שפות תכנות תרגיל 2 עוזם שולאין

שאלה 1:

1. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-**Natural** Operational Semantics:

(S1;S2);S3 ~ S1;(S2;S3)

נראה שקילות סמנטית באמצעות NoS ע"י שנתאר עץ גזירה עבור הביטוי השמאלי ונגיע לעלים שלו, עד שכולם יהיו אקסיומות (Ass), ומהן נגזע עץ גזירה חדש אשר מניב את הביטוי הימני.

$\Rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1, s\rangle \to s'''}\,\text{Ass} \qquad \dfrac{}{\langle S_2, s'''\rangle \to s'}\,\text{Ass}}{\langle (S_1;S_2), s\rangle \to s'}\,\text{comp} \qquad \dfrac{}{\langle S_3, s'\rangle \to s''}\,\text{Ass}}{\langle (S_1;S_2);S_3, s\rangle \to s''}\,\text{comp}$$

$\Leftarrow$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1; s\rangle \to s'}\,\text{Ass} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\langle S_2, s'''\rangle \to s'}\,\text{Ass} \qquad \dfrac{}{\langle S_3, s'\rangle \to s''}\,\text{Ass}}{\langle (S_2;S_3), s'\rangle \to s''}\,\text{comp}}{\langle S_1;(S_2;S_3), s\rangle \to s''}\,\text{comp}$$

נשים לב שמאותן אקסיומות גזרנו שני עצים המניבים את שני הביטויים הבאים ולכן הוכחנו שקילות סמנטית.

2. הוכיחו שבמקרה הכללי לא מתקיימת השקילות ב- **Natural** Operational Semantics:

S1;S2 ~ S2;S1

כלומר קיימים S1,S2 כך שהשקילות לא מתקיימת.

נראה שני הפסוקים <u>אינם</u> שקולים ע"י כך שנביא דוגמה "מצב"- s, ונראה שהפעולה של כ"א מהפסוקים עליו יתן לנו "מצב" שונה.

נבחר $S_1 = [x \to 5]$

$S_2 = [x \to 7]$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1, s\rangle \to s'}\,\text{Ass} \qquad \dfrac{}{\langle S_2, s'\rangle \to s''}\,\text{Ass}}{\langle S_1; S_2, s\rangle \to s''}\,\text{comp}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_2, s\rangle \to s''}\,\text{Ass} \qquad \dfrac{}{\langle S_1, s''\rangle \to s'}\,\text{Ass}}{\langle S_2; S_1, s\rangle \to s'}$$

נשים לב כי עפ"י העץ השמאלי:

$s' = s[x \to 5]$ ו- $s'' = s'[x \to 7] \to s[x \to 7]$

(מהגדרת S_1) (מהגדרת S_2 וכן מצביעים על x)

נשים לב כי עפ"י העץ הימני:

$s'' = s[x \to 7]$ ו- $s' = s''[x \to 5] \to s[x \to 5]$

(מהגדרת S_2) (מהגדרת S_1 וכן מצביעים על x)

סה"כ הראינו כי הפעולות הנ"ל מחזירות "מצב"- s', s'' שונה בכל הפעולה ולכן <u>אין שקילות</u>.

שאלה 2:

1. הוכיחו כי ב- Semantics **Axiomatic** מתקיים: {false} S {P} עבור כל P.

<u>הדרכה</u>: יש להוכיח בעזרת אינדוקציה מבנית על S.

נוכיח את הטענה בעזרת אינ' מבנית על S.

<u>בסיס 1:</u> $S=skip$

$$\{false\}\ S\ \{P\} = \{false\}\ skip\ \{P\}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\{P\}\ skip\ \{P\}}\ skip}{\{false\}\ skip\ \{P\}}\ cons$$

נשים לב כי false גורר הכל ובפרט P, ו- P גורר P, ולכן נוכל להשתמש לפי cons ובכך הגענו לאקסיומה והוכחנו את הבסיס הראשון.

<u>בסיס 2:</u> $S= ass$

$$\{false\}\ S\ \{P\} = \{false\}\ x:=a\ \{P\}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\{P[x\mapsto A[a]]\}\ x:=a\ \{P\}}\ ass}{\{false\}\ x:=a\ \{P\}}\ cons$$

נשים לב כי false גורר הכל ובפרט $\{P[x\mapsto A[a]]\}$, ו- P גורר P, ולכן נוכל להשתמש לפי cons ובכך הגענו לאקסיומה והוכחנו את הבסיס השני.

