Stochastik für Informatiker

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Parametertests im Gaußmodell

Gegeben sei in diesem Abschnitt immer das zweiparametrige Gauß'sche Produktmodell

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \prod N(m, v) : m \in \mathbb{R}, v > 0)$$

Parametertests im Gaußmodell

Modell beschreibt zum Beispiel n-maliges unabhängiges Messen einer Messgröße (z.B. Temperatur) mit einem Sensor mit unbekannter Qualität.

Parametertests im Gaußmodell - Chiquadrat-Test

Wir möchten für das Testproblem der Varianz v

$$H_0 : v \leq v_0 \text{ gegen } H_1 : v > v_0$$

mit der Entscheidungsfunktion eine geeignete Statistik T und die Konstanten c finden, so dass der Test optimal ist und ein Signifikanzniveau von α besitzt.

Parametertests im Gaußmodell - Chiquadrat-Test

Zum Beispiel möchte man testen, ob ein Sensor eine bestimmte Qualität hat (wenig streut).

Student's Satz

Gegeben sei das Gauß'sche Produktmodell und die Schätzer $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ und $V* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ für Erwartungswert und Varianz. Dann gilt:

- M und V^* sind stoch. unabhängig.
- M hat die Verteilung $N(m, \frac{v}{n})$.
- V^* hat die Verteilung χ^2_{n-1} (Chiquadrat-Verteilung).
- $T_m := \frac{\sqrt{n}(M-m)}{\sqrt{V^*}}$ hat die Verteilung t_{n-1} (Student'sche t-Verteilung).

Figure: Quelle: Wikipedia

Beispiel-Beweis: Quadrat einer Standardnormalverteilten Zufallsvariable

Sei $\phi_{0,1}$ die Dichte der Standardnormalverteilung. Aus Symmetriegründen hat $|X|$ die Dichte $2\phi_{0,1}$ auf $\mathcal{X} = (0, \infty)$ (den Fall $X = 0$ kann man ignorieren, da er mit Wahrscheinlichkeit 0 auftritt). Durch Substitution $\varphi(x) = x^2$ mit Umkehrfunktion $\varphi(y)^{-1} = \sqrt{y}$ hat $X^2 = \varphi(|X|)$ die Dichte

$$\rho_{X^2}(y) = 2\phi_{0,1}(\sqrt{y})\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(y)$$

Chiquadrat-Test

Für den Schätzer $V^* = \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ der Varianz ist der Test mit dem Ablehnungsbereich $\{\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2 > v_0 \chi^2_{n-1;1-\alpha}\}$, wobei $\chi^2_{n-1;1-\alpha}$ ein α-Fraktil der χ^2_{n-1}-Verteilung ist, ein bester Test zum Signifikanzniveau α.

Chiquadrat-Test

Für den Schätzer $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ für den Erwartungswert ist der Test mit dem Ablehnungsbereich $\{\frac{M-m_0}{\sqrt{\frac{n}{V^*}}} > t_{n-1;1-\alpha}\}$, wobei $t_{n-1;1-\alpha}$ ein α-Frakitl der t_{n-1}-Verteilung ist, ein bester Test zum Signifikanzniveau α.