הולכת חום במוט מתכת

פרויקט גמר בפיזיקה מחקרית

מגישים: נועם כהן ומקסים קסיאננקו

כיתה אזורית: מכון דוידסון

בית ספר: חשמונאים בת-ים

מנחה: אריאל אברשקין

תוכן עניינים

מבוא

תרמודינמיקה הוא תחום חשוב בפיזיקה ובמדע, הוא מסביר תופעות רבות; מהתקררות של כוס מים חמים וחימום של מכונות תעשייתיות ועד תחזיות מזג אוויר והתחממות כדור הארץ. חוקי התרמודינמיקה חשובים גם בתחומים שונים למשל מערכות ביולוגיות, התפתחות של כוכבים ועוד רבים. בגלל חשיבותו בתחומים רבים בחלטנו לעסוק בו.

בניסוי שלנו חיממנו מוט מתכת בקצהו האחד על ידי תנור כאשר הקצה השני חשוף באוויר, מה שגורם לשינוי הטמפרטורה בזמן ובמקום לאורך המוט כך שנוצרת בו התפלגות טמפרטורות. התופעה מתרחשת בעקבות מעבר חום לאורך המוט. ניסוי זה הוא המבוא שלנו אל עולם התרמודינמיקה העצום, ממנו אנחנו לומדים את הבסיס ואף חומר מתקדם במעט.

בעבודה זו נציג את תוצאות הניסוי שערכנו, נדון בחוקים הפיזיקליים המתארים את תופעת הולכת החום, נפתח מודל חישובי לתופעה ומודל אנליטי שיאפשר חישוב של התפלגות הטמפרטורה במוט במצב שיווי משקל, ולבסוף נשווה את תוצאות המודלים לתוצאות הניסיוניות.

שאלות החקר

1. אפיון של התפלגות הטמפרטורה לאורכו של כל מוט כפונקציה של הזמן והמקום.

2. אפיון של התפלגות של הטמפרטורה במוט במצב שיווי המשקל.

3. האם ניתן לאפיין גדלים פיזיקליים אופייניים למוט מתוך התפלגות של הטמפרטורה.

רקע תאורטי

תופעת מעבר החום

תופעת מעבר החום שהוא מעבר של אנרגיה במרחב יכול להתרחש ב-3 דרכים עיקריות.

קרינה (Radiation) – מעבר חום שמתרחש בעקבות קרינה אלקטרומגנטית.

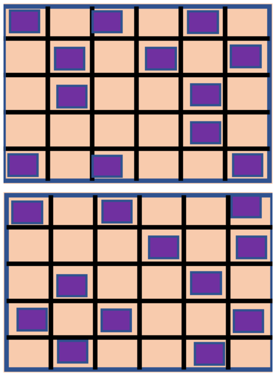
אדווקציה (Advection) - מעבר אנרגיה בין שני אזורים בעלי טמפרטורה שונה על ידי תנועת אטומים או מולקולות בתוך נוזל וגזים.

הולכה (Conduction) – מעבר אנרגיה באינטראקציה קצרת טווח (התנגשויות) בין אטומים או מולקולות, שבהם עוברת אנרגיה מגוף בעל טמפרטורה גבוהה לגוף בעל טמפרטורה נמוכה יותר.

בניסוי שלנו אנחנו נתמקד בהולכה אשר מתרחשת בתוך המוט.

הבסיס התאורטי להבנת תופעת מעבר החום הוא חוקי התרמודינמיקה. להלן נתאר בקצרה מסגרת תאורטית זו.

<u>אנטרופיה</u>



מושג בסיסי בתיאור תרמודינמי של מערכת הוא מושג האנטרופיה.

האנטרופיה של מערכת קשורה למספר מצבי המיקרו שיש לה, מצב נתון של מיקומי ומהירויות כל החלקיקים, והיא נקראת גם מידת אי הוודאות של המערכת. בתמונה שבצד שמאל ניתן לראות דוגמא לשני מצבי מיקרו שיש למערכת של מולקולות שמסודרות בסריג.

האנטרופיה מוגדרת כמכפלה של קבוע בולצמן והלוגריתם הטבעי של מספר המצבים המיקרוסקופיים Ω.

$$S = K_B * \ln(\Omega)$$

בדוגמא הפשוטה של מערכת של מולקולות שמסודרות בסריג, כבתמונה, ניתן לחשב את מספר מצבי המיקרו של המערכת בעזרת נוסחת ברנולי.

$$\Omega = \frac{M!}{N!\,(M-N)!}$$

כאשר N זהו מספר החלקיקים, ו-M זהו מספר התאים.

בתחום התרמודינמיקה אנו עוסקים באנטרופיה של מנות אנרגיה. באופן דומה ניתן לחלק E מנות אנרגיה בין N חלקיקים. הנוסחה המתארת את מספר המצבים במקרה זה, שמטה, דומה לנוסחת ברנולי בשינויים קלים, מאחר ואין הגבלה של אכלוס חלקיק במנות אנרגיה, בניגוד לתא בשריג שיכול להיות מאוכלס בחלקיק אחד לכל היותר.

$$\Omega = \frac{(E + N - 1)!}{E!\,(N-1)!}$$

חוקי התרמודינמיקה

חוקי הטבע בבסיס התופעה הם חוקי התרמודינמיקה, ויחד עם מודל לאינטראקציות בין חלקיקי החומר הם מובילים לחוקים פיזיקליים שנסביר בהמשך. ישנם 3 חוקי תרמודינמיקה.

החוק הראשון

החוק הראשון הוא אדפטציה של חוק שימור האנרגיה לעולם התרמודינמיקה. חוק שימור האנרגיה קובע כי האנרגיה הכוללת של מערכת סגורה היא קבועה, אנרגיה לא יכולה להיווצר או להיהרס.

החוק הראשון של התרמודינמיקה קובע כי השינוי באנרגיה הפנימית של המערכת שווה לעבודה שנעשתה על המערכת והחום שמוזרם אליה.

החוק השני

החוק השני קובע כי האנטרופיה, מידת אי הוודאות של מערכת סגורה לא יכולה לרדת, אלה האנטרופיה תגדל עד אשר המערכת תגיע למצב שיווי משקל שבו האנטרופיה הוא מקסימלית ובמצב זה תישאר קבועה.

החוק השלישי

החוק השלישי קובע כי ככל שהמערכת שואפת לטמפרטורה של האפס המוחלט האנטרופיה של המערכת שואפת לערך קבוע.

חוק זה אינו מופיע בתופעה שאותה אנחנו חוקרים.

בתופעת הולכת החום עוסקים בפיזור אנרגיה בגוף. פיזור זה נקבע על פי החוק הראשון והשני של התרמודינמיקה, עבור אנטרופיה של מצבי אנרגיה שונים.

מבחינת הגדלים הנמדדים בניסוי מדובר בהתפלגות הטמפרטורה ובשינוי שלה בזמן כתוצאה ממעבר חום, להלן נגדיר מושגים אלה.

אנרגיה תרמית, חום וטמפרטורה

חוקי התרמודינמיקה עוסקים באנטרופיה שלא ניתן למדודה, אך האנטרופיה של מערכת קשורה באופן ישיר לאנרגיה הפנימית ולטמפרטורה, נסביר כעת את שניהם.

אנרגיה תרמית – סכום האנרגיה הקינטית של מולקולות הגוף הקשורה לתנועה האקראית שלהן.

אנרגיה פנימית – סכום האנרגיות האגורות בגוף אך ללא האנרגיה של הגוף הכולל הנובעת מאינטרקציה שלו עם הסביבה (למשל אנרגית כובד). זהו סכום האנרגיה התרמית של מולקולות הגוף, האנרגיה הפוטנציאלית של האינטראקציות בין המולקולות, לדוגמא אנרגיה בקשרים כימיים ועוד.

חום – תהליך שבו אנרגיה עוברת בצורה אקראית מגוף אחד לגוף אחר, שאינו משפיע על גדלים ומאפיינים אחרים, למשל נפח וצורה. גם האנרגיה העוברת בתהליך זה מכונה חום.

יחידות מידה לאנרגיה במערכת היחידות הסטנדרטית (קילוגרם – מטר - שנייה) הן בג׳ול J, או אחת מן האפשרויות הבאות:

$$J = \frac{Kg * m^2}{s^2} = N * m = W * s$$

טמפרטורה – ממוצע האנרגיה הקינטית לחלקיק בגוף. נמדד במעלות קלווין K וצלזיוס C.

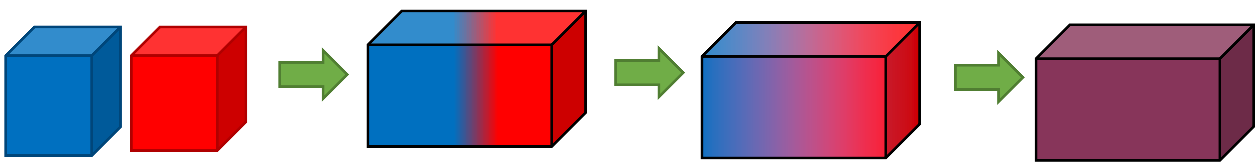
$$\text{כאשר } C = K - 273.15$$

על מנת להראות את ההבדל בין אנרגיה לטמפרטורה נשווה בין כוס מים ואמבט מים. במידה והטמפרטורה שלהם שווה אחת לשנייה, האנרגיה הממוצעת לחלקיק בשני הגופים שווה, אך האנרגיה הפנימית של אמבט המים גדולה בהרבה מהאנרגיה הפנימית של כוס המים מאחר ולאמבט יש יותר חלקיקים, ולכן סכום האנרגיות הקינטיות של החלקיקים גדולה יותר, לעומת הטמפרטורה שהיא שווה.

הולכת חום

לאחר הצגת המושגים וחוקי התרמודינמיקה, נתאר באופן מיקרוסקופי ומקרוסקופי את תופעת הולכת החום.

כאשר נצמיד שני גופים בעלי טמפרטורה שונה כך שתהיה אינטראקציה הם יעבירו את האנרגיה בצורת חום אחד לשני, מהגוף בעל הטמפרטורה הגבוהה יותר לגוף בעל הטמפרטורה הנמוכה יותר, עד אשר יהיו שווי טמפרטורה.



התמונה הנ״ל הינה המחשה פשוטה של התהליך, הגוף החם יותר הינו הקובייה האדומה, ואילו הקר יותר הינו הכחולה. לאחר שנצמיד את שני הגופים יתרחש תהליך העברת חום מן הגוף החם אל הגוף הקר עד אשר הטמפרטורה תשתווה אחת לשנייה.

נתייחס קודם לתופעה מבחינה מיקרוסקופית מכיוון שהיא יותר קלה להבנה.

מבחינה מיקרוסקופית, המולקולות בגוף בעל הטמפרטורה הגבוהה יותר הם בעלי אנרגיה קינטית גבוהה יותר בממוצע, ובגוף הקר יותר המולקולות בעלות אנרגיה קינטית נמוכה יותר בממוצע, כאשר הגופים יבצעו אינטראקציה (התנגשויות), חלק מהאנרגיה של המולקולה בגוף החם יותר תעבור לגוף הקר יותר. הדבר קורה מספר רב של פעמים בשנייה בין כל המולקולות ובכך החום עובר בין שני הגופים. הגוף הקר יותר מקבל אנרגיה וטמפרטורה שלו עולה, ואילו הגוף החם יותר מאבד אנרגיה והטמפרטורה שלו יורדת, עד אשר שני הגופים יהיו שווי טמפרטורה.

אך שימוש רק בחוקי ניוטון לא יכול להסביר את התופעה במלואה מכיוון שחוקי ניוטון הם הפיכים בזמן, כלומר כל התנגשות שמעבירה אנרגיה לצד אחד, אפשרית גם בתהליך הפוך. למעשה צריך להתייחס כאן לאקראיות כדי לתאר את תהליך התפשטות האנרגיה.

לכן נתייחס לאנטרופיה של המערכת, אנטרופיה של אנרגיה תרמית. נחלק את האנרגיה של הגופים למנות אנרגיה אשר מהוות כמות מסוימת של אנרגיה, מנות אלו יכולות ״לנוע״ בין מולקולה למולקולה. טמפרטורה קשורה למספר מנות האנרגיה הקינטית הממוצעת לחלקיק, ולכן לגוף החם, יש מספר גבוה יותר של מנות אנרגיה לחלקיק בממוצע, לעומתו לגוף הקר יש פחות מנות אנרגיה לחלקיק בממוצע. על פי החוק השני של התרמודינמיקה כאשר נחבר בין שני הגופים ונבודד אותם מן הסביבה, האנטרופיה הכוללת של המערכות צריכה לעלות עד שהגופים יגיעו למצב שיווי משקל. על מנת להגדיל את האנטרופיה מנות האנרגיה ״יתפרשו״ בין יותר חלקיקים, מפני שיש יותר אפשרויות לפזר את מנות האנרגיה בין מספר גדול יותר של חלקיקים מאשר כאשר הם מרוכזים במספר מצומצם, כלומר יש יותר מצבי מיקרו. ניתן להראות באמצעות חוקי

התרמודינמיקה כי אנרגיה (חום) תעבור מגוף בעל טמפרטורה גבוהה לגוף בעל טמפרטורה נמוכה יותר, וכי האנטרופיה המקסימלית מתקבלת כאשר האנרגיה מתחלקת באופן זהה בין החלקיקים, כלומר הטמפרטורה בשתי המערכות זהה. הפיתוח מופיע בנספח 6. זהו הסבר פיזיקלי איכותי להתפשטות האנרגיה לאורך מוט שקצהו האחד נמצא בטמפרטורה גבוהה ביחס לאחר.

מודל פיזיקלי מקרוסקופי לתיאור התופעה

התיאור התרמודינמי בסעיף הקודם מספק הסבר לתופעת השתנות הטמפרטורה, אך אינו מתאר את התהליך הדינמי שלה – את האופן שבו הטמפרטורה משתנה בזמן ובמקום. לשם כך יש לשלב תיאור דינמי חלקיקי של המערכת עם החוק הראשון והשני של התרמודינמיקה. המודל המיקרוסקופי המתקבל הינו מורכב מאוד ומתבסס על תיאור מספר רב של התנגשויות. מודל זה חורג במורכבותו ובפרטיו מהיקף העבודה הנוכחית. על כן נתמקד בחוקים הבאים, שהינם תוצאה של המודלים, אשר מתארים את הקשר בין זרימת האנרגיה בגוף לשינוי הטמפרטורה בו.

הובלה על פי פורייה

פורייה הציע כי קצב מעבר החום בתוך הגוף הוא פרופורציוני לגרדיאנט הטמפרטורה (קצב שינוי הטמפרטורה במרחב).

$$j = -k * \nabla T$$

j – זרם החום, כמות האנרגיה התרמית ליחידת שטח וליחידת זמן העוברת בכיוון מסוים, ערך זה ביחידות $\frac{W}{m^2}$

k – מוליכות החום של הגוף (קבוע) $\frac{W}{m*k}$

∇T – גרדיאנט הטמפרטורה, קצב שינוי הטמפרטורה כפונקציה של המיקום, ביחידות $\frac{k}{m}$

בניסוי שלנו אנחנו מעוניינים בשטף החום שהוא הזרם שעובר דרך משטח פתוח מסוים:

$$\Phi = \iint j\, dA$$

קצב שינוי החום של הגוף שווה לשטף הכולל על פני כל המעטפת. זהו למעשה החוק הראשון של התרמודינמיקה, הקובע כי השינוי באנרגיה של גוף מסוים נגרם כתוצאה מזרמי החום אל ומאותו גוף – לא נוצרת ולא נעלמת אנרגיה:

$$\frac{dQ}{dt} = \oiint j\, dA$$

חוק הקירור של ניוטון

ניוטון קבע כי קצב איבוד החום של גוף אל הסביבה שבה הוא נמצא הוא פרופורציוני להפרש הטמפרטורה שלו והסביבה.

$$\frac{dQ}{dt} = -h * A * \Delta T$$

$\frac{dQ}{dt}$ – השינוי בחום הגוף ליחידת זמן אחת ביחידת $W = \frac{J}{s}$

h – קבוע מעבר חום שתלוי בסביבה שבו נמצא הגוף ביחידת $\frac{W}{m^2 * k}$

A – שטח הפנים שבין הגוף לסביבה ביחידות m^2

ΔT – הפרש הטמפרטורה בין הגוף לסביבה ביחידת K

<u>קשר בין חוק פורייה לחוק ניוטון</u>

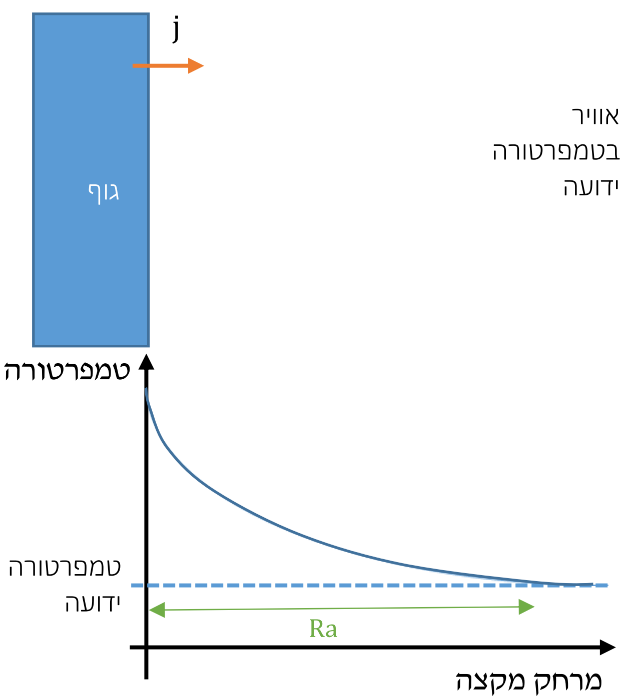
ניתן לקשר בין חוק פורייה לחוק ניוטון לקירור.

נעזר בחוק פורייה על מנת להגדיר את כמות האנרגיה התרמית שעוברת מן הגוף אל הסביבה.

$$j = -k * \nabla T$$

נפשט את הבעיה על ידי התייחסות רק לציר אחד, ציר ה-x, כך נוכל לרשום את הגרדיאנט כנגזרת פשוטה.

$$j = -k * \frac{dT}{dx}$$



ידוע כי האוויר מתחמם מהחום שעובר מן הגוף אל הסביבה, אם נתייחס לאוויר נגלה כי יש לו התפלגות טמפרטורה כתלות מהמרחק שלו מקצה הגוף. ניתן להשתמש בחוק פורייה כדי לבטא את מעבר החום מן האוויר לגוף, זרם החום שווה למכפלה של מוליכות חום האוויר ונגזרת הטמפרטורה ביחס למקום. בניסוי שלנו לא יכולנו למדוד את הפרש הטמפרטורה ביחס למקום מכיוון שהפרש זה היה קטן מאוד ובמרחק קטן ממכשירי המדידה שבידינו, ולכן לא התאפשר לנו למדוד הפרש טמפרטורה זה. את נגזרת הטמפרטורה ניתן לחשב בקירוב על ידי הפרש הטמפרטורה בין טווח גדול יותר שניתן למדוד חלקי המרחק הנ"ל. נבחר למדוד את הפרש הטמפרטורה בין המקום שבו טמפרטורת האוויר שווה לטמפרטורת החדר שאותה ניתן למדוד בקלות ובדיוק רב, לבין טמפרטורת המוט שגם כן ניתן למדוד. הפרש זה נסמן ב-ΔT ואת המרחק בין קצה הגוף למיקום זה נסמן כ-Ra, כלומר ניתן לרשום את הנגזרת כ-$\frac{\Delta T}{Ra}$.

$$j = -k * \frac{\Delta T}{Ra}$$

נגדיר את $\frac{k}{Ra}$ כמקדם שנקרא h.

$$J = -h * \Delta T$$

J זהו זרם החום שבין גוף לסביבה שלו, על מנת למצוא את שטף החום נכפיל בשטח שבו מתרחשת המעבר חום A.

$$\Phi = -h * A * \Delta T$$

נשתמש בנוסחה זו בהמשך הדוח ובמודל האנליטי שנציג בהמשך.

ניתן להגיע לנוסחה שהוצגה בחוק ניוטון על ידי ההנחה כי מעבר החום שבין הגוף לסביבה הוא היחיד וכי הגוף בעל טמפרטורה אחידה בכל אורכו. כך ניתן להגיד כי השינוי באנרגיה הפנימית של הגוף שווה לשטף החום שיוצא ממנו.

$$\frac{dQ}{dt} = -h * A * \Delta T$$

כאשר A מהווה שטח הפנים של הגוף, שהוא השטח שבו מתבצע מעבר החום, זוהי בעצם חוק הקירור של ניוטון.

<u>קיבול חום סגולי</u>

קיבול חום סגולי (Specific heat capacity) מתאר את כמות האנרגיה התרמית שיש להוסיף לגוף בעל יחידת מסה אחת על מנת להגדיל את הטמפרטורה שלו ביחידה אחת. מאפיין זה מאפשר להעביר מאנרגיה לטמפרטורה בקלות ולכן נשתמש בו בהמשך.

$$c = \frac{1}{m} * \frac{dQ}{dT}$$

ניתן לרשום את הנוסחה כך:

$$\Delta Q = C * m * \Delta T$$

כאשר:

ΔQ – כמות אנרגית החום שנוספה או נגרעה J

C – קיבול החום הסגולי של הגוף $\frac{J}{K*Kg}$

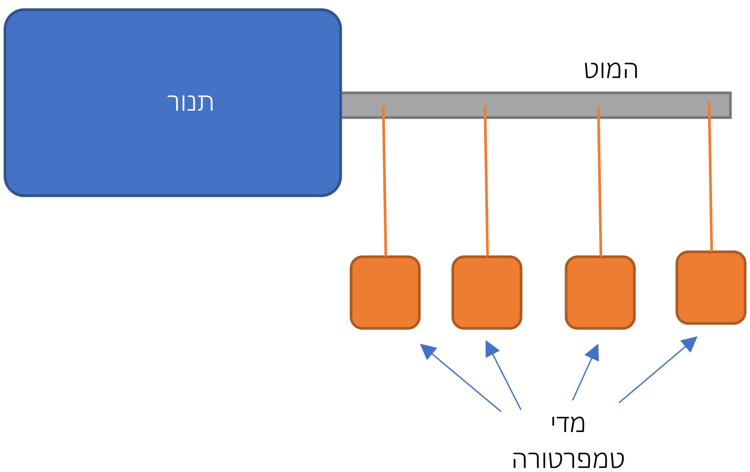
m – מסת הגוף Kg

ΔT – הפרש טמפרטורה בין תחילת מעבר החום לסופו, נמדד K

במודל הנומרי השתמשנו בגודל זה על מנת להמיר את השינוי באנרגיה שמופיע בחוק ניוטון ופורייה לשינוי בטמפרטורה.

בפרויקט מדדנו את התפלגות הטמפרטורה לאורכו של מוט מתכת (עבור מספר מוטות מחומרים שונים) כפונקציה של הזמן והמקום. השווינו את התוצאות למודלים המתבססים על חוקי ניוטון ופורייה שאפשרו לנו לחשב את הטמפרטורה לאורך המוט בזמן באמצעות פתרון נומרי של המשוואות, וכן בפתרון אנליטי במצב שיווי משקל. את מערכת הניסוי, המודלים והתוצאות נציג בעבודה זו.

<u>מערכת הניסוי</u>



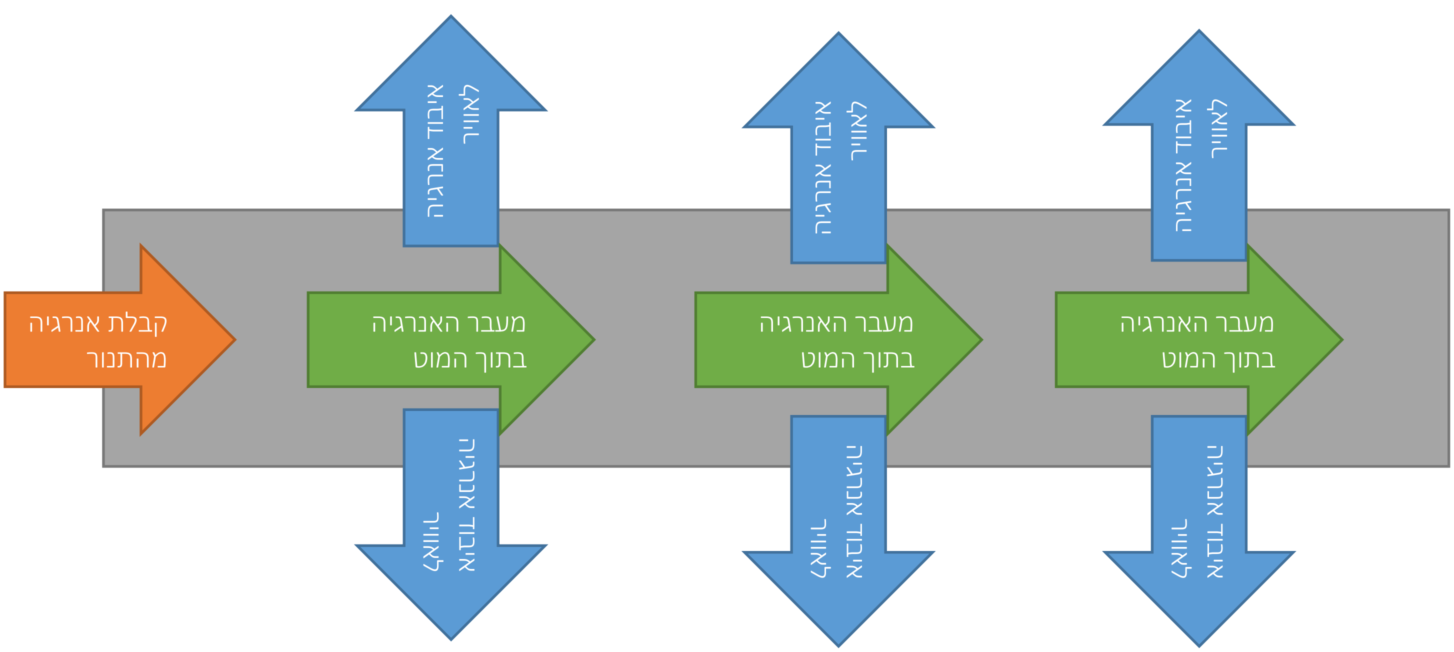
הניסוי מורכב ממוט אשר קצהו האחד נמצא בתוך תנור אשר מפיק טמפרטורה קבועה וגבוהה ושחומם מראש, שאר המוט נמצא חשוף באוויר ומחובר על ידי מספר מדי טמפרטורה במרווחים שווים.

במשך הניסוי השתמשנו במוטות מחומרים שונים – פלדה, אלומיניום ונירוסטה, כאשר כל אחד מהם מהווה סגסוגת שאינו יודעים את מרכיביה המדוייקים.

