Stochastik für Informatiker

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung $U(a, b)$ auf einem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1_{(a,b)}}{|a-b|}$$

$$\Rightarrow \text{Verteilung: } F(x) = P_f((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|} dt$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq a \\ \frac{x-a}{|b-a|} \text{ für } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ für } x \geq b \end{cases}$$

Verteilungen

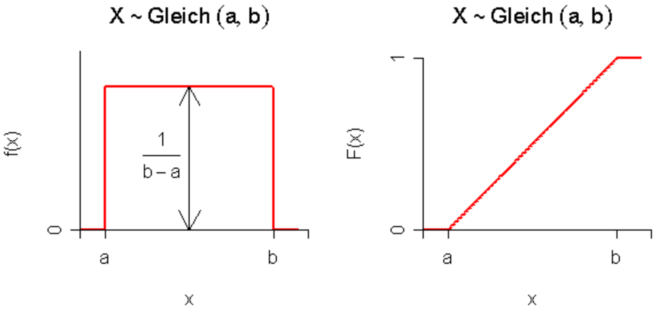

Figure: Quelle: Wikipedia

Gleichverteilung

Sei $X \sim$U(a,b).

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\cdot 1\,dx = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\cdot 1\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\left(4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2\right) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Verteilungen

Normalverteilung

Die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch

Dichte: $f(x) := \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$\Rightarrow$ Verteilung: $F(x) = N(\mu, \sigma^2)(-\infty, x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

Verteilungen

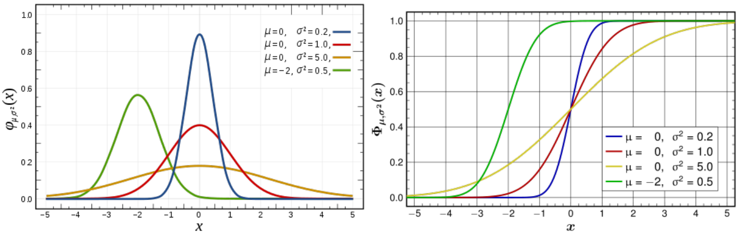

Figure: Quelle: Wikipedia

Normalverteilung

Sei $X \sim N(\mu, \sigma)$.

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$
$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Poissonverteilung

Die Poissonverteilung $Pois(\lambda)$ auf $\mathbb{N}_{\geq 0}$ ist definiert durch

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow F_\lambda(n) = \sum_{k=0}^{n} P_\lambda(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

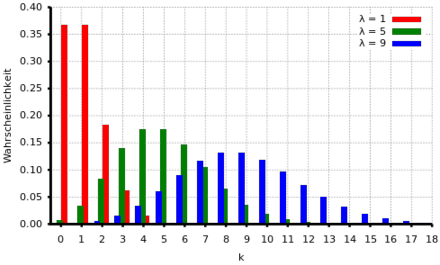

Figure: Quelle: Wikipedia

Poisson Verteilung

Die Poisson Verteilung beschreibt das Auftreten von seltenen Ereignissen und spielt bei Zählprozessen eine wichtige Rolle.

Poisson Verteilung

$X \sim Pois(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$
$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$

Verteilungen

Bernoulliverteilung

Die Bernoulliverteilung Für $\Omega = \{0, 1\}$ und $p \in [0, 1]$ ist definiert durch

$$P(\omega) = p^{\omega}(1-p)^{1-\omega}$$

- Werfen einer Münze: Kopf (Erfolg), $p = 1/2$, und Zahl (Misserfolg), $q = 1/2$.
- Werfen eines Würfels, wobei nur eine 6 als Erfolg gewertet wird: $p = 1/6, q = 5/6$.
- Qualitätsprüfung (einwandfrei, nicht einwandfrei).
- Betrachte sehr kleines Raum/Zeit-Intervall: Ereignis tritt ein ($p \gtrapprox 0$), tritt nicht ein ($q \lessapprox 1$).