צעד 1: $S = comp$

נניח כי קיים עץ גזירה המסתיים בביטוי $\{false\}S\{P\}$
כאשר $S = S_1;S_2$ מפעל comp, ונקבל את הביטוי הבא:

$$\dfrac{\dfrac{\{Q\}=\{false\}}{\{false\}S_1\{Q\}}\text{ה"א} \quad , \quad \dfrac{\{Q\}=\{false\}}{\{Q\}S_2\{P\}}\text{ה"א}}{\{false\}S_1;S_2\{P\}}\ comp$$

כיוון שלביטוי $\{false\}S_1\{Q\}$ גזירה קצרה ולכן ניתן להפעיל עליו את ה"א ולבחור את $Q = false$ שכן ההנחה היא על S ו-P (P במקרה שלנו היא Q).
מכאן המדובר לפיו $Q=false$ בצד הימני - מ"צ' ושוב קיבלנו מה"א (שקיים גם לביטוי הימני עץ גזירה קצר ולכן שמוכל גם הוא בה"א) את $\{false\}S_1\{P\}$. סה"כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה של comp אשר מקיים את צעד האינ'.

צעד 2: $S=cons$

נניח כי קיים עץ גזירה המסתיים בביטוי $\{false\}s\{P\}$
כאשר $S = s$ מכלל cons, ונקבל את הביטוי הבא:

נניח שלפי עץ גזירה בעומק n-1 מתקיים $\{f\}s\{P\}$ לכל s ולכל P.
נוכיח נכונות עבור עץ גזירה בעומק n אשר מסתיים ב cons

$$\dfrac{\dfrac{}{\{false\}\ s\ \{P\}}\ \text{ה״א}}{\{false\}\ s\ \{P\}}\ \text{cons}$$

כיוון שלביטוי $\{false\}s\{P\}$ גזירה קצרה יותר ניתן להפעיל עליו את ה״א ולבטח את קיום של עץ גזירה עבורו, שכן ההנחה היא לכל s ו-P.

מכאן מ״בית נגזר לפי כלל cons את "השכבה ה-n" (שכן $false \to false$, $P \to P$) והמעבר פונים נובע מה״א. סה״כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה של cons אשר מקיים את צעד האינ׳.

סעיף 3: $S = while$

נניח כי קיים עץ גזירה המסתיים בביטוי $\{false\}S\{P\}$ כאשר $S = while\ b\ do\ S$.

מה"א קיימת גזירה ל- $\{false\}S\{P\}$ בעץ גזירה בעומק קטן מ-n.

נגזור ממנו את העץ הבא:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ה"א}}{\{false\}S\{P\}}\ \text{cons}}{\{B[b]\wedge false\}S\{P\}}\ \text{while}}{\{false\}\ while\ b\ do\ S\ \{\neg B[b]\wedge P\}}\ \text{cons}}{\{false\}\ while\ b\ do\ S\ \{P\}}$$

נסביר את הגזירות, לאחר הגזירה הראשונה מה"א ניתן לגזור ממנה את זו שמתחתיה כיוון שבפרט לפסוקים "$\wedge$" שמכילה false את הביטוי $B[b]$ עדיין משאיר את הערך ב- false, ולכן ההגדרות מתקיימות והפעלת cons חוקית.

הגזירה הקלאסית לפי תבנית while חוקית באופן מיידי (לפי הגדרה).

נשים לב שכאשר אנו מגיעים לביטוי $\{\neg B[b]\wedge P\}$ בכלל while, הערך של $\neg B[b] = true$ כיוון שהערך $B[b] = false$ שכן הלולאה עצרה. לכן ניתן לגזור את cons שהגזירות חוקיות (כי $true \wedge P = P$). סה"כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה של while אשר מקיים את צעד האינ'.

צעד 4: $\boxed{s = if}$

נניח כי קיים לכל גזירה המסתיימת בביטוי $\{false\}s\{P\}$
כאשר $s = \text{if } b \text{ then } s_1 \text{ else } s_2$.

מה"א קיימת גזירה ל- $\{false\}s\{P\}$ בכל גזירה בעומק קטן מ-n.
נבצע ממני את הגזירה הבאה:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{false\}S_1\{P\}}\text{ה"א}}{\{B[b]\land false\}S_1\{P\}}\text{cons} \quad , \quad \dfrac{\dfrac{}{\{false\}S_2\{P\}}\text{ה"א}}{\{\neg B[b]\land false\}S_2\{P\}}\text{cons}}{\{false\}\text{ if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2\,\{P\}}\text{if}$$

נשים לב שהמעבר הראשון הינו לפי כלל if והמעבר השני לפי כלל cons שכן לכל (בפועל בולאני) $(false \land (\ldots)) = false$.
השאר נובע מה"א. סה"כ הראינו כי גזירה חוקית עבור המקרה של if אשר מקיים את צעד האינ'.

