# Espaces vectoriels

Annie Chateau

Université de Montpellier

*annie.chateau@umontpellier.fr – noura.faraj@umontpellier.fr – mountaz.hascoet@umontpellier.fr*

HAI702I Algèbre, géométrie, transformation, calcul numérique

# Plan

Pourquoi utiliser les espaces vectoriels ?

Parce qu'ils constituent un outil mathématiques très puissant pour *décrire le monde* dans lequel nous évoluons (du moins localement) mais aussi de très nombreux *objets mathématiques* que nous manipulons (les suites numériques, les fonctions d'une variable réelles, etc.)

# Définition formelle des espaces vectoriels

## Définition (Espace vectoriel)

*On appelle $\mathbb{R}$-espace vectoriel un ensemble $E$ muni d'une loi interne (notée $+$) et d'une loi externe (notée $\cdot$ ou $\times$) admettant $\mathbb{R}$ comme ensemble d'opérateurs et vérifiant :*

1. *$(E, +)$ est associatif, commutatif, existence d'un élément neutre et d'un opposé (groupe abélien)*
2. *$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall(u, v) \in E^2$ on a*

$$\begin{cases} (\lambda\mu)u & = \lambda(\mu \times u) \\ (\lambda + \mu)u & = \lambda u + \mu u \\ \lambda(u + v) & = \lambda u + \lambda v \\ 1u & = u \end{cases}$$

# Des exemples d'espaces vectoriels

1. Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. On considère $F$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0$.

2. $G$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = y$.

3. $H$, l'ensemble des matrices $3 \times 3$ triangulaires supérieures.

4. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(X^2) = X^2 P(X)\}$.

# Comment montrer qu'un espace est un espace vectoriel ?

**Première méthode :** (long) prouver toutes les propriétés de la définition

**Deuxième méthode :** (plus facile) montrer que l'espace est un *sous-espace vectoriel* d'un espace vectoriel connu

## Définition

*Soit* $(E, +, \cdot)$ *un espace vectoriel et* $F \subset E$. *F est appelé sous-espace vectoriel (sev) de E si* $\forall (u, v) \in F^2$ *et* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *alors* $\lambda u + \mu v \in F$. *On note* $(F, +, \cdot)$ *cet espace vectoriel.*

# Combinaisons linéaires

## Définition

- *Étant donné des vecteurs* $u_1, \cdots, u_p$ *de* $E$*, on appelle combinaison linéaire à coefficients réels de* $u_1, \cdots, u_p$ *tout vecteur de la forme*

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \qquad \text{avec } \lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{R}.$$

- *L'espace des combinaisons linéaires finies de* $u_1, \cdots, u_p$ *sera noté* $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$ *et appelé espace engendré par* $u_1, \cdots, u_p$*.*
- *Plus généralement, si* $A$ *est une partie non vide, finie ou infinie de* $E$*,* $\mathrm{Vect}(A)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de* $A$ *et est appelé espace engendré par* $A$*.*

# Définitions

## Définition

*Une famille $(u_1, \cdots, u_p)$ de vecteurs de $E$ telle que $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p) = E$ est appelée famille génératrice de $E$ (i.e. si tout $v \in E$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $u_1, \cdots, u_p$).*

## Définition

*On dit qu'une famille $(u_1, \cdots, u_p)$ de vecteurs de $E$ est une famille libre de $E$ si tout vecteur de $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$ s'exprime de manière unique comme combinaison linaire de $u_1, \cdots, u_p$. Cela revient à dire que*

$$(\forall(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

# Base

Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite *liée*. Dans ce cas, au moins l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres (ce qui revient à dire que $\det(u_1, \cdots, u_p) = 0$).

