Algorithmes de Newton et de Gauss–Newton

▷ **Exercice 1.** Nous allons ici voir un exemple d'application des algorithmes de Gauss-Newton et Newton à l'estimation de paramètres d'un modèle utilisé en économie. La fonction de Cobb-Douglas, proposée par P. Douglas et C. Cobb, relie le coût Y de la production d'un produit donné en fonction du capital mobilisé K et du coût de la main d'oeuvre L par une loi du type

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{1}$$

où A et α modulent la répartition entre le capital et le travail et sont fonctions du produit considéré. On souhaite estimer ces paramètres, dans le cas d'une chaine de production d'une voiture par exemple, et pour ce faire, on observe les coûts (K_i, L_i, Y_i), $i = 1 \dots n$, dans diverses configurations de production particulières :

K	0.14	0.71	0.28	0.64	0.02	0.81	0.36	0.49	0.94	0.58
L	0.39	0.18	0.14	0.95	0.31	0.72	0.59	0.81	0.45	0.63
Y	0.12	0.27	0.14	0.45	0.01	0.48	0.24	0.36	0.43	0.37

L'estimation des paramètres par les moindres carrés donne un problème du type suivant :

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} \min \quad f(x) = \frac{1}{2}\|r(x)\|_2^2 \\ x \in \mathbf{R}^p \end{array} \right.$$

1.1. Pour le problème $\mathcal{P}$, écrire le résidu r et calculer :

1. $J_r(x)$, la Jacobienne de r ;
2. $\nabla f(x)$, le gradient de f ;
3. $H_f(x)$, la matrice Hessienne de f.

1.2. Écrire les fichiers MATLAB `res_CD.m`, `f_CD.m`, `J_res_CD.m`, `grad_f_CD.m` et `H_f_CD.m` qui codent resp. les fonctions $r(x)$, $f(x)$, $J_r(x)$, $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$. Exécuter le script `CD.m`.

1.3. Modifier le script MATLAB `CD.m` pour coder les algorithmes de Newton et de Gauss-Newton. Ceci inclue l'implémentation de critères d'arrêt pertinents. Obtenir les figures 1 et 2.

1.4. Modifier le script `CD.m` pour utiliser d'autres points de départ que celui initialement proposé. Commenter les résultats.

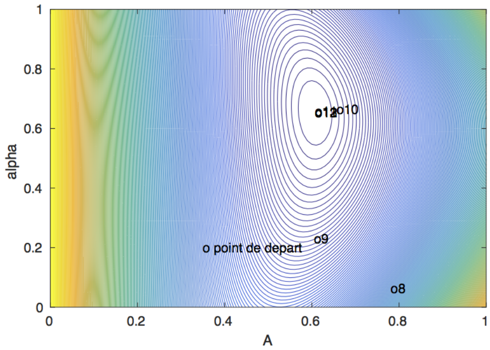

FIGURE 1 – *Algorithme de Newton : point de départ* $x^{(0)} = (0.35, 0.2)$.

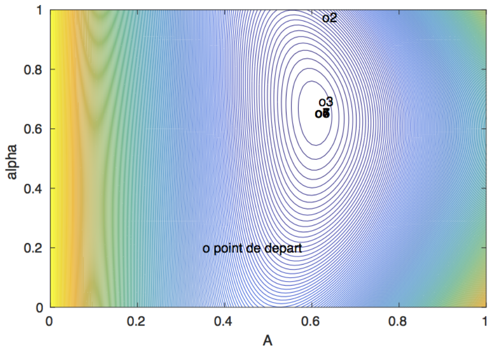

FIGURE 2 – *Algorithme de Gauss-Newton : point de départ* $x^{(0)} = (0.35, 0.2)$.