Analysis 1

Noah J. Zimmermann

Teil

II

Wintersemester 2016/17

Inhaltsverzeichnis

Raum reelwertiger stetiger Funktionen 3

Norm 4

Raum reelwertiger stetiger Funktionen

r stetiger Funktionen

$$C(\mathbb{K}) := \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{R} | f \textit{ ist stetig auf } \mathbb{K}\}$$

ist der Raum reelwertiger stetiger Funktionen auf $\mathbb{K}$

Bemerkung:

Seien $f, g \in C(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $f + g$, $f \cdot g$, λf wieder eine Funktion aus $C(\mathbb{K}).C(\mathbb{K})$ bildet dann einen Ring.

Definition

Seien $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$

$\max\limits_{x \in \mathbb{K}}(f, g)(x) := \max\limits_{x \in \mathbb{K}}(f(x), g(x))$

Analog für das Minimum. Dies ist lediglich Notation.

Satz

$\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ sind in $C(\mathbb{K})$ für $f, g \in C(\mathbb{K}$

Man stelle sich einfach vor, dass man eine $|f|$ als Komposition mit f darstellen kann und dann ist $|f|$ wieder stetig.

Außerdem gilt: $min(f, g) = -max(-f, -g)$

und dann definiert man

$$|f|_\infty := \max |f(x)|$$

Norm

Norm

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit dem Betrag ||), sei V ein VR über $\mathbb{K}$.

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

heißt eine Norm auf V genau dann wenn:

1. Definitheit:

   $\forall x \in V : \|x\| \geq 0 \land (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

2. Homogenität:

   $\forall x \in V : \alpha \in \mathbb{K} \;\; \|\alpha x\| = |\alpha| = \|x\|$

3. Dreiecksungleichung:

   $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(V, \|\|)$ heißt normierter Vektorraum.

rmierte Vektorräume

$C([a,b])$ nach $\mathbb{R}_0^+$ ist demnach ein Vektorraum. (Einfach nachrechnen)

Man definiert eine **Normkonvergenz**

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{f}$$

in Norm das gleiche wie

$$\|f - f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{0}$$

Demnach ist die Konvergenz ist Norm mit der gleichmäßigen Konvergenz gleichzusetzen, weil die Funktionen ja praktisch keinen Unterschied mehr haben, da sie sich 0 annähern und da es von x unabhängig ist, somit ist es nicht nur punktweise (von x abhängig) sondern gleichmäßig (von x unabhängig) konvergent.

Lemma

Somit gilt:

Für eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ ist die gleichmäßige Konvergenz gegen eine Grenzfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit $\|f - f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{0}$

on Funktionenfolgen

Man kann die Cauchykonvergenz auch auf Funktionenfolgen anwenden:
Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ heißt Cauchy Folge, wenn

$$\forall\varepsilon\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ : n,m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

Dann ist jede konvergente Folge wieder eine Cauchy Folge. Der Beweis folgt analog zu den Zahlenfolgen.