Le pendule double

Noam Aflalo - Emma Amblard - Adèle Bennet - Christelle Chappuy

19 avril 2018

Introduction

Ce projet a pour objectif de mettre en évidence la grande sensibilité aux conditions initiales d'un pendule double. Ce système physique simple illustre donc une théorie générale appelée théorie du chaos. Cette dernière correspond à l'étude de systèmes dynamiques sensibles aux conditions initiales. Découvert par Newton dans ses travaux concernant le problème à N corps, puis par Hadamard, c'est véritablement Edward Lorenz qui au XX$^{\text{e}}$ siècle mit en évidence toute la puissance de cette théorie. Lorenz postule que cette sensibilité explique pour un système chaotique, qu'une modification infime des conditions initiales peut entrainer des résultats imprévisibles sur le long terme.

Revenons-en au cas du pendule double. Afin d'étudier la sensibilité par rapport aux conditions initiales il est nécessaire de résoudre le système d'équation différentielle suivant :

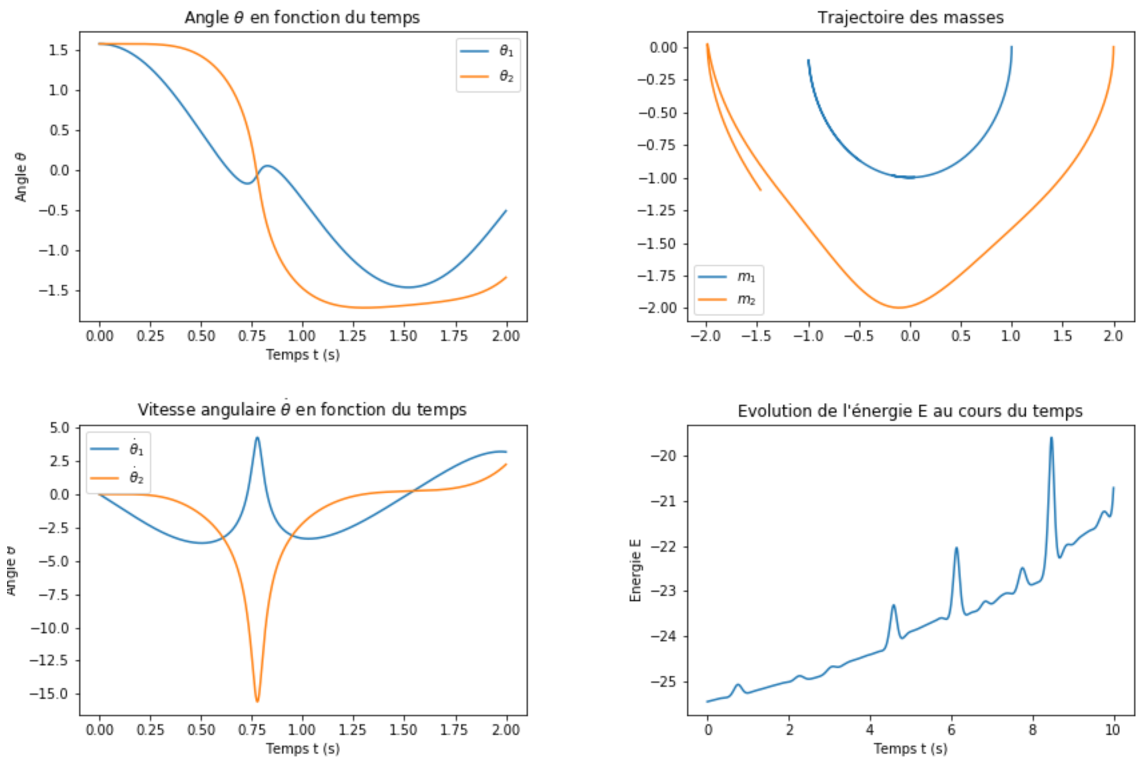
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & f(y(t)), \quad \forall t \in [0,T] \\ y(0) & = & y_0 \text{ donné} \end{array} \right.$$

Ce dernier donnant les équations du mouvement sur un intervalle $[0,T]$ d'un pendule double.

Ce projet est divisé en trois parties. D'abord, nous résoudrons de façon approximative ce système d'équation différentielle avec la méthode d'Euler explicite. Puis nous utiliserons une autre méthode de discrétion de la variable temps afin de résoudre le système : le schéma de Verlet. Enfin dans la dernière partie, nous étudierons le comportement du système face à différentes conditions initiales.