האנרגיה התרמית שמופק מהתנור מתפשטת בתוך המוט על ידי התנגשויות החלקיקים. בנוסף, במשך הזמן חלק מן האנרגיה התרמית של המוט נאבדת אל האוויר, זאת מכיוון שהאוויר בטמפרטורה נמוכה יותר מהמוט.

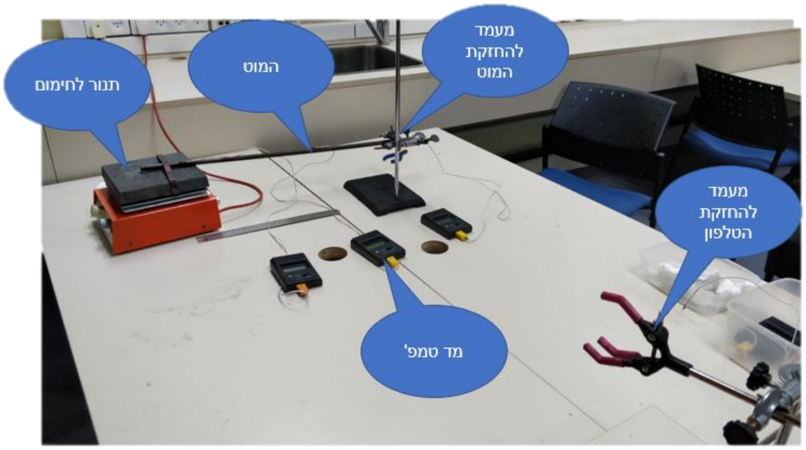
את טמפרטורת המוט מדדנו על ידי מספר מדי טמפרטורה שעובדים על ידי צמד תרמי. את המדים חיברנו למוט במרווחים שווים אחד מהשני, אותם צילמנו במרווחי זמן שווים עד אשר המערכת הגיעה למצב עמיד, לאחר 40 דקות עד שעה.

שיווי משקל תרמודינמי, מצב עמיד, הוא מצב שבו אין שינוי בגדלים המאקרוסקופים של המערכת, בניסוי שלנו - טמפרטורה. מצב שיווי משקל הוא מקרה פרטי של מצב עמיד, כאשר במצב שיווי משקל אין זרימת חום בין המערכת והסביבה. בניסוי שלנו המערכת מגיעה למצב עמיד מאחר ועדיין ישנם חילופי אנרגיה בין האוויר למוט ובין המוט לתנור בעקבות האינטראקציות בין החלקיקים ומעברי האנרגיה ביניהם, אך כאשר סכום מעברי האנרגיה הללו לאורך זמן לאורך המוט מבטלים אחד את השני, כאשר כמות החום שעובר מן המוט לאוויר שווה לכמות החום הנכנסת לתנור, ולכן הטמפרטורה אינה משתנה למרות שישנו מעבר חום. בהמשך הדוח נתייחס למצב זה כמצב שיווי משקל מאחר ואמרה זו מקובלת יותר.

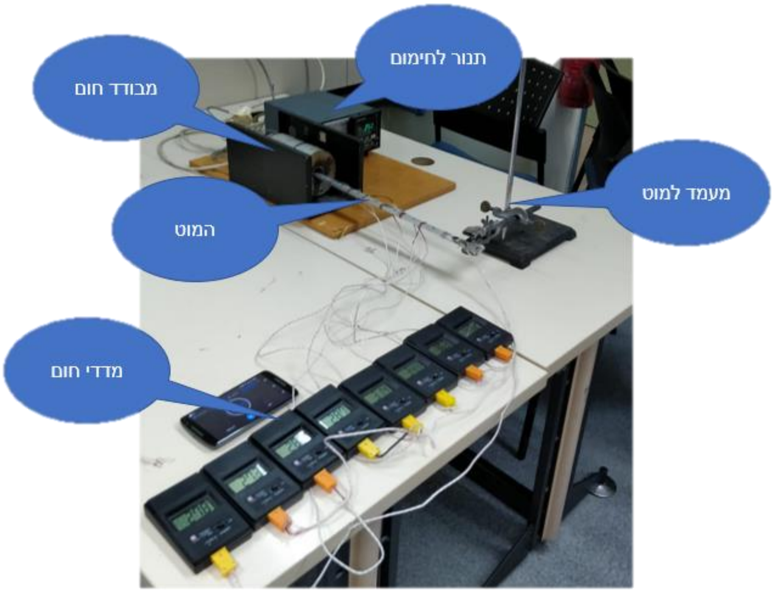


התפתחות המערכת

מערכת ניסוי ראשונה



מערכת ניסוי שנייה



מערכת הניסוי הראשונה שלנו הייתה בנויה מתנור בעל תרמוסטט, 3 מדי טמפרטורה, מעמד להחזקת הטלפון שאיתו הסרטנו את המדים ומעמד להחזקת המוט בעל מבודד על הזרוע שמחזיקה את המוט, וכמובן המוט מתכת.

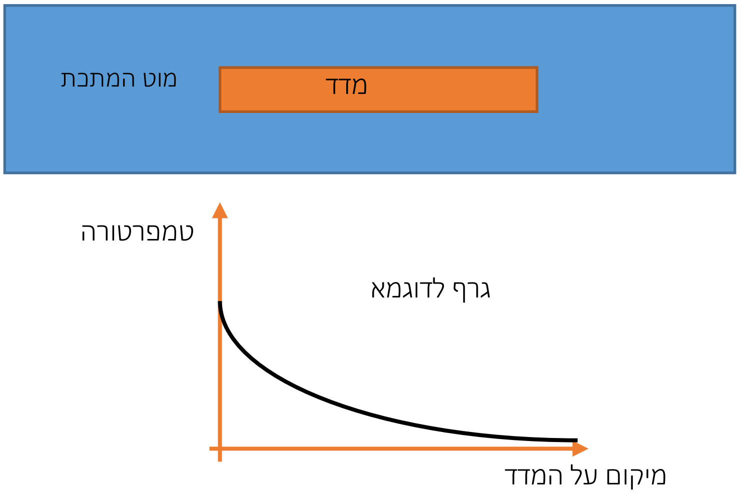
לאחר מספר מדידות שמנו לב כי בתנור היה תרמוסטט אשר גרם לטמפרטורת התנור להשתנות לאחר הגעה לשיווי משקל בכ-40 מעלות צלזיוס, דבר שגרם לשגיאה גדולה בניסוי מאחר והתנור לא הפיק טמפרטורה אחידה וקבועה. לכן עברנו לתנור ללא תרמוסטט שיכול להפיק טמפרטורה קבועה. בשלב זה גם הוספנו עוד מדי טמפרטורה על מנת שיהיה לנו מרחב דגימות רחב יותר ותוצאות מפורטות יותר. עברנו גם כן לצילום בתמונות במקום להסרטת המערכת כי התופעה אינה מהירה כמו שחשבנו בתחילה.

מערכת הניסוי השנייה הייתה בנויה מאותם רכיבים כמו המערכת הראשונה אך מדויקים יותר ומפורטים יותר.

המערכת בנויה מתנור שיכול להפיק טמפרטורה קבועה ומספר רב של מדי טמפרטורה. המוט הוכנס לתנור כאשר בחלקו במגע עם התנור וחלקו השני עם האוויר שבתוך התנור.

כבר בניסוי הראשון ראינו כי עוד בזמן ההכנות לניסוי, כאשר חיברנו את מדי הטמפרטורה למוט הפלדה, המודדים לא הראו טמפרטורה אחידה, למרות שהמוט היה בטמפרטורה החדר, מכאן הסקנו כי המודדים לא היו מכוילים. מאחר ואין מדי טמפרטורה מדויקים יותר וללא יכולת לכייל אותם, עברנו על כל מדי הטמפרטורה שהיו במעבדה ובחרנו את 8 מדי הטמפרטורה שהציגו את המידע הקרוב ביותר אחד לשני, המכוילים ביותר, ואיתם השתמשנו לאורך כל הניסויים.

שגיאות מדידה



- שגיאה בדרך הפעולה של מדי הטמפרטורה - למדי הטמפרטורה יש אזור שבו הם מודדים ולא נקודה אחת ולכן מדי הטמפרטורה לא מדדו בצורה נקודתית אלא את הטמפרטורה הממוצעת של אזור מסוים. השגיאה הינה הפרש הטמפרטורה מקצה אחד של המד לקצה האחר. הנוסחה הינה הקשר שבין השינוי בטמפרטורה לאורך החוט במד הטמפרטורה שזה :

$$\Delta T = \frac{\Delta T}{\Delta x} * \Delta x = (\text{graph slope}) * \Delta x$$

כאשר Δx הינו גודל המדידה, 1 סנטימטר. את השיפוע נמצא על ידי ממוצע של שיפוע הטמפרטורה על פי הנקודה שלפני והנקודה שאחרי. שגיאה זו נעה בין 1 ל-3 מעלות צלזיוס.

- שגיאת כיול המדים - בתחילת הניסוי המוט היה בטמפרטורה החדר ולכן המדים אמורים להציג את אותה טמפרטורה, אך הם הציגו ערכים שונים, אנחנו הסקנו כי המדים לא מכוילים. מאחר ולא היה ניתן לכייל אותם הוספנו את ההפרש המקסימלי ביניהם לשגיאה. ניתן לראות בתמונה את מצב המדים כאשר חוברו למוט אך המוט עוד לא הוכנס לתנור, כל מדי הטמפרטורה אמורים במצב זה להציג טמפרטורה שווה מאחר והמוט בטמפרטורת החדר כולו. ניתן לראות כי הפרש הטמפרטורה בין הגבוה ביותר לנמוך ביותר הוא 2.2 מעלות.

(הערכים הם דו ספרתיים, לאחר הספרה הראשונה יש נקודה שלצערנו לא ברורה בתמונה, המספרים נעים בין 24.2 ל-26.4 מעלות צלזיוס)

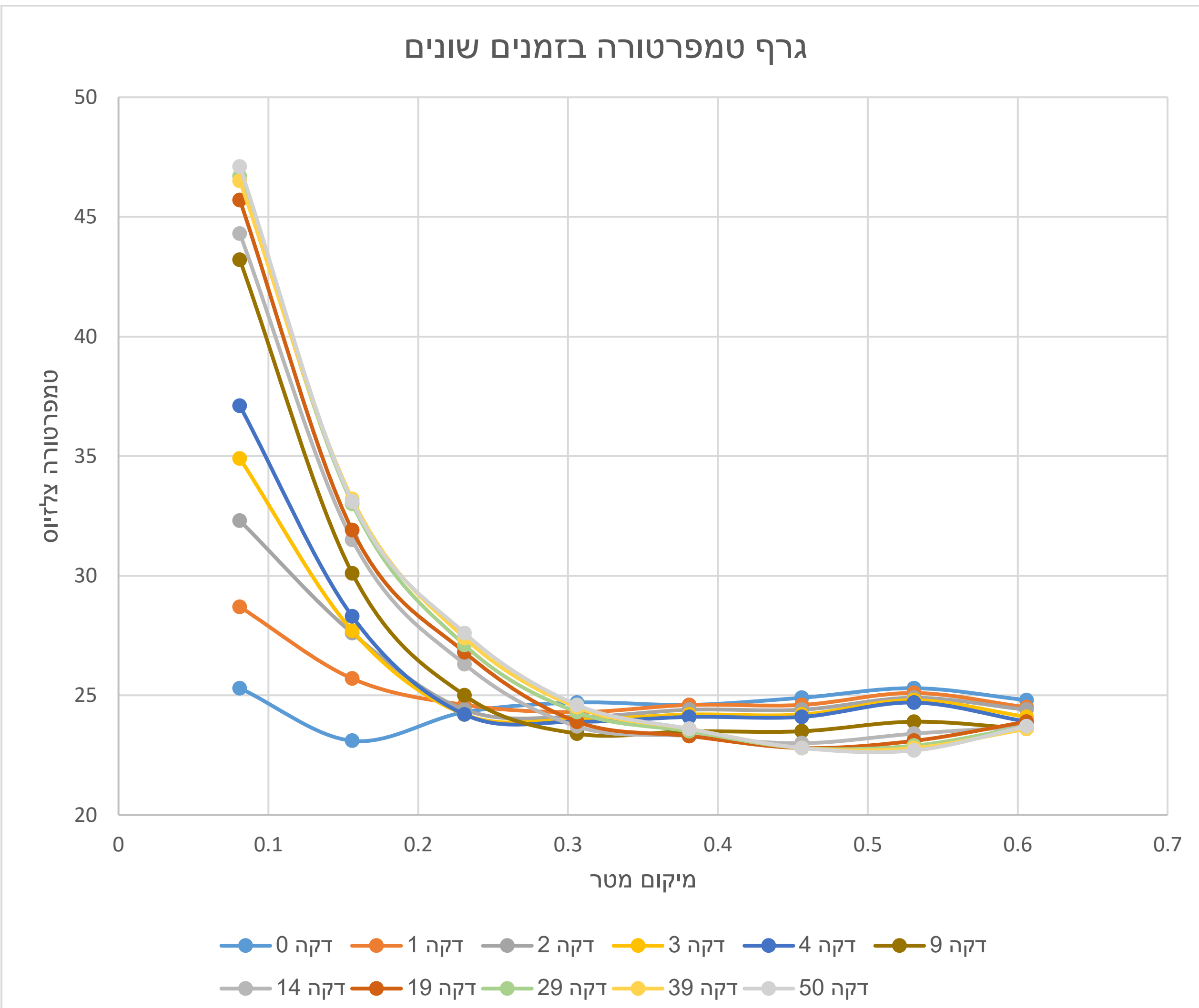
<u>תוצאות המדידה</u>

בפרק זה נציג את התוצאות אשר התקבלו מהניסויים שערכנו.

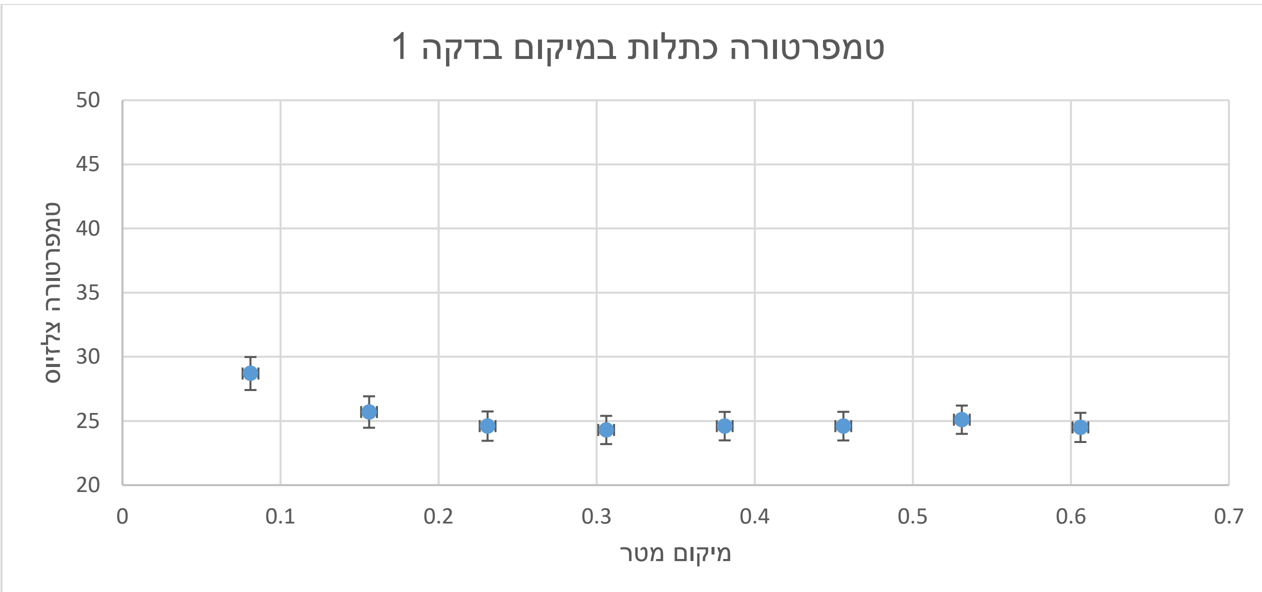
לכל מוט מתוך 3 סוגים : פלדה, אלומיניום ונירוסטה, עשינו 2 ניסויים. בכל ניסוי תעדנו את המדים בפרקי זמן של דקה, כך במשך 40 עד 50 דקות. את הנתונים הכנסנו לקובץ אקסל ושם עיבדנו אותם.

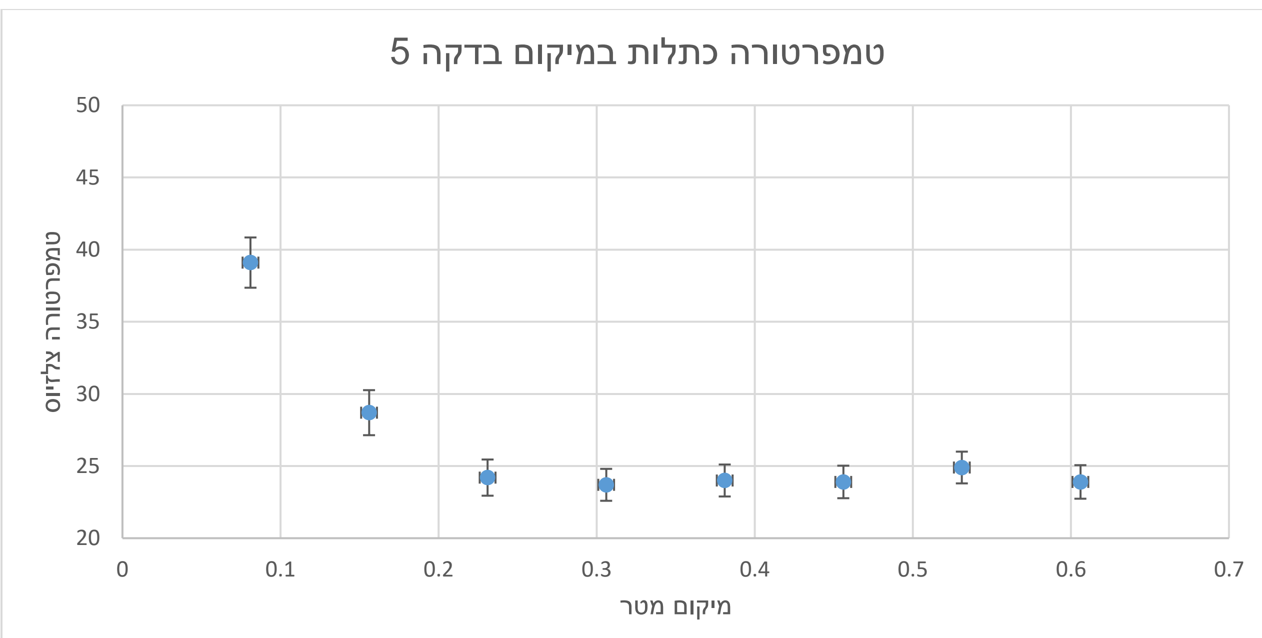
כעת נציג את התוצאות של אחד המוטות, מוט הפלדה, שארית המוטות הניבו תוצאות דומות בצורה ערכית ונפרט על כך במשך.

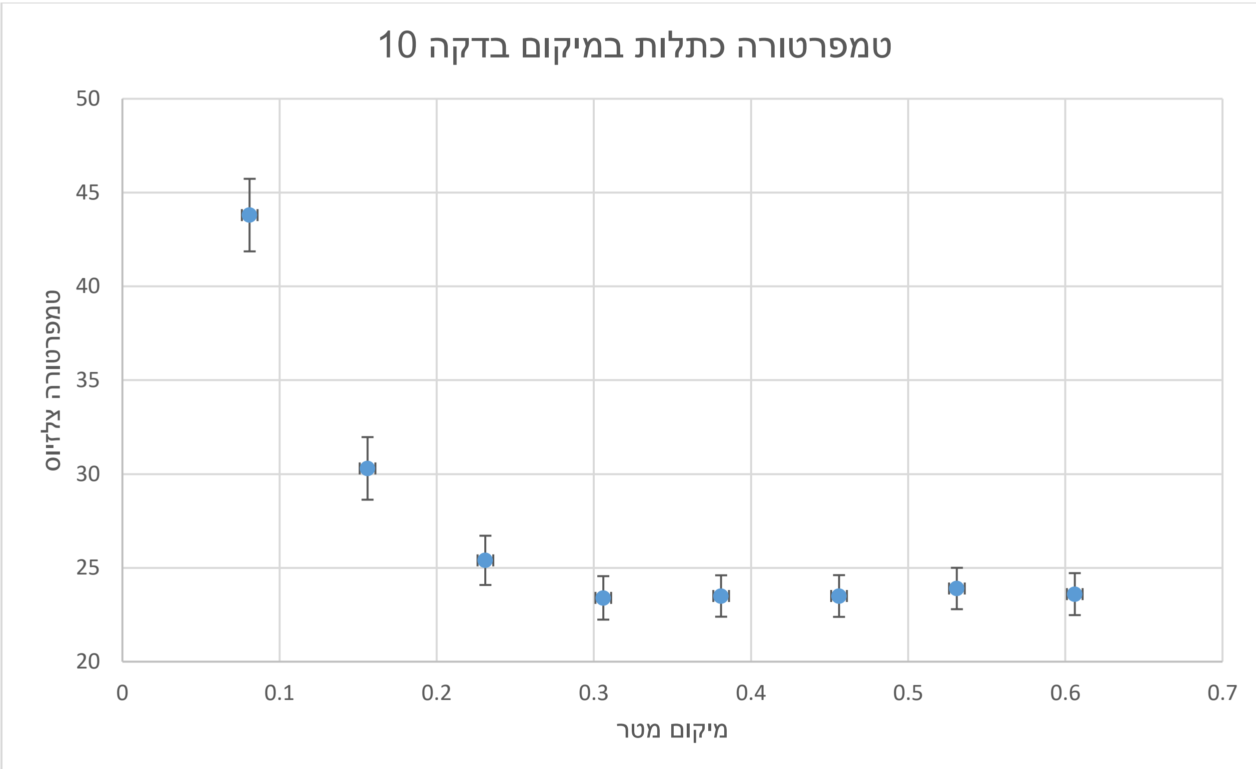
זהו גרף שמציג את הזמנים כסדרות שונות, ציר ה-y הינו הטמפרטורה במעלות צלזיוס וציר ה-x הוא המרחק מן התנור במטרים.

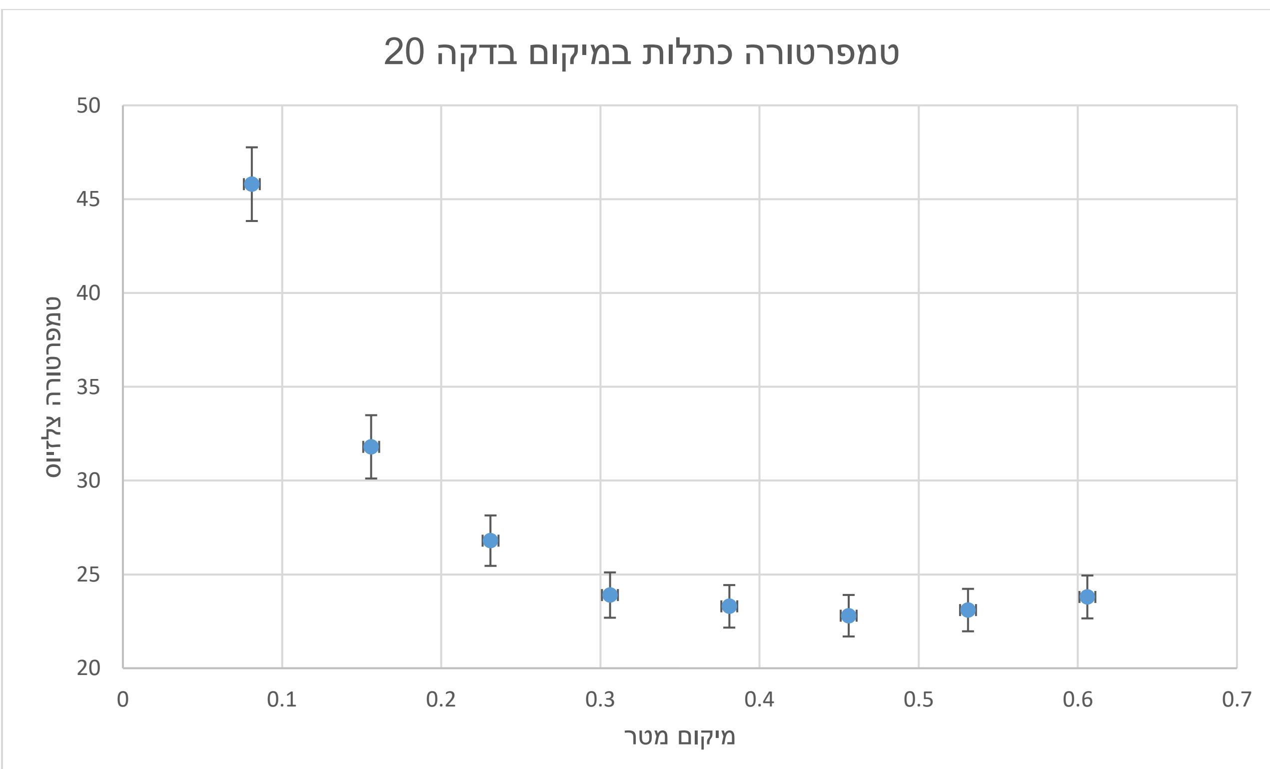


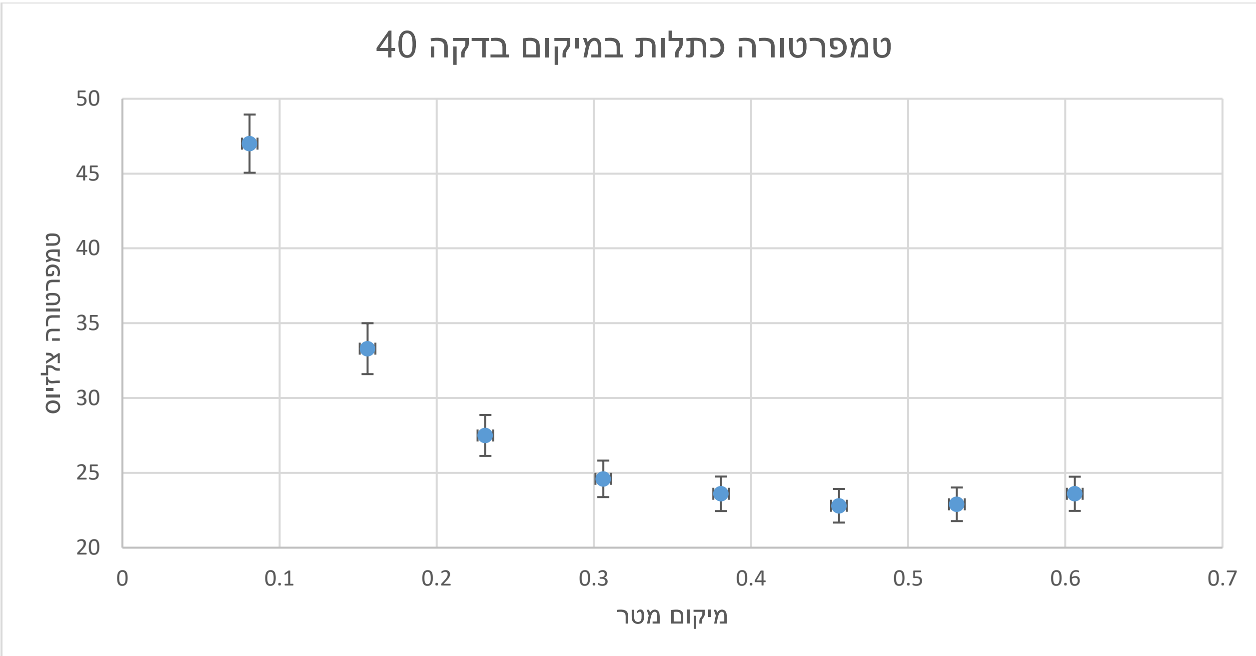
גרף זה מציג את כל המידע בבת אחת, אך קשה להסיק ממנו מסקנות לאפיון בגרפים, לכן החלטנו להציג את הנתונים בגרפים שמציגים את הטמפרטורה כתלות במשתנה אחד ; המיקום או הזמן. הגרפים הראשונים מציגים את הטמפרטורה ביחס למיקום על המוט, כל אחד בזמן אחר. החלק השני הינו גרפים שמציגים את הטמפרטורה ביחס לזמן, כל אחד במיקום שונה. גרפים אלו מציגים את הנתונים בצורה יותר נקייה ונוחה לראייה, בנוסף הוספנו את השגיאה, אותם חישבנו כמו שהסברנו קודם לכן בחלק של שגיאות המדידה.

