Aufgaben Übungsblätter

Aufgabe 1: Beim Lottospiel werden ohne Zurücklegen 6 Zahlen aus 49 gezogen. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(a) Alle 6 Gewinnzahlen richtig zu tippen.

(b) Genau 5 richtige Gewinnzahlen zu tippen.

(c) Mindestens 3 richtige Gewinnzahlen zu tippen.

(d) Alle 6 Gewinnzahlen sind gerade.

Lösung: Der Grundraum beim Lottospiel ist eine Kombination ohne Beachtung der Reihenfolge $\Omega = \{(z_1, \dots, z_6) \mid z_i \in \{1, \cdots, 49\} \wedge z_1 < z_2 < \cdots < z_6\}$ und damit ist

$$|\Omega| = \binom{49}{6} = 13983816$$

Die Anzahl A_i an Kombinationen i Zahlen aus 6 richtigen zu tippen ist

$$\binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}$$

(i Zahlen von 6 richtig Tippen mal $6-i$ Zahlen von den falschen $49-6$ Zahlen zu tippen)
Die Lösungen sind nun:

(a) $|A_6| = 1 \Rightarrow P(A_6) = \frac{1}{|\Omega|} \approx 7,14 \cdot 10^{-8}$

(b) $|A_5| = \binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 258 \Rightarrow P(A_5) = \frac{258}{|\Omega|} \approx 1,845 \cdot 10^{-5}$

(c) $B = \{\text{mindestens 3 richtig}\} = A_6 \cup A_5 \cup A_4 \cup A_3$.

$$P(B) = P(A_6 \cup A_5 \cup A_4 \cup A_3) = P(A_6) + P(A_5) + P(A_4) + P(A_3)$$

(Da A_i paarweise disjunkt)

$$|A_4| = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13545 \Rightarrow P(A_4) = \frac{13545}{|\Omega|} \approx 9,69 \cdot 10^{-4}$$

$$|A_3| = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820 \Rightarrow P(A_4) = \frac{246820}{|\Omega|} \approx 0,01765$$

$\Rightarrow P(B) \approx 0,018637545$

(d) Es gibt 24 gerade Zahlen zwischen 1 und 49 und damit $\binom{24}{6}$ Möglichkeiten, dass alle Gewinnzahlen gerade sind. Damit ist

$$P(\texttt{nur gerade Gewinnzahlen}) = \frac{\binom{24}{6}}{\binom{49}{6}} \approx 0,00963$$

Aufgabe 2: In einem Raum gibt es acht Lampen, die unabhängig voneinander ein- und ausgeschaltet werden können. Wie viele Beleuchtungsarten gibt es

(a) wenn fünf Lampen brennen sollen?

(b) wenn mindestens fünf Lampen brennen sollen?

Lösung: Für die Auswahl von n Lampen aus $N = 8$ ohne Beachtung der Reihenfolge gibt es

$$M(n) := \binom{8}{n}$$

Möglichkeiten.

(a) $M(5) = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!(3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 = 56$

(b) Für mindestens fünf brennende Lampen gibt es $M(5) + M(6) + M(7) + M(8) = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3: Sie geben eine Party und laden 10 Leute ein.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 10 Gäste an einen Tisch mit 10 Stühlen zu setzen?

(b) Jeder Gast soll mit jedem anderen Gast anstoßen. Wie oft klirren die Gläser?

Lösung:

(a) Keiner setzt sich auf zwei Plätze gleichzeitig, daher gibt es keine Wiederholung. Die Reihenfolge macht einen Unterschied. Daher gibt es $\left(\frac{10!}{(10-10)!}\right) = 10! = 3.628.800$ Möglichkeiten.

(b) Niemand stößt mit sich selbst an, daher gibt es keine Wiederholungen. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Die Gläser klirren also $\binom{10}{2} = 45$ mal.

Aufgabe 4: Drei Bits werden über einen digitalen Nachrichtenkanal übertragen. Jedes Bit kann falsch oder richtig empfangen werden.

