

---

# Projet : Le pendule double

---

## 1 Contexte et motivations

De nombreux systèmes physiques, économiques ou financiers peuvent se modéliser par des équations d'évolution qui sont extrêmement sensibles aux conditions initiales. La théorie du chaos est la branche des mathématiques qui étudie leur comportement. Des exemples de tel systèmes sont l'évolution des conditions météorologiques, du climat, l'évolution de l'univers, l'évolution de la bourse, du prix de l'or, de l'énergie ou l'évolution d'une population. La sensibilité par rapport aux conditions initiales se traduit par le fait que des différences infimes dans l'état de départ entraînent des résultats totalement différents dans les prédictions à des temps ultérieurs. Ceci rend toute prédiction à long terme très difficile, voire impossible et explique un certain nombre d'observations de la vie courante, comme par exemple le fait que les prédictions météorologiques ne soient fiables qu'à l'horizon de quelques jours. Ce phénomène est résumé par l'expression métaphorique "d'effet papillon" qui est passé dans le langage quotidien.

Dans ce projet, nous proposons d'illustrer ce phénomène à travers l'exemple simple du pendule double. Son mouvement se modélise par des équations newtoniennes dans lesquelles de légers changements dans l'état de départ entraînent des évolutions totalement différentes.

## 2 Description du problème

Le pendule double est un système défini dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Il est composé d'un pendule rigide de longueur  $l_1$  et masse  $m_1$  auquel est fixé un second pendule rigide de longueur  $l_2$  et masse  $l_2$ . La position des masses  $m_1$  et  $m_2$  peut se décrire par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , qui donnent les coordonnées  $r_1 = (x_1, y_1)$  et  $r_2 = (x_2, y_2)$  de  $m_1$  et  $m_2$  via les relations

$$\begin{cases} x_1 &= l_1 \sin(\theta_1) \\ y_1 &= -l_1 \cos(\theta_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \\ y_2 &= -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) \end{cases}$$

La figure 1 donne un schéma du système. La présence d'un champ gravitationnel de valeur  $g$  entraîne un mouvement du pendule qui dépend fortement de sa position initiale. Donc  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (et les coordonnées  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ ) dépendent de  $t$ . Dans la suite, les dérivées en temps seront notées avec un point au dessus de la fonction. Par exemple,  $\dot{\theta}_i = d\theta_i/dt$ . En posant

$$y(t) = \left( \theta_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t) \right)^T, \quad (2.1)$$

et sa dérivée à l'instant  $t$ ,

$$\dot{y}(t) = (\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dot{y}_3(t), \dot{y}_4(t))^T = \left( \dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t), \ddot{\theta}_1(t), \ddot{\theta}_2(t) \right)^T,$$

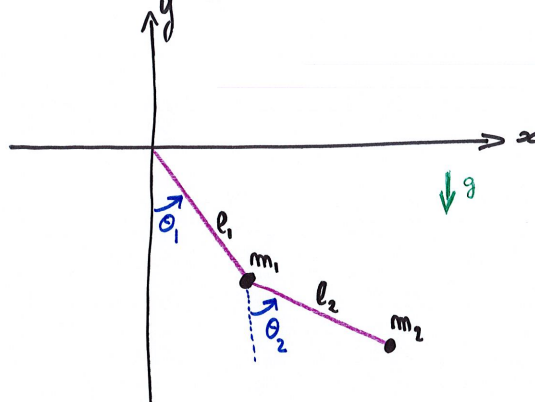


FIGURE 1 – Pendule double.

les équations du mouvement sur un intervalle  $[0, T]$  sont données par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(y(t)), \quad \forall t \in [0, T] \\ y(0) &= y_0 \text{ donné,} \end{cases} \quad (2.2)$$