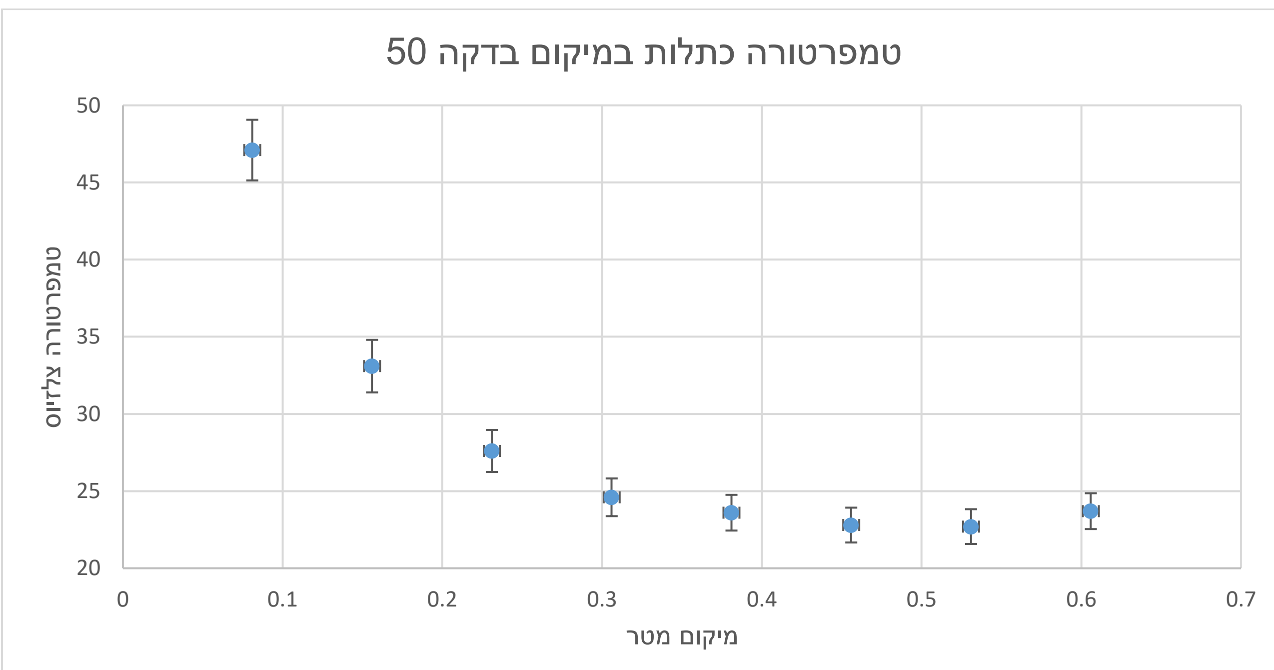


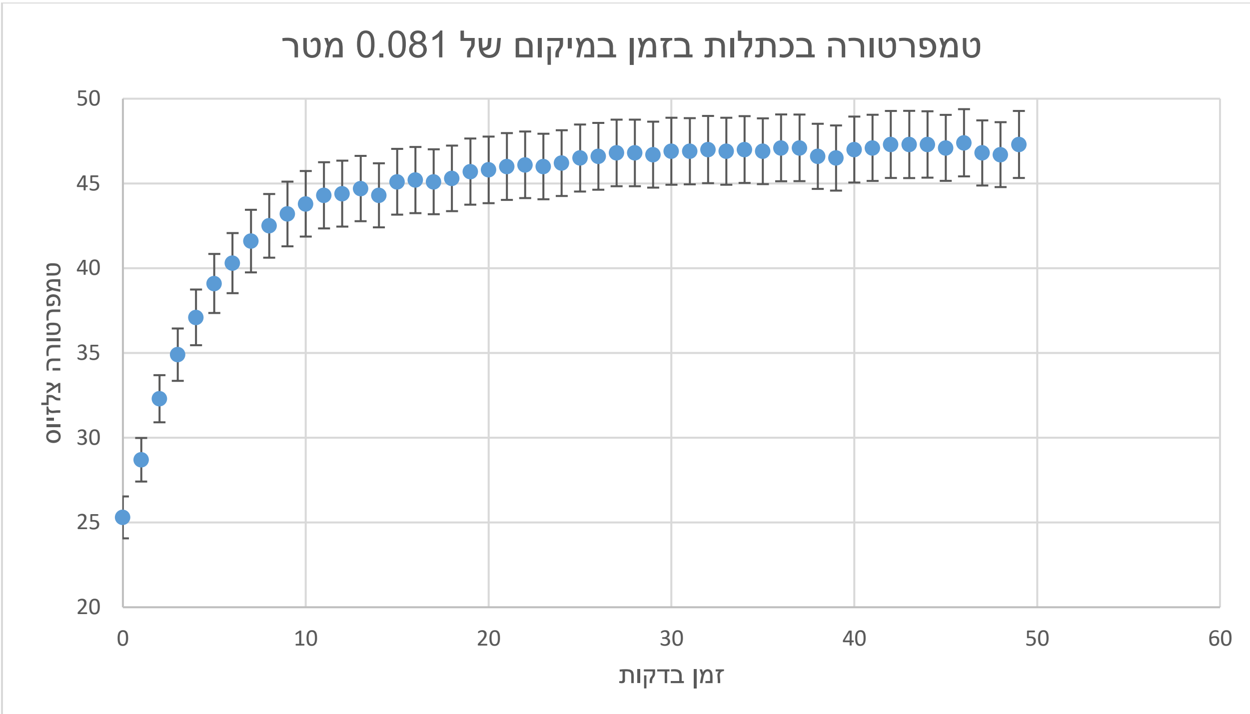


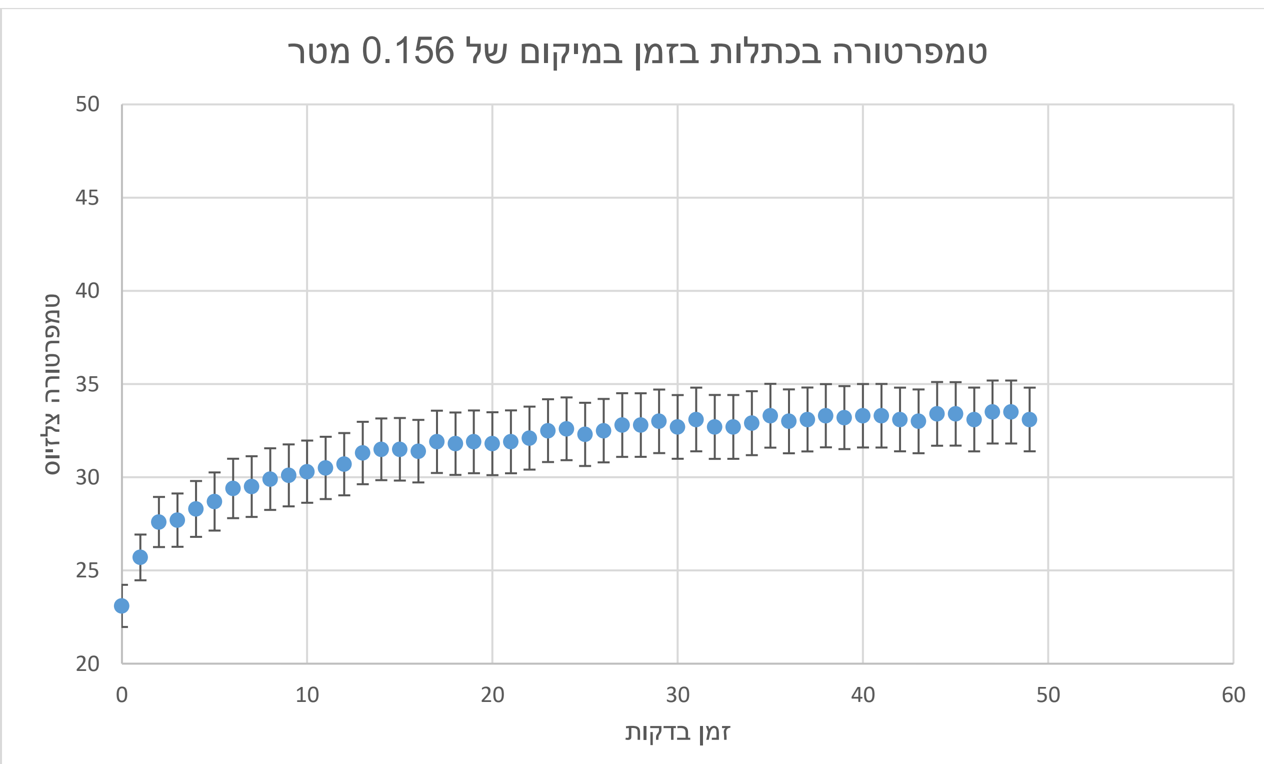

טמפרטורה כתלות במיקום בדקה 10
טמפרטורה צלזיוס
מיקום מטר
50
45
40
35
30
25
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7

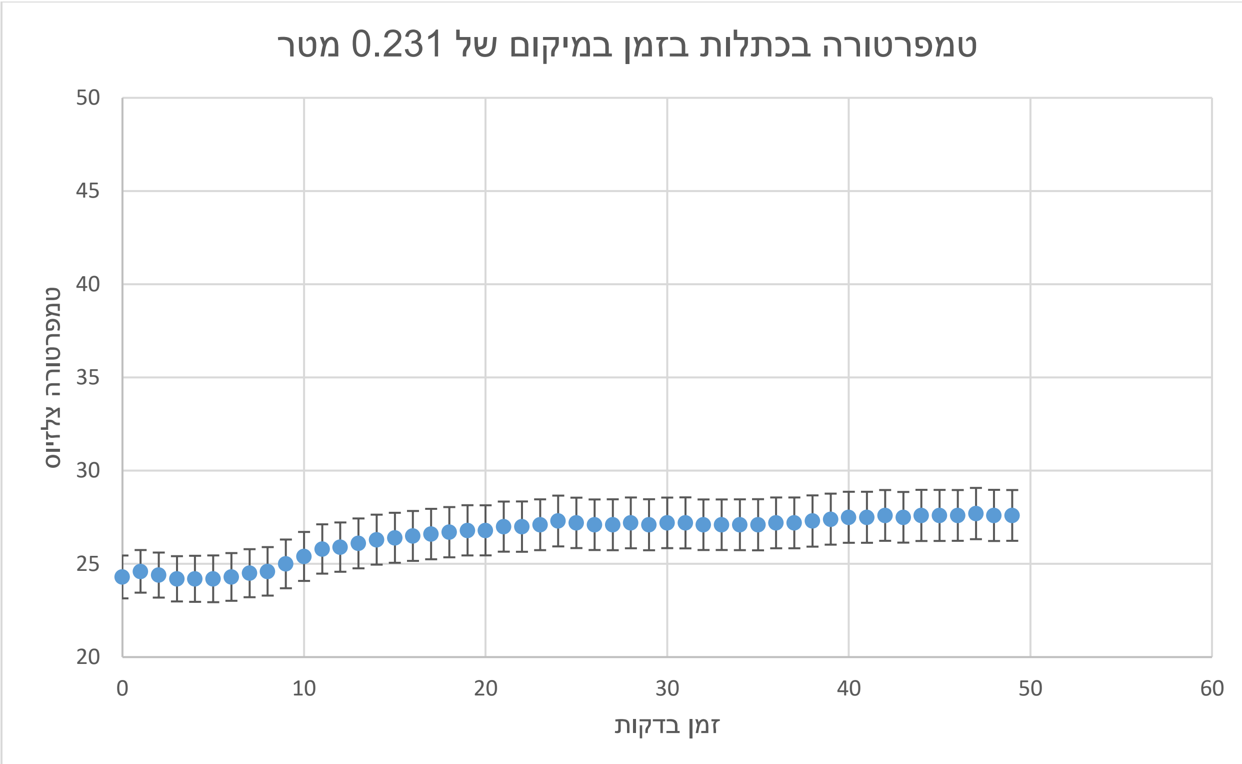

טמפרטורה כתלות במיקום בדקה 20
טמפרטורה צלזיוס
מיקום מטר
50
45
40
35
30
25
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7

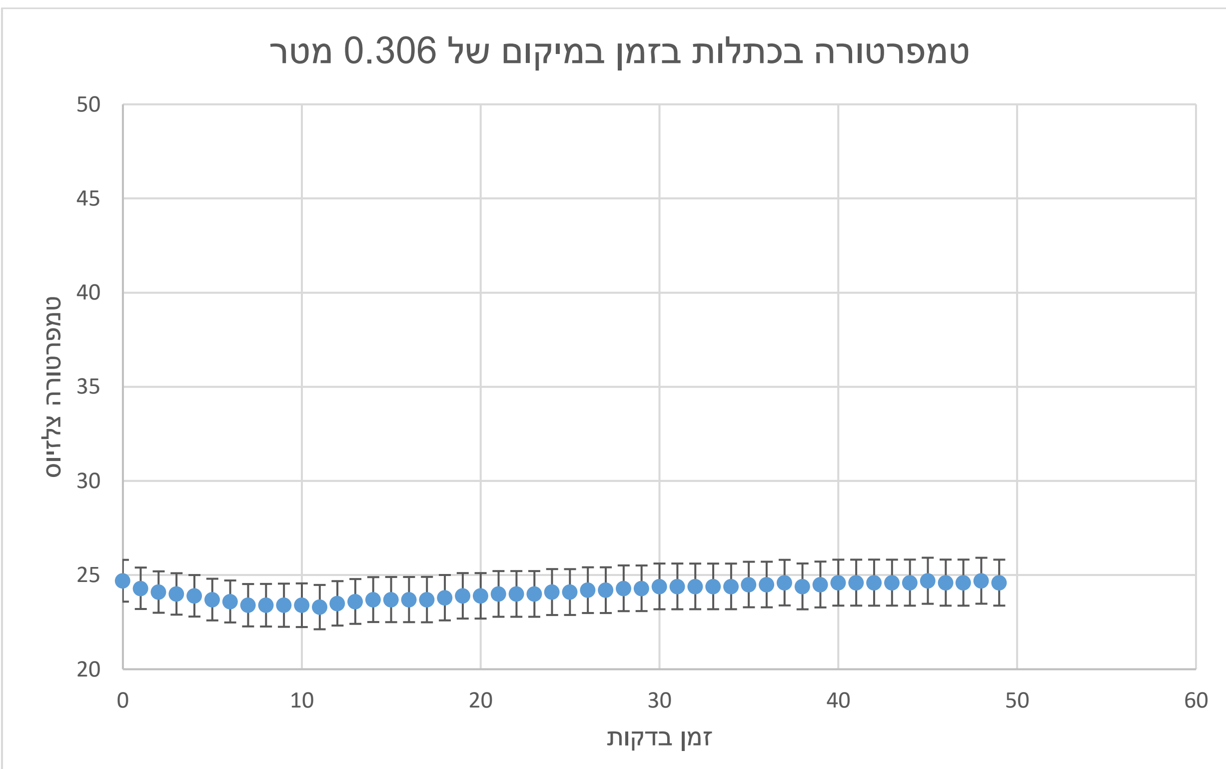

טמפרטורה כתלות במיקום בדקה 40
50
45
40
35
30
25
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
טמפרטורה צלזיוס
מיקום מטר


טמפרטורה כתלות במיקום בדקה 50
50
45
40
35
30
25
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
טמפרטורה צלזיוס
מיקום מטר


טמפרטורה בכתלות בזמן במיקום של 0.081 מטר
טמפרטורה צלזיוס
זמן בדקות
50
45
40
35
30
25
20
0
10
20
30
40
50
60


טמפרטורה בכתלות בזמן במיקום של 0.156 מטר
טמפרטורה צלזיוס
זמן בדקות
50
45
40
35
30
25
20
0
10
20
30
40
50
60

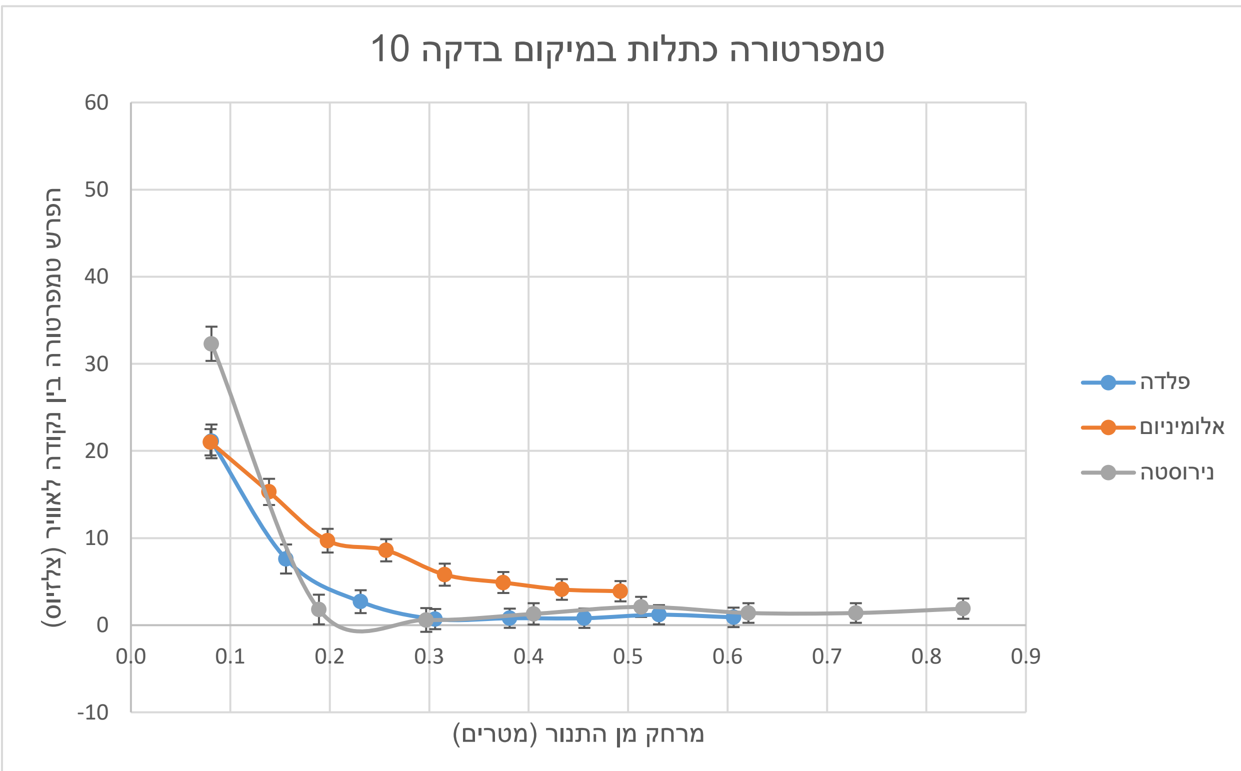

טמפרטורה בכתלות בזמן במיקום של 0.231 מטר
טמפרטורה צלזיוס
זמן בדקות
50
45
40
35
30
25
20
0
10
20
30
40
50
60

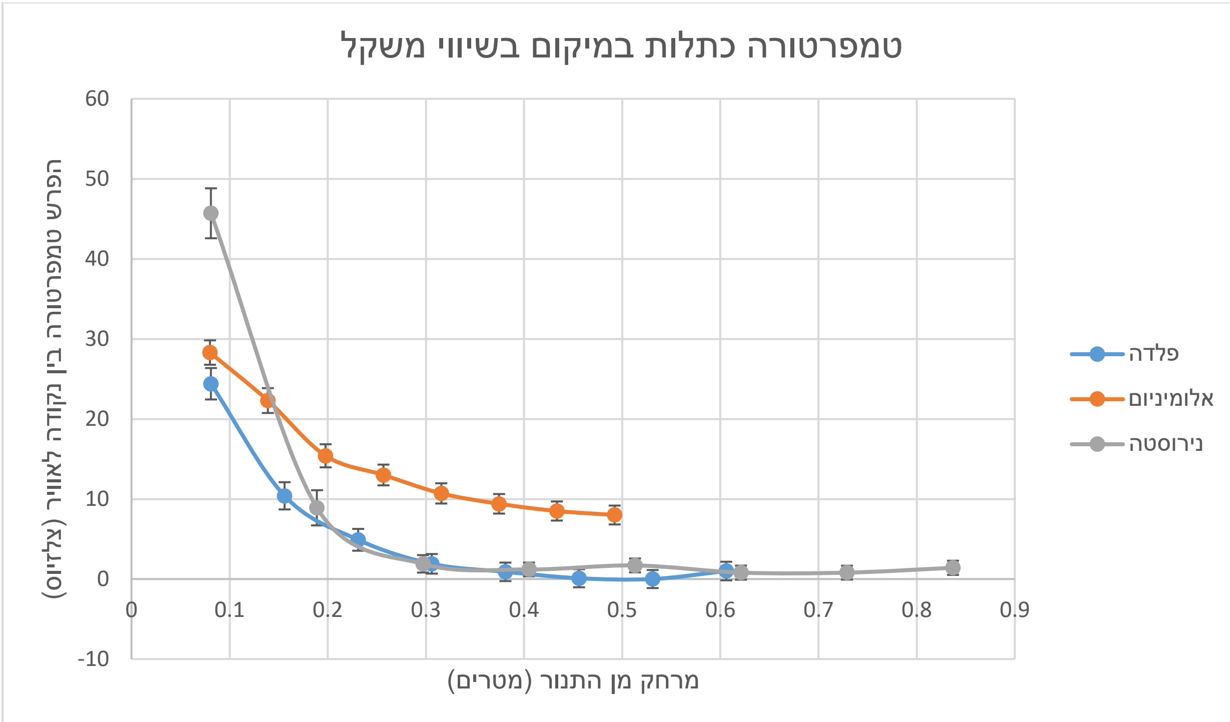

טמפרטורה בכתלות בזמן במיקום של 0.306 מטר
טמפרטורה צלזיוס
זמן בדקות
50
45
40
35
30
25
20
0
10
20
30
40
50
60

ניתן לראות בחלק הראשון כי גרף הטמפרטורה ביחס למיקום יורד, ואילו גרף הטמפרטורה ביחס לזמן עולה, שניהם לא ביחס ליניארי. בנקודות שקרובות לתנור יש שינוי משמעותי בטמפרטורה ביחס לזמן וככל שמתרחקים יותר מן התנור השינוי קטן. בנוסף במרחקים גדולים אי אפשר לראות שינוי בטמפרטורה מאחר והוא קטן משגיאת המדידה.

שאר המוטות הציגו תוצאות דומות באופן איכותי, אך שונות בערכים, זאת בגלל ההבדלים בחומרים מהם עשויים, שמשפיע על קיבול החום ומוליכות החום, וההבדל באורך שלהם. מוטות הפלדה האלומיניום והנירוסטה באורכים של 0.6, 0.5 ו-0.8 מטר בהתאמה.

ניתן לראות בגרפים להלן את תוצאות הניסוי של כל המוטות, הפלדה האלומיניום והנירוסטה על אותה מערכת צירים.



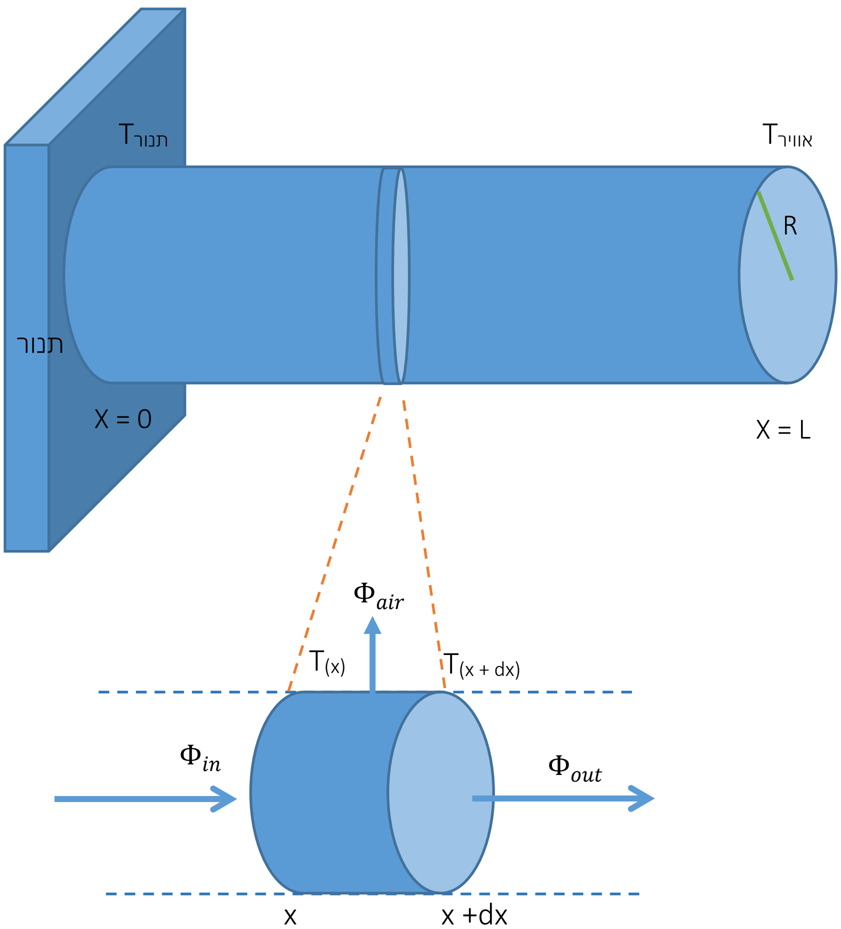


התפלגות הטמפרטורה תלויה ב-3 מאפיינים, הולכת החום של המוט, קבוע החום של האוויר וקיבול החום הסגולי, בהמשך נציג את תלות התפלגות הטמפרטורה כתלות בהם וכיצד הם משפיעים.

