בס"ד

- **חלק א: חישובים בתחשיב למדא**

שאלה 1: חישוב ביטויי למדא

חשבו את הביטויים הבאים עד כמה שניתן (אם יש גזירה אינסופית הסבירו במילים למה יש גזירה אינסופית):

א. $(\lambda z.z)\ (\lambda y.\ y\ \ y)\ (\lambda x.x\ a)$

א. $(\lambda z.z)\ (\lambda y.\ y\ \ y)\ (\lambda x.x\ a)$

$(\lambda x.x\ a)(\lambda y.y\ y) =$

$= (\lambda y.y\ y)\ a =$

$\boxed{a\ a}$

ב. $(\lambda x.\ \lambda y.x\ y\ y)\ (\lambda a.a)\ b$

ב. $(\lambda x.\ \lambda y.x\ y\ y)\ (\lambda a.a)\ b$

$(\lambda y.(\lambda a.a)\ y\ y)\ b$

$(\lambda a.a)\ b\ b$

$\boxed{b\ b}$

אם נעצור בסדר אחר נקבל:

$(\lambda x.\ \lambda y.\ x\ \ y\ y)\ b =$

$\boxed{\lambda y.\ b\ \ y\ y}$

ג. $(((\lambda x.\lambda y.(x\ y))\ (\lambda y.y))\ w)$

ג. $(((\lambda x.\lambda y.(x\ y))\ (\lambda y.y))\ w)$

$= (((\lambda x.\lambda y.(x\ y))(\lambda z.z))\ w)$

$= \lambda y.(\lambda z.z\ y)\ \ w$

$\lambda z.\ z\ \ w\ = \boxed{w}$

9. הראו שיש שתי גזירות שונות (שמביאות גם לתוצאות שונות) לביטוי הבא:

ד. $(\lambda x.\, y)\ ((\lambda y.\, y\ y\ y)\ (\lambda x.\, x\ x\ x))$

<u>גזירה I:</u>

$$(\lambda x.\, y)\ ((\lambda y.\, y\ y\ y)\ (\lambda x.\, x\ x\ x)) = y$$

<u>גזירה II:</u>

$$(\lambda x.\, y)\ ((\lambda y.\, y\ y\ y)\ (\lambda x.\, x\ x\ x))$$

$$(\lambda x.y)\ (\lambda y.\ (\lambda x.x\ x\ x)\ (\lambda x.\ x\ x\ x)\ \ (\lambda x.\ x\ x\ x))$$

$$(\lambda x.y)\Big[(\lambda x.\ x\ x\ x)\ (\lambda x.\ x\ x\ x)\Big]$$

$$(\lambda x.y)\ [\ \lambda x.((\lambda x.\ x\ x\ x)(\lambda x.\ x\ x\ x)\ (\lambda x.\ x\ x\ x))(\lambda x.\ x\ x\ x))$$

וכך הלאה ולכן לולאה אינסופית עבור הגזירה הזאת.

שאלה 2: תחשיב למדא לביטויים בוליאניים

נתונות ההגדרות הבאות (שחלקן ראינו בתרגול):

tru = $\lambda t.\lambda f.\ \ t$

fls = $\lambda t.\lambda f.\ \ f$

test = $\lambda l.\lambda m.\lambda n.\ \ l\ m\ n$

or = $\lambda b.\lambda c.\ \ b\ \overset{tru}{\cancel{True}}\ c$

א. כתבו חישוב (reduction) call-by-value semantics תחת לביטוי:

test (or tru fls) a b

כאשר a, b הם ערכים כלשהם.

test (or tru fls) a b

$(\lambda l.\lambda m.\lambda n\ \ l\ m\ n)((\lambda x.\lambda y.\ x\ tru\ y)\ tru\ fls)\ a\ b$

$(\lambda l.\lambda m.\lambda n\ \ l\ m\ n)(tru\ tru\ fls)\ a\ b$

$(\lambda l.\lambda m.\lambda n\ \ l\ m\ n)(tru)\ a\ b$

$tru\ a\ b \rightarrow \boxed{a}$

ב. כתבו ביטוי בתחשיב למדא nand.

