שפות תכנות תרגיל 2 עומר שולאין

שאלה 1:

1. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-**Natural** Operational Semantics:

(S1;S2);S3 ~ S1;(S2;S3)

נראה שקילות סמנטית באמצעות NOS ע"י שנתחיל עם גזירה עבור הביטוי השמאלי ונגיע לעלים שלו, ומהן נבצע עוד גזירה חדש אשר מניב את הביטוי הימני, כנ"ל בS3 שני.

$\Rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\langle S_1, s\rangle \to s''' ,\ \langle S_2, s'''\rangle \to s'}{\langle (S_1;S_2), s\rangle \to s'}\,comp \qquad \langle S_3, s'\rangle \to s''}{\langle (S_1;S_2);S_3, s\rangle \to s''}\,comp$$

נניח קיום של עבור ונשים לב שנגיע לכך שיש לנו גזירה גם ל- $\langle S_2, s'''\rangle \to s'$ גם ל $\langle S_3, s'\rangle \to s''$ וגם ל $\langle S_1; s\rangle \to s'$, כעת נוכל לגזור את העץ הבא

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1; s\rangle \to s'}\,\text{הנחה} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\langle S_2, s'''\rangle \to s'}\,\text{הנחה} ,\ \dfrac{}{\langle S_3, s'\rangle \to s''}\,\text{הנחה}}{\langle (S_2;S_3), s'\rangle \to s''}\,comp}{\langle S_1;(S_2;S_3), s\rangle \to s''}\,comp$$

הוכחנו כיוון ראשון.

ב

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1; s \rangle \to s'}\text{הנחה} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\langle S_2, s''' \rangle \to s'}\text{הנחה} \quad \dfrac{}{\langle S_3, s' \rangle \to s''}\text{הנחה}}{\langle (S_2;S_3), s' \rangle \to s''}\text{comp}}{\langle S_1;(S_2;S_3), s \rangle \to s''}\text{comp}$$

נניח קיום עץ עבור ונשים לב שנגיע לכך שיש עצי גזירה גם ל- $\langle S_2, s''' \rangle \to s'$ גם ל $\langle S_3, s' \rangle \to s''$ וגם ל $\langle S_1; s \rangle \to s'$, כעת נוכל לבנות את העץ הבא

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1, s \rangle \to s'''}\text{הנחה} \quad \dfrac{}{\langle S_2, s''' \rangle \to s'}\text{הנחה}}{\langle (S_1;S_2), s \rangle \to s'}\text{comp} \qquad \dfrac{}{\langle S_3, s' \rangle \to s''}\text{הנחה}}{\langle (S_1;S_2);S_3, s \rangle \to s''}\text{comp}$$

נשים לב שמשני הכיוונים גזרנו שני עצים המניבים אחד את השני

ועל כן הוכחנו שקילות סמנטית.

2. הוכיחו שבמקרה הכללי לא מתקיימת השקילות ב- **Natural** Operational Semantics:

S1;S2 ~ S2;S1

כלומר קיימים S1,S2 כך שהשקילות לא מתקיימת.

נראה שני הבלוקים אינם שקולים ע"י כך שנביא דוגמה "מצב" - s, ונראה שהפעלה של כ"א מהבלוקים עליו יתן לנו "מצב" שונה.

נבחר $S_1 = [x \to 5]$

$S_2 = [x \to 7]$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S_1, s\rangle \to s'}\,Ass \qquad \dfrac{}{\langle S_2, s'\rangle \to s''}\,Ass}{\langle S_1; S_2, s\rangle \to s''}\,comp \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{\langle S_2, s\rangle \to s''}\,Ass \qquad \dfrac{}{\langle S_1, s''\rangle \to s'}\,Ass}{\langle S_2; S_1, s\rangle \to s'}$$

נשים לב כי ע"פ העץ השמאלי:

$s' = s[x \to 5]$ (מהגדרת S_1) ו- $s'' = s'[x \to 7] \to s[x \to 7]$ (מהגדרת S_2 וכן מצביעים לx)

נשים לב כי ע"פ העץ הימני:

$s'' = s[x \to 7]$ (מהגדרת S_2) ו- $s' = s''[x \to 5] \to s[x \to 5]$ (מהגדרת S_1 וכן מצביעים לx)

סה"כ הראינו כי ההפעלות הנ"ל מרצעות "מצב" - s', s'' שונה בכל הפעלה ולכן אין שקילות.