פתרון אנליטי למצב שיווי משקל - Fin equation

מציאת פתרון אנליטי להתפלגות הטמפרטורה כתלות במיקום ובזמן לאורך המוט הוא מורכב מאוד מתמטית, מאחר והטמפרטורה תלויה גם במקום וגם בזמן, והתלות במקום ובזמן משפיעה זו על זו.

אך במצב שיווי המשקל של המערכת אם נחכה זמן רב, התפלגות הטמפרטורה של המערכת לא תשתנה. לכן ניתן למצוא פתרון אנליטי פשוט יותר למצב שיווי המשקל מאחר והטמפרטורה תלויה רק במקום.



במצב שיווי המשקל למרות שהטמפרטורה לאורך המוט לא משתנה בזמן, עדיין יש מעבר חום בין התנור למוט ובין המוט לסביבה, מאחר והתנור עדיין מפיק אנרגיה שמתפשטת אל המוט וממנו לאוויר.

לכן ניתן להגיד כי סך שינוי האנרגיה הפנימית של המוט שווה ל-0:

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

ניתן להגיד כי כאשר השינוי באנרגיה הפנימית שווה ל-0, סכום שטף החום אל הגוף וממנו, שמסומן באות פי Φ, שווה גם כן ל-0.

$$\Phi_{in} + \Phi_{out} + \Phi_{air} = 0$$

כעת נסתכל על חתך קטן מן המוט (ניתן לראות בסרטוט בצד). את שטף החום שנכנס בנקודה מסוימת נסמן כ-$\Phi(x)$ ושטף החום שיוצא נרשום כחום שעובר לאחר חתך קטן מאוד $-\Phi(x + dx)$, נוסיף מינוס מאחר והחום יוצא מן הגוף.

$$\Phi(x) - \Phi(x + dx) + \Phi_{air} = 0$$

$$-\big(\Phi(x + dx) - \Phi(x)\big) = -\Phi_{air}$$

נעזר כעת בהגדרה של נגזרת.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x + dx) - y(x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} * dx = y(x + dx) - y(x)$$

משוואה זו נוכל להציב באגף שמאל של המשוואה כמינוס המכפלה של השיפוע ו-dx.

$$-\frac{d\Phi}{dx} dx = -\Phi_{air}$$

נעזר בהגדרה של Φ כאשר A זהו שטח החתך.

$$\Phi = \iint j \, dA$$

בניסוי שלנו אנחנו מתייחסים רק למעבר חום בציר האופקי ולכן נוכל לפשט את המשוואה.

$$\Phi = j * A$$

נגזור את המשוואה ונציב.

$$-A \frac{dj}{dx} dx = -\Phi_{air}$$

נעזר כעת בהגדרה של חוק פורייה.

$$j = -k * \nabla T$$

גם את נוסחה זו נפשט מאחר ואנחנו עובדים רק עם הציר האופקי.

$$j = -k * \frac{dT}{dx}$$

נגזור את המשוואה ונציב.

$$k * A * \frac{d^2T}{dx^2} * dx = -\Phi_{air}$$

אגף ימין במשוואה, Φ_{air}, מהווה שטף החום שיוצא מן המחתך אל האוויר, על פי ההגדרה של שטף וחוק ניוטון לקירור.

$$\Phi = \iint j\, dA$$

נפשט את המשווה כפי שעשינו קודם, אך את שטח הפנים נציג כמכפלה בין ההיקף p לאורך שטח החתך dx.

$$\Phi = j * p * dx$$

ניתן להציב את חוק ניוטון מאחר וזהו שטף החום שמתרחש בין המוט לסביבה. לא נשכח שמעבר החום מתבצע מן הגוף לסביבה ולכן נוסיף מינוס.

$$\Phi_{air} = -h * p * dx * \Delta T$$

במשוואה זו ΔT מהווה הפרש הטמפרטורה בין חתך מסוים לבין האוויר .

$$\Delta T = T(x) - T_{\text{אוויר}}$$

נציב משוואה זו באגף ימין.

$$k * A \frac{d^2 T}{dx^2} dx = h * p * dx * \Delta T$$

לאחר מספר פעולות חשבון פשוטות ניתן להגיע לפתרון הנ"ל.

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{h * P}{A * k} * \Delta T$$

על מנת להפוך את החישובים לקלים וברורים יותר נסמן ב-$\widetilde{T}(x)$ את הפרש הטמפרטורה שבין נקודה מסוימת במוט לטמפרטורה האוויר.

$$\widetilde{T}(x) = T(x) - T_{\text{אוויר}}$$

כאשר נגזור זאת האיבר $T_{\text{אוויר}}$ יעלם מאחר וזהו מספר קבוע ואינו משתנה ביחס ל-x.

$$\frac{d}{dx}\widetilde{T} = \frac{d}{dx} T(x)$$

כלומר נוכל להציב במשוואה שמצאנו, נציב גם $\widetilde{T}(x)$ בתור ΔT מאחר והם מציגים דברים דומים.

$$\widetilde{T}(x) = T(x) - T_{\text{אוויר}} = \Delta T$$

$$\frac{d^2\tilde{T}}{dx^2} = \frac{h * P}{A * k} * \tilde{T}(x)$$

נוכל לקבוע את המקדם ל-$\tilde{T}(x)$ כקבוע M^2.

$$M^2 = \frac{h * P}{A * k}$$

$$\frac{d^2\tilde{T}}{dx^2} = M^2 * \tilde{T}(x)$$

על מנת לפתור משוואה דיפרנציאלית יש צורך בפתרון כללי ובתנאי שפה.

את הפתרון הכללי מצאנו :

$$\tilde{T}(x) = C_1 * e^{Mx} + C_2 * e^{-Mx}$$

C_1 ו-C_2 הם האיברים החופשיים שיש למצוא.

על מנת למצוא אותם נשתמש בשני תנאי שפה (boundary conditions).

ניתן להגיד כי בקצה המוט שנמצא בתנור טמפרטורה המוט במצב שיווי המשקל שווה לטמפרטורה התנור, כאשר שני אלו הם ידועים וניתן למדוד אותם, נסמן את ההפרש הנ״ל כ-$\tilde{T}_1$.

$$\tilde{T}(0) = T_{\text{תנור}} - T_{\text{אוויר}} = \tilde{T}_1$$

תנאי השפה השני הינו שבקצה המוט הרחוק מן התנור, שנמצא באוויר, טמפרטורת המוט היא קרובה מאוד לטמפרטורה האוויר, ובקירוב שווה לה. לכן, הפרש טמפרטורת המוט וטמפרטורת האוויר בנקודה זו שווה ל-0.

$$\tilde{T}(L) = T_{\text{אוויר}} - T_{\text{אוויר}} = 0$$

נוכל לחשב בעזרת מקרים אלו את C_1 ו-C_2, נציב זאת במשוואה המקורית ונגלה את הפתרון הכללי.

$$\tilde{T}(x) = \frac{\tilde{T}_1 * \sinh(M(L - x))}{\sinh(ML)}$$

$$M^2 = \frac{h * P}{k * A}$$

$$\tilde{T}_1 = T_{\text{תנור}} - T_{\text{אוויר}}$$

זוהי המשוואה הסופית אשר מתארת את הפרש הטמפרטורה של מיקום מסוים ביחס לטמפרטורה האוויר במצב שיווי המשקל. בעזרתו ניתן להציג את התפלגות הטמפרטורה של המוט לאורכו. לחישוב המתמטי המלא ראה נספח מס׳ 1.

מודל לחישוב M

בפרק הקודם מצאנו את התפלגות הטמפרטורה במצב שיווי משקל.

$$\widetilde{T}(x)=\frac{\widetilde{T}_1 * \sinh(M(L-x))}{\sinh(ML)}$$

ניתן לראות כי היא אינה תלויה במקדמים k ו-h אלה במקדם M שמהווה היחס ביניהם.

$$M^2=\frac{h * P}{A * k}$$

כאשר:

- A – שטח החתך
- P – היקף המוט
- k – מוליכות החום של המוט
- h – מקדם חום שתלוי באוויר

באופן ניסיוני, את שטח החתך וההיקף ניתן למצוא בקלות רבה.

את k לא ניתן למצוא מאחר והוא תלוי במוט שעשוי סגסוגת, איננו יודעים את החומרים ממנו עשוי ולכן איננו יכולים למצוא את ערכים תאורטיים של מקדמי מוליכות החום שלו. בנוסף לא ניתן לחשב את h בעזרת המכשירים שיש לנו מאחר ומרחק האופייני שבו האוויר מתחמם מסביב למוט קטן מאוד, בין 1 ל-3 מילימטרים (מרחק זה נמצא בעזרת חישוב לאחר מציאת הערך M, שימוש ב - k מוליכות החום הידועה באוויר והערכה של המרחק האופייני Ra על פי הנוסחה $h=\frac{k}{Ra}$ שעסקנו בה בפרק המודלים פיזיקליים מקרוסקופיים). לא ניתן למקם את מכשירי המדידה במרחקים אלו מן המוט ובדיוק רב, בנוסף מכשירי המדידה מודדים ממוצע במקום מסוים (ראה פרק שגיאות המדידה) כאשר גודל זה הוא סנטימטר אחד, גודל המדידה הוא גדול מהגודל שאותו אנחנו רוצים למדוד, מה שיגרום לשגיאה גדולה מידי.

לכן, החלטנו לבצע השוואה בין הפתרון האנליטי שמצאנו לבין הניסוי במטרה למצוא את M. מאחר ושניהם אמורים להציג את אותו פתרון ניתן להשוואות ביניהם ולהתאים את ערך ה-M על מנת שנמצא את הערך המדויק ביותר.

במקום להציב ערכים ו"לנחש" את M על ידי ניסוי וטעיה, החלטנו לנסות למצוא את M ע"י חישוב "מרחק" התוצאות הניסיוניות מהערכים של המודל האנליטי, ומציאת M שעבורו "מרחק" זה הוא מינימלי (שיטת הריבועים המינימליים).

נכנה את ה"מרחק" רמת דיוק: היא מוגדרת כסכום ריבועי ההפרשים בין הערך שחושב בנוסחה האנליטית, לבין תוצאות הניסוי. נרצה למצוא את M שעבורו ערך זה מינימלי, כלומר ההפרש בין התוצאה הניסיונית לתוצאה האנליטית יהיה מינימלי.

ניתן להציג זאת כך:

$$\chi_{1\ \text{רמת הדיוק לחתיכה אחת}} = \left(\widetilde{\mathrm{T}}(\mathrm{x})_{\text{נוסחה אנליטית}} - \mathrm{T}[\mathrm{x}]_{\text{תוצאה ניסיונית}}\right)^2$$

$$\chi_{\mathrm{t}\ \text{סך הדיוק}} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \cdots$$

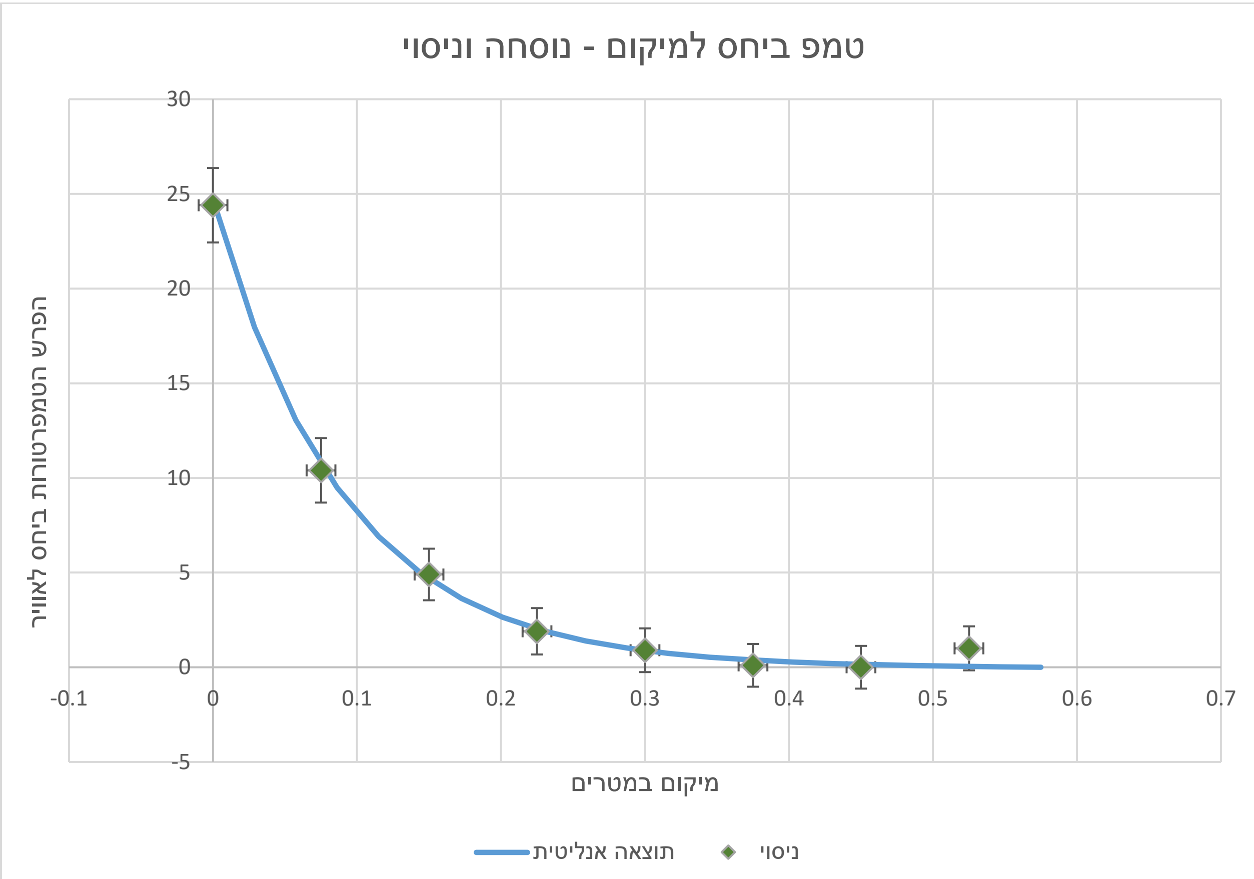
בעזרת קוד שכתבנו לחישוב הריבועים המינימליים (ראה נספח מס' 4) הצלחנו למצוא את ה-M המתאים ביותר לניסוי.

אך ישנה בעיה עם שיטה זו, אנחנו מוצאים את ה-M האופטימלי ביותר לניסוי, אך במידה והניסוי שלנו שגוי, בגלל שגיאות מדידה, כך גם ה-M יהיה שגוי. לכן, החלטנו לבצע את אותו ניסוי עם אותו מוט באותם תנאים פעמיים, ובכך יכולנו להשוואות בין ה-M שיצאו בין הניסויים. באותו מוט ערך ה-M אמור להישמר, שטח החתך, ההקיף ומוליכות המוט נשמרים מאחר והניסוי מבוצע עם אותו מוט ואף ערך h נשמר כי האוויר נמצא באותם תנאים; לחץ אוויר וטמפרטורה.

לדוגמא, בניסוי עם מוט הפלדה מדידה אחת מצאה כי ה-M המתאים ביותר הינו 9.2, בעוד שבמדידה השנייה עם אותו מוט ואותם תנאים ה-M המתאים ביותר הינו 11.1, לכן עשינו ממוצע בין שני הערכים, והשתמשנו בו למשך השוואת המדידות. נשים לב כי במידה וערכי M שהתקבלו בשני הניסויים שונים מאוד זה מזה, על אף שתנאי הניסוי אמורים להיות דומים, יש להתייחס בספקנות לשימוש ב M הממוצע, מאחר ואי ההתאמה בתוצאות עשויה להעיד על שגיאות בביצוע אחת המדידות או בשתיהן. עבור כל המוטות שבחנו ההפרש בין ערכי M לא היה גדול במיוחד (שגיאה יחסית מקסימלית של כ-10%) ועל כן השתמשנו ב M ממוצע.

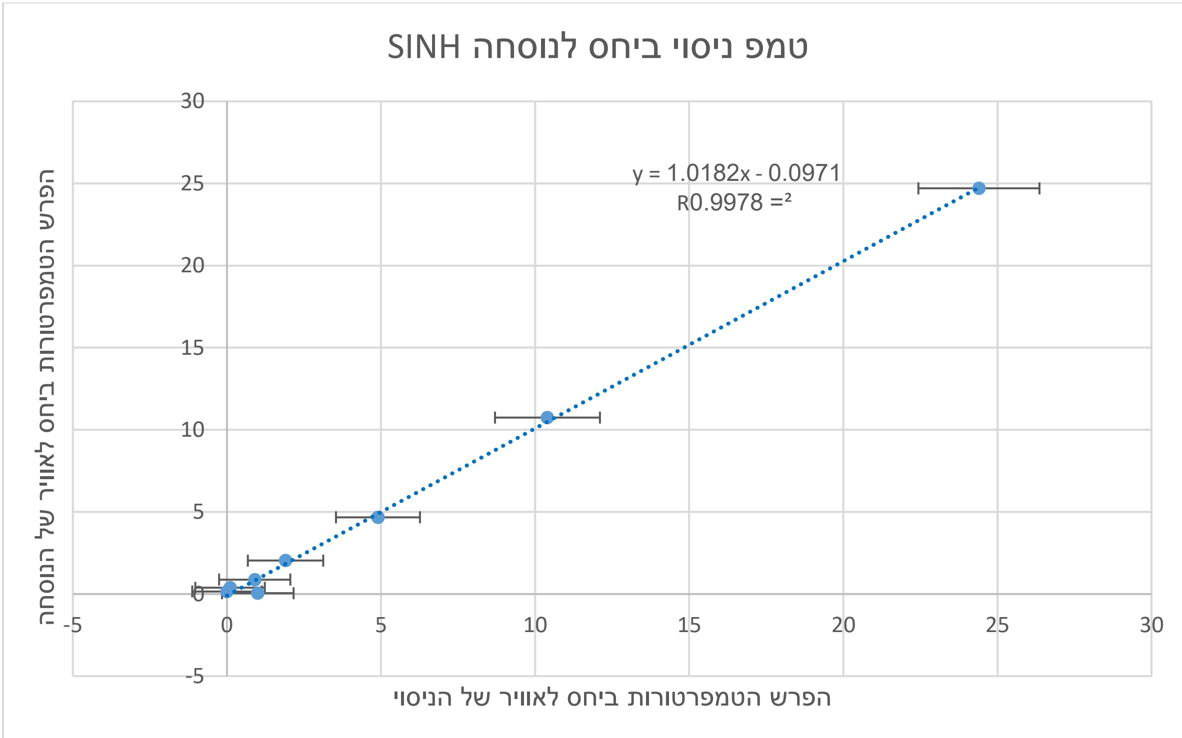
השוואה בין תוצאות הניסוי למודל האנליטי

לאחר שמצאנו את ה-M המתאים ביותר למוט הפלדה על פי שני ניסוים, נעשה ממוצע בין שני ערכי M, ערך זה במוט הפלדה שלנו הינו 10.15. הצבנו אותו בנוסחה האנליטית ואותה השוונו עם הניסוי המעשי של מוט הפלדה באותה מערכת צירים:



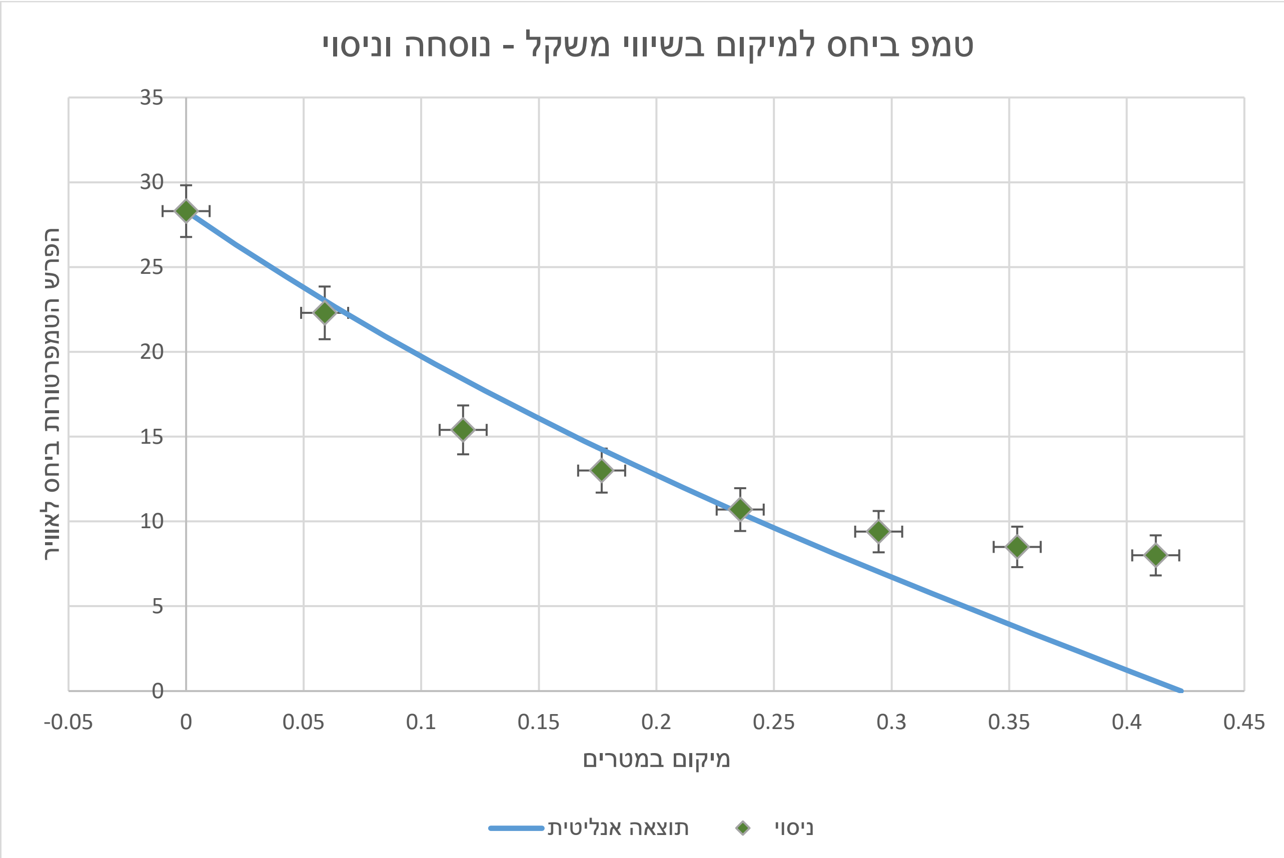
ניתן לראות כי ההתאמה בין הגרפים טובה מאוד.

על מנת להציג את ההתאמה בין הגרפים בצורה מדויקת וברורה יותר החלטנו לעשות ליניאריזציה לשני הגרפים ולהשוות ביניהם. הציר ה-x מייצג את תוצאות הניסוי, וציר ה-y מייצג את תוצאות הנוסחה עבור אותן נקודות.



ההתאמה הטובה ביותר מתרחשת כאשר היחס בין הנקודות הוא 1:1 כלומר, קו המגמה הוא קו ישר שראשיתו בראשית הצירים, כלומר הגרף הוא $y = x$. ניתן לראות כי שיפוע הגרף קרוב מאוד ל-1, האיבר החופשי קרוב ל-0, ו-R קרוב מאוד ל-1. לכן ניתן להסיק שההתאמה בין הנקודות טובה מאוד.

נעשה דבר דומה למוט האלומיניום, נמצא את ערך ה-M הממוצע שהינו 2.85 (בניסוי הראשון 2.9 ובניסוי השני 2.8), ונציג את התוצאה בגרף.



ניתן לראות כי ההתאמה אינה טובה. ניסינו לחשוב מדוע והגענו למסקנה שתנאי השפה השני אינו מתאים למוט האלומיניום. תנאי השפה השני אומר שבקצה הרחוק מהתנור טמפרטורה המוט שווה לטמפרטורה האוויר, כלומר הפרש הטמפרטורה שווה ל-0. ניתן לראות בגרף שהקצה הרחוק מהתנור (הקצה הימני) אינו שווה ל-0 ולכן הנחה זו שגויה. חיפשנו במאמרים באינטרנט הנחות חדשות ומדויקות יותר והגענו להנחה חדשה שנציג אותה כעת.

פתרון אנליטי למצב שיווי משקל – הנחה חדשה

לאחר שראינו כי הפתרון האנליטי הראשון מניב תוצאות לא מדויקות לחלק מן הניסויים הבנו כי תנאי השפה השני שבו השתמשנו לא מדויק. הוא ספציפי מידי ולא מתאר את המתרחש בחלק מן הניסויים. לכן חיפשנו תנאי שפה כללי יותר שיתאים לשאר הניסויים.

