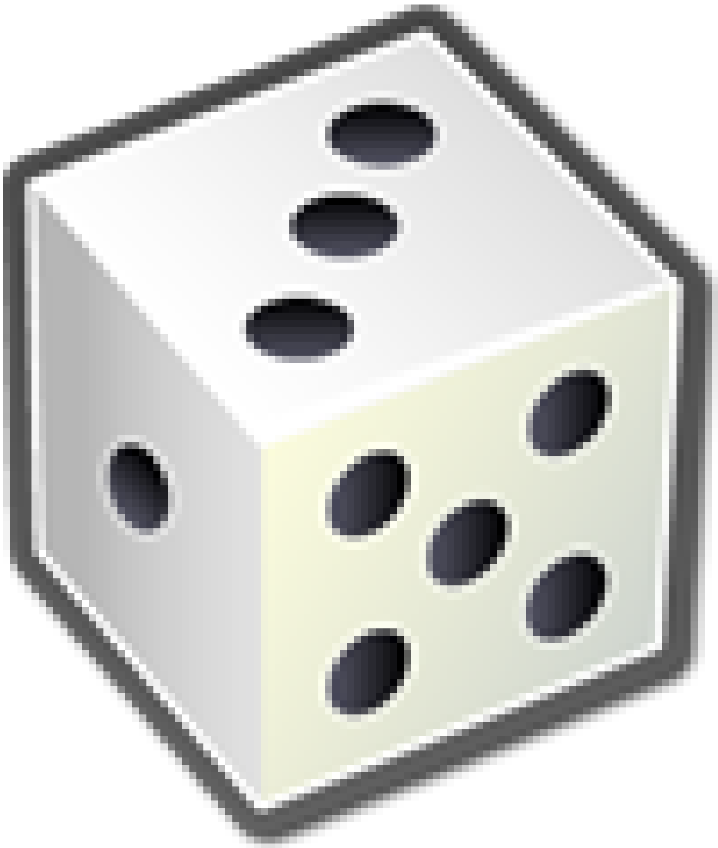
Stochastik

Dr. Johannes Riesterer

18. April 2021



Vorwort

Kann jeder Mathematik lernen? Als Antwort auf diese Frage möchte ich auf den interessanten Lebenslauf einer der bedeutendsten Mathematikerinnen aller Zeiten eingehen (Auszug aus Wikipedia):
Emmy Noether war eine deutsche Mathematikerin, die grundlegende Beiträge zur abstrakten Algebra und zur theoretischen Physik lieferte. Insbesondere hat Noether die Theorie der Ringe, Körper und Algebren revolutioniert. Das nach ihr benannte Noether-Theorem gibt die Verbindung zwischen Symmetrien von physikalischen Naturgesetzen und Erhaltungsgrößen an.
Sie zeigte in mathematischer Richtung keine besondere Frühreife, sondern hatte in ihrer Jugend Interesse an Musik und Tanzen. Sie besuchte die Städtische Höhere Töchterschule – das heutige Marie-Therese-Gymnasium – in der Schillerstraße in Erlangen. Mathematik wurde dort nicht intensiv gelehrt. Im April 1900 legte sie die Staatsprüfung zur Lehrerin der englischen und französischen Sprache an Mädchenschulen in Ansbach ab. 1903 holte sie in Nürnberg die externe Abiturprüfung am Königlichen Realgymnasium – dem heutigen Willstätter-Gymnasium – nach.

Inhaltsverzeichnis

1 Notationen

Für eine Menge Ω bezeichnet $\#\Omega$ die Anzahl ihrer Elemente und $\mathcal{P}(\Omega) := \{A | A \subset \Omega\}$ die Potenzmenge von Ω.

