Stochastik für Informatiker

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

σ-Algebra

Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen. $\mathcal{A}$ heißt σ-Algebra falls gilt:

$$(i)\ \Omega \subset \mathcal{A}$$
$$(ii)\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$
$$(iii)\ A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$$

$(A^c = \Omega - A)$

Axiome von Kolmogorov

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bestehend aus der Grundmenge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und einer Abbildung $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$

$$(i)\ P(\Omega) = 1$$

$$(ii)\ P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Die Elemente von Ω werden elementare Ereignisse und die von $\mathcal{A}$ Ereignisse genannt. Mengen mit $P(M) = 0$ werden Nullmengen genannt.

Beispiel

Ω endlich, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(A) := \frac{\#A}{\#\Omega}$.

Zufallsvariable

Ein Zufallsvariable ist eine Abbildung $X : \Omega \to R$ zwischen einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und einer σ-Algebra $(R, \mathcal{B})$, so dass

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \text{ für alle } B \in \mathcal{B}$$

gilt. (Urbilder von Ereignissen sind Ereignisse).

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Lebesgue Maß

Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ nennen wir (a, b) einen Quader und definiere sein Volumen durch

$$\mu(a, b) := \prod_i b_i - a_i \text{ falls } a_i < b_i \text{ und } 0 \text{ sonst}$$

Mit $\mathbb{I}^n$ bezeichnen wir die Menge der Quader im $\mathbb{R}^n$.

Lebesgue Maß

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ definiere

$$\mu(A) := \inf\left\{ \sum_j \mu(I_j) \mid A \subset \bigcup_j I_j;\ I_j \in \mathbb{I}^n \right\}$$

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Lebesgue Maß

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue messbar, falls

$$\mu(D) \geq \mu(A \cap D) + \mu(A^c \cap D)$$

für alle $D \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Grob gesprochen bedeutet dies, dass A von innen und von aussen mit Quadern approximiert werden kann und diese Approximationen übereinstimmen.

Lebesgue Maß

Die Menge der Lebesgue messbaren Mengen bilden eine σ-Algebra und es gilt

$$(ii)\ \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Offene Mengen im $\mathbb{R}^n$

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für jeden Punkt $x \in U$ ein Radius $\epsilon > 0$ existiert, so dass der Ball $B_\epsilon(x)$ in U enthalten ist, also $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt.

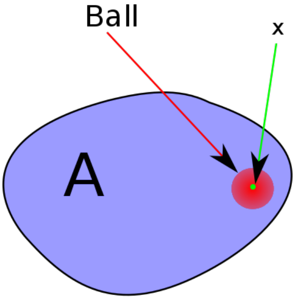

Figure: Quelle: Wikipedia

Borelle'sche σ-Algebra

Borellsche σ-Algebra

Die Borel'sche σ-Algebra über $\mathbb{R}^n$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen $\mathcal{U}$ enthält, also

$$A_\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n);\ \mathcal{U} \subset \mathcal{A},\ \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$$

Borellsche σ-Algebra existiert

Die Borel'sche σ-Algebra existiert, da die Potenzmenge eine σ-Algebra ist.

Borellsche σ-Algebra is Lebesgue messbar

Die Borel'sche σ-Algebra ist in der σ-Algebra der Lebesgue messbaren Mengen enthalten.

Indikatorfunktion

Für eine Menge $A \in \mathcal{A}$ einer σ-Algebra heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in A \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

die Indikatorfunktion der Menge A.

Inegration

Integration

Für eine reelle Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert eine endliche Reihe $s_n(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot 1_{A_j}$, so dass $s_n(x) \leq X(x)$ und $\lim_{n\to\infty} s_n(x) \to X(x)$ für alle $x \in \Omega$. Man nennt s_n auch einfache Funktion. Für eine einfache Funktion definiere

$$\int_\Omega s_n(x)\ d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i\ \mu(A_i)$$

Integration

Für eine positive, reelle Zufallsvariable $X : \Omega \to [0,\infty]$ definiere

$$\int_\Omega X\ d\mu = \sup(\int_\Omega s_n(x)\ d\mu; s_n(x) \text{ einfach mit } s_n(x) \leq X(x))$$

Integration

Für allgemeines X zerlege $X = X^+ - X^-$ mit $X^+ := \max(0, X)$ und $X^- := -min(0, X)$ und definiere

$$\int_\Omega X(x)\; d\mu = \int_\Omega X^+(x)\; d\mu - \int_\Omega X^-(x)\; d\mu$$

Inegration

Integration

$$\int_\Omega 1_A \, d\mu = \mu(A)$$

Inegration

Satz von Fubuni

Ist $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ messbar und integrierbar, so ist

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\, d(x, y) = \int_Y \int_X f(x, y)\, dx\, dy$$

Beispiel

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Kreisscheibe).
$A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$
$A_y = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$

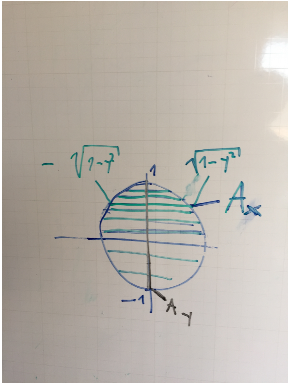

Figure: Scheibenmengen

Beispiel

$$\mu(A) = \int_A 1 \; d(x,y) \; := \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \; dx \right) \; dy$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2} \; dy$$

$$(substitution\ y = sin(u)) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 \; du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$