Sprawozdanie 2

Analiza przeżycia

Marta Stankiewicz (282244) Kacper Szmigielski (282255)

Spis treści

Spis rysunków

Spis tabel

1 Zadanie 1

Parametry zostały oszacowane zgodnie z przykładem zawartym na stronie 8 wykładu 9.

```
# parameter estimation (based on example in lecture)
model <- survreg(Surv(time, status)~age + as.factor(sex) + as.factor(ph.ecog) + ph.karn
                 data = dane,
                 dist = "weibull")

# params assignment
beta <- -summary(model)$coefficients[-1]
mu <- model$icoef[1]
sigma <- exp(model$icoef[2])
alpha <-  1/sigma
lambda <- exp(-mu*alpha)

wsp.AFT <- data.frame(
  "alpha" = alpha,
  "beta" = beta,
  "lambda" = lambda,
  "mu" = mu,
  "sigma" = sigma
)

rownames(wsp.AFT) <- c("age",
                       "sex",
                       "ph.ecog = 1",
                       "ph.ecog = 2",
                       "ph.ecog= 3",
                       "ph.karno")
```

2 Zadanie 2

Tabela 1: Współczynniki w modelu AFT

Zmienne	α	β	λ	μ	σ
age	1.32569	0.00860	0.00033	6.0431	0.75432
sex	1.32569	-0.40828	0.00033	6.0431	0.75432
ph.ecog = 1	1.32569	0.42156	0.00033	6.0431	0.75432
ph.ecog = 2	1.32569	0.92611	0.00033	6.0431	0.75432
ph.ecog= 3	1.32569	1.68724	0.00033	6.0431	0.75432
ph.karno	1.32569	0.01006	0.00033	6.0431	0.75432

Dlaczego tylko współczynniki β się różnią?

W pakiecie R funkcja, której parametry estymujemy za pomocą surveg ma postać $ln(X_z) = \mu - \beta^T + \sigma W$ gdzie $\beta^T = \beta_1 z_1 + ... + \beta_n z_n$

Jest to postać liniowa modelu AFT a α i λ pojawiają sie dopiero po przejściu do postaci ogólnej, sa one funkcjami parametrów μ oraz σ

gdzie

μ - przesunięcie (poziom log-czasu gdy z = 0)

$-\beta^T$ - iloczyn skalarny

σW - to jest część losowa

Przy tej konwencji $\beta > 0$ odejmujemy, więc czas się skraca

dla $\beta < 0$ jest analogicznie, odwrotnie

Więc do interpretacji potrzebujemy jedynie współczynników β

Tabela 2: Współczynniki β w modelu AFT

Zmienne	β
age	0.00860
sex	-0.40828
ph.ecog = 1	0.42156
ph.ecog = 2	0.92611
ph.ecog= 3	1.68724
ph.karno	0.01006

Z tabeli wynika, że ujemny współczynnik ma jedynie sex

sex jest zmienną typu faktor, więc ma poziomy referencyjne

Sprawdzamy poziomy referencyjen dla sex

```
## [1] "1" "2"
```

Czyli zmienną referencyjna jest 1

to oznacza, że sex = 2 wydłuża czas przeżycia w stosunku do pacjentów o wartości sex = 1

Kolejną zmienną typu factor jest ph.ecog

sprawdzamy jaki poziom jest referencyjny

```
## [1] "0" "1" "2" "3"
```

Poziom referencyjny to 0

współczynniki beta dla 1,2,3 wyszły > 0, to oznacza, że ph.ecog = 1,2,3 skraca czaś przeżycia w stosunku do ph.ecog = 0

Pozostałe zmienne są typu ciągłego oraz mają współczynnniki beta > 0, więc wzrost każdej z nich skraca czas przeżycia

3 Zadanie 3

W modelu przyspieszonego czasu życia (AFT) zakłada się, że funkcja przeżycia jednostki o wektorze charakterystyk z może zostać zapisana jako przeskalowanie czasu w bazowej funkcji przeżycia:

$$S(t \mid z) = S_0\Big(\exp\Big(\beta^\top z\Big)\ t\Big), \tag{1}$$

gdzie $S_0(t)$ oznacza funkcję przeżycia jednostki bazowej, tj. odpowiadającej zerowemu wektorowi charakterystyk.

