *Oy* sao cho tam giac ABM vuông tại M.

d) Tìm điểm N(3; y – 1) sao cho N cách đều A và B.

VẤN ĐỀ 5 : TÌM TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MỘT ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HAY ĐỘ DÀI.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :

LOẠI 1. $\overrightarrow{MA}.\vec{v} = k$ (A cố định , $\vec{v}$ là vectơ cố định)

- Nếu k = 0 : Tập hợp điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với $\vec{v}$.
- Nếu k $\neq 0$: Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, M lên đường thẳng chứa vectơ $\vec{v}$.
  Ta có : $\overrightarrow{MA}.\vec{v} = k \Leftrightarrow \overline{HK}.\bar{v} = k$. Do H, A, $\vec{v}$ cố định nên K cố định . Suy ra tập hợp điểm M là đường thẳng qua K và vuông góc với $\vec{v}$.

LOẠI 2. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ (A, B là hai điểm cố định cho trước, k là số thực cho trước).

- Nếu k = 0 : Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AB.
- Nếu k $\neq 0$: Gọi I là trung điểm của đoạn AB.
  Ta có : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = IA^2 + k$.

Như vậy tập hợp các điểm M là :

i) Nếu $IA^2 + k > 0$: Tập hợp M là đường tròn tâm I có bán kính $R = \sqrt{IA^2 + k}$

ii) Nếu $IA^2 + k = 0$: $M \equiv I$

iii) Nếu $IA^2 + k < 0$: $M \in \varnothing$

LOẠI 3. $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \delta MC^2 = k$ ($\alpha + \beta + \delta \neq 0$; A, B, C là các điểm cố định; k là số thực cho trước).

Gọi I là điểm thỏa hệ thức : $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \delta\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, I là điểm xác định duy nhất.

Ta có :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \delta MC^2 = k \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \delta)MI^2 = k - \left(\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \delta IC^2\right)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - \left(\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \delta IC^2\right)}{\alpha + \beta + \delta} = m$$

Như vậy tập hợp các điểm M là :

i) Nếu $m > 0$: Tập hợp M là đường tròn tâm I có bán kính $R = \sqrt{m}$

ii) Nếu $m = 0$: $M \equiv I$

iii) Nếu $m < 0$: $M \in \varnothing$

Bài 1. Cho tam giác ABC . Tìm quỹ tích những điểm M thỏa :

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

b) $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB. Tìm quỹ tích điểm M thỏa : $MA^2 = 2.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm M thỏa :

a) $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

b) $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

c) $2.MA^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

Bài 4. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm quỹ tích điểm M thỏa :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=a^2$

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=5a^2$

c) $MA^2+MB^2+MC^2=3MD^2$

d) $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=3a^2$

Bài 5. Cho tam giác ABC. tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $MA^2=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ b) $(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$

c) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$ d) $2MA^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

Bài 6. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=a^2$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=5a^2$

c) $MA^2+MB^2+MC^2=3MD^2$ d) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=3a^2$

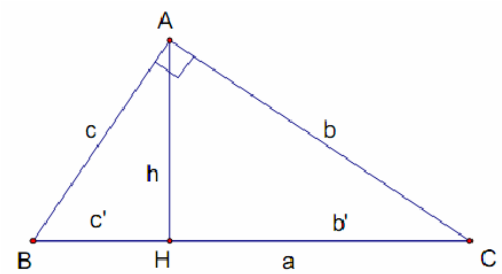
Bài 7. Cho ΔABC và đường thẳng d . Tìm M trên d để $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

BÀI 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho tam giác vuông ABC tại A, gọi b', c' là hình chiếu vuông góc của cạnh AB, AC lên cạnh BC. Ta có :



