Réduction des endomorphismes

Annie Chateau

Université de Montpellier

annie.chateau@umontpellier.fr – noura.faraj@umontpellier.fr –
mountaz.hascoet@umontpellier.fr – violaine.prince@umontpellier.fr

HAI702I Algèbre, géométrie, transformation, calcul numérique

Plan

Pour certaines applications linéaires, il est possible de trouver des bases dans lesquelles les représentations matricielles de ces applications sont simples.
Par exemple, pour $u = (3, 1)$ et $v = (5, 2)$, l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(u) = 2u, \quad f(v) = -v,$$

a pour représentation matricielle dans la base canonique au départ et à l'arrivée :

$$\mathcal{M}_{\text{can,can}}(f) = \begin{pmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{pmatrix}$$

alors que dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$, f est représentée par une matrice diagonale :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Question : Comment trouver des bases dans lesquelles les représentations matricielle des *endomorphismes* (applications linéaires de E dans E) sont diagonales ?

Valeurs propres et espaces propres

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endormorphisme de E. On cherche une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale.

Si $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$, cela signifie que $f(v_i) = \lambda_i v_i$ ou encore $(f - \lambda I)(v_i) = 0$, v_i est donc un vecteur non nul de $\ker(f - \lambda I)$ et $f - \lambda I$ n'est pas injective.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $Au = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \lambda u$ et $Av = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v$. Existe-t-il d'autres vecteurs w tels que Aw soit colinéaire à w ?

Vecteur propre

Définition

1. *Un vecteur propre d'une matrice A est un vecteur non nul tel que : $Av = \lambda v$ pour un scalaire λ;*
2. *Un scalaire λ est appelé valeur propre d'une matrice A lorsqu'il existe un vecteur v non nul tel que $Av = \lambda v$.*

Proposition

Soit f un endomorphisme de E et A (resp. A') la représentation matricielle de f dans une base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Alors A et A' possèdent les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres.
Ces valeurs propres (resp. vecteurs propres) sont appelées valeurs propres (resp. vecteurs propres) de l'application linéaire f.

Valeurs propres

Démonstration.

Soit v un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ. On note $v_{\mathcal{B}}$ (resp. $v_{\mathcal{B}'}$) le vecteur des coordonnées de V dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$. Il suffit de montrer $A'v_{\mathcal{B}'} = \lambda v_{\mathcal{B}'}$.

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "{f,A}"] & (E,\mathcal{B}) \arrow[d, "{\mathrm{Id},P^{-1}}"] \\
(E,\mathcal{B}') \arrow[u, "{\mathrm{Id},P}"] \arrow[r, "{f,A'}"'] & (E,\mathcal{B}')
\end{tikzcd}$$

On a $A' = P^{-1}AP$ et aussi $v_{\mathcal{B}} = Pv_{\mathcal{B}'}$. Donc

$$A'v_{\mathcal{B}'} = P^{-1}APP^{-1}v_{\mathcal{B}} = P^{-1}Av_{\mathcal{B}} = \lambda P^{-1}v_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}'}. \qquad \square$$

Valeur propre

Il est facile de savoir si un vecteur v est vecteur propre d'une matrice (il suffit de faire le calcul). Il est en revanche plus compliqué de savoir si un scalaire est une valeur propre. La proposition suivante nous donne un moyen de pallier cette difficulté.

Proposition

Un scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si l'équation vectorielle $(A - \lambda I)u = 0$ admet un vecteur non nul comme solution. Autrement dit, quand $\ker(A - \lambda I)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Valeur propre

Théorème

Un scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$. Le polynôme en $\lambda \mapsto P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est appelé polynôme caractéristique de A (ou de l'application linéaire f associée à A).

Ce théorème nous permet de déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme f, il suffit pour cela de connaître sa représentation matricielle A par rapport à une base quelconque. Les valeurs propres de f sont alors les solutions en λ de l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$.

