МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Курсовая проект по дисциплине:

## «МЕХАНИКА»

### Проектирование механической модели катапульты

Факультет: Институт Интеллектуальной Робототехники
Группа: 23932

| Студенты: | Оценка |
|---|---|
| Бакумова Валерия Евгеньевна | |
| Карпачев Дмитрий Александрович | |

Преподаватель: *Сахнов А.Ю.*

НОВОСИБИРСК
2025

## 1. Задание на курсовую работу.

Критерии работоспособности механической модели требушета:

- Метание снаряда любой выбранной массы и формы на расстояние от 50 см до 80 см с отклонением от центральной оси основного направления полёта снаряда не более 30°.
- Нахождение модели во взведённом состоянии без приложения посторонних сил (без помощи человека)
- Механический спуск
- Целостность и устойчивость конструкции в течение 3-х попыток
- Снаряд должен быть сделан из мягкого упругого материала, либо покрыт материалом с такими свойствами.
- Масса снаряда: 0,05 кг

## 2. Эскиз модели.

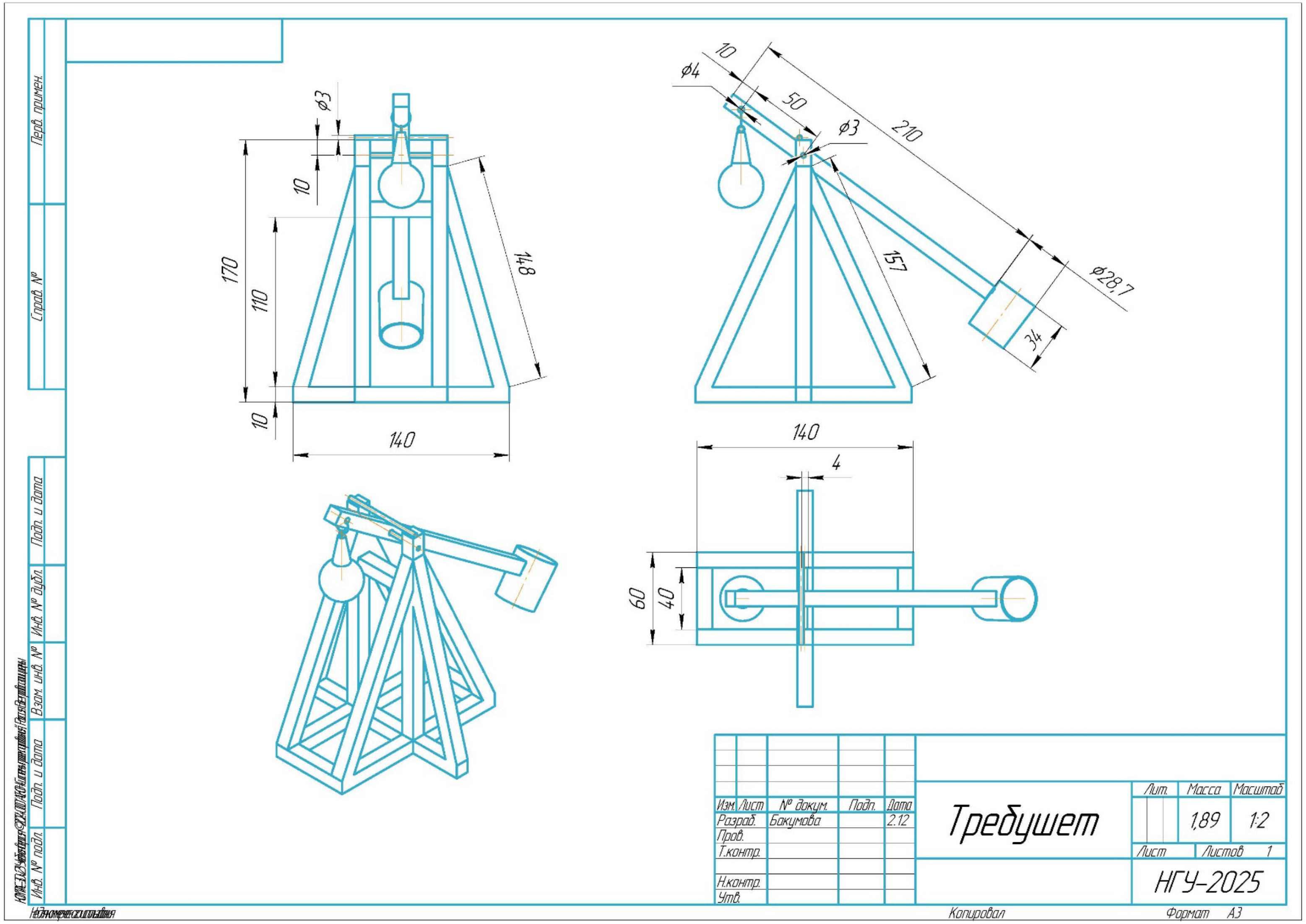


Рисунок 1 – Эскиз модели требушета

### 3. Динамический анализ механической модели (Расчёт разгона снаряда)

Таблица 1 – Параметры модели

| Параметр | Значение | Описание |
|---|---|---|
| $m_g$ | 0.08 кг | Масса груза |
| $m_s$ | 0.003 кг | Масса снаряда |
| $m_r$ | 0.006 кг | Масса рычага |
| $l_g$ | 0.055 м | Длина малого плеча (плеча груза) |
| $l_s$ | 0.15 м | Длина длинного плеча (плеча снаряда) |
| $\phi_0$ | $\frac{5\pi}{4} \approx 3.93$ рад | Начальное положение рычага (угол) |
| $\phi$ | 2 рад | Финальное положение рычага (угол вылета снаряда) |
| $h$ | 0.16 м | Высота расположения оси вращения рычага над землёй |
| $r$ | 0.008 м | Радиус снаряда |
| $J_{cm.g.}$ | $0.4 \cdot m_g \cdot 0.03^2 \approx 2.88 \times 10^{-5}$ $кг \cdot м^2$ | Собственная инерция груза как сферы радиуса 3 см |

