Stochastik für Informatiker

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung $U(a,b)$ auf einem Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1_{(a,b)}}{|a-b|}$$

$$\Rightarrow \text{Verteilung: } F(x) = P_f((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|} dt$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq a \\ \frac{x-a}{|b-a|} \text{ für } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ für } x \geq b \end{cases}$$

Verteilungen

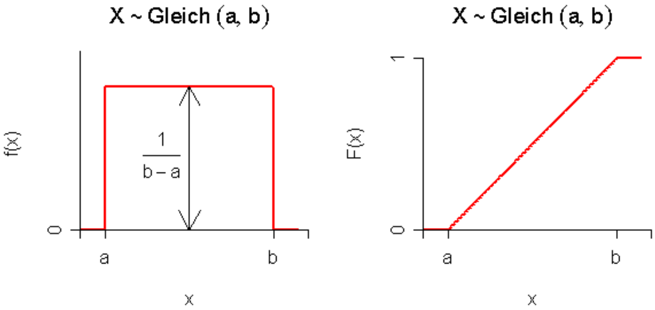


Figure: Quelle: Wikipedia

Gleichverteilung

Sei X ~U(a,b).

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\cdot 1\,dx = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\cdot 1\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\left(4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2\right) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

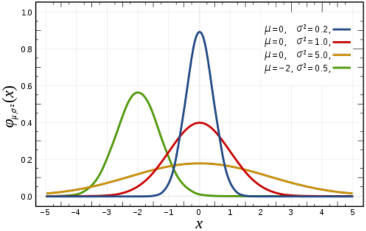
Normalverteilung

Die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Verteilung: } F(x) = N(\mu, \sigma^2)(-\infty, x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Verteilungen



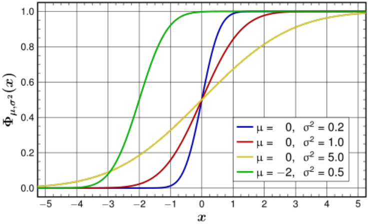


Figure: Quelle: Wikipedia

Normalverteilung

Sei $X \sim N(\mu, \sigma)$.

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$
$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Poissonverteilung

Die Poissonverteilung $Pois(\lambda)$ auf $\mathbb{N}_{\geq 0}$ ist definiert durch

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow F_\lambda(n) = \sum_{k=0}^{n} P_\lambda(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

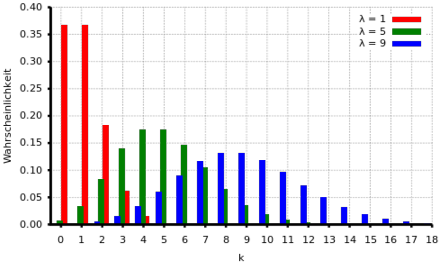


Figure: Quelle: Wikipedia

Verteilungen

Poisson Verteilung

Die Poisson Verteilung beschreibt das Auftreten von seltenen Ereignissen und spielt bei Zählprozessen eine wichtige Rolle.

Poisson Verteilung

$X \sim Pois(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$
$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$

Bernoulliverteilung

Die Bernoulliverteilung Für $\Omega = \{0, 1\}$ und $p \in [0, 1]$ ist definiert durch

$$P(\omega) = p^{\omega}(1-p)^{1-\omega}$$

- Werfen einer Münze: Kopf (Erfolg), $p = 1/2$, und Zahl (Misserfolg), $q = 1/2$.
- Werfen eines Würfels, wobei nur eine 6 als Erfolg gewertet wird: $p = 1/6, q = 5/6$.
- Qualitätsprüfung (einwandfrei, nicht einwandfrei).
- Betrachte sehr kleines Raum/Zeit-Intervall: Ereignis tritt ein ($p \gtrapprox 0$), tritt nicht ein ($q \lessapprox 1$).

Verteilungen

Binomialverteilung

$B(k,p,n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Binomialverteilung

$X_1, \cdots, X_n \sim B \Rightarrow \sum X_i \sim B$

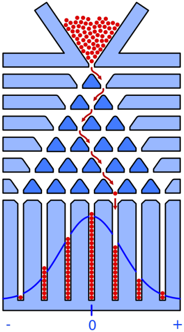


Figure: Quelle: Wikipedia

Motivation

Welche Verteilung hat das arithmetische Mittel $S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ für $n \to \infty$?

Motivation

Wie und gegen was konvergiert P_{S_n} für $n \to \infty$?

Konvergenz von W-Maßen

Was bedeutet Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen?

Inspiration: Gleichmässige Konvergenz von Funktionen

Eine Folge von Funktionen $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig gegen eine Funktion f, falls

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(x) - f(x)|| = 0$$

für alle $x \in A$.

Konvergenz von W-Maßen

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $P_n : \Omega \to [0,1]$ eine folge von Wahrscheinlichkeits-Maßen. Die Folge konvergiert gegen das Wahrscheinlichkeits-Maß $P : \Omega \to [0,1]$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f dP_n = \int_\Omega f dP$$

für alle messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Highlight

Zentraler Grenzwertsatz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter, reeller Zufallsvariablen mit $E(X_n) = \mu$ und $V(X_n) = \sigma^2$. Dann gilt für das arithmetische Mittel $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)} \to P_{N(0,1)}$$

wobei $P_{N(0,1)}$ das Wahrscheinlichkeits-Maß mit der Dichte $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist.

Erzeugende Funktion

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}), \; t \in I \subset \mathbb{R}$$

erzeugende Funktion zu X bzw. P_X.

