שפות תכנות ש"ב 1 נועם ציבוביץ' ושלומי בן יהושע

1.1

נוכיח באינדוקציה מבנית:

בסיס: עבור $\varepsilon \mid id \in E1$ ברור שמספר הסוגריים שווים.

צעד: נניח כי נתונה הטענה עבור $P(a)$ כלשהו.
כלומר מס הסוגריים הפותחים שווה למס' הסוגריים הסוגרים
ונוכיח עבור $P((a)), P(id), P(\varepsilon)$.
נחלק למקרים:

- $P(\varepsilon)$: בגזירה של ε לא משנה כלום במילה לכן עפ"י ה"א הטענה מתקיימת עבור $P(\varepsilon)$.
- $P(id)$: שוב, לא משנים כלום במילה ולכן הטענה מתקיימת.
- $P((a))$: נשים לב שכאן נוסף לנו גם סוגר פותח וגם סוגר סוגר. בשילוב עם ה"א מספר הסוגריים עדיין ישאר שווה כיוון שהוספנו אחד לפותח ואחד לסוגר.

מהנ"ל הטענה מתקיימת עבור $P(a)$ ולכן כל ביטוי בשפה של $E1$ בעל מספר סוגרים פותחים שווה למספר הסוגרים הסוגרים.

1.2

הוכחה באינדוקציה מבנית

בסיס: עבור $\varepsilon \mid id \in E_2$ ברור שמס' הסוגריים שווה (0).

צעד: נניח את נכונות הטענה עבור $p(a)$ כלשהו.
כלומר מס' הסוגריים הפותחים שווה למס' הסוגריים הסוגרים.
וצ"ל עבור $p(id), p(\varepsilon), p((R)$.
נחלק למקרים:

- $p(\varepsilon)$: בגזירה של ε לא משנה כלום ולכן מס' הסוגריים ישאר כמו שהוא, שעפ"י הנ"א, הוא שווה.

- $p(id)$: שוב, בגזירה של id לא משנה כלום.

- $p((R)$: אנו מוסיפים סוגר פותח אחד אך ממשיכים לגזור את R. לכן נחלק למקרים:

• מקרה א': $p((R) = p()$, במקרה הנוכחי הוספנו סוגר סוגר ולכן אנחנו חוזרים לה"א בשוויון מבחינת הסוגריים.

• מקרה ב': $p((R) = p(E2))$ לכן, הוספנו סוגר סוגר ולכן שוב אנו בשוויון סוגריים. ממשיכים רקורסיבית עבור E_2 ועפ"י הה"א הטענה נכונה לגבי E_2.

לכן הטענה נכונה. ■

1.3

נראה כי שני הדקדוקים E_1,E_2 מגדירים את אותה השפה.
נוכיח ע"י אינ' מבנית.

בסיס: ברור כי מקרה הבסיס כאן טריוויאלי שכן גזירות הבסיס זהות בשני השפות - $\varepsilon, id \in E_1,E_2$.

צעד: נניח נכונות לכך שכל הגזירות במבנה של עד n איברים נמצאות גם ב-E_1 וגם ב-E_2 ונוכיח עבור גזירות במבנה של $n+1$ איברים. נראה שוויון ע"י הכלה דו-כיוונית:

$E_2 \subseteq E_1$

יהיה $x \in E_2, E_1$ כנ"ל במבנה בגודל של n איברים, ונגזור ממנו איבר חדש בגודל $n+1$ ונראה כי מכללי הגזירה של E סג"ן האיבר המתקבל יהיה גם ב-E_1.
מכיוון ש-x הינו כבר ב-E_2 הגזירה היחידה שנוכל לבצע עליו, תהיה:

$$E_2 \to (R \to (E_2) \to (x)$$

שכן הכלל "$(R$" אינו נמצא ב E_2 שכן הוא לא גזירה מלאה. נראה כי קיימת גזירה כזו גם מהכללים של E_1:

$$\frac{x \in E_1, E_2}{(x) \in E_1} \, (E_1) \in E_1$$

סה"כ הראינו כי הגזירה הכללית של ביטוי ב E_2 מתקיימת גם כן מכללי הגזירה של E_1.

$E_1 \subseteq E_2$ באופן דומה יהי $x \in E_1, E_2$ הפלט בהנחה בגודל n איברים.

הגזירה היחידה שניתן לגזור ממנו לפי הכללים של E_1 הינה:

$$E_1 \to (E_1) \to (x)$$

נראה כל גזירה שיוצר את הפלט הנ"ל גם כן מכללי הגזירה של E_2:

$$\begin{array}{cl} x \in E_1, E_2 & (R \\ \hline x \in E_2, (& E_2) \\ \hline x \in E_2, (E_2) & \\ \hline (X) & \end{array}$$

סה"כ הראינו כי הגזירה של איבר בגודל n מ- E_1 גזיר גם מהכללים של E_2. בכך השלמנו את צעד האינד' משני הכיוונים של ההכלה הדו-כיוונית והוכחנו את הטענה אשר $\boxed{E_1 = E_2}$. ■

2.1 א) עבור הביטוי a נראה כי אכן קיים עץ גזירה אשר מניב את הביטוי הנ"ל.

$$
\begin{array}{c}
obj \\
\downarrow \\
\{member\} \\
\downarrow \\
\{member, member\} \\
\downarrow \\
\{keyvalue, member, member\} \\
\downarrow \\
\{string : value, keyvalue, keyvalue\} \\
\downarrow \\
\{\text{"course"} : string, string : value, string : value\} \\
\downarrow \\
\{\text{"course"} : \text{"concepts in PL"}, \text{"ex"} : int, \text{"grade"} : int\} \\
\downarrow \\
\{\text{"course"} : \text{"concepts in PL"}, \text{"ex"} : 1, \text{"grade"} : 100\}
\end{array}
$$

הראנו כי קיים עץ גזירה לביטוי הנ"ל ולכן הוא משפט בדקדוק Json.

