Notizen MA3 WS 22/23

Noah Freising

12. November 2022

Notizen zur Vorlesung MA3 im Studiengang IB an der Hochschule Mannheim. Gehalten im Wintersemester 2022/23.

Inhaltsverzeichnis

Kombinatorik

Verteilungen

Eine Verteilungsfunktion hat den Aufbau:

$$F = P(X \leq x) \tag{1}$$
$$F : \mathbb{R} \mapsto [0; 1] \tag{2}$$

F bildet also die Wahrscheinlichkeit für alle Werte der Zufallsvariablen X für $X \leq x$ ab (1). Dabei wird für jedes x eine Wahrscheinlichkeit abgebildet.

Diskrete Verteilungen

Bernoulliverteilung

Die Bernoulli-Verteilung ist eine *diskrete* Verteilung, deren Zufallsvariable X nur zwei Werte annimmt: Erfolg ($X = 1$) und Misserfolg ($X = 0$).

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}. \tag{3}$$

Beispiel 1: Ein Münzwurf, bei dem Kopf z.B. 1 und Zahl 0 zugeordnet wird, ist ein Beispiel für ein Bernoulli-Experiment. Bei einer fairen Münze ist $p = \frac{1}{2}$.

Binomialverteilung

EINE FOLGE VON BERNOULLI-VERSUCHEN mit der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p nennen wir *Bernoulli-Kette*. Diese ist binomialverteilt mit der Washrscheinlichkeit:

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}. \tag{4}$$

Der Erwartungswert der Binomialverteilung berechnet sich durch:

$$\lambda = n \cdot p \tag{5}$$

Die Varianz der Binomialverteilung berechnet sich wie folgt:

$$\sigma^2 = Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p). \tag{6}$$

Eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p lässt sich durch eine Normalverteilung annähern, falls gilt (*Laplace-Bedingung*):

$$\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} > 3. \tag{7}$$

Bei einer Bernoulli-Kette ist es oftmals spannend zu wissen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass der erste Treffer nach k Versuchen auftritt. Die Verteilungsfunktion hierzu bezeichnen wir als *geometrische Verteilung*:

$$P(k) = (1 - p)^{k-1} p \tag{8}$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit P eines Treffers bei wachsemden n gegen 0 geht[1] und gleichzeitig $\lim_{n\to\infty} = n \cdot p = \lambda > 0$ gilt, lassen sich die binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten bei wachsemden n mit der *Poisson-Verteilung* approximieren:

[1] $\lim_{n\to\infty} n = 0$.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, .. \quad \lambda > 0 \tag{9}$$

Stetige Verteilungen

Die Dichtefunktion[2] einer stetigen Verteilung zeichnet sich, wie der Name impliziert durch das Vorhandensein eines Wert an allen Stellen aus [3]. Wir nutzen hier anstelle einer Verteilungsfunktion eine Dichtefunktion [4]:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{10}$$

Damit es sich um eine Dichtefunktion einer Verteilung handelt, müssen zwei Eigenschaften erfüllt sein:

$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \tag{12}$$

(10): Wahrscheinlichkeiten können nicht negativ sein
(11): Insgesamt beträgt die kumulierte Wahrscheinlichkeit 1

Gleichverteilung

Bei einer Gleichverteilung definieren wir die Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{13}$$

Die Wahrscheinlichkeiten berechnen sich:

$$P(X \leq x) = F(X) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für} \quad x > b \end{cases} \tag{14}$$

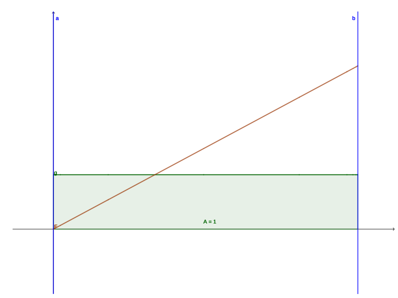

Abbildung 1: Beispiel einer Gleichverteilung

Exponentielle Verteilung

Die Dichtefunktion einer exponentiellen Verteilung hat die Form:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \tag{15}$$

Nach Bedingung (11) müssen wir zeigen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} = 1$.[5]

Beweis.