Stetigkeitssatz von Lévy

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum so wie X und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen mit erzeugenden Funktionen ψ und ψ_n. Dann gilt:

$$\psi_n \to \psi \Rightarrow P_{X_n} \to P_X$$

Zentraler Grenzwertsatz

Eigenschaften erzeugender Funktionen

- $\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$ für $|t| \leq \delta$ (Taylor).
- $e^{\frac{t^2}{2}}$ ist die erzeugende Funktion von $P_{N(0,1)}$.
- $\psi_{X+Y} = \psi_X \cdot \psi_Y$

Beweis Zentraler Grenzwertsatz

- $|t| \leq \delta$
- $\psi(t)$ erzeugende Funktion von X_n.
- $Y_n := \frac{X_n - \mu}{\sigma}$. Dann ist $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ und $\mathbb{V}(Y_n) = 1$.
- $\psi^*(t)$ erzeugende Funktion von Y_n.
- $\psi_n(t)$ erzeugende Funktion von $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$. Dann ist $\psi_n(t) = \psi^*(\frac{t}{\sqrt{n}})$

$$\psi_n(t) = \psi^*(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!\sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k)$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2n} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \frac{t^k}{k!\sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k)}_{=:R_n}$$

Beweis Zentraler Grenzwertsatz

$$R_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}(\psi^*(\delta) + \psi^*(-\delta)) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Für $T_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)$ erhält man damit

$$\psi_{T_n}(t) = (\psi_n)(t))^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + R_n(t)\right)^n \to e^{\frac{t^2}{2}} \text{ für } n \to \infty$$

Mit dem Stetigkeitssatz von Levy folgt der zentrale Grentzwertsatz.

Umkehrsatz

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\hat{f}$ integrierbar, gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{i<x,y>}\, dy,$$

fast überall.

Stetigkeitssatz von Levy

Mit $\varphi_X := \mathbb{E}(e^{itx})$ ist $\varphi_X(-it) = \psi_X(t)$ und der Stetigkeitssatz von Levy folgt aus dem Umkehrsatz.

Highlight

Sensorrauschen

Wir können annehmen, dass das Rauschen eines Sensor N_S aus vielen kleinen, stochastisch unabhängigen Effekten $N_1, \cdots N_k$ Beruht, die sich aufsummieren, also $N_S = N_1 + \cdots + N_k$ Diese Summe ist nach dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise Normalverteilt.

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen

Angenommen man findet einen Apparat (Fluxkompensator?), der zufällig Zahlen in einem Intervall $[0, \rho]$ ausgibt. Anhand von Beobachtungen der Zahlen möchte man ρ schätzen.

Figure: Quelle: forevergeek

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Modell

Wir machen die Annahme, dass alle Zahlen in dem Intervall gleich wahrscheinlich auftreten und nehmen n Stichproben $X_1, \cdots, X_n$. Einen Schätzer für ρ bezeichnen wir mit T_n.

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Schätzer 1

Eine einfache und einleuchtende Idee ist es, ρ durch die größte beobachtete Zahl zu schätzen, also $T_n^{max} := \max(X_1, \cdots, X_n)$.

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Schätzer 2

Da das Auftreten der Zahlen gleich wahrscheinlich ist, ist der Erwartungswert des Zufallsexperiments $\rho/2$. Unter Berufung auf das schwache Gesetz der Großen Zahlen erscheint der Schätzer $T_n^E := 2 \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)$ sehr plausibel.

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich

Welcher Schätzer ist besser und in welchem Sinn?

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Konvergenz

$$P(|T_n^{max} - \rho| \geq \epsilon) = P(T_n^{max} \leq \rho - \epsilon)$$

$$= P(X_1 \leq \rho - \epsilon, \cdots, X_n \leq \rho - \epsilon) = (\frac{\rho - \epsilon}{\rho})^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Konvergenz

$$P(|T_n^E - \rho| \geq \epsilon) = P(|\frac{1}{n} \sum X_i - \frac{\rho}{2}| \geq \frac{\epsilon}{2}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

(Gesetz der Großen Zahlen)

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Erwartungswert

Da $P(T_n^{max} \leq c) = (\frac{c}{\rho})^n$ und $\frac{d}{dx}(\frac{c}{\rho})^n = \frac{n}{\rho^n} x^{n-1}$ und damit

$$\mathbb{E}(T_n^{max}) = \int_0^\rho x \frac{n}{\rho^n} x^{n-1}\, dx = \frac{n}{\rho^n} \int_0^\rho x^n\, dx = \frac{n}{n+1}\rho \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho$$

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Erwartungswert

$$\mathbb{E}(T_n^E) = \frac{2}{n} \sum \mathbb{E}(X_i) = \rho$$

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Varianz

$$\mathbb{V}(T_n^{max}) = \frac{4}{n}\mathbb{V}(X_1) = \frac{4}{n\rho}\int_0^\rho (x - \frac{\rho}{2})^2 \, dx = \frac{\rho^2}{3n}$$

Erraten des Bereichs von Zufallsvariablen - Vergleich Varianz

$$\mathbb{V}(T_n^E) = \mathbb{E}((T_n^E)^2) - (\mathbb{E}(T_n^E))^2$$

$$= \int_0^\rho x^2 \frac{n}{\rho^n} x^{n-1} \, dx - (\frac{n\rho}{n+1})^2 = \frac{n\rho^2}{(n+1)^2(n+2)}$$