La fonction  $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$  est définie pour tout  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in \mathbb{R}^4$  comme

$$f(y) := \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ s_1(y) \\ s_2(y) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} s_1(y) &:= \frac{-m_2 l_1 y_4^2 \sin(y_1 - y_2) \cos(y_1 - y_2) + g m_2 \sin(y_2) \cos(y_1 - y_2)}{l_1(m_1 + m_2) - m_2 l_1 \cos^2(y_1 - y_2)} \\ &\quad + \frac{-m_2 l_2 y_4^2 \sin(y_1 - y_2) - (m_1 + m_2) g \sin(y_1)}{l_1(m_1 + m_2) - m_2 l_1 \cos^2(y_1 - y_2)} \\ s_2(y) &:= \frac{m_2 l_2 y_4^2 \sin(y_1 - y_2) \cos(y_1 - y_2) + g(m_1 + m_2) \sin(y_1) \cos(y_1 - y_2)}{l_2(m_1 + m_2) - m_2 l_2 \cos^2(y_1 - y_2)} \\ &\quad + \frac{(m_1 + m_2) l_1 y_4^2 \sin(y_1 - y_2) - g(m_1 + m_2) \sin(y_2)}{l_2(m_1 + m_2) - m_2 l_2 \cos^2(y_1 - y_2)} \end{aligned}$$

Pour se faire une idée du mouvement dans un cas concret, la vidéo sur le lien

<https://www.youtube.com/watch?v=pEjZd-AvPco>

montre le mouvement du double pendule pour les données de masses, longueur et conditions initiales

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = 1 \text{ kg}, \quad l_1 = l_2 = 1 \text{ m} \\ y_0 &= (\pi/2, \pi/2, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Dans ce cas, le pendule est lâché sans vitesse initiale lorsque les deux masses sont alignées le long de l'axe horizontal.

Afin d'étudier la sensibilité du mouvement par rapport aux conditions initiales  $y_0$ , il est nécessaire résoudre l'équation (2.2) pour connaître  $y(t)$ . Cependant, cette équation n'admet pas de solution explicite et il est nécessaire de trouver des approximations numériques. Dans les sections 3 et 4, nous étudierons deux schémas de discrétisation et dans la section 5 nous étudierons le comportement du système face à différentes conditions initiales.

### 3 Résolution de l'équation différentielle avec le schéma Euler explicite

Pour  $T > 0$  donné, nous cherchons une approximation numérique de  $y(t)$  solution de (2.2) pour  $t \in [0, T]$ . Notons  $\tilde{y}(t)$  une fonction qui approche  $y(t)$  "au mieux possible" en  $P + 1$  instants de temps  $t_p \in [0, T]$ . On considère le cas où les instants sont uniformément répartis sur  $[0, T]$  de sorte que, en posant

$$h := T/P,$$

on a

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_{p+1} &= t_p + h, \quad 0 \leq p \leq P-1, \\ t_P &= T. \end{aligned}$$

Le point de départ pour approcher  $y(t_p)$  pour  $p = 0, \dots, P$  part du développement de Taylor de  $y(t_{p+1})$  autour de  $t_p$  qui est

$$y(t_{p+1}) = y(t_p + h) = y(t_p) + h \dot{y}(t_p) + \mathcal{O}(h^2) = y(t_p) + h f(y(t_p)) + \mathcal{O}(h^2), \quad 0 \leq p \leq P-1,$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à  $h$ , la fonction

$$\tilde{y}(t_{p+1}) := \tilde{y}(t_p) + h f(\tilde{y}(t_p)), \quad 0 \leq p \leq P-1.$$

est une approximation de  $y(t_{p+1})$  à l'ordre  $h$  près. L'algorithme d'Euler explicite consiste à calculer ces approximations  $\tilde{y}(t_{p+1})$  en partant de l'état initial  $\tilde{y}(0) = y(0)$ .

**Questions :** Appliquer la méthode d'Euler explicite pour donner une solution approchée de  $y(t)$  dans le cas du pendule double. Pour cela, on pourra :

1. Implémenter une fonction `f(y, l1, l2, m1, m2)` qui, étant donné le vecteur  $y$ , retourne le vecteur  $f(y)$  pour des masses  $m_1, m_2$  et des longueurs de tige  $l_1, l_2$  données. Nous conseillons vivement d'exprimer les vecteurs sous la forme `array` de la librairie `numpy` et pas sous forme de listes.
2. Implémenter une méthode `stepEuler(yt, h, l1, l2, m1, m2)` qui, partant de l'approximation `yt` à un certain instant  $t$ , renvoie l'approximation `yt+h*f(yt)` à l'instant  $t+h$  suivant. Nous recommandons ici aussi d'exprimer les vecteurs `yt` sous la forme `array` de la librairie `numpy` et pas avec des listes.