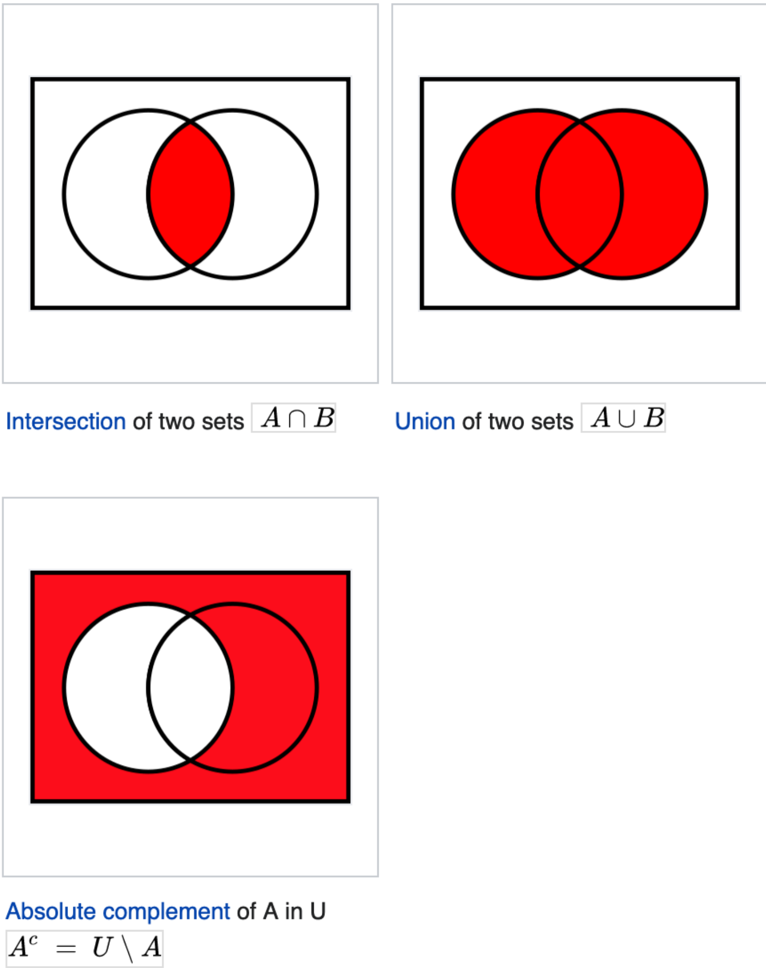


Abbildung 1: Quelle: Wikipedia

Schnitt	Vereinigung	
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	Kommutativgesetze
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Assoziativgesetze
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cap G = A$	$A \cup \{\} = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cap \{\} = \{\}$	$A \cup G = G$	Extremalgesetze
$A \cap \overline{A} = \{\}$	$A \cup \overline{A} = G$	Komplementärgesetze
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgansche Gesetze
$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$	Absorptionsgesetze

G: Grundmenge

Distributivgesetze:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Involution:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Abbildung 2: Quelle: Wikipedia

2 Diskrete Modelle

Definition 1 (Laplace Wahrscheinlichkeit)**.** *Sei* $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ *eine endliche Menge. Für* $A \subset \Omega$ *definieren wir die Wahrscheinlichkeit durch*

$$P(A) := \frac{\#A}{\#\Omega} .$$

Die Elemente $\omega_1, \cdots, \omega_n \in \Omega$ *nennen wir Elementarereignisse und Teilmengen* $A \subset \Omega$ *Ereignisse. Die Abbildung*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

nennen wir die Laplace-Verteilung bzw. Gleichverteilung auf Ω*.*

Definition 2 (Permutationen und Kombinationen)**.**

- $Perm_k^n(\Omega, m.W.) := \{\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^k\}$ *Menge aller Permutationen mit Wiederholung.*
- $Perm_k^n(\Omega, o.W.) := \{\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^k | \omega_i \neq \omega_j\}$ *Menge aller Permutationen ohne Wiederholung.*
- $Kom_k^n(\Omega, m.W.) := \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k} \in \Omega^k | 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k\}$ *Menge aller Kombinationen mit Wiederholung.*
- $Kom_k^n(\Omega, o.W.) := \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k} \in \Omega^k | 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k; \omega_{i_i} \neq \omega_{i_j}\}$ *Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung.*

Lemma 1.