התוצאה הכללית ותנאי השפה הראשון דומים כמו בפתרון הראשון, אך נשתמש בתנאי השפה חדש, בקצה המוט שרחוק מן התנור שטף החום שנכנס שווה לשטף החום שיוצא, את שטף החום שנכנס נציג כחוק פורייה ואת השטף שיוצא כחוק ניוטון.

$$\Phi_{{in}_{x=L}} = \Phi_{{out}_{x=L}}$$

$$(\text{פורייה})_{x=L} = (\text{ניוטון})_{x=L}$$

ניתן לפתור את המשוואה על מנת לקבל את התוצאה הבא, לחישוב המתמטי המלא ראה נספח מס׳ 2.

$$\tilde{T}(x) = \tilde{T}_1 \frac{k * M * \cosh(M(L-x)) + h * \sinh(M(L-x))}{k * M * \cosh(ML) + h * \sinh(ML)}$$

$$M^2 = \frac{h * P}{A * k}$$

$$\tilde{T}_1 = T_{\text{תנור}} - T_{\text{אוויר}}$$

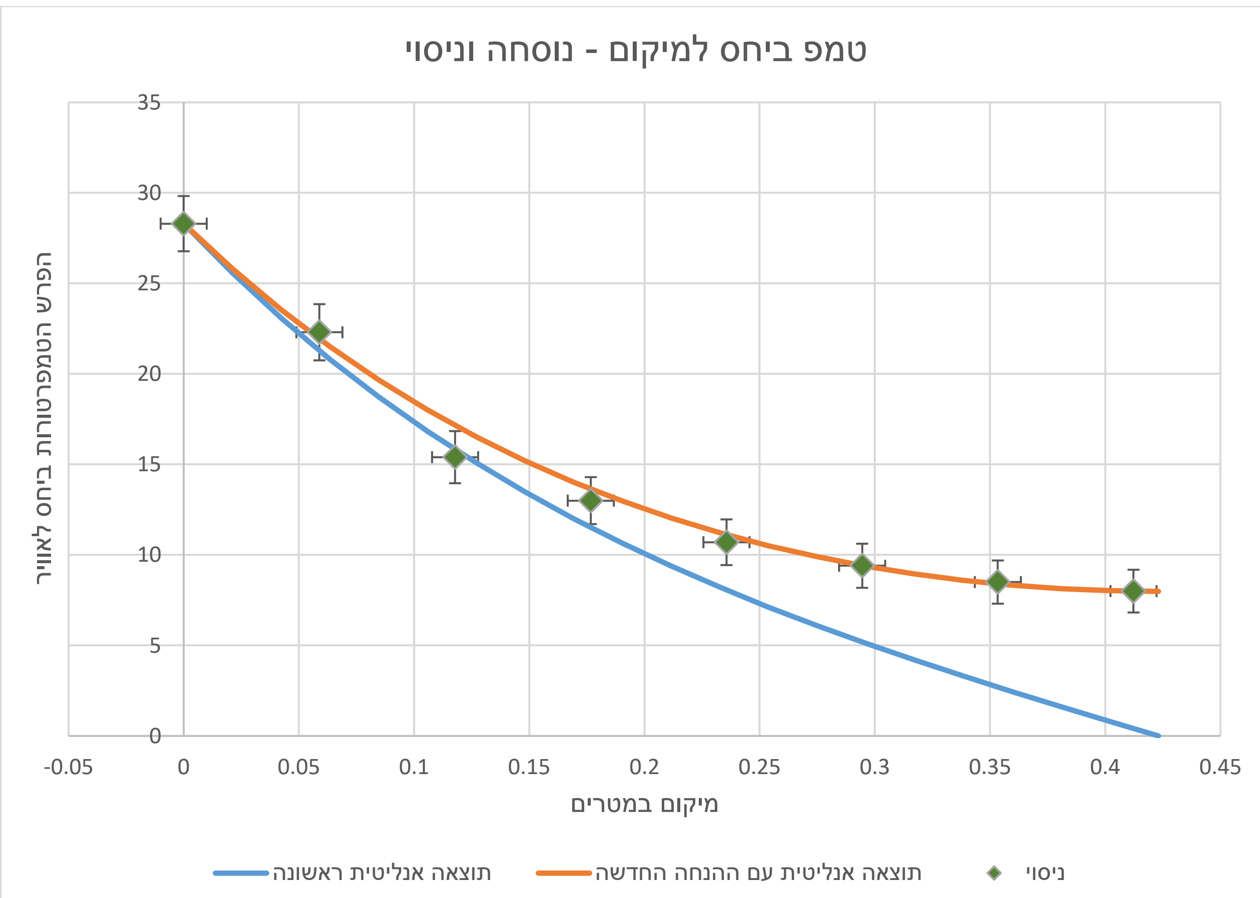
תוצאות ההנחה החדשה

בדומה למה שעשינו בפעם הקודמת, מצאנו את ערך M המתאים ביותר למוט על פי שני הניסויים, ועשינו להם ממוצע.

על מנת לבצע התאמה זו היינו צריכים להפוך את הנוסחה שתהיה תלויה רק ב-M.

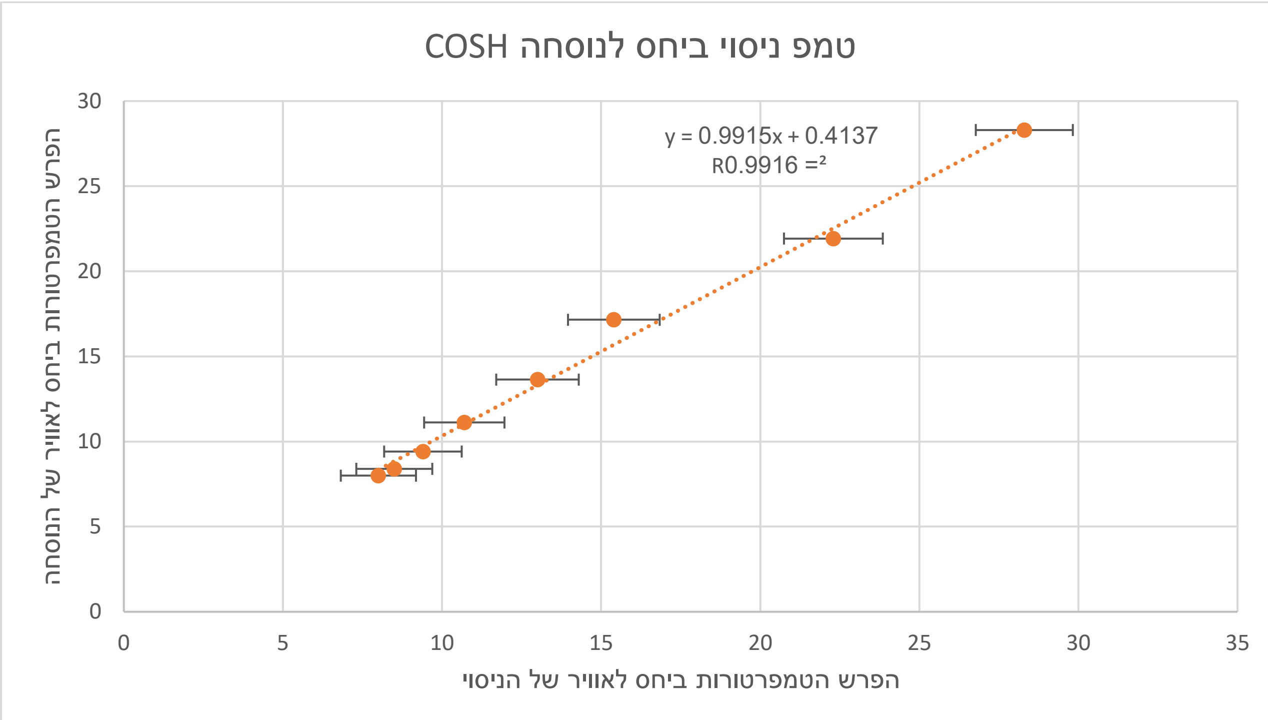
$$\tilde{T}(x) = \tilde{T}_1 \frac{\cosh\left(M(L-x)\right) + \frac{M^2 * A}{p} * \sinh\left(M(L-x)\right)}{\cosh(ML) + \frac{M^2 * A}{p} * \sinh(ML)}$$

ערך ה-M שנמצא המתאים ביותר לנוסחה הינו 4.605 (ערך M בניסוי הראשון הינו 4.58 ובשני 4.73). את ערך זה הצבנו בנוסחה האנליטית החדשה והשוונו בין תוצאות הנוסחה לתוצאות הניסוי של מוט האלומיניום.



לפי התוצאות של ההתאמה בין הנוסחאות שניתן לראות בגרף, ניתן להסיק כי ההנחה החדשה מתאימה יותר למוט האלומיניום מאשר ההנחה הקודמת.

בדומה למה שעשינו קודם, נעשה גרף לינאריזציה כדי לראות השוואה בין שני הגרפים.



ההתאמה הטובה ביותר מתרחשת כאשר היחס בין הנקודות הוא 1:1 כלומר, קו המגמה הוא קו ישר שראשיתו בראשית הצירים, כלומר הגרף הוא $y = x$. ניתן לראות כי שיפוע הגרף קרוב מאוד ל-1, האיבר החופשי קרוב ל-0, ו-R קרוב מאוד ל-1, לכן ההתאמה בין הנקודות טובה מאוד.

הגדלים הפיזיקאליים החשובים בניסוי

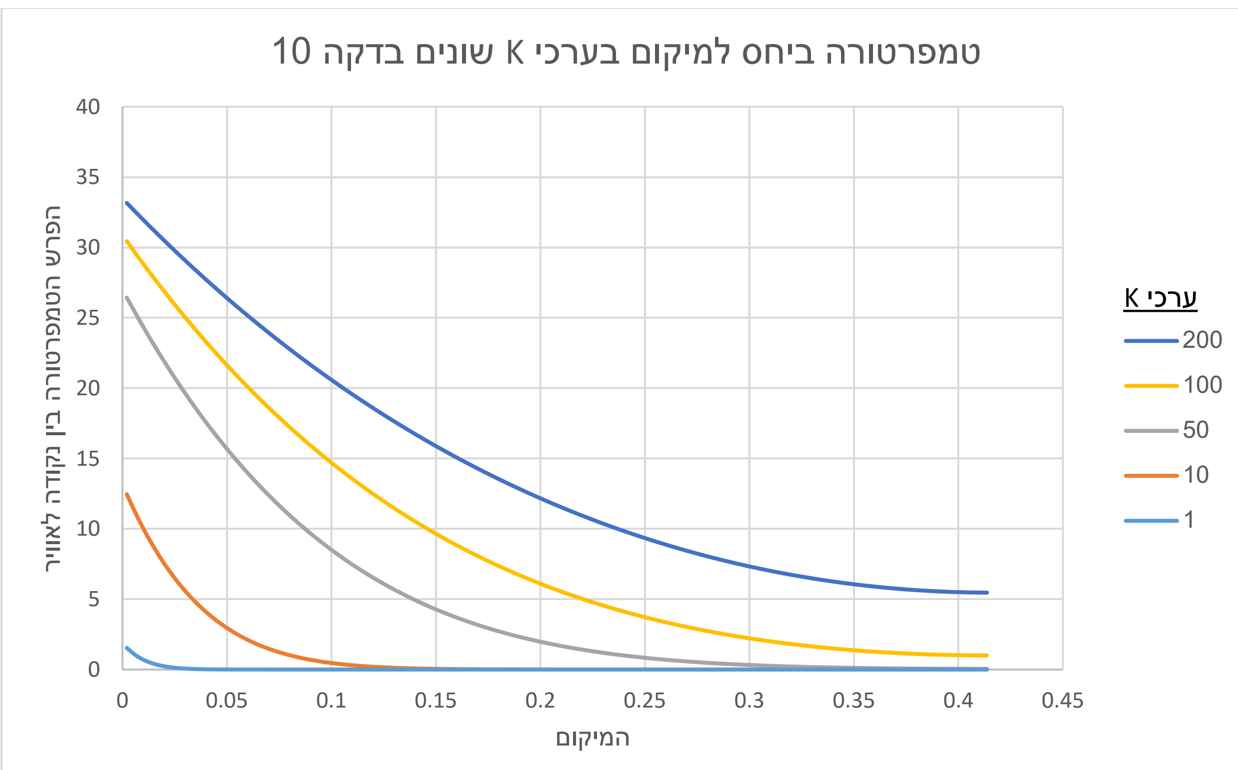
בניסוי שלנו ישנם כ-3 גדלים פיזיקליים חשובים : k – מקדם הולכת החום של המוט, h – מקדם הולכת החום עם האוויר ו-c קיבול החום של הסגולי של המוט.

על מנת להבין איך כל אחד מהם משפיע על תהליך מעבר החום והתפלגות הטמפרטורה יצרנו 5 גרפים אשר מציגים את התפלגות הטמפרטורה במוט שכל מאפייניו דומים מלבד מאפיין אחד, שאותו בדקנו, מוליכות החום, קבוע מעבר חום וקיבול חום סגולי. את הגרפים הפקנו בעזרת המודל הנומרי, בעזרתו יכולנו לקבוע את המשתנים : אורך המוט, המסה, טמפרטורת האוויר ועוד כפי שרצינו ולוודא כי כולם שווים בכל הניסויים מלבד הדבר שנבדק.

מוליכות החום k

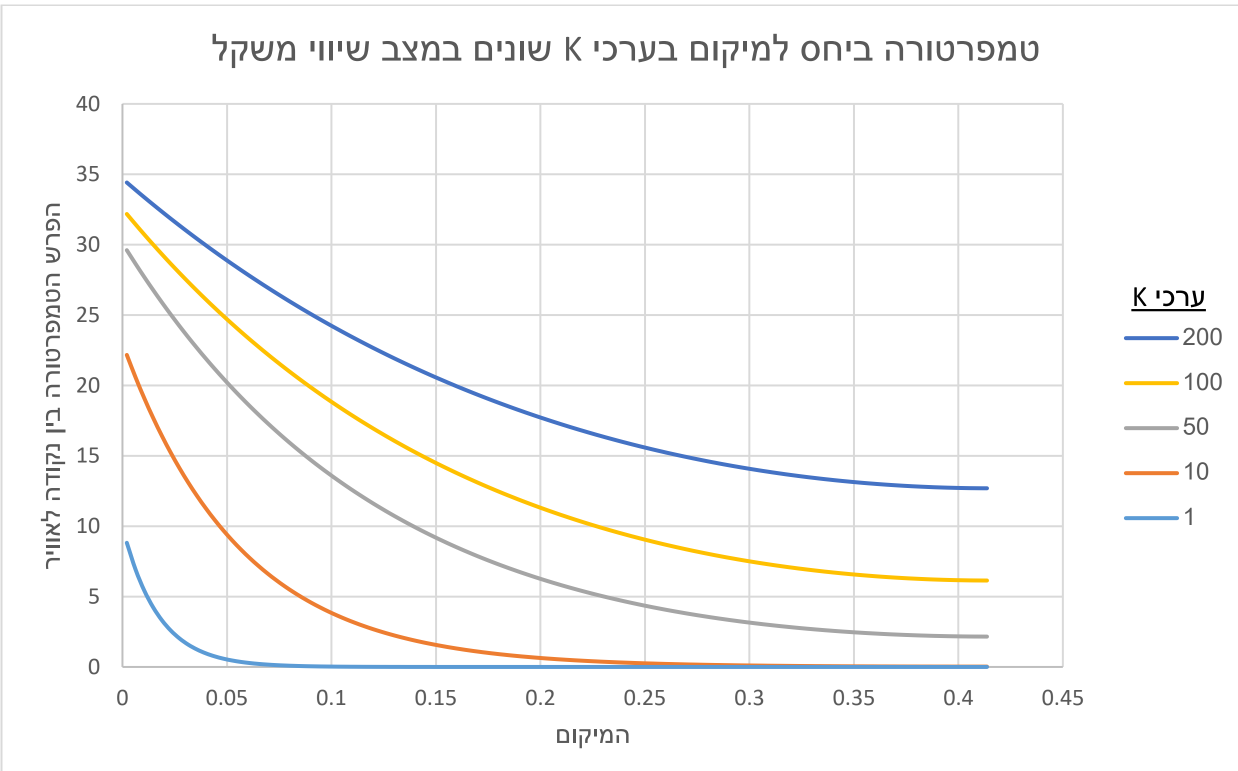
גודל זה מופיע בנוסחת מעבר חום על פי פורייה.

$$j = -k * \nabla T$$



גרף זה מציג את התפלגות הטמפרטורה ביחס למיקום בדקה 10 כאשר כל גרף, צבע, מהווה ערך של k שונה, שאר הפרמטרים למשל אורך המוט מסה המקדם h וכו׳ נשמרו אותו דבר.

ניתן לראות כי ככל שמקדם מוליכות החום של המוט גבוה יותר טמפרטורת המוט גדולה יותר ביחס למוט דומה רק בעל מוליכות חום נמוכה יותר. ככל שמוליכות החום במוט טובה יותר, כך הטמפרטורה בו תעלה מהר יותר וחלק גדול מהאנרגיה יגיע לאזורים הרחוקים בו ויעלה את הטמפרטורה בהם, כפי שרואים בגרף. בנוסף ניתן לראות כי צורת הגרפים שונה גם כן ; המוטות בעלי מוליכות החום הנמוכה יורדים בצורה דרסטית בהתחלה ולאחר מכן משתטחים, ואילו המוטות בעלי מוליכות החום הגבוה בעלי שיפוע נמוך יותר בהתחלה והטמפ׳ בהם עלתה בנקודות הרחוקות מן התנור.



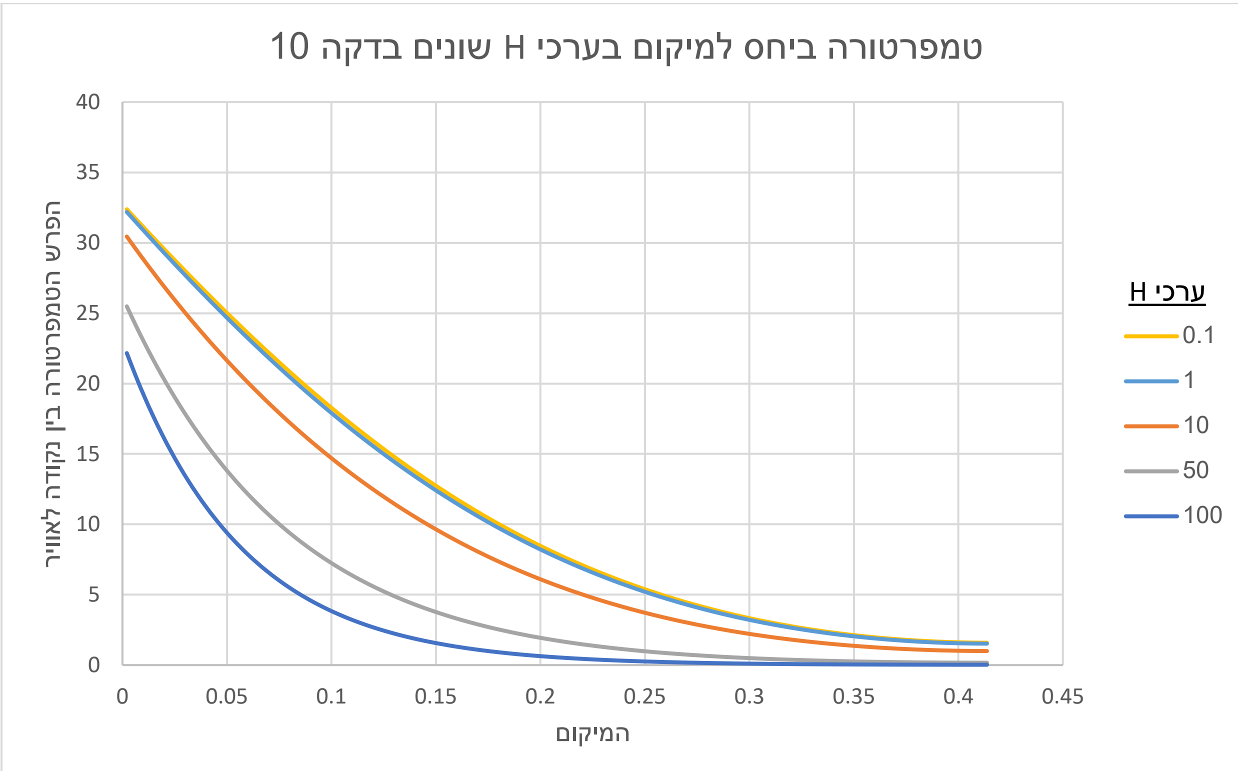
גם במצב שיווי משקל ניתן לראות תופעה דומה מתרחשת.

מסקנה זו עולה בקנה אחד עם האינטואיציה, כאשר למוט יש מקדם הולכת חום גבוה כך החום יעבור בתוכו במידה רבה יותר ויחמם גם את החלקים הרחוקים מן התנור לטמפרטורות גבוהות, לעומת מוט בכל מקדם הולכת חום נמוכה יותר.

<u>קבוע מעבר חום h</u>

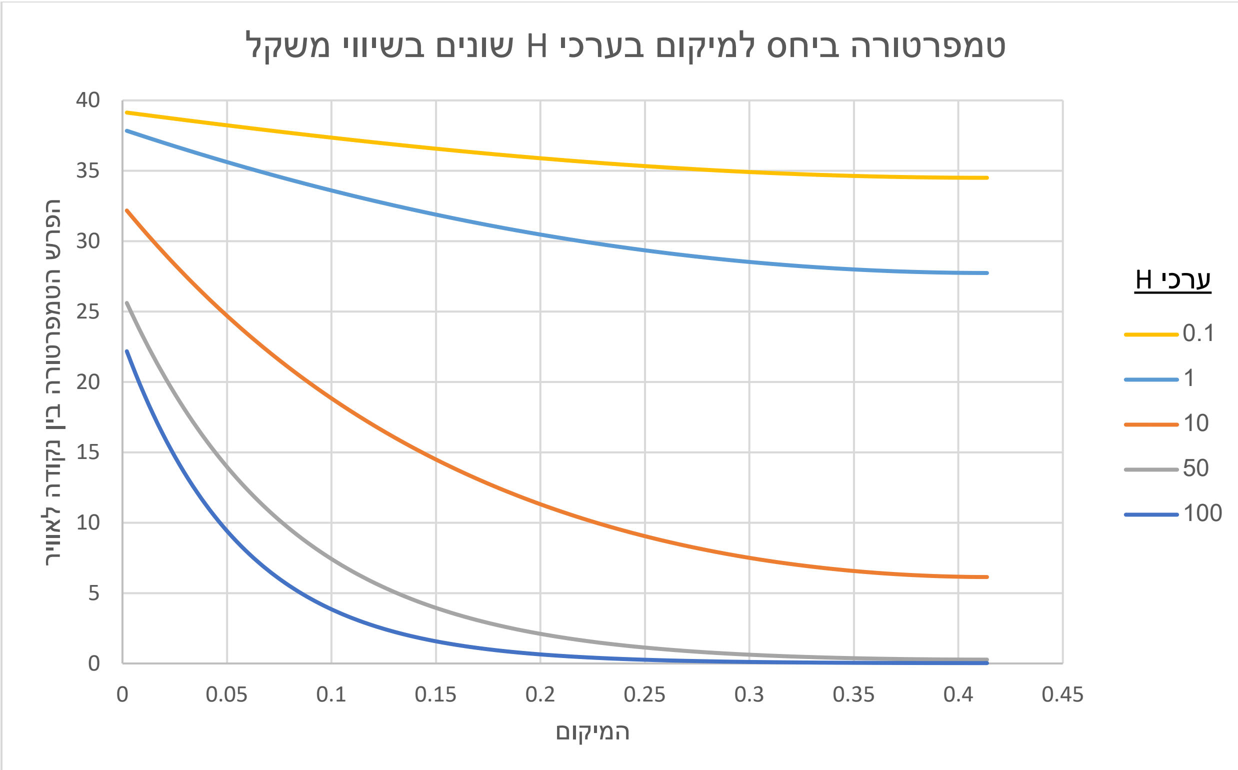
גודל זה מופיע בחוק הקירור של ניוטון.

$$\frac{dQ}{dt} = -h * A * \Delta T$$



גרף זה מציג את התפלגות הטמפרטורה ביחס למיקום בדקה 10 כאשר כל גרף, צבע, מהווה ערך שונה של h, שאר הפרמטרים למשל אורך המוט מסה המקדם k וכו׳ נשמרו אותו דבר.

ניתן לראות כי ככל שמקדם מעבר החום נמוך יותר טמפרטורת המוט גדולה יותר ביחס למוט דומה רק בעל מקדם גבוה. ניתן לראות כי צורת הגרפים שונה גם כן ; המוטות בעלי המקדמים הגבוהים יורדים בצורה דרסטית בהתחלה ולאחר מכן משתטחים, ואילו המוטות בעלי המקדמים הנמוכים בעלי שיפוע נמוך יותר בהתחלה. ככל שמקדם מעבר החום קטן יותר כך עובר פחות חום מן המוט לסביבה, ובכך גדלה כמות החום שעוברת בתוך המוט, לכן אנו רואים כי בקצה המוט הרחוק מן התנור הטמפרטורה גבוה יותר כאשר המקדם נמוך יותר.

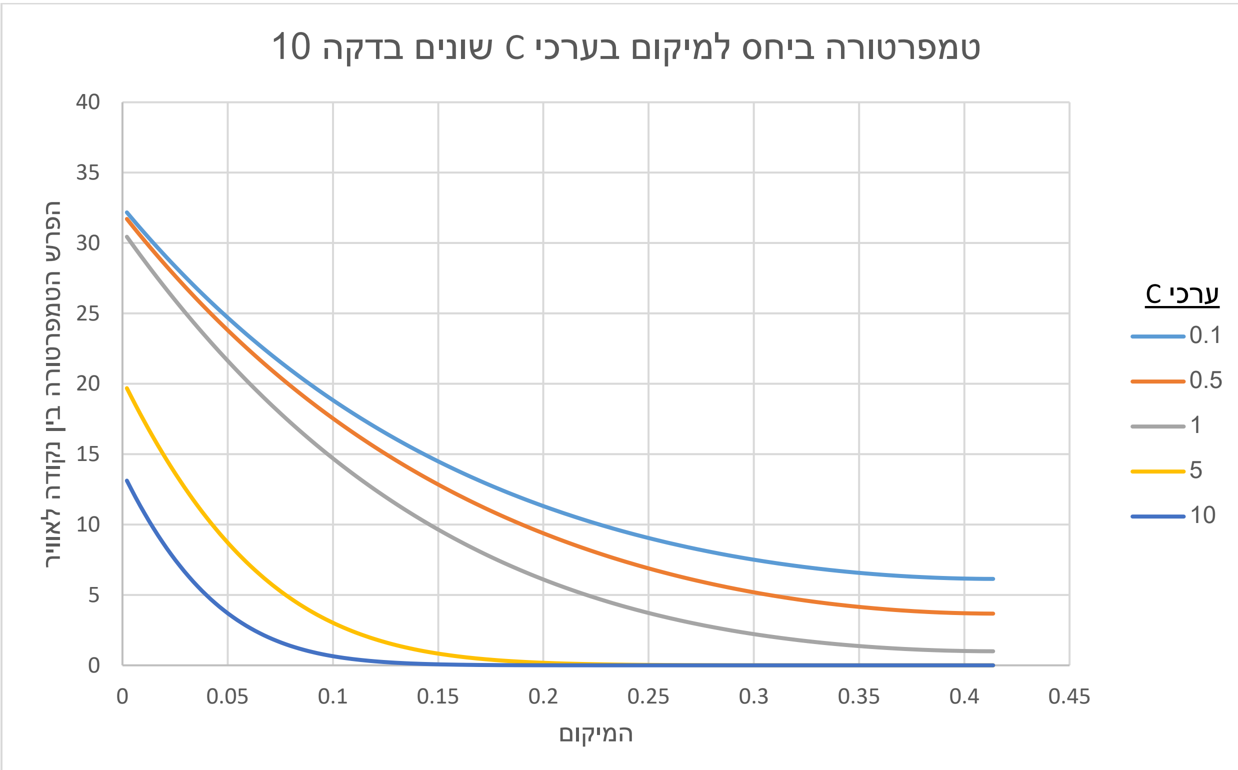


בגרף שיווי המשקל ניתן לראות הבדלים דרסטיים בין הערכים השונים. בגרפים בעלי מקדמים עם ערכים נמוכים הגרפים מאוד שטוחים, כלומר המוט מגיע כמעט לטמפרטורה אחידה, לעומת הגרפים בעלי המקדמים הגבוהים, שבהם יש הבדל מסיבי בין הטמפרטורה בתחילת המוט, ליד התנור, לבין הטמפרטורה בסוף המוט, שנמצא באוויר.

