

Sprawozdanie 3

Analiza przeżycia

Marta Stankiewicz (282244) Kacper Szmigielski (282255)

Spis treści

1	Lista 9	3
1.1	Zadanie 1	3
1.2	Zadanie 2	3
1.3	Zadanie 3	5
1.4	Zadanie 4	6
1.5	Zadanie 5	6
1.6	Zadanie 6	7
1.7	Zadanie 7	8
1.8	Zadanie 8	10
1.9	Zadanie 9	10
2	Lista 10	11
2.1	Zadanie 1	11
2.2	Zadanie 2	12
2.3	Zadanie 3	12
2.4	Zadanie 4	14
2.5	Zadanie 5	16
2.6	Zadanie 6	17
3	Lista 12	17
3.1	Zadanie 1	17
3.2	Zadanie 2	19
3.3	Zadanie 3	20
3.4	Zadanie 4	23

Spis rysunków

1	Wykres oszacowanej funkcji przeżycia - model AFT	6
2	Porównanie estymowanych funkcji hazardu dla różnych poziomów sprawności ECOG - model PH	9
3	Porównanie logarytmicznych funkcji hazardu dla wybranych poziomów sprawności ECOG - model PH	9
4	Wykres oszacowanej funkcji przeżycia - model PH	10
5	Oszacowanie bazowej skumulowanej funkcji hazardu odpowiadającej rozkładowi czasu życia - model Coxa	13
6	Oszacowanie bazowej funkcji przeżycia odpowiadającej rozkładowi czasu życia - model Coxa	14
7	Oszacowanie skumulowanej funkcji hazardu - model Coxa	15
8	Logarytm skumulowanej funkcji hazardu - model Coxa	15
9	Oszacowanie funkcji przeżycia - model Coxa	17

Spis tabel

1	Współczynniki w modelu AFT	4
2	Współczynniki β w modelu AFT	4
3	Współczynniki w modelu PH	7
4	Wartości oszacowanych parametrów wraz z ilorazami hazardu, przedziałami ufności oraz p-wartościami - model Coxa	12
5	Wartości p testu IW (model AFT) - krok 1	20
6	Wartości p testu IW (model AFT) - krok 2	21
7	Wartości p testu IW (model AFT) - krok 3	21
8	Wartości AIC (model AFT) - krok 1	21
9	Wartości AIC (model AFT) - krok 2	22
10	Wartości AIC (model AFT) - krok 3	22
12	Wartości p testu IW (model Coxa) - krok 1	23
13	Wartości p testu IW (model Coxa) - krok 2	24
14	Wartości p testu IW (model Coxa) - krok 3	24
15	Wartości AIC (model Coxa) - krok 1	25
16	Wartości AIC (model Coxa) - krok 2	25
17	Wartości AIC (model Coxa) - krok 3	25

1 Lista 9

Sprawozdanie dotyczy analizy zbioru *lung* dostępnych w pakiecie survival. Dane dotyczą pacjentów z zaawansowanym rakiem płuc. Zostały one odpowiednio przygotowane, tzn. po- minięto zmienne niepotrzebne dla analizy (kolumny: *inst*, *pat.karno*, *meal.cal*, *wt.loss*), usunięto wiersze zawierające wartości brakujące oraz wycentrowano zmienne ciągłe (poprzez odjęcie średniej wartości). W poniższych zadaniach przyjęto, że czas przeżycia ma rozkład Weibulla.

1.1 Zadanie 1

W pierwszej kolejności oszacowano (zgodnie z przykładem zawartym na stronie 8 wykładu 9) parametry modelu przyspieszonego czasu awarii, przyjmując za zmienną zależną zmienną *time*, a za charakterystyki zmienne: *age*, *sex*, *ph.ecog*, *ph.karno*.

```
model <- survreg(Surv(time, status)^age + as.factor(sex) +
                    as.factor(ph.ecog) + ph.karno,
                    data = dane,
                    dist = "weibull")

beta <- -summary(model)$coefficients[-1]
mu <- model$icoef[1]
sigma <- exp(model$icoef[2])
alpha <- 1/sigma
lambda <- exp(-mu*alpha)

wsp.AFT <- data.frame(
  "alpha" = alpha,
  "beta" = beta,
  "lambda" = lambda,
  "mu" = mu,
  "sigma" = sigma
)

rownames(wsp.AFT) <- c("age",
                        "sex",
                        "ph.ecog = 1",
                        "ph.ecog = 2",
                        "ph.ecog= 3",
                        "ph.karno")
```

1.2 Zadanie 2

Tabela 1: Współczynniki w modelu AFT

Zmienne	α	β	λ	μ	σ
age	1.32569	0.00860	0.00033	6.0431	0.75432
sex	1.32569	-0.40828	0.00033	6.0431	0.75432
ph.ecog = 1	1.32569	0.42156	0.00033	6.0431	0.75432
ph.ecog = 2	1.32569	0.92611	0.00033	6.0431	0.75432
ph.ecog = 3	1.32569	1.68724	0.00033	6.0431	0.75432
ph.karno	1.32569	0.01006	0.00033	6.0431	0.75432

Analizując otrzymane współczynniki widoczne w tabeli 1 można zauważyć, że jedyne zmiany widoczne są wśród parametrów β . Wykorzystywana w pakiecie R funkcja *survreg* estymuje parametry modelu AFT, który w postaci liniowej wyraża się wzorem:

$$\ln(X_z) = \mu - \beta^T z + \sigma W$$

gdzie $\beta^T z = \beta_1 z_1 + \dots + \beta_n z_n$ jest iloczynem skalarnym wektora współczynników i zmiennych objaśniających. Pozostałe elementy oznaczają:

μ - przesunięcie (poziom log-czasu, gdy $z = 0$)

σW - błąd losowy (postać rozkładu zmiennej W jest znana)

Warto zaznaczyć, że parametry α oraz λ , charakterystyczne dla postaci ogólnej rozkładów, są funkcjami μ oraz σ i pojawiają się dopiero po przekształceniu modelu do formy hazardu lub funkcji przeżycia. Z tego względu w bezpośredniej interpretacji wpływu zmiennych objaśniających kluczowe znaczenie mają współczynniki β .

Jeśli $\beta > 0$, to wartość tę odejmujemy w równaniu, co prowadzi do zmniejszenia logarytmu czasu, a w konsekwencji do skrócenia przewidywanego czasu przeżycia pacjenta. Jeśli $\beta < 0$, wpływ zmiennej jest odwrotny – prowadzi to do zwiększenia wartości $\ln(X_z)$, co interpretujemy jako wydłużenie oczekiwanej czasu przeżycia.

Tabela 2: Współczynniki β w modelu AFT

Zmienne	β
age	0.00860
sex	-0.40828
ph.ecog = 1	0.42156
ph.ecog = 2	0.92611
ph.ecog = 3	1.68724
ph.karno	0.01006

Z analizy parametrów zamieszczonych w tabeli 2 wynika, że jedyną zmienną o ujemnym współczynniku β jest *sex*. Ponieważ jest to zmienna typu faktor, sprawdzany jest jej poziom referencyjny.

```
levels(as.factor(lung$sex))
```

```
## [1] "1" "2"
```

Kategorią odniesienia (kodowaną jako 1) są mężczyźni. Ujemna wartość współczynnika dla poziomu 2 (kobiety) oznacza, że w przyjętej konwencji modelu — gdzie dodatnie β skraca czas przeżycia — płeć żeńska jest czynnikiem sprzyjającym wydłużeniu oczekiwanej czasu przeżycia w stosunku do mężczyzn.