Разгон снаряда происходит за счёт действия силы тяжести груза на малом плече. Для получения скорости воспользуемся вторым законом ньютона для вращательного движения:

$$\Sigma M = J\varepsilon$$

1) Расчёт суммы моментов сил:

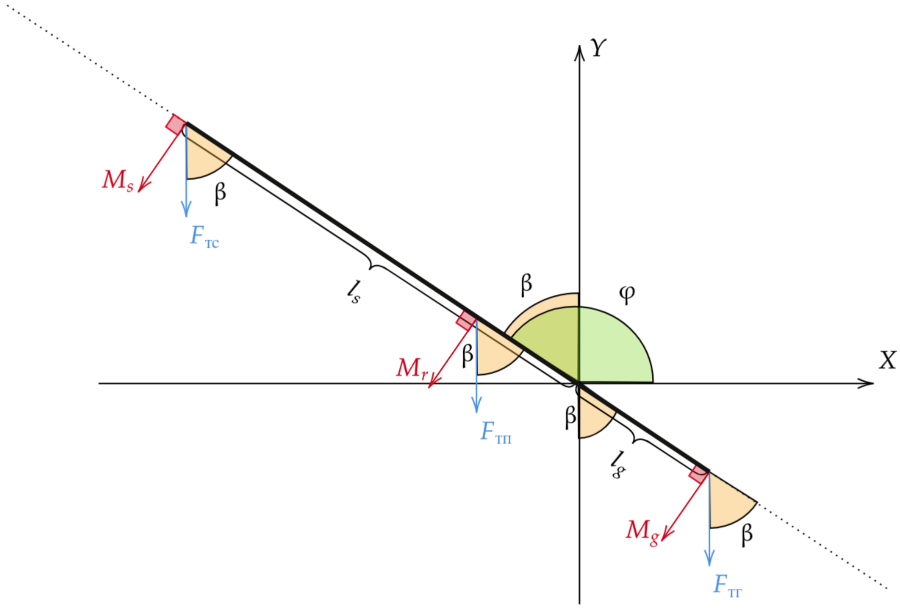


Рисунок 2 - Моменты от сил тяжести

Всего с модели 3 момента, которые напрямую влияют на движение рычага: момент груза, момент рычага и момент снаряда.

Угол между рычагом и вертикалью (угол приложения сил тяжести к рычагу) - $\beta = \phi - \frac{\pi}{2}$

Тогда формула момента для силы, действующей под углом для нашего случая, преобразуется в $M = F \cdot sin(\beta) \cdot l = -F \cdot cos(\phi) \cdot l$

Момент снаряда: $M_s = -g \cdot cos(\phi) \cdot m_s \cdot l_s$

Момент рычага: $M_r = -g \cdot cos(\phi) \cdot m_r \cdot \frac{l_s+l_g}{2}$

Момент груза: $M_g = g \cdot cos(\phi) \cdot m_g \cdot l_g$

Тогда:

$$\Sigma M = M_s + M_r - M_g = -g \cdot cos(\phi) \cdot (-m_g l_g + m_s l_s + m_r \frac{l_s + l_g}{2}) =$$

$$= g \cdot cos(\phi) \cdot (m_g l_g - l_s - m_r \frac{l_s + l_g}{2})$$

Пусть $M_0 = g \cdot (m_g l_g - m_s l_s - m_r \frac{l_s + l_g}{2}) \Rightarrow \Sigma M = cos(\phi) \cdot M_0$

2) Расчёт инерций:

Для снаряда (материальная точка): $J_s = m_s \cdot {l_s}^2$

Для рычага и груза воспользуемся Теоремой Штейнера для учёта их собственных инерций:

Груз: $J_g = J_{cm.g.} + m_g \cdot {l_g}^2$

Рычаг: $J_r = m_r \cdot \frac{(l_s + l_g)^2}{12} + m_r \cdot \frac{(l_s + l_g)^2}{4} = m_r \cdot \frac{(l_s + l_g)^2}{3}$

Итоговая инерция системы:

$$J = J_s + J_g + J_r = m_s {l_s}^2 + J_{cm.g.} + m_g {l_g}^2 + m_r \cdot \frac{(l_s + l_g)^2}{3}$$

3) Переходим к дифференциальному уравнению для нахождения связи $\omega$ и $\phi$:

Базовая форма: $\Sigma M(\phi) = J \frac{d^2\phi}{dt^2}$

Тождество: $\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\omega}{d\phi} \cdot \omega$

