Stochastik für Informatiker

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Maßraum

Ein Maßraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bestehend aus der Grundmenge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und einer Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$
$$\mu(\emptyset) = 0$$
$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Mengen mit $\mu(M) = 0$ werden Nullmengen genannt.

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Messbare Abbildung

Ein Abbildung $f : \Omega \to R$ zwischen einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und einer σ-Algebra $(R, \mathcal{B})$ heißt messbar, falls

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \text{ für alle } B \in \mathcal{B}$$

gilt. (Urbilder von Messbaren Mengen sind Messbar).
Für eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert eine endliche Reihe

$$s_n(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot 1_{A_j}$$

$$s_n(x) \leq f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) \to f(x) \text{ für alle x } \in \Omega$$

Man nennt s_n auch einfache Funktion.

Integration

Für eine einfache Funktion $s_n : \Omega \to \mathbb{R}$ definiere

$$\int_\Omega s_n(x)\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mu(A_i)$$

Maßraum

Für eine positive Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ definiere

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu = \sup(\int_\Omega s_n(x)\, d\mu; s_n(x) \text{ einfach mit } s_n(x) \leq f(x))$$

Integration

Integration

Für allgemeines f zerlege $f = f^+ - f^-$ mit $f^+ := \max(0, f)$ und $f^- := -min(0, f)$ und definiere

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu = \int_\Omega f^+(x)\, d\mu - \int_\Omega f^-(x)\, d\mu$$

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\int_\Omega f(x)\, d\mu = 1$ heißt Dichte.

Wahrscheinlichkeitsmaß

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Dichte, so definiert

$$P_f(A) := \int_A f(x) dx$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$.

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Beispiel (Normalverteilung)

$\Omega = R = \mathbb{R}$ mit Borell'scher Sigma-Algebra.
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

$$P_f(A) := \int_A \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

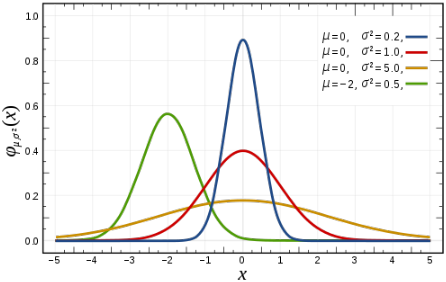

Figure: Quelle: Wikipedia

Beispiel (Normalverteilung)

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r^2 = x^2 + y^2 \text{ (da } \cos^2 + \sin^2 = 1)$$

LINK: Polarkoordinatentransformation

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2}\, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2}\, dr$$

$$= -\frac{\pi}{4}[e^{-r^2}]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Bildmaß

Ist $X : \Omega \to R$ eine Zufallsvariable zwischen einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und einer σ-Algebra $(R, \mathcal{B})$, so definiert

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B))$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(R, \mathcal{B})$. Ist $R = \mathbb{R}$, so nennen wir X eine reelle Zufallsvariable. Ist Ω albzählbar, so heißt X diskrete Zufallsvariable.

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$R = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ und
$X : \Omega \to R; X(a, b) := a + b$. Dann ist
$P_X(3) = P((1, 2), (2, 1)) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$, so heißt

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter (der Hypothese) B.

Stochastische unabhängigkeit

Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heißen stochastisch unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt. Ist $P(B) > 0$, so folgt $P(A|B) = P(A)$.

Erwartungswert

Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable, so ist Ihr Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X \; d\mu \quad \text{(kontinuierlich)}$$

$$\mathbb{E}(X) := \sum_x X(x)P(x) \quad \text{(diskret)}$$

Eigenschaften

Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$ konstant, so gilt:

$$\mathbb{E}(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Erwartungswert Beispiele

$\Omega = R = \mathbb{R}$ mit Borell'scher Sigma-Algebra, $X(x) = x$ und

$$P_f(A) := \int_A \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &:= \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (y+\mu) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\, dy \\
&= \mu \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\, dy + \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\, dy = \mu
\end{aligned}$$

Erwartungswert Beispiele

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\},\ P(\text{Kopf}) = P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$,
$X(\text{Kopf}) = 0, X(\text{Zahl}) = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot P(X^{-1}(0)) + 1 \cdot P(X^{-1}(1)) \\ &= 0 \cdot P(\text{Kopf}) + 1 \cdot P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Varianz

Die Varianz ist definiert durch

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)^2)$$