Kolejną istotną zmienną jakościową jest ph.ecog, określająca stan sprawności pacjenta w skali ECOG.

```
levels(as.factor(lung$ph.ecog))
```

```
## [1] "0" "1" "2" "3"
```

W tym przypadku poziomem referencyjnym jest wartość 0 (pacjent w pełni sprawny). Dodatnie wartości współczynników β dla poziomów 1, 2 oraz 3 wskazują, że każdy stopień pogorszenia sprawności fizycznej wiąże się ze skróceniem przewidywanego czasu przeżycia w porównaniu do grupy o najwyższej sprawności (poziom 0).

Pozostałe zmienne w modelu mają charakter ciągły. Ich dodatnie współczynniki β sugerują, że wzrost wartości tych parametrów skraca czas przeżycia.

1.3 Zadanie 3

W modelu przyspieszonego czasu życia (AFT) zakłada się, że funkcja przeżycia jednostki o wektorze charakterystyk z może zostać zapisana jako przeskalowanie czasu w bazowej funkcji przeżycia:

$$S(t | z) = S_0(\exp(\beta^\top z) t), \quad (1)$$

gdzie $S_0(t)$ oznacza funkcję przeżycia jednostki bazowej, tj. odpowiadającej zerowemu wektorowi charakterystyk.

Jeżeli bazowy czas przeżycia ma rozkład Weibulla z parametrami $\lambda > 0$ oraz $\alpha > 0$, to bazowa funkcja przeżycia dana jest wzorem

$$S_0(t) = \exp(-\lambda t^\alpha), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Podstawiając (2) do definicji (1), otrzymujemy funkcję przeżycia jednostki o wektorze charakterystyk z w postaci

$$S(t | z) = \exp(-\lambda \exp(\alpha \beta^\top z) t^\alpha). \quad (3)$$

```

pacjent <- c(70 - mean_wiek, 1, 1, 0, 0, 90 - mean_ph_karno)

S_0 <- function(x) exp(-lambda*x^alpha)

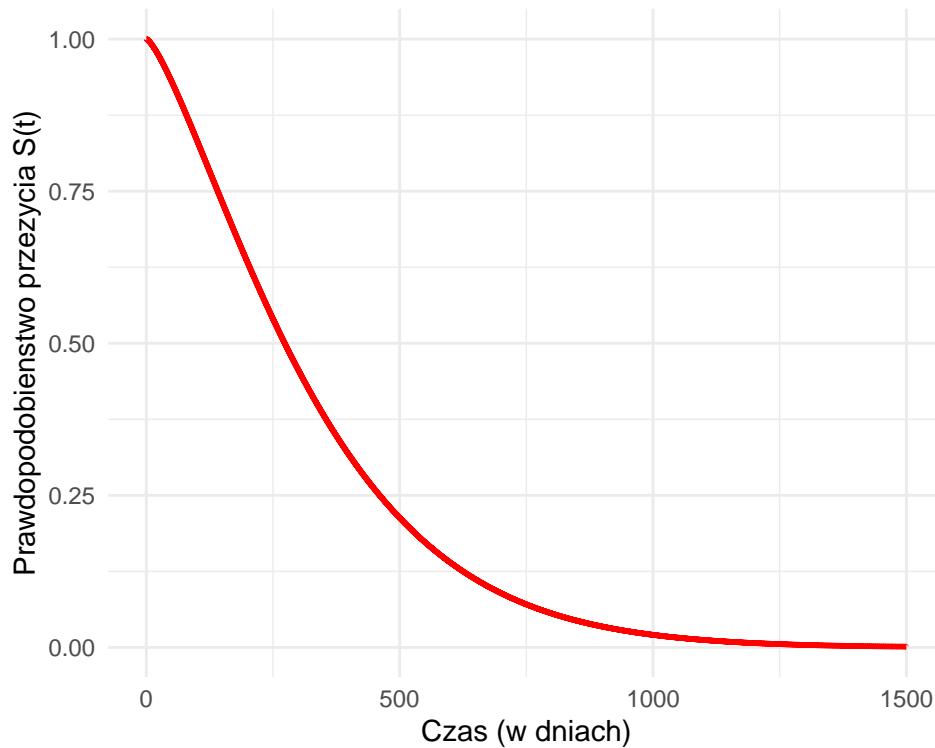
S <- function (t) {
  exp(-lambda*exp(alpha*sum(beta*pacjent))*t^alpha)
}

```

Wykorzystując wyprowadzony wzór na funkcję przeżycia, wyznaczono prawdopodobieństwo przeżycia powyżej 300 dni dla 70-letniej pacjentki o charakterystyce $ph.ecog = 1$ oraz $ph.karno = 90$. Prawdopodobieństwo to wynosi 0.4554.

1.4 Zadanie 4

Poniżej przedstawiono wykres oszacowanej w zadaniu 3. funkcji przeżycia.



Rysunek 1: Wykres oszacowanej funkcji przeżycia - model AFT

1.5 Zadanie 5

Definicja 1.1. Niech $h_0(x)$ będzie funkcją hazardu (o znanej postaci) obserwowalnej zmiennej losowej X , odpowiadającej jednostce o zerowym wektorze charakterystyk. Wówczas model,

w którym funkcja hazardu jednostki o wektorze charakterystyk z ma postać

$$h(x | z) = h_0(x) \exp(\beta^\top z), \quad (4)$$

nazywamy (parametrycznym) modelem proporcjonalnych hazardów (PH). Funkcję $h_0(x)$ nazywamy bazową funkcją hazardu.

Model proporcjonalnych hazardów charakteryzuje się prostą własnością interpretacyjną. Jeżeli z_1 oraz z_2 są dwoma wektorami charakterystyk, to na podstawie (4) otrzymujemy

$$\frac{h(x | z_1)}{h(x | z_2)} = \exp(\beta^\top (z_1 - z_2)), \quad (5)$$

co oznacza, że iloraz hazardów dwóch jednostek jest stały w czasie, a zatem hazardy są proporcjonalne.

```
model <- phreg(
  Surv(time, status) ~ age + as.factor(sex) + as.factor(ph.ecog) + ph.karno,
  data = dane,
  dist = "weibull"
)

beta <- model$coefficients[-c(7,8)]
mu <- model$coefficients['log(scale)']
sigma <- exp(model$coefficients['log(shape)'])
lambda <- exp(-mu*sigma)
alpha <- sigma
```

1.6 Zadanie 6

Tabela 3: Współczynniki w modelu PH

Zmienne	α	β	λ	μ	σ
age	1.38763	0.01194	0.00016	6.30118	1.38763
sex	1.38763	-0.56654	0.00016	6.30118	1.38763
ph.ecog = 1	1.38763	0.58497	0.00016	6.30118	1.38763
ph.ecog = 2	1.38763	1.28510	0.00016	6.30118	1.38763
ph.ecog = 3	1.38763	2.34127	0.00016	6.30118	1.38763
ph.karno	1.38763	0.01395	0.00016	6.30118	1.38763

Obserwując wyniki w tabeli 3 jedynym zidentyfikowanym czynnikiem redukującym ryzyko jest płeć żeńska, dla której współczynnik β wynosi NA. Na jego podstawie można obliczyć wartość $\exp(\beta) \approx \text{NA}$, oznaczający ryzyko zgonu niższe o NA% w stosunku do mężczyzn. W

przypadku zmiennej jakościowej $ph.ecog$, dodatnie wartości współczynników β dla poziomów 1, 2 oraz 3 (wynoszące odpowiednio: NA, NA oraz NA wskazują na wzrost ryzyka wraz z pogarszającym się stanem sprawności pacjenta — dla $ph.ecog = 3$ hazard jest aż NA-krotnie wyższy niż w grupie referencyjnej. Pozostałe zmienne ciągłe, age oraz $ph.karno$, również charakteryzują się dodatnimi wartościami β (odpowiednio 0.0119361 oraz 0.013955), co interpretujemy jako wzrost hazardu wraz ze zwiększeniem się wartości tych parametrów, co w konsekwencji prowadzi do skrócenia prognozowanego czasu przeżycia.