Тогда получаем дифференциальное уравнение:

$$\Sigma M(\phi) = J \cdot \frac{d\omega}{d\phi} \cdot \omega \Rightarrow \omega d\omega = \frac{\Sigma M}{J} d\phi$$

$$\int \omega d\omega = \frac{1}{J} \int \Sigma M d\phi + C \Rightarrow \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{J} \int M_0 \, cos(\phi) + C \Rightarrow \frac{\omega^2}{2} = \frac{M_0}{J} sin(\phi) + C + \frac{C'}{J}$$

$$C_1 = C + \frac{C'}{J}$$

$$\omega(\phi) = \pm \sqrt{\frac{2M_0}{J} sin(\phi) + 2C_1}$$

Найдём константы из начальных условий $\phi_0$ и $\omega_0$:

$$C_1 = \frac{{\omega_0}^2}{2} - \frac{M_0}{J} sin(\phi_0)$$

Тогда получаем

$$\omega(\phi) = \pm\sqrt{\omega_0{}^2 + \frac{2M_0}{J}(sin(\phi) - sin(\phi_0))}$$

Исходя из того, что система стартует из состояния покоя ($\omega_0 = 0$) и движение от $\phi_0$ до $\phi$ уменьшает угол получаем итоговую зависимость угловой скорости от текущего угла:

$$\omega(\phi) = -\sqrt{\frac{2M_0}{J}(sin(\phi) - sin(\phi_0))}$$

Получим вектор линейной скорости снаряда через векторное произведение $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$ :

$\underline{\omega} = [0, 0, \omega]$, $\underline{r} = [cos(\phi)l_s, sin(\phi)l_s, 0]$

Вычислив матричным методом данное произведение получим:

$$\underline{v} = [-\omega \cdot sin(\phi) \cdot l_s, \omega \cdot cos(\phi), 0]$$

Отсюда начальные скорости для снаряда при выпуске в $\phi$:

$$v_{ox} = -\omega \cdot sin(\phi) \cdot l_s$$

$v_{oy} = \omega \cdot cos(\phi) \cdot l_s$

4) Численный расчёт стартовой скорости снаряда:

Дано:

$l_s = 0.15\,м, l_g = 0.055\,м$ - длины плеч рычага

$m_s = 0.003\,кг, m_g = 0.08\,кг, m_r = 0.006\,кг$ - массы снаряда, груза и рычага

$\phi_0 \approx 3.93\,рад, \phi = 2\,рад$ - углы, задающие начальное и конечное положения рычага

$$g \approx 9.81\,м/с^2$$

Найти:

$v_{ox}, v_{oy}$ - ? м/с - скорости вдоль координатных осей в момент вылета снаряда

Решение:

Найдём константную часть суммы моментов:

$$M_0 = g \cdot (m_g l_g - m_s l_s - m_r \frac{l_s + l_g}{2})$$

$$= 9.81 \cdot (0.08 \cdot 0.055 - 0.003 \cdot 0.15 - 0.006 \cdot \frac{0.055 + 0.15}{2}) =$$

$$= 9.81 \cdot (44 \times 10^{-4} - 4.5 \times 10^{-4} - 6.15 \times 10^{-4}) = 9.81 \cdot 33.35 \times 10^{-4}$$

$$= 981 \cdot 3335 \times 10^{-8} \approx$$

$$\approx 0.0327\, Н \cdot м$$

Общая инерция системы:

$$J = m_s {l_s}^2 + J_{cm.g.} + m_g {l_g}^2 + m_r \cdot \frac{(l_s + l_g)^2}{3} = 0.003 \cdot 0.0225 + 2.88 \times 10^{-5} +$$

$$+0.08 \cdot 0.003025 + 0.006 \cdot \frac{0.042025}{3} \approx 0.000422\, кг \cdot м^2$$

Угловая скорость:

$$\omega = -\sqrt{\frac{2M_0}{J}(sin(\phi) - sin(\phi_0))} = -\sqrt{\frac{2 \cdot 0.0327}{0.000422}(sin(2) - sin(\frac{5\pi}{4}))}$$

$$= -\sqrt{155.714 \cdot (0.91 + 0.71)} =$$

$$= -\sqrt{155.714 \cdot 1.62} = -15.9\, м/с$$

Скорость вдоль осей:

$$v_{ox} = -\omega \cdot sin(\phi) \cdot l_s = 15.9 \cdot 0.91 \cdot 0.15 \approx 2.17\, м/с$$

$v_{oy} = \omega \cdot cos(\phi) \cdot l_s = -15.9 \cdot (-0.42) \cdot 0.15 \approx 1.002\, м/с$

Итого:

$$v_{ox} = 2.17\, м/с$$

$$v_{oy} = 1.002\, м/с$$

**4. Кинематический анализ механической модели (Расчёт траектории полёта снаряда)**

Дано:

$v_{ox}, v_{oy}$ - начальные скорости (из раздела номер 4)

$l_s = 0.15\ м$- длина плеча снаряда

$\phi = 2\ рад$ - угол наклона рычага в момент вылета снаряда

$h = 0.16\ м$ - высота крепления оси

$r = 0.008\ м$ - радиус снаряда

$$g \approx 9.81\ м/с^2$$

Найти:

$y(x)$ - ?

