Transformations linéaires

Annie Chateau

Université de Montpellier

annie.chateau@umontpellier.fr – noura.faraj@umontpellier.fr – mountaz.hascoet@umontpellier.fr – violaine.prince@umontpellier.fr

HAI702I Algèbre, géométrie, transformation, calcul numérique

Plan

Définitions

Les applications linéaires sont précisément les fonctions qui préservent la structure d'espace vectoriel.

Definition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On appelle *application linéaire* de E dans F la donnée d'une application $f : E \to F$ telle que :

$$\forall (u, v) \in E^2 : f(u+v) = f(u) + f(v),$$

$$\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Remarque

L'image directe et l'image réciproque d'un espace vectoriel est un espace vectoriel. De plus,

- Le zéro (l'origine) de E est envoyé sur le zéro de F : $f(0_E) = 0_F$. En effet, $f(u) = f(u + 0_E) = f(u) + f(0_E)$.
- L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p)$.

Propriétés

Proposition

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires, u et v deux vecteurs de E et λ un réel. On a bien

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u+v) &= g(f(u+v)) = g(f(u)+f(v)) \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) = (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v), \\ (g \circ f)(\lambda u) &= g(f(\lambda u)) = g(\lambda f(u)) = \lambda g(f(u)) = \lambda (g \circ f)(u).\end{aligned}$$ □

Somme d'applications linéaires

Definition

Soit $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications linéaires. On définit $f + g : E \to F$ la *somme de deux applications linéaires* en posant :

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u).$$

On définit aussi λf le *produit d'une application linéaire par un scalaire* en posant :

$$(\lambda f)(u) = \lambda f(u).$$

Somme d'applications linéaires

Proposition

1. *La somme de deux applications linéaires est linéaire.*
2. *Le produit d'une application linéaire par un scalaire est une application linéaire.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}(f+g)(u+v) &= f(u+v)+g(u+v) = f(u)+f(v)+g(u)+g(v)\\ &= (f+g)(u)+(f+g)(v),\\ (f+g)(\lambda u) &= f(\lambda u)+g(\lambda u) = \lambda f(u)+\lambda g(u) = \lambda(f+g)(u).\end{aligned}$$ □

Corollaire

Soient E et F deux espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F a une structure d'espace vectoriel pour les opérations de somme et produit par un scalaire définies ci-dessus.

Remarque

On verra dans la suite qu'une application linéaire de $E = \mathbb{R}^m$ dans $F = \mathbb{R}^n$ admet une représentation matricielle.
L'ensemble des matrices comportant n lignes et m colonnes est noté $\mathbb{R}^{n\times m}$. L'ensemble des matrices de la forme

$$\delta_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, \qquad i = 1, \cdots, n \text{ et } j = 1, \cdots, m$$

est une base de $\mathbb{R}^{n\times m}$ dont la dimension est nm.

Noyau et image

Definition

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle *noyau de l'application linéaire f* et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E dont l'image est le vecteur nul de F, autrement dit $\ker(f)$ est l'image réciproque du zéro de F :

$$\ker(f) = \{u \in E : f(u) = 0\}.$$

Proposition

Le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Soit u et v dans $\ker(f)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) = 0 + 0 = 0.$$

$\square$

Remarque

Dans le cas où E est de dimension finie et f est une forme linéaire (i.e. f est à valeur réelle, $F = \mathbb{R}$), le noyau est un hyperplan de dimension $\dim(E) - 1$. On dit aussi que $\ker(f)$ est de codimension 1.

Injectivité

On rappelle qu'une application f est injective si

$$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f\left(x'\right).$$

Dans les démonstrations, il est souvent plus simple de montrer la contraposée :

$$f(x) = f\left(x'\right) \Longrightarrow x = x'.$$

Grâce au noyau, on dispose maintenant d'un critère beaucoup plus simple pour montrer qu'une application est injective.

Critère d'injectivité

Proposition (Critère d'injectivité)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a :

$$f \text{ injective} \iff \ker(f) = \{0_E\}.$$

Démonstration.