Verteilungen

Binomialverteilung

$$B(k,p,n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Binomialverteilung

$$X_1, \cdots, X_n \sim B \Rightarrow \sum X_i \sim B$$

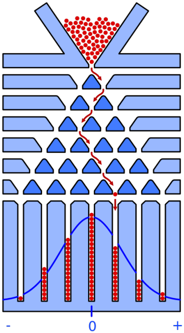

Figure: Quelle: Wikipedia

Zentraler Grenzwertsatz

Motivation

Welche Verteilung hat das arithmetische Mittel $S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$?

Motivation

Wie und gegen was konvergiert P_{S_n}?

Zentraler Grenzwertsatz

Konvergenz von W-Maßen

Was bedeutet Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen?

Inspiration: Gleichmässige Konvergenz von Funktionen

Eine Folge von Funktionen $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig gegen eine Funktion f, falls

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(x) - f(x)|| = 0$$

für alle $x \in A$.

Konvergenz von W-Maßen

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $P_n : \Omega \to [0,1]$ eine folge von Wahrscheinlichkeits-Maßen. Die Folge konvergiert gegen das Wahrscheinlichkeits-Maß $P : \Omega \to [0,1]$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f dP_n = \int_\Omega f dP$$

für alle messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Highlight

Zentraler Grenzwertsatz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter, reeller Zufallsvariablen mit $E(X_n) = \mu$ und $V(X_n) = \sigma^2$. Dann gilt für das arithmetische Mittel $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)} \to P_{N(0,1)}$$

wobei $P_{N(0,1)}$ das Wahrscheinlichkeits-Maß mit der Dichte $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist.

Zentraler Grenzwertsatz

Erzeugende Funktion

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}), \; t \in I \subset \mathbb{R}$$

erzeugende Funktion zu X bzw. P_X.

Stetigkeitssatz von Lévy

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum so wie X und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen mit erzeugenden Funktionen ψ und ψ_n. Dann gilt:

$$\psi_n \to \psi \Rightarrow P_{X_n} \to P_X$$

Zentraler Grenzwertsatz

Eigenschaften erzeugender Funktionen

- $\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$ für $|t| \leq \delta$ (Taylor).
- $e^{\frac{t^2}{2}}$ ist die erzeugende Funktion von $P_{N(0,1)}$.
- $\psi_{X+Y} = \psi_X \cdot \psi_Y$

Beweis Zentraler Grenzwertsatz

- $|t| \leq \delta$
- $\psi(t)$ erzeugende Funktion von X_n.
- $Y_n := \frac{X_n - \mu}{\sigma}$. Dann ist $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ und $\mathbb{V}(Y_n) = 1$.
- $\psi^*(t)$ erzeugende Funktion von Y_n.
- $\psi_n(t)$ erzeugende Funktion von $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$. Dann ist $\psi_n(t) = \psi^*(\frac{t}{\sqrt{n}})$

$$\psi_n(t) = \psi^*(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k! \sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k)$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2n} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \frac{t^k}{k! \sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k)}_{=: R_n}$$

Beweis Zentraler Grenzwertsatz

$$R_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}(\psi^*(\delta) + \psi^*(-\delta)) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Für $T_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)$ erhält man damit

$$\psi_{T_n}(t) = (\psi_n)(t))^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + R_n(t)\right)^n \to e^{\frac{t^2}{2}} \text{ für } n \to \infty$$

Mit dem Stetigkeitssatz von Levy folgt der zentrale Grentzwertsatz.

Umkehrsatz

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\hat{f}$ integrierbar, gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{i<x,y>}\, dy,$$

fast überall.

Stetigkeitssatz von Levy

Mit $\varphi_X := \mathbb{E}(e^{itx})$ ist $\varphi_X(-it) = \psi_X(t)$ und der Stetigkeitssatz von Levy folgt aus dem Umkehrsatz.

Highlight

Sensorrauschen

Wir können annehmen, dass das Rauschen eines Sensor aus vielen kleinen, stochastisch Unabhängigen Effekten Beruht, die sich aufsummieren. Diese Summe ist nach dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise Normalverteilt.