$T$ - ? с

$L$ - ? м

$L_x$ - ? м

Решение:

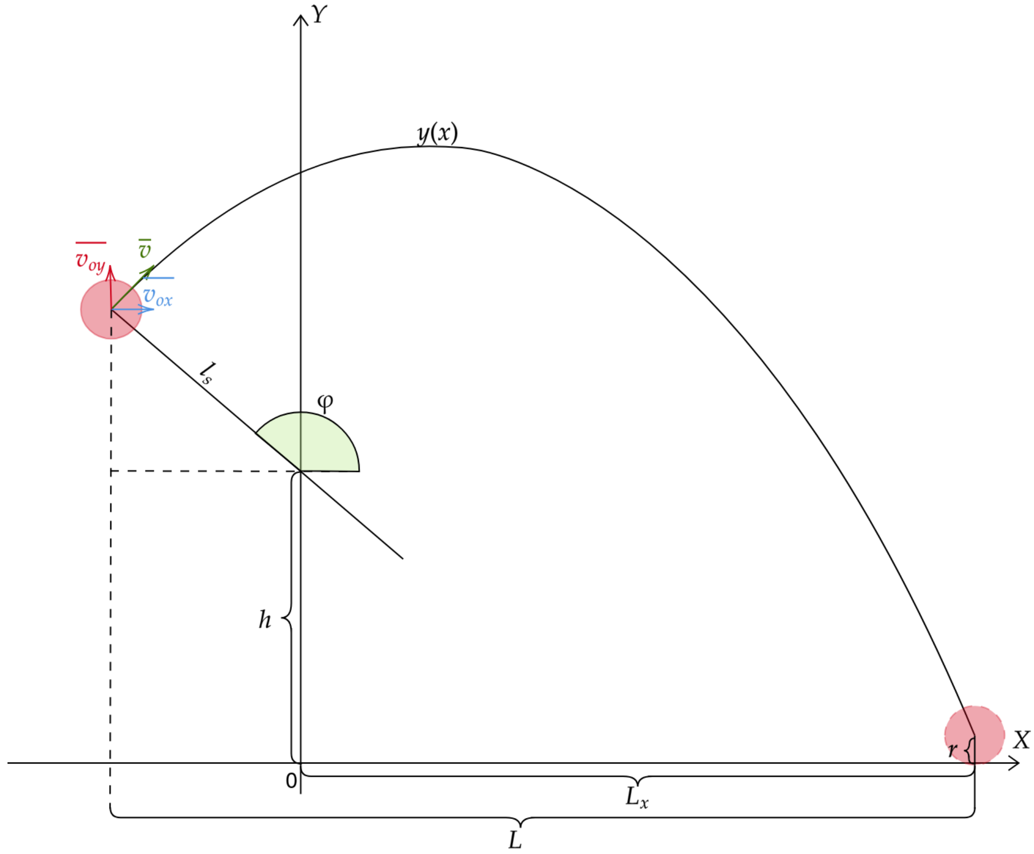


Рисунок 3 – График траектории полета снаряда

Стартовое положение снаряда в пространстве:

$$x_0 = l_s cos(\phi) = 0.15 \cdot (-0.42) = -0.063\ м$$

$$y_0 = h + l_s sin(\phi) = 0.16 + 0.15 \cdot 0.91 = 0.2965\ м$$

$x(t) = x_0 + v_{ox}t + \frac{at^2}{2}$ - равномерное движение по оси OX, следовательно a=0

$$x(t) = x_0 + v_{ox}t$$

$y(t) = y_0 + v_{oy}t - \frac{gt^2}{2}$ - равноускоренное падение по оси OY

Траектория полёта снаряда:

$$t = \frac{x\ -\ x_0}{v_{ox}}$$

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{oy}}{v_{ox}}(x - x_0) - \frac{g(x - x_0)^2}{2{v_{ox}}^2}$$

$$= 0.2965 + \frac{1.002}{2.17}(x + 0.063) - \frac{9.81 \cdot (x + 0.063)^2}{2 \cdot 2.17^2} =$$

$$= 0.325 + 0.462 \cdot x - 1.042 \cdot (x + 0.063)^2$$

Время и расстояние падения:

$$y_0 + v_{oy}t - \frac{gt^2}{2} = r$$

$$gt^2 - 2v_{oy}t - 2y_0 + 2r = 0$$

$$D = 4{v_{oy}}^2 - 4g(2r - 2y_0) = 4({v_{oy}}^2 - 2g(r - y_0))$$

$T = \frac{2v_{oy} + \sqrt{D}}{2g}$ - время полёта

$L = v_{ox} \cdot T$ - дальность полёта

$L_x = L + x_0$ - расстояние полёта относительно оси вращения рычага

Численный расчёт:

$$D = 4(1.004 - 2 \cdot 9.81 \cdot (0.008 - 0.2965)) \approx 26.66$$

$$T = \frac{2 \cdot 1.002 + \sqrt{26.66}}{2 \cdot 9.81} \approx 0.365\ с$$

$$L = 2.17 \cdot 0.365 \approx 0.79\ м$$

$$L_x = 0.79 - 0.063 = 0.727\ м$$

Итого:

$$y(x) = 0.325 + 0.462 \cdot x - 1.042 \cdot (x + 0.063)^2$$

$$T = 0.365\ с$$

$$L = 0.79\ м$$

$$L_x = 0.727\ м$$

**5. Обоснование устойчивости механической модели (Определение центра тяжести)**

Найти точку центра тяжести требушета.