nand $= \lambda x.\lambda y(and\ x\ y)\ fls\ tru$

ג. חשבו בעזרת הביטוי את (לא לדלג על שום שלב של רדוקציית הבטא):

nand tru fls $= (\lambda x.\ \lambda y\ (\text{and}\ x\ y)\ \text{fls}\ \text{tru})\ (\text{tru}\ \ \text{fls}) =$

$= (\lambda y\ (\text{and}\ \text{tru}\ y)\ \text{fls}\ \text{tru})\ \text{fls}$

$= (\text{and}\ \text{tru}\ \text{fls})\ \text{fls}\ \text{tru} \underset{\text{and}}{=}$ הגדרת

$((\lambda b.\ \lambda c\ b\ c\ \text{fls})\ \text{tru}\ \ \text{fls})\ \text{fls}\ \ \text{tru} =$

$(\text{tru}\ \text{fls}\ \text{fls})\ \text{fls}\ \text{tru}$

$\text{fls}\ \text{fls}\ \text{tru} = \boxed{\text{tru}}$

nand tru tru $= (\lambda x.\ \lambda y\ (\text{and}\ x\ y)\ \text{fls}\ \text{tru})\ (\text{tru}\ \ \text{tru}) =$

$= (\lambda y\ (\text{and}\ \text{tru}\ y)\ \text{fls}\ \text{tru})\ \text{tru} =$

$= (\text{and}\ \text{tru}\ \text{tru})\ \text{fls}\ \text{tru} =$

$= ((\lambda b.\ \lambda c\ b\ c\ \text{fls})\ \text{tru}\ \ \text{tru})\ \text{fls}\ \ \text{tru} =$

$((\lambda c.\ \text{tru}\ c\ \ \text{fls})\ \text{tru})\ \text{fls}\ \ \text{tru} =$

$= (\text{tru}\ \text{tru}\ \ \text{fls})\ \text{fls}\ \text{tru} =$

$= \text{tru}\ \text{fls}\ \text{tru} = \boxed{\text{fls}}$

<u>שאלה 3:</u> תחשיב למדא לביטויים אריתמטיים

בתרגול ראינו את ההגדרות הבאות למספרים טבעיים ופעולות אריתמטיות:

$c_0 = \lambda s. \lambda z.\ \ z$

$c_1 = \lambda s. \lambda z.\ \ s\ z$

$c_2 = \lambda s. \lambda z.\ \ s\ (s\ z)$

$c_3 = \lambda s. \lambda z.\ \ s\ (s\ (s\ z))$

…

$succ = \lambda n.\ \ \lambda s.\ \ \lambda z.\ \ s\ (n\ s\ z)$

$plus = \lambda m.\ \ \lambda n.\ \ \lambda s.\ \ \lambda z.\ \ m\ s\ (n\ s\ z)$

$times = \lambda m. \lambda n.\ \ m\ (plus\ n)\ c_0$

iszero = $\lambda m.\ \ m\ \ (\lambda x.\ \ False)\ True$

א. חשבו את $succ\ c_0$ בעזרת Call-By-Name, האם התוצאה היא c_1?
ב. חשבו את $succ\ c_0$ בעזרת Call-By-Value, האם התוצאה היא c_1?
ג. הגדירו פונקציית isodd, שתקבל מספר טבעי כפי שקודדנו בהגדרת השאלה ותחזיר tru אם המספר הוא אי-זוגי ו-fls אם המספר זוגי.
ד. חשבו את:

isodd 3

isodd 4

א.

$succ\ c_0 = (\lambda n. \lambda s.\ \lambda z.\ \ s(n\ s\ z))\ c_0 =$

$\lambda s.\ \lambda z.\ s(c_0\ s\ z)$

סימנו אסור
רדוקציות בתוך אבסטרקציות

קיבלנו שונה מ c_1

ב.