i. *Công thức liên quan đến hình chiếu.*

$$b^2=b'.a$$
$$c^2=c'.a$$
$$\frac{b'}{c'}=\frac{b^2}{c^2}$$

ii. *Định lý Pitago*

$$a^2=b^2+c^2$$

iii. *Công thức liên quan đến đường cao*

$$h^2=b'.c'$$
$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

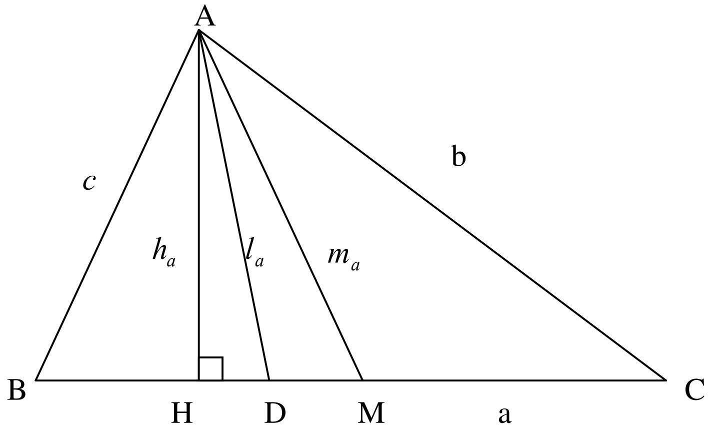
iv. *Công thức liên hệ giữa cạnh và góc.*

$$b=a\sin B=a\cos C=c\tan B=c\cot anC$$
$$c=a\sin C=a\cos B=b\tan C=b\cot anB$$

2. Các hệ thức lượng trong tam giác :

Cho tam giác ABC . Ta kí hiệu :

- Đặt BC = a, CA = b; AB = c.
- h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh *BC, CA, AB* .
- m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt tương ứng với các cạnh *BC, CA, AB* .
- l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong lần lượt tương ứng với các góc A, góc B, góc C .
- R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC
- $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nữa chu vi tam giác ABC.
- S là diện tích tam giác ABC.



2.1. Định lí cosin:

Trong tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c ta luôn có :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

Hệ quả: (Tính các góc của tam giác khi biết chiều dài 3 cạnh)

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \;;\quad \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

2.2. Định lí sin: Với mọi tam giác ABC , ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Trong đó:**R** là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

2.3. Định lý đường trung tuyến:

Cho tam giác ABC . m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt tương ứng với các cạnh *BC = a, CA = b, AB = c* . Ta có :

$$m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} \;; m_b^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} \;;\quad m_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

3. Công thức tính diện tích tam giác

Ta có các công thức diện tích như sau :

i) $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$

ii) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

iii) $S=\frac{abc}{4R}$

iv) $S=p.r$

v) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Công thức Hê – rông)

4. Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp tam giác

$$r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$r_a=p\tan\frac{A}{2};\ r_b=p\tan\frac{B}{2};\ r_c=p\tan\frac{B}{2}$$

5. Công thức tính chiều dài đường phân giác trong của tam giác

$$l_a^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$$

$$l_b^2=\frac{4ac}{(a+c)^2}p(p-b)$$

$$l_c^2=\frac{4ab}{(a+b)^2}p(p-c)$$

B. PHƯƠNG PHÁP TOÁN

VẤN ĐỀ 1 : TÍNH TOÁN CÁC YẾU TỐ TRONG MỘT TAM GIÁC

PHƯƠNG PHÁP CHUNG:

Tùy theo giả thuyết bài toán, để tìm các yếu tố trong một tam giác ta có thể :

1. Áp dụng trực tiếp các định lý hàm cosin, định lý hàm sin, công thức trung tuyến , công thức diện tích,…

2. Chọn một hệ thức thích hợp cho phép tìm một số yếu tố trung gian cần thiết, từ đó ta tìm được yếu tố cần tìm.

Bài 1. Cho tam giác ABC có b = 5, c = 7, cosA = $\frac{3}{5}$. Tính a, S, R, r.

Bài 2. Trong tam giác ABC , Tính A, B, C , R và m_a trong các trường hợp sau :

a) $\hat{A}=60^0,\ b=8,\ c=5$.   b) a = 21, b = 17, c = 10.

c) $a=\sqrt{6},\ c=2,\ b=1+\sqrt{3}$.   d) $a=2\sqrt{3},\ b=2\sqrt{2},\ c=\sqrt{6}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\hat{A}=120^0,\ AB=1,\ AC=2$.

a) Tính AC và cosC.

b) Trên AC kéo dài lấy điểm D sao cho BD = 2. Tính AD.

