שפות תכנות תרגיל 3 - נועם שילאי

<u>שאלה 1:</u> חישוב ביטויי למדא

חשבו את הביטויים הבאים עד כמה שניתן (אם יש גזירה אינסופית הסבירו במילים למה):

1. $(\lambda z.\, z)\ (\lambda y.\ \ y\ \ y)\ (\lambda x.\, x\ a)\ =$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda y.\, y\ y)\ (\lambda x.\, x\ a) =$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda x.\, x\, a)\ (\lambda x.\, x\ a) =$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda x.\, x\ a)\ a$

$\boxed{a\ a}$

2. $(\lambda x.\ \ \lambda y.\ \ x\ y\ y)\ (\lambda a.\, a)\ b\ \ =$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda y\ \ (\lambda a.\, a)\ \ y\ y)\ b\ =$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda a.\, a)\ b\ b\ =$

$\boxed{b\ b}$

(1 (2

1) 3)

3. $(((\lambda x.\ \lambda y.\ (x\ y))\ (\lambda y.\ y))\ w) =$

$\alpha \to (((\lambda x. \lambda y. (x\ y))(\lambda t. t))\ w =$

$\beta \to (\lambda y.\ ((\lambda t.\ t)\ y))\ w =$

$\beta \to (\lambda t. t)\ w =$

$\boxed{w}$

1) 4)

גיזרו את הביטוי בסעיף 4 פעם אחת בעזרת call-by-value ופעם שנייה בעזרת call-by-name. האם קיבלתם את אותה תוצאה?

4. $(\lambda x.\ y)\ ((\lambda y.\ y\ y\ y)\ (\lambda x.\ x\ x\ x))$

CBN:

$\beta \to (\lambda x. y)((\lambda y. y y y)(\lambda x.\ x x x)) = \boxed{y}$

אין מופע של x לכן נשאר רק y

CBV:

$\beta \to (\lambda x. y)((\lambda y. y y y)(\lambda x.\ x x x)) =$

$\beta \to (\lambda x. y)[(\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx)] =$

$(\lambda x. y)[(\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx)] =$

קיבלנו ביטוי שלא נגמר מכיוון שתמיד נהיה חייבים לבצע ועוד עוד ביטוי של $(\lambda x. xxx)$, לכן לא נגמר אף פעם.

סה"כ לא קיבלנו את אותה התוצאה.

שאלה 2: תחשיב למדא לביטויים בוליאניים

נתונות ההגדרות הבאות (שחלקן ראינו בתרגול):

tru = $\lambda t.\lambda f.\ \ t$

fls = $\lambda t.\lambda f.\ \ f$

test = $\lambda l.\lambda m.\lambda n.\ \ l\ m\ n$

or = $\lambda b.\lambda c.\ \ b\ tru\ c$

1. כתבו חישוב עם אסטרטגיית call-by-value לביטוי:

test (or tru fls) a b

כאשר a, b הם ערכים כלשהם.

מכיוון שאנו מחשבים עם CBV קודם נחשב את הביטוי הפנימי:

$$\text{or tru fls} =$$

$$\xrightarrow{\text{הצבת or}} (\lambda b.\lambda c.\ b\ \text{tru}\ c)\ \text{tru}\ \text{fls} =$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda b.\lambda c.\ b\ \text{tru}\ c)\ \text{tru}\ \text{fls} =$$

$$\xrightarrow{\text{הצבת tru}} \text{tru tru fls} =$$

$$\xrightarrow{\text{הצבת tru}} (\lambda t.\lambda f.\ t)\ \text{tru}\ \text{fls} = \boxed{\text{tru}}$$

הביטוי λ
מקבל גם fls
אך אין לפם

כעת נחשב את ט הביטוי, מלבד הביטוי הפנימי שחושב כבר:

נציב

$$\text{test}\ (\text{tru})\ a\ b =$$

$$\xrightarrow{\text{הצבה test}} (\lambda l.\ \lambda m.\ \lambda n.\ l\ m\ n)\ \text{tru}\ a\ b =$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda l.\ \lambda m.\ \lambda n.\ l\ m\ n)\ \underbrace{\text{tru}}\ \underbrace{a}\ \underbrace{b} =$$

$$\xrightarrow{\beta}\ \text{tru}\ a\ b =$$

$$\xrightarrow{\text{הצבה tru}} (\lambda t.\ \lambda f.\ t)\ \underbrace{a}\ \underbrace{b} = \boxed{a}$$

אין מופע
ל-f בגוף ולכן
לא נשלח
לשום מקום

סה"כ קיבלנו את הביטוי $\boxed{a}$.