Remarque : pour la dimension 2, on a

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Exemple

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la représentation matricielle dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver les valeurs propres de A on résout :

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -7.$$

Sous-espace propre

Definition

Si un scalaire λ est une valeur propre de A, le noyau $\ker(A - \lambda I)$ est appelé *sous-espace propre* de A associé à la valeur propre λ. Dit autrement, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est formé par les vecteurs v de E tels que $f(v) = \lambda v$ (f étant l'application linéaire associée à la matrice A).

exemple

Déterminons les sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres de l'exemple précédent. Le sous-espace propre E_{λ_1} associé à la valeur propre $\lambda_1 = 3$ est par définition le sous espace $\ker(f - 3\,\mathrm{Id})$:

$$E_{\lambda_1} = \ker(f - 3\,\mathrm{Id}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

On résout le système suivant pour déterminer E_{λ_1} :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3x \\ 3x - 6y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 3x - 9y = 0 \end{cases} \iff x = 3y.$$

Exemple

Par suite

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 3y \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(3e_1 + e_2\right).$$

Par un raisonnement analogue, on trouve :

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\left(-3e_1 + e_2\right).$$

On peut vérifier que dans la base $\mathcal{B} = \left(-3e_1 + e_2, 3e_1 + e_2\right)$, f a pour représentation matricielle

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Une matrice carrée A annule son polynôme caractéristique.

Théorème (Cayley-Hamilton)

Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle ("un polynôme en A") qui est la matrice des zéros.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Le Théorème de Cayley-Hamilton affirme que
$P(A) = A^2 - 5A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Applications

1. Si on dispose d'un polynôme annulateur de A, on sait que les valeurs propres sont racines de ce polynôme.
2. Calcul de l'inverse d'une matrice. Dans notre cas :

$$A^2 - 5A = 2I \iff A\frac{A - 5I}{2} = \frac{A - 5I}{2}A = I \iff A^{-1} = \frac{A - 5I}{2}$$

Diagonalisation

On dit qu'un polynôme P est *scindé* s'il se factorise sous la forme

$$P(x) = C(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

où tous les $a_i \in \mathbb{R}$ sont les racines de P et $C \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, le polynôme P est dit *scindé à racines simples* si dans la factorisation précédente tous les a_i sont tous distincts (c'est le cas que l'on considère dans les transparents suivants.

Condition suffisante

Proposition

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Si le polynôme caractéristique de A admet n racines distinctes 2 à 2 alors A est diagonalisable.

Démonstration.

Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les n racines distinctes du polynôme caractéristiques et $v_1, \ldots, v_n$ les n vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Il suffit de montrer que $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ est une base de E.
Montrons par récurrence sur k que $(v_1, \cdots, v_k)$ est une famille libre de E. C'est clairement vrai pour $k = 1$. Supposons que ce soit vrai pour un entier k avec $1 \leq k < n$ et montrons que $(v_1, \cdots, v_{k+1})$ est une famille libre de E. Soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1}$ tels que :

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0, \tag{1}$$

□

Condition suffisante

Démonstration.

on a, en prenant l'image par f :

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0. \tag{2}$$

La combinaison (2) $- \lambda_{k+1}$(1) s'écrit :

$$\alpha_1 \left(\lambda_1 - \lambda_{k+1}\right) v_1 + \ldots + \alpha_k \left(\lambda_k - \lambda_{k+1}\right) v_k = 0$$

Par hypothèse de récurrence, chacun des coefficients de cette combinaison linéaire est nul et comme les λ_k sont deux à deux distincts, cela implique $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$, ce qui reporté dans (1), donne $\alpha_{k+1} = 0$. Par conséquent $\mathcal{B}$ est une famille libre de n éléments de E, c'est donc une base de E. □

En pratique

Pour diagonaliser $f : E \to E$ dont le polynôme caractéristique de la matrice carrée (de taille $n \times n$) $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ admet n racines distinctes, il faut :

1. Calculer le polynôme caractéristique $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I)$.
2. Trouver les n racines de ce polynôme $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.
3. Déterminer un vecteur v_i qui engendre l'espace propre E_{λ_i} pour tout $i = 1, \cdots, n$.
4. L'ensemble des vecteurs v_i forment une base $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ de E et la matrice de f dans cette base est

$$D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Condition nécessaire et suffisante

Question : si les n valeurs propres du polynôme caractéristique ne sont pas distinctes, peut-on diagonaliser A?

Définition

Soit λ_1 une racine d'un polynôme $P(\lambda)$. L'ordre de multiplicité de la racine λ_1 est égal au plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un polynôme $Q(\lambda)$ avec $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r Q(\lambda)$.

Exemple

1. $P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, alors -1 est racine d'ordre 2.
2. $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12 = (x-2)^2(x+3)$ alors 2 est racine d'ordre 2 et -3 est racine d'ordre 1.

Condition nécessaire et suffisante

Théorème

Soit A une matrice $n \times n$ admettant p valeurs propres distinctes.

1. *Pour $1 \leq k \leq p$, la dimension de l'espace propre associé à λ_k est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_k.*
2. *La matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.*

Corollaire

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si la dimension des espaces propres associés à chaque valeur propre λ_k est égal à l'ordre de multiplicité de λ_k.

