Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (Stochastik)

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

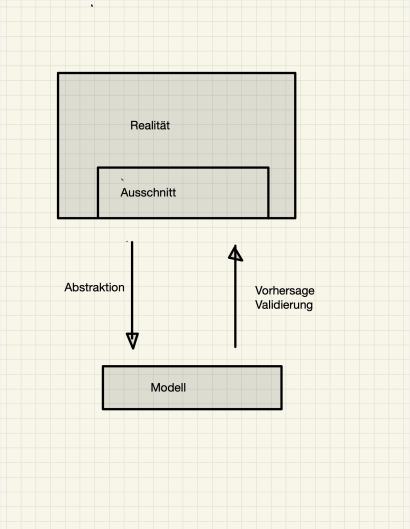
Wahrscheinlichkeitstheorie

Beschreibung und Untersuchung von zufälligen Vorgängen und Modellen.

Statistik

Umgang mit dem Zufall und Schlussfolgern aus Beobachtungen

Mathematik und Realität



Was ist Zufall

Keine kausale Erklärung für den Ausgang eines Vorganges vorhanden (Nicht-Deterministisch)

Kausalität (Wikipedia)

Kausalität ist die Beziehung zwischen Ursache und Wirkung. Sie betrifft die Abfolge von Ereignissen und Zuständen, die aufeinander bezogen sind. Demnach ist A die Ursache für die Wirkung B, wenn B von A herbeigeführt wird.

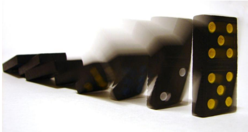


Figure: Quelle: Wikipedia

Stochastik vs. Kausalität

In den seltensten Fällen lassen sich aus stochastischen Zusammenhängen kausale Zusammenhänge ableiten. ACHTUNG: Populisten tun dies jedoch ständig!

Stochastik vs. Kausalität

Beobachtung: Bei Regen tragen die Menschen einen Regenschirm. Es folgt NICHT: Wenn man einen Regenschirm aufspannt, fängt es an zu regnen. Ebenso folgt NICHT: Wenn es regnet, sieht man Menschen mit Regenschirmen.

Figure: Quelle: Wikipedia

Einleitung

Gibt es überhaupt Zufall?

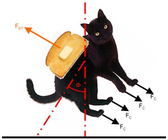


Figure: Quelle: https://www.laurentinews.de/wp-content/uploads/2014/03/katze-toast1.jpg

Zufall hängt von der betrachteten Skala ab.
Physik $\Rightarrow$ Skalen können nicht beliebig klein werden.

Wikipedia://Brownsche Molekularbewegung.

Einleitung

Motivation

Maschinelles Lernen. Maschinelle Vorhersage. Informationstheorie. Prozesstheorie. Optimierungstheorie. Mustererkennung. Komplexitätstheorie, bildgebende Verfahren, Physik.

Motivation

Wie programmiere und trainiere ich einen "intelligenten" Spam-Filter? Ab wie vielen richtig beantworteten Ja-Nein-Fragen ist der von meinem Kommilitonen gebaute Roboter wirklich intelligent und hat nicht nur zufällig die richige Antwort gewählt? Wie bewertet Google Webseiten? Warum wird das Rauschen von Sensoren ständig als Normalverteilt angenommen? Macht es Sinn auf Rot zu setzen, nachdem 100 mal Schwarz im Roulette fiel? Kann man Geschwafel quantifizieren? Wie kann man mit einer Münze Integrale lösen und was hat das mit Hollywood zu tun?

Einleitung

Literatur

- Stochastik für Informatiker; L. Dümbgen; Springer
- Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik; Hans-Otto Georgii; De Gruyter Studium
- Achim Klenke; Wahrscheinlichkeitstheorie; Springer

Einleitung

Bessere Entscheidungen durch Mathematik?!?

Gegeben sind 3 geschlossene Türen. Hinter einer ist der Hauptgewinn, hinter zwei eine Ziege. Der Spieler darf sich zuerst für eine Tür entscheiden. Danach öffnet der Moderator eine der nicht gewählten Türen, hinter der nicht der Hauptgewinn ist und fragt den Spieler, oben er seine vorige Entscheidung revidieren und die andere geschlossene Tür öffnen möchte.

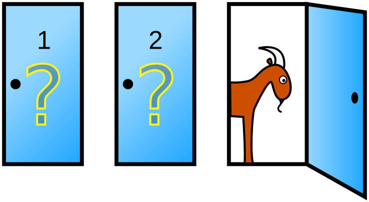


Figure: Quelle: Wikipedia

Einleitung

Bessere Entscheidungen durch Mathematik?!?

Hat der Spieler eine höhere Gewinnchance, wenn er die Tür wechselt?

Bessere Entscheidungen durch Mathematik?!?

Wechseln hat eine höhere Gewinnchance!