<u>שאלה 2:</u>

1. הוכיחו כי ב- Axiomatic Semantics מתקיים: {false} S {P} עבור כל P.
<u>הדרכה</u>: יש להוכיח בעזרת אינדוקציה מבנית על S.

נוכיח את הטענה בעזרת אינ' מבנית על S.

<u>בסיס 1:</u> $S = skip$

$$\{false\}\ S\ \{P\} = \{false\}\ skip\ \{P\}$$

$$\cfrac{\cfrac{}{\{P\}\ skip\ \{P\}}\ skip}{\{false\}\ skip\ \{P\}}\ cons$$

נשים לב כי $false$ גורר הכל ובפרט P, ו- P גורר P, ולכן נוכל לעבור לפי $cons$ וסה"כ הגענו לאקסיומה והוכחנו את הבסיס הראשון.

<u>בסיס 2:</u> $S = ass$

$$\{false\}\ S\ \{P\} = \{false\}\ x := a\ \{P\}$$

$$\cfrac{\cfrac{}{\{P[x \to A[a]]\}\ x := a\ \{P\}}\ ass}{\{false\}\ x := a\ \{P\}}\ cons$$

נשים לב כי $false$ גורר הכל ובפרט $\{P[x \to A[a]]\}$, ו- P גורר P, ולכן נוכל לעבור לפי $cons$ וסה"כ הגענו לאקסיומה והוכחנו את הבסיס השני.

צעד 1: $S = comp$

נניח כי קיים עץ גזירה המסתיים בביטוי $\{false\}S\{P\}$
כאשר $S = S_1;S_2$ מכלל comp, ונקבל את הביטוי הבא:

$$\dfrac{\dfrac{\{Q\}=\{false\}}{\{false\}S_1\{Q\}}\,\text{ה"א} \quad , \quad \dfrac{\{Q\}=\{false\}}{\{Q\}S_2\{P\}}\,\text{ה"א}}{\{false\}S_1;S_2\{P\}}\,comp$$

כיוון שלביטוי $\{false\}S_1\{Q\}$ גזירה קצרה יותר ניתן להפעיל עליו את ה"א ולבחור את $Q = false$ שכן ההנחה היא על S ו-P (P במקרה שלנו היא Q).
מכאן המודגש לפיו $Q=false$ בצד הימני - מ"ג' ושוב קיבלנו מה"א (שקיים גם לביטוי הימני עץ גזירה קצר יותר ומכאן שמקבל גם הוא בה"א) את $\{false\}S_1\{P\}$. סה"כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה של comp אשר מקיים את צד השני.

צעד 2: S=cons

נניח כי קיים כלל גזירה המסתיים בביטוי $\{false\}s\{p\}$
כאשר $S=S$ מהצורה cons, נקבל את הביטוי הבא:

$$\dfrac{\dfrac{}{\{false\}\ S\ \{p\}}\ \text{ה"א}}{\{false\}\ S\ \{p\}}\ \text{cons}$$

נניח שלפי כלל גזירה בעומק ה-n מתקיים $\{f\}s\{p\}$ לכל s ולכל p.
נוכיח נכונות עבור כלל גזירה בעומק n אשר מסתיים ב cons

כיוון שלביטוי $\{false\}s\{p\}$ גזירה קצרה יותר נוכל להפעיל עליו את ה"א ולבחור את קיום של כלל גזירה עבורו, שכן ההנחה היא לכל s ו-p.

מכאן מ"יבית נגזור לפי כלל cons את "השגבה" ה-ח" (שכן $false \to false$, $p \to p$) והמשפט פונים נובע מה"א. סה"כ הראינו כלל גזירה חוקי עבור המקרה של cons אשר מקיים את צעד האינ'.