3. En partant de  $y_0$  comme condition initiale, faire une boucle sur tous les temps qui permet d'obtenir l'approximation  $\tilde{y}(t_p)$  à tous les instants  $p = 0, \dots, P$ . Stocker la trajectoire (i.e. l'ensemble des approximations  $y_t$  pour tous les instants  $t_p$ ) dans une liste.
4. Utiliser le code pour obtenir la trajectoire de 0 à  $T = 2$  s pour

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = 1 \text{ kg}, & l_1 &= l_2 = 1 \text{ m} \\ y_0 &= (\pi/2, \pi/2, 0, 0)^T \\ P &= 1000. \end{aligned}$$

5. Visualisation des résultats :

- (a) Construire une fonction **plot-angles** qui représente graphiquement les valeurs de  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$  en fonction du temps pour  $t = t_p$ ,  $p = 0, \dots, P$ . On pourra sauver le graphique avec la commande `plt.savefig('evol-angle.pdf')`. De façon similaire, construire une fonction **evol-vitesses-angulaires** pour  $\dot{\theta}_1(t)$  et  $\dot{\theta}_2(t)$ . Sauver la figure avec le nom `'evol-vitesse-angulaire.pdf'`.
- (b) Construire une fonction **plot-trajectoire** qui représente graphiquement la trajectoires  $(x_i, y_i)(t)$  des masses  $m_i$  pour tout  $t = t_p$ ,  $p = 0, \dots, P$ . Sauver la figure avec le nom `'trajectoire.pdf'`. On pourra s'assurer que le code est correct en vérifiant que l'on obtient bien la même trajectoire que celle montrée dans la vidéo citée ci-dessus.
6. Il est possible de prouver que l'énergie totale du pendule est conservée au cours du mouvement. La quantité

$$E(t) = E_c(t) + E_p(t)$$

avec

$$\begin{cases} E_c(t) &:= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\theta}_1^2(t)l_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_2^2(t)l_2 + m_2\dot{\theta}_1(t)\dot{\theta}_2(t)l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ E_p(t) &:= -(m_1 + m_2)gl_1\cos(\theta_1) - m_2l_2g\cos(\theta_2) \end{cases}$$

est donc constante au cours du temps.

- (a) Construire une fonction **energie(y)** qui calcule l'énergie  $E$  étant donné un vecteur  $y$  de la forme (2.1).
- (b) Construire une fonction **evol-energy** qui représente  $E(t)$  au cours du temps.
- (c) Représenter graphiquement l'évolution de  $E$  sur l'intervalle  $[0, T = 10 \text{ s.}]$  pour le cas

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = 1 \text{ kg}, & l_1 &= l_2 = 1 \text{ m} \\ y_0 &= (\pi/6, \pi/6, 0, 0)^T \\ P &= 1000. \end{aligned}$$

L'énergie est-elle conservée ? Que peut-on en conclure par rapport au schéma d'Euler explicite ?

## 4 Résolution de l'équation différentielle avec le schéma de Verlet

Une méthode permettant de mieux conserver l'énergie totale est le schéma de Verlet. En partant d'une approximation  $\tilde{y}(t_p)$  au temps  $t_p$ , nous construisons  $\tilde{y}(t_{p+1})$  de la façon suivante. Nous construisons tout d'abord

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1(t_{p+1}) \\ \tilde{y}_2(t_{p+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(t_p) \\ \tilde{y}_2(t_p) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \tilde{y}_3(t_p) \\ \tilde{y}_4(t_p) \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} s_1(\tilde{y}(t_p)) \\ s_2(\tilde{y}(t_p)) \end{pmatrix}$$

et introduisons l'état intermédiaire  $w(t_p) = (\tilde{y}_1(t_{p+1}), \tilde{y}_2(t_{p+1}), \tilde{y}_3(t_p), \tilde{y}_4(t_p))^T$ . Ensuite, nous calculons