1.7 Zadanie 7

Na podstawie dopasowanego modelu PH wyznaczono oszacowania funkcji hazardu dla 70-letniej kobiety ($ph.karno = 90$), uwzględniając dwa alternatywne poziomy sprawności: $ph.ecog = 1$ oraz $ph.ecog = 2$.

```

z1 <- c(70 - mean_wiek, 1, 1, 0, 0, 90 - mean_ph_karno)
z2 <- c(70 - mean_wiek, 1, 0, 1, 0, 90 - mean_ph_karno)

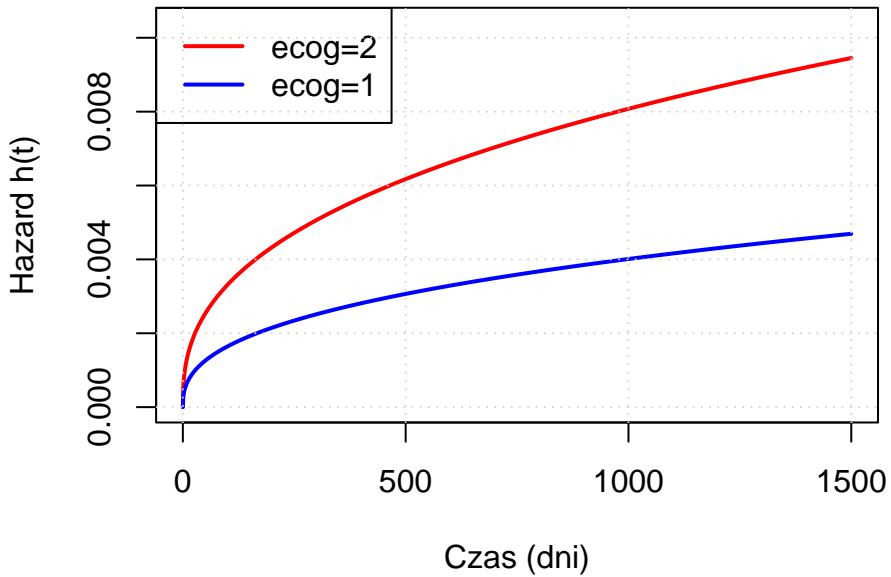
h_0 <- function(x) {
  return (lambda*alpha*x^(alpha-1))
}

h <- function(x, z) {
  h_0(x)*exp(sum(beta*z))
}

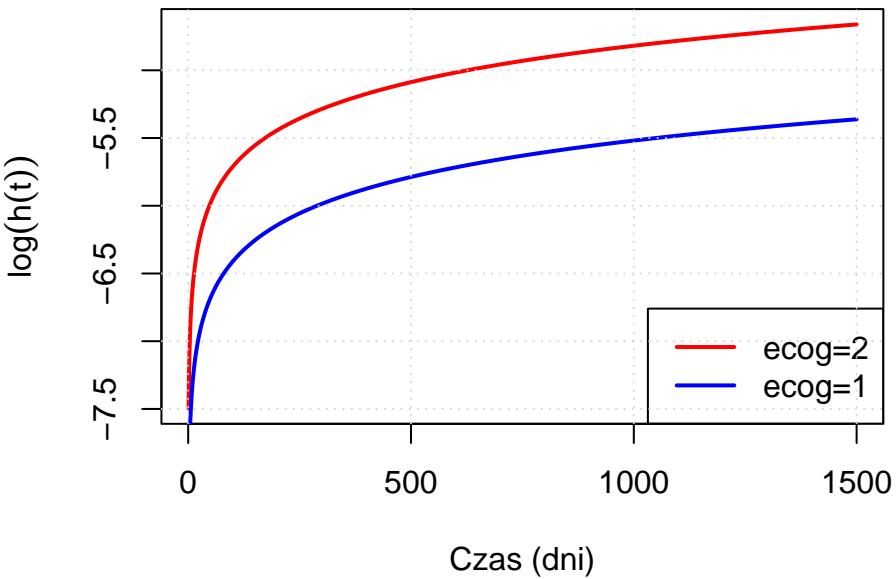
x <- 0:1500

haz1 <- sapply(x, function(t) h(t, z1))
haz2 <- sapply(x, function(t) h(t, z2))

```



Rysunek 2: Porównanie estymowanych funkcji hazardu dla różnych poziomów sprawności ECOG - model PH



Rysunek 3: Porównanie logarytmicznych funkcji hazardu dla wybranych poziomów sprawności ECOG - model PH

Weryfikacja założeń modelu, przeprowadzona poprzez analizę wyników przedstawionych na wykresach ??fig:hazard_plot i ??fig:log_plot), potwierdza słuszność przyjęcia modelu proporcjonalnych hazardów. Stały odstęp między krzywymi $\log(h(t))$ dla różnych poziomów zmiennej $ph.ecog$ dowodzi, że iloraz hazardu pozostaje stały w czasie.

1.8 Zadanie 8

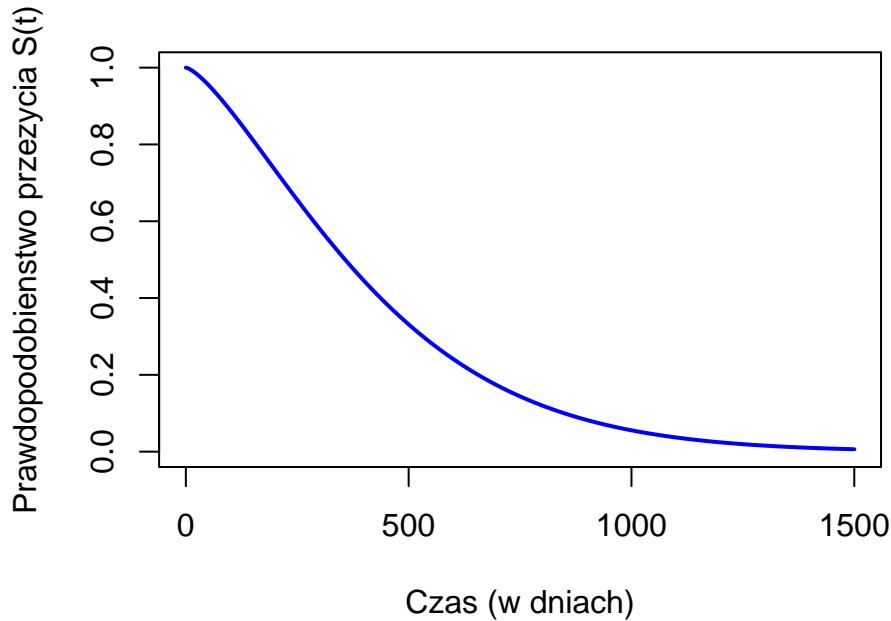
W modelu proporcjonalnych hazardów (PH) funkcja przeżycia dla jednostki o wektorze cech z jest definiowana jako bazowa funkcja przeżycia podniesiona do potęgi odpowiadającej ilorazowi hazardu. Przyjmuje ona następującą postać:

```
S_0 <- function(x) exp(-lambda*x^alpha)

S <- function (t, z) {
  (S_0(t))^exp(sum(beta*z))
}
```

