TP2 – Factorisation LU et applications

On s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$, avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$ par factorisation LU de la matrice A.

Dans un premier temps, on se propose d'implanter cette factorisation sans stratégie de choix de pivot, puis avec la stratégie de pivot partiel, afin d'illustrer l'impact de cette dernière sur la qualité de la solution numérique obtenue. Dans un second temps, il vous est demandé d'implanter la stratégie de l'exercice 4 (slide 29) permettant l'obtention d'une base du noyau de A, dans le cas où celle-ci serait non inversible. Plus spécifiquement, il vous est demandé les travaux suivants :

1. Implanter l'étape de factorisation LU sans stratégie de pivot dans la subroutine `facto`. On pourra utiliser la fonction `norme_f` (fournie dans le fichier) qui calcule la norme de Frobenius d'une matrice. Les étapes de descente et de remontée - résolution des systèmes associés à L et U - sont déjà implantées (cf subroutines `descente` et `remontee`).
2. Ecrire l'analyse d'erreur dans la subroutine `analyse_erreur`. On calculera :
   — le résidu équilibré $\dfrac{\|b - Ax\|}{\||A||x| + |b|\|}$,
   — l'erreur relative $\dfrac{\|x - x^*\|}{\|x^*\|}$, avec x^* la solution exacte.
3. Completer la subroutine `facto` pour calculer le déterminant de A.
4. Rajouter la stratégie de pivot partiel dans la subroutine `facto` (attention au calcul du déterminant). Ceci implique également la modification de l'étape de descente (subroutine `descente`) afin de tenir compte des permutations réalisées sur les lignes durant la factorisation.
5. Implanter la stratégie de recherche d'une base du noyau pour le cas d'une matrice non inversible (paramètre imat=12 du générateur de matrices). Ceci nécessite de modifier la stratégie de pivot de la subroutine `facto`, ainsi que l'implantation du calcul d'une base du noyau (subroutine `noyau`) une fois la factorisation stoppée.