## Définition

*On dit qu'une famille $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une base d'un espace vectoriel $E$ si c'est une famille libre et génératrice de $E$. C'est à dire si tout vecteur de $E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, i.e.,*

$$\forall v \in E, \exists! \, (\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \text{ t.q. } v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p.$$

# Dimension

## Théorème

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre $C = (u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de $E$ peut être complétée en une base $\mathcal{B} = \left(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n\right)$ de $E$.*

## Définition-Proposition

*Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé* ***dimension de l'espace vectoriel*** *$E$ et est noté $\dim(E)$.*

# Démontrer qu'une famille de vecteurs est une base

## Proposition

*Dans un espace vectoriel de dimension $n$ :*

1. *Toute famille libre $(u_1, \ldots, u_n)$ de $n$ vecteurs de $E$ est une base (famille libre maximale).*
2. *Toute famille génératrice $(u_1, \ldots, u_n)$ de $n$ vecteurs de $E$ est une base (famille génératrice minimale).*

# Dimension d'un sous-espace vectoriel

## Proposition

1. *Un sous-espace $F$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est de dimension finie.*
2. *On a alors* $\dim(F) \leq \dim(E)$.
3. *Si* $\dim(F) = \dim(E)$, *on a* $F = E$.

On peut construire une infinité de bases d'un même espace vectoriel $E$. Suivant le problème auquel nous sommes confrontés, certaines bases se prêteront mieux à sa résolution. Il est donc non seulement important de savoir gérer les changements de bases mais aussi de trouver des bases « pertinentes » suivant le problème considéré.

# Somme d'espaces vectoriels

## Définition

*Soient* $F_1$ *et* $F_2$ *deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* $E$*. On dit que* $F_1$ *et* $F_2$ *sont en somme directe si, pour tout élément* $u$ *de la somme* $F_1 + F_2 = \{v \in E | v = u_1 + u_2, u_1 \in F_1, u_2 \in F_2\}$*, il existe un unique couple* $(u_1, u_2)$ *de* $F_1 \times F_2$ *tel que* $u = u_1 + u_2$*.*

## Exemple

***Décomposition d'un espace vectoriel en somme directe***

*Démontrer que l'ensemble* $P$ *des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires* $I$ *sont deux espaces supplémentaires de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*.*

# Points et vecteurs

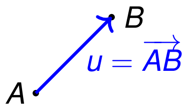
On modélise le plan et l'espace par des espaces affines de dimension 2 et 3 respectivement. Pour l'espace à 3 dimensions on considère l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de réels :

1. Ensemble $\mathcal{E}$ des points : On peut décrire un point $M$ de l'espace (*i.e.* une *position*) par un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de réels.
2. Ensemble $E$ de vecteurs : on peut aussi voir $E = \mathbb{R}^3$ comme un espace vectoriel. Un vecteur $u \in E$ modélise alors un "*déplacement*" entre 2 points $A$ et $B$ de $\mathcal{E}$. Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ et $B = (b_1, b_2, b_3)$ on définit le vecteur $u = \overrightarrow{AB}$ comme étant le triplet de réels $u = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

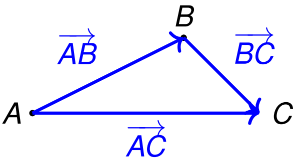
# Points et vecteurs

On a alors :

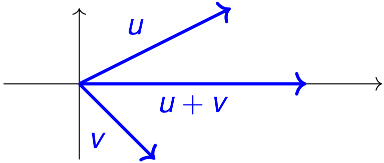
1. Pour tout $u \in E$ et $(A, B) \in \mathcal{E}$ : $u + A = \overrightarrow{AB} + A = B \in \mathcal{E}$




2. Relation de Chasles : $\forall A, B, C \in \mathcal{E}$ on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.




dans $\mathcal{E}$




dans $E$

En résumé, les éléments de $\mathcal{E}$ sont considérés comme des points (notés en majuscules) sur lesquels opèrent des vecteurs (notés en minuscules) de $E$.

# Repère

## Définition

*Un repère cartésien de l'espace $\mathcal{E}$ est la donnée d'un point $\Omega$ (l'origine du repère) et de trois vecteurs $(e_1, e_2, e_3)$ formant une base (i.e. une famille libre génératrice) de l'espace $E$.*

## Définition

*Si $M$ est un point de $\mathcal{E}$ alors le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ se décompose de façon unique sur les vecteurs de base :*

$$\overrightarrow{\Omega M} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

*Le triplet $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ (ou plus simplement $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ si il n'y a pas d'ambiguïtés) contient les coordonnées cartésiennes du point $M$ dans le repère $\mathcal{R}$.*

# Remarque 1

Une fois une origine $\Omega$ de repère choisie, on peut identifier un point $M$ de $\mathcal{E}$ avec le vecteur $\overrightarrow{\Omega M} \in E$.