Bài 4. Cho tam giác ABC . Tính độ dài mỗi cạnh trong các trường hợp sau :

a) $AB=\sqrt{3},\ BC=\sqrt{2},\ \hat{C}=60^0$.

b) $\hat{A} = 120^0$, $BC = 13$, $AB + AC = 15$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB = 8, AC = 9, BC = 10.Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho MB = 7. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Bài 6. Cho tam giác ABC có BC = 12, AC = 13, trung tuyến AM = 8.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính góc B.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$.Tính góc A.

Bài 8. Cho tam giác ABC . Tính góc A trong mỗi trường hợp sau :

a) $\dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{a - b - c} = a^2$

b) $\cos B = \dfrac{(a+b)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC đều cạnh a, trên BC lấy D sao cho BD = 2DC.Trung trực đoạn AD cắt AC tại E. Tính CE và BE.

Bài 10. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^0$, $\hat{C} = 75^0$ và phân giác trong AD = 4. Tính các cạnh của tam giác và bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $m_b = 4$, $m_c = 2$, $a = 3$. Tính độ dài cạnh AB, AC.

Bài 12: Tam giác ABC có <B=60^o ; <C= 45^0 ; BC= a

a) Tính độ dài hai cạnh AB, AC

b) Chứng minh: cos 75^0 = $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Bài 13. Tam giác ABC có BC =12, CA=13, trung tuyến AM =8

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tính góc B

Bài 14. Cho ta giác ABC có độ dài 3 đường trung tuyến bằng 15; 18 ;27

a) Tính diện tích tam giác.

b) Tính độ dài các cạnh của tam giác.

VẤN ĐỀ 2 : CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC LIÊN QUAN ĐẾN CÁC YẾU TỐ CỦA MỘT TAM GIÁC.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :

Để chứng minh một hệ thức liên quan đến các yếu tố tam giác , ta thường sử dụng một trong các cách sau;

1. Áp dụng các công thức đã có để biến đổi vế này thành vế kia.

2. Chứng minh cả hai vế cùng bằng một biểu thức nào đó.

3. Chứng minh hệ thức cần chứng minh tương đương với một hệ thức đúng đã biết.

4. Ta thường dùng hàm cosin, hàm sin để chuyển các yếu tố từ cạnh về góc và ngược lại.

Bài 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a. $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$.

b. $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$

c. $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B$.

d. $(b+c)\sin A = a(\sin B + \sin C)$

e. $a(\sin B + \sin C) = (b+c)\sin A$

f. $h_a = 2R\sin B\sin C$.

g. $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$

h. $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$.

i. $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

j. $S = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$

k. $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$

l. $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$.

m. $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

n. $abc(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c)$

o. $(b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2} = 0$

p. $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

q. Nếu $b + c = 2a$ *thì* $\sin B + \sin C = 2\sin A$.

r. Nếu $bc = a^2$ *thì* $\sin B.\sin C = \sin^2 A$.

s. Nếu $bc = a^2$ *thì* $h_b.h_c = h_a^2$

t. Nếu $b + c = 2a$ *thì* $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

u. Nếu $a^2 + c^2 = 2b^2$ *thì* $2\cot B = \cot A + \cot C$.

v. Nếu $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$ *thì* $2\cot A = \cot B + \cot C$

w. Nếu $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ *thì* $m_a + m_b + m_c = p\sqrt{3}$

x. Nếu $A^0 = 60^0$ *thì* $\frac{1}{b+a} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$

Bài 2. Cho tam giác ABC .

a) Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N . Chứng minh : $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC}$

b) Gọi I là giao điểm của các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C. Gọi N là giao điểm của IA và BC. Gọi P là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. CMR : $\frac{NB}{NC} = \left(\frac{PB}{PC}\right)^2$

Bài 3. Cho tam giác ABC có ba cạnh là a, b, c. Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến và G là trọng tâm. Chứng minh :

a) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

b) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

Bài 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Biết : $b^2 + c^2 = 5a^2$.Chứng minh tam giác BCG vuông tại G.

Bài 5. CMR diện tích hình bình hành bằng tích hai cạnh liên tiếp với sin của góc xen giữa chúng.