(a) Geben Sie den Ereignisraum (Grundmenge) Ω an.

(b) Wie viele Elemente besitzt Ω?

(c) Es sei $A_i :=$ { i-tes Bit ist verfälscht}. Geben Sie das Ereignis A_1 an.

Lösung:

(a) $\Omega = \{(b_1, b_2, b_3) \mid b_i \in \{V(\text{verfälscht}), R(\text{richtig})\} \wedge i \in \{1, 2, 3\}\}$.
$\Rightarrow \Omega = \{(V, V, V), (V, V, R), (V, R, V), (V, R, R),$
$(R, V, V), (R, V, R), (R, R, V), (R, R, R)\}$

(b) $|\Omega| = Var_3^2(\Omega, m.W) = 2^3 = 8$.

(c) $A_1 = \{(V, b_2, b_3) \mid b_i \in \{V, R\} \wedge i \in \{2, 3\}\}$
$= \{(V, R, R), (V, V, V), (V, R, V), (V, V, R))\}$.

Aufgabe 5: Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Welche der folgenden Mengen sind σ-Algebren?

$$A = \{\emptyset, \Omega\}$$
$$B = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$$
$$C = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

(b) Geben Sie die kleinste Sigma-Algebra über Ω an, in der die Mengen $\{1\}$ und $\{2\}$ enthalten sind.

Lösung:

(a) A ist eine σ-Algebra, da

- $\Omega^c = \emptyset \in A$
- $\emptyset^c = \Omega \in A$
- $\emptyset \cup \Omega = \Omega$
- $\Omega \in A$

(b) B ist keine σ-Algebra, da zum Beispiel $\{1\}^c = \{2, 3, 4\} \notin B$.

(c) C ist eine σ-Algebra, da

- $\{1, 2\}^c = \{3, 4\} \in C$
- $\{3, 4\}^c = \{1, 2\} \in C$
- $\Omega \in C$
- $\Omega^c = \emptyset \subset C$

- $\emptyset^c = \Omega \in C$
- $\{3,4\} \cup \{1,2\} = \Omega \in C$

(d) Die kleinste σ-Algebra ist $\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{3,4\}\}$

Aufgabe 6: Bei einer Qualitätskontrolle können Werkstücke zwei Fehler haben, den Fehler A und den Fehler B. Aus Erfahrung ist bekannt, dass ein Werkstück mit Wahrscheinlichkeit 0.05 den Fehler A, mit Wahrscheinlichkeit 0.01 beide Fehler und mit Wahrscheinlichkeit 0.03 nur den Fehler B hat.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Werkstück den Fehler B?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Werkstück fehlerfrei, beziehungsweise fehlerhaft?

(c) Bei einem Werkstück wurde der Fehler A festgestellt, während die Untersuchung auf Fehler B noch nicht erfolgt ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch den Fehler B?

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Werkstück fehlerfrei, falls es den Fehler B nicht besitzt?

(e) Sind die Ereignisse "Werkstück hat Fehler A" und "Werkstück hat Fehler B" unabhängig?

Lösung: Gegeben: $P(A) = 0,05$; $P(A \cap B) = 0,01$; $P(A^c \cap B) = 0,03$.

(a) $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = 0,01 + 0,03 = 0,04$.

(b) $\{\text{Werkstück ist fehlerhaft}\} = A \cup B$.

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B) \\
&= P((A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \\
&= P((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) + P(B \cap A^c) \\
&= P(A) + P(B \cap A^c) \\
&= 0,05 + 0,03 = 0,08 \\
&\{\text{Werkstück ist fehlerfrei}\} = A^c \cap B^c. \\
&P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 0,92
\end{aligned}$$

(c) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2$.

(d) $P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A^c \cap B^c)}{1-P(B)} = \frac{0,92}{0,96} \approx 0,9583$.