לסיכום, הוכחנו את צעד האינ' בכל ארבעת המקרים והראינו כי מתקיים $\{false\}s\{P\}$ עבור כל P. ∎

2. הוכיחו כי ב- **Axiomatic** Semantics מתקיים:

{x=5} if x=5 then y:=10; z:=y {z=10}

נוכיח את הביטוי עפ"י כללי Axiomatic semantic:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{true \wedge x=5\}\ y:=10\ \{y=10\}}\,ass}{\{x=5\}\ if\ x=5\ then\ y:=10\ \{y=10\}}\,if \qquad , \dfrac{}{\{y=10\}\ z:=y\ \{z=10\}}\,ass}{\{x=5\}\ if\ x=5\ then\ y:=10\ ;\ z:=y\ \{z=10\}}\,comp$$

מכיוון שהגענו בכל עלי העץ לאקסיומות (ass) אז:

סה"כ הוכחנו כי מתקיים הביטוי הנ"ל.

3. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-**Axiomatic** Semantics:

(S1;S2);S3 ~ S1;(S2;S3)

נראה שקילות סמנטית באמצעות Axiomatic semantics
ע"י שנראה שכל גזירה עבור הביטוי השמאלי ונגיע לצעדים קלים,
עד שבהם יהיו אקסיומות (ASS), ומהן נבצע כל גזירה חדשה אשר מניב
את הביטוי הימני.

$\Rightarrow$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{P\}\, S_1 \,\{T\}}\,\text{ass} \qquad \dfrac{}{\{T\}\, S_2 \,\{Q\}}\,\text{ass}}{\{P\}\, S_1;S_2 \,\{Q\}}\,\text{comp} \qquad \dfrac{}{\{Q\}\, S_3 \,\{R\}}\,\text{ass}}{\{P\}\, (S_1;S_2);S_3 \,\{R\}}\,\text{comp}
$$

$\Leftarrow$

$$
\dfrac{\dfrac{}{\{P\}\, S_1 \,\{T\}}\,\text{ass} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{T\}\, S_2 \,\{Q\}}\,\text{ass} \qquad \dfrac{}{\{Q\}\, S_3 \,\{R\}}\,\text{ass}}{\{T\}\, S_2;S_3 \,\{R\}}\,\text{comp}}{\{P\}\, S_1;(S_2;S_3) \,\{R\}}\,\text{comp}
$$

נשים לב שמאותן אקסיומות גזרנו שני עצים המניבים את שני
הביטויים הבנויים ולכן הוכחנו שקילות סמנטית.

<u>שאלה 3:</u>

נרצה להוסיף לשפת While את הפקודה של **repeat** לפקודה הבאה:

repeat S **until** b

זוהי לולאה שתמיד מתבצעת פעם אחת לפחות, והביצוע שלה נמשך כל עוד התנאי b אינו מתקיים. לדוגמא. הקוד הבא:

repeat x = x-10 **until** x<10

יסתיים במצב בו x=5 אם יתחיל במצב בו x=55, ויסתיים במצב בו x = -3 אם יתחיל במצב בו x=7.

1. הוסיפו כלל/ים לטבלה של **Natural** Operational Semantics (טבלה 2.1 בנספח) שיגדירו את פקודת **repeat**. הכללים אינם יכולים להסתמך על מבנה לולאת while הקיימת בשפת while המקורית.

3.1

$$\frac{\langle S, \sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma'} \quad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma' = tt$$

מכיוון שהתנאי מתקיים אנו עושים רק איטרציה אחת ומחזירים את הפלט שלה בתור המצב החדש.

$$\frac{\langle S, \sigma\rangle \to \sigma', \ \langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma''} \quad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma' = ff$$

מכיוון שהתנאי אינו מתקיים, לאחר ההפעלה הראשונה, נפעיל על הפלט שלה את פקודת repeat באופן רקורסיבי.
לבסוף נחזיר את הפלט החוצה מהרקורסיה - σ''.

2. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב- **Natural** Operational Semantics
המורחב שיצרתם בסעיף א:

S; **if** b **then** Skip **else** (**reapet** S **until** b) ~ **reapet** S **until** b

$\Rightarrow$

נניח שקיים עץ גזירה עבור הביטוי: S; if b then Skip else (reapet S until b)

ונראה קיום גם עבור הביטוי מימין.

ראשית, מכלל comp:

$$\frac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \dfrac{}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma'\rangle \to \sigma''}}{\langle S;\ \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma\rangle \to \sigma''}\,\text{comp}$$

כעת נחלק למקרים לפי $B[b]$:

$\boxed{B[b]=ff}$

$$\frac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \dfrac{\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma'\rangle \to \sigma''}\,B[b]=ff}{\langle S;\ \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma\rangle \to \sigma''}\,\text{comp}$$

אנו יודעים מהגדרת if ומקיום העץ המתואר (ההנחה) שקיים (המשך) עץ גזירה עבור הביטוי $\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma'\rangle \to \sigma''$.