Bài 6. Cho tứ giác lồi ABCD có góc tạo bởi hai đường chéo là α.

a) Chứng minh rằng diện tích tứ giác ABCD $= \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$

b) Xét trường hợp AC vuông góc BD.

c) Giả sử ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AC, có BD = a, $\angle CAB = \varphi$, $\angle CAD = \beta$. Tính AC và diện tích tứ giác ABCD theo a, φ, β.

Bài 7. Cho tứ giác lồi ABCD. Dựng hình bình hành ABDC'. CMR diện tích tứ giác ABCD và tam giác ACC' bằng nhau.

Bài 8. Chứng minh rằng trong mỗi tam giác, khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến tâm đường tròn ngoại tiếp thõa hệ thức : $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Bài 9*. CMR khoảng cách d từ trọng tâm của tam giác ABC đến tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó thõa hệ thức : $R^2 - d^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$

Bài 10. Chứng minh rằng hai đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B và C của tam giác ABC vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c; AC = b.

CMR độ dài đường phân giác trong của góc A là : $l_a = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c; AC = b. M là trung điểm cạnh BC. Đặt $\angle BAM = \alpha$.

CMR : $AM = \dfrac{bc}{b.\cos\alpha + c.\sin\alpha}$

Bài 13. Cho tứ giác ABCD có I, J là trung điểm của AC, BD.

a) CMR : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$.

b) Tìm điều kiện cần và đủ để ABCD là hình bình hành.

Bài 14. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Kẻ ba đường cao AA', BB', CC'.

a) CMR : $B'C' = 2R\sin A\cos A$.

b) Lấy A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A' qua AB, AC.Tính chu vi tam giác A'B'C' bằng độ dài đoạn A_1A_2

c) CMR : $\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C = 2\sin A.\sin B.\sin C$.

Bài 15. Cho tứ giác ABCD có AB = a, $\angle CAB = \alpha$; $\angle DAC = \alpha'$; $\angle DBA = \beta$; $\angle CBD = \beta'$. Tính độ dài CD.

Bài 16. Cho tứ giác ABCD nội tiếp được và có các cạnh a, b, c, d. Chứng minh diện tích tứ giác ABCD là :

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ (p : nữa chu vi tứ giác)

Bài 17. Cho tam giác ABC có I là trung điểm của cạnh BC, G là trọng tâm của tam giác . Kéo dài AI một đoạn ID = IG. M là điểm bất kỳ. CMR :

a) $MB^2 + MC^2 = MG^2 + MD^2 + 2IB^2 - 2IG^2$.

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Bài 18. (Nhận diện tam giác)**

a) Chứng minh rằng nếu $\sin A = 2\sin B\cos C$ thì tam giác ABC cân.

b) CMR nếu $\begin{cases} a = 2b\cos C \\ \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} = a^2 \end{cases}$ thì tam giác ABC đều.

c) CMR nếu $S = \dfrac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$ thì tam giác ABC vuông.

d) CMR nếu: $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} = \sqrt{\cos\dfrac{A}{2}} + \sqrt{\cos\dfrac{B}{2}} + \sqrt{\cos\dfrac{C}{2}}$ thì tam giác ABC đều

e) CMR nếu : $\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \dfrac{\tan B}{\tan C}$ thì tam giác ABC cân.

f) CMR nếu: $bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C = a^2$ thì tam giác ABC vuông.

. g) CMR nếu: $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}R$ thì tam giác ABC đều.

h) CMR nếu : $\dfrac{a}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}=\dfrac{a}{\sin B.\sin C}$ thì tam giác ABC vuông

k) CMR nếu $m_b{}^2+m_c{}^2=5m_a{}^2$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Bài 19. Cho tam giác ABC, chứng minh:**

a) $(p-a)(p-b)\le\dfrac{c^2}{4}$

b) $(p-a)(p-b)(p-c)\le\dfrac{abc}{8}$

c) $R\ge 2r$

d) $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\cot A+\cot B+\cot C}\right)^3\le\dfrac{a^2b^2c^2}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$

e) $m_a+m_b+m_c\le\dfrac{9}{2}R$

f) $m_a^2+m_b^2+m_c^2\ge 3\sqrt{3}S$

g) $m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2\ge\dfrac{3}{4}\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

VẤN ĐỀ 3: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn một đẳng thức cho trước, ta thường biến đổi đẳng thức đã cho tương đương với đơn giản có dạng sau ;

1. $AM=k$: với A cố định, k không đổi . Ta có tập hợp điểm M là đường tròn tâm A , bán kính R = k.