1) Разбиваем сложную фигуру на простые.

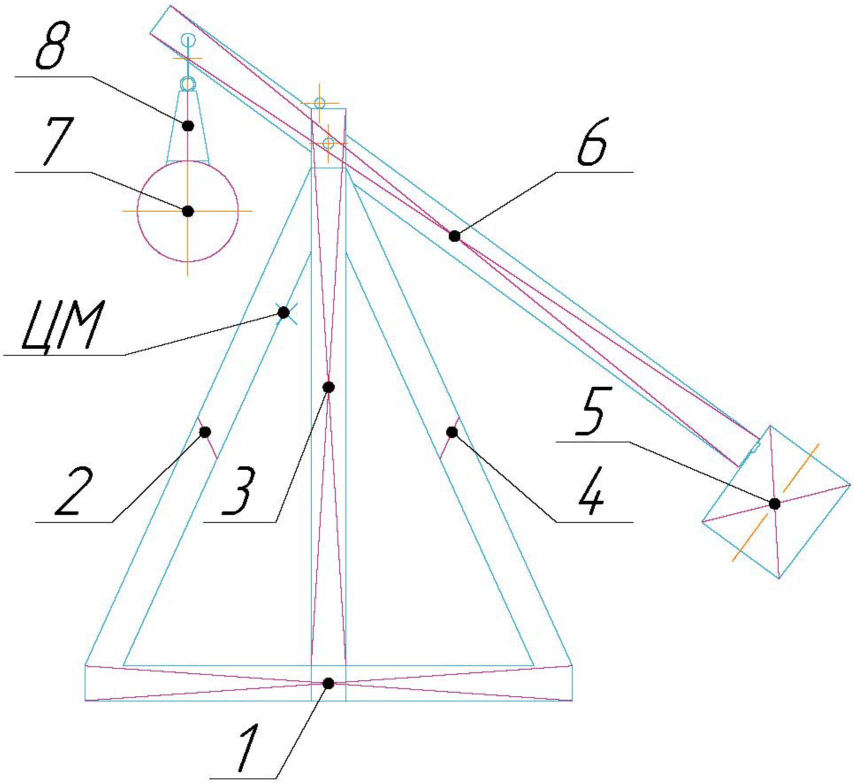


Рисунок 4 – Разбиение модели на простые фигуры.

2) Найдем координаты центров тяжести всех простых фигур:

$(X_1, Y_1) = (0.070, 0.005)$

$(X_2, Y_2) = (0.035,0.077)$

$(X_3, Y_3) = (0.070, 0.090)$

$(X_4, Y_4) = (0.106, 0.077)$

$(X_5, Y_5) = (0.198, 0.056)$

$(X_6, Y_6) = (0.106, 0.133)$

$(X_7, Y_7) = (0.030, 0.141)$

$(X_8, Y_8) = (0.030, 0.165)$

Рассчитаем площади всех простых фигур:

$A_1 = 0.140 \cdot 0.01 = 0.0014$ м$^2$

$A_2 = A_4 = 0.131 \cdot 0.01 + 0.022 \cdot 0.01 + 0.045 \cdot 0.01 = 0.00198$ м$^2$

$A_3 = 0.16 \cdot 0.01 = 0.0016$ м$^2$

$A_5 = 0.034 \cdot 0.029 = 0.000986$ м$^2$

$A_6 = 0.21 \cdot 0.01 = 0.0021$ м$^2$

$A_7 = \pi \cdot 0.15^2 \approx 0.0707$ м$^2$

$A_8 = \frac{(0.005+0.012)}{2} \cdot 0.02 = 0.00017$ м$^2$

3) Центр тяжести требушета считаем с учётом масс, потому что грузило сопоставимо по массе с каркасом, и без его вклада теоретический результат не совпадёт с экспериментальным.

$$A_{\text{тр}} = \sum_{i=1}^{6} A_i, \qquad X_{\text{тр}} = \frac{\sum_{i=1}^{6} A_i X_i}{A_{\text{тр}}}, \qquad Y_{\text{т}}\text{р} = \frac{\sum_{i=1}^{6} A_i Y_i}{A_{\text{тр}}}$$

$$\text{А}_{\text{тр}} = (1.4 + 1.98 + 1.6 + 1.98 + 0.986 + 2.1) \cdot 10^{-3} = 0.010046 \text{ м}^2$$

$$X_{\text{тр}} = \frac{(98 + 69.3 + 112 + 210 + 195 + 223) \cdot 10^{-6}}{1.0046 \cdot 10^{-2}} \approx 0.088 \text{ м}$$

$$Y_{\text{тр}} = \frac{(7 + 152 + 144 + 153 + 55 + 279) \cdot 10^{-6}}{1.0046 \cdot 10^{-2}} \approx 0.079 \text{ м}$$

$$A_{\text{г}} = A_7 + A_8, \qquad X_{\text{г}} = \frac{A_7 X_7 + A_8 X_8}{A_{\text{г}}}, \qquad Y\_\text{г} = \frac{A_7 Y_7 + A_8 Y_8}{A_{\text{г}}}$$

$$A_{\text{г}} = A7 + A8 = 0.0707 + 0.00017 = 0.07087 \text{ м}^2$$

$$X_{\text{г}} = \frac{(2.121 + 0.0051) \cdot 10^{-3}}{7.087 * 10^{-2}} \approx 0.030 \text{ м}$$

$$Y_{\text{г}} = \frac{(9.969 + 0.0281) \cdot 10^{-3}}{7.087 * 10^{-2}} \approx 0.141 \text{ м}$$