Prawdopodobieństwo, że czas życia kobiety w wieku 70 lat o charakterystyce $ph.ecog = 1$ i $ph.karno = 90$ będzie większy niż 300 dni wynosi 0.5806085. Natomiast prawdopodobieństwo, że czas życia kobiety w wieku 70 lat o charakterystyce $ph.ecog = 2$ i $ph.karno = 90$ będzie większy niż 300 dni wynosi 0.3345465. Porównując wynik dla kobiety o charakterystykach opisanych w punkcie (a) z tym otrzymanym w zadaniu 3 możemy zauważyc, że oszacowane prawdopodobieństwo jest większe, gdy korzystamy z modelu PH zamiast AFT.

1.9 Zadanie 9



Rysunek 4: Wykres oszacowanej funkcji przeżycia - model PH

Porównując wykresy ??fig:wykres_AFT) oraz ??fig:wykres_PH) można zauważyc różnicę w tempie spadku oszacowanej funkcji przeżycia. Krzywa odpowiadająca modelowi proporcjonalnych hazardów (PH) maleje wolniej niż w przypadku modelu przyspieszonego czasu życia

(AFT). W rezultacie dla tych samych punktów czasowych model PH generuje systematycznie wyższe prawdopodobieństwa przeżycia, co skutkuje uzyskaniem bardziej optymistycznych prognoz w porównaniu do modelu AFT.

2 Lista 10

W poniższych zadaniach, nie przyjęto żadnego konkretnego rozkładu czasu życia.

2.1 Zadanie 1

W modelu proporcjonalnych hazardów Coxa zakłada się, że rozkład czasu do wystąpienia zdarzenia jednostki o charakterystyce z ma funkcję hazardu postaci

$$h_z(t) = h_0(t)\psi(z)$$

Najczęściej przyjmuje się, że

$$\psi(z) = \exp(\beta^T z)$$

Zatem

$$h_z(t) = h_0(t)\exp(\beta^T z)$$

Poniżej oszacowano parametry modelu proporcjonalnych hazardów Coxa, przyjmując za zmienną zależną zmienną *time*, a za charakterystyki zmienne: *age*, *sex*, *ph.ecog* oraz *ph.karno*.

```
model <- coxph(Surv(time, status) ~ age + factor(sex) + factor(ph.ecog) + ph.karno,
                 data = dane, ties = "efron")

s <- summary(model)

beta <- s$coefficients[, "coef"]
pval <- s$coefficients[, "Pr(>|z|)"]
HR <- s$coefficients[, "exp(coef)"]

# 95% CI dla HR:
CI <- s$conf.int[, c("lower .95", "upper .95")]

wyniki <- cbind(beta=beta, HR=HR, CI, p.value=pval)
```

2.2 Zadanie 2

Tabela 4: Wartości oszacowanych parametrów wraz z ilorazami hazardu, przedziałami ufności oraz p-wartościami - model Coxa

	beta	HR	lower .95	upper .95	p.value
age	0.01256	1.01264	0.99405	1.03157	0.18390
factor(sex)2	-0.56568	0.56798	0.40723	0.79218	0.00086
factor(ph.ecog)1	0.57806	1.78257	1.12157	2.83316	0.01447
factor(ph.ecog)2	1.23990	3.45525	1.72205	6.93289	0.00048
factor(ph.ecog)3	2.39585	10.97756	1.31878	91.37750	0.02670
ph.karno	0.01242	1.01250	0.99365	1.03171	0.19512

Analizując oszacowania współczynników β wraz z ich ilorazami hazardu, przedziałami ufności oraz p -wartościami przedstawionymi w tabeli 4, można zauważać wyraźny podział na zmienne istotne i nieistotne statystycznie. Zmienne *age* oraz *ph.karno* nie wykazują istotnego wpływu na ryzyko zgonu przy przyjętym poziomie istotności $\alpha = 0.05$, ponieważ ich p -wartości wynoszą odpowiednio 0.1839 i 0.1951 - są większe od przyjętego poziomu 0.05.

Pozostałe parametry modelu są istotne statystycznie. Dla zmiennej *sex* współczynnik β przyjmuje wartość ujemną (-0.5657), co przekłada się na iloraz hazardu $HR = \exp(\beta) \approx 0.568$. Oznacza to redukcję ryzyka zgonu o około 43.2% w porównaniu do mężczyzn. Z kolei w przypadku zmiennej *ph.ecog* obserwujemy dodatnie wartości współczynników, które rosną wraz z pogarszającym się stanem pacjenta. Dla najwyższej poziomu niesprawności (*ph.ecog* = 3) iloraz hazardu wynosi 10.98, co wskazuje na wielokrotny wzrost ryzyka względem grupy referencyjnej, przy czym szeroki przedział ufności dla tej kategorii sugeruje mniejszą precyzję oszacowania.

2.3 Zadanie 3

Poniżej wyznaczono oszacowanie bazowej skumulowanej funkcji hazardu i bazowej funkcji przeżycia odpowiadającej rozkładowi czasu życia.

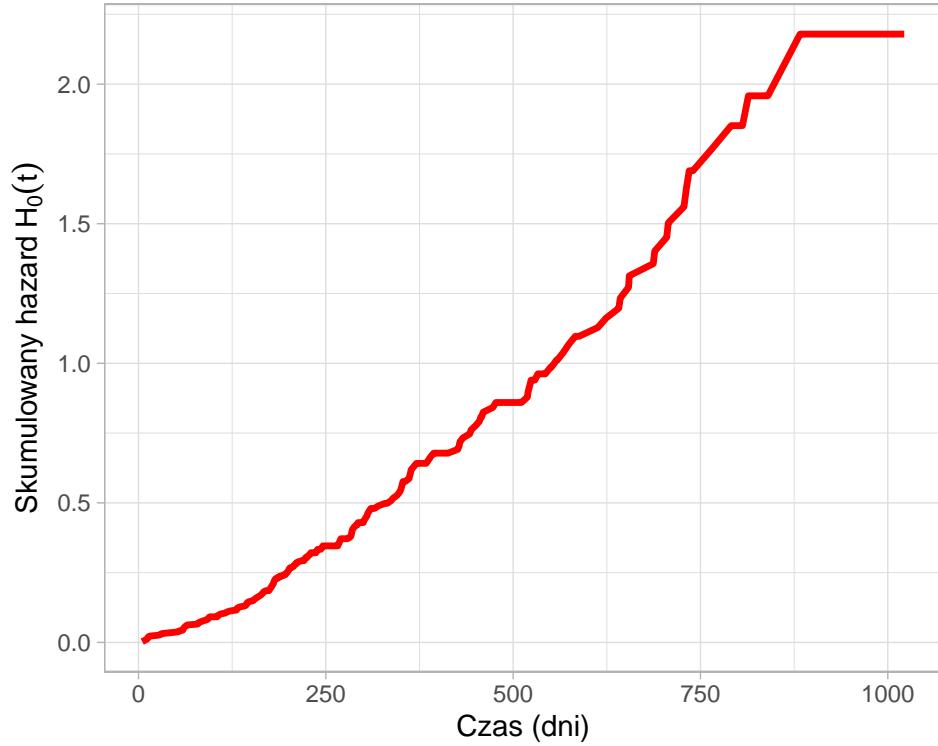
Wykorzystano poniższe wzory.