2. כתבו ביטוי בתחשיב למדא עבור nand.

ב(ב

אנו יודעים מהגדרה שהמשמעות של NAND הינה Not(And)

ננסה בהתחלה זה נכתיב ביטוי λ. בהשראת הדוגמה בתרגול כי -

$Not := \lambda b.b\ fls\ tru$

$AND := \lambda b.\lambda c.\ b\ c\ fls$

ומכאן $NAND := (\lambda b.b\ fls\ tru)\ (\lambda b.\lambda c.\ b\ c\ fls)$

$= (\lambda b.\lambda c.\ b\ c\ fls)\ fls\ tru$

נסדר את הסוגריים כך שלא יהיה T-APP מיותר!

$$\boxed{NAND := \lambda b.\lambda c.([b\ c\ fls]\ fls\ tru)}$$

נשים לב שאכן הביטוי שכתבנו נכון:

$NAND\ tru\ tru =$

NAND ה' $\{\lambda b.\lambda c.([b\ c\ fls]\ fls\ tru)\}\ tru\ tru =$

$\xrightarrow{\beta} \{\lambda b.\lambda c.([\underline{b}\ \underline{c}\ fls]\ fls\ tru)\}\ \underline{tru}\ \underline{tru} =$

$\xrightarrow{\beta} ([\{tru\ tru\ fls]\ fls\ tru) =$

הגדרת tru $([\{\lambda t.\lambda f.t\}\ tru\ fls]\ fls\ tru) =$

$\xrightarrow{\beta}\ tru\ fls\ tru =$

tru .ה $(\lambda t.\lambda f.t)\ fls\ tru = \boxed{fls}$

$$\text{NAND} \;\; \text{fls} \;\; \text{fls} =$$

$$\xrightarrow{\text{NAND}} \{\lambda b.\lambda c.([b\ c\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru})\}\ \text{fls}\ \text{fls} =$$

$$\xrightarrow{\beta} \{\lambda b.\lambda c.([\underline{b}\ \underline{c}\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru})\}\ \underline{\text{fls}}\ \underline{\text{fls}} =$$

$$\xrightarrow{\beta} ([\text{fls}\ \text{fls}\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru}) =$$

$$\xrightarrow{\text{fls}} ([\{\lambda t.\lambda f.f\}\ \text{fls}\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru}) =$$

$$\xrightarrow{\beta} \text{fls}\ \text{fls}\ \text{tru} =$$

$$\xrightarrow{\text{fls}} (\lambda t.\lambda f.f)\ \text{fls}\ \text{tru} = \boxed{\text{tru}}$$

$$\text{NAND} \;\; \text{tru} \;\; \text{fls} =$$

$$\xrightarrow{\text{NAND}} \{\lambda b.\lambda c.([b\ c\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru})\}\ \text{tru}\ \text{fls} =$$

$$\xrightarrow{\beta} \{\lambda b.\lambda c.([\underline{b}\ \underline{c}\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru})\}\ \underline{\text{tru}}\ \underline{\text{fls}} =$$

$$\xrightarrow{\beta} ([\text{tru}\ \text{fls}\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru}) =$$

$$\xrightarrow{\text{tru}} ([\{\lambda t.\lambda f.t\}\ \text{fls}\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru}) =$$

$$\xrightarrow{\beta} \text{fls}\ \text{fls}\ \text{tru} =$$

$$\xrightarrow{\text{fls}} (\lambda t.\lambda f.f)\ \text{fls}\ \text{tru} = \boxed{\text{tru}}$$

$$\text{NAND} \;\; \text{fls} \;\; \text{tru} =$$

$$\xrightarrow{\text{NAND}} \{\lambda b.\lambda c.([b\ c\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru})\}\ \text{fls}\ \text{tru} =$$

$$\xrightarrow{\beta} \{\lambda b.\lambda c.([\underline{b}\ \underline{c}\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru})\}\ \underline{\text{fls}}\ \underline{\text{tru}} =$$

$$\xrightarrow{\beta} ([\text{fls}\ \text{tru}\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru}) =$$

$$\xrightarrow{\text{fls}} ([\{\lambda t.\lambda f.f\}\ \text{tru}\ \text{fls}]\ \text{fls}\ \text{tru}) =$$

$$\xrightarrow{\beta} \text{fls}\ \text{fls}\ \text{tru} =$$

$$\xrightarrow{\text{fls}} (\lambda t.\lambda f.f)\ \text{fls}\ \text{tru} = \boxed{\text{tru}}$$

ב) 3)

נחשב את הביטוי.

