1 Theorie

1.1 Wahrscheinlichkeitsraum

1.1.1 Definition

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bestehend aus der Grundmenge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und einer Abbildung $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$

$$(i)\ P(\Omega) = 1$$
$$(ii)\ P\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_i P(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Die Elemente von Ω werden elementare Ereignisse und die von $\mathcal{A}$ Ereignisse genannt. Mengen M mit $P(M) = 0$ werden Nullmengen genannt. Die Abbildung P wird Wahrscheinlichkeitsmaß genannt.

1.1.2 σ-Algebra

Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen (= Ereignissen). $\mathcal{A}$ heißt σ-Algebra (Sigma-Algebra) falls gilt:

$$(i)\ \Omega \in \mathcal{A}$$
$$(ii)\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$
$$(iii)\ A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$$

$(A^c = \Omega \setminus A)$

1.2 Zufallsvariablen

1.2.1 Zufallsvariable

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X : \Omega \to \Omega'$$

so dass für alle Ereignisse $A' \in \mathcal{A}'$

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

ein Ereignis in $\mathcal{A}$ ist. Urbilder von Ereignissen sind also Ereignisse.

1.2.2 Messraum

Ein Messraum ist ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ bestehend aus einer Menge Ω und einer Sigma-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

1.2.3 Reelle Zufallsvariable

Unter einer reellen Zufallsvariable verstehen wir eine Zufallsvariable

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$$
$$X(\omega) := \Big(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)\Big),$$

wobei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ der $\mathbb{R}^n$ zusammen mit der Borel'schen Sigma-Algebra ist.

1.3 Erwartungswert

1.3.1 Definition

Für eine reelle, integrierbare Zufallsvariable X ist der Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X \, dP \, .$$

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine eindimensionale reelle Zufallsvariable, so ist

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$$

1.3.2 Eigenschaften

Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ reelle, integrierbare Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$ konstant, so gilt:

$$\mathbb{E}(a \cdot X \pm b \cdot Y) = a \cdot \mathbb{E}(X) \pm b \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$\forall x \in \Omega : X(x) \leq Y(x) \ \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$
$$X, Y \text{ stoch. unabhängig} \Rightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}(1_A) = P(A)$$

1.4 Varianz

Für eine reelle Zufallsvariable X ist die Varianz definiert durch

$$\mathbb{V}(X) \ := \ \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

1.5 Verteilungen

1.5.1 Normalverteilung

Die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$
$$\Rightarrow \text{Verteilung: } F(x) = N(\mu, \sigma^2)(-\infty, x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} dt$$

Erwartungswert und Varianz bei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$
$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

1.5.2 Verteilungsfunktion

Für eine reelle Zufallsvariable X heißt

$$F_X : \Omega \to [0, 1]$$
$$F_X(x) := P(X \leq x) := P_X((-\infty, x)) = P(X^{-1}(-\infty, x))$$

Verteilungsfunktion von X.

1.5.3 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung $U(a, b)$ auf einem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|}$$
$$\text{Verteilung: } F(x) = P_f((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|} dt$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq a \\ \frac{x-a}{|b-a|} \text{ für } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ für } x \geq b \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz bei $X \sim U(a, b)$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{3}\frac{b^3 - a^3}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{12}(b-a)^2$$

1.5.4 Dichte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, wobei alle $A \in \mathcal{A}$ Lebesgue-messbar sind. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Dichte, falls für ihr Lebesgue-Integral $\int_\Omega f d\mu = 1$ gilt.