Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y, z, t) = x^2 + z \cdot t \cdot e^y$$

a) Berechnen Sie den Gradienten im allgemeinen Punkt $(x, y, z, t)^t$.

b) Berechnen Sie den Gradienten im Punkt $(1, 0, 1, 2)^t$.

c) Berechnen Sie die Hessematrix $f''(x, y, z, t)$ für einen allgemeinen Punkt $(x, y, z, t)^t$.

d) Berechnen Sie die Hessematrix $f''(1, 0, 1, 2)$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = x^2 - 2y^2$$

die Richtungsableitung am Punkt $(1, 2)$ in Richtung $h := (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Aufgabe 3

Warum ist die Funktion $f(x) = e^{|x|}$ nicht differenzierbar in 0?

Aufgabe 4

Gegeben ist der Bereich $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ und die Funktion

$$f : A \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = \frac{e^x}{y} \ .$$

Berechnen Sie die Taylorreihe zweiter Ordnung für beliebige Punkte $(a_1, a_2) \in A$.

Aufgabe 5

Gegeben ist der Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma(t) = (cos(t), sin(t))^t$$

und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$ mit und ohne Baby Kettenregel.

Aufgabe 6

Berechnen Sie für die Funktionen

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ &f(x, y, z) = 2x^2 + y^4 + 2z^2 + 4yz \end{aligned}$$

die kritischen Punkte und untersuchen Sie diese auf lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte.

Aufgabe 7

Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ &f(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ u^2 + v^2 - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ &g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \ . \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Gradienten von $g \circ f$.