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \lambda \cdot [\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}]_0^{\infty}$$
$$= [-e^{-\lambda t}]_0^{\infty} = -0 - (-1) = 1$$

□

[2] Die Dichtefunktion ist das *stetige* Gegenstück zur *diskreten* Verteilungsfunktion
[3] Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.
[4] Das Integral bis x stellt die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ dar.
[5] Da wir mit einer Exponentialfunktion arbeiten, die wir für $x \geq 0$ definieren, beweisen wir analog $\int_0^{\infty} = 1$.

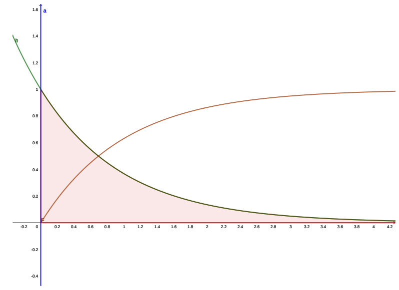

Abbildung 2: Beispiel einer Exponentialverteilung

Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases} \tag{16}$$

Normalverteilung

Die Normalverteilung folgt der grundlegenden Form $f(t) = e^{-t^2}$. Überprüfen wir zunächst die Eigenschaften (10)[6] und (11).

Zu (11):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \sqrt{2\Pi}$$

[6] trivial, $e^0 = 1$

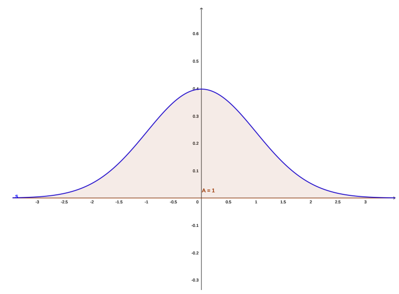

Abbildung 3: Beispiel einer Normalverteilung

Da $\sqrt{2\Pi} > 1$, ist Bedingung (11) nicht erfüllt. Wir definieren daher die *Standard-Normalverteilung* ϕ wie folgt [7]:

$$\phi(t) = \frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \tag{17}$$

Zusätzlich definieren wir die *allgemeine Normalverteilung* [8]:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{18}$$

[7] Wir normieren die Funktion auf das berechnete Integral, damit $\int_{-\infty}^{\infty} = 1$

[8] μ: Verschiebung entlang der x-Achse
σ: Stauchung/Streckung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet sich durch[9]:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \tag{19}$$

[9] Die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einer Dichtefunktion ist einfach das Integral

Hierbei wird ein uneigentliches Integral[10] verwendet, dessen Berechnung nur über Näherungsverfahren möglich ist. Hierfür gibt es Tabellen, die in der Klausur gestellt werden.

[10] Integral mit ∞ als Grenze, Wert nicht einfach berechenbar

Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen

Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ zwei Zufallsgrößen. X und Y heißen *unabhängig*, wenn $\forall x \in W(X), y \in W(Y)$:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \tag{20}$$

gilt. Bei gemeinsamen Verteilungen sprechen wir von *diskreten* Zufallsvariablen. Die Unabhängigkeit lässt sich zeigen durch eine Vierfeldertafel, bei der alle Werte durch Multiplikation berechnet werden und eine Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten 1 ergibt (siehe Beispiel 2). Die Abhängigkeit lässt sich durch ein Gegenbeispiel beweisen.

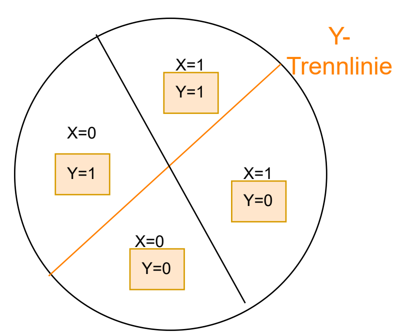

Abbildung 4: Mögliche Kombinationen zweier Zufallsvariablen in Ω.