Alors, le choix d'un système de coordonnées permet de ramener tous les calculs à des calculs dans $\mathbb{R}^3$.

Lorsque l'on ne précise pas la base, c'est que l'on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique composée des vecteurs $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

# Remarque 2

**Changement de repère :** Soit deux repères cartésiens $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{R}' = (\Omega', e'_1, e'_2, e'_3)$ et un point $M$. On note :

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ les coordonnées de $M$ dans $\mathcal{R}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$ les coordonnées de $M$ dans $\mathcal{R}'$.
- $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ les coordonnées de $\Omega'$ dans la $\mathcal{R}$.
- $\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ a_{3,i} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ les coordonnées des $e'_i$ (pour $i = 1, 2, 3$) dans $\mathcal{R}$.

**Attention :** le changement de repère concerne un espace affine, alors qu'un changement de base concerne un espace vectoriel (un changement de repère peut impliquer un changement de base, ou pas).

# Remarque 2

Alors les coordonnées du point $M$ dans le repère $\mathcal{R}$ s'expriment en fonction des coordonnées de $M$ dans le repère $\mathcal{R}'$ :

$$\begin{cases} x = \alpha + a_{1,1}x' + a_{1,2}y' + a_{1,3}z' \\ y = \beta + a_{2,1}x' + a_{2,2}y' + a_{2,3}z' \\ z = \gamma + a_{3,1}x' + a_{3,2}y' + a_{3,3}z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}_{\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R}'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} .$$

# Suite de la remarque 2

On peut également avoir envie de calculer les coordonnées de $M$ dans $\mathcal{R}'$ sachant les coordonnées de $M$ dans le repère $\mathcal{R}$...

à suivre...

# Droite et plan vectoriels

## Définition

*Soit un espace vectoriel $E$ :*
*Dans $E$ : la droite vectorielle engendrée par un vecteur $u \in E$ non-nul est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $u$ :*

$$\mathrm{Vect}(u) = \{v \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, v = \lambda u\} = \mathbb{R}u.$$

*Si deux vecteurs $(u, v) \in E^2$ sont non-colinéaires, le plan vectoriel engendré par $(u, v)$ est l'ensemble des vecteurs combinaisons linéaires de $u$ et $v$ :*

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \{w \in E, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, w = \lambda u + \mu v\}.$$

# Droite et plan affine

## Définition

*Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel $E$ :*
*Dans $\mathcal{E}$ : la droite affine $\mathcal{D}$ passant par un point $A$ et dirigée par un vecteur non-nul $u \in E$ est l'ensemble des points*

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{E} \mid D = A + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{E}.$$

*On note $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(u)$ et on dit que $\mathrm{Vect}(u)$ est la direction de $\mathcal{D}$.*
*De même, le plan affine $\mathcal{P}$ dirigé par $u, v$ est*

$$\mathcal{P} = \{A + (\lambda u + \mu v), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = A + \mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathcal{E}.$$

# Produit scalaire et espace euclidien

## Définition

*Soit* $u = (u_1, u_2, u_3)$ *et* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*. Le produit scalaire de u et v est*

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

*et on définit la norme d'un vecteur* $u = (u_1, u_2, u_3)$ *par*

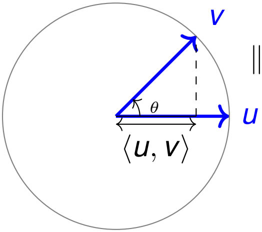
$$\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

# Remarque

1. Les définitions s'étendent sans problème à $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$
2. Le produit scalaire et la norme (au carrée) sont donc des relations polynômiales homogènes (de degré 2) des coordonnées de $u$ et $v$.
3. On peut définir des produits scalaires "à poids" (forme bilinéaire, symétrique, définie positive)

# Interprétation géométrique

Soit $u$ et $v$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la norme est égale à 1 :




$\|u\| = \|v\| = 1$

Le produit scalaire de deux vecteurs unitaires est donc le cosinus de l'angle $\theta$ entre les vecteurs.

