Notizen MA3 WS 22/23

Noah Freising

7. November 2022

Notizen zur Vorlesung MA3 im Studiengang IB an der Hochschule Mannheim. Gehalten im Wintersemester 2022/23.

Inhaltsverzeichnis

Kombinatorik

Verteilungen

Eine Verteilungsfunktion hat den Aufbau:

$$F = P(X \leq x) \tag{1}$$
$$F : \mathbb{R} \mapsto [0;1] \tag{2}$$

F bildet also die Wahrscheinlichkeit für alle Werte der Zufallsvariablen X für $X \leq x$ ab (1). Dabei wird für jedes x eine Wahrscheinlichkeit abgebildet.

Diskrete Verteilungen

Binomialverteilung

Stetige Verteilungen

Die Dichtefunktion[1] einer stetigen Verteilung zeichnet sich, wie der Name impliziert durch das Vorhandensein eines Wert an allen Stellen aus [2]. Wir nutzen hier anstelle einer Verteilungsfunktion eine Dichtefunktion [3]:

[1] Die Dichtefunktion ist das *stetige* Gegenstück zur *diskreten* Verteilungsfunktion

[2] Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

[3] Das Integral bis x stellt die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ dar.

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{3}$$

Damit es sich um eine Dichtefunktion einer Verteilung handelt, müssen zwei Eigenschaften erfüllt sein:

(4): Wahrscheinlichkeiten können nicht negativ sein

(5): Insgesamt beträgt die kumulierte Wahrscheinlichkeit 1

$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \tag{5}$$

Gleichverteilung

Bei einer Gleichverteilung definieren wir die Dichtefunktion:

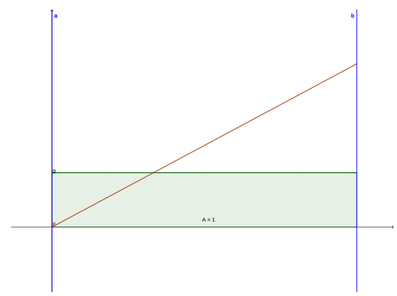

Abbildung 1: Beispiel einer Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

Die Wahrscheinlichkeiten berechnen sich:

$$P(X \leq x) = F(X) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für} \quad x > b \end{cases} \tag{7}$$

Exponentielle Verteilung

Die Dichtefunktion einer exponentiellen Verteilung hat die Form:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \tag{8}$$

Nach Bedingung (5) müssen wir zeigen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} = 1$.[4]

[4] Da wir mit einer Exponentialfunktion arbeiten, die wir für $x \geq 0$ definieren, beweisen wir analog $\int_0^{\infty} = 1$.

Beweis.

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \lambda \cdot [\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}]_0^{\infty}$$
$$= [-e^{-\lambda t}]_0^{\infty} = -0 - (-1) = 1$$

$\square$

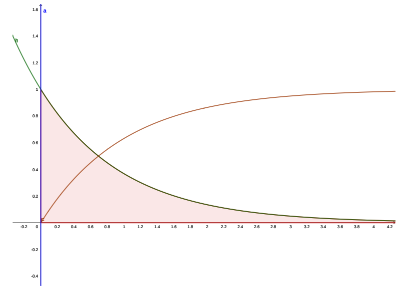

Abbildung 2: Beispiel einer Exponentialverteilung

Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases} \tag{9}$$

Normalverteilung

Die Normalverteilung folgt der grundlegenden Form $f(t) = e^{-t^2}$. Überprüfen wir zunächst die Eigenschaften (4)[5] und (5).

[5] trivial, $e^0 = 1$

Zu (5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \sqrt{2\Pi}$$

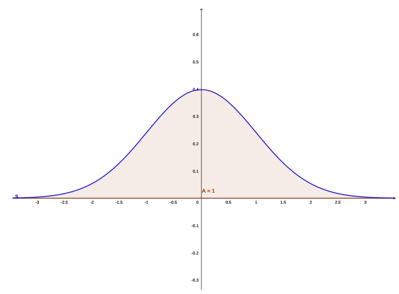

Abbildung 3: Beispiel einer Normalverteilung

Da $\sqrt{2\Pi} > 1$, ist Bedingung (5) nicht erfüllt. Wir definieren daher die *Standard-Normalverteilung* ϕ wie folgt [6]:

$$\phi(t) = \frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} \tag{10}$$

[6] Wir normieren die Funktion auf das berechnete Integral, damit $\int_{-\infty}^{\infty} = 1$

Zusätzlich definieren wir die *allgemeine Normalverteilung* [7]:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \tag{11}$$

[7] μ: Verschiebung entlang der x-Achse
σ: Stauchung/Streckung

Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen

Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ zwei Zufallsgrößen. X und Y heißen *unabhängig*, wenn $\forall x \in W(X), y \in W(Y)$:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \tag{12}$$

gilt. Bei gemeinsamen Verteilungen sprechen wir von *diskreten* Zufallsvariablen.