- $\#Perm_k^n(\Omega, m.W.) = n^k = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k\text{-mal}}$
- $\#Perm_k^n(\Omega, o.W.) = n_k = n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$

- $\#Kom_k^n(\Omega, o.W.) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\#Kom_k^n(\Omega, m.W.) = \binom{n+k-1}{k}$

Beweis. □

Definition 3. *Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung Es sei Ω eine (nicht leere) albzählbare Menge. Eine Abbildung $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ heißt diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeismaß), falls gilt:*

$$P(\Omega) = 1$$
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Beispiel 1. *Beispiel: Laplace Wahrscheinlichkeit Ω endlich und $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$.*

Definition 4. *Bedingte Wahrscheinlichkeit Für $A, B \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(B) > 0$ heißt*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit (von A unter B).

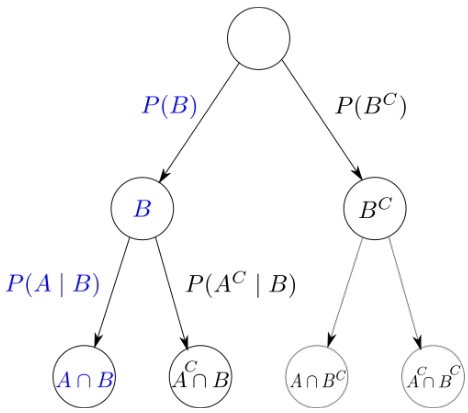


Abbildung 3: Quelle: Wikipedia

Satz 1. *Satz der totalen Wahrscheinlichkeit Für eine Zerlegung $\Omega = \bigcup_{j=1}^n B_j$, mit $B_i \cap B_k = \emptyset$ für $i \neq k$*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)$$

Beweis. $A = A \cap B \cup A \cap \bar{B}$ und $A \cap B \cap A \cap \bar{B} = \emptyset$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\bar{B}) \cdot P(A \mid \bar{B})$$

□

Satz 2. *Satz von Bayes Für* $A, B \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *mit* $P(B) > 0$ *gilt*

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Beweis.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{P(A \cap B) \cdot P(A)}{P(A)}}{P(B)} = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

□

Definition 5. *Stochastische Unabhängigkeit Zwei Ereignisse* A, B *heißen stochastisch Unabhängig, falls*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt. Somit ist auch $P(A|B) = P(A)$ *und* $P(B|A) = P(B)$.

2.1 Naiver Bayes'scher Spam Filter

Gegeben ist eine E-Mail E. Wir möchten anhand des Vorkommens bestimmter Wörter $A_1, \ldots A_n$ in der Mail entscheiden, ob es sich um eine erwünschte Mail H oder eine unerwünschte Mail S (Ham or Spam) handelt. (Typische Wörter wären zum Beispiel "reichwerden", önlinecasino"...) Aus einer Datenbank kann man das Vorkommen dieser Wörter in Spam und Ham Mails zählen und damit empirisch die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i|S)$ und $P(A_i|H)$ des Vorkommens dieser Wörter in Spam und Ham Mails ermitteln. Wir gehen davon aus, dass es sich bei der Mail prinzipiell mit Wahrscheinlichkeit $P(E = S) = P(E = H) = \frac{1}{2}$ um eine erwünschte Mail H oder eine unerwünschte Mail S handeln kann.
Wir machen zudem die (naive) Annahme, dass das Vorkommen der Wörter stochastisch unabhängig ist, also

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n|S) = P(A_1|S) \cdots P(A_n|S)$$
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n|H) = P(A_1|H) \cdots P(A_n|H)$$

gilt.
Mit der Formel von Bayes und der totalen Wahrscheinlichkeit können wir somit berechnen

$$P(E = S|A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n|S) \cdot P(S)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}$$
$$= \frac{P(A_1|S) \cdots P(A_n|S) \cdot P(S)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n|H) + P(A_1 \cap \cdots \cap A_n|S)}$$
$$= \frac{P(A_1|S) \cdots P(A_n|S) \cdot P(S)}{P(A_1|H) \cdots P(A_n|H) + P(A_1|S) \cdots P(A_n|S)}$$

Bemerkung: $P(E = H|A_1 \cap \cdots \cap A_n) = 1 - P(E = S|A_1 \cap \cdots \cap A_n)$

