

# Stochastik für Informatiker



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

## Gleichverteilung

Die Gleichverteilung  $U(a, b)$  auf einem Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1_{(a,b)}}{|a-b|}$$

$$\Rightarrow \text{Verteilung: } F(x) = P_f((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^x \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|} dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{x-a}{|b-a|} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$$

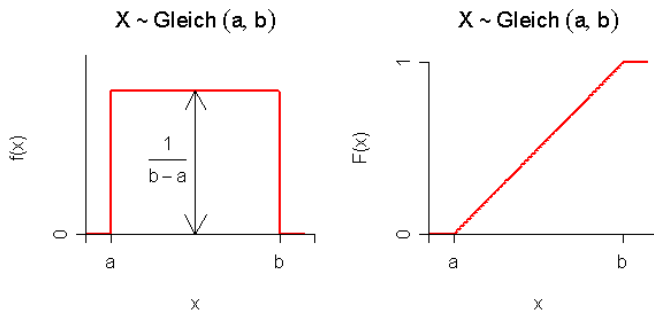


Figure: Quelle: Wikipedia

## Gleichverteilung

Sei  $X \sim U(a,b)$ .

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \cdot 1 dx = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \cdot 1 dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} (4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2) = \frac{1}{12} (b-a)^2\end{aligned}$$

## Normalverteilung

Die Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  auf  $\mathbb{R}$  ist definiert durch

Dichte:  $f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$\Rightarrow$  Verteilung:  $F(x) = N(\mu, \sigma^2)(-\infty, x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

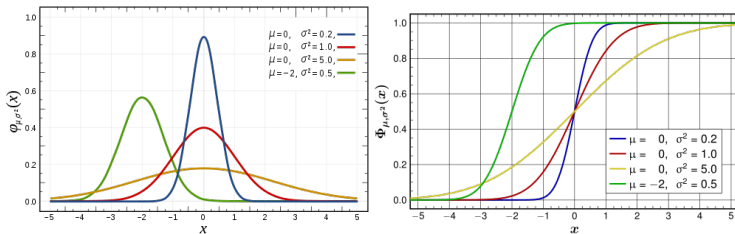


Figure: Quelle: Wikipedia

## Normalverteilung

Sei  $X \sim N(\mu, \sigma)$ .

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

## Poissonverteilung

Die Poissonverteilung  $Pois(\lambda)$  auf  $\mathbb{N}_{\geq 0}$  ist definiert durch

$$P_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow F_{\lambda}(n) = \sum_{k=0}^n P_{\lambda}(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$$

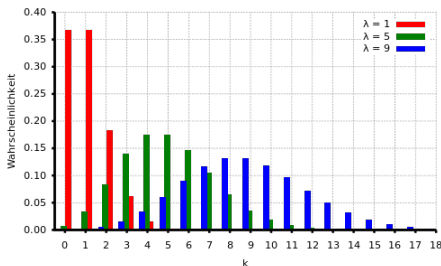


Figure: Quelle: Wikipedia



## Poisson Verteilung

Die Poisson Verteilung beschreibt das Auftreten von seltenen Ereignissen und spielt bei Zählprozessen eine wichtige Rolle.

## Poisson Verteilung

$$X \sim \text{Pois}(\lambda)$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$

## Bernoulliverteilung

Die Bernoulliverteilung Für  $\Omega = \{0, 1\}$  und  $p \in [0, 1]$  ist definiert durch

$$P(\omega) = p^\omega (1 - p)^{1-\omega}$$

- Werfen einer Münze: Kopf (Erfolg),  $p = 1/2$ , und Zahl (Misserfolg),  $q = 1/2$ .
- Werfen eines Würfels, wobei nur eine 6 als Erfolg gewertet wird:  $p = 1/6$ ,  $q = 5/6$ .
- Qualitätsprüfung (einwandfrei, nicht einwandfrei).
- Betrachte sehr kleines Raum/Zeit-Intervall: Ereignis tritt ein ( $p \gtrapprox 0$ ), tritt nicht ein ( $q \lesssim 1$ ).

# Verteilungen

## Binomialverteilung

$$B(k, p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

## Binomialverteilung

$$X_1, \dots, X_n \sim B \Rightarrow \sum X_i \sim B$$

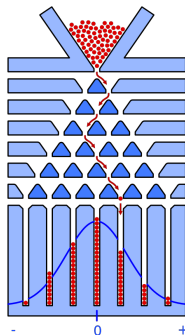


Figure: Quelle: Wikipedia

## Motivation

Welche Verteilung hat das arithmetische Mittel  $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

## Motivation

Wie und gegen was konvergiert  $P_{S_n}$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

## Konvergenz von W-Maßen

Was bedeutet Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen?

## Inspiration: Gleichmässige Konvergenz von Funktionen

Eine Folge von Funktionen  $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert gleichmässig gegen eine Funktion  $f$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

für alle  $x \in A$ .

## Konvergenz von W-Maßen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $P_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$  eine Folge von Wahrscheinlichkeits-Maßen. Die Folge konvergiert gegen das Wahrscheinlichkeits-Maß  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f dP_n = \int_{\Omega} f dP$$

für alle messbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .



## Zentraler Grenzwertsatz

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter, reeller Zufallsvariablen mit  $E(X_n) = \mu$  und  $V(X_n) = \sigma^2$ . Dann gilt für das arithmetische Mittel  $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

$$P_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)} \rightarrow P_{N(0,1)}$$

wobei  $P_{N(0,1)}$  das Wahrscheinlichkeits-Maß mit der Dichte  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$  ist.



## Erzeugende Funktion

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}), \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

erzeugende Funktion zu  $X$  bzw.  $P_X$ .