בנוסף אנו יודעים מההנחה שמתקיימת הגזירה $\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'$, ויחד נוכל לגזור:

$$\frac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \dfrac{}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma'\rangle \to \sigma''}\,\text{הנחה}}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma\rangle \to \sigma''}\,B[b]=ff$$

מכיוון שבדיוק כך הגדרנו את repeat.

סה"כ עבור המקרה הזה הראינו קיום של עץ גזירה עבור הביטוי הנדרש.

$\boxed{B[\![b]\!]=tt}$

$$
\cfrac{\cfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \cfrac{\cfrac{}{\langle \text{skip},\sigma'\rangle \to \sigma'}\,\text{skip}}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma'\rangle \to \sigma''}\, B[\![b]\!]=tt}{\langle S;\text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma\rangle \to \sigma''}\,\text{comp}
$$

אנו יודעים מהגדרת if ומקיום הצד המתואר (ההנחה) שקיים (המשך) עץ גזירה עבור הביטוי $\langle \text{skip},\sigma'\rangle \to \sigma'$ (זה גורר ש $\sigma'=\sigma''$).

בנוסף אנו יודעים מההנחה שמתקיימת הגזירה $\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'$, ויחד נוכל לשבץ:

$$
\cfrac{\cfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \cfrac{}{\langle \text{skip},\sigma'\rangle \to \sigma'}\,\text{הנחה}}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma\rangle \to \sigma'}\, B[\![b]\!]=tt
$$

מכיוון שבדיוק כך הגדרנו את repeat עבור המקרה שבו $B[\![b]\!]=tt$.

נשים לב ש- skip חסר משמעות.

סה״כ גם עבור המקרה הזה הראינו קיום של עץ גזירה עבור הביטוי הדרוש, והשלמנו את הכיוון הראשון.

נניח שקיים עץ גזירה עבור הביטוי $\langle \text{repeat } s \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma'$

ונראה קיום גם עבור הביטוי משמאל.

נחלק למקרים לפי b:

$\boxed{B[\![b]\!] = tt}$

$$\dfrac{\langle s,\sigma\rangle \to \sigma' \qquad \dfrac{\langle skip, \sigma'\rangle \to \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } skip \text{ else repeat } s \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma'}}{\langle s; \text{if } b \text{ then } skip \text{ else repeat } s \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

מכיוון ש $B[\![b]\!]=tt$ מתבצעת רק האיטרציה הראשונה של repeat ומכאן נעצור את העץ השמאלי. בנוסף, ניתן לעצור את skip כאקסיומה ולתחתיו את תנאי ה-if מכיוון ש $B[\![b]\!]=tt$. נשים לב שגזירה זו זהה לגזירה מאחורי אותנו ב σ'. כלומר מהגדרת comp נפרק את שתי הפקודות הנ"ל והן מקיימות את עץ הגזירה הנדרש.

$$\boxed{B[b]=ff}$$

$$\frac{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma' \qquad \dfrac{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \text{if } b \text{ then skip else repeat } S \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''}}{\langle S, \text{if } b \text{ then skip else repeat } S \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma''}$$

מכיוון ש $B[b]=ff$ מתבצעות לפחות שתי איטרציות. הראשונה - הפעלת S מיידית, וממנה נגזור את העץ השמאלי. השנייה - הפעלה "רקורסיבית" של פעולת ה- repeat ומכן נגזור את העץ הימני. כיוון שידוע לנו ש $B[b]=ff$ ניפול להפעיל תמיד ההפעלה הרקורסיבית, את תנאי ה if. כלומר מהגדרת - comp נפרק את שתי הפקודות הנ"ל ודאי קיבלנו גם כאשר $B[b]=ff$ את כל הגזירה הנדרשת.
סה"כ השלמנו את שני הכיוונים. ∎

סעיף 2 "בחלק התכנותי"

① נוסיף כלל סמנטיקה עבור $x<<y$:

$$A[a_1<<a_2]_s = A[a_1]_s << A[a_2]_s = A[a_1]_s \cdot 2^{A[a_2]_s}$$

② נוסיף כלל סמנטיקה עבור $x>>y$:

$$A[a_1>>a_2]_s = A[a_1]_s >> A[a_2]_s = \left\lfloor A[a_1]_s \,/\, 2^{A[a_2]_s} \right\rfloor$$

חלוקה של int-ים