

## Konvergenz von W-Maßen

Was bedeutet Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen?

## Inspiration: Gleichmässige Konvergenz von Funktionen

Eine Folge von Funktionen  $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert gleichmässig gegen eine Funktion  $f$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

für alle  $x \in A$ .

## Konvergenz von W-Maßen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $P_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$  eine Folge von Wahrscheinlichkeits-Maßen. Die Folge konvergiert gegen das Wahrscheinlichkeits-Maß  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f dP_n = \int_{\Omega} f dP$$

für alle messbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Zentraler Grenzwertsatz

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter, reeller Zufallsvariablen mit  $E(X_n) = \mu$  und  $V(X_n) = \sigma^2$ . Dann gilt für das arithmetische Mittel  $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

$$P_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)} \rightarrow P_{N(0,1)}$$

wobei  $P_{N(0,1)}$  das Wahrscheinlichkeits-Maß mit der Dichte  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$  ist.

## Erzeugende Funktion

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}), \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

erzeugende Funktion zu  $X$  bzw.  $P_X$ .

## Stetigkeitssatz von Lévy

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum so wie  $X$  und  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Zufallsvariablen mit erzeugenden Funktionen  $\psi$  und  $\psi_n$ . Dann gilt:

$$\psi_n \rightarrow \psi \Rightarrow P_{X_n} \rightarrow P_X$$

## Eigenschaften erzeugender Funktionen

- $\psi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$  für  $|t| \leq \delta$  (Taylor).
- $e^{\frac{t^2}{2}}$  ist die erzeugende Funktion von  $P_{N(0,1)}$ .
- $\psi_{X+Y} = \psi_X \cdot \psi_Y$

## Beweis Zentraler Grenzwertsatz

- $|t| \leq \delta$
- $\psi(t)$  erzeugende Funktion von  $X_n$ .
- $Y_n := \frac{X_n - \mu}{\sigma}$ . Dann ist  $\mathbb{E}(Y_n) = 0$  und  $\mathbb{V}(Y_n) = 1$ .
- $\psi^*(t)$  erzeugende Funktion von  $Y_n$ .
- $\psi_n(t)$  erzeugende Funktion von  $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$ . Dann ist  $\psi_n(t) = \psi^*\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= \psi^*\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k! \sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k) \\ &= 1 + \frac{t^2}{2n} + \underbrace{\sum_{k=3}^n \frac{t^k}{k! \sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k)}_{=: R_n}\end{aligned}$$

## Beweis Zentraler Grenzwertsatz

$$R_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}(\psi^*(\delta) + \psi^*(-\delta)) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Für  $T_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)$  erhält man damit

$$\psi_{T_n}(t) = (\psi_n(t))^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + R_n(t)\right)^n \rightarrow e^{\frac{t^2}{2}} \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Mit dem Stetigkeitssatz von Levy folgt der zentrale Grenzwertsatz.

## Fourier-Reihe

Für eine  $2\pi$  periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt

$$Sf_n(x) := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \cdot e^{ikx}$$

die Fourier-Reihe von  $f$  vom Grad  $n$  mit den den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(t) \cdot e^{-ikt} dt$$



## Fourier-Reihe

Ist  $f$   $2\pi$ -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe gleichmässig gegen  $f$ , es gilt dann also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_x |Sf_n(x) - f(x)| = 0$$

## Fourier-Reihe - Interpretation

Es ist  $e^{-ikt} := \cos(kt) + i \sin(kt)$  und

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} e^{-ilt} \cdot e^{-ikt} dt = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen  $e^{-ikt}$  bilden bezüglich des Skalarproduktes  $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(t) \cdot g(t) dt$  eine orthonormalbasis der  $2\pi$ -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen.

## Fourier-Reihe einer reellen Funktion

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion, so gilt

$$Sf_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

mit den Koeffizienten

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

## Beweisidee

Ersetze  $e^{-ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$  und setze  $a_k := \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)$  und  $b_k := i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k))$ .

# Zentraler Grenzwertsatz

## Beispiel

$$f(t) = \begin{cases} h, & \text{wenn } 0 \leq t < T/2 \\ -h, & \text{wenn } T/2 \leq t < T \end{cases} \quad f(t+T) = f(t)$$

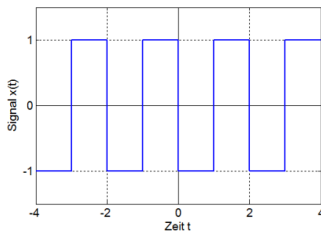


Figure: Quelle: Wikipedia

# Zentraler Grenzwertsatz

## Beispiel

$$\begin{aligned} Sf(t) &= \frac{4h}{\pi} \left[ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right] \\ &= \frac{4h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\omega t)}{2k-1} \\ \omega &= 2\pi \cdot f \end{aligned}$$

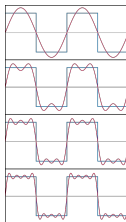


Figure: Quelle: Wikipedia

# Zentraler Grenzwertsatz



Figure: Quelle: Wikipedia

## Fouriertransformation

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion. Die (kontinuierliche) Fourier-Transformierte ist definiert durch

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle y, x \rangle} dx,$$

(Verallgemeinerung der Fourierkoeffizienten für nicht ganzzahlige Frequenzanteile).

## Umkehrsatz

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\hat{f}$  integrierbar, gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy,$$

fast überall.



## Stetigkeitssatz von Levy

Mit  $\varphi_X := \mathbb{E}(e^{itx})$  ist  $\varphi_X(-it) = \psi_X(t)$  und der Stetigkeitssatz von Levy folgt aus dem Umkehrsatz.

# Stochastik für Informatiker



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

## Motivation