Partie 1 : Résolution de l'équation différentielle avec le schéma d'Euler explicite

Graphiques correspondant au schéma d'Euler



Question 6.c

On observe qu'il n'y a pas conservation de l'énergie au cours du temps. Ainsi, le comportement à long terme est mal décrit.

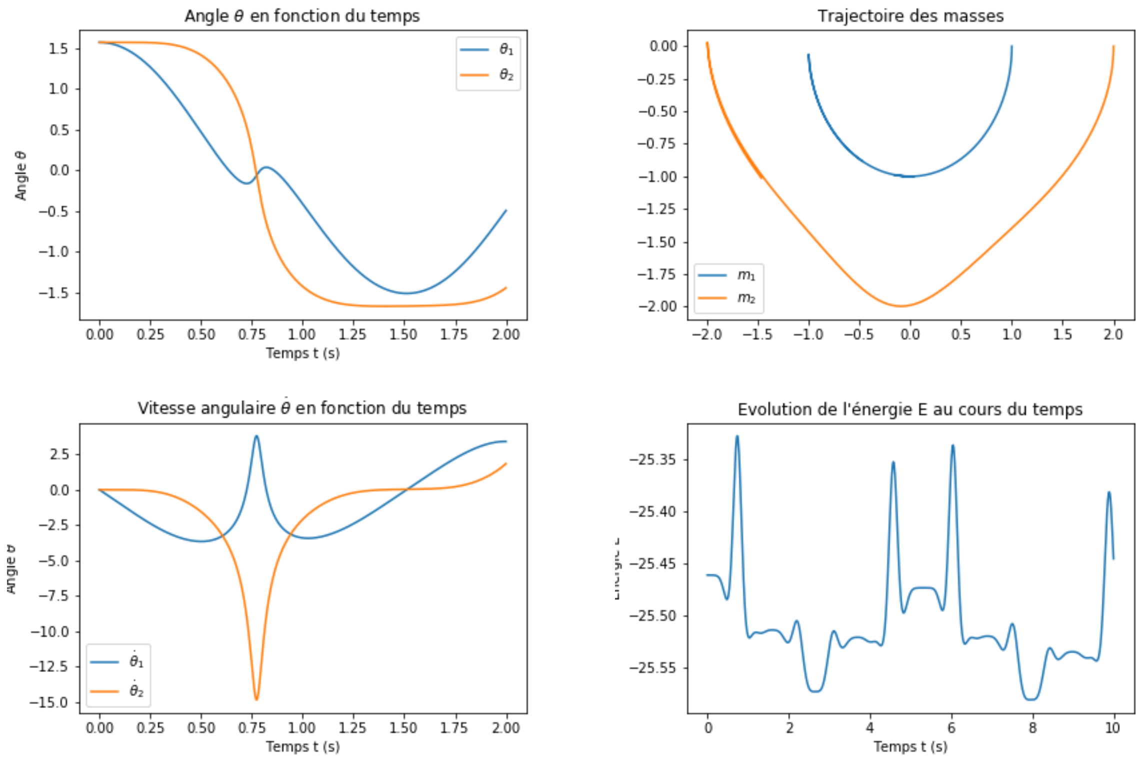
Remarque : Le schéma d'Euler présente un second défaut : lorsque le pas h est mal choisi, la méthode d'Euler n'est pas stable. C'est ce que l'on appelle le phénomène d'instabilité de la méthode d'Euler.

Conclusion

On peut donc conclure que la méthode d'Euler présente l'inconvénient de propager facilement les erreurs. Cependant, elle reste intéressante en raison de sa simplicité d'implémentation.

Partie 2 : Résolution de l'équation différentielle avec le schéma de Verlet

Graphiques correspondant au schéma de Verlet



Question 3

La représentation graphique de l'énergie au cours du temps dans le cas du schéma de Verlet pour les mêmes conditions initiales qu'à la question 6.c (schéma d'Euler explicite) nous conduit à la conclusion suivante : *le schéma de Verlet conduit à une bien meilleure conservation de l'énergie que le schéma d'Euler explicite.*

Conclusion

Contrairement à ce que l'on a vu précédemment avec le schéma d'Euler, la méthode de Verlet possède de bonnes propriétés de stabilité puisqu'elle ne conduit pas à une dérive de l'énergie au cours du temps.