(e) $0,01 = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 0,05 \cdot 0,04 = 0,002$

$$\Rightarrow A \text{ und } B \text{ sind nicht unabhängig.}$$

Aufgabe 7: In einer Fabrik werden die produzierten Werkstücke vor der Auslieferung überprüft. Hierfür werden für jedes Werkstück zwei Funktionstest durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück beide Tests besteht, betrage $0,55$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück den ersten Test besteht betrage $0,72$.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück den zweiten Test besteht, wenn er bereits den ersten bestanden hat.

(b) Angenommen, die beiden Tests sind stochastisch unabhängig. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück den zweiten Test besteht?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit für Test T_1 ist $P(T_1) = 0,72$.
Die Wahrscheinlichkeit für Test T_1 und Test T_2 ist $P(T_1 \cap T_2) = 0,55$.

(a) $P(T_2|T_1) = \frac{P(T_1 \cap T_2)}{P(T_1)} = \frac{0{,}55}{0{,}72} \approx 0,7639$.

(b) Sind T_1 und T_2 unabhängig, gilt $P(T_2) = P(T_2|T_1) = 0,7639$.

Aufgabe 8: In einer Fabrik werden die produzierten Werkstücke vor der Auslieferung überprüft. Hierfür werden für jedes Werkstück hintereinander zwei Funktionstest durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück beide Tests besteht, betrage 0.5. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück den ersten Test besteht betrage 0.6.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück den zweiten Test besteht, wenn er bereits den ersten bestanden hat.

(b) Angenommen, die beiden Tests sind stochastisch unabhängig. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein Werkstück den zweiten Test besteht?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit für Test T_1 ist $P(T_1) = 0.6$.
Die Wahrscheinlichkeit für Test T_1 und Test T_2 ist $P(T_1 \cap T_2) = 0.5$.

(a) $P(T_2|T_1) = \frac{P(T_1 \cap T_2)}{P(T_1)} = \frac{0.5}{0.6} \approx 0,83$.

(b) Sind T_1 und T_2 unabhängig, gilt $P(T_2) = P(T_2|T_1) = 0.83$.

Aufgabe 9: In einer Urne befinden sich 4 schwarze und 6 weiße Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, wobei die erste Kugel zurückgelegt wird, bevor die Zweite gezogen wird. Zeigen Sie, dass das Ziehen einer schwarzen oder weißen Kugel im zweiten Zug stochastisch unabhängig davon ist, welche Kugel im ersten Zug gezogen wurde. Gilt das auch, wenn nach dem ersten Zug die Kugel nicht zurückgelegt wird?

Lösung:

Beim Versuch mit Zurücklegen gilt für die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(ZW|ES) = \frac{P(ZW \cap ES)}{P(ES)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{5}$$

$$= P(ZW) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ebenso wie

$$P(ZS|EW) = \frac{P(ZS \cap EW)}{P(EW)} = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{2}{5}$$

$$= P(ZS) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Damit handelt es sich um stochastisch unabhängige Ereignisse.
Beim Versuch ohne Zurücklegen gilt für die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(ZW|ES) = \frac{P(ZW \cap ES)}{P(ES)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}}{\frac{4}{10}} = \frac{2}{3}$$

$$\neq P(ZW) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{3}{5}$$

ebenso wie

$$P(ZS|EW) = \frac{P(ZS \cap EW)}{P(EW)} = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{6}{10}} = \frac{4}{9}$$

$$\neq P(ZS) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{5}.$$

Damit handelt es sich um keine stochastisch unabhängigen Ereignisse.

Aufgabe 10: Geben Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ an, so dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 \text{ für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

eine Dichte auf $\mathbb{R}$ definiert.

Lösung: Für eine Dichte f auf $\mathbb{R}$ muss gelten: $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 1$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 1 \\
\Leftrightarrow &\int_0^1 f \, d\mu = 1 \quad \text{, da } f(x) = 0 \text{ für } x \notin [0,1] \\
\Leftrightarrow &\int_0^1 cx^2 \, dx = 1 \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{3}c = 1 \\
\Leftrightarrow &\, c = 3
\end{aligned}$$

Also ist

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \text{ für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

eine Dichte auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 11: Geben Sie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ an, so dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} cx^3 \text{ für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

ein Dichte auf $\mathbb{R}$ definiert.

