Stochastik für Informatiker

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Erwartungswert

Eine reelle Zufallsvariable ist integrierbar und ihr Erwartungswert wird definiert durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X \, dP \, .$$

Erwartungswert

Erwartungswert

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine eindimensionale reelle Zufallsvariable, so ist

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$$

Erwartungswert

Transformationsformel

Für eine reelle Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(g \circ X) := \int_\Omega g \circ X \; dP = \int_{\mathbb{R}^n} g \; dP_X \; .$$

Ist insbesondere $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Dichte für P_X , so ist

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot f(x) \; d\mu$$

das Lebesgue-Integral der Funktion $x \cdot f(x)$.

Erwartungswert

Transformationsformel

Für $g = 1_A$ mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\int 1_A \, dP_X = P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = \int 1_{X^{-1}(A)} \, dP$$
$$= \int 1_A \circ X \, dP$$

Für eine Treppenfunktion $g = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$folgt das Ergebnis aus der Linearität des Integrals für Treppenfunktionen. Für integrierbares g folgt das Resultat mit Hilfe von Konvergenzsätzen für das Integral.

Erwartungswert

Beispiel

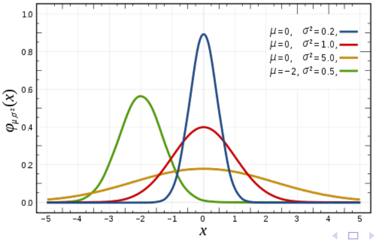
$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, $P(\text{Kopf}) = P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$,
$X(\text{Kopf}) = 0, X(\text{Zahl}) = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot P(X^{-1}(0)) + 1 \cdot P(X^{-1}(1)) \\ &= 0 \cdot P(\text{Kopf}) + 1 \cdot P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Beispiel

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &:= \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (y+\mu) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} \, dy \\ &= \mu \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} \, dy + \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} \, dy = \mu\end{aligned}$$



Eigenschaften

Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ reelle, integrierbare Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$ konstant, so gilt:

$$\mathbb{E}(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$X(x) \leq Y(x)\ \forall x \in \Omega \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$
$$X, Y \text{ stoch. unabhängig} \Rightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}(1_A) = P(A)$$

Markov Ungleichung

Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle, integrierbare Zufallsvariable und $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton wachsend. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$ mit $f(\epsilon) > 0$

$$P(|Y| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(f \circ |Y|)}{f(\epsilon)}$$

Beweis

Da $f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}} \leq f \circ |Y|$ folgt

$$\begin{aligned} f(\epsilon)P(|Y| \geq \epsilon) =& f(\epsilon)\mathbb{E}(1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) = \mathbb{E}(f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) \\ \leq& \mathbb{E}(f \circ |Y|) \end{aligned}$$

Varianz

Für eine reelle Zufallsvariable ist die Varianz definiert durch

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \; .$$

Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

Beispiel

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(xe^{-\frac{x^2}{2}}) \; dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[x(e^{-\frac{x^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx \right) = 0 + 1 = 1$$

LINK: Partielle Integration. Mit "Verschiebungstrick"
$\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Erwartungswert

Tschebyscheff-Ungleichung

Für eine reelle, integrierbare und quadratintegrierbare Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\epsilon^2}$$

Beweis

Folgt direkt aus der Markov-Ungleichung mit $Y' = Y - \mathbb{E}(Y)$ und $f(x) = x^2$

Highlight

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen (uid, iid(englisch)) mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma < \infty$, dann gilt

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma}{n \cdot \epsilon^2} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(stochastische Konvergenz).

Erwartungswert

Beweis

Mit $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu$ ist $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i - \mu) = 0$ und $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma}{n}$. Aus der Tschebyscheff-Ungleichung folgt die Behauptung.

Erwartungswert