צעד 3: S=while

נניח כי קיים עץ גזירה המסתיים בביטוי $\{false\}S\{P\}$
כאשר $S = \text{while } b \text{ do } S$.
מה"א קיימת גזירה ל- $\{false\}S\{P\}$ בעל גזירה בעומק קטן מ-n.
נגזור ממנו את העץ הבא:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{false\}S\{P\}}\;\text{ה"א}}{\{B[b]\wedge false\}S\{P\}}\;\text{cons}}{\{false\}\text{ while } b \text{ do } S\ \{\neg B[b]\wedge P\}}\;\text{while}}{\{false\}\text{ while } b \text{ do } S\ \{P\}}\;\text{cons}$$

נסביר את הגזירות, כאשר הגזירה הראשונה מה"א נוכל לגזור ממנה
את זו שמתחתיה כיוון שלפרדיקט לפסוקית "$\wedge$" שמכילה false את
הביטוי $B[b]$ עדיין משאיר את הערך ב- false, ולכן ההגדרות
מתקיימות והפעולה cons חוקית.
הגזירה השלישית לפי תבנית while חוקית באופן מיידי (לפי הגדרה).
נשים לב שכאשר אנו מגיעים לביטוי $\{\neg B[b]\wedge P\}$ בכלל while,
הערך של $\neg B[b] = true$ כיוון שהתנאי $B[b] = false$ שכן
הלולאה עצרה. לכן נוכל לגזור את cons שהגזירות חוקיות
($true\wedge P = P$). סה"כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה
של while אשר מקיים את צעד האינ'.

צעד 4: $\boxed{S = if}$

נניח כי קיים עץ גזירה המסיים בביטוי $\{false\}S\{P\}$

כאשר $S = if\ b\ then\ S_1\ else\ S_2$.

מה"א קיימת גזירה ל- $\{false\}S\{P\}$ בעל גזירה בעומק קטן מ-n.

נגזר ממנו את העץ הבא:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ה"א}}{\{false\}S_1\{P\}}\ cons}{\{B[b]\wedge false\}S_1\{P\}}\ ,\ \dfrac{\dfrac{\text{ה"א}}{\{false\}S_2\{P\}}\ cons}{\{\neg B[b]\wedge false\}S_2\{P\}}}{\{false\}\ if\ b\ then\ S_1\ else\ S_2\ \{P\}}\ if$$

נשים לב שהמעבר הראשון הינו לפי כלל if והמעבר השני לפי כלל cons שכן כל(ביטוי בוליאני) $\wedge\ false) = false$.

השאר נובע מה"א. סה"כ הראינו עץ גזירה חוקי עבור המקרה של if אשר מקיים את צעד האינ'.

לסיכום, הוכחנו את צעד האינ' בכל ארבעת המקרים והראינו כי מתקיים $\{false\}S\{P\}$ עבור כל P. ∎

2. הוכיחו כי ב- **Axiomatic** Semantics מתקיים:

{x=5} if x=5 then y:=10; z:=y {z=10}

נוכיח את הביטוי ע"פ כללי Axiomatic semantic:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{true \land x=5\}\ y:=10\ \{y=10\}}\ ass}{\{x=5\}\ if\ x=5\ then\ y:=10\ \{y=10\}}\ if \quad , \quad \dfrac{}{\{y=10\}\ z:=y\ \{z=10\}}\ ass}{\{x=5\}\ if\ x=5\ then\ y:=10\ ;\ z:=y\ \{z=10\}}\ comp$$

מכיוון שהגענו בכל עלי העץ לאקסיומות (ass) אז,
סה"כ הוכחנו כי מתקיים הביטוי הנ"ל. $\blacksquare$

3. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב-**Axiomatic** Semantics:

(S1;S2);S3 ~ S1;(S2;S3)

נראה שקילות סמנטית באמצעות Axiomatic semantics

ע"י שנבנה עץ גזירה עבור הביטוי השמאלי ונגיע לפסוקים אלו,

ומהן נבנה עץ גזירה חדש אשר מניב את הביטוי הימני, וכנ"ל לכיוון השני.

$$\dfrac{\dfrac{\{P\}\,S_1\,\{T\} \quad \{T\}\,S_2\,\{Q\}}{\{P\}\,S_1;S_2\,\{Q\}}\;comp \qquad \{Q\}\,S_3\,\{R\}}{\{P\}\,(S_1;S_2);S_3\,\{R\}}\;comp$$

נניח קיום של עבור, ונשים לב שנגיע לכך שיש עצי גזירה גם ל- $\{P\}S_1\{T\}$

גם ל $\{T\}S_2\{Q\}$ וגם ל $\{Q\}S_3\{R\}$, כעת נוכל לבנות

את העץ הבא

$$\dfrac{\dfrac{}{\{P\}\,S_1\,\{T\}}\;\text{הנחה} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\{T\}\,S_2\,\{Q\}}\;\text{הנחה} \quad \dfrac{}{\{Q\}\,S_3\,\{R\}}\;\text{הנחה}}{\{T\}\,S_2;S_3\,\{R\}}\;comp}{\{P\}\,S_1;(S_2;S_3)\,\{R\}}\;comp$$

הוכחנו כיוון ראשון.