קיבול חום סגולי c

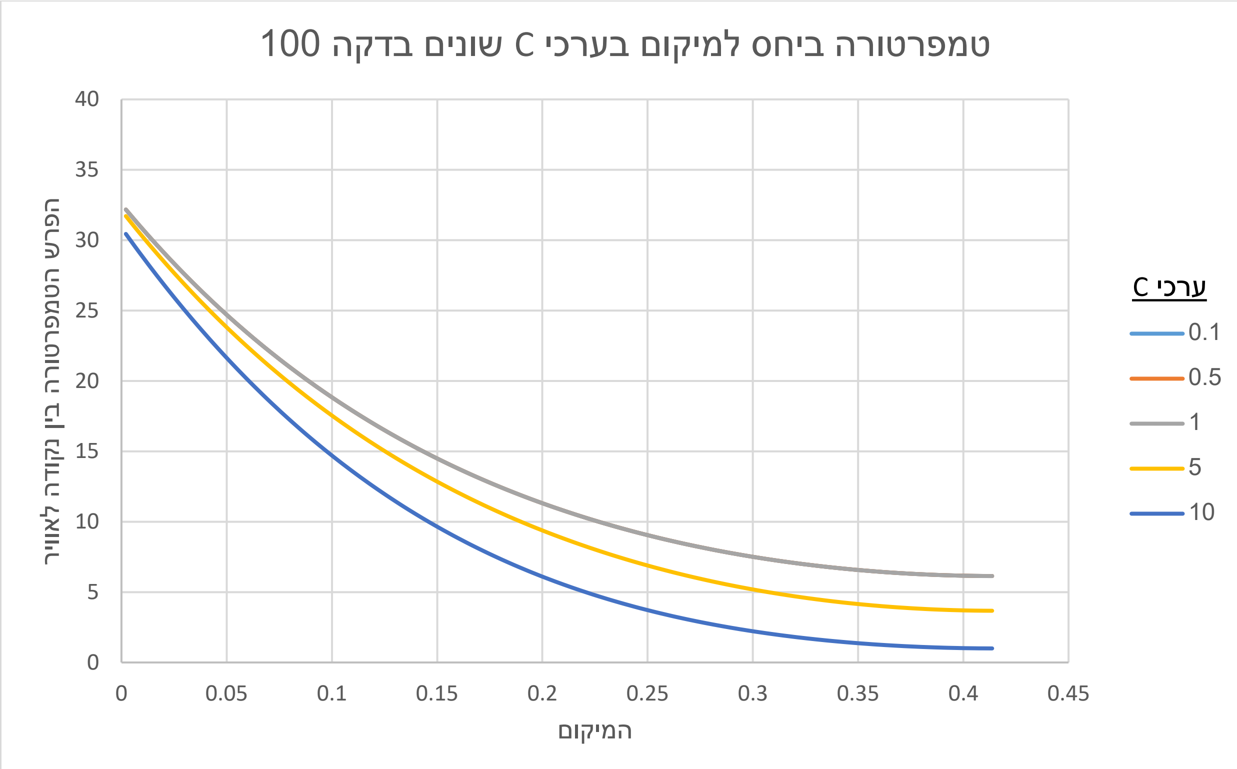
זהו מאפיין של חומרים שמגדיר את כמות האנרגיה שיש להשקיע בגוף בעל יחידת מסה על מנת להעלות את הטמפרטורה שלו ביחידת צלזיוס.

$$c = \frac{1}{m} * \frac{dQ}{dT}$$



גרף זה מציג את התפלגות הטמפרטורה ביחס למיקום בדקה 10 כאשר כל גרף, צבע, מהווה ערך שונה של c, שאר הפרמטרים למשל אורך המוט מסה המקדם k וכו׳ נשמרו אותו דבר.

ניתן לראות כי ככל שקיבול החום נמוך יותר טמפרטורת המוט גדולה יותר ביחס למוט דומה רק בעל קיבול חום גבוה יותר. ניתן לראות כי צורת הגרפים שונה גם כן ; המוטות בעלי המקדמים הגבוהים יורדים בצורה דרסטית בהתחלה ולאחר מכן משתטחים, ואילו המוטות בעלי המקדמים הנמוכים בעלי שיפוע נמוך יותר בהתחלה. כאשר קיבול החום הסגולי נמוך כך צריך פחות אנרגיה על מנת להעלות את הטמפרטורה במעלה, ולכן המוטות בעלי קיבול החום הסגולי הנמוך יתחממו מהר יותר לעומת המוטות בעלי המקדמים הגבוהים שזקוקים ליותר אנרגיה.



בגרף שיווי משקל קרה דבר הנראה מוזר בהתחלה, אך הגיוני כאשר מתעמקים בנושא. שלושה מן הגרפים התלכדו, שלושת הגרפים בעלי קיבול החום הנמוך ביותר ; 0.1, 0.5 ו-1 התלכדו לכדי גרף אחד, שנמצא בטמפרטורה גבוהה יותר מן המוטות האחרים. גילינו קודם לכן כי ניתן לאפיין את מצב שיווי המשקל במקדם M בלבד על פי המודל האנליטי לשיווי משקל, מאחר ולכל המוטות הללו יש את אותם ערכי k ו-h כך גם היחס ביניהם, שזהו מקדם M. כלומר המוטות יגיעו למצב שיווי משקל זהה, דבר זה מסביר מדוע התלכדו הגרפים, אך ניתן לראות כי לא כולם התלכדו אלה רק ה-3 בעלי המקדם הנמוך ביותר. זאת מאחר והמוטות בעלי קיבול החום הנמוך הגיעו לשיווי משקל מהר מאוד, מאחר והם זקוקים לפחות אנרגיה על מנת לעלות במעלת צלזיוס, ואילו המוטות בעלי קיבול החום הגבוה לא הגיעו לשיווי משקל גם לא לאחר מעל שעה וחצי מאחר והם זקוקים ליותר אנרגיה על מנת לעלות במעלה, כלומר הם צריכים להתחמם יותר זמן. מכאן אנו מסיקים כי קיבול החום לא משנה את התהליך שבו המוט מתחמם, אלה את הזמן שלוקח לו לבצע תהליך זה, ככל שקיבול החום הסגולי נמוך יותר כך התהליך יתבצע מהר יותר וההפך.

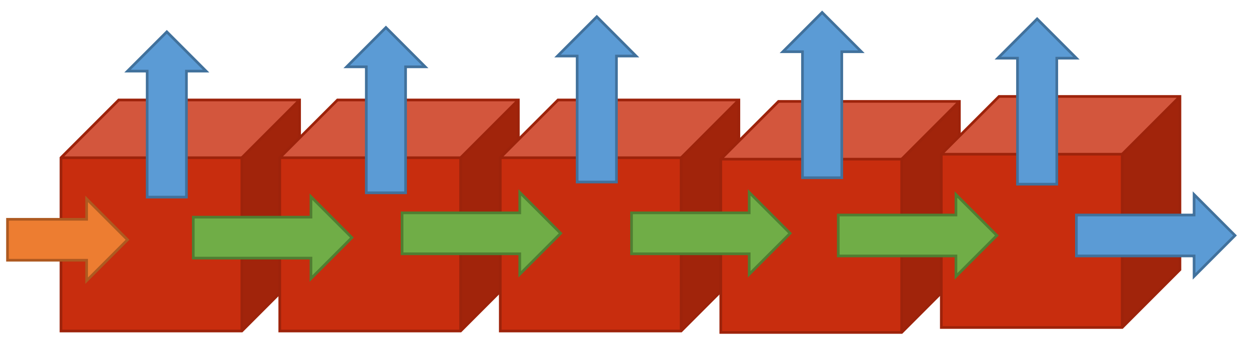
מודל ממוחשב

מודל נומרי

כדי למצוא את התפלגות הטמפרטורה במוט לפני הגעה לשיווי משקל, ואת התלות שלה בזמן פיתחנו מודל נומרי שפותר את הנוסחאות של חוק הקירור של ניוטון וחוק פורייה בשיטת אוילר.

בשיטת (קירוב) אוילר מוחלפות הנגזרות בהפרשים, כך ניתן לפתור נומרית את משוואות ניוטון ופורייה "צעד אחרי צעד" בזמן ובמקום, עבור צעדי זמן ומרחקים קטנים לאורך המוט.

חוק ניוטון לקירור מתאר את מעבר האנרגיה מגוף לסביבה אך בתנאי שהגוף בעל טמפרטורה אחידה. תנאי זה לא מתרחש בניסוי שלנו, הטמפרטורה לאורך מוט הפלדה שונה בכל נקודה ולכן חוק ניוטון לא מתאר את התופעה. על מנת שחוק ניוטון יתאים בניסוי שלנו החלטנו "לחלק" את המוט לחלקים קטנים שאנחנו מניחים כי יש להם טמפרטורה אחידה לאורכם, בעזרת חלוקה זו נוכל להשתמש בחוק ניוטון לקירור על כל אחד מגופים אלו בנפרד. הנחה זו לא בהכרח נכונה, ישנה התפלגות טמפרטורה לא אחידה לאורך כל גוף, אך במידה והחלקים קטנים מאוד, ניתן לצמצם את הפרש הטמפרטורה בין כל צד של החלק ובכך לצמצם את השגיאה.



בתחילת המודל כל החתכים נמצאים בטמפרטורה החדר.

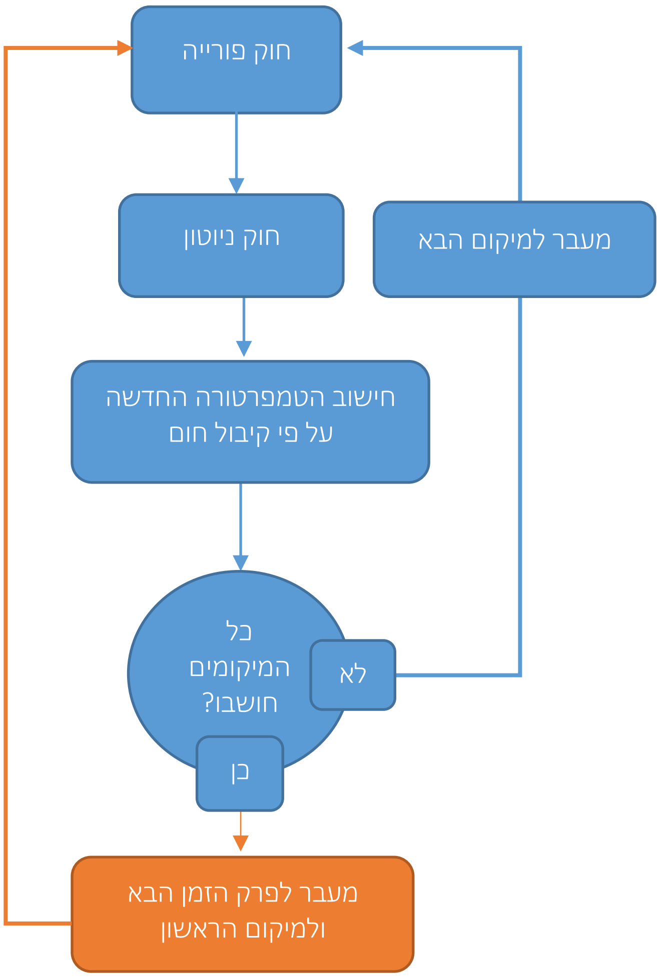
עבור כל חתך נחשב:

1. כמות האנרגיה הנכנסת מן החתך הקודם לו על פי חוק פורייה.
2. כמות האנרגיה שנאבדת אל האוויר על פי חוק הקירור של ניוטון.
3. השינוי בטמפרטורה על פי קיבול החום הסגולי של המוט ועל פי האנרגיה שחישבנו.

לאחר חישוב הטמפרטורה החדשה לחתך מסוים, עברנו לחתך הבא. לאחר חישוב הטמפרטורה עבור כל חתך במוט, עוברים לפרק הזמן הבא ולחתך הראשון, וחוזרים על התהליך.

את החישובים מבצעים לפרקי זמן קטנים בהנחה שבפרקי זמן אלו הטמפרטורה קבועה ולכן ניתן לבצע את החישובים האלו בקלות. במידה ונשמור על קפיצות קטנות בין פרקי הזמן ההנחה לא תהווה שגיאה גדולה מידי.

<u>תרשים סכמתי של הקוד</u>



<u>הנחות המודל:</u>

- טמפרטורה התנור קבועה ולא משתנה במשך הניסוי.
- המוט דומה לאורכו במאפייניו החיצונים והפנימיים – רדיוס, החומר ממנו עשוי ובמסה שלו.
- האוויר נשאר בטמפרטורה קבועה.

קוד המודל הנומרי

תחילה קבענו את הקבועים כמו מוליכות החום, אורך המוט וכו'.

מרבית הנתונים מדדנו, למשל אורך המוט, הקוטר וכו'. אך את k, h, וקיבול החום שמנו נתונים מספרות ומאמרים, נתונים אלה אינם תואמים למוט שלנו והם רק לבדיקה איכותית.

```
 Dt = 0.001        # דיוק אוילר
SectionAmount = 100       # כמות החתיכות

InOven = 0.08         # כמה מטרים בתוך התנור
Length = 0.5          # האורך הכולל של המוט
Diameter = 0.0125     # קוטר המוט

Mass = 171        # מסה בגרמים
SpecificHeatCapacity = 0.9       # קיבול החום ביחידות J / (g * k)

K = 100      # מוליכות החום של המוט
h = 10.6030125       # מקדם בנוסחת ניוטון

Toven = 47.6      # טמפ תנור בצלזיוס
Tair = 22.5       # טמפ האוויר בצלזיוס
```

בתוך לולאת הזמן, לפני לולאת החישוב, נחשב את השינוי בטמפרטורה של החלק הראשון שבתוך התנור, ישנו רק חימום על פי חוק פורייה.

```
while time < Untill:
     q = K * (Temp[0] - Toven) * (InOven * Perimeter + Area) # חוק פורייה
     Q[0] -= q * Dt # שמירה בזיכרון
```

בלולאת המיקום, שבתוך לולאת הזמן, נחשב את השינוי באנרגיה על פי חוק פורייה עבור כל חתך.

```
     for SectionNum in range(1, SectionAmount): # עבור כל חתך
          q = K * (Temp[SectionNum - 1] - Temp[SectionNum])
                                        * Area / SectionLength # חוק פורייה
          Q[SectionNum - 1] -= q  * Dt # שמירה בזיכרון
```

באותה לולאה נחשב את השינוי באנרגיה שיוצאת מן החתך אל האוויר על פי חוק ניוטון.

```
          q = H * (Temp[SectionNum] - Tair) * SectionLength * Perimeter # חוק ניוטון
          Q[SectionNum] -= q * Dt  # שמירה בזיכרון
```

בתוך לולאת הזמן, לאחר שחישבנו את השינוי בטמפרטורה של כל החתכים, נחשב את השינוי בטמפרטורה בלולאה נפרדת על פי קיבול החום הסגולי של המוט. את החלק הראשון בנפרד (כי הוא גדול יותר וכך בעל מסה גדולה ושונה משאר החתכים).

```
    Temp[0] += Q[0] / (SpecificHeatCapacity * InOven / SectionLength
                                                  * SectionMass) # קיבול חום סגולי
    Q[0] = 0 # שמירה בזיכרון
    for SectionNum in range(1, SectionAmount):
         Temp[SectionNum] += Q[SectionNum] /
                                   (SpecificHeatCapacity * SectionMass) # קיבול חום סגולי
         Q[SectionNum] = 0 # שמירה בזיכרון
```

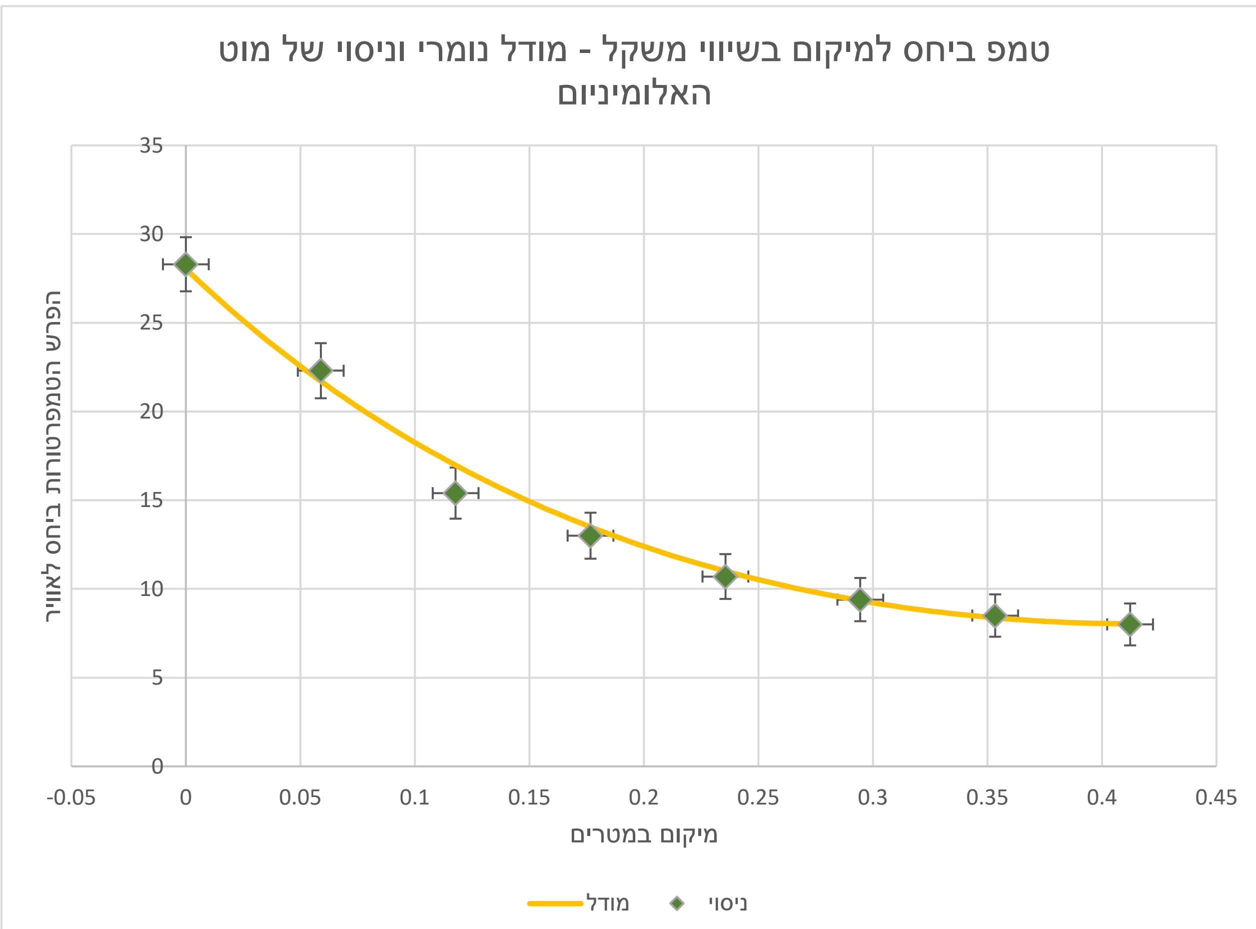
קוד המודל הנומרי המלא ניתן לראות בנספח מס' 3.

תוצאות המודל

על מנת להשוואת בין תוצאות המודל לתוצאות הניסוי הצבנו במודל הנומרי את אותם נתונים כמו בניסוי המעשי; גודל המוט, טמפרטורת התנור והאוויר, אשר כולם ניתן למדוד בקלות בדיוק רב ממערכת הניסוי. ערכי k ו-h הוצבו ע״פ קירוב לערכים אופייניים למתכות בספרות, אך היחס שביניהם נשמר כיחס שנמצא קודם לכן על ידי המשתנה M שנמצא על ידי ההתאמה בין הנוסחה לשיווי משקל ומודל המעשי. את מקדם c הצבנו על פי הספרות ללא התאמה מוקדמת, על כך נפרט בהמשך.

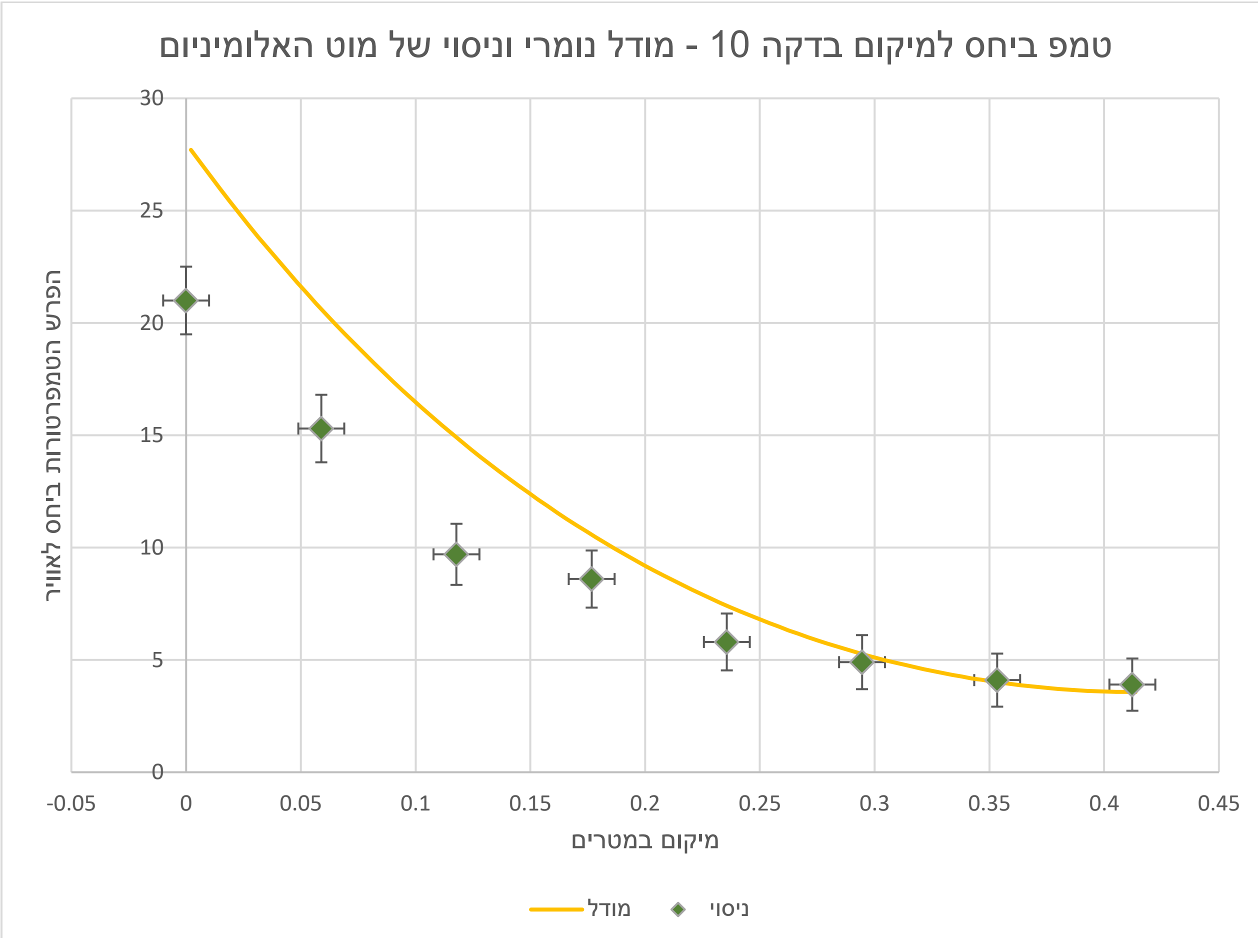
את הנתונים מהמודל יצאנו אל קובץ אקסל כל דקה, בדומה לניסוי המעשי, וביצענו השוואה בין השניים.

תחילה השוונו במצב שיווי המשקל.



כפי שניתן לראות ישנה התאמה טובה בין הניסוי למודל. כלומר המודל יכול לחשב את מצב השיווי משקל של הניסוי בצורה מדויקת. לתוצאה זו ציפינו, בפרק הפתרון האנליטי ראינו כי ניתן לבטא את מצב שיווי המשקל על ידי היחס בין המקדמים k ו-h בלבד ולא לפי ערכיהם. המודל הנומרי חישב את מצב השיווי משקל בצורה מדויקת כי שמרנו על היחס בין המקדמים כפי שמצאנו קודם לכן.

לאחר מכן השוונו בין תוצאות המודל והניסוי בזמנים שונים.



ניתן לראות כי ההתאמה בין שני הגרפים לא טובה.

המודל מתאר את הטמפרטורה במצב לא שיווי משקל בצורה לא מדויקת, אנחנו סבורים כי אי ההתאמה נובע מכך שהוצבו ערכים לא מדוייקים של המקדמים k, h ו-c.

h ו-k הוצבו בקירוב לערכים אופייניים למתכות בספרות ונשמר היחס ביניהם כפי שמצאנו קודם לכן במודל לחישוב M, אך אלו לא ערכם "האמיתי". בנוסף אנחנו לא יודעים את ערך הגודל c, קיבול החום של המוט, והוא נקבע על פי הספרות ומקורות, אך מקורות אלו מניבים טווח אפשרויות רב, ולכן הערך שהוצב ככל הנראה לא נכון.

מאחר ויש לנו את היחס שבין k ו-h יש לנו צורך לבדוק שני משתנים : c ו-k (h ידוע במידה וידוע k על פי היחס M), בפרק הבא נראה את הניסיון למציאת c ו-k.

ניסיונות למציאת ערכי המקדמים

בניסוי שלנו ישנם שלושה גדלים מרכזיים שנמצאים בנוסחאות המתמטיות לתיאור מעברי החום והשינוי באנרגיה של המערכת, מקדם הולכת החום k בחוק פורייה, מקדם מעבר החום h בחוק ניוטון וקיבול החום הסגולי c. בעזרת המודל למציאת M מצאנו את היחס שבין h ל-k. אך אין לנו קשר אל המקדם c, קיבול החום הסגולי. אנחנו מאמינים כי הפתרון לבעיה שהוצגה בפרק הקודם, אי ההתאמה בין המודל הנומרי לניסוי, הוא מציאת היחס בין k ל-c או מציאת המקדמים.