# Interprétation géométrique

De plus, on a la formule suivante pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$ :

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos(\theta).$$

En découle l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

avec cas d'égalité si $u$ et $v$ sont colinéaires. Rigoureusement, on démontre cette majoration à partir des propriétés algébrique du produit scalaire.

# Calcul du produit scalaire

## Proposition

*Le produit scalaire satisfait aux règles de calculs suivantes :*

1. *Bilinéarité : soient* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *:*
    1. $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$,
    2. $\langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle$.
2. *Symétrie : soient* $u, v \in \mathbb{R}^3$ $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
3. *Positivité : soient* $u \in \mathbb{R}^3$ $\langle u, u \rangle \geq 0$ *et* $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

# Orthogonalité

## Définition

1. *On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.*
2. *On dit qu'un vecteur est unitaire lorsque sa norme vaut 1.*
3. *On dit qu'une base est orthonormale lorsque les trois vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux et unitaires. On utilise l'acronyme "B.O.N." pour base orthonormale.*
4. *On dit qu'un repère est orthonormé lorsque sa base est orthonormale.*

# Coordonnées d'un vecteur dans une B.O.N.

**Proposition (coordonnées d'un vecteur dans une B.O.N.)**

*Dans une base orthonormale* $(e_1, e_2, e_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$*, un vecteur* $u \in \mathbb{R}^3$ *se décompose sous la forme*

$$u = \langle e_1, u \rangle \, e_1 + \langle e_2, u \rangle \, e_2 + \langle e_3, u \rangle \, e_3.$$

# Produit scalaire dans une B.O.N.

**Proposition (Calcul du produit scalaire dans une B.O.N.)**

*Si* $(e_1, e_2, e_3)$ *est une base orthonormale quelconque de* $\mathbb{R}^3$ *et si* $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ *et* $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ *sont deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*, alors le produit scalaire de u et v s'écrit :*

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

# Distance euclidienne

## Définition

*On définit la distance euclidienne entre deux points $A$ et $B$ de l'espace $\mathcal{E}$ par :*

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

*Si $\mathcal{R}$ est un repère orthonormé on a*

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

*où $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de $A$ et de $B$ respectivement.*

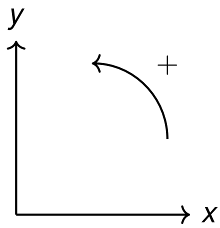
# Orientation

Un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$ étant choisi, on rappelle que, pour exprimer les coordonnées d'un point dans un autre repère $\mathcal{R}' = \left(\Omega', e'_1, e'_2, e'_3\right)$ il est nécessaire d'utiliser la matrice de passage $B$ de la base $(e_1, e_2, e_3)$ à la base $(e'_1, e'_2, e'_3)$.

Si la nouvelle base est orthonomée, on peut montrer que $\det(B) \in \{1, -1\}$ et a donc seulement deux valeurs possibles qui correspondent à deux orientations de l'espace.

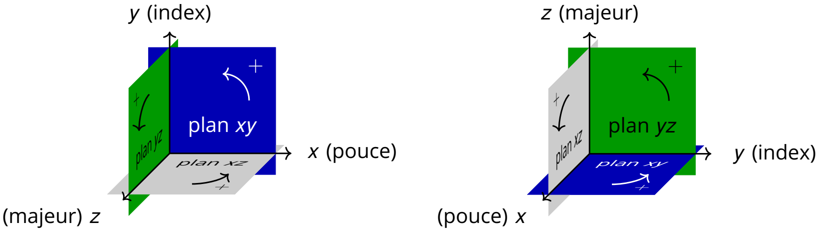
# Remarque

D'un point de vue pratique, ceci s'illustre par le fait qu'un contorsionniste aussi doué qu'il soit ne pourra pas superposer ses deux mains, droite et gauche.
Il faut alors choisir une convention pour "orienter l'espace" et on se contente ici de décrire l'une des règles classiques dite "règle des 3 doigts de la main droite" (il en existe d'autres comme la règle du "bonhomme d'ampère" ou la règle du "tire bouchon" qui suivent toutes la même convention) : on dit qu'un repère est *direct* si le pouce, l'index et le majeur de la main droite peuvent être placés (direction et sens) suivant les vecteurs $(e_1, e_2, e_3)$.