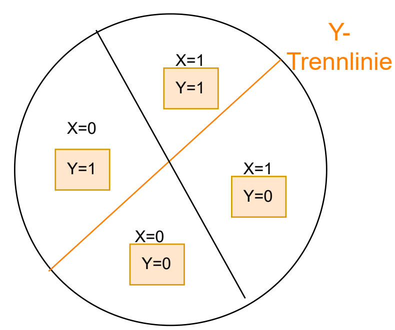

Abbildung 4: Mögliche Kombinationen zweier Zufallsvariablen in Ω.

Beispiel 1:Beispiel einer unabhängigen, gemeinsamen Verteilung. Hier sehen wir das an der Vierfeldertafel[8]:

X/Y	Y=0	Y=1	
X=0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0.25
X=1	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	0.75
	0.25	0.75	1

[8] Siehe Beispielsweise: $P(X = 0, Y = 0) = P(X) \cdot P(Y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten 2-dimensionalen Zufallsgröße lässt sich durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} P_{ik} & \text{falls} \quad x = x_i, y = y_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{13}$$

darstellen.

Erwartungswert

Für eine *diskrete* Zufallsgröße ist der Erwartungswert

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i). \tag{14}$$

Beispiel 2:Erwartungswert einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung

x_i	0	2	3	4	10	11
p_i	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{8} + 11 \cdot \frac{1}{8}$$

Für eine *stetige* Zufallsgröße ist der Erwartungswert [9]:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y) dy \tag{15}$$

Beispiel 3:Erwartungswert einer stetigen Verteilung[10]

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, 0 \leq x \leq 5 \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^5 ax^2 dx = 1$$
$$[\frac{ax^3}{3}]_0^5 = \frac{125a}{3} - \frac{0a}{3} = \frac{125a}{3} = 1$$
$$a = \frac{3}{125}$$

Der Erwartungswert ist dann:

$$E(X) = \int_0^5 x \frac{3}{125} x^2 dx$$
$$= [\frac{3}{125} \cdot \frac{x^4}{4}]_0^5 = \frac{3}{125} \cdot 6254 = \frac{15}{4}$$

[9] Funktioniert prinzipiell genau wie im *diskreten*, aber mit Integral statt Summe

[10] gerne in Klausuren gefragt

Rechenregeln für den Erwartungswert

Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ zwei Zufallsgrößen. Es gilt:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \tag{16}$$
$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y) \tag{17}$$
$$\text{Sind X , Y unabhängig dann gilt} \quad E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \tag{18}$$

Varianz

Der mittlere Abstand der Werte vom Erwartungswert. Die quadratische Funktion ist besser als der Betrag analytisch.

Die Varianz zum Beispiel 2:

$$Var(X) = -\frac{15}{4}^2\frac{3}{8} + \frac{-7}{4}^2\frac{1}{8} + \frac{-3}{4}^2\frac{1}{8} + \frac{1}{4}^2\frac{1}{8} + \frac{25}{4}^2\frac{1}{8} + \frac{28}{4}^2\frac{1}{8}$$

Die Varianz zum Beispiel 3:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \frac{3}{125}x^2, 0 \leq x \leq 5 \\ 0, \text{sonst} \end{cases} \\
E(X) &= \frac{15}{4} \\
Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{15}{4})^2 f(x) dx \\
&= \int_0^5 (x - \frac{15}{4})^2 \frac{3}{125} x^2 dx
\end{aligned}$$

Die Varianz lässt sich so (einfacher) auch so berechnen:[11]

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{19}$$

[11] Das ist nicht besser, aber einfacher. Nicht die schöne Definition, sondern den schnellen Weg wählen.

Beweis.

$$\begin{aligned}
Var(X) &:= E((X - E(X))^2) \\
&= E(X^2 - 2E(X) \cdot X + (E(X))^2) \\
&= E(X^2) - E(2E(X) \cdot X) + E((E(X))^2) \\
&= E(X^2) - E(X)E(X) + (E(X))^2 \\
&= E(X^2) - (E(X))^2
\end{aligned}$$

□

x_i	0	2	3	4	10	11
p_i	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_i^2	0	4	9	16	100	121

aktualisierte Tabelle zu Beispiel 2

Die Varianz zum Beispiel 2:

$$Var(X) = \frac{250}{8} - \frac{15^2}{4^2} = \frac{500-225}{16} = \frac{225}{16}$$

Die Varianz zum Beispiel 3:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{3}{125}\int_0^5 x^2 x^2 dx$$
$$= \frac{3}{125}[\frac{x^5}{5}]_0^5 = 15.$$

$$Var(X) = 15 - (\frac{15}{4})^2 = \frac{15 \cdot 16 - 15^2}{16} = \frac{15}{16}.$$