$$h_z(t) = h_0(t) \exp(\beta^T z)$$

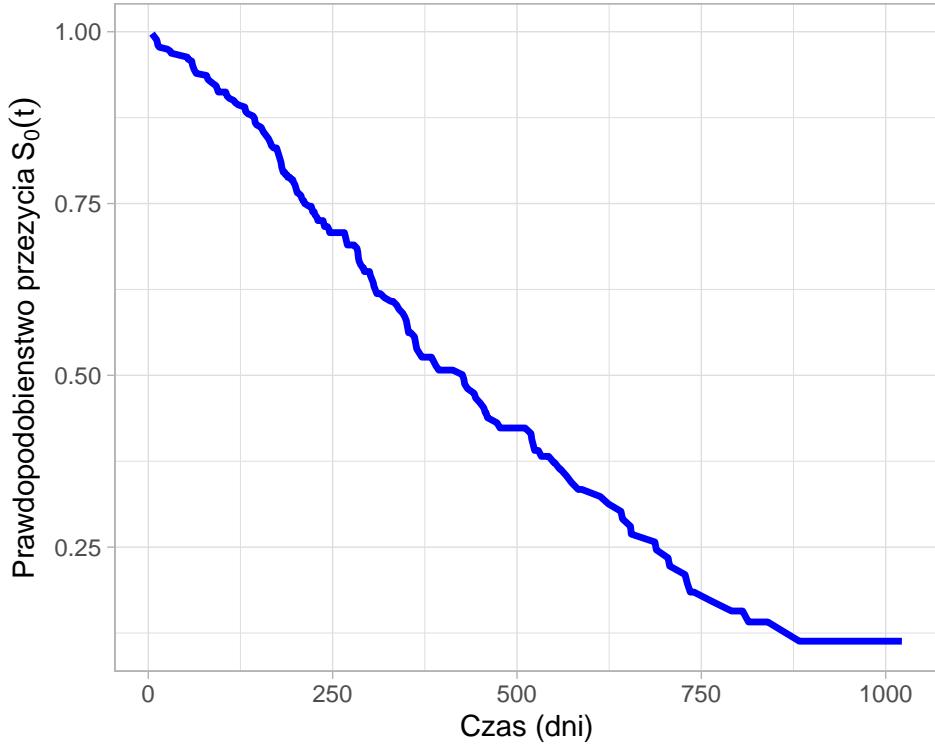
$$H_z(t) = H_0(t) \exp(\beta^T z)$$

$$S_z(t) = (S_0(t))^{\exp(\beta^T z)}$$

$$S_z(t) = \exp(-H_z(t))$$



Rysunek 5: Oszacowanie bazowej skumulowanej funkcji hazardu odpowiadającej rozkładowi czasu życia - model Coxa



Rysunek 6: Oszacowanie bazowej funkcji przeżycia odpowiadającej rozkładowi czasu życia - model Coxa

2.4 Zadanie 4

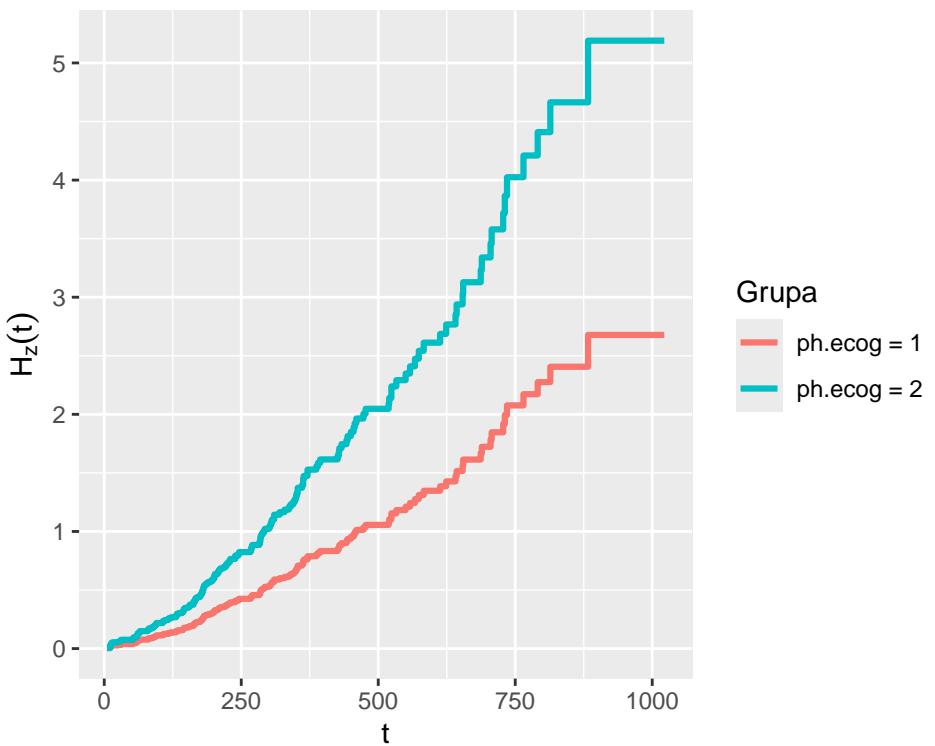
Dla modelu Coxa skumulowana funkcja hazardu dla pacjenta o wektorze cech z wyraża się wzorem:

$$H_z(t) = H_0(t) \exp(\beta^T z)$$

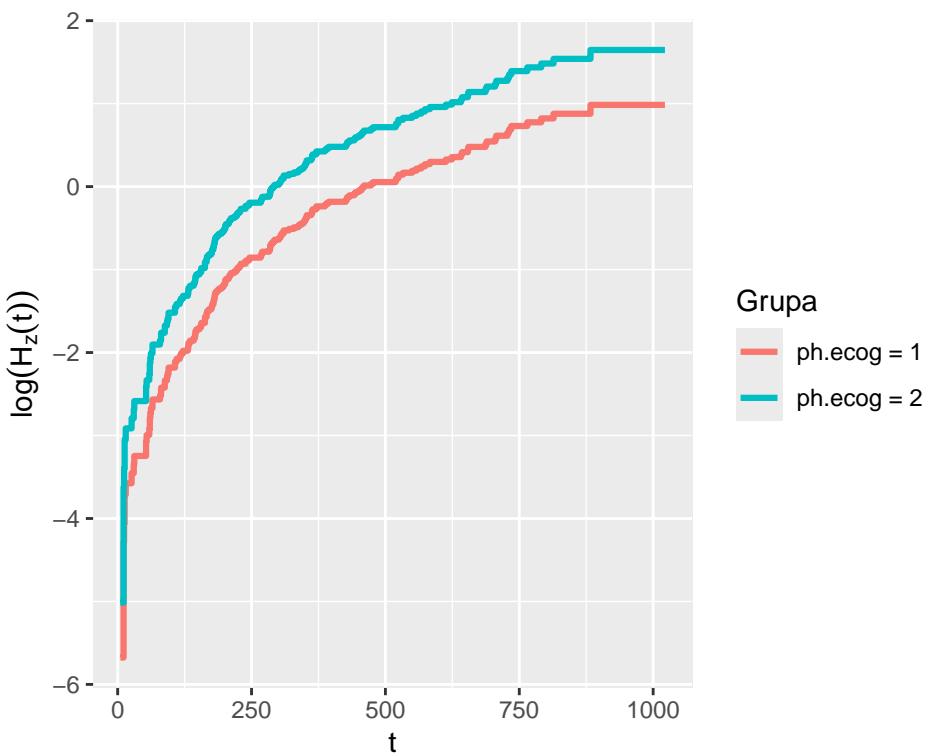
gdzie $H_0(t)$ to bazowy skumulowany hazard, a czynnik $\exp(\beta^T z)$ jest stały w czasie dla ustalonego pacjenta. Logarytmując powyższe równanie stronami otrzymujemy:

$$\log H_z(t) = \log H_0(t) + \beta^T z$$

Oznacza to, że na wykresie logarytmicznym krzywe dla różnych grup powinny być przesunięte względem siebie o stałą wartość, a odległość między nimi odpowiada różnicy w ryzyku $\beta^T(z_1 - z_2)$.



Rysunek 7: Oszacowanie skumulowanej funkcji hazardu - model Coxa



Rysunek 8: Logarytm skumulowanej funkcji hazardu - model Coxa

Analiza wykresów 7 oraz 8 potwierdza poprawność zastosowania modelu proporcjonalnych hazardów dla badanych danych. Na pierwszym wykresie widać, że krzywa dla pacjentki z gorszym rokowaniem ($ph.ecog = 2$) jest proporcjonalnie przeskalowana w górę względem krzywej referencyjnej, zachowując podobny kształt przebiegu. Wniosek ten jest jeszcze wyraźniejszy na drugim wykresie przedstawiającym logarytm funkcji. Krzywe $\ln(H_z(t))$ są względem siebie równolegle przesunięte, zachowując stały dystans w całym analizowanym przedziale czasowym. Zatem iloraz hazardu jest stały w czasie, co oznacza, że założenia modelu Coxa są spełnione i nie ma podstaw do ich kwestionowania.

2.5 Zadanie 5

Wyznaczono oszacowanie funkcji przeżycia (w dniach) odpowiadającej rozkładowi czasu życia kobiet w wieku 70 lat ($ph.karno = 90$), których $ph.ecog = 1$ lub $ph.ecog = 2$:

```
nd <- data.frame(
  age = c(70, 70)-mean_wiek,
  sex = factor(c(2, 2), levels = levels(factor(dane$sex))),
  ph.ecog = factor(c(1, 2), levels = levels(factor(dane$ph.ecog))),
  ph.karno = c(90, 90)-mean_ph_karno
)

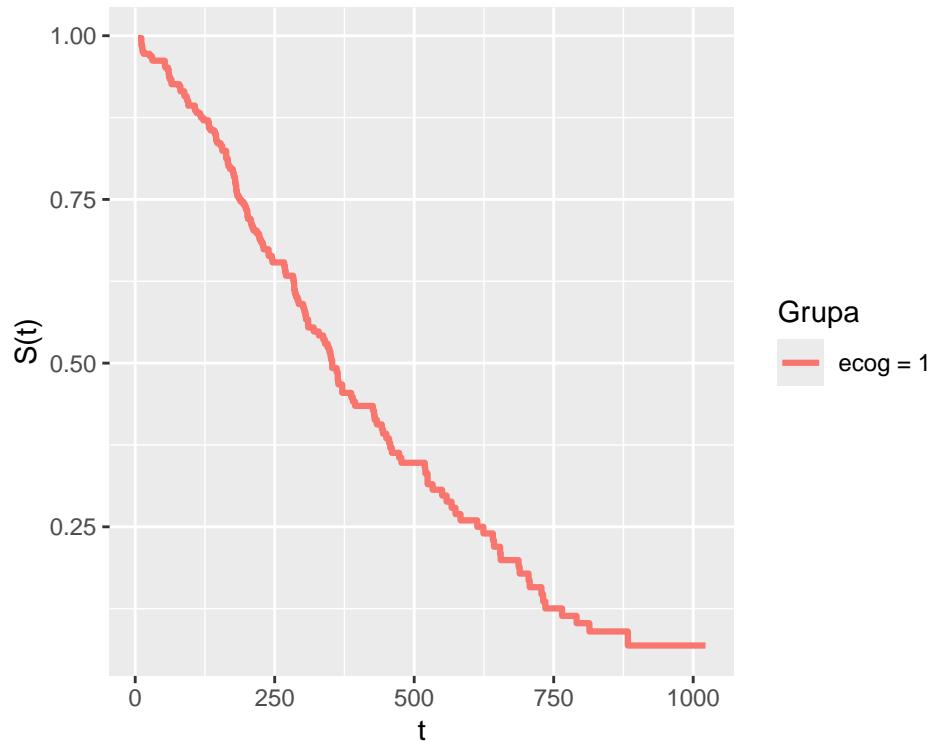
fit <- survfit(model, newdata = nd)

wynik <- summary(fit, times = 300)

prob_a <- wynik$surv[1]
prob_b <- wynik$surv[2]
```

Analiza uzyskanych wyników wskazuje na istotne różnice w rokowaniach zależne od stanu sprawności. Szacowane prawdopodobieństwo, że czas życia kobiety o charakterystyce $ph.ecog = 1$ (i $ph.karno = 90$) przekroczy 300 dni, wynosi r round(prob_a, 4). W przypadku pacjentki o gorszym stanie sprawności ($ph.ecog = 2$), prawdopodobieństwo to ulega wyraźnemu obniżeniu i wynosi r round(prob_b, 4).

2.6 Zadanie 6



Rysunek 9: Oszacowanie funkcji przeżycia - model Coxa

Zestawienie funkcji przeżycia na wykresach 4 i 9 wykazuje różnicę w charakterze estymacji: model Coxa generuje funkcję schodkową, zmieniającą się wyłącznie w momentach wystąpienia zdarzeń, co wynika z braku założeń co do kształtu hazardu bazowego. Z kolei model parametryczny PH prezentuje gładką aproksymację tego procesu, wynikającą z przyjęcia teoretycznego rozkładu czasu życia - rozkładu Weibulla. Zbliżony przebieg obu krzywych (trend spadkowy) świadczyły o tym, że przyjęty rozkład parametryczny dobrze odzwierciedla rzeczywistą strukturę danych empirycznych.

3 Lista 12

3.1 Zadanie 1

W tym zadaniu omawiamy model **przyspieszonego czasu awarii**

```
model <- survreg(Surv(time, status) ~ age +
  as.factor(sex) +
  as.factor(ph.ecog) +
  ph.karno,
```

```
    data = dane,  
    dist = "weibull")
```

3.1.1 a)

Dla zmiennej age w teście Walda otrzymujemy $p_{value} = 0.2052959 > 0.05$, co oznacza, że przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy $H_0 : \beta_{age} = 0$, a więc zmienna jest nieistotna statystycznie.