4

$$\dfrac{\{P\}\,S_1\,\{T\} \qquad \dfrac{\{T\}\,S_2\,\{Q\} \quad \{Q\}\,S_3\,\{R\}}{\{T\}\,S_2\,;\,S_3\,\{R\}}\,comp}{\{P\}\,S_1;(S_2\,;\,S_3)\,\{R\}}\,comp$$

נניח קיום עץ עבור , ונשים לב שנגיע לכך שיש עצי גזירה גם ל- $\{P\}S_1\{T\}$ גם ל $\{T\}S_2\{Q\}$ וגם ל $\{Q\}S_3\{R\}$, כעת נוכל לבנות את העץ הבא

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{P\}\,S_1\,\{T\}}\,\text{הנחה} \quad \dfrac{}{\{T\}\,S_2\,\{Q\}}\,\text{הנחה}}{\{P\}\,S_1;S_2\,\{Q\}}\,comp \qquad \dfrac{}{\{Q\}\,S_3\,\{R\}}\,\text{הנחה}}{\{P\}\,(S_1\,;\,S_2)\,;\,S_3\,\{R\}}\,comp$$

נשים לב שמאותן אקסיומות בנינו שני עצים המניבים את שני הביטויים השקולים ולכן הוכחנו שקילות אקסיומטית ■

שאלה 3:

נרצה להוסיף לשפת While את הפקודה של **repeat** לפקודה הבאה:

repeat S **until** b

זוהי לולאה שתמיד מתבצעת פעם אחת לפחות, והביצוע שלה נמשך כל עוד התנאי b אינו מתקיים. לדוגמא. הקוד הבא:

repeat x = x-10 **until** x<10

יסתיים במצב בו x=5 אם יתחיל במצב בו x=55, ויסתיים במצב בו x = -3 אם יתחיל במצב בו x=7.

1. הוסיפו כלל/ים לטבלה של **Natural** Operational Semantics (טבלה 2.1 בנספח) שיגדירו את פקודת **repeat**. הכללים אינם יכולים להסתמך על מבנה לולאת while הקיימת בשפת while המקורית.

3.1

$$\frac{\langle S, \sigma \rangle \to \sigma'}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma \rangle \to \sigma'} \quad \text{if } \mathcal{B}[b]\sigma' = tt$$

מכיוון שהתנאי מתקיים אנו עושים רק איטרציה אחת ומחזירים את הפלט שלה בתור המצב החדש.

$$\frac{\langle S, \sigma \rangle \to \sigma', \ \langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma' \rangle \to \sigma''}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma \rangle \to \sigma''} \quad \text{if } \mathcal{B}[b]\sigma' = ff$$

מכיוון שהתנאי אינו מתקיים, לאחר ההפעלה הראשונה, נפעיל על הפלט שלה את פקודת repeat באופן רקורסיבי.
לבסוף נחזיר את הפלט החוזר מהרקורסיה - σ''.

2. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב- **Natural** Operational Semantics המורחב שיצרתם בסעיף א:

S; **if** b **then** Skip **else** (**reapet** S **until** b) ~ **reapet** S **until** b

$\Rightarrow$

נניח שקיים עץ גזירה עבור הביטוי: S; if b then Skip else (reapet S until b)

ונראה קיום גם עבור הביטוי מימין.

ראשית, מכלל comp:

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,ass \qquad \dfrac{}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma'\rangle \to \sigma''}}{\langle S;\ \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma\rangle \to \sigma''}\,comp$$

כעת נחלק למקרים לפי $B[b]$:

$\boxed{B[b]=ff}$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,ass \qquad \dfrac{\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma'\rangle \to \sigma''}\,B[b]=ff}{\langle S;\ \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b),\sigma\rangle \to \sigma''}\,comp$$

אנו יודעים מהגדרת if ומקיום העץ המתואר (ההנחה) שקיים (המשך) עץ גזירה עבור הביטוי $\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma'\rangle \to \sigma''$.