**Repère direct du plan**

# Remarque




**Repères directs de l'espace**

Une permutation circulaire de trois vecteurs ne modifie pas son orientation et les deux repères ci-dessus sont directs. Si on change l'orientation d'un des vecteurs, on change l'orientation du repère (orientation *indirecte*). Dans la suite de ce cours nous considèrerons toujours des repères directs.

# Produit mixte et produit vectoriel

## Définition

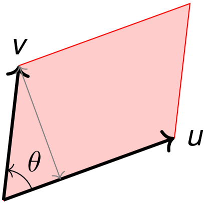
*Soit $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On appelle déterminant ou produit mixte des deux vecteurs, le nombre réel*

$$\det(u, v) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 .$$

**Remarque :** Même remarque que pour le produit scalaire. On a toujours affaire a des polynômes homogènes de degré 2.

# Interprétation géométrique

Le produit mixte $\det(u, v)$ de deux vecteurs $u, v$ de $\mathbb{R}^2$ représente l'aire orientée du parallélogramme s'appuyant sur les deux vecteurs :



# Interprétation géométrique

De plus, si $\theta$ désigne l'angle orienté entre $u$ et $v$ on a

$$\det(u, v) = \|u\| \, \|v\| \sin(\theta).$$

En découle la propriété suivante :

$$|\det(u, v)| \leq \|u\| \, \|v\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux. Ici aussi, la démonstration rigoureuse de ces relations se fait à partir des propriétés algébriques du produit mixte.

# Propriétés algébriques du produit mixte

## Proposition

*Le produit mixte satisfait aux règles de calcul suivantes :*

1. *Bilinéarité : soient* $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *:*
   1. $\det(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \det(u, w) + \mu \det(v, w)$,
   2. $\det(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \det(u, v) + \mu \det(u, w)$.
2. *Antisymétrie : soient* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *on a* $\det(u, v) = -\det(v, u)$.

**Remarque :**

1. Attention donc à l'ordre d'écriture des facteurs dans le produit mixte !
2. L'Antisymétrie implique que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ on a $\det(u, u) = 0$ (le parallélogramme est plat !). Voir la proposition suivante.

# Colinéarité

**Proposition (Condition de colinéarité)**

*Deux vecteurs u et v du plan sont liés si et seulement si* $\det(u, v) = 0$.

**Remarque :** Soit $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non normé. Alors le vecteur $u^\perp = (-u_2, u_1)$ est également un vecteur normé tel que $\langle u, u^\perp \rangle = 0$. On en déduit que $(u, u^\perp)$ forme une base orthonormé de $\mathbb{R}^2$.

Si $(e_1, e_2)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ on peut montrer qu'on a deux possibilités : $e_2 = e_1^\perp$ ou $e_2 = -e_1^\perp$. Dans le premier cas, on dira que la base $(e_1, e_2)$ est directe.

# Produit mixte dans une B.O.N.D.

## Proposition ((Calcul du produit mixte dans une B.O.N. directe))

*Si* $(e_1, e_2)$ *est une base orthonormale directe de* $\mathbb{R}^2$ *et si* $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ *et* $v = y_1 e_1 + y_2 e_2$ *sont deux vecteurs du plan, alors le produit mixte est*

$$\det(u, v) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 .$$

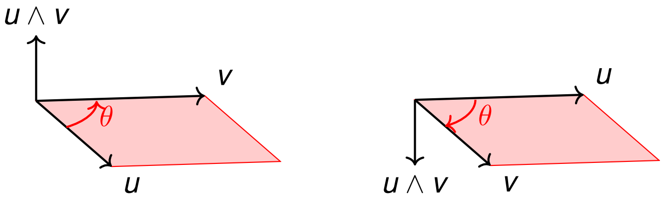
# Produit vectoriel

## Définition

*On appelle produit vectoriel de deux vecteurs* $u = (u_1, u_2, u_3)$ *et* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *le vecteur :*

$$u \wedge v = \left( \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Le produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal au plan engendré par $u$ et $v$ et sa norme est égale à l'aire du parallélogramme engendré par $u$ et $v$.