Dla testu Ilorazu Wiarygodności otrzymaliśmy $p_{value} = 0.2013662$, również > 0.05 , co wskazuje, że uwzględnienie zmiennej age nie powoduje istotnej zmiany w dopasowanym modelu.

3.1.2 b)

Dla zmiennej sex w teście Walda otrzymujemy $p_{value} = 9.0513757 \times 10^{-4} < 0.05$, co oznacza, że przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ odrzucamy hipotezę $H_0 : \beta_{sex} = 0$. Wskazuje to, że zmienna sex ma istotny wpływ na czas do zdarzenia w modelu AFT, tzn. istotnie przyspiesza lub spowalnia czas awarii względem poziomu bazowego.

Dla testu Ilorazu Wiarygodności otrzymaliśmy $p_{value} = 5.9586684 \times 10^{-4} < 0.05$, co wskazuje, że uwzględnienie zmiennej sex ma istotny wpływ na dopasowany model.

3.1.3 c)

W teście ilorazu wiarygodności otrzymano $p_{value} = 0.0021387 < 0.05$, więc przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ odrzucamy hipotezę zerową $H_0 : \beta_{ph.ecog=1} = \beta_{ph.ecog=2} = \beta_{ph.ecog=3} = 0$

(tj. brak wpływu poziomu ECOG na czas do zdarzenia względem poziomu bazowego, np. ECOG = 0). Oznacza to, że zmienna $ph.ecog$ jest istotna w przyjętym modelu AFT, a poziom sprawności (ECOG) istotnie różnicuje czas przeżycia pacjentów.

3.2 Zadanie 2

```
model_podst <- coxph(Surv(time, status) ~ age +  
                      as.factor(sex) +  
                      as.factor(ph.ecog) +  
                      ph.karno,  
                      data = dane,)
```

3.2.1 a)

Dla zmiennej age w teście Walda otrzymujemy $p_{value} = 0.1839029 > 0.05$, co oznacza, że przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy $H_0 : \beta_{age} = 0$, a więc brak jest dowodów na istotność tej zmiennej w modelu.

Dla testu Ilorazu Wiarygodności otrzymaliśmy $p_{value} = 0.1803751$, również > 0.05 , co wskazuje, że uwzględnienie zmiennej age nie powoduje istotnej zmiany dopasowanego modelu.

3.2.2 b)

Dla zmiennej sex w teście Walda otrzymujemy $p_{value} = 8.609901 \times 10^{-4} < 0.05$, co oznacza, że przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ odrzucamy hipotezę $H_0 : \beta_{sex} = 0$. Wskazuje to, że zmienna sex ma istotny wpływ na czas do zdarzenia w modelu AFT, tzn. istotnie przyspiesza lub spowalnia czas awarii względem poziomu bazowego.

Dla testu Ilorazu Wiarygodności otrzymaliśmy $p_{value} = 1 < 0.05$, co wskazuje, że uwzględnienie zmiennej sex istotnie poprawia dopasowanie modelu w porównaniu z modelem bez tej zmiennej. Zatem sex jest istotnym predyktorem w modelu przyspieszonego czasu awarii, wpływając na skalę czasu przeżycia względem poziomu bazowego.

3.2.3 c)

W teście ilorazu wiarygodności otrzymano $p_{value} = 0.0021387 < 0.05$, więc przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ odrzucamy hipotezę zerową $H_0 : \beta_{ph.ecog=1} = \beta_{ph.ecog=2} = \beta_{ph.ecog=3} = 0$

(tj. brak wpływu poziomu ECOG na czas do zdarzenia względem poziomu bazowego, np. ECOG = 0). Oznacza to, że zmienna $ph.ecog$ jest istotna w przyjętym modelu proporcjonalnych hazardów Coxa, a poziom sprawności (ECOG) istotnie różnicuje czas przeżycia/czas awarii pacjentów.

3.3 Zadanie 3

```
m <- survreg(Surv(time, status) ~ age +
               as.factor(sex) +
               as.factor(ph.ecog) +
               ph.karno,
               data = dane,
               dist = "weibull")
```

3.3.1 a)

KROK 1

```
age <- anova(update(m, . ~ . - age), m)[["Pr(>Chi)"]][2]
sex <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(sex)), m)[["Pr(>Chi)"]][2]
ph.ecog <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(ph.ecog)), m)[["Pr(>Chi)"]][2]
ph.karno <- anova(update(m, . ~ . - ph.karno), m)[["Pr(>Chi)"]][2]
```

Tabela 5: Wartości p testu IW (model AFT) - krok 1

age	sex	ph.ecog	ph.karno
0.201	0.001	0.002	0.133

Po przeanalizowaniu wyników zawartych w tabeli 5 zauważamy, że zmienna *age* ma najwyższe *p*-value spośród rozważanych zmiennych ($p = 0.2013662 > 0.05$), co oznacza brak podstaw do uznania jej wpływu za istotny statystycznie w przyjętym modelu. Z tego powodu usuwamy ją.

KROK 2

```
m <- survreg(Surv(time, status) ~ as.factor(sex) +
               as.factor(ph.ecog) +
               ph.karno,
               data = dane,
               dist = "weibull")

sex <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(sex)), m)[["Pr(>Chi)"]][2]
ph.ecog <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(ph.ecog)), m)[["Pr(>Chi)"]][2]
ph.karno <- anova(update(m, . ~ . - ph.karno), m)[["Pr(>Chi)"]][2]
```

Tabela 6: Wartości p testu IW (model AFT) - krok 2

sex	ph.ecog	ph.karno
0.001	0.002	0.176

Po przeanalizowaniu wyników zawartych w tabeli 6 zauważamy, że zmienna *ph.karno* ma najwyższe *p-value* spośród rozważanych zmiennych ($p = 0.1756437 > 0.05$), co oznacza brak podstaw do uznania jej wpływu za istotny statystycznie w przyjętym modelu. Z tego powodu usuwamy ją.

KROK 3

Tabela 7: Wartości p testu IW (model AFT) - krok 3

sex	ph.ecog
0.001	0

Z tabeli 7 można odczytać, że dla wszystkich pozostałych predyktorów otrzymano wartości $p < 0.05$, dlatego procedura selekcji (w oparciu o test IW) została zakończona i przyjęto model końcowy.

3.3.2 b)

```
m <- survreg(Surv(time, status) ~ age +
               as.factor(sex) +
               as.factor(ph.ecog) +
               ph.karno,
               data = dane,
               dist = "weibull")
```

KROK 1

Tabela 8: Wartości AIC (model AFT) - krok 1

wszystko	bez_age	bez_sex	bez_ph.ecoh	bez_ph.karno
2266.599	2266.231	2276.388	2275.252	2266.854

Obserwując wyniki zawarte w tabeli 8 zauważamy, że po usunięciu zmiennej *age* kryterium AIC przyjmuje najmniejszą wartość, uznajemy model bez *age* za lepiej dopasowany i dlatego *age* zostaje usunięta z modelu.