Supposons f injective. On sait que $f(0) = 0$ (car f est une application linéaire) donc $0 \in \ker(f)$. Soit $u \neq 0$, f étant injective $f(u) \neq f(0) = 0$, aucun autre élément de E ne peut avoir pour image 0, donc $\ker(f) = \{0\}$.
Réciproquement, soit u et v deux vecteurs de E ayant la même image ($f(u) = f(v)$), on a alors :

$$f(u - v) = 0 \iff (u - v) \in \ker(f) \iff u = v. \qquad \square$$

Image

Definition

Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire. On appelle image de f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des vecteurs de F image d'au moins un vecteur de E, autrement dit :

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F : \exists u \in E \text{ tel que } f(u) = v\}$$

On définit alors le *rang de l'application linéaire f* comme étant égal à la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Theorem (Théorème du rang)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie et :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

Matrices d'applications linéaires

Nous avons introduit les bases afin de pouvoir faire des calculs dans les espaces vectoriels de dimension finie. Maintenant que nous avons défini les applications linéaires et présenté quelques unes de leurs propriétés, nous allons introduire les matrices pour pouvoir faire des calculs sur les applications linéaires.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$, F un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f : E \to F$ une application linéaire. On considère $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p), \\ \mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n). \end{cases}$$

Matrices d'applications linéaires

Connaître f revient à connaître l'image de tout vecteur w de E par f. Soit w quelconque fixé dans E, w s'écrit $w = a_1 e_1 + \cdots + a_p e_p$ dans $\mathcal{B}_E$. Comme $f(w)$ est un vecteur de F, cherchons ses coordonnées dans $\mathcal{B}_F$.

On rappelle que f est une application linéaire, et on a

$$f(w) = a_1 f(e_1) + \cdots + a_p f(e_p)$$

Matrices d'applications linéaires

Les vecteurs $f(e_i)$ ($i = 1, \cdots, p$) sont dans F et peuvent donc se décomposer dans la base $\mathcal{B}_F$:

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= b_{11}\varepsilon_1 + \cdots + b_{n1}\varepsilon_n \\
f(e_2) &= b_{12}\varepsilon_1 + \cdots + b_{n2}\varepsilon_n \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
f(e_p) &= b_{1p}\varepsilon_1 + \cdots + b_{np}\varepsilon_n
\end{aligned}$$

Matrices d'applications linéaires

Il vient donc

$$\begin{aligned} f(w) &= a_1 f(e_1) + \cdots + a_p f(e_p) \\ &= (a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \cdots + a_p b_{1p})\,\varepsilon_1 + \cdots + (a_1 b_{n1} + a_2 b_{n2} + \cdots + a_p b_{np})\,\varepsilon_n \end{aligned}$$

Les coordonnées de $f(w)$ dans $\mathcal{B}_F$ peuvent se réécrire comme un produit matriciel

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

Matrices d'applications linéaires

Pour identifier une application linéaire f en connaissant la base de départ et la base d'arrivée, il suffit de connaître

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est appelée *matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$*.

Remarque

- Pour connaître une application linéaire $f : E \to F$, il faut se donner une base $(e_1, \cdots, e_p)$ de l'espace de départ, une base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de l'espace d'arrivée, f est alors entièrement déterminée par la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$
- Réciproquement, toute matrice de dimension $\dim(F) \times \dim(E)$ définit une application linéaire de E dans F.
- Suivant les bases que l'on considère, une application linéaire peut avoir plusieurs représentations matricielles. C'est pourquoi il faut toujours préciser les bases dans lesquelles les calculs sont menés.

Exemple

Si can $= (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ celle de $\mathbb{R}^2$

1. La matrice de l'application Id : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par rapport à la base canonique est :
$$\mathcal{M}_{\text{can},\text{can}}(\text{Id}) = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. L'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :
$$f(e_1) = 3\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2, \quad f(e_2) = 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2, \quad f(e_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$
a pour matrice
$$\mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si maintenant $\mathcal{B}_E = (e_2, e_1, e_3)$ et $\mathcal{B}'_F = (\varepsilon_2, \varepsilon_1)$, on a
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_F}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice de la somme d'applications.

La matrice de la somme est la somme des matrices.