Масса требушета без грузила $M_{\text{тр}} = 75$ г. Масса грузила $M_{\text{г}} = 80$ г.

$$X_{\text{общ}} = \frac{\text{М}_{\text{т}}\text{р}X_{\text{т}}\text{р} + M_{\text{г}}X_{\text{г}}}{M_{\text{т}}\text{р} + M_{\text{г}}}, \qquad Y_{\text{общ}} = \frac{\text{М}_{\text{т}}\text{р}Y_{\text{т}}\text{р} + M_{\text{г}}Y_{\text{г}}}{M_{\text{т}}\text{р} + M_{\text{г}}}$$

$$X_{\text{общ}} = \frac{(75 \cdot 0.088 + 80 \cdot 0.030) \cdot 10^{-3}}{155 \cdot 10^{-3}} \approx 0.058 \text{ м}$$

$$Y\_\text{общ} = \frac{(75 \cdot 0.079 + 80 \cdot 0.141) \cdot 10^{-3}}{155 \cdot 10^{-3}} \approx 0.111 \text{ м}$$

**6. Сравнение фактических параметров механической модели с расчётными параметрами.**

1) Оценить точность расчета расстояния полета

Результаты 3 запусков:

$X_1 = 0.74$ м

$X_2 = 0.72$ м

$X_3 = 0.72$ м

$$X_{\text{факт}} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \frac{0.74 + 0.72 + 0.72}{3} \approx 0.726 \text{ м}$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta X_{\text{абс}} = X_{\text{факт}} - X_{\text{расч}}$$

$$\Delta X_{\text{абс}} = 0.726 - 0.727 = 0.001$$

Относительная погрешность:

$$\delta X_{\text{отн}} = \frac{\Delta X_{\text{абс}}}{X_{\text{факт}}} \cdot 100\%$$

$$\delta X_{\text{отн}} = \frac{0.001}{0.726} \cdot 100\% \approx 0.13\%$$

2) Оценить точность расчета центра тяжести

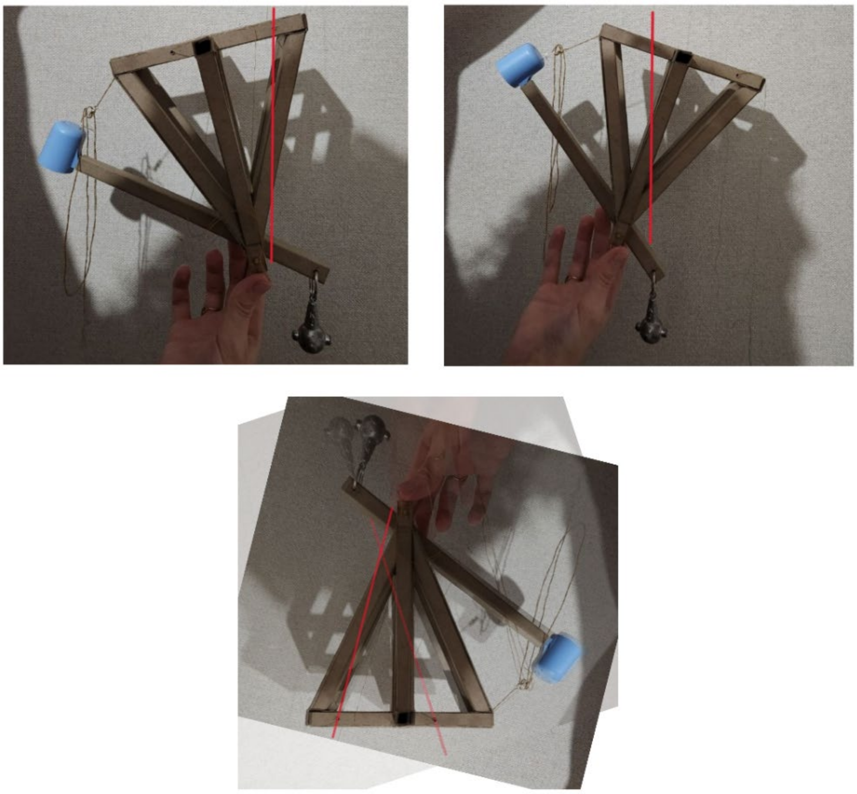

Рисунок 5 - Экспериментальное определение центра тяжести

Полученный фактический центр тяжести:

$$\left(X_{\text{факт}}, Y_{\text{факт}}\right) = (0.0549{,}0.134)$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta X_{\text{абс}} = X_{\text{факт}} - X_{\text{расч}}$$

$$\Delta X_{\text{абс}} = 0.0549 - 0.058 = -0{,}0031$$

$$\Delta Y_{\text{абс}} = Y_{\text{факт}} - Y_{\text{расч}}$$

$$\Delta Y_{\text{абс}} = 0.134 - 0.111 = 0.023$$

Относительная погрешность:

$$\delta X_{\text{отн}} = \frac{\Delta X_{\text{абс}}}{X_{\text{факт}}} \cdot 100\%$$

$$\delta X_{\text{отн}} = \frac{-0.0031}{0.0549} \cdot 100\% \approx 5.6\%$$

$$\delta Y_{\text{отн}} = \frac{\Delta Y_{\text{абс}}}{Y_{\text{факт}}} \cdot 100\%$$

$$\delta Y_{\text{отн}} = \frac{0.023}{0.134} \cdot 100\% \approx 17.1\%$$

Относительные погрешности определения координат центра тяжести составили около 5.6% по оси X и 17.1% по оси Y, что не превышает 20%, поэтому теоретическое и экспериментальное положения центра тяжести можно считать согласующимися, а расчёты — корректными. Более высокая погрешность по оси Y объясняется тем, что положение грузила и нити в эксперименте сильнее влияет именно на вертикальную координату: небольшие изменения длины подвеса, точки крепления или угла рычага заметно смещают центр масс по высоте, но почти не изменяют его проекцию на ось X. При этом относительная погрешность расчёта дальности полёта снаряда не превышает 0.13%, что подтверждает адекватность выбранной модели движения и в целом позволяет считать курсовой проект выполненным успешно.

# 7. Описание электронной модели механической системы

```
import numpy as np
import matplotlib
from scipy.integrate import solve_ivp
matplotlib.use('Agg')
import matplotlib.pyplot as plt

class const:
    # trebushet params
    h = 0.16
    l1, l2 = 0.055, 0.15
    l3 = (l1 + l2) / 2
    phi_start = 5 * np.pi / 4
    phi_end = 2
    r = 0.012
    mg = 80 / 1000
    ms = 3 / 1000
    mr = 6 / 1000
    Jg = 0.4 * mg * 0.03 ** 2

    # windage
    S = np.pi * r ** 2
    C = 0.47
    rho = 1.225

    # target zone
    d1, d2 = 0.5, 0.8

    # gravity constant
    g = 9.81


# shell's inertia
Js = const.ms * const.l2 ** 2
# lever's inertia
Jr = const.mr * (const.l1 + const.l2) ** 2 / 12 + const.mr * const.l3 ** 2
# load's inertia
Jg = const.Jg + const.mg * const.l1 ** 2
# common inertia
J = Js + Jr + Jg
print("Common inertia:", J, "kg*m^2")
# constant of moment
M0 = const.g * (const.mg * const.l1 - const.ms * const.l2 - const.mr * const.l3)
print("Constant of moment", M0, "H")
# rotation speed by the angle
w = -np.sqrt(2 * M0 / J * (np.sin(const.phi_end) - np.sin(const.phi_start)))
print("Rotation speed:", w, "rad/s")
# vector of velocity by the coordinates
vox = -const.l2 * np.sin(const.phi_end) * w
```

```
voy = const.l2 * np.cos(const.phi_end) * w
print("Velosity X:", vox, "m/s")
print("Velocity Y:", voy, "m/s")
# state of rest position of the lever
A0 = (const.l2 * np.cos(const.phi_start), const.h + const.l2 * np.sin(const.phi_start))
B0 = (-const.l1 * np.cos(const.phi_start), const.h - const.l1 * np.sin(const.phi_start))

# start position of the level
A = (const.l2 * np.cos(const.phi_end), const.h + const.l2 * np.sin(const.phi_end))
x0, y0 = A
B = (-const.l1 * np.cos(const.phi_end), const.h - const.l1 * np.sin(const.phi_end))
print("Start x:", x0, "m")
print("Start y:", y0, "m")

def f(x):
    '''
    Trajectory of shell's movement
    '''
    return y0 + voy / vox * (x - x0) - const.g * (x - x0) ** 2 / (2 * vox ** 2)


# calculating shot distance
D = 4 * (voy ** 2 + 2 * const.g * (y0 - const.r))
T = (2 * voy + np.sqrt(D)) / (2 * const.g)
print("Flying time:", T, "s")
L = x0 + vox * T
print("Distance", L, "m")
Ly = f(L)


def projectile_motion(t, state, m, g, rho, C_d, A):
    '''
    Equation of motion with air resistance
    '''
    _, vx, _, vy = state
    v = np.sqrt(vx ** 2 + vy ** 2)
    # power of air resistance
    F_d = 0.5 * rho * C_d * A * v ** 2

    dxdt = vx
    dvxdt = - (F_d / m) * (vx / v) if v > 0 else 0
    dydt = vy
    dvydt = -g - (F_d / m) * (vy / v) if v > 0 else -g
    return [dxdt, dvxdt, dydt, dvydt]
```

```
# intial state of movement
initial_state = [A[0], vox, A[1], voy]

# 10 seconds to move
t_span = (0, 10)
t_eval = np.linspace(0, 10, 1000)

# solving the equation
solution = solve_ivp(
    projectile_motion,
    t_span,
    initial_state,
    args=(const.ms, const.g, const.rho, const.C, const.S),
    t_eval=t_eval,
    method='RK45',
    rtol=1e-6,
    atol=1e-9
)

# result trajectory with air resistance
x = solution.y[0]
y = solution.y[2]

# searching final point
ground_idx = None
for i in range(1, len(y)):
    if y[i] <= const.r:
        x_ground = x[i-1] + (const.r - y[i-1]) * (x[i] - x[i-1]) / (y[i] - y[i-1])
        y_ground = const.r

        x = np.append(x[:i], x_ground)
        y = np.append(y[:i], y_ground)
        ground_idx = i
        break

if ground_idx is None:
    print("Warning: Projectile didn't hit the ground within simulation time")
    ground_idx = -1

print("Distance with air resistance:", x[-1], "m")


# plotting
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))

# target zone
ax.axvspan(const.d1, const.d2, alpha=0.3, color='#cba6f7', label="Target zone")

# trajectories
X = np.linspace(x0, L,                    300)
ax.plot(X, f(X), "g", linewidth=2, label="Trajectory of movement")
ax.plot(x, y, "r--", linewidth=1, alpha=0.7, label="Real trajectory
```

```
of
movement")

# lever
ax.plot([A0[0], B0[0]], [A0[1], B0[1]], "r--o", alpha=0.4,
label="Start position")
ax.plot([A[0], B[0]], [A[1], B[1]], "r-o", label="Shot position")

# final position
ax.axvline(L, color="k", linestyle="--", label=f"Final distance =
{L:.4f}m")
ax.axvline(x[-1], color="k", linestyle="--", linewidth=1, label=f"Final real
distance = {x[-1]:.4f}m")

# adding circles
circle_end = plt.Circle((L, Ly), radius=const.r, color='green', alpha=0.5, fill=True,
label="Final shell's position")
circle_real = plt.Circle((x[-1], y[-1]), radius=const.r, color='red', alpha=0.3, fill=True,
label="Final shell's real position")
circle_start = plt.Circle(A, radius=const.r, linestyle="--", color='blue', alpha=0.3,
fill=True)
circle0 = plt.Circle(A0, radius=const.r, linestyle="--", color='blue', alpha=0.2,
fill=True)
ax.add_patch(circle_end)
ax.add_patch(circle_real)
ax.add_patch(circle_start)
ax.add_patch(circle0)

ax.axis("scaled")
ax.set_ylim(bottom=0)
ax.legend()

plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.savefig("trajectory.png", dpi=200)
```