$succ\ c_0 = (\lambda n. \lambda s.\ \lambda z.\ \ s(n\ s\ z))\ c_0$

קיבלנו שונה מ c_1

סימנו, אסור רדוקציה בתוך אבסטרקציה
ומותר רדוקציה רק כשצד ימין של הרדקס הוא
אבסטרקציה

$\text{is odd} = \lambda x.\, x\,(\text{not})\,\text{fls}$ ג.

$\underline{\text{is odd } 3} = (\lambda x.\, x\,(\text{not})\,\text{fls})(\lambda s.\,\lambda z.\, s(s(s\,z))) =$ ד.

$(\lambda s.\lambda z.\, s(s(s\,z))\ \text{not})\ \text{fls} =$

$= (\lambda z.\ \text{not}(\text{not}(\text{not}\ z))\ \text{fls} =$

$= \text{not}(\text{not}(\text{not}\ \text{fls})) =$

not הגדרת

$= \text{not}(\text{not}(\lambda b.\, b\ \text{fls}\ \text{tru})\,\text{fls})) =$

$= \text{not}(\text{not}(\text{fls}\ \text{fls}\ \text{tru}) =$

fls מהגדרת

$= \text{not}(\text{not}(\lambda t.\,\lambda f.\, f)\,\text{fls}\ \text{tru}) =$

$= \text{not}(\text{not}(\lambda f.\, f\ \text{tru})) = \text{not}(\text{not}(\text{tru}))$

$= \text{not}(\lambda b.\, b\ \text{fls}\ \text{tru})\,\text{tru} =$

not הגדרת

$= \text{not}(\text{tru}\ \text{fls}\ \text{tru}) = \text{not}(\lambda t.\,\lambda f.\, t)\ \text{fls}\ \text{tru}$

tru הגדרת

$= \text{not}(\lambda f.\ \text{fls})\,\text{tru} = \text{not}(\text{fls}) =$

not הגדרת

$= (\lambda b.\, b\ \text{fls}\ \text{tru})\,\text{fls} = \text{fls}\ \text{fls}\ \text{tru} =$

fls הגדרת

$= (\lambda t.\,\lambda f.\, f)\ \text{fls}\ \text{tru} = (\lambda f.\, f)\,\text{tru} = \boxed{\text{tru}}$

* הפעם אני מדלגת על פיתוח מלא של tru ו fls

$$\text{isoddy} = (\lambda x.x \text{ not fls})(\lambda s.\lambda z.\, s(s(s(s\, z)))) =$$

$$(\lambda s.\lambda z.\, s(s(s(s\, z))))\text{ not fls} =$$

$$\lambda z.\, \text{not}(\text{not}(\text{not}(\text{not } z)))\text{ fls} =$$

$$\text{not}(\text{not}(\text{not}(\text{not fls}))) \underset{\text{not הגדרת}}{=}$$

$$= \text{not}(\text{not}(\text{not}((\lambda b.b \text{ fls tru})\text{ fls}))) =$$

$$\text{not}(\text{not}(\text{not}(\text{fls fls tru}))) \underset{\text{fls } N}{=}$$

$$\text{not}(\text{not}(\text{not}(\text{tru}))) \underset{\text{not הגדרת}}{=} \text{not}(\text{not}((\lambda b.b \text{ fls tru})\text{tru}))$$

$$= \text{not}(\text{not}(\text{tru fls tru})) \underset{\text{tru } N}{=} \text{not}(\text{not}(\text{fls}))$$

$$\underset{\text{not הגדרת}}{=} \text{not}((\lambda b.b \text{ fls tru})\text{fls}) = \text{not}(\text{fls fls tru})$$

$$\underset{\text{fls}N}{=} \text{not}(\text{tru}) \underset{\text{not } N}{=} (\lambda b.b \text{ fls tru})\text{tru} = \text{tru fls tru}$$

$$= \boxed{\text{fls}}$$

שאלה 4: Simply Typed Lambda Calculus

בכל אחת מהקביעות הבאות, קיבעו מהו הטיפוס של T כך שהקביעה מתקיימת. הוכיחו את קביעתכם תוך שימוש בכללי הגזירה:

א. $f:Bool \rightarrow Bool \vdash (f\ (\text{if true then false else true})):T$

ב. $f:Bool \rightarrow Bool \vdash (\lambda x{:}Bool.\ \ f\ (\text{if } x \text{ then false else true})):T$

ג. $\vdash (\lambda x{:}Bool.\ \ \lambda y{:}T.\ \ y\ x):Bool\rightarrow T \rightarrow Bool\rightarrow Bool$

א. נוכיח אמר הטיפוס של T הוא $Bool \Rightarrow Bool$ כלומר נוכיח ש-

$$f: Bool \Rightarrow Bool \vdash (f(\text{if true then false else true})): Bool \Rightarrow Bool$$

עץ הגזירה הוא:

$$\dfrac{\overset{\text{T-VAR}}{f: Bool \Rightarrow Bool \vdash Bool \Rightarrow Bool}, \quad \dfrac{\overset{\text{T-TRUE}}{f: Bool \Rightarrow Bool \vdash true: Bool}, \quad \overset{\text{T-FALSE}}{f: Bool \Rightarrow Bool \vdash false: Bool} \quad \overset{\text{T-TRUE}}{f: Bool \Rightarrow Bool \vdash true: Bool}}{f: Bool \Rightarrow Bool \vdash (f(\text{if true then false else true}))}\;\text{T-IF}}{f: Bool \Rightarrow Bool \vdash (f(\text{if true then false else true})): Bool \Rightarrow Bool}\;\text{T-APP}$$

ב. נוכיח אמר הטיפוס של T הוא $Bool \Rightarrow Bool \Rightarrow Bool$ כלומר נוכיח ש-

$$f: Bool \Rightarrow Bool \vdash (\lambda x: Bool.\ f(\text{if } x \text{ then false else true})): Bool \Rightarrow Bool \Rightarrow Bool$$

עץ הגזירה הוא:

$$\dfrac{\overset{\text{T-VAR}}{f: Bool \Rightarrow Bool}, \quad \dfrac{\overset{\text{T-VAR}}{x: Bool \vdash f: Bool \Rightarrow Bool}, \quad \dfrac{\overset{\text{T-VAR}}{x: Bool \vdash x: Bool}, \quad \overset{\text{T-FALSE}}{x: Bool \vdash false: Bool}, \quad \overset{\text{T-TRUE}}{x: Bool \vdash true: Bool}}{x: Bool \vdash \text{if } x \text{ then false else true}: Bool}\;\text{T-IF}}{x: Bool \vdash f(\text{if } x \text{ then false else true}: Bool \Rightarrow Bool}\;\text{T-APP}}{f: Bool \Rightarrow Bool \vdash (\lambda x: Bool.\ f(\text{if } x \text{ then false else true})): Bool \Rightarrow Bool \Rightarrow Bool}\;\text{T-ABS}$$

ש. נוכיח שאכן הטיפוס של T הוא $Bool \to Bool$ כאשר נוכיח ש-

$$\vdash (\lambda x : Bool.\ \lambda y : (Bool \to Bool).\ y\ x) : Bool \to Bool \to Bool \to Bool$$

ש הגזירה הוא:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{T-VAR}}{y : Bool \to Bool \vdash y\,x : Bool \to Bool} \quad , \quad \overset{\text{T-VAR}}{y : Bool \to Bool \vdash x : Bool}}{\overset{\text{T-VAR}}{} \ x : Bool,\ y : Bool \to Bool \vdash y\,x : Bool}\ \text{T-APP}}{x : Bool \vdash \lambda y : (Bool \to Bool).\ y\ x : Bool \to Bool \to Bool}\ \text{T-ABS}}{\vdash (\lambda x : Bool.\ \lambda y : (Bool \to Bool).\ y\ x) : Bool \to Bool \to Bool \to Bool}\ \text{T-ABS}$$