## Stetigkeitssatz von Lévy

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum so wie  $X$  und  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Zufallsvariablen mit erzeugenden Funktionen  $\psi$  und  $\psi_n$ . Dann gilt:

$$\psi_n \rightarrow \psi \Rightarrow P_{X_n} \rightarrow P_X$$

## Stetigkeitssatz von Levy

Mit  $\varphi_X := \mathbb{E}(e^{itx})$  ist  $\varphi_X(-it) = \psi_X(t)$  und der Stetigkeitssatz von Levy folgt aus dem Umkehrsatz.

## Eigenschaften erzeugender Funktionen

- $\psi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$  für  $|t| \leq \delta$  (Taylor).
- $e^{\frac{t^2}{2}}$  ist die erzeugende Funktion von  $P_{N(0,1)}$ .
- $\psi_{X+Y} = \psi_X \cdot \psi_Y$

## Beweis Zentraler Grenzwertsatz

- $|t| \leq \delta$
- $\psi(t)$  erzeugende Funktion von  $X_n$ .
- $Y_n := \frac{X_n - \mu}{\sigma}$ . Dann ist  $\mathbb{E}(Y_n) = 0$  und  $\mathbb{V}(Y_n) = 1$ .
- $\psi^*(t)$  erzeugende Funktion von  $Y_n$ .
- $\psi_n(t)$  erzeugende Funktion von  $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$ . Dann ist  $\psi_n(t) = \psi^*\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= \psi^*\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k! \sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k) \\ &= 1 + \frac{t^2}{2n} + \underbrace{\sum_{k=3}^n \frac{t^k}{k! \sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k)}_{=: R_n}\end{aligned}$$

## Beweis Zentraler Grenzwertsatz

$$R_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}(\psi^*(\delta) + \psi^*(-\delta)) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Für  $T_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)$  erhält man damit

$$\psi_{T_n}(t) = (\psi_n(t))^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + R_n(t)\right)^n \rightarrow e^{\frac{t^2}{2}} \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Mit dem Stetigkeitssatz von Levy folgt der zentrale Grenzwertsatz.

## Umkehrsatz

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\hat{f}$  integrierbar, gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy,$$

fast überall.



## Sensorrauschen

Wir können annehmen, dass das Rauschen eines Sensor  $N_S$  aus vielen kleinen, stochastisch unabhängigen Effekten  $N_1, \dots, N_k$  Beruht, die sich aufsummieren, also  $N_S = N_1 + \dots + N_k$ . Wenn wir annehmen, dass jeder Effekt Gleichverteilt ist, ist diese Summe nach dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise Normalverteilt.



## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen

Angenommen man findet einen Apparat (Fluxkompensator?), der zufällig Zahlen in einem Intervall  $[0, \rho]$  ausgibt. Anhand von Beobachtungen der Zahlen möchte man  $\rho$  schätzen.



Figure: Quelle: forevergeek

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Modell

Wir machen die Annahme, dass alle Zahlen in dem Intervall gleich wahrscheinlich auftreten und nehmen  $n$  Stichproben  $X_1, \dots, X_n$ . Einen Schätzer für  $\rho$  bezeichnen wir mit  $T_n$ .

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Schätzer 1

Eine einfache und einleuchtende Idee ist es,  $\rho$  durch die größte beobachtete Zahl zu schätzen, also  $T_n^{\max} := \max(X_1, \dots, X_n)$ .

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Schätzer 2

Da das Auftreten der Zahlen gleich wahrscheinlich ist, ist der Erwartungswert des Zufallsexperiments  $\rho/2$ . Unter Berufung auf das schwache Gesetz der Großen Zahlen erscheint der Schätzer  $T_n^E := 2 \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)$  sehr plausibel.

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich

Welcher Schätzer ist besser und in welchem Sinn?

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Konvergenz

$$\begin{aligned} P(|T_n^{\max} - \rho| \geq \epsilon) &= P(T_n^{\max} \leq \rho - \epsilon) \\ &= P(X_1 \leq \rho - \epsilon, \dots, X_n \leq \rho - \epsilon) = \left(\frac{\rho - \epsilon}{\rho}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Konvergenz

$$P(|T_n^E - \rho| \geq \epsilon) = P\left(\left|\frac{1}{n} \sum X_i - \frac{\rho}{2}\right| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(Gesetz der Großen Zahlen)

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Erwartungswert

Da  $P(T_n^{max} \leq c) = (\frac{c}{\rho})^n$  und  $\frac{d}{dx}(\frac{c}{\rho})^n = \frac{n}{\rho^n} x^{n-1}$  und damit

$$\mathbb{E}(T_n^{max}) = \int_0^\rho x \frac{n}{\rho^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{\rho^n} \int_0^\rho x^n dx = \frac{n}{n+1} \rho \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho$$

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Erwartungswert

$$\mathbb{E}(T_n^E) = \frac{2}{n} \sum \mathbb{E}(X_i) = \rho$$

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Varianz

$$\mathbb{V}(T_n^{\max}) = \frac{4}{n} \mathbb{V}(X_1) = \frac{4}{n\rho} \int_0^\rho \left(x - \frac{\rho}{2}\right)^2 dx = \frac{\rho^2}{3n}$$

## Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Varianz

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T_n^E) &= \mathbb{E}((T_n^E)^2) - (\mathbb{E}(T_n^E))^2 \\ &= \int_0^\rho x^2 \frac{n}{\rho^n} x^{n-1} dx - \left(\frac{n\rho}{n+1}\right)^2 = \frac{n\rho^2}{(n+1)^2(n+2)} \end{aligned}$$