הגדרתי בסעיף הקודם:

$$Nand := \lambda b.\lambda c.([b\ c\ fls]\ fls\ tru)$$

1. nand tru fls

$\xrightarrow[nand]{\text{הגדרה}}$ $\lambda b.\lambda c.([b\ c\ fls]\ fls\ tru)\ tru\ fls$

$\xrightarrow{\beta}$ $([tru\ fls\ fls]\ fls\ tru)$

$\xrightarrow[tru]{\text{ה}}$ $([(\lambda b.\lambda c.b)\ fls\ fls]\ fls\ tru)$

$\xrightarrow{\beta}$ $([fls]\ fls\ tru)$

$\xrightarrow[fls]{\text{ה}}$ $([\lambda b.\lambda c.c]\ fls\ tru)$

$\xrightarrow{\beta}$ $\underline{\underline{tru}}$

2. nand tru tru

$\xrightarrow[nand]{\text{ה}}$ $\lambda b.\lambda c.([b\ c\ fls]\ fls\ tru)\ tru\ tru$

$\xrightarrow{\beta}$ $([tru\ tru\ fls]\ fls\ tru)$

$\xrightarrow[tru]{\text{ה}}$ $([(\lambda b.\lambda c.b)\ tru\ fls]\ fls\ tru)$

$\xrightarrow{\beta}$ $([tru]\ fls\ tru)$

$\xrightarrow[tru]{\text{ה}}$ $([\lambda b.\lambda c.b]\ fls\ tru)$

$\xrightarrow{\beta}$ $\underline{\underline{fls}}$

שאלה 3: תחשיב למדא לביטויים אריתמטיים

בתרגול ראינו את ההגדרות הבאות למספרים טבעיים ופעולות אריתמטיות:

$c_0 = \lambda s.\lambda z.\ z$

$c_1 = \lambda s.\lambda z.\ s\, z$

$c_2 = \lambda s.\lambda z.\ s\,(s\, z)$

$c_3 = \lambda s.\lambda z.\ s\,(s\,(s\, z))$

$\dots$

$succ = \lambda n.\ \lambda s.\ \lambda z.\ s\,(n\, s\, z)$

$plus = \lambda m.\ \lambda n.\ \lambda s.\ \lambda z.\ m\, s\,(n\, s\, z)$

$times = \lambda m.\lambda n.\ m\ (plus\ n)\ c_0$

$\text{iszero} = \lambda m.\ m\ (\lambda x. fls)\ tru$

1. חשבו את $succ\ c_0$ בעזרת Call-By-Name, האם התוצאה היא c_1?

$succ\ c_0 =$

succ ה.ג $(\lambda n.\lambda s.\lambda z.\ s(n\ s\ z))(\lambda s.\lambda z.\ z) =$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda n.\lambda s.\lambda z.\ s(n\ s\ z))(\lambda s.\lambda z.\ z) =$

$(\lambda s.\lambda z.\ s((\lambda s.\lambda z.\ z)\ s\ z)) =$

ראינו בהרצאה שב- CBN לא מבצעים כלל β-reduction בתוך אבסטרקציות ולכן החישוב יכשל ויעצר.

סה"כ לא קיבלנו את c_1 עפ"י הגדרתו.

2. חשבו את succ c_0 בעזרת Call-By-Value, האם התוצאה היא c_1?

$$succ\ c_0 =$$

succ .ה $(\lambda n.\lambda s.\lambda z.\ s(n\ s\ z))(\lambda s.\lambda z.\ z) =$

$\beta \rightarrow (\lambda n.\lambda s.\lambda z.\ s(n\ s\ z))(\lambda s.\lambda z.\ z) =$

$(\lambda s.\lambda z.\ s((\lambda s.\lambda z.\ z)\ s\ z)) =$

ראינו בהרצאה שב-CBV לא מבצעים כלל β-reduction בתוך אבסטרקציות ולכן החישוב יעצר.

סה"כ לא קיבלנו את c_1 עפ"י הגדרתו.

3(3

3. הגדירות פונקציית isodd, שתקבל מספר טבעי כפי שקודדנו בהגדרת השאלה ותחזיר tru אם המספר הוא אי-זוגי ו-fls אם המספר זוגי.