Exemple

Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

Exemple

L'espace propre E_0 associé à la valeur propre 0 est défini par $\{v \in \mathbb{R}^3 : A(v) = 0\}$, il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = y \end{cases} .$$

Donc

$$E_0 = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(e_1 + e_2 + e_3\right).$$

Exemple

L'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est défini par $\{v \in \mathbb{R}^3 : A(v) = v\}$, il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} y - z = x \\ -x + 2y - z = y \iff -x + y - z = 0 \\ -x + y = z \end{cases}.$$

L'espace propre E_1 est de dimension 2, la matrice A est donc diagonalisable. Il reste à trouver une base de E_1, par exemple $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (on peut en choisir d'autres).

Exemple

La matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est donc :

$$D = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A = PDP^{-1}, D = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$:

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathrm{can}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

Considérons maintenant l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est encore $-\lambda(\lambda - 1)^2$. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est défini par les équations :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = x \\ 2x + 5y - 7z = y \\ x + 3y - 4z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - 3z = 0 \\ 2x + 4y - 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ y = y \\ z = \frac{2}{3}y \end{cases}.$$

Exemple 2

Par conséquent $E_1 = \mathrm{Vect}\,(e_1 + 3e_2 + 2e_3)$ est de dimension 1. La dimension de E_1 n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 donc A n'est pas diagonalisable.

Question : Que faire quand on ne peut diagonaliser un endomorphisme f ?

Triangularisation

Une réduction qui paraît intéressante est la réduction d'une matrice à la forme triangulaire. On a le résultat suivant : les endomorphismes dont le polynôme caractéristique est scindé sont trigonalisables.

Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to F$ un endomorphisme de E. Si toutes les racines du polynôme caractéristique sont dans $\mathbb{R}$, alors f est triangularisable.

Remarque : Si $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est triangularisable.

En pratique

En pratique pour triangulariser un endomorphisme on procède de la manière suivante :

1. On calcule le polynôme caractéristique de f.
2. On cherche les racines de ce polynôme, *i.e.*, les valeurs propres de f. Si toutes les racines sont dans K on peut triangulariser.
3. On recherche les espaces propres associés à chaque valeur propre.
4. On complète les vecteurs propres en une base de E.
5. On détermine la matrice de f par rapport à cette base.
6. On recommence la méthode sur la matrice d'ordre inférieur.

Exemple

Triangulariser la matrice

$$A = \mathcal{M}_{\text{can,can}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$ d'ordre 1 et $\lambda_2 = 2$ d'ordre 2. Les espaces propres sont

$$E_{\lambda_1} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Le sev E_{λ_2} est de dimension 1 donc A n'est pas diagonalisable. Néanmoins comme toutes les valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$, elle est triangularisable dans $\mathbb{R}$. On pose $u_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$, $u_2 = e_1$ et on complète la famille (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^3$ en prenant $u_3 = e_3$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$:

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\text{can}}(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

La matrice $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire. Pour la calculer, il suffit de déterminer les coordonnées de $f(u_3) = f(e_3) = -e_2 + 4e_3$ dans $\mathcal{B}$, c'est à dire

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc trouvé une base $\mathcal{B}$ par rapport à laquelle la matrice D associée à l'application linéaire f est triangulaire,

$$D = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

Projecteurs

Définition

Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires d'un espace vectoriel $E = E_1 \oplus E_2$. Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soit

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

L'application p est linéaire et est appelée projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2.

Projecteurs

Proposition

Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires d'un espace vectoriel $E = E_1 \oplus E_2$. Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2, alors :

1. $\ker(p) = E_2$.
2. $\mathrm{Im}(p) = E_1$.
3. $p(x) = x$ *si et seulement si* $x \in E_1$.
4. $p \circ p(x) = p(x)$ *pour tout* $x \in E$.

Proposition

Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires d'un espace vectoriel $E = E_1 \oplus E_2$. Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2, alors $\mathrm{Id} - p$ est le projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1.

Projecteurs

Proposition

Soient E_1 et E_2 deux sev supplémentaires d'un espace vectoriel $E = E_1 \oplus E_2$. Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2, alors les valeurs propres de p sont 0 *ou* 1*. Autrement dit, il existe une base dans laquelle la matrice de p s'écrit :*

$$\begin{pmatrix} 0_{d_2} & 0 \\ 0 & I_{d_1} \end{pmatrix}$$

où $d_i = \dim(E_i)$ pour $i = 1, 2$.

Conséquence, si E est un espace euclidien, alors p est une contraction : $\|p(x)\| \leq \|x\|$.