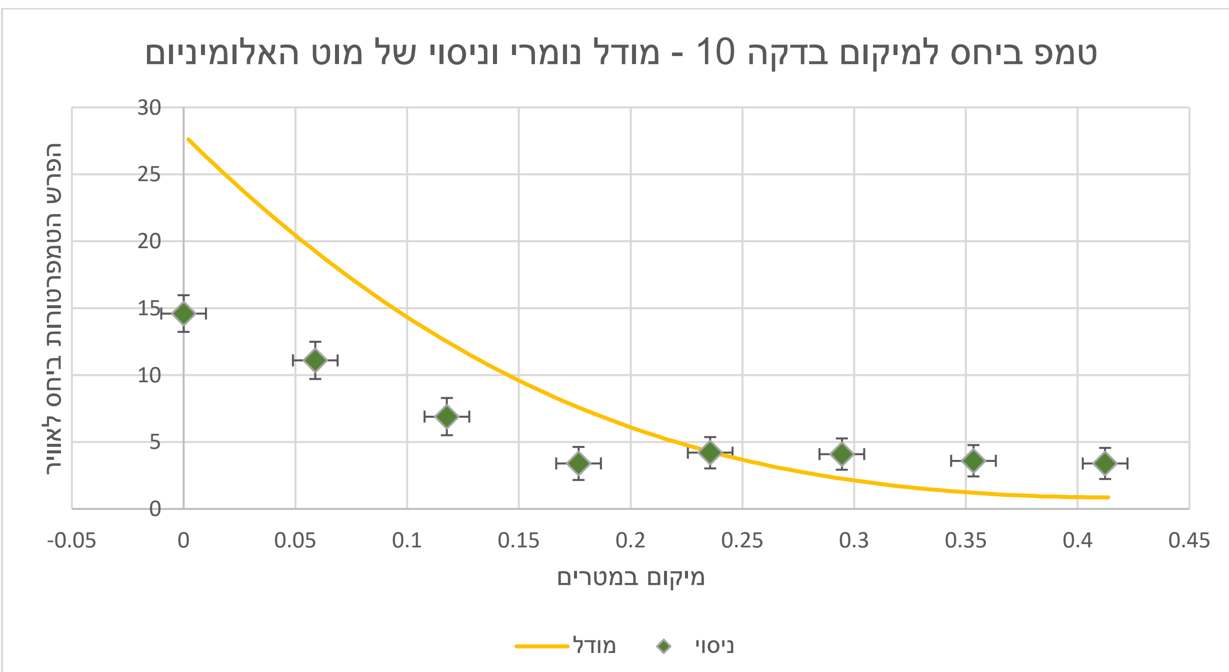
תחילה ניסינו למצוא את היחס שבין k ל-c. על מנת למצוא אותו נעשה דבר דומה למה שביצענו במודל לחישוב M רק שבמקום להשתמש במודל האנליטי לשיווי משקל נשווה את הניסוי למודל הנומרי: נשאיר את k קבוע ונציב ערכי c שונים, נמצא את ה"מרחקים" המינימליים שבין תוצאות המודל הנומרי לתוצאות הניסוי, את המרחקים נגדיר באותה צורה, הפרש התוצאות בריבוע.

$$\chi_{1\ \text{רמת הדיוק לחתיכה אחת}} = \left(\tilde{T}(x)_{\text{מודל הנומרי}} - T[x]_{\text{תוצאה ניסיונית}}\right)^2$$

$$\chi_{t\ \text{סך הדיוק}} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \cdots$$

נחפש את ערך c שמניב את הדיוק הטוב ביותר, כלומר χ_t הנמוך ביותר.

לאחר שנמצא הצבנו אותו בחזרה במודל הנומרי לבדיקת התוצאות.



ניתן לראות כי הגרף לא מציג את התופעה בצורה מדויקת, אנחנו סבורים כי אי ההתאמה נגרם מאי הידיעה של ערכי המקדמים, אנחנו יודעים רק את היחס ביניהם ולא את ערכם.

לכן ניסינו לבצע חישוב נוסף, במידה וידוע לנו הספק התנור, כמות האנרגיה שהתנור מפיק, בהנחה שהאנרגיה הזו מועברת במלואה למוט, ניתן להגיד כי כמות האנרגיה הנכנסת למוט על ידי חוק פורייה שווה להספק התנור:

כאשר P – הספק התנור.

$$\mathrm{P} = -\mathrm{k} * \mathrm{A} * \left.\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dx}}\right|_{x=0}$$

נשתמש בנוסחה להתפלגות הטמפרטורה בשיווי משקל שמצאנו בפרק הנוסחה האנליטית.

$$\widetilde{\mathrm{T}}(\mathrm{x}) = \widetilde{\mathrm{T}}_1 \frac{\cosh\left(\mathrm{M}(\mathrm{L}-\mathrm{x})\right) + \frac{\mathrm{M}^2 * \mathrm{A}}{\mathrm{p}} * \sinh\left(\mathrm{M}(\mathrm{L}-\mathrm{x})\right)}{\cosh(\mathrm{ML}) + \frac{\mathrm{M}^2 * \mathrm{A}}{\mathrm{p}} * \sinh(\mathrm{ML})}$$

נגזור אותה ונציב x=0.

$$\left.\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dx}}\right|_{\mathrm{x}=0} = -\mathrm{m} * \mathrm{T}_1 * \frac{\mathrm{p} * \sinh(\mathrm{ML}) + \mathrm{a} * \mathrm{M}^2 * \cosh(\mathrm{ML})}{\mathrm{a} * \mathrm{M}^2 * \sinh(\mathrm{ML}) + \mathrm{p} * \cosh(\mathrm{ML})}$$

נציב אותה.

$$\mathrm{P} = -\mathrm{k} * \mathrm{A} * -\mathrm{M} * \mathrm{T}_1 * \frac{\mathrm{p} * \sinh(\mathrm{ML}) + \mathrm{a} * \mathrm{M}^2 * \cosh(\mathrm{ML})}{\mathrm{a} * \mathrm{M}^2 * \sinh(\mathrm{ML}) + \mathrm{p} * \cosh(\mathrm{ML})}$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{k} * \mathrm{A} * \mathrm{M} * \mathrm{T}_1 * \frac{\mathrm{p} * \sinh(\mathrm{ML}) + \mathrm{a} * \mathrm{M}^2 * \cosh(\mathrm{ML})}{\mathrm{a} * \mathrm{M}^2 * \sinh(\mathrm{ML}) + \mathrm{p} * \cosh(\mathrm{ML})}$$

נסדר את המשוואה למציאת k.

$$\mathrm{k} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A} * \mathrm{M} * \mathrm{T}_1} * \frac{\mathrm{a} * \mathrm{M}^2 * \sinh(\mathrm{ML}) + \mathrm{p} * \cosh(\mathrm{ML})}{\mathrm{p} * \sinh(\mathrm{ML}) + \mathrm{a} * \mathrm{M}^2 * \cosh(\mathrm{ML})}$$

כאשר P זהו ההספק, p זהו ההיקף ו-a שטח החתך.

בנוסחה זו מצאנו כל הפרמטרים שאינם k ידועים, מלבד הספק התנור. על מנת למצוא את הספק התנור ניסינו למצוא באינטרנט את דגם התנור, אך ללא הצלחה. לאחר מכן החלטנו לנסות למצוא סדר הגודל של ההספק

על פי הספקים של תנורים דומים באינטרנט. מצאנו כי ההספק הממוצע הינו בערך 200 כאשר הספקי התנורים נעו בין 100 ל-300 וואט.

כאשר נציב את הנתונים של מוט הפלדה לדוגמא, נמצא כי k שווה בערך 5000, נתון זה לא עולה בקנה אחד עם הנתונים שבמקורות ובאינטרנט. החלטנו על כן לבצע הנחה נוספת: ייתכן כי ההספק במקורות לתנורים הינו ההספק בטמפרטורה מקסימלית, והתנור שלנו לא חומם לטמפרטורה המקסימלית. בהנחה שההספק והטמפרטורה שהתנור מפיק נמצאים ביחס ישר, ניתן להגדיר הספק למעלה אחת שהוא היחס בין הטמפרטורה המקסימלית שהתנור מפיק, שנמצא גם כן במקורות, להספק התנור, ולכפול יחס זה בטמפרטורת התנור שלנו למציאת ההספק שלו

$$\frac{\mathrm{P_{max}}}{\mathrm{T_{max}}} * \mathrm{T}_{\text{ניסוי}} = \mathrm{P}_{\text{ניסוי}}$$

על פי תנורים דומים וממוצע ביניהם, הערכנו כי הטמפרטורה המקסימלית הינה 1000 מעלות צלזיוס, וההספק המקסימלי, כפי שכבר פורט, הינו 100. נציב במשוואה ונמצא כי ההספק התנור הינו 6 וואט בטמפרטורה שלה כיוונו. נציב זאת במשוואה למציאת k ונחשב כי ערכו שווה ל-150, נתון שלא עולה בקנה אחד עם הנתונים שמצאנו למוט הפלדה שהיו בין 100 ל-50, אך קרוב הרבה יותר מהתוצאה הקודמת.

גם בדרך זו לא התקבלה התאמה טובה בין תוצאות הניסוי למודל הנומרי, זאת על אף היכולת שלה לספק לנו את ערך k בנפרד. ללא ידיעת ההספק של התנור הספציפי שבו השתמשנו לא נוכל לחשב את ערכו של k וממנו גם את h בצורה מדויקת ואמינה. יתכן גם שחוסר ההתאמה בין המודל הנומרי לתוצאות הניסוי נובע מגורמים נוספים, כגון שגיאות נומריות מצטברות במהלך החישוב. ניתן יהיה לבדוק זאת לאחר מציאת ערכי k, h ו $c-$ עבור המערכת הניסיונית, בשיטות שתוארו לעיל.

סיכום

בניסוי זה שמתוך פרויקט פיזיקה מחקרית עבדנו תקופה ארוכה של שנה וחצי, במהלכה ביצענו ולמדנו דברים רבים בפיזיקה, במתמטיקה ובעיקר בתחום המחקר שלנו – תרמודינמיקה ומעבר חום. למדנו את המאפיינים של מעבר החום והתפלגות הטמפרטורה: הטמפרטורה בגוף לא אחידה, והחום לא עובר בתוכו באופן מידי, אלה מתפשט באיטיות. כאשר קצב ההתפשטות יורד ככל שמתרחקים מן מקור החום, מה שיוצר גרף טמפרטורה יורד בצורה לא ליניארית. בנוסף למדנו על המאפיינים המתמטיים של מעבר החום: חוק פורייה וחוק הקירור של ניוטון, והשתמשנו גם במאפיין קיבול החום הסגולי המקשר בין חום לשינוי טמפרטורה בגוף. למדנו כי מעבר החום תלוי באופן ישר בהפרש הטמפרטורה, וישנם מקדמים שונים למעברי חום שונים; בתוך המוט ומחוצה לו. במהלך הפרויקט פיתחנו משוואה דיפרנציאלית של התפלגות הטמפרטורה, מצאנו תנאי שפה, פתרון אנליטי למצב שיווי משקל, בנינו מודל נומרי ואף הצלחנו לבצע את הניסוי בשגיאות קטנות יחסית, כ-10%, מה שהניב תוצאות בעלות אמינות גבוהה.

פנינו להשוות בין תוצאות הניסוי שערכנו לבין המודלים שפיתחנו. בהשוואה זו קיים קושי מהותי – איננו יודעים את ערכי מקדמי הולכת החום k ו – h ואת קיבול החום הסגולי c של המוט, ולא ניתן למצוא להם ערכים אמינים בספרות ובאינטרנט מאחר והמוט עשוי סגסוגת שמרכיביה והיחס ביניהם אינם ידועים במדויק.

עם זאת, במודל שפיתחנו לשיווי משקל התלות היא בפרמטר אחד – היחס בין k ו- h (שסומן M) ולכן יכולנו לבצע התאמה בין המודל האנליטי לבין תוצאות הניסוי בשיווי משקל ומתוכה למצוא את ערך M של המוט (באמצעות שיטת הריבועים המינימליים). לאחר מציאת M , ההתאמה בין תוצאות הניסוי למודל האנליטי הייתה טובה מאוד ($R^2 = 0.9978$).

לאחר מכן ניסינו להשוות בין תוצאות המודל הנומרי לניסוי, כדי לבדוק את ההתאמה גם מחוץ לשיווי משקל. כאן נתקלנו בקושי מאחר והמודל הנומרי תלוי בפרמטרים k, h, c בנפרד, ולא ביחס ביניהם.

היחס בין h ל k אמנם ידוע מתוך ההתאמה שביצענו למודל האנליטי, אך עדיין נותרנו עם שני משתנים לא ידועים, שאת ערכיהם לקחנו כערכים מקורבים מהספרות והאינטרנט.

בשיווי משקל התקבלה התאמה טובה מאוד בין המודל הנומרי לתוצאות הניסיוניות. זה לא מפתיע מאחר ובמצב שיווי משקל רק היחס בין k ו- h שהוא ידוע אמור להשפיע.

לפני הגעה לשיווי משקל ההתאמה שקבלנו אינה טובה. ניסינו להתגבר על כך ע״י שימוש במקדם אחד מהספרות והתאמת המקדם השני ע״י שיטת הריבועים המינימליים, אך לא קבלנו תוצאות טובות. כך גם כשניסינו להשתמש בהספק התנור כדי למצוא את k בנפרד. לסיכום, המודל הנומרי הניב תוצאות לא מדויקות למרות שדרך הפעולה שלו נכונה לדעתנו. נדרשת בחינה נוספת שלו וניסיון למציאת הערכים של מקדמי הולכת החום וקיבול החום הסגולי.

אנחנו מאמינים כי ישנם דרכים למציאת המקדמים באמצעות ניסויים שונים, למשל ע״י ציפוי המוט בחומר מבודד תרמי כדי להקטין את h קרוב לאפס, ומציאת k מתוך התפלגות הטמפרטורה אז, או ניסוי שמטרתו מדידת קיבול החום של המוט באופן בלתי תלוי בהולכת החום שלו.

לצערנו אין באפשרותנו להמשיך את המחקר, אילו יכולנו להמשיך היינו ממשיכים את המחקר על ידי מציאת היחס למקדם השלישי, מציאת ערכם של המקדמים וכן היינו משפרים את שגיאות המדידה.

שיפור שגיאות המדידה – למרות ששגיאות המדידה שלנו קטנות יחסית, כ-10%, עדיין ישנו מקום לשיפור והוא גם פשוט יחסית. לדוגמא, שימוש במדי טמפרטורה מכוילים ומדויקים יותר, ושמירה על טמפרטורה קבועה ואחידה של האוויר שמסביב למוט.

על אף הבעיות הרבות שהיו במהלך הניסוי הצלחנו להגיע לתוצאות עם שגיאה קטנה והתאמה טובה במצב שיווי המשקל. והחלק החשוב ביותר, למדנו הרבה מן הניסוי והפרויקט, על כך ניתן לקרוא בפרק הרפלקציה.

רפלקציה

נועם כהן

פרויקט פיזיקה מחקרית היה הפרויקט הגדול ביותר שעשיתי אי פעם, פרויקט של שנה וחצי אשר לא דומה בשום צורה למה שהייתי רגיל בבית הספר; צורת הלמידה, החומר הלימודי ורמת הקושי שונה לחלוטין.
במהלך השנה וחצי למדתי הרבה בתחום הניסוי ונושא המחקר, למדתי איך "נראית" תופעת מעבר החום, ממה היא נגרמת, מאפיינים שלה ועוד דברים רבים. אך לא רק בתחום המחקר החכמתי, במהלך המחקר התנסינו בנושאים שחורגים מתחום הלימודים הבית ספרי למשל משוואות דיפרנציאליות, הגדרות פיזיקאליות, חוקי התרמודינמיקה, איך לכתוב ולהסביר ברמה גבוה, עיבוד מידע, הערכת שגיאות ועוד דברים רבים שלא הייתי לומד מחוץ למסגרת פיזיקה מחקרית. לאחר סיום הפרויקט אני יכול להגיד כי למדתי יותר ממה שציפיתי כשהתחלתי אותו, ואני שמח שהצטרפתי לתוכנית פיזיקה מחקרית.

מקסים קסיאננקו

התוכנית פיזיקה מחקרית הייתה התוכנית המשמעותית בחיי, במהלך כמעט שנתיים המנחים העבירו לנו חומר בפיזיקה שלא נלמד בבית הספר ונתנו לנו ראיה נוספת לנושאים שונים בתחום הפיזיקה. צורת הלימוד בתוכנית לא דומה לזו שבתיכון, היא כוללת בתוכה לימוד עצמי של חלק מהחומר בעזרת סיוע של המנחים, מה שמעצים את ההתעניינות בנושא החקר. במהלך שנים אלו למדתי להשתמש בכלים שונים למחקר תופעות בפיזיקה אשר לא הייתי לומד בתחום הבית ספרי כמו משוואות דיפרנציאליות, תנאי שפה, אנטרופיה, כתיבת דוח מעבדה ברמה גבוהה, עיבוד מידע מנתוני הניסוי, שימוש באקסל, הערכת שגיאות ועוד דברים רבים.
בתחום המחקר למדתי כיצד מתרחשת תופעת מעבר החום בחומר, במה היא תלויה ועוד מאפיינים רבים של התופעה.
לסיום אני יכול לומר שלמדתי דברים רבים מהתוכנית שלא הייתי יכול ללמוד במסגרת התיכון.

ביבליוגרפיה

מאמר The Difference between Convection & Advection Heat Transfers מהאתר sciencing שנכתב על ידי Lee Johnson בתאריך 29 למאי 2020.

https://sciencing.com/difference-convection-advection-heat-transfers-8479535.html

מאמר The Thermodynamic Identity מהאתר HyperPhysics.

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/thermo/therid.html#c1

שיעור 18.2 - Heat Transfer From a Fin של אוניברסיטת MIT.

https://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/thermodynamics/notes/node128.html

מאמר Heat transfer through fins מהאתר Gate Academy.

http://thegateacademy.com/files/wppdf/Heat-transfer-through-fins.pdf

שיעור 222 הערות של אוניברסיטת Emory.

http://www.physics.emory.edu/faculty/brody/Advanced%20Lab/phys%20222%20lecture%20notes.pdf

עמוד Thermal Conductivity of selected Materials and Gases של אתר Engineering ToolBox.

https://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-d_429.html

עמוד Heat transfer באתר Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_transfer

עמוד Thermal conduction באתר Wikipedia.

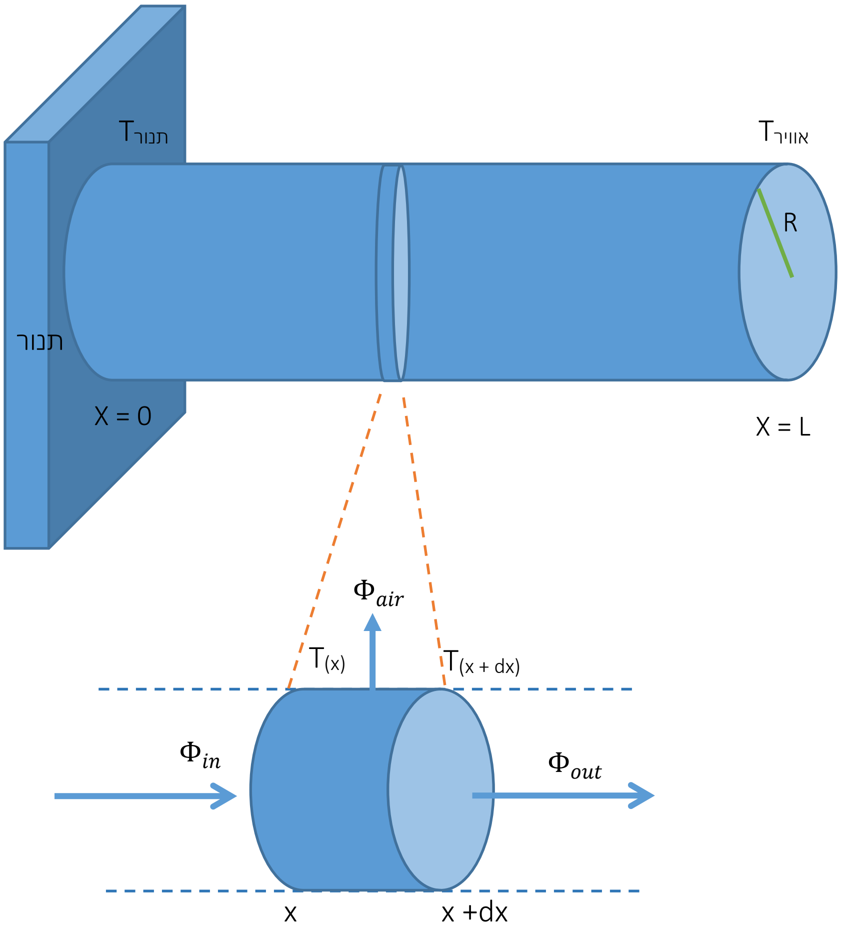
https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conduction

עמוד Newton's law of cooling באתר Wikipedia.

https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_cooling

נספחים

<u>נספח מס׳ 1 – פתרון אנליטי ראשון:</u>



לפתרון הנוסחה האנליטית נמשיך מהנוסחה הכללית שהגענו אליה.

$$\tilde{T} = C_1 * e^{Mx} + C_2 * e^{-Mx}$$

C_1 הוא קבוע שיש למצוא אותו, בדומה גם C_2.

על מנת למצוא אותם נשתמש בשני תנאי שפה (boundary conditions).

האחד, בקצה המוט שנמצא בתנור, ניתן להגיד כי טמפרטורה המוט במצב שיווי המשקל שווה לטמפרטורה התנור.

כלומר הפרש הטמפרטורה בקצה המוט שווה להפרש הטמפרטורה בין התנור לאוויר.

$$\tilde{T}(0) = T_{\text{תנור}} - T_{\text{אוויר}}$$

כאשר שני אלו הם ידועים וניתן למדוד אותם, נסמן את ההפרש הנ״ל כ-$\tilde{T}_1$.

$$\tilde{T}_1 = T_{\text{תנור}} - T_{\text{אוויר}} = \tilde{T}(0)$$

המקרה השני הינו שבקצה המוט השני, עם האוויר, טמפרטורה המוט היא קרובה מאוד לטמפרטורה האוויר.

כלומר כאשר המיקום שווה ל-L, אורך המוט.

$$\tilde{T}(L) = T_{\text{אוויר}} - T_{\text{אוויר}} = 0$$

נוכל לחשב בעזרת מקרים אלו את C_1 ו-C_2.

נתחיל בתנאי השפה השני.

$$0 = C_1 * e^{ML} + C_2 * e^{-ML}$$

$$C_2 * e^{-ML} = -C_1 * e^{ML}$$

$$C_2 * e^{-ML} * e^{ML} = -C_1 * e^{ML} * e^{ML}$$

$$C_2 = -C_1 * e^{2ML}$$

כעת נשתמש בתנאי השפה הראשון.

$$\widetilde{T}(0) = C_1 * e^{M*0} + C_2 * e^{-M*0} = \widetilde{T}_1$$

$$\widetilde{T}_1 = C_1 + C_2$$

נציב את המשוואה שפיתחנו מתנאי השפה הראשון במשוואה זו.

$$\widetilde{T}_1 = C_1 - C_1 * e^{2ML}$$

$$\widetilde{T}_1 = C_1 * (1 - e^{2ML})$$

$$C_1 = \frac{\widetilde{T}_1}{(1 - e^{2ML})}$$

$$C_1 = \frac{\widetilde{T}_1}{(1 - e^{2mL})} * \frac{e^{-ML}}{e^{-ML}}$$

$$C_1 = \frac{\widetilde{T}_1 * e^{-ML}}{e^{-ML} - e^{ML}}$$

$$C_1 = -\frac{\widetilde{T}_1 * e^{-ML}}{e^{ML} - e^{-ML}}$$

נשתמש בהגדרה של sinh.

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$2 * \sinh(x) = e^{x} - e^{-x}$$

נוכל להציב

$$C_1 = \frac{-\widetilde{T}_1 * e^{-ML}}{2 * \sinh(ML)}$$

כעת נמצא את C_2 על ידי הצבה פשוטה במשוואה שפיתחנו מתנאי השפה הראשון.

$$C_2 = -\frac{-\widetilde{T}_1 * e^{-ML}}{2 * \sinh(ML)} * e^{2ML}$$

$$C_2 = \frac{\widetilde{T}_1 * e^{ML}}{2 * \sinh(ML)}$$

נגיע לתוצאה הסופית של המקדמים.

$$C_1 = \frac{-\widetilde{T}_1 * e^{-ML}}{2 * \sinh(ML)}$$

$$C_2 = \frac{\widetilde{T}_1 * e^{ML}}{2 * \sinh(ML)}$$

נציב זאת במשוואה המקורית למציאת המשוואה הכללית.

$$\widetilde{T}(x) = \frac{-\widetilde{T}_1 * e^{-ML}}{2 * \sinh(ML)} * e^{mx} + \frac{\widetilde{T}_1 * e^{ML}}{2 * \sinh(ML)} * e^{-Mx}$$

$$\widetilde{T}(x) = \frac{-\widetilde{T}_1 * e^{-ML} * e^{Mx} + \widetilde{T}_1 * e^{ML} * e^{-Mx}}{2 * \sinh(ML)}$$

$$\widetilde{T}(x) = \frac{\widetilde{T}_1 * (-e^{-ML} * e^{Mx} + e^{ML} * e^{-Mx})}{2 * \sinh(ML)}$$

$$\widetilde{T}(x) = \frac{\widetilde{T}_1 * (-e^{-ML+Mx} + e^{ML-Mx})}{2 * \sinh(ML)}$$

$$\widetilde{T}(x) = \frac{\widetilde{T}_1 * \left(-e^{-M(L-x)} + e^{M(L-x)}\right)}{2 * \sinh(ML)}$$

$$\widetilde{T}(x) = \frac{\widetilde{T}_1 * \left(e^{M(L-x)} - e^{-M(L-x)}\right)}{2 * \sinh(ML)}$$

נוכל להשתמש שוב בהגדרה של sinh

$$\widetilde{T} = \frac{\widetilde{T}_1 * \sinh(M(L - x))}{\sinh(ML)}$$

$$m^2 = \frac{h * P}{A * k}$$

זוהי המשוואה הסופית אשר מתארת את הפרש הטמפרטורה של מיקום מסוים ביחס לטמפרטורה האוויר במצב שיווי המשקל.

נספח מס' 2 – פתרון אנליטי שני :

בדומה לנוסחה הראשונה נגיע לנוסחה הכללית.

$$\widetilde{T}(x) = C_1 * e^{mx} + C_2 * e^{-mx}$$

ונשתמש באותו תנאי שפה ראשון כמו בנוסחה האנליטית הראשונה.

