חישוביות וקוגניציה - תרגיל טו

נועה בן דרור
316163260

שאלה 1

① מטריצת ה- payoff:

		לביאה 2	
		ארנבת	אייל
לביאה 1	ארנבת	2,2	2,0
	אייל	0,2	4,4

② אם לביאה 1 בוחרת לצוד אייל אז כדאי ללביאה 2 לצוד אייל.
" " 2 " " " " " 1 " ".
אם לביאה 1 בוחרת לצוד ארנבת אז כדאי ללביאה 2 לצוד ארנבת.
" " 2 " " " " " 1 " ".

כלומר, לכל לביאה כדאי לבחור את מי לצוד, לפי הבחירה של הלביאה השנייה.
לכן נקודות שיווי המשקל של נאש:
לביאה 1 צדה ארנבת וגם לביאה 2 צדה ארנבת.

או

לביאה 1 צדה אייל וגם לביאה 2 צדה אייל.

שאלה 2

א) (i) מדובר ברגרסיה לינארית. a,b שממזערים את השגיאה הריבועית הם:

$$a = \frac{\frac{1}{P}\sum_{\mu=1}^{P}(x_\mu-\bar{x})(f_\mu-\bar{f})}{\frac{1}{P}\sum_{\mu=1}^{P}(x_\mu-\bar{x})^2}$$

$$b = \bar{f} - a\bar{x}$$

נחשב:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(3+2) = \frac{5}{2}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(5+3) = 4$$

ולכן:

$$a = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(3-\frac{5}{2}\right)(5-4)+\left(2-\frac{5}{2}\right)(3-4)\right]}{\frac{1}{2}\left[\left(3-\frac{5}{2}\right)^2+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2\right]} = \frac{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

ולכן,

$$b = \bar{f} - 2\bar{x} = 4 - 2\cdot\frac{5}{2} = -1$$

אז קיבלנו $\boxed{a=2}$ $\boxed{b=-1}$

אלה a,b שמשערך רק.

(ii)

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(1+2+0-1) = \frac{1}{2}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{4}\left(1+3+\frac{1}{2}-4\right) = \frac{1}{8}$$

ולכן:

$$a = \frac{\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)+\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{8}\right)+\left(0-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\left(-1-\frac{1}{2}\right)\left(-4-\frac{1}{8}\right)\right]}{\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2\right]} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{23}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{4\cdot 8+1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{\frac{7}{16}+\frac{69}{16}-\frac{3}{16}+\frac{3}{2}\cdot\frac{33}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\frac{172}{16}}{\frac{20}{4}} = \frac{43}{20} = 2\frac{3}{20}$$

ולכן:

$$b = \bar{f}-a\bar{x} = \frac{1}{8}-\frac{43}{20}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{19}{20}$$

אז קיבלנו

$$\boxed{a = 2\frac{3}{20}} \qquad \boxed{b = -\frac{19}{20}}$$

אלה a,b שמזערים ציפורה.

(iii) השגיאה הרלוונטית שמדדנו היא שגיאת האימון, ועבור כמות קטנה יותר של דאטה שגיאת האימון היא נמוכה יותר, משום שאפשר לבחור פרמטרים שיתאימו בדיוק.
לכן שגיאת האימון של זך אכן קטנה יותר (יש לו פחות דאטה).
אנו מעוניינים לדעת מהי שגיאת ההכללה, אחרי שנקבל קלט חדש מאותה התפלגות.
ואז ככל שיש לנו כמות גדולה יותר של דאטה אפשר ללמוד את ההכללה טוב יותר.
לכן זיבורה יכולה לטעון ששגיאת ההכללה שלה תהיה קטנה יותר (כי יש לה יותר דאטה).

(ב) זגדס ישתמש בהסקה בייסיאנית, כלומר יחפש a,b שימקסמו את:

$P(a,b \mid \text{תוצאות המדידות של זך})$. ואז לפי חוק בייס

$$P(a,b \mid \text{המדידות של זך}) \propto P(\text{המדידות של זך} \mid a,b)\cdot P(a,b)$$

כאשר $P(a,b)$ נתון לפי התפלגות $N(1,\sigma_a^2)$ ו- $P(\text{המדידות של זך} \mid a,b)$ $N(0,\sigma_b^2)$

באופן בלתי תלוי.