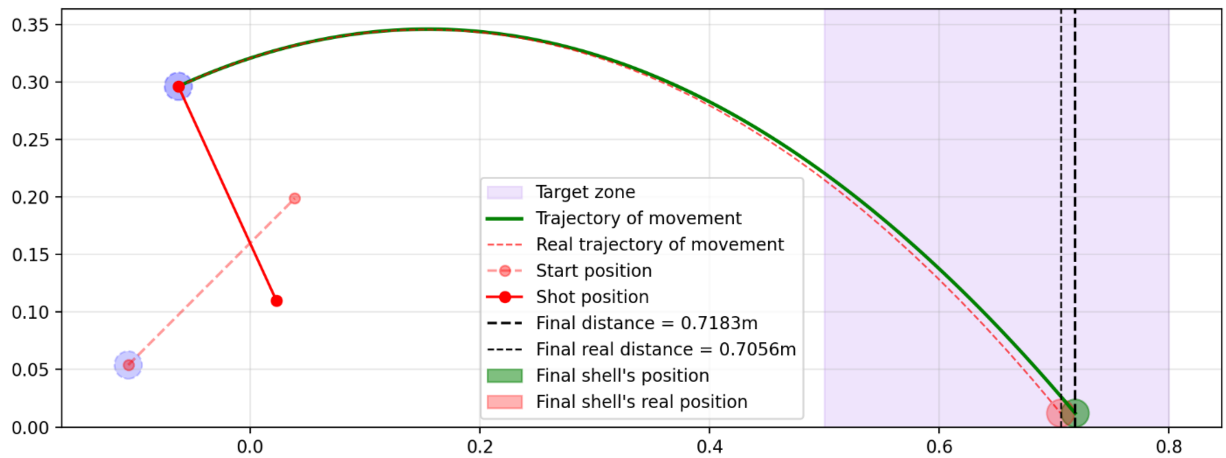


Рисунок 6 - Рассчитанная в коде траектория полета

## 8. Список литературы

1. Сахнов, А. Ю. Методические пособие к выполнению курсовой работы по дисциплине "Механика" / А. Ю. Сахнов ; Новосибирский государственный университет. – Новосибирск, 2025. – 6 с.

2. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. – 36-е изд., исправл. / Под ред. Н. В. Бутенина, А. И. Лурье, Д. Р. Меркина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 448 с.

3. Правила оформления курсовых работ и ВКР [Электронный ресурс] / НГУ. – URL: https://www.nsu.ru/n/humanities-institute/students/oform-vkr/ (дата обращения: 09.12.2025)

4. Matplotlib: Visualization with Python [Электронный ресурс]. – URL: https://matplotlib.org/stable/users/index.html (дата обращения: 09.12.2025).

5. NumPy User Guide [Электронный ресурс]. – URL: https://numpy.org/doc/stable/user/index.html (дата обращения: 09.12.2025).

6. Python Documentation [Электронный ресурс]. – URL: https://docs.python.org/3/ (дата обращения: 09.12.2025).