Jeżeli bazowy czas przeżycia ma rozkład Weibulla z parametrami $\lambda > 0$ oraz $\alpha > 0$, to bazowa funkcja przeżycia dana jest wzorem

$$S_0(t) = \exp(-\lambda\, t^\alpha)\,, \qquad t \geq 0. \tag{2}$$

Podstawiając (2) do definicji (1), otrzymujemy funkcję przeżycia jednostki o wektorze charakterystyk z w postaci

$$S(t \mid z) = \exp\Big(-\lambda\ \exp\Big(\alpha\,\beta^\top z\Big)\ t^\alpha\Big)\,. \tag{3}$$

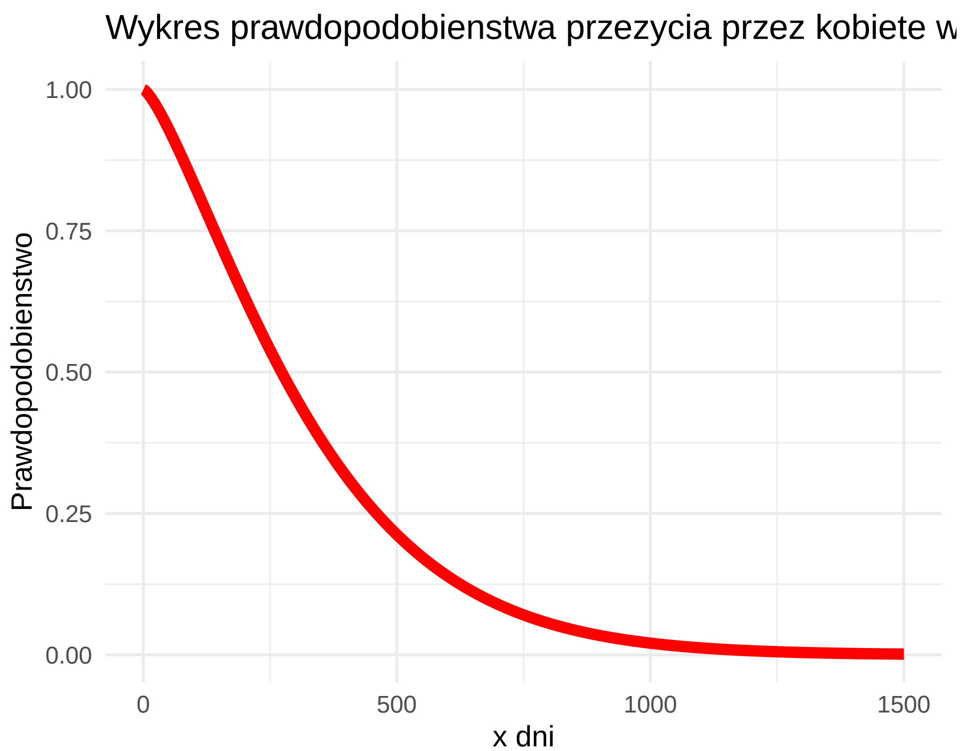
```r
pacjent <- c(70 - mean_wiek, 1, 1, 0, 0, 90 - mean_ph_karno)

S_0 <- function(x) exp(-lambda*(x^alpha))

S <- function (t) {
  exp(-lambda*exp(alpha*sum(beta*pacjent))*t^alpha)
}
```

Prawdopodobieństwo, że czas życia tej kobiety będzie większy niż 300 dni wynosi 0.4553973.

4 Zadanie 4



Rysunek 1: Wykres oszacowanej funkcji przeżycia - model AFT

5 Zadanie 5

Definicja 5.1. *Niech $h_0(x)$ będzie funkcją hazardu (o znanej postaci) obserwowalnej zmiennej losowej X, odpowiadającej jednostce o zerowym wektorze charakterystyk. Wówczas model, w którym funkcja hazardu jednostki o wektorze charakterystyk z ma postać*

$$h(x \mid z) = h_0(x) \exp\left(\beta^\top z\right), \tag{4}$$

nazywamy (parametrycznym) modelem proporcjonalnych hazardów (PH). Funkcję $h_0(x)$ nazywamy bazową funkcją hazardu.