בקצה המוט שנמצא בתנור, ניתן להגיד כי טמפרטורה המוט במצב שיווי המשקל שווה לטמפרטורה התנור.

$$\widetilde{T}(0) = T_{\text{תנור}} - T_{\text{אוויר}}$$

כאשר שני אלו הם ידועים וניתן למדוד אותם, נסמן את ההפרש הנ"ל כ-$\widetilde{T}_1$.

$$T_{\text{תנור}} - T_{\text{אוויר}} = \widetilde{T}_1$$

אך בתנאי השפה השני נשתמש בהנחה מדויקת יותר, בקצה המוט, כמות החום שעובר בתוך המוט שווה לכמות החום שיוצא ממנו מקצהו הסופי, נשתמש בחוק פורייה ובחוק ניוטון כדי לבטא את מעברי החום הללו.

$$(\text{פורייה})_{x=L} = (\text{ניוטון})_{x=L}$$

$$-k * \left.\frac{d\widetilde{T}}{dx}\right|_L = h * \widetilde{T}(L)$$

ניתן לפתור את המשוואה בעזרת מתמטיקה פשוטה שנציג כעת

מההנחה הראשונה נציב x=0 ואת הטמפרטורה ל$\widetilde{T}_1$.

$$\widetilde{T}(0) = C_1 * e^{m*0} + C_2 * e^{-m*0} = \widetilde{T}_1$$

$$C_1 + C_2 = \widetilde{T}_1$$

$$C_2 = \widetilde{T}_1 - C_1$$

כעת נשתמש בהנחה השנייה

$$-k * \left.\frac{d\widetilde{T}}{dx}\right|_L = h * \widetilde{T}(L)$$

באגף שמאל נגזור את המשוואה הכללית שמצאנו

$$\tilde{T}(x) = C_1 * e^{mx} + C_2 * e^{-mx}$$

$$\frac{d\tilde{T}}{dx} = m * C_1 * e^{mx} - m * C_2 * e^{-mx}$$

נציב זאת

$$-k * m(C_1 * e^{mL} - C_2 * e^{-mL}) = h * (C_1 * e^{mL} + C_2 * e^{-mL})$$

$$-k * m\left(C_1 * e^{mL} - \left(\tilde{T}_1 - C_1\right)e^{-mL}\right) = h * \left(C_1 * e^{mL} + (\tilde{T}_1 - C_1)e^{-mL}\right)$$

$$-k * m * C_1 * e^{mL} + k * m * \left(\tilde{T}_1 - C_1\right)e^{-mL} = h * C_1 * e^{mL} + h * \left(\tilde{T}_1 - C_1\right)e^{-mL}$$

$$-k * m * C_1 * e^{mL} + k * m * \tilde{T}_1 * e^{-mL} - k * m * C_1 * e^{-mL}$$
$$= h * C_1 * e^{mL} + h * \tilde{T}_1 * e^{-mL} - h * C_1 * e^{-mL}$$

$$-k * m * C_1 * e^{mL} - k * m * C_1 * e^{-mL} - h * C_1 * e^{mL} + h * C_1 * e^{-mL}$$
$$= -k * m * \tilde{T}_1 * e^{-mL} + h * \tilde{T}_1 * e^{-mL}$$

$$-C_1 * k * m * (e^{mL} + e^{-mL}) - C_1 * h * (e^{mL} - e^{-mL}) = -\tilde{T}_1 * e^{-mL} * (km - h)$$

$$C_1 * k * m * (e^{mL} + e^{-mL}) + C_1 * h * (e^{mL} - e^{-mL}) = \tilde{T}_1 * e^{-mL} * (km - h)$$

$$2 * C_1 * k * m * \cosh(mL) + 2 * C_1 * h * \sinh(mL) = \tilde{T}_1 * e^{-mL} * (km - h)$$

$$C_1 * [2 * k * m * \cosh(mL) + 2 * h * \sinh(mL)] = \tilde{T}_1 * e^{-mL} * (km - h)$$

$$C_1 = \frac{\tilde{T}_1 * e^{-mL} * (km - h)}{2 * k * m * \cosh(mL) + 2 * h * \sinh(mL)}$$

$$C_2 = \tilde{T}_1 - \frac{\tilde{T}_1 * e^{-mL} * (km - h)}{2 * k * m * \cosh(mL) + 2 * h * \sinh(mL)}$$

$$C_2 = \tilde{T}_1\left(1 - \frac{e^{-mL} * (km - h)}{2 * k * m * \cosh(mL) + 2 * h * \sinh(mL)}\right)$$

$$C_2 = \tilde{T}_1 \frac{2 * k * m * \cosh(mL) + 2 * h * \sinh(mL) - e^{-mL} * (k * m - h)}{2 * k * m * \cosh(mL) + 2 * h * \sinh(mL)}$$

$$C_2 = \widetilde{T}_1 \frac{k*m*(e^{mL}+e^{-mL}) + h*(e^{mL}-e^{-mL}) - k*m*e^{-mL} + h*e^{-mL}}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)}$$

$$C_2 = \widetilde{T}_1 \frac{k*m*e^{mL} + k*m*e^{-mL} + h*e^{mL} - h*e^{-mL} - k*m*e^{-mL} + h*e^{-mL}}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)}$$

$$C_2 = \widetilde{T}_1 \frac{k*m*e^{mL} + h*e^{mL}}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)}$$

$$C_2 = \widetilde{T}_1 \frac{(k*m+h)*e^{mL}}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)}$$

כעת מצאנו את המקדמים

$$C_1 = \frac{\widetilde{T}_1 * e^{-mL} * (k*m-h)}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh\,(mL)}$$

$$C_2 = \frac{\widetilde{T}_1 * e^{mL} * (k*m+h)}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)}$$

נציב בנוסחה המקורית

$$\widetilde{T}(x) = \frac{\widetilde{T}_1 * e^{-mL} * (k*m-h)}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)} * e^{mx} + \frac{\widetilde{T}_1 * e^{mL} * (k*m+h)}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)} * e^{-mx}$$

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_1 \frac{e^{-mL}*(k*m-h)*e^{mx} + e^{mL}*(k*m+h)*e^{-mx}}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)}$$

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_1 \frac{e^{-m(L-x)}*(k*m-h) + e^{m(L-x)}*(k*m+h)}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)}$$

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_1 \frac{k*m*e^{-m(L-x)} - h*e^{-m(L-x)} + k*m*e^{m(L-x)} + h*e^{m(L-x)}}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)}$$

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_1 \frac{k*m*\left(e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)}\right) + h*(e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)})}{2*k*m*\cosh(mL) + 2*h*\sinh(mL)}$$

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_1 \frac{2 * k * m * \cosh\,(m(L - x)) + 2 * h * \sinh\,(m(L - x))}{2 * k * m * \cosh(mL) + 2 * h * \sinh(mL)}$$

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_1 \frac{k * m * \cosh\,(m(L - x)) + h * \sinh\,(m(L - x))}{k * m * \cosh(mL) + h * \sinh(mL)}$$

זוהי הנוסחה המוגמרת.

נספר מס' 3 - קוד המודל הנומרי:

```
GlowScript 2.9 VPython

# - - - - - - - משתנים - - - - - - -

Dt = 0.001      # דיוק אוילר
SectionAmount = 100     # כמות החתיכות

InOven = 0.08       # כמה מטרים בתוך התנור
Length = 0.5        # האורך הכולל של המוט
Diameter = 0.0125   # קוטר המוט

Mass = 171     # מסה בגרמים
SpecificHeatCapacity = 0.9     # קיבול החום ביחידות J / (g * k)

K = 100     #מוליכות החום של המוט
M = 4.5     #שמחושב בקובץ אקסל M מקדם

Toven = 47.6    # טמפ תנור בצלזיוס
Tair = 22.5     #טמפ האוויר בצלזיוס


# - - - - - - - פונקציות - - - - - - -

def rescale(x, oldmin, oldmax, newmin, newmax):
    newx = ((newmax - newmin) * (x - oldmin)) / (oldmax - oldmin) + newmin
    return (newx)

def ToCelsius(Kelvin):
    return Kelvin - 273.15

def ToKelvin(Celsius):
    return Celsius + 273.15

# - - - - - - - פרמטרים - - - - - - -

SectionLength = (Length - InOven) / SectionAmount
SectionMass = Mass / SectionAmount
Radius = Diameter / 2
Area = pi * Radius ** 2
Perimeter = Diameter * pi
H = M**2 * K * Area / Perimeter

time = 0
Running = True

# - - - - - - - יצירה - - - - - - -

Sections = []
Temp = []
Q = []
```

```
Sections.append( box(pos= vec(-Length / 2 + InOven / 2, 0, 0), size= vec(InOven, Length /
10, Length / 10)))
Temp.append(Toven)
Q.append(0)

Sections.append(box(pos= vec(-Length / 2 + InOven + SectionLength * 1.05 / 2, 0, 0),
size= vec(SectionLength, Length / 10, Length / 10)))
Temp.append(Tair)
Q.append(0)

for i in range(2, SectionAmount):
    Sections.append( box(pos= vec(Sections[i - 1].pos.x + SectionLength * 1.05, 0, 0),
size= vec(SectionLength, Length / 10, Length / 10)))
    Temp.append(Tair)
    Q.append(0)

# - - - - - - - גרף - - - - - - -

GraphCanvas = graph(ymax= Toven)
G = gcurve()

TimeDisplay = label(text='{}'.format(0), color=color.white, box=False, align='center',
pos=vec(0, Length / 5, 0))


# - - - - - - - כפתורים - - - - - - -

def ButtonStop(b):
    global Running
    Running = not Running
    if b.text == "Pause":
        b.text = "Run"
    else:
        b.text = "Pause"

button( bind=ButtonStop, text="Pause", pos=scene.title_anchor )

def ButtonPrint():
    str = "time: {} \n".format(time)
    for SectionNum in range(1, SectionAmount):
        str += "{} \n".format(Temp[SectionNum] - Tair)
        # str += "part {}: {} \n".format((SectionNum - 1) * SectionLength,
Temp[SectionNum] - Tair)
    str += "\n \n"
    print(str)

button( bind=ButtonPrint, text='print temp', pos=scene.title_anchor )


# - - - - - - - לולאה - - - - - - -
for SectionNum in range(0, SectionAmount):
    Sections[SectionNum].color = vec(rescale(Temp[SectionNum], Tair, Toven, 0.3, 1), 0,
0)
```

```python
while time < 9e99:
    rate(9e99)
    # כפתור העצירה
    if Running:

        q = K * (Temp[0] - Toven) * (InOven * Perimeter + Area)
        Q[0] -= q * Dt
        for SectionNum in range(1, SectionAmount):  # עבור כל חתיכה
            # כמות החום שעוברת אל החתיכה הבאה
            q = K * (Temp[SectionNum - 1] - Temp[SectionNum]) * Area / SectionLength
            Q[SectionNum - 1] -= q  * Dt    # שמירה בזיכרון
            Q[SectionNum] += q * Dt     # שמירה בזיכרון

            # כמות החום שנאבדת אל האוויר
            q = H * (Temp[SectionNum] - Tair) * SectionLength * Perimeter
            Q[SectionNum] -= q * Dt     # שמירה בזיכרון

        Temp[0] += Q[0] / (SpecificHeatCapacity * InOven / SectionLength * SectionMass)
        Q[0] = 0
        for SectionNum in range(1, SectionAmount):
            # שינוי הטמפ על פי קיבול חום
            Temp[SectionNum] += Q[SectionNum] / (SpecificHeatCapacity * SectionMass)
            Q[SectionNum] = 0
        Q[0] = 0

        for SectionNum in range(0, SectionAmount):
            Sections[SectionNum].color = vec(rescale(Temp[SectionNum], Tair, Toven, 0.3, 
1), 0, 0)

        G.delete()
        for SectionNum in range(1, SectionAmount):
            G.plot((SectionNum - 0.5) * SectionLength, Temp[SectionNum] - Tair)

        TimeDisplay.text = "{}".format(time / 60)

        time += Dt
```

נספח מס' 4 - מודל לחישוב m :

```
GlowScript 2.9 VPython

# - - - - - - משתנים - - - - - - -

Mstart = 0
Mend = 30
DM = 100

# צלזיוס
Toven = 69.7
Tair = 22.5

# במטרים
lengh = 0.83
InOven = 0.08
DisBetPoints = 0.108

# צלזיוס
datay = [68.2, 31.4, 24.4, 23.7, 24.2, 23.3, 23.3, 23.9]

# - - - - - - גרף - - - - - - -

SG = graph(title= "Sinh graph")
SG = gcurve(graph=SG)

CG = graph(title= "Cosh graph")
CG = gcurve(graph=CG)

# - - - - - - פונקציות - - - - - - -
L = lengh - InOven
dM = (Mend - Mstart) / DM

def Sinh(x):
    return (exp(x) - exp(-x))/2

def TS(x, m):
    return (Toven - Tair) * Sinh(m * (L - x)) / Sinh(m * L)

def SS(m):
    sum = 0
    for i in range(len(datay)):
        sum += ((datay[i] - Tair) - TS(i * DisBetPoints, m))**2
    return sum


def Cosh(x):
    return (exp(x) + exp(-x))/2

def TC(x, m):
    return (Toven - Tair) * Cosh(m * (L - x)) / Cosh(m * L)

def SC(m):
```

```
    sum = 0
    for i in range(len(datay)):
        sum += ((datay[i] - Tair) - TC(i * DisBetPoints, m))**2
    return sum

# - - - - - - לולאה - - - - - - -
MIN = Mstart + dM
form in range(Mstart, Mend, dM):
    if (SS(m) < SS(MIN)):
        MIN = m
    SG.plot(m, SS(m))
print("Sinh min is", MIN, SS(MIN))

MIN = Mstart + dM
for m in range(Mstart, Mend, dM):
    if SC(m) < SC(MIN):
        MIN = m
    CG.plot(m, SC(m))
print("Cosh min is", MIN, SC(MIN))
```

<u>נספח מס' 5 – תוצאות מוט הפלדה</u>

הנה הטבלה של תוצאות מוט הפלדה שבו אנחנו מתמקדים בדוח, ממנה יצרנו את התוצאות

כל עמודה הינה מיקום המדד, מרחקו מן התנור במטרים, וכל שורה הוא הזמן, בדקות.

טמפ' המוט בזמנים השונים								
	0.081	0.156	0.231	0.306	0.381	0.456	0.531	0.606
0	25.3	23.1	24.3	24.7	24.6	24.9	25.3	24.8
1	28.7	25.7	24.6	24.3	24.6	24.6	25.1	24.5
2	32.3	27.6	24.4	24.1	24.4	24.4	24.9	24.4
3	34.9	27.7	24.2	24	24.2	24.2	24.8	24.1
4	37.1	28.3	24.2	23.9	24.1	24.1	24.7	23.9
5	39.1	28.7	24.2	23.7	24	23.9	24.9	23.9
6	40.3	29.4	24.3	23.6	23.8	23.8	24.3	23.7
7	41.6	29.5	24.5	23.4	23.7	23.6	24.1	23.6
8	42.5	29.9	24.6	23.4	23.6	23.5	24	23.6
9	43.2	30.1	25	23.4	23.5	23.5	23.9	23.6
10	43.8	30.3	25.4	23.4	23.5	23.5	23.9	23.6
11	44.3	30.5	25.8	23.3	23.3	23.2	23.6	23.6
12	44.4	30.7	25.9	23.5	23.3	23.1	23.5	23.6
13	44.7	31.3	26.1	23.6	23.2	23.1	23.5	23.6
14	44.3	31.5	26.3	23.7	23.3	23	23.4	23.7
15	45.1	31.5	26.4	23.7	23.2	23	23.4	23.8
16	45.2	31.4	26.5	23.7	23.3	22.9	23.3	23.8
17	45.1	31.9	26.6	23.7	23.2	22.7	23.2	23.9
18	45.3	31.8	26.7	23.8	23.3	22.8	23.2	23.9
19	45.7	31.9	26.8	23.9	23.3	22.8	23.1	23.9

20	45.8	31.8	26.8	23.9	23.3	22.8	23.1	23.8
21	46	31.9	27	24	23.3	22.8	23.1	23.8
22	46.1	32.1	27	24	23.3	22.8	23	23.7
23	46	32.5	27.1	24	23.4	22.8	23	23.7
24	46.2	32.6	27.3	24.1	23.4	22.7	23	23.8
25	46.5	32.3	27.2	24.1	23.4	22.8	22.9	23.7
26	46.6	32.5	27.1	24.2	23.4	22.7	22.9	23.7
27	46.8	32.8	27.1	24.2	23.4	22.8	22.9	23.7
28	46.8	32.8	27.2	24.3	23.5	22.8	22.9	23.7
29	46.7	33	27.1	24.3	23.5	22.8	22.9	23.7
30	46.9	32.7	27.2	24.4	23.5	22.8	22.9	23.6
31	46.9	33.1	27.2	24.4	23.5	22.8	22.9	23.6
32	47	32.7	27.1	24.4	23.5	22.8	22.9	23.6
33	46.9	32.7	27.1	24.4	23.5	22.8	22.9	23.6
34	47	32.9	27.1	24.4	23.5	22.8	22.9	23.6
35	46.9	33.3	27.1	24.5	23.6	22.8	22.9	23.6
36	47.1	33	27.2	24.5	23.6	22.8	22.9	23.6
37	47.1	33.1	27.2	24.6	23.6	22.8	22.8	23.6
38	46.6	33.3	27.3	24.4	23.5	22.8	22.9	23.6
39	46.5	33.2	27.4	24.5	23.6	22.8	22.8	23.6
40	47	33.3	27.5	24.6	23.6	22.8	22.9	23.6
41	47.1	33.3	27.5	24.6	23.6	22.8	22.9	23.6
42	47.3	33.1	27.6	24.6	23.6	22.8	22.8	23.6
43	47.3	33	27.5	24.6	23.6	22.8	22.8	24.7
44	47.3	33.4	27.6	24.6	23.6	22.8	22.8	23.8
45	47.1	33.4	27.6	24.7	23.6	22.8	22.8	23.7

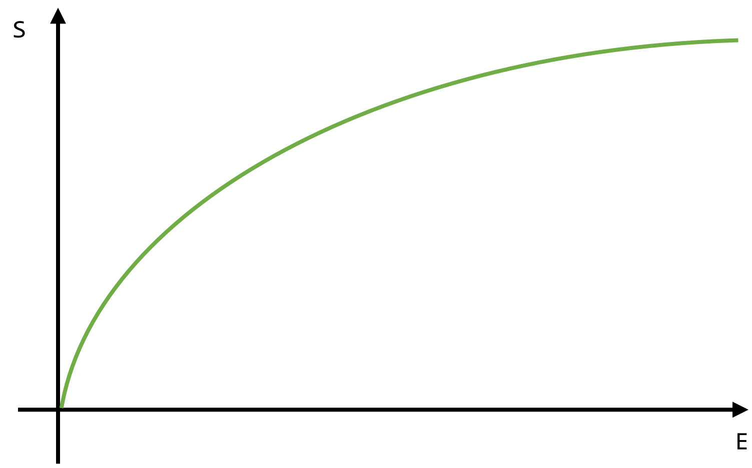
46	47.4	33.1	27.6	24.6	23.6	22.8	22.7	23.7
47	46.8	33.5	27.7	24.6	23.7	22.8	22.7	23.7
48	46.7	33.5	27.6	24.7	23.7	22.8	22.8	23.7
49	47.3	33.1	27.6	24.6	23.7	22.8	22.7	23.7
50	47.1	33.1	27.6	24.6	23.6	22.8	22.7	23.7

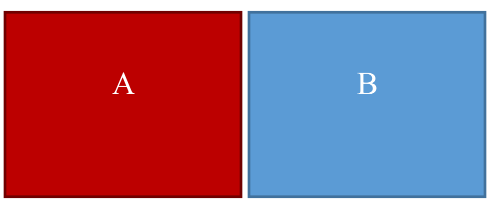
נספח מס' 6 – הסבר מתמטי למעבר חום

בנספח זה נסביר באמצעות חוקי התרמודינמיקה מדוע חום עובר מגוף בעל טמפרטורה גבוה לגוף בעל טמפ' נמוכה.

שלושה דברים שנעסוק בהם הם אנטרופיה, אנרגיה פנימית וטמפרטורה.

גרף האנטרופיה כתלות באנרגיה פנימית נראה כך.





נתייחס לשני גופים אשר באינטראקציה אחד עם השני אך בידוד עם הסביבה. את אחד הגופים נסמן בצבע אדום ונקרא לו A, את הגוף השני נסמן בצבע כחול ונקרא לו B.

את האנרגיה הפנימית והאנטרופיה של הגופים נסמן על פי האותיות שלהן - $A: E_A, S_A$, $B: E_B, S_B$.

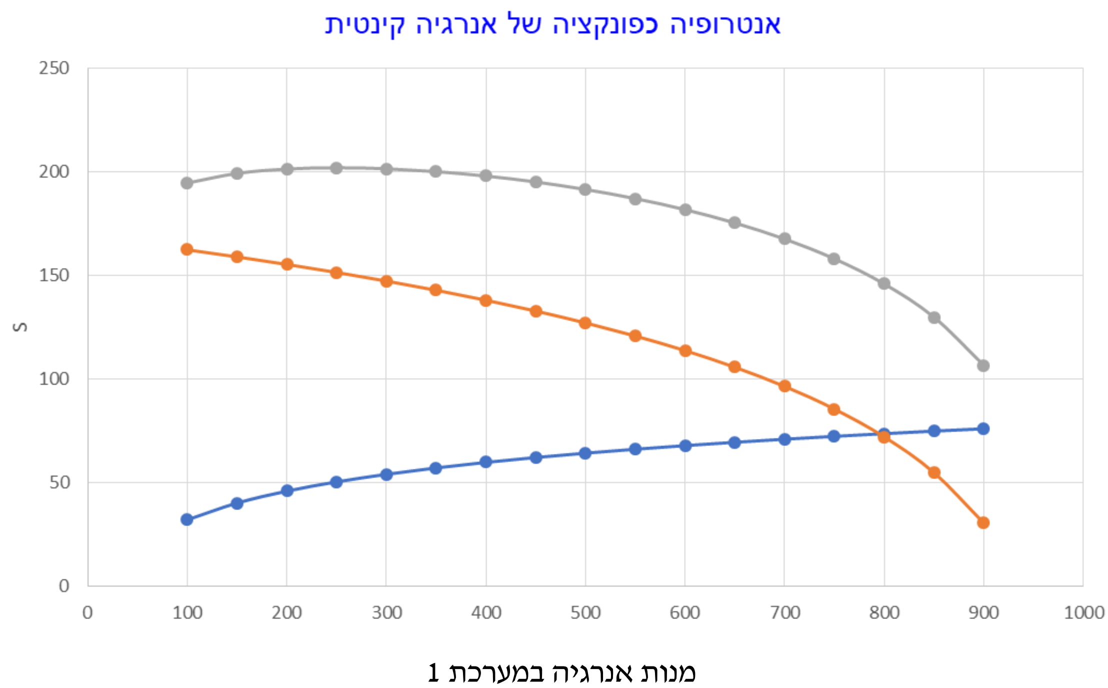
על פי חוק שימור האנרגיה ידוע כי סכום האנרגיה של שני הגופים צריך להישמר מאחר ואין איבוד או הוספת אנרגיה אל ומן הסביבה. את הסכום נסמן כ-E_{tot}, $E_{tot} = E_A + E_B$.

כאשר נשרטט גרף של האנטרופיה של גוף A ביחס לאנרגיה שלו הגרף יהיה דומה לגרף שמעלה. אך באותו מערכת צירים נוסיף את גרף האנטרופיה של גוף B ביחס לאנרגיה שלו. על מנת להביע את אותו נשתמש בנוסחה של E_{tot}.

$$E_B = E_{tot} - E_A$$

על פי הנוסחה, כאשר E_A מינימלי E_B מקסימלי וההפך.

נשרטט את הגרפים.



את השינוי באנטרופיה נציג במכפלה של השיפוע בשינוי בציר ה-x, את הנוסחה נרשום בהתאמה לכל אחד מן הגופים.

$$\Delta S_A = \frac{dS_A}{dE_A} * \Delta E_A, \qquad \Delta S_B = \frac{dS_B}{dE_B} * \Delta E_B$$

נשתמש ביטוי שמצאנו לE_B ונבטא את השינוי של E_B בעזרת E_A.

$$E_B = E_{tot} - E_A$$

$$\Delta E_B = \Delta(E_{tot} - E_A)$$

מאחר ו-E_{tot} קבוע השינוי שלו שווה ל-0.

$$\Delta E_B = -\Delta E_A$$

נציב זאת בנוסחה שמצאנו קודם לכן.

$$\Delta S_A = \frac{dS_A}{dE_A} * \Delta E_A, \qquad \Delta S_B = -\frac{dS_B}{dE_B} * \Delta E_A$$

כעת נשתמש בחוק השני של התרמודינמיקה אשר קובע כי השינוי באנטרופיה של כל מערכת תרמודינמית סגורה גדול או שווה ל-0

$$\Delta S_{tot} \geq 0$$

את השינוי באנטרופיה הכוללת נרשום כסכום השינויים באנטרופיה של המערכות

$$\Delta S_A + \Delta S_B \geq 0$$

נציב את המשוואות שמצאנו

$$\frac{dS_A}{dE_A} * \Delta E_A - \frac{dS_B}{dE_B} * \Delta E_A \geq 0$$

נוציא גורם משותף מאגף שמאל.

$$\left(\frac{dS_A}{dE_A} - \frac{dS_B}{dE_B}\right) * \Delta E_A \geq 0$$

טמפרטורה מוגדרת כיחס בין השינוי באנטרופיה לשינוי באנרגיה (מהגדרה זו נובע גם שטמפרטורה היא ממוצע האנרגיה הקינטית לחלקיק של מולקולות החומר)

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$$

בנוסחה זו הטמפרטורה מוגדרת במעלות קלווין. נשתמש בהגדרה זו ונציב בנוסחה שלנו.

$$\left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}\right) * \Delta E_A \geq 0$$

על מנת לעזור בהמשך נכתוב את צד שמאל כך.

$$\left(\frac{T_B - T_A}{T_A * T_B}\right) * \Delta E_A \geq 0$$

במידה וטמפרטורת גוף A <u>גדולה</u> מטמפרטורת גוף B כלומר $T_A > T_B$ החלק שבסוגריים יהיה <u>שלילי</u>, על מנת לקיים את המשוואה ΔE_A יהיה גם כן שלילי כלומר האנרגיה תעבור מגוף A לגוף B.

נבדוק גם את האפשרות ההפוכה.

במידה וטמפרטורת גוף A <u>קטנה</u> מטמפרטורת גוף B כלומר $T_A < T_B$ החלק שבסוגריים יהיה <u>חיובי</u>, על מנת לקיים את המשוואה ΔE_A יהיה גם כן חיובי כלומר האנרגיה תעבור לגוף A מגוף B.

משני המקרים הללו ניתן לראות כי האנרגיה תעבור מן הגוף בעל הטמפרטורה הגבוהה יותר לגוף בעל הטמפרטורה הנמוכה יותר.