נגדיר את isodd באופן הבא -

$$\boxed{isodd := \lambda n.n \ not \ fls}$$

האיניציאל - אם המספר הוא 0, הוא יקבל את not ו-fls ויחזיר fls.
אם הוא 1 הוא יקבל את שניהם ויחזיר אותם כלומר not fls, בדיוק
הוא מחזיר tru. מכאן והלאה הוא יקבל פעם עוד not לפי המספר
ובעיקרון של ה-not-ים יקבל בסוף על ה- fls אם המספר זוגי
זו הג.את not כאשר הגדרנו קודם: $not := \lambda b \ b \ fls \ tru$

3(4

4. חשבו ע"י רדוקציית בטא את:

isodd 4

isodd 5

$$isodd \ 4 = (\lambda n.n \ not \ fls) \ c_4$$

$$c_4 \ not \ fls =$$

$$\lambda s.\lambda z.\ s(s(s(s\,z)))\ not\ fls =$$

$$not(not(not(not \ fls))) =$$

$$not(not(not(tru))) =$$

$$not(not(fls)) =$$

$$not(tru) =$$

$$\boxed{fls}$$

נשים לב כי:

$$not \ tru =$$

$$(\lambda b.b \ fls \ tru) \ tru =$$

$$tru \ fls \ tru =$$

$$(\lambda t.\lambda f \ t) \ fls \ tru = \boxed{fls}$$

$$not \ fls =$$

$$(\lambda b.b \ fls \ tru) \ fls =$$

$$fls \ fls \ tru =$$

$$(\lambda t.\lambda f \ f) \ fls \ tru = \boxed{tru}$$

$$\text{isodd } 5 = (\lambda n.\, n \text{ not fls})\ c_5$$

$$c_4 \text{ not fls} =$$

$$\lambda s.\lambda z.\, s(s(s(s(s\, z)))) \ \underbrace{\text{not}} \ \underbrace{\text{fls}} =$$

$$\text{not}(\text{not}(\text{not}(\text{not}(\text{not fls})))) =$$

$$\text{not}(\text{not}(\text{not}(\text{not}(\text{tru})))) =$$

$$\text{not}(\text{not}(\text{not}(\text{fls}))) =$$

$$\text{not}(\text{not}(\text{tru})) =$$

$$\text{not}(\text{fls}) =$$

$$\boxed{\text{tru}}$$

שאלה 4: Simply Typed Lambda Calculus

בכל אחת מהקביעות הבאות, קיבעו מהו הטיפוס של T כך שהקביעה מתקיימת.
הוכיחו תוך שימוש בכללי הגזירה:

1. f:Bool → Bool ⊢ (f (if true then false else true)):T
2. f:Bool → Bool ⊢ (λx: $Bool.$ f (if x then false else true)):T
3. ⊢ (λx: $Bool.$ λy: $T.$ y x):Bool→T→Bool→Bool

א)

סה"כ קיבלנו שאם נבחר T=Bool קיימת גזירה מלאה וחוקית עבור
הביטוי, כאשר הבחירה נדרשת בדיוק השמאלי של צד בשלב הטיפוס
של - f.

ומכאן נבחר T=Bool

$$\dfrac{\dfrac{f:Bool\to Bool\in\Gamma}{\Gamma\vdash f:T_1\to T}\,\text{T-var}\quad,\quad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash true:Bool}\,\text{T-true}\quad,\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash false:Bool}\,\text{T-false}}{\Gamma\vdash(\text{if true then false else true}):T_1}\,\text{if}}{f:Bool\to Bool\vdash(f(\text{if true then false else true})):T}\,\text{App}$$

לסיכום T=Bool וקיימת עבור T זה גזירה!

ב) סה"כ קיבלנו שאם נבחר את $\hat{T}=T=Bool$ קיימת גזירה מלאה וחוקית
עבור הביטוי!

ומכאן נבחר -
$T=T_1=Bool$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f:Bool\to Bool\in\Gamma}{\Gamma\vdash f:T_1\to T}\,\text{T-var}\quad,\quad\dfrac{\dfrac{x:Bool\in\Gamma}{\Gamma\vdash x:Bool}\,\text{T-var}\quad,\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash false:Bool}\,\text{T-F}\quad,\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash true:Bool}\,\text{T-T}}{(\text{if x then false else true}):T_1=Bool}\,\text{if}}{\Gamma,x:Bool\vdash f(\text{if x then false else true}):T}\,\text{App}}{f:Bool\to Bool\vdash(\lambda x:Bool.\ f(\text{if x then false else true})):\underbrace{\hat{T}\to T}_{\text{"}T\text{"}}}\,\text{ABS}$$