Model proporcjonalnych hazardów charakteryzuje się prostą własnością interpretacyjną. Jeżeli z_1 oraz z_2 są dwoma wektorami charakterystyk, to na podstawie (4) otrzymujemy

$$\frac{h(x \mid z_1)}{h(x \mid z_2)} = \exp\left(\beta^\top (z_1 - z_2)\right), \tag{5}$$

co oznacza, że iloraz hazardów dwóch jednostek jest stały w czasie, a zatem hazardy są proporcjonalne.

```r
model <-  phreg(
  Surv(time, status)~age + as.factor(sex) + as.factor(ph.ecog) + ph.karno,
  data = dane,
  dist = "weibull"
  )

beta <- model$coefficients[-c(7,8)]
mu <- model$coefficients['log(scale)']
sigma <- exp(model$coefficients['log(shape)'])
lambda <- exp(-mu*sigma)
alpha <- sigma
```

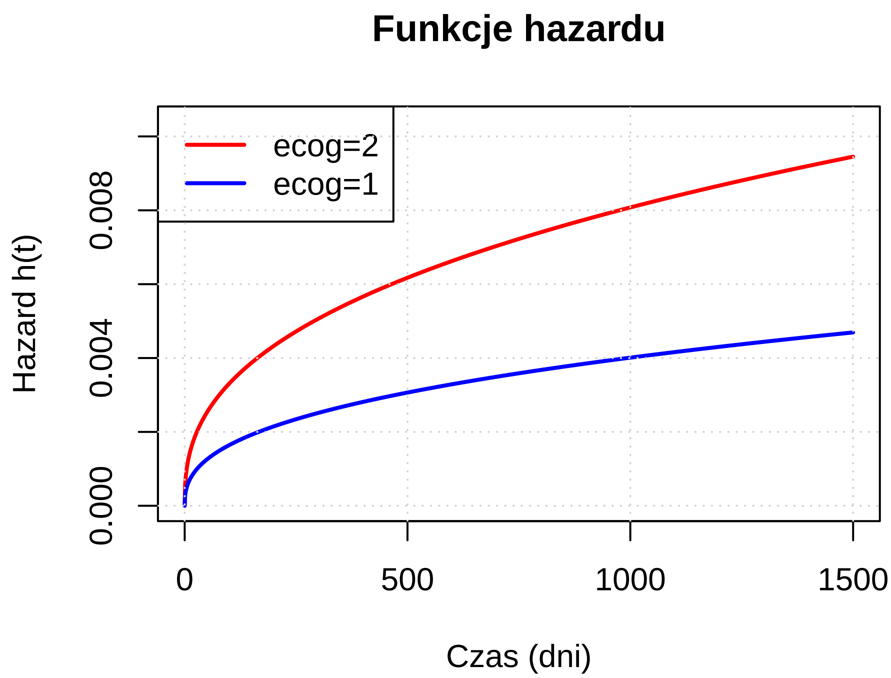
6 Zadanie 6

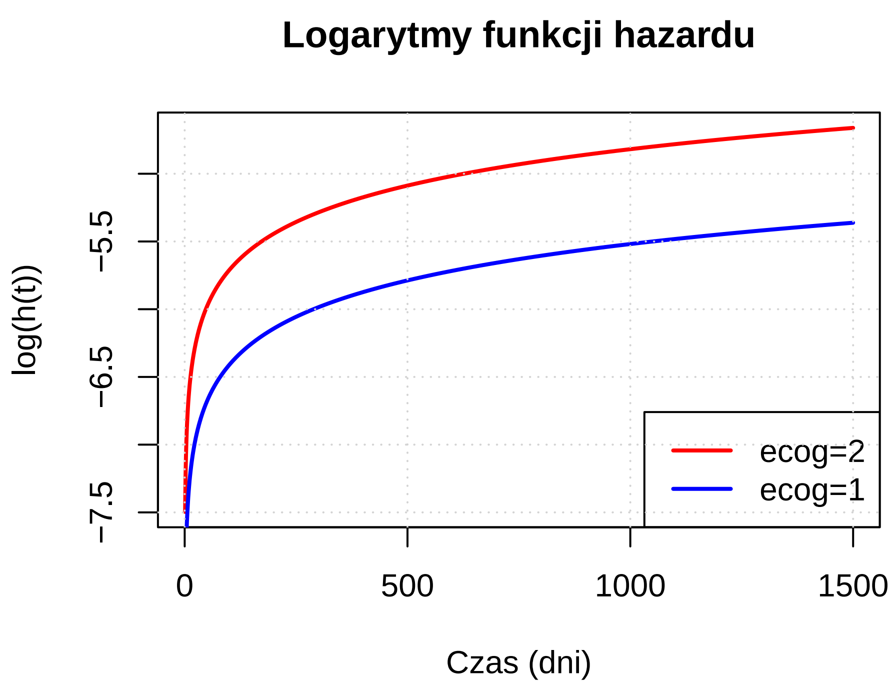
Tabela 3: Współczynniki w modelu PH

Zmienne	α	β	λ	μ	σ
age	1.38763	0.01194	0.00016	6.30118	1.38763
sex	1.38763	-0.56654	0.00016	6.30118	1.38763
ph.ecog = 1	1.38763	0.58497	0.00016	6.30118	1.38763
ph.ecog = 2	1.38763	1.28510	0.00016	6.30118	1.38763