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_3(t_{p+1}) \\ \tilde{y}_4(t_{p+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_3(t_p) \\ \tilde{y}_4(t_p) \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[ \begin{pmatrix} s_1(w(t_p)) \\ s_2(w(t_p)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(\tilde{y}(t_p)) \\ s_2(\tilde{y}(t_p)) \end{pmatrix} \right]$$

**Questions :**

1. De façon similaire au schéma d'Euler, implémenter `stepVerlet(yt, h, l1, l2, m1, m2)`.
2. Vérifier que l'implémentation est correcte en calculant la trajectoire avec les conditions initiales de la question 4 de la section 3. S'assurer que toutes les méthodes de visualisation implémentées précédemment marchent aussi pour le schéma de Verlet. Si cela n'est pas le cas, uniformiser le code pour qu'elles soient suffisamment génériques.
3. Représenter graphiquement l'énergie au cours du temps pour les conditions initiales de la question (6c) de la section 3. L'énergie est-elle mieux conservée que pour le schéma d'Euler explicite ?

## 5 Mouvement chaotique et sensibilité par rapport aux conditions initiales

Nous étudions à présent la sensibilité de la trajectoire par rapport à de petits changements de la condition initiale. Il sera utile d'observer le comportement des solutions dans l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$ .

1. Construire une fonction `plot-espace-phases` qui représente la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_i$  en fonction de l'angle  $\theta_i$  pour  $i = 1, 2$ . En d'autres mots, construire les courbes  $\mathcal{C}_i$  du plan  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$\mathcal{C}_i = \{(\theta_i(t), \dot{\theta}_i(t)) : t \in [0, T]\}, \quad i = 1, 2. \quad (5.1)$$

2. **Régime de petites oscillations :** Lorsque les conditions initiales sont

$$y_0 = (0, 0, 0, 0)^T,$$

le pendule ne bouge pas. Il s'agit d'une position d'équilibre stable. Étudions le comportement dans le cas où le pendule est mis dans une position très proche de l'équilibre.

- (a) Calculer la trajectoire de 0 à  $T = 20$  s. pour

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = 1 \text{ kg}, \quad l_1 = l_2 = 1 \text{ m} \\ y_0 &= (10^{-8}, \sqrt{2} \cdot 10^{-8}, 0, 0)^T \\ P &= 1000. \end{aligned}$$

À partir des graphiques  $t : [0, T] \mapsto (t, \theta_i(t))$ , commenter l'évolution de  $\theta_i$  et  $\dot{\theta}_i$  en fonction du temps. Quelle est la forme des courbes  $\mathcal{C}_i$  ?

(b) Changeons très légèrement les conditions initiales et considérons

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 &= 1 \text{ kg}, \quad l_1 = l_2 = 1 \text{ m} \\ y_0 &= (10^{-8}, 10^{-8}, 0, 0)^T \\ P &= 1000. \end{aligned}$$

Comment se comportent les solutions dans ce cas ? Quelles sont les différences par rapport au cas précédent ? Que peut-on en déduire quant à la sensibilité du système par rapport aux conditions initiales ?

### 3. Transition vers un mouvement chaotique :

(a) Considérer

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 &= 1 \text{ kg}, \quad l_1 = l_2 = 1 \text{ m} \\ y_0 &= (\alpha, \alpha, 0, 0)^T \\ P &= 1000. \end{aligned}$$

et calculer les trajectoires pour  $\alpha \in \{10^{-8}, 5 \cdot 10^{-3}, 1, 1.2, 1.7, 1.9\}$ . Qu'observe-t-on dans les évolutions de  $\theta_i$  et  $\dot{\theta}_i$  et dans les courbes  $\mathcal{C}_i$  ? En vue des structures des courbes  $\mathcal{C}_i$ , pourquoi peut-on dire qu'il y a une transition vers un mouvement chaotique lorsque  $\alpha$  augmente ?