

# Stochastik für Informatiker



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

## Messraum

Ein Messraum ist ein Paar  $(\Omega, \mathcal{A})$  bestehend aus einer Menge  $\Omega$  und einer Sigma-Algebra  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .

## Zufallsvariablen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \Omega'$$

so dass für alle Ereignisse  $A' \in \mathcal{A}'$

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

ein Ereignis in  $\mathcal{A}$  ist. Urbilder von Ereignissen sind also Ereignisse.

## Beispiel (Münzwurf)

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ ,  $\Omega' = \{0, 1\}$  mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und

$$X(\text{Kopf}) = 0$$

$$X(\text{Zahl}) = 1$$

## Beispiel (Summe zweier Würfel)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ ;  $X(a, b) := a + b$ .

## Bildmaß

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein Messraum und  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$  Eine Zufallsvariable. Durch

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A'))$$

für  $A' \in \mathcal{A}'$  wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega', \mathcal{A}')$  definiert. Es wird Bildmaß genannt. Anstelle von  $P_X(A')$  wird auch die Schreibweise  $P(X \in A') := P_X(A')$  verwendet.

## Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$   
 $\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  und  
 $X : \Omega \rightarrow \Omega'; X(a, b) := a + b.$  Dann ist  
 $P_X(3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

## Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge  $A \in \mathcal{A}$  heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

Eine Funktion

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{A_k}(x)$$

mit  $c_k \in \mathbb{R}$  und  $A_k \in \mathcal{A}$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  heißt  
Treppenfunktion.

## Hüllreihe

Eine Hüllreihe zu einer Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Reihe  $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $c_k \in \mathbb{R}$  sind positive reelle Zahlen  $c_k > 0$ .
- $A_k \in \mathcal{A}$ .
- Für alle  $x \in \Omega$  gilt  $|f(x)| \leq \phi(x)$ .

Für eine Treppenfunktion  $\varphi(x) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{A_k}(x)$  definieren wir das Integral durch

$$\int_{\Omega} \varphi dP := \sum_{k=1}^m c_k P(A_k) .$$

Der Inhalt einer Hüllreihe  $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_k}(x)$  ist definiert durch

$$I_P(\phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k P(A_k) .$$



# Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

Die  $L_{P1}$ -Halbnorm einer Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch das Infimum der Inhalte der Hüllreihen zu  $f$

$$\|f\|_{P1} := \inf \left\{ I(\phi) \mid \phi \text{ ist Hüllreihe zu } f \right\} .$$

Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar, falls eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_k$  existiert mit

$$\|f - \varphi_k\|_{P1} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty .$$

In diesem Fall heißt

$$\int_{\Omega} f(x) dP := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_k dP$$

das Integral von  $f$  über  $\Omega$ .

## Neuer Wein in alten Schläuchen

Integration bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes verhält sich analog zu Lebesguemaß von letztem Semester.

Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt offen, falls für jeden Punkt  $x \in U$  ein Radius  $\epsilon > 0$  existiert, so dass der Ball  $B_\epsilon(x)$  in  $U$  enthalten ist, also  $B_\epsilon(x) \subset U$  gilt.

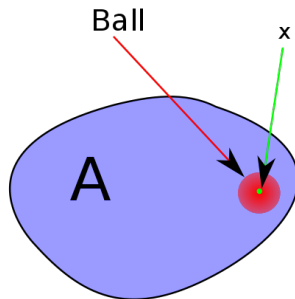


Figure: Quelle: Wikipedia

## Borel'sche Sigma-Algebra

Die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  über  $\mathbb{R}^n$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Mengen  $\mathcal{U}$  enthält, also

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n); \mathcal{U} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \}$$

## Existenz

Die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra existiert, da die Potenzmenge eine  $\sigma$ -Algebra ist.

## Messbarkeit

Die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra ist in der  $\sigma$ -Algebra der Lebesgue messbaren Mengen enthalten.

## Reelle Zufallsvariablen

Unter einer reellen Zufallsvariable verstehen wir eine Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X(\omega) := \left( X_1(\omega), \dots, X_n(\omega) \right),$$

wobei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  der  $\mathbb{R}^n$  zusammen mit der Borel'schen Sigma-Algebra ist. Das Integral ist komponentenweise definiert durch

$$\int_{\Omega} X dP := \left( \int_{\Omega} X_1 dP, \dots, \int_{\Omega} X_n dP \right)$$

## Verteilungsfunktion

Für eine reelle Zufallsvariable heißt

$$F_X : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$F_X(x) := P(X \leq x) := P_X((-\infty, x)) = P(X^{-1}(-\infty, x))$$

Verteilungsfunktion von  $X$ .

## Dichte

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum, wobei alle  $A \in \mathcal{A}$  Lebesgue-messbar sind. Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Dichte, falls für ihr Lebesgue-Integral  $\int_{\Omega} f d\mu = 1$  gilt.

## Beispiel

Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  ist eine Dichte auf  $\mathbb{R}$ .

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r^2 = x^2 + y^2 \text{ ( da } \cos^2 + \sin^2 = 1 \text{ )}$$

LINK: Polarkoordinatentransformation

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr$$

$$= -\frac{\pi}{4} [e^{-r^2}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



## Beispiel

Analog beweist man, dass für alle  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$  die Funktion  $f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$  eine Dichte auf  $\mathbb{R}$  ist.

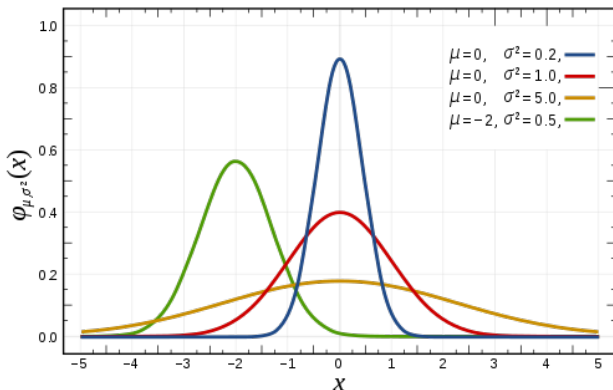


Figure: Quelle: Wikipedia

## Normalverteilung

Eine reelle Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt normalverteilt, wenn  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$  mit  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$  gilt. Man schreibt auch  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

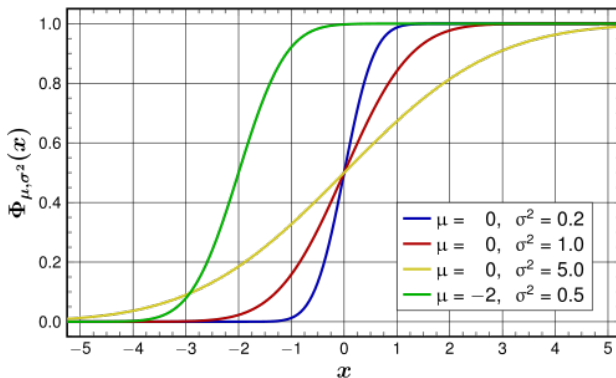


Figure: Quelle: Wikipedia

## Verteilung und Unabhängigkeit

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(R, \mathcal{B})$  ein Messraum und  $\{X_i\}_{i=1}^n$  ein Folge von Zufallsvariablen  $X_i : \Omega \rightarrow R$ . Die Zufallsvariablen heißen identisch verteilt, falls  $P_{X_i} = P_{X_j}$  für alle  $i, j$  und stochastisch unabhängig, falls  $P_{(X_1, \dots, X_n)} = \prod_{i=1}^n P_{X_i}$  gilt.