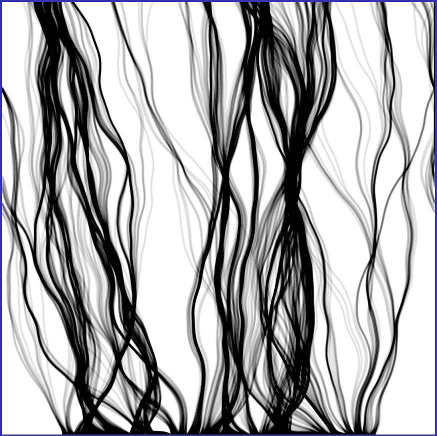
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Wozu Integrieren?

Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal Abtasten, um es eindeutig zu rekonstruieren?

Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal Abtasten, um es eindeutig zu rekonstruieren?
- Welchen Anteil hat eine bestimmte Frequenz in einem Signal?

Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal Abtasten, um es eindeutig zu rekonstruieren?
- Welchen Anteil hat eine bestimmte Frequenz in einem Signal?
- Welchen Abstand hat eine approximierte Funktion zum Original?

Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal Abtasten, um es eindeutig zu rekonstruieren?
- Welchen Anteil hat eine bestimmte Frequenz in einem Signal?
- Welchen Abstand hat eine approximierte Funktion zum Original?
- Filtern von Signalen/Bildern.

Wozu Integrieren?

- Wie oft muss man ein periodisches Signal Abtasten, um es eindeutig zu rekonstruieren?
- Welchen Anteil hat eine bestimmte Frequenz in einem Signal?
- Welchen Abstand hat eine approximierte Funktion zum Original?
- Filtern von Signalen/Bildern.
- Probleme so umformulieren, dass man sie besser lösen kann.

Wie kann man Inhalte messen?

Archimedes approximierte den Flächeninhalt einer Kreisscheibe durch Vielecke, deren Flächeninhalt man leicht berechnen kann (250 v. Chr.).

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

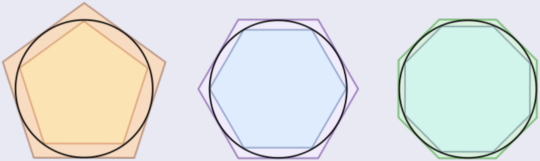


Figure: Quelle: Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.
- Mit Hilfe eines Grenzwertprozesses konstruiert man eine beliebig genaue Überdeckung.

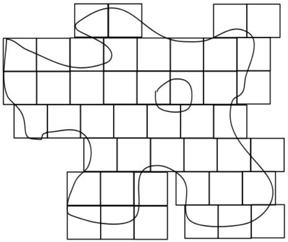


Figure: Grobe Überdeckung

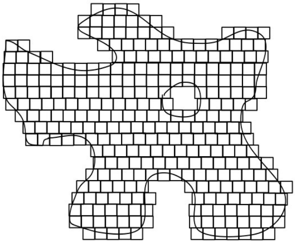


Figure: Feinere Überdeckung

Quader

Für offene Intervalle $(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ nennen wir

$$I := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

einen *n*-dimensionalen Quader und

$$\overline{I} := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

seinen Abschluss. Wir definieren das Volumen

$$\mathrm{vol}(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \ .$$

Quader

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n-dimensionalen Quader.

Hüllquader

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir eine Menge von Quadern $\{I_j \mid I_j \in \mathbf{I}(n)\}$ mit $A \subset \bigcup_j I_j$ als Hüllquader für A.

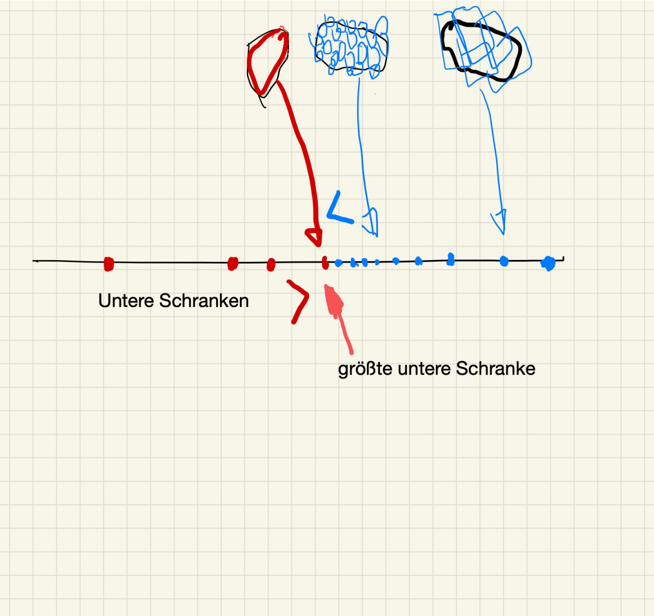
Lebesguesche äußere Maß

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch

$$\mu(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_j)\ ;\ I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}$$

Infimum

Größte untere Schranke.


Untere Schranken
größte untere Schranke

Monotonie

Für $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mu(A) \leq B$.

Beweis

Da $A \subset B$ Teilmenge ist, sind Hüllquader von B auch Hüllquader von A und damit $\mu(A) \leq \mu(B)$.

σ-subadditivität

Sei $A_j \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{j}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Für jedes A_j und $\epsilon > 0$ können wir eine geeignete Überdeckung $A_j \subset \bigcup_k K_{j,k}$ mit Hüllquadern $K_{j,k}$ finden, so dass $\sum_k \mathrm{vol}(K_{j,k}) \leq \mu(A) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Da $\bigcup_j A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k K_{j,k}$ eine Überdeckung mit Hüllquadern ist, folgt

$$\mu\left(\bigcup A_j\right) \leq \sum_j \sum_k \mathrm{vol}(K_{j,k}) \leq (\sum_j \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}})$$
$$= (\sum_j \mu(A_j)) + \epsilon$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.