

# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

### Wozu Integrieren?

### Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal abtasten, um es eindeutig rekonstruieren zu können?

## Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal abtasten, um es eindeutig rekonstruieren zu können?
- Welchen Anteil hat eine bestimmte Frequenz in einem Signal?

## Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal abtasten, um es eindeutig rekonstruieren zu können?
- Welchen Anteil hat eine bestimmte Frequenz in einem Signal?
- Welchen Abstand hat eine approximierte Funktion zur original Funktion?

### Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal abtasten, um es eindeutig rekonstruieren zu können?
- Welchen Anteil hat eine bestimmte Frequenz in einem Signal?
- Welchen Abstand hat eine approximierte Funktion zur original Funktion?
- Filtern von Signalen/Bildern.

## Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal abtasten, um es eindeutig rekonstruieren zu können?
- Welchen Anteil hat eine bestimmte Frequenz in einem Signal?
- Welchen Abstand hat eine approximierte Funktion zur original Funktion?
- Filtern von Signalen/Bildern.
- Probleme so umformulieren, dass man sie besser lösen kann.

### Wie kann man Inhalte messen?

Archimedes approximierte den Flächeninhalt einer Kreisscheibe durch Vielecke, deren Flächeninhalt man leicht berechnen kann (250 v. Chr.).

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

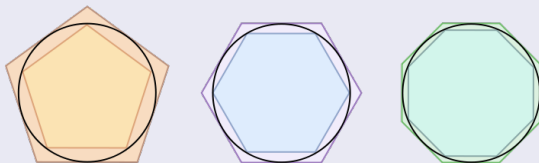


Figure: Quelle: Wikipedia:

[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes\\_pi.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg)



### Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.

### Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.
- Mit Hilfe eines Grenzwertprozesses konstruiert man eine beliebig genaue Überdeckung.

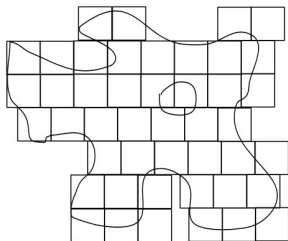


Figure: Grobe Überdeckung

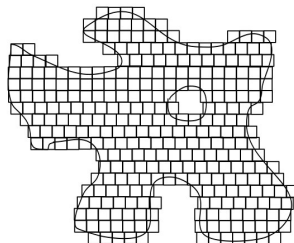


Figure: Feinere Überdeckung

### Quader

Für offene Intervalle  $(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$  mit  $a_i \leq b_i$  nennen wir

$$I := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

einen  $n$ -dimensionalen Quader und

$$\bar{I} := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

seinen Abschluss. Wir definieren das Volumen

$$\text{vol}(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

### Quader

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller  $n$ -dimensionalen Quader.

### Hüllquader

Für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir eine Menge von Quadern  $\{I_j \mid I_j \in \mathbb{I}(n)\}$  mit  $A \subset \bigcup_j I_j$  als Hüllquader für  $A$ .

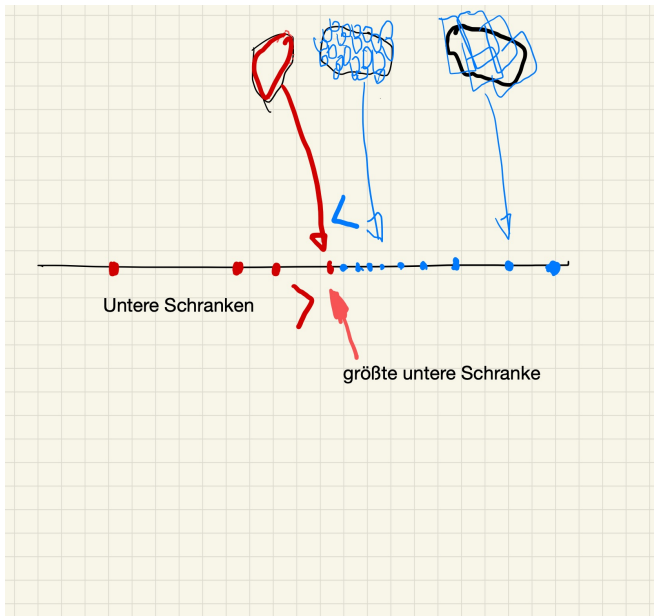
### Lebesguesche äußere Maß

Für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(I_j) ; I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$$

### Infimum

Größte untere Schranke.



### Monotonie

Für  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$  ist  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

### Beweis

Da  $A \subset B$  Teilmenge ist, sind Hüllquader von  $B$  auch Hüllquader von  $A$  und damit  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

### $\sigma$ -subadditivität

Sei  $A_j \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j)$$



Für jedes  $A_j$  und  $\epsilon > 0$  können wir eine geeignete Überdeckung  $A_j \subset \bigcup_k K_{j,k}$  mit Hüllquadraten  $K_{j,k}$  finden, so dass  $\sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \mu(A) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$ . Da  $\bigcup_j A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k K_{j,k}$  eine Überdeckung mit Hüllquadraten ist, folgt

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup A_j\right) &\leq \sum_j \sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \left(\sum_j \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\right) \\ &= \left(\sum_j \mu(A_j)\right) + \epsilon\end{aligned}$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges  $\epsilon > 0$  gilt, folgt die Behauptung.