Lösung: Für eine Dichte f auf $\mathbb{R}$ muss gelten: $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 1$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 1 \\
\Leftrightarrow &\int_0^2 f \, d\mu = 1 \quad \text{, da } f(x) = 0 \text{ für } x \notin [0,2] \\
\Leftrightarrow &\int_0^2 cx^3 \, dx = 1 \\
\Leftrightarrow &\, 4c = 1 \\
\Leftrightarrow &\, c = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Also ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^3 \text{ für } 0 \le x \le 2 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

eine Dichte auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 12: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und im Intervall $[0,1]$ gleichverteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y = X_1 \cdot (X_2 - X_1)$$

Lösung: Gleichverteilung auf $[0,1] \Rightarrow \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{E}(X_1^2) = \frac{1}{3}$.
Da X_1 und X_2 unabhängig $\Rightarrow \mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{4}$.
Damit ist

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 \cdot (X_2 - X_1)) \ = \mathbb{E}(X_1X_2 - X_1^2) = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1^2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

(für $X \sim U(a,b)$, also X gleichverteilt auf dem Intervall $[a,b]$ ist $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a}$)

Aufgabe 13: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und im Intervall $[0,2]$ gleichverteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y = 2 \cdot X_1 \cdot X_2 + X_1^2$$

Lösung: Gleichverteilung auf $[0,2] \Rightarrow \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 1$ und $\mathbb{E}(X_1^2) = \frac{4}{3}$.
Da X_1 und X_2 unabhängig $\Rightarrow \mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = 1$. Damit ist

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2 \cdot X_1 \cdot X_2 + X_1^2) \ = \mathbb{E}(2 \cdot X_1X_2) + \mathbb{E}(X_1^2) = 2 \cdot \mathbb{E}(X_1X_2) + \mathbb{E}(X_1^2) = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

(für $X \sim U(a,b)$, also X gleichverteilt auf dem Intervall $[a,b]$ ist $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a}$)

Aufgabe 14: Geben Sie die Axiome für einen Wahrscheinlichkeitsraum an.

Lösung: Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bestehend aus der Grundmenge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und einer Abbildung $P : \mathcal{A} \to [0,1]$

$$(i)\ P(\Omega) = 1$$

$$(ii)\ P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Aufgabe 15: Formulieren Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen und erläutern Sie die Aussage.

Lösung: Seien $\{X_i\}_i : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma < \infty$. Dann gilt:

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\Big| \geq \epsilon\Big) \leq \frac{\sigma}{n \cdot \epsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Das schwache Gesetz der großen Zahlen besagt, dass das arithmetische Mittel einer großen Stichprobe einer Zufallsvariable mit einer beliebig kleinen, vorgegebenen Wahrscheinlichkeit dem Erwartungswert der Zufallsvariable entspricht.

Eigene Alternative:
Werden n unabhängige, aber ansonsten gleichartige Versuche durchgeführt, so liegt der Mittelwert der Ergebnisse bei großem n mit hoher Wahrscheinlichkeit nahe beim Erwartungswert.

Aufgabe 16: Was versteht man unter einem Laplace-Experiment?

Lösung: Man spricht von einem Laplace-Experiment, wenn der Ereignisraum Ω endlich viele Elemente $\#\Omega$ und ein Ereignis $A \subset \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ hat.

Aufgabe 17: Erklären Sie die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes anhand eines Beispiels.

Lösung: Wenn man den Durchschnitt von n Messungen eines verrauschten Sensor betrachtet, so kann man wegen dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise Annehmen, dass die zugehörige Verteilung Normalverteilt ist.

Eigene Alternative:
Die Summe von stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ist näherungsweise normalverteilt. Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit der Augensumme von $n \to \infty$ Würfeln ist näherungsweise normalverteilt, da jeder Würfel stochastisch unabhängig und gleichverteilt ist.