KROK 2

Tabela 9: Wartości AIC (model AFT) - krok 2

wszystko	bez_sex	bez_ph.ecoh	bez_ph.karno
2266.231	2275.834	2274.984	2266.065

Obserwując wyniki zawarte w tabeli 9 zauważamy, że po usunięciu zmiennej *ph.karno* kryterium AIC przyjmuje najmniejszą wartość, uznajemy model bez *ph.karno* za lepiej dopasowany i dlatego *ph.karno* zostaje usunięta z modelu.

KROK 3

Tabela 10: Wartości AIC (model AFT) - krok 3

wszystko	bez_sex	bez_ph.ecoh
2266.065	2274.735	2278.379

Analizując wyniki zawarte w tabeli 10 dochodzimy do wniosku, że usunięcie którejkolwiek z pozostałych zmiennych nie prowadzi do dalszego obniżenia wartości kryterium AIC, dlatego przyjmujemy uzyskany model jako model końcowy.

3.3.3 c)

Tutaj korzystamy z funkcji step, która automatyzuje proces przedstawiony powyżej.

```
m <- survreg(Surv(time, status) ~ age + as.factor(sex) +
  as.factor(ph.ecog) + ph.karno,
  data = dane,
  dist = "weibull")

n <- sum(dane$status)

m_bic <- step(m, direction = "backward", k = log(n), trace = 0)
```

Step	Df	Deviance	Resid. Df	Resid. Dev	AIC
	NA	NA	218	2250.599	2291.349
- age	1	1.632438	219	2252.231	2287.887
- ph.karno	1	1.834102	220	2254.065	2284.628

Według kryterium bayesowskiego (BIC) procedura selekcji prowadzi do takiego samego wniosku, jak w poprzednich metodach: w modelu końcowym pozostają zmienne *sex* oraz *ph.ecog*.

Eliminacja predyktorów przebiega analogicznie, jak w przypadku selekcji opartej na AIC, przy czym decyzje podejmowane są na podstawie minimalizacji wartości BIC. Najpierw został odrzucony *age*, a następnie *ph.karno*.

3.4 Zadanie 4

```
m <- coxph(Surv(time, status) ~ age +
             as.factor(sex) +
             as.factor(ph.ecog) +
             ph.karno,
             data = dane)
```

3.4.1 a)

KROK 1

```
age <- anova(update(m, . ~ . - age), m)$"Pr(>|Chi|)"[2]
sex <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(sex)), m)$"Pr(>|Chi|)"[2]
ph.ecog <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(ph.ecog)), m)$"Pr(>|Chi|)"[2]
ph.karno <- anova(update(m, . ~ . - ph.karno), m)$"Pr(>|Chi|)"[2]
```

Tabela 12: Wartości p testu IW (model Coxa) - krok 1

age	sex	ph.ecog	ph.karno
0.18	0.001	0.004	0.189

Po przeanalizowaniu wyników zawartych w tabeli 12 zauważamy, że zmienna *age* ma najwyższe *p*-value spośród rozważanych zmiennych ($p = 0.1803751 > 0.05$), co oznacza brak podstaw do uznania jej wpływu za istotny statystycznie w przyjętym modelu. Z tego powodu usuwamy ją.

KROK 2

```
m <- coxph(Surv(time, status) ~ as.factor(sex) +
             as.factor(ph.ecog) +
             ph.karno,
             data = dane)

sex <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(sex)), m)$"Pr(>|Chi|)"[2]
ph.ecog <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(ph.ecog)), m)$"Pr(>|Chi|)"[2]
ph.karno <- anova(update(m, . ~ . - ph.karno), m)$"Pr(>|Chi|)"[2]
```

Tabela 13: Wartości p testu IW (model Coxa) - krok 2

sex	ph.ecog	ph.karno
0.001	0.003	0.246

Po przeanalizowaniu wyników zawartych w tabeli 13 zauważamy, że zmienna *ph.karno* ma najwyższe *p*-value spośród rozważanych zmiennych ($p = 0.2455646 > 0.05$), co oznacza brak podstaw do uznania jej wpływu za istotny statystycznie w przyjętym modelu. Z tego powodu usuwamy ją.

KROK 3

```
m <- coxph(Surv(time, status) ~ as.factor(sex) + as.factor(ph.ecog),
             data = dane)

sex <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(sex)),      m)$"Pr(>|Chi|)"[2]
ph.ecog <- anova(update(m, . ~ . - as.factor(ph.ecog)), m)$"Pr(>|Chi|)"[2]
```

Tabela 14: Wartości p testu IW (model Coxa) - krok 3

sex	ph.ecog
0.001	0

Analizując wyniki zawarte w tabeli 14 zauważamy, że dla wszystkich pozostałych predyktów otrzymano wartości $p < 0.05$, dlatego procedura selekcji (w oparciu o test IW) została zakończona i przyjęto model końcowy.

3.4.2 b)

```
m <- coxph(Surv(time, status) ~ age +
            as.factor(sex) +
            as.factor(ph.ecog) +
            ph.karno,
            data = dane)
```

KROK 1

Tabela 15: Wartości AIC (model Coxa) - krok 1

wszystko	bez_age	bez_sex	bez_ph.ecoh	bez_ph.karno
1458.537	1458.332	1468.226	1466.05	1458.266

Obserwując wyniki zawarte w tabeli 15 zauważamy, że po usunięciu zmiennej *age* kryterium AIC przyjmuje najmniejszą wartość, uznajemy model bez *age* za lepiej dopasowany i dlatego *age* zostaje usunięta z modelu.

KROK 2

Tabela 16: Wartości AIC (model Coxa) - krok 2

wszystko	bez_sex	bez_ph.ecoh	bez_ph.karno
1458.332	1467.841	1465.936	1457.68

Obserwując wyniki zawarte w tabeli 16 zauważamy, że po usunięciu zmiennej *ph.karno* kryterium AIC przyjmuje najmniejszą wartość, uznajemy model bez *ph.karno* za lepiej dopasowany i dlatego *age* zostaje usunięta z modelu.

KROK 3

Tabela 17: Wartości AIC (model Coxa) - krok 3

wszystko	bez_sex	bez_ph.ecoh
1457.68	1466.447	1470.137

Analizując wyniki zawarte w tabeli 17 dochodzimy do wniosku, że usunięcie którejkolwiek z pozostałych zmiennych nie prowadzi do dalszego obniżenia wartości kryterium AIC, dlatego przyjmujemy uzyskany model jako model końcowy.

3.4.3 c)

Tutaj korzystamy z funkcji *step*, która automatyzuje proces przedstawiony powyżej.

```
m <- coxph(Surv(time, status) ~ age + as.factor(sex) + as.factor(ph.ecog) + ph.karno,
            data = dane)

n <- sum(dane$status)

m_bic <- step(m, direction = "backward", k = log(n), trace = 0)

kable(m_bic$anova)
```

Step	Df	Deviance	Resid. Df	Resid. Dev	AIC
	NA	NA	157	1446.537	1477.100
- ph.karno	1	1.728580	158	1448.266	1473.734
- age	1	1.414313	159	1449.680	1470.055

Według kryterium bayesowskiego (BIC) procedura selekcji prowadzi do takiego samego wniosku jak w poprzednich metodach: w modelu końcowym pozostają zmienne *sex* oraz *ph.ecog*. Eliminacja predyktorów przebiega analogicznie jak w przypadku selekcji opartej na AIC, przy czym decyzje podejmowane są na podstawie minimalizacji wartości BIC. Najpierw został odrzucony *age* a potem *ph.karno*