

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (Stochastik)



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Was ist Stochastik?

Die Stochastik beschäftigt sich mit der Beschreibung und der Untersuchung von zufälligen Vorgängen.

Was ist Zufall

Keine kausale Erklärung für den Ausgang eines Vorganges möglich
(Nicht-Deterministisch)

Gibt es überhaupt Zufall?

Zufall hängt von der betrachteten Skala ab.
Physik \Rightarrow Skalen können nicht beliebig klein werden.

Wikipedia://Brownsche Molekularbewegung.

Motivation

Maschinelles Lernen. Maschinelle Vorhersage. Informationstheorie. Prozesstheorie. Optimierungstheorie. Mustererkennung. Komplexitätstheorie.....

Bessere Entscheidungen durch Mathematik?!?

Gegeben sind 3 geschlossene Türen. Hinter einer ist der Hauptgewinn, hinter zwei eine Ziege. Der Spieler darf sich zuerst für eine Tür entscheiden. Danach öffnet der Moderator eine der nicht gewählten Türen, hinter der nicht der Hauptgewinn ist und fragt den Spieler, ob er seine vorige Entscheidung revidieren und die andere geschlossene Tür öffnen möchte.

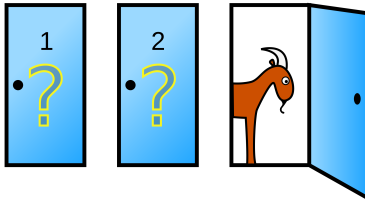


Figure: Quelle: Wikipedia

Bessere Entscheidungen durch Mathematik?!?

Hat der Spieler eine höhere Gewinnchance, wenn er die Tür wechselt?

Bessere Entscheidungen durch Mathematik?!?

Wechseln hat eine höhere Gewinnchance!

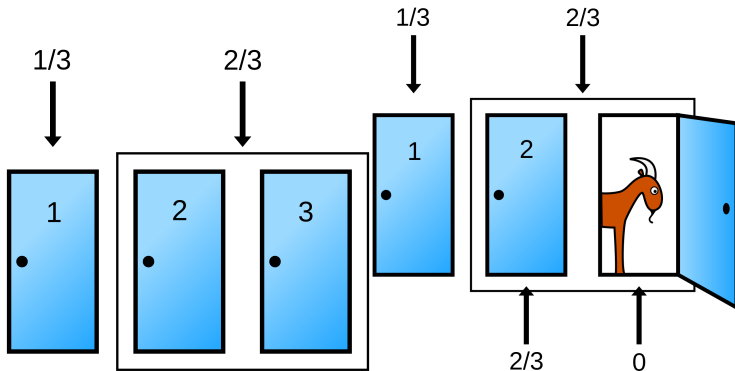


Figure: Quelle: Wikipedia

Laplace Wahrscheinlichkeit

Gegeben endliche Menge Ω (Grundmenge).
Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ (Menge aller Teilmengen).
 $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet man auch als Ereignis.

$$P(A) := \frac{\#A}{\#\Omega}$$

($\#M :=$ Anzahl der Elemente)

heißt Laplace Wahrscheinlichkeit.

Kombinationen und Permutationen

- $Perm_k^n(\Omega, m.W.) := \{\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega^k\}$ Menge aller Permutationen mit Wiederholung.
- $Perm_k^n(\Omega, o.W.) := \{\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega^k \mid \omega_i \neq \omega_j\}$ Menge aller Permutationen ohne Wiederholung.
- $Kom_k^n(\Omega, m.W.) := \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k} \in \Omega^k \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k\}$ Menge aller Kombinationen mit Wiederholung.
- $Kom_k^n(\Omega, o.W.) := \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k} \in \Omega^k \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k; \omega_{i_i} \neq \omega_{i_j}\}$ Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung.

Kombinationen und Permutationen

- $\#Perm_k^n(\Omega, m.W.) = n^k = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k\text{-mal}}$
- $\#Perm_k^n(\Omega, o.W.) = n_k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- $\#Kom_k^n(\Omega, o.W.) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\#Kom_k^n(\Omega, m.W.) = \binom{n+k-1}{k}$