Stochastik für Informatiker

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Eigenschaften

Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle, integrierbare Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$ konstant, so gilt:

$$\mathbb{E}(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$X(x) \leq Y(x) \ \forall x \in \Omega \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$
$$X, Y \text{ stoch. unabhängig} \Rightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}(1_A) = P(A)$$

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Markov-Ungleichung

Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle, integrierbare Zufallsvariablen und $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton wachsend. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$ mit $f(\epsilon) > 0$

$$P(|Y| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(f \circ |Y|)}{f(\epsilon)}$$

Beweis

Da $f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}} \leq f \circ |Y|$ folgt

$$\begin{aligned} f(\epsilon)P(|Y| \geq \epsilon) =& f(\epsilon)\mathbb{E}(1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) = \mathbb{E}(f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) \\ \leq& \mathbb{E}(f \circ |Y|) \end{aligned}$$

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Varianz

Die Varianz ist definiert durch

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

Eigenschaft (Übung)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Beispiel

Normalverteilung. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

$$P_f(A) := \int_A \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; X(x) = x$.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(xe^{-\frac{x^2}{2}})\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[x(e^{-\frac{x^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

LINK: Partielle Integration. Mit Folien vom letzten mal über $\mathbb{E}(X)$ $\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Tschebyscheff-Ungleichung

Für eine eine reelle, integrierbare und quadratintegrierbare Zufallsvariablen $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\epsilon^2}$$

Beweis

Folgt direkt aus der Markov-Ungleichung mit $Y' = Y - \mathbb{E}(Y)$ und $f(x) = x^2$

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Schwaches Gesetzt der großen Zahlen

Seien $\{X_i\}_i : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen (uid, iid(englisch)) mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma < \infty$, dann gilt

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma}{n \cdot \epsilon^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

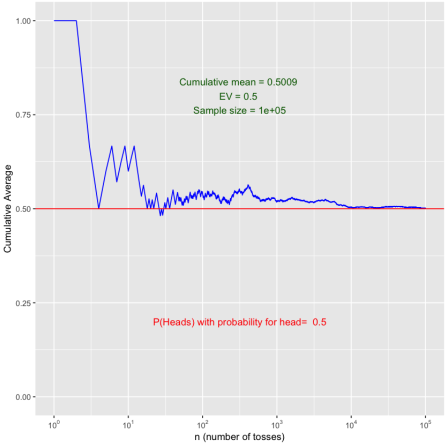
(stochastische Konvergenz).

Beweis

Mit $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu$ ist $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i - \mu) = 0$ und $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma}{n}$. Aus der Tschebyscheff-Ungleichung folgt die Behauptung.

Schwaches Gesetzt der großen Zahlen

Konvergenz in Wahrscheinlichkeit macht keine Aussage über die Qualität der Konvergenz über die Laufzeit hinweg.



Fast sichere Konvergenz

Fast sicher

$$P\big(\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \to Y(\omega)\big) = 1$$

Y_n konvergiert fast überall gegen Y für $n \to \infty$. Der Fehler wird mit wachsendem n kleiner (bis auf Nullmenge)

starkes Gesetzt der großen Zahlen

$$\frac{1}{n} \sum_n (X_i) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu \text{ fast sicher}$$