2. $\overline{AM'}=k$:với A cố định nằm trên đường thẳng d, k không đổi và M' là hình chiếu của M lên đường thẳng d. Khi đó M' cố định, suy ra tập hợp điểm M là đường thẳng qua M và vuông góc với d.

3. $MA^2+MB^2=k^2$ với k cho trước; A, B cố định.

Ta có : $MA^2+MB^2=k^2\Leftrightarrow 2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}=k^2$ (I là trung điểm AB)

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{1}{2}\left(k^2-\frac{AB^2}{2}\right)$$

+ Nếu $k^2-\dfrac{AB^2}{2}<0$: Không có điểm M nào thỏa hệ thức . Suy ra $\{M\}\in\varnothing$.

+ Nếu $k^2-\dfrac{AB^2}{2}=0$: $M\equiv I$.

+ Nếu $k^2-\dfrac{AB^2}{2}>0$: M thuộc đường tròn tâm I bán kính $R=\sqrt{k^2-\dfrac{AB^2}{2}}$.

4. $MA^2-MB^2=k$: với k cho trước; A, B cố định.

Gọi I là trung điểm AB; H là hình chiếu của M lên AB.

Ta có : $MA^2-MB^2=k\Leftrightarrow 2.\overline{AB}.\overline{IH}=k\Leftrightarrow\overline{IH}=\dfrac{k}{2.\overline{AB}}$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng d vuông góc với AB tại H định bởi : $\overline{IH} = \dfrac{k}{2.\overline{AB}}$

Bài 1. **Cho hai điểm A, B cố định .** Tìm tập hợp điểm M thỏa : $MA^2 + MB^2 = k^2$

a) AB = 2 và k = 4.
b) AB = 4 và k = 2.
c) AB = $2\sqrt{2}$ và k = 2.

Bài 2. Cho hai điểm A, B cố định . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn : $MA^2 - MB^2 = 4\ (AB = 2)$.

Bài 3. Tìm tập hợp điểm M có tổng bình phương các khoảng cách đến bốn đỉnh của một tứ giác bằng k^2 không đổi.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm tập hợp các điểm M thỏa :

a) $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = BC^2$
b) $MB^2 + MC^2 + 2MA^2 = BC^2$.

Bài 5. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa :

a) $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$
b) $MB^2 + MC^2 = 2BC^2$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 2AC = 2a.. Tìm tập hợp điểm M thỏa :

a) $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 12a^2$.
b) $MB^2 - MA^2 = 2a^2$
c) $MA^2 + MB^2 = 8a^2$

Bài 7. Cho hình chữ nhật ABCD. Tìm tập hợp điểm M thỏa :

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2AC^2$.
b) $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$

VẤN ĐỀ 4: GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG :

Giải tam giác là tìm các yếu tố còn lại của tam giác khi biết các yếu tố xác định của tam giác đó. Các yếu tố xác định của tam giác đó là : c-c-c ; c-g-c ; g-c-g . Để giải một tam giác ta thường áp dụng các định lý hàm sin định lý hàm cosin, các công thức tính diện tích.

Bài 1. Cho tam giác ABC có c = 3, b = 5 và $\angle A = 62^0$. Tính cạnh a, diện tích, góc B và góc C của tam giác.

Bài 2. Cho tam giác ABC có a = 2, b = 5 và c = 6. Tính các góc của tam giác.

Bài 3. Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 5 và $\angle A = 60^0$. Tính BC , bán kính đường ngoại tiếp R và diện tích tam giác ABC.

Bài 4. Cho tam giác ABC biết $a = 6cm,\ b = 2\sqrt{6}cm,\ \angle A = 120^0$. Tính góc B và bán kình đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC.

----------------------HẾT----------------------

Trên bước đường thành công không có dấu chân kẻ lười biếng !