$\hat{T}=Bool$

לסיכום "T" של הביטוי הוא משהו מצורה $T_1\to T_2$

כלומר "T"$=Bool\to Bool$

נקבל "התאמה" כאשר נבחר

$T = Bool \to Bool \to Bool$

ומכאן נבחר

$T_1 = Bool$

$$\dfrac{\dfrac{y : T \in \hat{\Gamma}}{\hat{\Gamma} \vdash y : T_1 \to Bool \to Bool}\ \text{T-var} \qquad \dfrac{x : Bool \in \hat{\Gamma}}{x : T_1}\ \text{T-var}}{\hat{\Gamma} = \Gamma, x : Bool, y : T \vdash (y\,x) : Bool \to Bool}\ \text{APP}$$

$$\dfrac{\hat{\Gamma} = \Gamma, x : Bool, y : T \vdash (y\,x) : Bool \to Bool}{\Gamma, x : Bool \vdash (\lambda y : T.\ y\,x) : T \to Bool \to Bool}\ \text{ABS}$$

$$\dfrac{\Gamma, x : Bool \vdash (\lambda y : T.\ y\,x) : T \to Bool \to Bool}{\vdash (\lambda x : Bool.\ \lambda y : T.\ x\,x) : Bool \to T \to Bool \to Bool}\ \text{ABS}$$

סה"כ קיבלנו שעבור $T = Bool \to Bool \to Bool$ קיימת גזירה טיפוס ומצאנו

עבור הדרוש אשר הטיפוס הסופי של כולו יהיה -

$$Bool \to (Bool \to Bool \to Bool) \to Bool \to Bool$$

ד"

שאלה 5: Simply Types Lambda Calculus

השלימו את החסר בהוכחה הבאה.

למת ההתקדמות

אם t מקיים $\vdash t:T$ עבור איזשהו T, והוא ללא משתנים חופשיים אז או שהוא ערך או שיש s עם $t \to s$.

הוכחה

באינדוקציה על הגזירה של $\vdash t:T$. נפריד למקרים לפי הכלל האחרון שמופיע בגזירה:

1. כלל T-TRUE: ראינו בכיתה, אין צורך לכתוב.
2. כלל T-FALSE: ראינו בכיתה, אין צורך לכתוב.
3. כלל T-VAR: ראינו בכיתה, אין צורך לכתוב.
4. כלל T-ABS: ראינו בכיתה, אין צורך לכתוב.
5. כלל T-APP: ראינו בכיתה, אין צורך לכתוב.
6. כלל T-IF: השלימו.

סיום הוכחה למת ההתקדמות

6. כלל IF - בדומה האינד' כעת אנו מניחים כי הביטוי "t" שאנו מסתכלים במצב t נגזר IF. מכאן שעל הגזירה מתקיים רק

$$t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash t_1 : Bool,\ \Gamma \vdash t_2 : T,\ \Gamma \vdash t_3 : T}{\Gamma \vdash \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3} \text{ T-IF}$$

כיוון שעבור t_1, t_2, t_3 קיימת גזירה קצרה יותר הנ"ה חלה על כל אחד מהם בנפרד. בפרט עבור t_1 מתקיים או ~~ש~~ שהוא ערך או שקיים t_1' כך ש- $t_1 \to t_1'$. נחלק למקרים:

(I) t_1 הוא ערך:

נחלק למקרים: $t_1 = true$ (שכן אנו יודעים מהגדרת המקרה כי הוא מטיפוס Bool):

אזי

$$t = \text{if true then } t_2 \text{ else } t_3 \Rightarrow t_2$$

כלומר מהגדרת כלל IF נקבל ש- $t = t_2$ ~~ו~~ והתקדמנו!

עבור $t_1 = false$:

$$t = \text{if false then } t_2 \text{ else } t_3 \Rightarrow t_3$$

מהגדרת כלל IF תחת הנחת המקרה הנה מקבל ש- $t = t_3$ והתקדמנו!

הראנו שכאשר t_1 הוא ערך נוכל להתקדם מ- t ל- t_2/t_3 בהתאם במקרה.

(II) t_1 הוא לא ערך: לפי הנ"ה קיים t_1' כך ש- $t_1 \to t_1'$, ולכן נקבל כי:

$$t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \Rightarrow \text{if } t_1' \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 = t'$$

והתקדמנו שכן מצאנו t' כך שמתקיים $t \to t'$. סה"כ עבור כל מקרה הצלחנו להתקדם (או להגיע לערך) מ- t והוכחנו את הטענה עבור הצעד במקרה הזה!

מש"ל!