בנוסף אנו יודעים מההנחה שמתקיימת הגזירה $\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'$, ויחד נוכל לגזור:

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,ass \qquad \langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma'\rangle \to \sigma''\ \text{הנחה}}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma\rangle \to \sigma''}\,B[b]=ff$$

מכיוון שבאופן כזה הגדרנו את repeat.

סה"כ עבור המקרה הזה הראינו קיום של עץ גזירה עבור הביטוי הנדרש.

$$\boxed{B[\![b]\!]=tt}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\langle skip,\sigma'\rangle \to \sigma'}\,\text{skip}}{\langle \text{if } b \text{ then } skip \text{ else } (\text{repeat } S \text{ until } b),\sigma'\rangle \to \sigma''}\,B[\![b]\!]=tt}{\langle S;\text{if } b \text{ then } skip \text{ else } (\text{repeat } S \text{ until } b),\sigma\rangle \to \sigma''}\,\text{comp}$$

אנו יודעים מהגדרת if ומקיום הצד המתואר (ההנחה) שקיים (המשך) עץ גזירה עבור הביטוי $\langle skip,\sigma'\rangle \to \sigma'$ (זה גורר ש $\sigma'=\sigma''$).

בנוסף אנו יודעים מההנחה שמתקיימת הגזירה $\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'$, ויחד נוכל לגזור:

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma'}\,\text{ass} \qquad \dfrac{}{\langle skip,\sigma'\rangle \to \sigma'}\,\text{הנחה}}{\langle \text{repeat } S \text{ until } b,\sigma\rangle \to \sigma'}\,B[\![b]\!]=tt$$

מכיוון שבדיוק כך הגדרנו את repeat עבור המקרה שבו $B[\![b]\!]=tt$.

נשים לב ש- skip חסר משמעות.

סה"כ גם עבור המקרה הזה הראינו קיום של עץ גזירה עבור הביטוי הנדרש, והשלמנו את הכיוון הראשון.

נניח שקיים עץ גזירה עבור הביטוי $\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma'$

ונראה קיום גם עבור הביטוי משמאל.

נחלק למקרים לפי b:

$\boxed{B[b]=tt}$

$$\frac{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma' \qquad \dfrac{\langle \text{skip},\sigma'\rangle \to \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then skip else repeat } S \text{ until } b,\sigma'\rangle \to \sigma'}}{\langle S; \text{if } b \text{ then skip else repeat } S \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

מכיוון ש $B[b]=tt$ תתבצע רק האיטרציה הראשונה של repeat ומכאן נגזור את העלה השמאלי. בנוסף, ניתן לגזור את skip באקסיומה ולתרגם את תנאי ה-if מכיוון $B[b]=tt$. נשים לב שגזירה זו עדיין משאירה אותנו ב σ'. כעת, מהגדרת comp - נשרשר את שתי הפקודות הנ"ל ונקבל את עץ הגזירה הנדרש.

$$\boxed{B[b]=ff}$$

$$\frac{\langle S,\sigma\rangle \to \sigma' \qquad \dfrac{\langle \text{repeat } S \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \text{if } b \text{ then skip else repeat } S \text{ until } b, \sigma'\rangle \to \sigma''}}{\langle S, \text{if } b \text{ then skip else repeat } S \text{ until } b, \sigma\rangle \to \sigma''}$$

מכיוון ש $B[b]=ff$ מתבצעות לפחות שני איטרציות. הראשונה - הפעלת S מיידית, וממנה נגזור את העלה השמאלי. השנייה - הפעלה "רקורסיבית" של פעולת ה - repeat ומכך נגזור את העלה הימני. כיוון שאלו לפני ש $B[b]=ff$ נוכל להקדים את ההפעלה הרקורסיבית, את תנאי ה if. כלומר מהגזרת - comp נפרק את שתי הפקודות הנ"ל והרי קיבלנו גם כאשר $B[b]=ff$ את כל הגזירה הנדרש.

סה"כ הוכחנו את שני הכיוונים.

סעיף 2 "החלק התכנותי"

① נוסיף כלל סמנטיקה עבור $x<<y$:

$$A[a_1<<a_2]_s = A[a_1]_s << A[a_2]_s = A[a_1]_s \cdot 2^{A[a_2]_s}$$

② נוסיף כלל סמנטיקה עבור $x>>y$:

$$A[a_1>>a_2]_s = A[a_1]_s >> A[a_2]_s = \lfloor A[a_1]_s / 2^{A[a_2]_s} \rfloor$$

חלוקה של int-ים