Beispiel 2: Beispiel einer unabhängigen, gemeinsamen Verteilung. Hier sehen wir das an der Vierfeldertafel[11]:

X/Y	Y=0	Y=1	
X=0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0.25
X=1	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	0.75
	0.25	0.75	1

[11] Siehe Beispielsweise: $P(X = 0, Y = 0) = P(X) \cdot P(Y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten 2-dimensionalen Zufallsgröße lässt sich durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} P_{ik} \quad \text{falls} \quad x = x_i, y = y_k \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{21}$$

darstellen.

Erwartungswert

Für eine *diskrete* Zufallsgröße ist der Erwartungswert

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i). \tag{22}$$

Beispiel 3: Erwartungswert einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung

x_i	0	2	3	4	10	11
p_i	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{8} + 11 \cdot \frac{1}{8}$$

Für eine *stetige* Zufallsgröße ist der Erwartungswert [12]:

[12] Funktioniert prinzipiell genau wie im *diskreten*, aber mit Integral statt Summe

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y) dy \tag{23}$$

Beispiel 4: Erwartungswert einer stetigen Verteilung[13]

[13] gerne in Klausuren gefragt

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, 0 \leq x \leq 5 \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^5 ax^2 dx = 1$$
$$[\frac{ax^3}{3}]_0^5 = \frac{125a}{3} - \frac{0a}{3} = \frac{125a}{3} = 1$$
$$a = \frac{3}{125}$$

Der Erwartungswert ist dann:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^5 x \frac{3}{125} x^2 dx \\
&= [\frac{3}{125} \cdot \frac{x^4}{4}]_0^5 = \frac{3}{125} \cdot 6254 = \frac{15}{4}
\end{aligned}
$$

Rechenregeln für den Erwartungswert

Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ zwei Zufallsgrößen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= E(X) + E(Y) && (24) \\
E(a \cdot X + b \cdot Y) &= a \cdot E(X) + b \cdot E(Y) && (25) \\
\text{Sind X , Y unabhängig dann gilt} \quad E(X \cdot Y) &= E(X) \cdot E(Y) && (26)
\end{aligned}
$$

Varianz

Der mittlere Abstand der Werte vom Erwartungswert. Die quadratische Funktion ist besser als der Betrag analytisch.

Die Varianz zum Beispiel 3:

$$
Var(X) = -\frac{15}{4}^2 \frac{3}{8} + \frac{-7}{4}^2 \frac{1}{8} + \frac{-3}{4}^2 \frac{1}{8} + \frac{1}{4}^2 \frac{1}{8} + \frac{25}{4}^2 \frac{1}{8} + \frac{28}{4}^2 \frac{1}{8}
$$

Die Varianz zum Beispiel 4:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \frac{3}{125} x^2, 0 \leq x \leq 5 \\ 0, \text{sonst} \end{cases} \\
E(X) &= \frac{15}{4} \\
Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{15}{4})^2 f(x) dx \\
&= \int_0^5 (x - \frac{15}{4})^2 \frac{3}{125} x^2 dx
\end{aligned}
$$

Die Varianz lässt sich so (einfacher) auch so berechnen:[14]

$$
Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \qquad (27)
$$

[14] Das ist nicht besser, aber einfacher. Nicht die schöne Definition, sondern den schnellen Weg wählen.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
Var(X) := {} & E((X - E(X))^2) \\
= {} & E(X^2 - 2E(X) \cdot X + (E(X))^2) \\
= {} & E(X^2) - E(2E(X) \cdot X) + E((E(X))^2) \\
= {} & E(X^2) - E(X)E(X) + (E(X))^2 \\
= {} & E(X^2) - (E(X))^2
\end{aligned}
$$

□

x_i	0	2	3	4	10	11
p_i	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_i^2	0	4	9	16	100	121

aktualisierte Tabelle zu Beispiel 3

Die Varianz zum Beispiel 3:

$$Var(X) = \frac{250}{8} - \frac{15^2}{4^2} = \frac{500 - 225}{16} = \frac{225}{16}$$

Die Varianz zum Beispiel 4:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{3}{125}\int_0^5 x^2 x^2 dx \\
&= \frac{3}{125}[\frac{x^5}{5}]_0^5 = 15.
\end{aligned}
$$

$$Var(X) = 15 - (\frac{15}{4})^2 = \frac{15 \cdot 16 - 15^2}{16} = \frac{15}{16}.$$