

# Stochastik für Informatiker



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

## Messraum

Ein Messraum ist ein Paar  $(\Omega, \mathcal{A})$  bestehend aus einer Menge  $\Omega$  und einer Sigma-Algebra  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .

## Zufallsvariablen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \Omega'$$

so dass für alle Ereignisse  $A' \in \mathcal{A}'$

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

ein Ereignis in  $\mathcal{A}$  ist. Urbilder von Ereignissen sind also Ereignisse.

## Beispiel (Münzwurf)

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ ,  $\Omega' = \{0, 1\}$  mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und

$$X(\text{Kopf}) = 0$$

$$X(\text{Zahl}) = 1$$

## Beispiel (Summe zweier Würfel)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ ;  $X(a, b) := a + b$ .

## Bildmaß

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein Messraum und  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$  Eine Zufallsvariable. Durch

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A'))$$

für  $A' \in \mathcal{A}'$  wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega', \mathcal{A}')$  definiert. Es wird Bildmaß genannt. Anstelle von  $P_X(A')$  wird auch die Schreibweise  $P(X \in A') := P_X(A')$  verwendet.

## Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  
 $\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  und  
 $X : \Omega \rightarrow \Omega'; X(a, b) := a + b$ . Dann ist  
 $P_X(3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

## Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge  $A \in \mathcal{A}$  heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

Eine Funktion

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{A_k}(x)$$

mit  $c_k \in \mathbb{R}$  und  $A_k \in \mathcal{A}$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  heißt  
Treppenfunktion.

## Hüllreihe

Eine Hüllreihe zu einer Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Reihe  $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $c_k \in \mathbb{R}$  sind positive reelle Zahlen  $c_k > 0$ .
- $A_k \in \mathcal{A}$ .
- Für alle  $x \in \Omega$  gilt  $|f(x)| \leq \phi(x)$ .

Für eine Treppenfunktion  $\varphi(x) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{A_k}(x)$  definieren wir das Integral durch

$$\int_{\Omega} \varphi dP := \sum_{k=1}^m c_k P(A_k) .$$

Der Inhalt einer Hüllreihe  $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$  ist definiert durch

$$I_P(\phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k P(A_k) .$$



# Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

Die  $L_{P1}$ -Halbnorm einer Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch das Infimum der Inhalte der Hüllreihen zu  $f$

$$\|f\|_{P1} := \inf \left\{ I(\phi) \mid \phi \text{ ist Hüllreihe zu } f \right\} .$$

Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar, falls eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_k$  existiert mit

$$\|f - \varphi_k\|_{P1} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty .$$

In diesem Fall heißt

$$\int_{\Omega} f(x) dP := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_k dP$$

das Integral von  $f$  über  $\Omega$ .

## Neuer Wein in alten Schläuchen

Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes verhält sich analog zu Lebesguemaß von letztem Semester.

Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt offen, falls für jeden Punkt  $x \in U$  ein Radius  $\epsilon > 0$  existiert, so dass der Ball  $B_\epsilon(x)$  in  $U$  enthalten ist, also  $B_\epsilon(x) \subset U$  gilt.

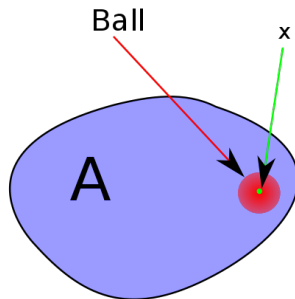


Figure: Quelle: Wikipedia

## Borell'sche Sigma-Algebra

Die Borell'sche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  über  $\mathbb{R}^n$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Mengen  $\mathcal{U}$  enthält, also

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n); \mathcal{U} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \}$$

## Existenz

Die Borell'sche  $\sigma$ -Algebra existiert, da die Potenzmenge eine  $\sigma$ -Algebra ist.

## Messbarkeit

Die Borell'sche  $\sigma$ -Algebra ist in der  $\sigma$ -Algebra der Lebesgue messbaren Mengen enthalten.

## Reelle Zufallsvariable

Unter einer reellen Zufallsvariable verstehen wir eine Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X(\omega) := \left( X_1(\omega), \dots, X_n(\omega) \right),$$

wobei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  der  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit der Borell'schen Sigma-Algebra ist. Das Integral ist komponentenweise definiert durch

$$\int_{\Omega} X dP := \left( \int_{\Omega} X_1 dP, \dots, \int_{\Omega} X_n dP \right)$$