ph.ecog= 3	1.38763	2.34127	0.00016	6.30118	1.38763
ph.karno	1.38763	0.01395	0.00016	6.30118	1.38763

Jak interpretować współczynniki

7 Zadanie 7

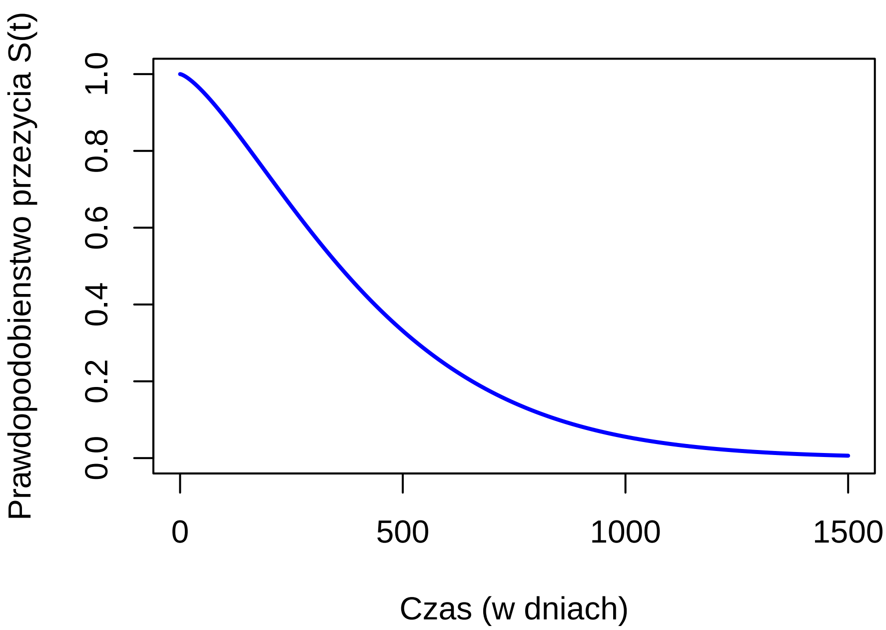

Funkcje hazardu
ecog=2
ecog=1
Hazard h(t)
0.000
0.004
0.008
0
500
1000
1500
Czas (dni)


Logarytmy funkcji hazardu
ecog=2
ecog=1
log(h(t))
−7.5
−6.5
−5.5
0
500
1000
1500
Czas (dni)

8 Zadanie 8

Prawdopodobieństwo, że czas życia kobiety w wieku 70 lat o charakterystyce $ph.ecog = 1$ i $ph.karno = 90$ będzie większy niż 300 dni wynosi 0.5806085. Natomiast prawdopodobieństwo, że czas życia kobiety w wieku 70 lat o charakterystyce $ph.ecog = 2$ i $ph.karno = 90$ będzie większy niż 300 dni wynosi 0.3345465. Porównując wynik dla kobiety o charakterystykach opisanych w punkcie (a) z tym otrzymanym w zadaniu 3 możemy zauważyć, że oszacowane prawdopodobieństwo jest większe, gdy korzystamy z modelu PH zamiast AFT.

9 Zadanie 9



Rysunek 2: Wykres oszacowanej funkcji przeżycia - model PH