מחושב לפי הרעש במדידה, כלומר $N(0,\sigma^2)$, כי

$$P(ax+b=y \mid a,b) = P(ax+b=f+z) = P(z=ax+b-f)$$

ככל ש-σ^2 גדולה, סביר יותר ש-z יקבל ערכים רחוקים מהתוחלת 0. זה נתון לפי

$$P(z=ax+b-f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(ax+b-f)^2}{2\sigma^2}\right)$$

ככל ש-σ^2 גדול האקספוננט גדול (מתקרב ל-0), אלא אם $(ax+b-f)^2$ גדול בהסתברות עולה על σ^2. לכן, בהינתן ש-a,b שנקבעו רק מהמדידות של זך רחוקים יחסית מהתוחלת.
a ו-b שזגאלס יציע יהיו קרובים יותר לשל זך ככל ש-σ^2 קטן, ויהיו קרובים ל- $a=1$, $b=0$ ככל ש-σ^2 גדל. כש-σ^2 גדול $P(a,b)$ יותר דומיננטי בביטוי שפרופורציוני ל- $P(a,b \mid \text{המדידות של זך})$ ולכן יהיה גם השפעה גדולה על התוצאה, וכש-σ^2 קטן-להפך.
לסיכום, זגאלס יבחר a,b שהם: $1 \le a \le 2$, $-1 \le b \le 0$

(ג) נשתמש בחוק בייס:

$$P(b \mid \text{המדידות של דן}) = \frac{P(\text{המדידות של דן} \mid b)\cdot P(b)}{P(\text{המדידות של דן})}$$

המכנה לא תלוי ב b ולכן מספיק למצוא b שממקסם את $P(\text{המדידות של דן} \mid b)\cdot P(b)$.

נחשב:

$$P(\text{המדידות של דן} \mid b)\cdot P(b) = P(a\cdot 3+b=f_1 \mid b)\cdot P(a\cdot 2+b=f_2 \mid b)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-b^2}{2}\right) =$$

$$P(z=f_1-3a-b \mid b)\cdot P(z=f_2-2a-b \mid b)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{b^2}{2}\right)$$

נציב a, f_1, f_2:

$$\cancel{P(z=5-3\cdot 2-b \mid b)\,P(z}$$

$$P(z=5-3\cdot 2-b \mid b)\cdot P(z=3-2\cdot 2-b \mid b)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{b^2}{2}\right) =$$

$$P(z=-b-1 \mid b)\cdot P(z=-b-1 \mid b)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{b^2}{2}\right)$$

נציב בצפיפות z:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(-b-1)^2}{2}}\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(-b-1)^2}{2}}\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-b^2}{2}}$$

נסמן את הביטוי שהתקבל, ללא הקבועים ב $f(b)$. כלומר:

$$f(b) = e^{-\frac{(-b-1)^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(-b-1)^2}{2}}\cdot e^{\frac{-b^2}{2}} = e^{\frac{-(b+1)^2+(b+1)^2+b^2}{2}} =$$

$$e^{-\frac{2(b+1)^2+b^2}{2}} = e^{-(b+1)^2-\frac{b^2}{2}}$$

נגזור על מנת לחשב קיצון:

$$-(2(b+1)+b)\, e^{-(b+1)^2-\frac{b^2}{2}}$$

נשווה ל-0 ונחשב את b:

$$(-2(b+1)-b)\, e^{-(b+1)^2-\frac{b^2}{2}} = 0$$

$$\downarrow$$

$$-2(b+1)-b=0$$

$$-2b-2-b=0$$

$$-3b=2$$

$$\boxed{b=-\frac{2}{3}}$$

עבורו נקבל:

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = e^{-\left(1-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2}} = \exp\left(-\frac{1}{9}-\frac{4}{2\cdot 9}\right) = \exp\left(-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right) = \exp\left(-\frac{1}{3}\right)$$

אם נציב $b=-1$ נקבל:

$$f(-1) = \exp\left(-(1-1)^2-\frac{(-1)^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) < \exp\left(-\frac{1}{3}\right)$$

לכן $b=-\frac{2}{3}$ הוא מקסימום, והוא הערך הסביר ביותר ל-b.