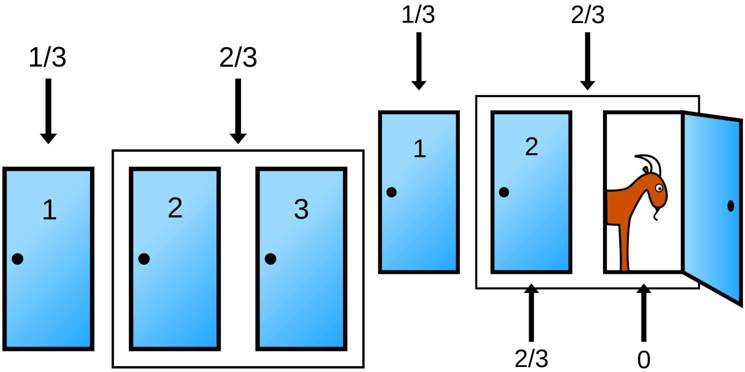


Figure: Quelle: Wikipedia

Laplace Wahrscheinlichkeit

Gegeben endliche Menge Ω (Grundmenge).
Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ (Menge aller Teilmengen).
$A \in \mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet man auch als Ereignis.

$$P(A) := \frac{\#A}{\#\Omega}$$

$$(\#M := \text{Anzahl der Elemente von M})$$

heißt Laplace Wahrscheinlichkeit.

Laplace Wahrscheinlichkeit

$$P(A^c) := P(\bar{A}) := 1 - P(A) \qquad A^c := \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$$

Beispiel (Würfel)

Für einen einmaligen Wurf eines Würfels sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Ein mögliches Ereignis $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ wäre das Ereignis $A := \{3, 4\}$, also das Ereignis eine 3 oder eine 4 zu würfeln.
Hierzu ist die Laplace Wahrscheinlichkeit dann

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{6}$$

Das Gegenereignis hierzu ist $A^c = \{1, 2, 5, 6\}$ mit $P(A^c) = \frac{4}{6}$

Kombinationen und Permutationen

Für alle folgenden Fälle gilt $n := \#\Omega$.

- $Perm_k^n(\Omega, m.W.) := \{\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^k\}$ Menge aller Permutationen mit Wiederholung.
- $Perm_k^n(\Omega, o.W.) := \{\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^k \,|\, \omega_i \neq \omega_j\}$ Menge aller Permutationen ohne Wiederholung.

Beispiel (Würfel)

- Die Menge $\{3, 3, 2, 5\} \in Perm_4^6(\Omega, m.W.)$ ist eine mögliche Permutation mit Wiederholung.
- Die Menge $\{4, 2, 1, 5\} \in Perm_4^6(\Omega, o.W.)$ ist eine mögliche Permutation ohne Wiederholung.

Kombinationen und Permutationen

- $Kom_k^n(\Omega, m.W.) := \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k} \in \Omega^k \,|\, 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k\}$ Menge aller Kombinationen mit Wiederholung.
- $Kom_k^n(\Omega, o.W.) := \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k} \in \Omega^k \,|\, 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k; \omega_{i_i} \neq \omega_{i_j}\}$ Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung.

Beispiel (Würfel)

- Die Menge $\{2, 3, 3, 5\} \in Kom_4^6(\Omega, m.W.)$ ist eine mögliche Kombination mit Wiederholung.
- Die Menge $\{1, 2, 4, 5\} \in Kom_4^6(\Omega, o.W.)$ ist eine mögliche Kombination ohne Wiederholung.

Kombinationen und Permutationen

- $\#Perm_k^n(\Omega, m.W.) = n^k = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{\text{k-mal}}$
- $\#Perm_k^n(\Omega, o.W.) = n_k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- $\#Kom_k^n(\Omega, o.W.) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\#Kom_k^n(\Omega, m.W.) = \binom{n+k-1}{k}$

Beispiel: Hash Kollision

Beim Hashing werden zufällig $k \leq n$ Daten auf n Speicherplätze verteilt. Bezeichnen wir mit $A_{k,n}$ die Möglichkeiten der Mehrfachbelegungen von Feldern, so ist das Komplementäre Ereignis $A^c_{k,n} = Perm^n_k(\Omega, o.W.)$, wobei Ω die Menge der Verfügbaren Speicherplätze Darstellt.

Beispiel: Hash Kollision

$$P(A^c_{k,n}) = \frac{\#Perm^n_k(\Omega, o.W.)}{\#Perm^n_k(\Omega, m.W.)} = \frac{n_k}{n^k} = \prod_{i=0}^{k-1}(1 - \frac{i}{n})$$

$$= \exp(\sum_{i=0}^{k-1} \ln{(1 - \frac{i}{n})}) \leq \exp(\sum_{i=0}^{k-1}(-\frac{i}{n})$$

$$(ln(1-x) \leq -x \text{ für } x < 1)$$

$$= \exp(-\frac{(k-1)k}{2n})$$

Beispiel: Hash Kollision (Geburtstags-Paradoxon)

Für $n = 365$ und $k = 23$ ist damit $P(A_{k,n}) > \frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Gruppe von mehr als 23 Leuten zwei Leute am gleichen Tag Geburtstag haben, ist also größer als $\frac{1}{2}$.