Stochastik für Informatiker

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Zufallsvariablen

Messraum

Ein Messraum ist ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ bestehend aus einer Menge Ω und einer Sigma-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X : \Omega \to \Omega'$$

so dass für alle Ereignisse $A' \in \mathcal{A}'$

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

ein Ereignis in $\mathcal{A}$ ist. Urbilder von Ereignissen sind also Ereignisse.

Zufallsvariablen

Beispiel (Münzwurf)

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, $\Omega' = \{0, 1\}$ mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und

$$X(\text{Kopf}) = 0$$
$$X(\text{Zahl}) = 1$$

Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und $X : \Omega \to \Omega'; X(a, b) := a + b$.

Bildmaß

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum und $X : \Omega \to \Omega'$ Eine Zufallsvariable. Durch

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A'))$$

für $A' \in \mathcal{A}'$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ definiert. Es wird Bildmaß genannt. Anstelle von $P_X(A')$ wird auch die Schreibweise $P(X \in A') := P_X(A')$ verwendet.

Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ und
$X : \Omega \to \Omega'; X(a, b) := a + b$. Dann ist
$P_X(3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

Eine Funktion

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{A_k}(x)$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$ und $A_k \in \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ heißt Treppenfunktion.

Hüllreihe

Eine Hüllreihe zu einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine Reihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $c_k \in \mathbb{R}$ sind positive reelle Zahlen $c_k > 0$.
- $A_k \in \mathcal{A}$.
- Für alle $x \in \Omega$ gilt $|f(x)| \leq \phi(x)$.

Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

Für eine Treppenfunktion $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{A_k}(x)$ definieren wir das Integral durch

$$\int_\Omega \varphi dP := \sum_{k=1}^{m} c_k P(A_k) \, .$$

Der Inhalt einer Hüllreihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$ ist definiert durch

$$I_P(\phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \; P(A_k) \, .$$

Die L_{P^1}-Halbnorm einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist definiert durch das Infimum der Inhalte der Hüllreihen zu f

$$||f||_{P^1} := \inf\left\{ I(\phi) \mid \phi \text{ ist Hüllreihe zu } f \right\} .$$

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls eine Folge von Treppenfunktionen φ_k existiert mit

$$||f - \varphi_k||_{P^1} \to 0 \text{ für } k \to \infty .$$

In diesem Fall heißt

$$\int_\Omega f(x) dP := \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi_k dP$$

das Integral von f über Ω.

Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

Neuer Wein in alten Schläuchen

Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes verhält sich analog zu Lebesguemaß von letztem Semester.

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für jeden Punkt $x \in U$ ein Radius $\epsilon > 0$ existiert, so dass der Ball $B_\epsilon(x)$ in U enthalten ist, also $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt.

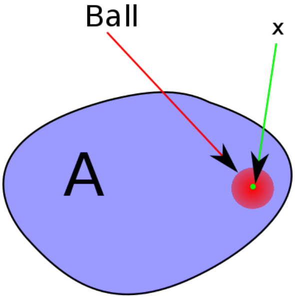

Figure: Quelle: Wikipedia

Borel'sche Sigma-Algebra

Die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$über $\mathbb{R}^n$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen $\mathcal{U}$ enthält, also

$$A_\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n);\ \mathcal{U} \subset \mathcal{A},\ \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$$

Existenz

Die Borel'sche σ-Algebra existiert, da die Potenzmenge eine σ-Algebra ist.

Messbarkeit

Die Borel'sche σ-Algebra ist in der σ-Algebra der Lebesgue messbaren Mengen enthalten.

Reelle Zufallsvariablen

Unter einer reellen Zufallsvariable verstehen wir eine Zufallsvariable

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$$
$$X(\omega) := \Big(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega) \Big) ,$$

wobei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ der $\mathbb{R}^n$ zusammen mit der Borel'schen Sigma-Algebra ist. Das Integral ist komponentenweise definiert durch

$$\int_\Omega X dP := \left(\int_\Omega X_1 dP, \cdots, \int_\Omega X_n dP \right)$$

Verteilungsfunktion

Für eine reelle Zufallsvariable heißt

$$F_X : \Omega \to [0,1]$$
$$F_X(x) := P(X \leq x) := P_X((-\infty, x)) = P(X^{-1}(-\infty, x))$$

Verteilungsfunktion von X.

Dichte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, wobei alle $A \in \mathcal{A}$ Lebesgue-messbar sind. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Dichte, falls für ihr Lebesgue-Integral $\int_\Omega f d\mu = 1$ gilt.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ ist eine Dichte auf $\mathbb{R}$.

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r^2 = x^2 + y^2 \text{ (da } \cos^2 + \sin^2 = 1)$$

LINK: Polarkoordinatentransformation

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2}\, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2}\, dr$$

$$= -\frac{\pi}{4} [e^{-r^2}]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Beispiel

Analog beweist man, dass für alle $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ die Funktion $f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ eine Dichte auf $\mathbb{R}$ ist.

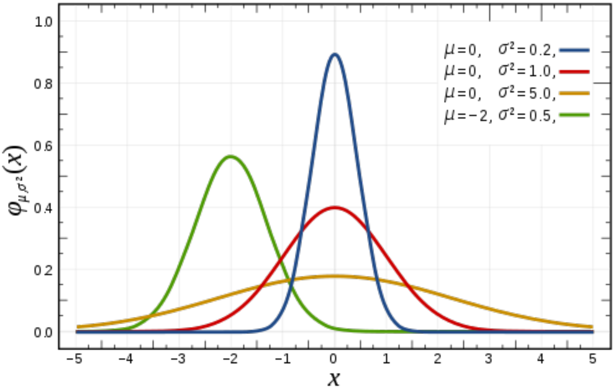

Figure: Quelle: Wikipedia

Zufallsvariablen

Normalverteilung

Eine reelle Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt normalverteilt, wenn $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ gilt. Man schreibt auch $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

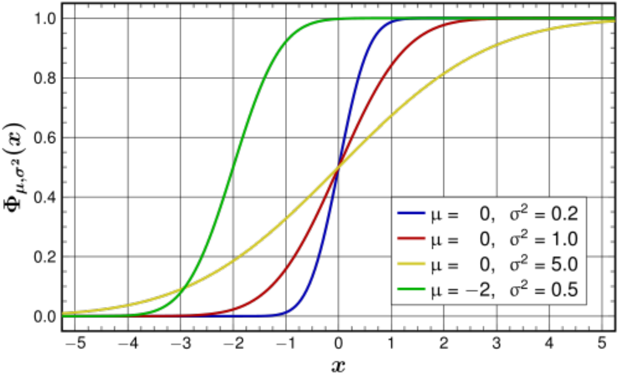

Figure: Quelle: Wikipedia

Verteilung und Unabhängigkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(R, \mathcal{B})$ ein Messraum und $\{X_i\}_{i=1}^n$ ein Folge von Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to R$. Die Zufallsvariablen heißen identisch verteilt, falls $P_{X_i} = P_{X_j}$ für alle i, j und stochastisch unabhängig, falls $P_{(X_1, \cdots, X_n)} = \prod_{i=1}^n P_{X_i}$ gilt.