ב) 2.1

נראה כי אין אף שגיאה ע"י אינדוקציה מבנית.
טענה: בכל איבר אשר נגזר מכללי הדקדוק של שפת Json לא (*) קיים איבר בודד התואם לביטוי, אלא תמיד חלק מצוג - s:v (string:value).

נוכיח את הטענה בעזרת אינ' מבנית.
<u>בסיס:</u> מכלל הגזירה הבסיסי היחיד שיש לנו - {}.
נקבל שהטענה נכונה באופן ריק שכן לא נמצא בו שום ערך ובפרט הוא לא יכול להיות חלק מצוג.

<u>צעד:</u> נניח נכונות לכל האיברים בשפה בעלי מבנה בגובה של עד n, ונוכיח את הטענה עבור גזירה לכל מבנה בגובה n+1.
יהי e∈Json כנ"ל בגובה n. נשים לב כי הגזירה היחידה שניתן להפעיל מ-e באופן שמגדיל אותו באיבר ולא גורע ממנו תהיה הוספת member, ע"פ כלל הגזירה member,member → member.
האיבר החדש שניצור יהיה מהצורה {member, ē}. ע"פ ההנחה אנו יודעים כי ב-ē (הביטוי המקורי) ישנם רק צוגות תקינים של s:v, כעת נבחין כי מ-member החדש שהתווסף יכול להגזר <u>רק</u> keyValue (שכן אנו מגדילים את e לגובה n+1 ולא מעבר), וכן keyValue נגזר בהכרח ל-s:v. סה"כ גם ב-member שהתווסף ישנו צוג תקין של s:v, ובכלל בכל הביטוי שנגזר מ-e ישנם רק ערכים בצורות תקינים של s:v.

הוכחנו באינ' את הטענה (*), ומכיוון ש-b לא מקיים אותה שכן הוא מכיל רק value ולא string:, לפיכך, אז' b לא שייך ל-Json ולא נגזר מכללי הגזירה של השפה. ■

2.2

נראה כי קיים עץ גזירה נוסף (שונה) מאשר a מהסעיף הקודם
ונקבל מכך ש-"דקדוק json הינו רב-משמעי".

{member}

{member, member}

{member, member, keyvalue}

פה השינוי מהגזירה (a) (2.1)

{keyvalue, keyvalue, string : value}

{string: value, string : value, "course": string}

{"grade" : int, "ex" : int, "course" : "concepts in PL"}

{"course": "concepts in PL", "ex" : 1, "grade" : 100}

סה"כ הראינו עץ גזירה שונה לגמרי מ-a מהסעיף הקודם,
וסה"כ הדקדוק הינו רב-משמעי!

3.1

נראה הפרכה עבור הביטוי הנ"ל - $\boxed{e = \neg a}$

לפי הגדרת הפונ' נקבל:

$$nov(Not(a)) = Nov(a) = 1$$

$$noc(Not(a)) = 1 + Noc(a) = 1$$

$$nov(Not(a)) = 1 \neq 2 = noc(Not(a)) + 1$$

סה"כ הראינו כי עבור הביטוי הנ"ל השוויון __לא__ מתקיים והפרכנו את
הטענה.

2. ③ נוכיח את הטענה באינדוקציה ~~[illegible]~~ מבנית:

__בסיס__- עבור כל בסיס מסוג $var(\_)$ נקבל כי

$$nov(var(\_)) = 1 \ , \ noc(var(\_)) = 0$$

ובאמת מתקיים: $1 = nov(\ ) = noc(\ ) + 1 = 0 + 1 = 1$

__צעד:__ נניח נכונות עבור ביטוי במבנה בגודל n, ונוכיח עבור ביטוי הנוצר ממנו בגודל $n+1$. יהיה $\bar{e}$ ביטוי כזה בגודל n. מכיוון שאנחנו מוציאים את not מחוץ לחוק בטענה נשארנו רק עם And, or. נראה עם אחד מהם והשני יהיה זהה מאותן הרמות שינוי המילה. נבחר סתם את or. ניצור מ- $\bar{e}$ את הביטוי $\vec{e} = \bar{e} \vee (var(\_))$ - ביטוי בגודל $n+1$.

כעת- $nov(\vec{e}) = nov(\bar{e}) + nov(var(\_)) = n+1$

$$noc(\vec{e}) = noc(\bar{e}) + 1 + 0 \underset{\text{הנחה}}{=} nov(\bar{e}) - 1 + 1 + 0 = nov(\bar{e}) = n$$

__וסה"כ__-

$$n+1 = nov(\vec{e}) = noc(\vec{e}) + 1 = n+1$$

צעד עבור And זהה רק לשנות את הסימן ל- $\wedge$. סה"כ הוכחנו את צעד האינדוקציה ובכך את הטענה. __מש"ל__