Proposition (Somme de matrices)

Soit E et F deux espaces vectoriels. On considère $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ deux bases de E et F. Soit f_1 et f_2 deux applications linéaires de E dans F. Alors

1. *La matrice de $f_1 + f_2$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f_1 + f_2) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f_1) + \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f_2)$$

2. *La matrice de λf par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda f) = \lambda\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$$

Matrice de la composée d'applications linéaires

La matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit des matrices.

On considère trois espaces vectoriels de dimensions finies :

1. E de dimension m avec une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_m)$,
2. F de dimension n avec une base $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$,
3. G de dimension p avec une base $\mathcal{B}_G = (\eta_1, \cdots, \eta_p)$.

Matrice de la composée d'applications linéaires

Proposition (Matrice de la composée)

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. La matrice de l'application linéaire $h = g \circ f$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(h) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}_E) \arrow[r, "{f,\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)}"] \arrow[dr, "{h=g\circ f,\mathcal{M}_h=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)}"] & (F,\mathcal{B}_F) \arrow[d, "{g,\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)}"] \\
 & (G,\mathcal{B}_G)
\end{tikzcd}$$

Exemple

Soit (e_1, e_2, e_3) et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On considère deux applications linéaires f et g dont les matrices par rapport aux bases canoniques sont

$$\mathcal{M}_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

1. Les applications linéaires en jeu sont donc $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
2. L'application composée est $h = g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
3. Pour trouver la représentation matricielle de h dans les bases canoniques, il suffit de calculer $h(e_i)\,, i = 1, 2, 3$. On a

$$\begin{aligned} h(e_1) &= g(f(e_1)) = g(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) = g(\varepsilon_1) + 4g(\varepsilon_2) \\ &= 2e_1 + 3e_2 + e_3 + 4(e_1 + 4e_2 + 3e_3) = 6e_1 + 19e_2 + 13e_3 \end{aligned}$$

De même, il vient $h(e_2) = 7e_1 + 18e_2 + 11e_3$ et $h(e_3) = 11e_1 + 19e_2 + 8e_3$. Finalement,

$$M_h = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 11 \\ 19 & 18 & 19 \\ 13 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de vérifier que $\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_g \mathcal{M}_f$.

Proposition

Soit f une application linéaire inversible de E dans E. On note f^{-1} son application inverse, i.e., $f^{-1} : E \to E$ et $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = M^{-1}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f).$$

Remarque

Si on a deux matrices carrées A, B de même taille et inversibles on a

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Déterminant

On a déjà vu comment calculer le déterminant d'une matrice 2×2 et 3×3.

Dans le cas général, le calcul met en jeu un polynôme homogène de degré n en les coordonnées de la matrice.

Il existe des formules générales récursives mais de complexités importantes, typiquement $O(n^3)$ voir plus si on utilise une implémentation naïve.

Déterminant

Étant donnée une matrice carrée A de taille n, on note :

- a_{ij} est l'entrée (i,j) de la matrice A
- $A_{\overline{ij}}$ est la matrice carrée de taille $(n-1)\times(n-1)$ contenant les entrées de A auquelle on a enlevé la i-ème ligne et la j-ème colonne. Cette sous matrice est appelée (i,j)*-mineure* de A.

Proposition

Soit donc $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on a pour tout $i_0 = 1,\cdots,n$ fixé :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \det(A_{\overline{i_0 j}}).$$

De plus, on a pour tout $j_0 = 1,\cdots,n$ fixé :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i j_0} \det(A_{\overline{i j_0}}).$$

Propriétés du déterminant

Les propriétés du déterminant sont (très) riches. En voici quelques unes parmi les plus utiles :

Proposition

Soit A, B deux matrices carrées de taille $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le déterminant satisfait les propriétés suivantes :

- $\det(\mathrm{Id}) = 1$ *et* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
- $\det(A^t) = \det(A)$,
- *si A est inversible :* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$,
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- *si on permute deux colonnes (ou deux lignes) de A on change le signe du déterminant.*

Calcul de l'inverse en pratique

Étant donnée une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, il existe un grand nombre de méthodes algorithmiques (explicites ou approchées)

- calculer l'inverse A^{-1} de A
- résoudre le système linéaire $Ax = u$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$.

Ces deux problèmes sont reliés mais loin d'être équivalent car dans le second cas on a pas besoin de connaître (ni de stocker) A^{-1}, on veut juste x...

Cas général

Pour calculer l'inverse d'une matrice, nous verrons en TD le *pivot de Gauss* qui est décrit par exemple ici : `https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination`.

Inverser des petites matrices

La formule de Laplace permet de donner une solution explicite pour inverser une matrice A :

$$A\,\mathrm{com}(A)^t = \mathrm{com}(A)^t A = \det(A)\,\mathrm{Id}$$

où $\mathrm{com}(A)$ est la *comatrice* de A calculée à partir des entrées de A (relation polynomiale) et qui existe même si A n'est pas inversible. La transposée $\mathrm{com}(A)^t$ est appelé matrice complémentaire (*adjugate* en anglais). On voit que si $\det(A) \neq 0$ on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{com}(A)^t.$$

Inverser des petites matrices

Nous nous contenterons de donner la formule de la comatrice pour les cas 2×2 et 3×3.

Dimension 2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, la comatrice est

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \text{ et on a}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Dimension 3. Pour le cas 3×3, on peut calculer la comatrice comme suit

$$\mathrm{com}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Inverser des petites matrices

On remarque alors que si l'on note $x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ les trois colonnes de A, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} (y \wedge z)^t \\ (z \wedge x)^t \\ (x \wedge y)^t \end{pmatrix}$$

Des formules similaires existent pour la dimension 4.

Les matrices orthogonales

Nous nous intéressons dans cette partie aux applications qui conservent le produit scalaire. Pour simplifier, on ne considérera des espaces vectoriels munis du produit scalaire canonique (on parle d'*espace euclidiens*).

Définition-Proposition

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *et* $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle))$ *deux espaces euclidiens. Soit* $f : E \rightarrow F$ *une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f *conserve les produits scalaires, c'est à dire que pour tous* u *et* v *de* E*, on a* $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$
2. f *conserve les normes, c'est à dire que pour tout* u *de* E *on a* $\|f(u)\| = \|u\|$.

Une application linéaire qui vérifie une de ces deux conditions est appelée application orthogonale ou isométrie.

Démonstration.

Si la première condition est vérifiée, on a :

$$\|f(u)\|^2 = \langle f(u), f(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 .$$

Si la seconde condition est vérifiée, alors

$$2\langle f(u), f(v)\rangle = \|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$$

$\square$

Matrice des transformations orthogonales

Proposition (Matrices des transformations orthogonales)

Soit E une espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $f : E \to E$ une application linéaire. On pose $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$

1. *Si f est une isométrie, la matrice A :*
   - *est inversible,*
   - *vérifie $A^tA = AA^t = I$, autrement dit $A^{-1} = A^t$,*
   - *est telle que $\det(A) = 1$ ou -1.*
2. *Si A vérifie $A^tA = AA^t = I$, autrement dit si $A^{-1} = A^t$, alors f est une transformation orthogonale.*

Une matrice A qui vérifie une de ces deux conditions est appelée matrice orthogonale.

Matrice des transformations orthogonales

Inverser une telle matrice ne coûte donc rien en temps de calcul !

L'ensemble des matrices orthogonale forme un sous-groupe de matrices (la multiplication de deux matrices orthogonale reste une matrice orthogonale) appelé $O(n)$.

Les matrices de $O(n)$ qui ont un déterminant positif (égale à 1 donc...) est appelé le *groupe spécial orthogonal* et est noté $SO(n)$.

Matrice des transformations orthogonales

Démonstration.

1. Soit f une transformation orthogonale, alors

$$\ker(f) = \{u \in E : f(u) = 0\}$$

$$= \{u \in E : \|f(u)\| = 0\} = \{u \in E : \|u\| = 0\} = \{0\},$$

donc f est injective et donc bijective. A est donc inversible. Soit u et v deux vecteurs de E de coordonnées U et V dans $\mathcal{B}$. Comme $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ on a

$$(AU)^t AV = U^t A^t AV = U^t V$$

d'où $A^t A = I$ et par conséquent $(\det(A))^2 = 1$.

2. De même, pour deux vecteurs u et v dans E on a :

$$\langle f(u), f(v)\rangle = (AU)^t AV = U^t A^t AV = U^t V = \langle u, v\rangle .$$

Caractérisation des matrices orthogonales

On peut reconnaître une matrice orthogonale grâce à la proposition suivante :

Proposition

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, $f : E \to E$ une application linéaire et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$. Alors :

1. *f est une transformation orthogonale si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.*
2. *A est une matrice orthogonale si et seulement si :*
   - *le produit scalaire entre les vecteurs colonnes de A est nul,*
   - *les vecteurs colonnes de A sont de normes 1.*

Caractérisation des matrices orthogonales

Démonstration.

Il est évident que les points 1 et 2 sont équivalents. Montrons 1.

- Soit f une transformation orthogonale. Alors $\forall i = 1, \cdots, n$, $\|f(e_i)\| = \|e_i\| = 1$ et $\forall i \neq j$, $\left\langle f(e_i), f(e_j) \right\rangle = \left\langle e_i, e_j \right\rangle = 0$
- Soit $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ deux vecteurs de E. On a

$$\begin{aligned}
\langle f(u), f(v) \rangle &= \left\langle f\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right), f\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right)\right\rangle \\
&= \sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i v_j \left\langle f\left(e_i\right), f\left(e_j\right)\right\rangle \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} u_i v_i = \langle u, v \rangle .
\end{aligned}$$

$\square$

Caractérisation des matrices orthogonales

Corollaire

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \ldots, e'_n\right)$ deux bases orthonormées de E. La matrice de passage $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ est une matrice orthogonale.

Exemple

Les matrices de rotation de $\mathbb{R}^3$. Les matrices de rotation d'un angle $\theta \in \mathbb{R}$ autour des axes sont :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On parle de lacet (yaw), tangage (pitch) et roulis (roll).

Exemple

On peut les composer, étant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
R &= R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_x(\gamma) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dans tous les cas on a $R^{-1} = R^t$.

Transformer un champs de vecteur normal

Pour décrire une surface (objet de dimension 2) dans l'espace (dimension 3), on utilise une information de position (un "point d'attache") et d'orientation (un "plan tangent").

Lorsque l'on discrétise une surface, on se ramène souvent au cas des maillages triangulaires.

Les sommets (ou le centre des faces) donnent alors l'information de position et la connectivité permet de calculer les vecteurs tangents (les cotés de chaque triangle) et par extensions le champs de vecteur normal.

Transformer un champs de vecteur normal

Lorsque l'on transforme un maillage par une application linéaire t, les positions et les vecteurs tangents sont transportés par t.

Mais si t n'est pas une isométrie, les vecteurs du champs de vecteur normal transporté par t ne seront pas orthogonaux au maillage transformé... Il faut donc transporter les normales avec une autre application t'. On donne dans la suite comment trouver t' à partir de t.

Transformer un champs de vecteurs normal

Soit donc E un espace euclidien muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note T la matrice de t dans les bases canoniques (au départ et à l'arrivée).

Étant donné un vecteur $v \in E$ et un vecteur $n \in E$ satisfaisant $\langle v, n \rangle = 0$. On cherche donc la matrice N de la transformation t' qui donne $\langle Tv, Nn \rangle = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle v, n \rangle = v^t n &= (Tv)^t Nn \\ &= v^t T^t Nn = \langle Tv, Nn \rangle \end{aligned}$$

Transformer un champs de vecteurs normal

Cela implique que $T^t N = I$ et donne la matrice de la transformation de t' dans les bases canoniques :

$$N = (T^{-1})^t = (T^t)^{-1}.$$

Il sort donc la transposée inverse de la matrice T. Le champs de vecteur normal, transformé par cette matrice N doit être normalisé si l'on souhaite avoir des vecteurs unitaires.

Changement de base pour un vecteur

Soit u un vecteur de E déterminé dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ par ses coordonnées (connues)

$$u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

Étant donnée une nouvelle base $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$, nous souhaitons trouver les nouvelles coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$, dit autrement, nous cherchons $b_1, \cdots, b_n$ tels que

$$u = b_1 f_1 + \cdots + b_n f_n.$$

Pour exprimer u dans $\mathcal{B}'$, il suffit d'exprimer chaque élément de la base $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.

Changement de base pour un vecteur

Comme $\mathcal{B}'$ est une base de E, on a le systèmes d'égalité entre vecteurs :

$$\begin{cases} e_1 & = p_{11} f_1 + \cdots + p_{n1} f_n \\ e_2 & = p_{12} f_1 + \cdots + p_{n2} f_n \\ \vdots & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ e_n & = p_{1n} f_1 + \cdots + p_{nn} f_n, \end{cases}$$

d'où le système d'égalité entre nombres réels suivant :

$$\begin{cases} b_1 & = p_{11} a_1 + p_{12} a_2 + \cdots + p_{1n} a_n \\ b_2 & = p_{21} a_1 + p_{22} a_2 + \cdots + p_{2n} a_n \\ \vdots & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_n & = p_{n1} a_1 + p_{n2} a_2 + \cdots + p_{nn} a_n. \end{cases}$$

Changement de base pour un vecteur

On utilise généralement une écriture matricielle. Soit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \qquad u_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}, \qquad u_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix},$$

alors

$$u_{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})u_{\mathcal{B}},$$

et la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$ contenant les vecteurs $(f_1, \cdots, f_n)$.

Changement de base pour un vecteur

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Étant donné u un vecteur de E, on note $u_{\mathcal{B}_1}$ (resp. $u_{\mathcal{B}_2}$) le vecteur des coordonnées de u dans $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$). On a alors :

$$u_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id})u_{\mathcal{G}_2}, \quad u_{\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id})u_{\mathcal{B}_1}.$$

Changement de base pour un vecteur

La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id})$ a pour colonnes les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ exprimés dans la base $\mathcal{B}_2$.

Proposition

Les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id})$ *et* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id})$ *sont inverses l'une de l'autre, i.e.,*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id})\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}\,.$$

Exemple

Soit $\mathcal{B}_1 = (b_1, b_2, b_3)\,, \mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, f_3)$ avec

$$\begin{cases} b_1 = e_1 + e_2 \\ b_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 \\ b_3 = 2e_2 + e_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ f_2 = -3e_2 - e_3 \\ f_3 = 2e_1 - 3e_2. \end{cases}$$

Déterminons les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id})$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id})$. On a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathrm{can}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathrm{can}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

En considérant la composition d'applications

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \text{can}) \arrow[rr, "\text{Id},\mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}_1}(\text{Id})"] \arrow[drr, "\text{Id},\mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}_2}(\text{Id})"'] & & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) \arrow[d, "\text{Id},\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\text{Id})"] \\
& & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2)
\end{tikzcd}$$

on a

$$\mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}_2}(\text{Id}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\text{Id})\mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}_1}(\text{Id}) \Longleftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\text{Id}) = \mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}_2}(\text{Id})\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\text{can}}(\text{Id}).$$

Exemple

On a donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 10 & -15 & -5 \\ -7 & 11 & 3 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -0.2 & 1 \\ 1 & 0.2 & 1 \\ 1 & -1.2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2), posons $u = (3, 1)$ et $v = (5, 2)$. Les vecteurs u et v forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

Considérons alors l'application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(u) = 2u, \quad f(v) = -v$$

Par rapport à la base $\mathcal{B}$, f a pour matrice une matrice diagonale :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons maintenant la matrice de f par rapport à la base canonique. Il est facile de voir que $e_1 = 2u - v$ et $e_2 = 3v - 5u$. On en déduit :

$$\begin{cases} f(e_1) = 2f(u) - f(v) = 4u + v = 17e_1 + 6e_2, \\ f(e_2) = 3f(v) - 5f(u) = -3v - 10u = -45e_1 - 16e_2. \end{cases}$$

La matrice de f par rapport à la base canonique est donc :

$$\mathcal{M}_{\text{can,can}}(f) = \begin{pmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{pmatrix}.$$

Il est évident que la base $\mathcal{B}$ est mieux adaptée aux calculs sur l'application f.

Montrons le sur deux exemples :

1. La matrice de f^5 dans la base $\mathcal{B}$ est facile à calculer :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\left(f^5\right) = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de f^{-1} dans la base B est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Changement de base pour les applications linéaires

On considère deux espaces vectoriels de dimension finie E et F, deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de F et une application linéaire $f : E \to F$.

$$\begin{array}{ccc}
(E, \mathcal{B}) & \xrightarrow{\quad f, \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \quad} & (F, \mathcal{C}) \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}_E, \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)} \Big\uparrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Id}_F, \mathcal{M}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F)^{-1}} \\
(E, \mathcal{B}') & \xrightarrow[\quad f, \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) \quad]{} & (F, \mathcal{C}')
\end{array}$$

La formule de changement de base pour l'application f est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}\left(\mathrm{Id}_F\right)^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\mathrm{Id}_E\right).$$

Changement de base pour les applications linéaires

Proposition (Cas de $\mathbb{R}^n$)

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$.

- $\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\right) = \det_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \det(f)$ *(le déterminant de la matrice associée à f ne dépend pas de la base choisie). Ce déterminant est appelé déterminant de l'application linéaire f.*
- *f est inversible si et seulement si* $\det(f) \neq 0$ *(dans ce cas, f est bijective).*

Application : Les changements de base pour les applications linéaires peuvent être utilisés pour calculer les puissances ou les inverses de matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)^{-1}$$
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)^n = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)^n\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)^{-1}$$

Cette formule reste encore valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$ quand f est inversible :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)^{-1}$$

Exemple

Appliquons les résultats précédents pour retrouver le changement de base de l'exemple précédent. On connaît $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ et on cherche $\mathcal{M}_{\text{can},\text{can}}(f)$. On déduit du diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[r, "f{,}\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[d, "\mathrm{Id}{,}\mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^2, \text{can}) \arrow[u, "\mathrm{Id}{,}\mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})"] \arrow[r, "f{,}\mathcal{M}_{\text{can},\text{can}}(f)"'] & (\mathbb{R}^2, \text{can})
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{M}_{\text{can},\text{can}}(f) = \mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\mathcal{M}_{\text{can},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}).$$

Exemple

On a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathrm{can}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{can},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\mathcal{M}_{\mathrm{can},\mathrm{can}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ sont appelées *matrices de passage*.

Les lettres P et Q sont souvent utilisées pour noter ces matrices. Mais attention, étant donné un vecteur u dans E, la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})$ permet de calculer les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$ sachant ses coordonnées dans $\mathcal{B}$:

$$u_{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})u_{\mathcal{B}}$$

L'usage est cependant d'appeler cette matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})$ matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$...

MAtrices semblables

Definition

On dit que deux matrices carrées A_1 et A_2 sont *semblables* s'il existe une matrice carré P inversible telle que

$$A_1 = P^{-1} A_2 P.$$

De manière équivalente, s'il existe une application linéaire $f : E \to E$ et des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E telles que :

$$A_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f), \quad A_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f).$$

Matrices semblables

La recherche d'une base bien adaptée au problème qu'on étudie est un thème important de l'algèbre linéaire. Si les calculs sont effectués dans une base mal adaptée au problème, ils peuvent rapidement devenir complexes. Il est donc nécessaire de développer des algorithmes permettant de se placer dans des bases où les calculs sont "simples". Enfin, certaines quantités sont invariantes par changement de base.

Definition

La *trace* d'une matrice carrée de taille $n \times n$ est la somme de ses entrées diagonales. Si $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ alors

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Matrices semblables

Proposition

Soit A_1, A_2 deux matrices carrées semblables. Alors

1. $\det(A_1) = \det(A_2)$,
2. $\mathrm{tr}(A_1) = \mathrm{tr}(A_2)$.

On peut calculer la trace et le déterminant d'un endomorphisme à l'aide de n'importe quelle matrice de cette endomorphisme (*i.e.* ces quantités ne dépendent pas des bases choisies).