# Produit vectoriel

On a $\|u \wedge v\| = \|u\| \, \|v\| \, |\sin(\theta)|$ et l'*identité de Lagrange*

$$\|u \wedge v\|^2 + (\langle u, v \rangle)^2 = \|u\|^2 \, \|v\|^2 \, .$$

On a encore des propriétés algébriques similaires car le calcul du produit vectoriel met en jeu des polynômes homogènes de degré 2 en les coordonnées.

# Propriétés du calcul vectoriel

## Proposition

*Le produit vectoriel satisfait aux règles de calculs suivantes :*

1. *Bilinéarité : soient* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *:*
    1. $(\lambda u + \mu v) \wedge w = \lambda(u \wedge w) + \mu(v \wedge w)$,
    2. $u \wedge (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \wedge v) + \mu(u \wedge w)$.
2. *Antisymétrie :* $u \wedge v = -v \wedge u$.

# Propriétés du produit vectoriel

## Proposition

*On a les propriétés suivantes :*

1. *Le produit vectoriel est nul si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.*
2. *Le produit vectoriel est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs. C'est à dire que pour tout* $u, v \in \mathbb{R}^3$ $\langle u, u \wedge v \rangle = \langle v, u \wedge v \rangle = 0$.

# Base orthonormale directe

## Définition

*Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. On dit que $\mathcal{B}$ est directe si $e_1 \wedge e_2 = e_3$.*

**Remarque :**
Dans une base orthonormale directe on a les égalités suivantes :

- $(e_1 \wedge e_2) \wedge e_3 = (e_3 \wedge e_1) \wedge e_2 = (e_1 \wedge e_3) \wedge e_2 = \cdots = 0$,
- $(e_1 \wedge e_2) \wedge e_1 = e_2$,$(e_1 \wedge e_2) \wedge e_2 = -e_1, \dots$

# Calcul du produit vectoriel dans une B.O.N.D.

**Proposition (Calcul du produit vectoriel dans une B.O.N. directe)**

*Si* $(e_1, e_2, e_3)$ *est une base orthonormale directe de* $\mathbb{R}^3$*, et si* $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ *et* $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ *sont deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *alors*

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3.$$

# Remarque

Le produit vectoriel n'est pas associatif : en général, on a $(u \wedge v) \wedge w \neq u \wedge (v \wedge w)$.

Plus précisément, on a la *formule du double produit vectoriel* suivante :

$$u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle \, v - \langle u, v \rangle \, w$$

et

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle \, v - \langle v, w \rangle \, u.$$

En d'autres termes, $u \wedge (v \wedge w)$ appartient au plan engendré par $v$ et $w$ et $(u \wedge v) \wedge w$ au plan engendré par $u$ et $v$.

# Produit mixte dans l'espace

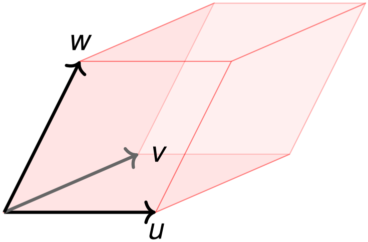
## Définition

*On appelle produit mixte (ou déterminant) de trois vecteurs* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$*, le nombre réel :*

$$\det(u, v, w) = \langle (u \wedge v), w \rangle .$$

# Interprétation géométrique

Le déterminant représente le volume orienté du parallélépipède construit sur $u$, $v$ et $w$.



# Propriétés algébriques du déterminant

Le déterminant possède des propriétés algébriques simples (ici, le calcul met en jeu des polynômes homogènes de degré 3).