3 Zufalssvariablen

Definition 6. *Ein Messraum ist ein Paar* $(\Omega, \mathcal{A})$ *bestehend aus einer Menge* Ω *und einer Sigma-Algebra* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Definition 7. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $(\Omega', \mathcal{A}')$ *ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung*

$$X : \Omega \to \Omega'$$

so dass für alle Ereignisse $A' \in \mathcal{A}'$

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

ein Ereignis in $\mathcal{A}$ *ist. Urbilder von Ereignissen sind also Ereignisse.*

Definition 8. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $(\Omega', \mathcal{A}')$ *ein Messraum und* $X : \Omega \to \Omega'$ *Eine Zufallsvariable. Durch* $P_X(A') := P(X^{-1}(A))$ *für* $A' \in \mathcal{A}'$ *wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\Omega', \mathcal{A}')$ *definiert. Es wird Bildmaß genannt.*

3.1 Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

in diesem Abschnitt ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein fest gewählter Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 9. *Für eine Teilmenge* $A \in \mathcal{A}$ *heißt*

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in A \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

Definition 10. *Eine Funktion*

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{A_k}$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$ *und* $A_k \in \mathcal{A}$ *mit* $A_l \cap A_h = \emptyset$ *für* $i \neq j$ *heißt Treppenfunktion.*

Definition 11. *Eine Hüllreihe zu einer Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *ist eine Reihe* $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

- $c_k \in \mathbb{R}$ *sind positive reelle Zahlen* $c_k > 0$.
- $A_k \subset \mathcal{A}$.
- *Für alle* $x \in \Omega$ *gilt* $|f(x)| \leq \phi(x)$.

Definition 12. *Für eine Treppenfunktion* $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{A_k}$ *definieren wir das Integral durch*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dP := \sum_{k=1}^{m} c_k P(A_k) \, .$$

Definition 13. *Der Innhalt einer Hüllreihe* $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$ *ist definiert durch*

$$I_P(\phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, P(A_k) \, .$$

Definition 14. *Die* L_{P^1}*-Halbnorm einer Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *is definiert durch das Infimum der Inhalte der Hüllreihen zu* f

$$||f||_{P^1} := \inf\left\{ I(\phi) \mid \phi \text{ ist Hüllreihe zu } f \right\} .$$

Definition 15. *Eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *heißt integrierbar, falls eine Folge von Treppenfunktionen* φ_k *existiert mit*

$$||f - \varphi_k||_1 \to 0 \text{ für } k \to \infty \, .$$

In diesem Fall heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dP := \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k d dP$$

das Integral von f *über* $\mathbb{R}^n$.

3.2 Reelle Zufalssvariablen

Definition 16. *Eine Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *heißt offen, falls für jeden Punkt* $x \in U$ *ein Radius* $\epsilon > 0$ *existiert, so dass der Ball* $B_\epsilon(x)$ *in* U *enthalten ist, also* $B_\epsilon(x) \subset U$ *gilt.*

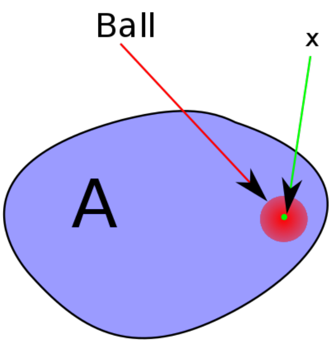


Abbildung 4: Quelle: Wikipedia

Definition 17. *Die Borel'sche* σ*-Algebra über* $\mathbb{R}^n$ *ist die kleinste* σ*-Algebra, die alle offenen Mengen* $\mathcal{U}$ *enthält, also*

$$A_\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n); \, \mathcal{U} \subset \mathcal{A}, \, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$$

Satz 3. *Die Borel'sche σ-Algebra existiert, da die Potenzmenge eine σ-Algebra ist.*

Satz 4. *Die Borel'sche σ-Algebra ist in der σ-Algebra der Lebesgue messbaren Mengen enthalten.*

Satz 5. *Eine reelle Zufallsvariable ist integrierbar.*

Definition 18. *Für eine reelle Zufallsvariable ist der Erwartungswert definiert durch*

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X dP .$$

Satz 6. *Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, so ist*

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{\omega \in \Omega} \omega \cdot P(\omega)$$

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis