שפות תכנות תרגיל 2 עומר שולאין

שאלה 1:

1. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-Operational Semantics **Natural**:

(S1;S2);S3 ~ S1;(S2;S3)

נראה שקילות סמנטית באמצעות NOS ע"י שנתאר עץ גזירה עבור הביטוי השמאלי ונגיע לפעולים אלו, ומהן נגיע לעץ גזירה חדש אשר מניב את הביטוי הימני, כנ"ל גם שני.

$\Rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\langle S_1,s\rangle \to s''' ,\ \langle S_2,s'''\rangle \to s'}{\langle (S_1;S_2),s\rangle \to s'}\,comp \qquad \langle S_3,s'\rangle \to s''}{\langle (S_1;S_2);S_3,s\rangle \to s''}\,comp$$

נניח קיום עץ עבור, ונשים לב שנגיע לכך שיש עצי גזירה גם ל- $\langle S_2,s'''\rangle \to s'$ גם ל $\langle S_3,s'\rangle \to s''$ וגם ל $\langle S_1;s\rangle \to s'$, כעת נוכל לבנות את העץ הבא

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1;s\rangle \to s'}\,הנחה \qquad \dfrac{\dfrac{}{\langle S_2,s'''\rangle \to s'}\,הנחה \ ,\ \dfrac{}{\langle S_3,s'\rangle \to s''}\,הנחה}{\langle (S_2;S_3),s'\rangle \to s''}\,comp}{\langle S_1;(S_2;S_3),s\rangle \to s''}\,comp$$

הוכחנו כיוון ראשון.

(ב)

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1; s\rangle \to s'}\,\text{הנחה} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\langle S_2, s'''\rangle \to s'}\,\text{הנחה} \quad \dfrac{}{\langle S_3, s'\rangle \to s''}\,\text{הנחה}}{\langle (S_2;S_3), s'\rangle \to s''}\,\text{comp}}{\langle S_1;(S_2;S_3), s\rangle \to s''}\,\text{comp}$$

נניח קיום עץ עבור ונשים לב שבגלל שכן יש עצי גזירה גם ל- $\langle S_2, s'''\rangle \to s'$ גם ל $\langle S_3, s'\rangle \to s''$ וגם ל $\langle S_1; s\rangle \to s'$, כעת נוכל לבנות את העץ הבא

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1, s\rangle \to s'''}\,\text{הנחה} \quad \dfrac{}{\langle S_2, s'''\rangle \to s'}\,\text{הנחה}}{\langle (S_1;S_2), s\rangle \to s'}\,\text{comp} \qquad \dfrac{}{\langle S_3, s'\rangle \to s''}\,\text{הנחה}}{\langle (S_1;S_2);S_3, s\rangle \to s''}\,\text{comp}$$

נשים לב שמשני הכיוונים גזרנו שני עצים המניבים אחד את השני

ועל כן הוכחנו שקילות סמנטית.

2. הוכיחו שבמקרה הכללי לא מתקיימת השקילות ב- **Natural** Operational Semantics:

S1;S2 ~ S2;S1

כלומר קיימים S1,S2 כך שהשקילות לא מתקיימת.

נראה שני הפעולים אינם שקולים ע"י כך שנביא דוגמה "מצב" - s, ונראה שהפעולה של כ"א מהפעולים עליו יתן לנו "מצב" שונה.

ניקח $S_1 = [x \to 5]$

$S_2 = [x \to 7]$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1, s\rangle \to s'}\,\text{Ass} \qquad \dfrac{}{\langle S_2, s'\rangle \to s''}\,\text{Ass}}{\langle S_1; S_2, s\rangle \to s''}\,\text{comp}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_2, s\rangle \to s''}\,\text{Ass} \qquad \dfrac{}{\langle S_1, s''\rangle \to s'}\,\text{Ass}}{\langle S_2; S_1, s\rangle \to s'}$$

נשים לב כי ע"פ העץ השמאלי:

$s' = s[x \to 5]$ (מהגדרת S_1) ו- $s'' = s'[x \to 7] \to s[x \to 7]$ (מהגדרת S_2 וכן מצבים רק x)

נשים לב כי ע"פ העץ הימני:

$s'' = s[x \to 7]$ (מהגדרת S_2) ו- $s' = s''[x \to 5] \to s[x \to 5]$ (מהגדרת S_1 וכן מצבים רק x)

סה"כ הראינו כי הפעולות הנ"ל מחזירות "מצב" - s', s'' שונה בכל הפעולה ולכן הן אינן שקולות.

שאלה 2:

1. הוכיחו כי ב- Semantics **Axiomatic** מתקיים: $\{false\}\ S\ \{P\}$ עבור כל P.
הדרכה: יש להוכיח בעזרת אינדוקציה מבנית על S.

נוכיח את הטענה בעזרת אינ' מבנית על S.

בסיס 1: $S=skip$

$$\{false\}\ S\ \{P\} = \{false\}\ skip\ \{P\}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\{P\}\ skip\ \{P\}}\ skip}{\{false\}\ skip\ \{P\}}\ cons$$

נשים לב כי false גורר הכל ובפרט P,
ו- P גורר P, ולכן לפי כלל cons
וסה"כ הגענו לאקסיומה והוכחנו את הבסיס הראשון.

בסיס 2: $S= ass$

$$\{false\}\ S\ \{P\} = \{false\}\ x:=a\ \{P\}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\{P[x\to A[a]]\}\ x:=a\ \{P\}}\ ass}{\{false\}\ x:=a\ \{P\}}\ cons$$

נשים לב כי false גורר הכל ובפרט $\{P[x\to A[a]]\}$,
ו- P גורר P, ולכן לפי כלל cons
וסה"כ הגענו לאקסיומה והוכחנו את הבסיס השני.

סעיף 1: $S = comp$

נניח כי קיים עץ גזירה המסתיים בביטוי $\{false\}S\{P\}$
כאשר $S = S_1;S_2$ מכפלה comp, ונקבל את הביטוי הבא:

$$\dfrac{\dfrac{\{Q\}=\{false\}}{\{false\}S_1\{Q\}}\text{ ה"א} \quad , \quad \dfrac{\{Q\}=\{false\}}{\{Q\}S_2\{P\}}\text{ ה"א}}{\{false\}S_1;S_2\{P\}}\ comp$$

כיוון שלביטוי $\{false\}S_1\{Q\}$ גזירה קצרה יותר ניתן להפעיל עליו את ה"א ולבחור את $Q = false$ שכן ההנחה היא עבור S ו-P (P במקרה שלנו היא Q).
מכאן המעבר לפיו $Q=false$ בצד הימני - מ"ג ושוב הפעלתי מה"א (שקיים גם לביטוי הימני עץ גזירה קצר יותר ומכאן שמוכל גם הוא בה"א) את $\{false\}S_1\{P\}$. סה"כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה של comp אשר מקיים את צד האונ'.

צעד 2: $s = cons$

נניח כי קיים עץ גזירה המסתיים בביטוי $\{false\}\ s\ \{p\}$
כאשר $s = s$ מכלל cons, נקבל את הביטוי הבא:

$$\dfrac{\dfrac{}{\{false\}\ s\ \{p\}}\ \text{ה"א}}{\{false\}\ s\ \{p\}}\ cons$$

נניח שעבור עץ גזירה בעומק n-1 מתקיים $\{f\}\ s\ \{p\}$ לכל s ולכל p.
נוכיח נכונות עבור עץ גזירה בעומק n אשר מסתיים ב cons

כיוון שלביטוי $\{false\}\ s\ \{p\}$ גזירה קצרה יותר ניתן להפעיל עליו את ה"א ולבטח את קיום של עץ גזירה עבורו, שכן ההנחה היא לכל s ו-p.

מכאן מ"בית נגזר לפי כלל cons את "השכבה ה-n" (שכן $false \to false$, $p \to p$) והמעבר פורמלי נובע מה"א. סה"כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה של cons אשר מקיים את צעד האינ'.

סעיף 3: $S=\text{while}$

נניח כי קיים עץ גזירה המסתיים בביטוי $\{false\}S\{P\}$ כאשר $S=\text{while } b \text{ do } S$.

מה"א קיימת גזירה ל- $\{false\}S\{P\}$ בעץ גזירה בעומק קטן מ-n.

נגזור ממנו את העץ הבא:

ה"א

$$\{false\}S\{P\}$$

cons

$$\{B[b]\wedge false\}S\{P\}$$

while

$$\{false\}\ \text{while } b \text{ do } S\ \{\neg B[b]\wedge P\}$$

cons

$$\{false\}\ \text{while } b \text{ do } S\ \{P\}$$

נסביר את הגזירות, כאשר הגזירה הראשונה מה"א ניתן לגזור ממנה את זו שמתחתיה כיוון שלפי הפסוקים "$\wedge$" שמכילה false את הביטוי $B[b]$ עדיין משאיר את התנאי ב- false, ולכן הגדרות מתקיימות והפעולה cons חוקית.

הגזירה השלישית לפי תבנית while חוקית באופן מיידי (לפי הגדרה).

נשים לב שכאשר אנו מגיעים לביטוי $\{\neg B[b]\wedge P\}$ בכלל while, התנאי של $\neg B[b]=true$ כיוון שהתנאי $B[b]=false$ שכן הלולאה עצרה. לכן ניתן לגזור את cons שהגזירות חוקיות ($true\wedge P=P$). סה"כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה של while אשר מקיים את צעד האינד'.

צעד 4: $\boxed{S = if}$

נניח כי קיים עץ גזירה המסיים בפסוק $\{false\} S \{P\}$

כאשר $S =$ if b then S_1 else S_2.

מה"א קיימת גזירה ל- $\{false\} S \{P\}$ בעל גזירה בעומק קטן מ-n.

נגזר ממנו את העץ הבא:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{false\}\, S_1 \,\{P\}}\text{ה"א}}{\{B[b] \wedge false\}\, S_1 \,\{P\}}cons \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{false\}\, S_2 \,\{P\}}\text{ה"א}}{\{\neg B[b] \wedge false\}\, S_2 \,\{P\}}cons}{\{false\} \text{ if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \,\{P\}}if$$

נשים לב שהמעבר הראשון הינו לפי כלל if והמעבר השני לפי כלל cons שכן כל(בפסוק בוליאני) $\wedge$ false) = false.
השאר נובע מה"א. סה"כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה של if אשר מקיים את צעד האינ'.

לסיכום, הוכחנו את צעד האינ' בכל ארבעת המקרים והראנו כי מתקיים $\{false\} S \{P\}$ עבור כל P. ∎

2. הוכיחו כי ב- **Axiomatic** Semantics מתקיים:

{x=5} if x=5 then y:=10; z:=y {z=10}

נוכיח את הביטוי ע"פ כללי Axiomatic semantic:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{true \wedge x=5\}\ y:=10\ \{y=10\}}\ ass}{\{x=5\}\ \text{if } x=5 \text{ then } y:=10\ \{y=10\}}\ if \quad , \quad \dfrac{}{\{y=10\}\ z:=y\ \{z=10\}}\ ass}{\{x=5\}\ \text{if } x=5 \text{ then } y:=10\ ;\ z:=y\ \{z=10\}}\ comp$$

מכיוון שהגענו בכל עלי העץ לאקסיומות (ass) אזי

שסה"כ הוכחנו כי מתקיים הביטוי הנ"ל. ∎

3. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-**Axiomatic** Semantics:

(S1;S2);S3 ~ S1;(S2;S3)

נראה שקילות סמנטית באמצעות Axiomatic semantics

ע״י שנראה עץ גזירה עבור הביטוי השמאלי ונגיע לפסוקים שלו,

ומהן נגזור עץ גזירה חדש עבור הביטוי הימני, וכנ״ל לכיוון השני.

$$\dfrac{\dfrac{\{P\}S_1\{T\} \qquad \{T\}S_2\{Q\}}{\{P\}S_1;S_2\{Q\}}\text{comp} \qquad \{Q\}S_3\{R\}}{\{P\}(S_1;S_2);S_3\{R\}}\text{comp}$$

נניח קיום עץ עבור, ונשים לב שנגיע לכך שיש עצי גזירה גם ל- $\{P\}S_1\{T\}$ גם ל $\{T\}S_2\{Q\}$ וגם ל $\{Q\}S_3\{R\}$, כעת נוכל לגזור את העץ הבא

$$\dfrac{\dfrac{}{\{P\}S_1\{T\}}\text{הנחה} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{T\}S_2\{Q\}}\text{הנחה} \qquad \dfrac{}{\{Q\}S_3\{R\}}\text{הנחה}}{\{T\}S_2;S_3\{R\}}\text{comp}}{\{P\}S_1;(S_2;S_3)\{R\}}\text{comp}$$

הוכחנו כיוון ראשון.

4

$$\dfrac{\{P\}\,S_1\,\{T\} \qquad \dfrac{\{T\}\,S_2\,\{Q\} \quad \{Q\}\,S_3\,\{R\}}{\{T\}\,S_2\,;\,S_3\,\{R\}}\,\text{comp}}{\{P\}\,S_1;(S_2\,;\,S_3)\{R\}}\,\text{comp}$$

נניח קיום עץ עבור ונשים לב שנגיע לכך שיש עצי גזירה גם ל- $\{P\}S_1\{T\}$ גם ל $\{T\}S_2\{Q\}$ וגם ל $\{Q\}S_3\{R\}$, כעת נוכל לבנות את העץ הבא

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{P\}\,S_1\{T\}}\,\text{הנחה} \quad \dfrac{}{\{T\}\,S_2\{Q\}}\,\text{הנחה}}{\{P\}\,S_1;S_2\{Q\}}\,\text{comp} \qquad \dfrac{}{\{Q\}\,S_3\,\{R\}}\,\text{הנחה}}{\{P\}\,(S_1\,;\,S_2);S_3\,\{R\}}\,\text{comp}$$

נשים לב שמאותן אקסיומות גזרנו שני עצים המניבים את שני הביטויים הדרושים ועל כן הוכחנו שקילות אקסיומטית ■

שאלה 3:

נרצה להוסיף לשפת While את הפקודה של **repeat** לפקודה הבאה:

repeat S **until** b

זוהי לולאה שתמיד מתבצעת פעם אחת לפחות, והביצוע שלה נמשך כל עוד התנאי b אינו מתקיים. לדוגמא. הקוד הבא:

repeat x = x-10 **until** x<10

יסתיים במצב בו x=5 אם יתחיל במצב בו x=55, ויסתיים במצב בו x = -3 אם יתחיל במצב בו x=7.

1. הוסיפו כלל/ים לטבלה של **Natural** Operational Semantics (טבלה 2.1 בנספח) שיגדירו את פקודת **repeat**. הכללים אינם יכולים להסתמך על מבנה לולאת while הקיימת בשפת while המקורית.

3.1

$$\frac{\langle S, \sigma \rangle \to \sigma'}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma \rangle \to \sigma'} \quad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma' = tt$$

מכיוון שהתנאי מתקיים אנו עושים רק איטרציה אחת ומחזירים את הפלט שלה בתור המצב החדש.

$$\frac{\langle S, \sigma \rangle \to \sigma', \ \langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma' \rangle \to \sigma''}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma \rangle \to \sigma''} \quad \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma' = ff$$

מכיוון שהתנאי אינו מתקיים, לאחר ההפעלה הראשונה, נפעיל על הפלט שלה את פקודת repeat באופן רקורסיבי.
לבסוף נחזיר את הפלט החוזר מהרקורסיה - σ''.

2. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב- **Natural** Operational Semantics
המורחב שיצרתם בסעיף א:

S; **if** b **then** Skip **else** (**reapet** S **until** b) ~ **reapet** S **until** b

$\Rightarrow$

נניח שקיים עץ גזירה עבור הביטוי: S; if b then Skip else (reapet S until b)

ונראה קיום גם עבור הביטוי מימין.

ראשית, מכלל comp:

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \dfrac{}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b), \sigma'\rangle \to \sigma''}}{\langle S; \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b), \sigma\rangle \to \sigma''}\,\text{comp}$$

כעת נחלק למקרים לפי $B[b]$:

$\boxed{B[b]=ff}$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \dfrac{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b), \sigma'\rangle \to \sigma''}\,B[b]=ff}{\langle S; \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b), \sigma\rangle \to \sigma''}\,\text{comp}$$

אנו יודעים מהגדרת if ומקיום העץ המתואר (ההנחה) שקיים (המשך) עץ גזירה עבור הביטוי $\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''$.

בנוסף אנו יודעים מההנחה שמתקיימת הגזירה $\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'$, ויחד ניתן לבצע:

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \dfrac{}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''}\,\text{הנחה}}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma''}\,B[b]=ff$$

מכיוון שבדיוק כך הגדרנו את repeat.

סה״כ עבור המקרה הזה הראינו קיום של עץ גזירה עבור הביטוי הנדרש.

$\boxed{B[\![b]\!]=tt}$

$$
\dfrac{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma' \;\;(\text{ass}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\langle skip,\sigma'\rangle \to \sigma'}\;\text{skip}}{\langle \text{if } b \text{ then } skip \text{ else } (\text{repeat } S \text{ until } b),\sigma'\rangle \to \sigma''}\;B[\![b]\!]=tt}{\langle S;\, \text{if } b \text{ then } skip \text{ else } (\text{repeat } S \text{ until } b),\sigma\rangle \to \sigma''}\;\text{comp}
$$

אנו יודעים מהגזרת if ומקיום העץ המתואר (ההנחה) שקיים (המשך) עץ גזירה עבור הביטוי $\langle skip,\sigma'\rangle \to \sigma'$ (זה גורר ש $\sigma'=\sigma''$).

בנוסף אנו יודעים מההנחה שמתקיימת הגזירה $\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'$, ויחד נוכל לבצע:

$$
\dfrac{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma' \;\;(\text{ass}) \qquad \langle skip,\sigma'\rangle \to \sigma' \;\;(\text{הנחה})}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma\rangle \to \sigma'}\;B[\![b]\!]=tt
$$

מכיוון שבדיוק כך הגדרנו את repeat עבור המקרה שבו $B[\![b]\!]=tt$.

נשים לב ש- skip חסר משמעות.

סה"כ גם עבור המקרה הזה הראינו קיום של עץ גזירה עבור הביטוי הדרוש, והשלמנו את הכיוון הראשון.

נניח שקיים עץ גזירה עבור הביטוי $\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma'$

ונראה קיום גם עבור הביטוי משמאל.

נחלק למקרים לפי b:

$$\boxed{\mathcal{B}[b]=tt}$$

$$\dfrac{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma' \qquad \dfrac{\langle \text{skip},\sigma'\rangle \to \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then skip else repeat } S \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma'}}{\langle S, \text{if } b \text{ then skip else repeat } S \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

מכיוון ש $\mathcal{B}[b]=tt$ מתבצעת רק האיטרציה הראשונה של repeat ומכאן נגזור את הטענה השמאלית. בנוסף, ניתן לגזור את skip באקסיומה ולקיים את תנאי ה-if מכיוון $\mathcal{B}[b]=tt$. נשים לב שגזירה זו עדיין משאירה אותנו ב σ'. כעת מהגדרת - comp נחבר את שתי הפקודות הנ"ל והרי שקיבלנו את עץ הגזירה הנדרש.

$$\boxed{B[b]=ff}$$

$$\frac{\langle s,\sigma\rangle \to \sigma', \quad \dfrac{\langle \text{repeat } s \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \text{if } b \text{ then skip else repeat } s \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''}}{\langle s, \text{if } b \text{ then skip else repeat } s \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma''}$$

מכיוון ש $B[b]=ff$ תתבצענה לפחות שתי איטרציות. הראשונה - הפעולה S מיידית, וממנה נגזור את העץ השמאלי. השנייה - הפעולה "רקורסיבית" של הפעולה ה - repeat ומכך נגזור את העץ הימני. כיוון שאלו לפני ש $B[b]=ff$ ניפול להפעיל את הפעולה הרקורסיבית, את תנאי ה if. כלומר מהגדרת - comp נפריד את שתי הפקודות הנ"ל ונראה שקילות גם כאשר $B[b]=ff$ את כל הגזירה הנדרשת.
סה"כ השלמנו את שני הכיוונים.

סעיף ב "החלק התכנותי"

(1) נוסיף כלל סמנטיקה עבור: x<<y

$$A[a_1<<a_2]_s = A[a_1]_s << A[a_2]_s = A[a_1]_s \cdot 2^{A[a_2]_s}$$

(2) נוסיף כלל סמנטיקה עבור: x>>y

$$A[a_1>>a_2]_s = A[a_1]_s >> A[a_2]_s = \lfloor A[a_1]_s / 2^{A[a_2]_s} \rfloor$$

חלוקה של int-ים