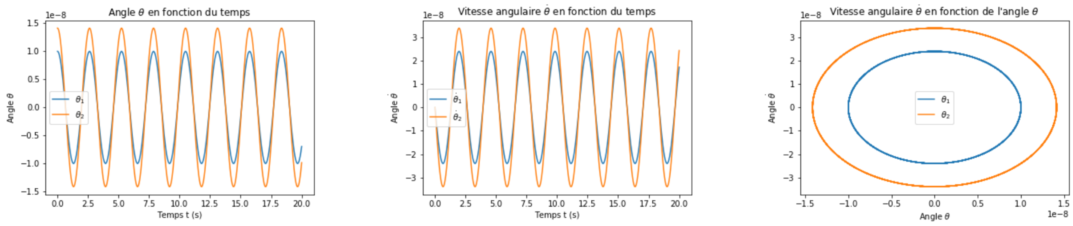
Donc il est préférable d'utiliser le schéma de Verlet pour la résolution de l'équation différentielle.

Partie 3 : Mouvement chaotique et sensibilité par rapport aux conditions initiales

On a montré à la partie 2 que le schéma d'Euler était moins « pertinant » que celui de Verlet par le fait que ce dernier permet la conservation de l'énergie au cours du temps. Ainsi nous traiterons la partie 3 en utilisant le schéma de Verlet.

Régime de petites oscillations

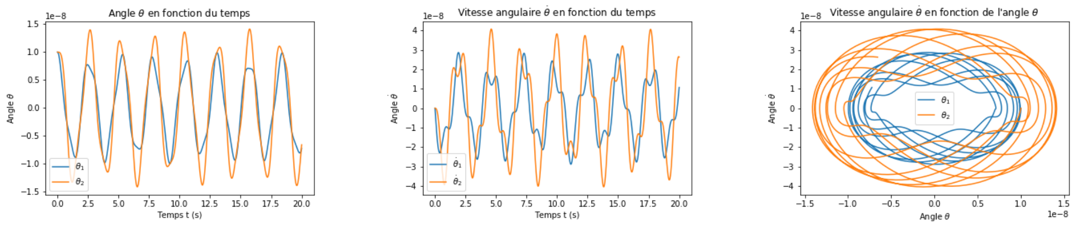
On étudie ici le comportement du système dans le cas où le pendule est mis très proche de l'équilibre.



On observe que les courbes $C_i = (\theta_i(t), \dot{\theta}_i(t)) : t \in [0, T]$ sont fermées ce qui témoigne du fait que le système oscille indéfiniment, toujours selon la même trajectoire, que l'on appelle cycle. Le système est périodique, car il repasse toujours par les mêmes points. En effet, les courbes $C_i = (\theta_i(t), \dot{\theta}_i(t)) : t \in [0, T]$ forment un ensemble d'ellipses concentriques, chacune centrée sur l'origine. L'ellipse interne a plus une forme circulaire que l'ellipse externe. Elle correspond à une petite valeur de l'angle initial. Puis l'ellipse externe se déforme à mesure que l'angle initial grandit et que la non-linéarité se fait sentir. Les ellipses restent fermées et donc le système reste périodique, non dissipatif[1]. En résumé, on sait à présent que :

— Le système est périodique
— Le système est conservatif

En changeant très légèrement les conditions initiales avec désormais $y_0 = (10^{-8}, 10^{-8}, 0, 0)^T$:

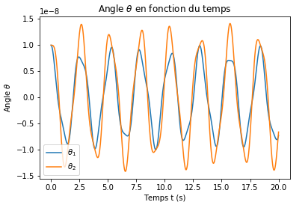
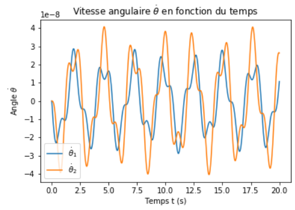
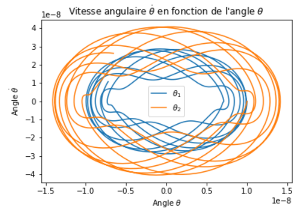
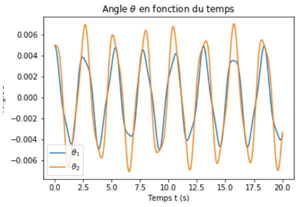
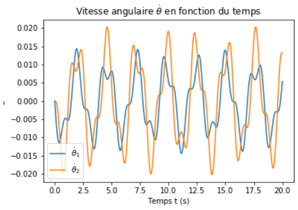
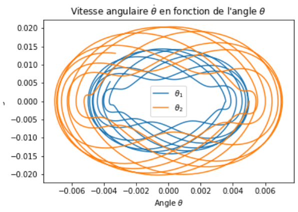
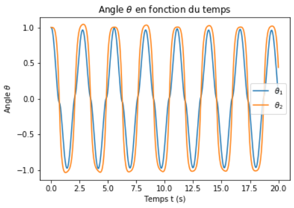
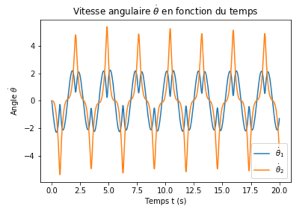
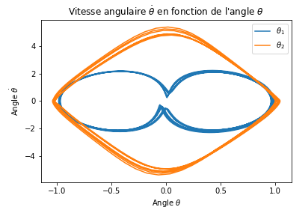
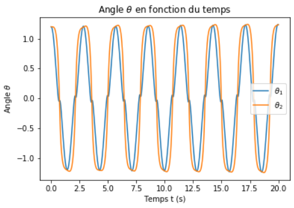
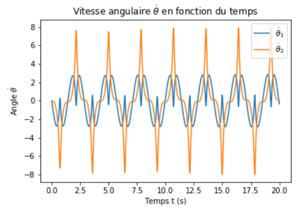
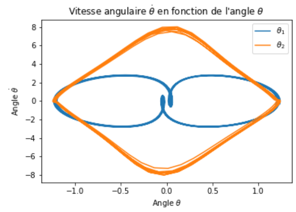
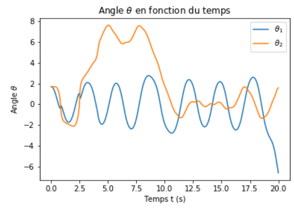
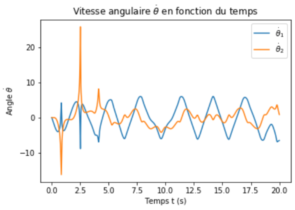
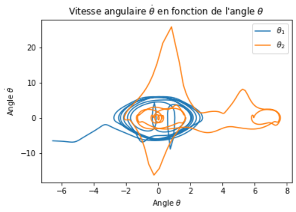
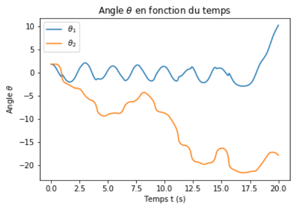
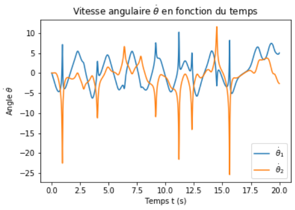
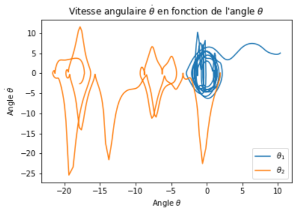


Les courbes représentant θ_i et la vitesse angulaire au cours du temps ne sont plus périodiques. D'autre part, les courbes C_i sont, elles aussi, changées. Ces courbes ne sont plus elliptiques. En particulier, cela signifie que le système ne repasse pas toujours par les mêmes points, le système n'est plus périodique.

Ces observations nous amènent à la conclusion suivante : le système du pendule double est très sensible aux conditions initiales. En effet, en ne modifiant que très légèrement la position du pendule au départ, il y a une différence notable sur les graphes. Ainsi de faibles variations dans les conditions initiales rendent le mouvement du pendule imprévisible à long terme.

1. Un système *dissipatif* est un système qui évolue dans un environnement avec lequel il échange de l'énergie. Son contraire est un système *conservatif*.

