

Stochastik für Informatiker



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Messraum

Ein Messraum ist ein Paar (Ω, \mathcal{A}) bestehend aus einer Menge Ω und einer Sigma-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Zufallsvariablen

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und (Ω', \mathcal{A}') ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \Omega'$$

so dass für alle Ereignisse $A' \in \mathcal{A}'$

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

ein Ereignis in \mathcal{A} ist. Urbilder von Ereignissen sind also Ereignisse.

Beispiel (Münzwurf)

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, $\Omega' = \{0, 1\}$ mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und

$$X(\text{Kopf}) = 0$$

$$X(\text{Zahl}) = 1$$

Beispiel (Summe zweier Würfel)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und $X : \Omega \rightarrow \Omega'$; $X(a, b) := a + b$.

Bildmaß

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, (Ω', \mathcal{A}') ein Messraum und $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ Eine Zufallsvariable. Durch

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A'))$$

für $A' \in \mathcal{A}'$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω', \mathcal{A}') definiert. Es wird Bildmaß genannt. Anstelle von $P_X(A')$ wird auch die Schreibweise $P(X \in A') := P_X(A')$ verwendet.

Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
 $\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ und
 $X : \Omega \rightarrow \Omega'; X(a, b) := a + b.$ Dann ist
 $P_X(3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

Eine Funktion

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{A_k}(x)$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$ und $A_k \in \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ heißt
Treppenfunktion.

Hüllreihe

Eine Hüllreihe zu einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Reihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $c_k \in \mathbb{R}$ sind positive reelle Zahlen $c_k > 0$.
- $A_k \in \mathcal{A}$.
- Für alle $x \in \Omega$ gilt $|f(x)| \leq \phi(x)$.

Für eine Treppenfunktion $\varphi(x) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{A_k}(x)$ definieren wir das Integral durch

$$\int_{\Omega} \varphi dP := \sum_{k=1}^m c_k P(A_k) .$$

Der Inhalt einer Hüllreihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$ ist definiert durch

$$I_P(\phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k P(A_k) .$$

Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

Die L_{P^1} -Halbnorm einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch das Infimum der Inhalte der Hüllreihen zu f

$$\|f\|_{P^1} := \inf \left\{ I(\phi) \mid \phi \text{ ist Hüllreihe zu } f \right\} .$$

Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls eine Folge von Treppenfunktionen φ_k existiert mit

$$\|f - \varphi_k\|_{P^1} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty .$$

In diesem Fall heißt

$$\int_{\Omega} f(x) dP := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_k dP$$

das Integral von f über Ω .

Neuer Wein in alten Schläuchen

Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes verhält sich analog zu Lebesguemaß von letztem Semester.

Reelle Zufallsvariablen

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für jeden Punkt $x \in U$ ein Radius $\epsilon > 0$ existiert, so dass der Ball $B_\epsilon(x)$ in U enthalten ist, also $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt.

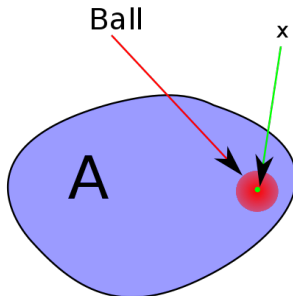


Figure: Quelle: Wikipedia

Borell'sche Sigma-Algebra

Die Borell'sche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ über \mathbb{R}^n ist die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen \mathcal{U} enthält, also

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n); \mathcal{U} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \}$$

Existenz

Die Borell'sche σ -Algebra existiert, da die Potenzmenge eine σ -Algebra ist.

Messbarkeit

Die Borell'sche σ -Algebra ist in der σ -Algebra der Lebesgue messbaren Mengen enthalten.

Reelle Zufallsvariable

Unter einer reellen Zufallsvariable verstehen wir eine Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X(\omega) := \left(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega) \right),$$

wobei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ der \mathbb{R}^n zusammen mit der Borell'schen Sigma-Algebra ist. Das Integral ist komponentenweise definiert durch

$$\int_{\Omega} X dP := \left(\int_{\Omega} X_1 dP, \dots, \int_{\Omega} X_n dP \right)$$

Verteilungsfunktion

Für eine reelle Zufallsvariable heißt

$$F_X : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$F_X(x) := P(X \leq x) := P_X((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x]))$$

Verteilungsfunktion von X .

Dichte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und (Ω, \mathcal{A}) ein Messraum, wobei alle $A \in \mathcal{A}$ Lebesgue-messbar sind. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heiß Dichte, falls für ihr Lebesgue-Integral $\int_{\Omega} f d\mu = 1$ gilt.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ ist eine Dichte auf \mathbb{R} .

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r^2 = x^2 + y^2 \text{ (da } \cos^2 + \sin^2 = 1 \text{)}$$

LINK: Polarkoordinatentransformation

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr$$

$$= -\frac{\pi}{4} [e^{-r^2}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Beispiel

Analog beweist man, dass für alle $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ die Funktion $f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ eine Dichte auf \mathbb{R} ist.

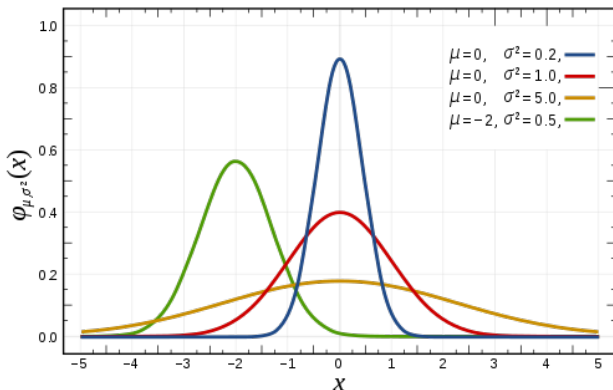


Figure: Quelle: Wikipedia

Beispiel

Eine reelle Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Normalverteilt, wenn $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ gilt. Man schreibt auch $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

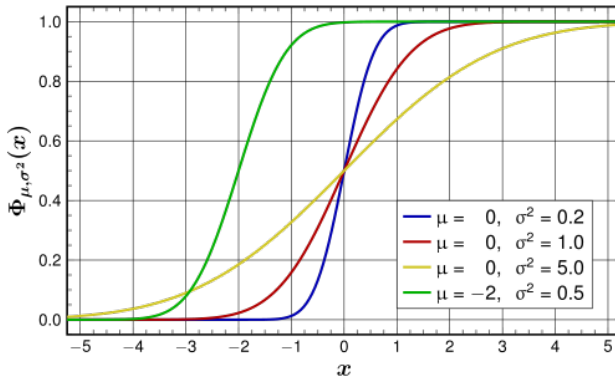


Figure: Quelle: Wikipedia

Beispiel

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, (R, \mathcal{B}) ein Messraum und $\{X_i\}_{i=1}^n$ ein Folge von Zufallsvariablen $X_i : \Omega \rightarrow R$. Die zufallsvariablen heissen identisch verteilt, falls $P_{X_i} = P_{X_j}$ für alle i, j und stochastisch unabhängig, falls $P_{(X_1, \dots, X_n)} = \prod_{i=1}^n P_{X_i}$ gilt.