## Proposition

*Le produit mixte satisfait aux règles de calcul suivantes :*

1. *Trilinéarité : le produit mixte est linéaire par rapport à chacun des trois vecteurs.*
2. *Antisymétrie : en permutant 2 vecteurs, on change le produit mixte en son opposé.*

# Coplanarité

**Proposition (Condition de coplanarité)**

*Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.*

# Calcul du produit mixte dans une B.O.N.D.

**Proposition (Calcul du produit mixte dans une B.O.N. directe - Règle de Sarrus)**

*Si* $(e_1, e_2, e_3)$ *est une base orthonormale directe, et si* $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$*,* $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ *et* $w = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$ *alors*

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_3 y_2 z_1 - y_3 z_2 x_1 - z_3 x_2 y_1.$$

# Distance euclidienne

La *distance euclidienne* entre un point $A$ et un ensemble $\mathcal{C}$ est définie par :

$$dist(A, \mathcal{C}) = \inf_{P \in \mathcal{C}} \|\overrightarrow{AP}\|$$

En général, aucun point ou plusieurs points $P$ de $\mathcal{C}$ peuvent réaliser cette distance. Mais, si un point $P$ réalise cette distance alors $P$ est un projeté orthogonale de $A$ sur $\mathcal{C}$.

# Droites dans le plan

Plusieurs manières équivalentes de définir une droite passant par $A = (\alpha, \beta)$ :

1. Dirigée par un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ (car c'est un sous espace affine de dimension 1)

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \det(u, (x - \alpha, y - \beta)) = 0\right\}.$$

2. Normale à un vecteur $n \in \mathbb{R}^2$ (car c'est un sous espace affine de codimension 1)

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle n, (x - \alpha, y - \beta)\rangle = 0\right\}.$$

# Distance à une droite dans le plan

## Proposition

*La distance entre un point $M$ et une droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A$ et $B$*

$$dist(M, \mathcal{D}) = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

# Cercles dans le plan

## Définition

*Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\mathcal{O} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$ est*

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(M, \mathcal{O}) = r\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\right\}.\end{aligned}$$

Autrement dit, un cercle est l'ensemble de niveau $r$ pour la distance euclidienne à son centre.

# Plans dans l'espace

Plusieurs manières équivalentes de définir un plan passant par $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ :

1. Dirigé par deux vecteurs non colinéaires $u, v \in \mathbb{R}^3$ (car c'est un sous espace affine de dimension 2)

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \det\left( \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{pmatrix}, u, v \right) = 0 \right\}.$$

2. Normal à un vecteur $n \in \mathbb{R}^3$ (car c'est un sous espace affine de codimension 1)

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle n, \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

# Distance à un plan

## Proposition

*La distance entre un point $M$ et un plan $\mathcal{P}$ passant par les points non alignés $A$, $B$ et $C$*

$$dist(M, \mathcal{P}) = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}.$$

# Droites dans l'espace

Plusieurs manières équivalentes de définir une droite passant par $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ :

1. Dirigée par un vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (car c'est un sous espace affine de dimension 1)

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = u_1 t + \alpha \\ y = u_2 t + \beta \\ z = u_3 t + \gamma \end{cases}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2 Intersection de deux plans passant par $A = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ et normaux à $n = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $n' = \begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ non nuls et non colinéaires. On note $d = \left\langle n, \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\right\rangle$ et $d' = \left\langle n', \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}\right\rangle$. On a alors :

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} \left\langle n, \begin{pmatrix}x-\alpha\\y-\beta\\z-\gamma\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \\ \left\langle n', \begin{pmatrix}x-\alpha'\\y-\beta'\\z-\gamma'\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \end{cases}\right\}.$$

# Distance à une droite dans l'espace

## Proposition

*La distance entre un point $M$ et une droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A$ et $B$*

$$dist(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

# Sphères dans l'espace

## Définition

*La sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* $\mathcal{O} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *et de rayon* $r > 0$ *est*

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \left\{ M \in \mathbb{R}^3 \mid d(M, \mathcal{O}) = r \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \right\}.\end{aligned}$$