Transition vers un mouvement chaotique

<table>
<tr><th>Valeur de α</th><th>Évolution de θ_i</th><th>Évolution de $\dot{\theta}_i$</th><th>Courbes C_i</th></tr>
<tr><td>$\alpha = 10^{-8}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\alpha = 5.10^{-3}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\alpha = 1$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\alpha = 1.2$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\alpha = 1.7$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\alpha = 1.9$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Description et interprétation des résultats :

— Pour α proche de 0 ($\alpha = 10^{-8}$ ou $\alpha = 5.10^{-3}$) la représentation graphique des valeurs de θ_1 et θ_2 en fonction du temps montre des courbes ne présentant pas de période. Ceci conduisant à des valeurs de vitesses angulaires $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ en fonction du temps qui, de même, ne sont pas représentées par des courbes périodiques. Finalement, le tracé représentant la vitesse angulaire $\dot{\theta}_i$ en fonction de l'angle θ_i ne sont pas des courbes elliptiques : le système n'est donc pas périodique, car il n'oscille pas indéfiniment selon la même trajectoire.

— Pour α proche de 1 ($\alpha = 1$ ou $\alpha = 1.2$) les valeurs de θ_1 et θ_2 au cours du temps sont sensiblement les mêmes. Ces représentations graphiques (ainsi que celles illustrant les vitesses angulaires au cours du temps) sont périodiques. Enfin pour des valeurs de α proche de 1, les courbes C_i sont fermées ce qui traduit bien le fait que le système est périodique.

— Enfin pour des valeurs de α supérieurs à 1 ($\alpha = 1.7$ ou $\alpha = 1.9$) les courbes représentants les valeurs des angles θ_i et les vitesses angulaires $\dot{\theta}_i$ en fonctions du temps ne présente aucune période.

Tout ceci nous permet d'affirmer que lorsque α augmente le mouvement du pendule devient imprévisible.

En effet, nous avons observé un comportement chaotique de la part du pendule double, puisque, malgré des conditions initiales les plus identiques possible, ce dernier diverge très rapidement dans le temps.

Conclusion

Pour conclure quant à ce que nous pouvons retenir de cette dernière partie, il convient d'abord de donner une définition, celle de la notion de chaos *déterministe*.

Un système dynamique déterministe est un système évoluant avec le temps en suivant une loi préétablie. En général, la loi d'évolution est locale : à chaque instant, elle ne donne l'évolution du système que sur un temps très court. On cherche à connaître l'évolution globale du système, en particulier son comportement quand le temps tend vers l'infini.

Chaque condition initiale détermine entièrement l'évolution future, car il n'y a pas de hasard : le système est déterministe. Cependant, deux conditions initiales très proches peuvent avoir des évolutions complètement différentes. L'évolution du système devient alors imprévisible, car une petite erreur de mesure conduit par exemple à des résultats complètement faux au bout d'un certain temps. C'est le chaos déterministe.

Justement, la dernière partie de ce projet, à travers l'étude d'un portait de phase [2], nous a fait prendre conscience de trois phénomènes étant mis en jeu dans le cadre du pendule double :

— La quasi-périodicité du système.

— Le comportement chaotique du pendule double suggéré par le fait que de faibles variations de conditions initiales rendent l'évolution du système totalement imprévisible dans le futur.

— Le caractère déterministe du chaos suggéré par le fait que les conditions initiales déterminent entièrement l'évolution future du système.

2. Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique dans l'espace des phases : à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point.

Conclusion et bibliographie

Conclusion

L'étude d'un système de pendule double permet de mettre en lumière des phénomènes que l'on retrouve dans de nombreux domaines de la vie quotidienne tels que la physique, l'économie, la finance... En particulier, la théorie du chaos que nous avons observé dans la partie 3 est caractéristique de l'évolution des conditions météorologiques, du climat ou du cours de la bourse... En effet, il est très difficile de prédire des résultats à long terme dans ces domaines puisqu'une différence infime dans les conditions initiales conduit à des résultats totalement différents dans le futur. Ce phénomène, appelé « effet papillon » rend impossible certaines prévisions de la vie courante. C'est d'ailleurs surement à ce titre que le chaos est aujourd'hui devenu un domaine à part entière dans la physique des systèmes non linéaires.

Bibliographie

— `https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_du_chaos`
— `http://experiences.math.cnrs.fr/Pendule-double.html`
— `https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_double`
— `http://toutsurlescours.free.fr/ate/ATE(1).pdf`
— `https://www.youtube.com/watch?v=m923FsfhNYE`