Design and Analysis of Algorithms

Tutorial 5: Graph Algorithms

童咏昕

北京航空航天大学 计算机学院

yxtong@buaa. edu. cn

问题1

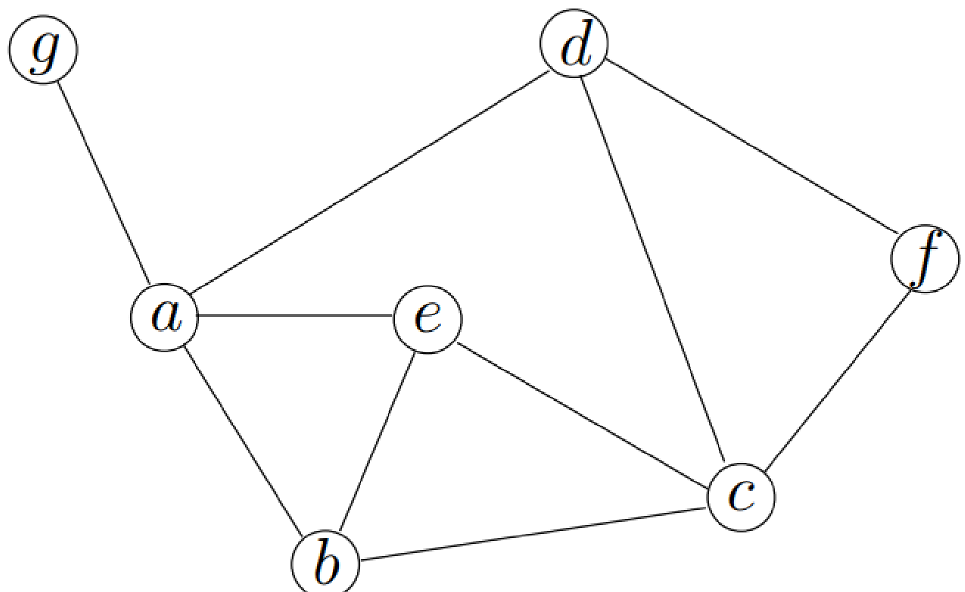
- 无向图G包含7个结点和10条边，其邻接表和结构如下所示。

$a :\to d, e, b, g$ $\quad$ $b :\to e, c, a$

$c :\to f, e, b, d$ $\quad$ $d :\to c, a, f$

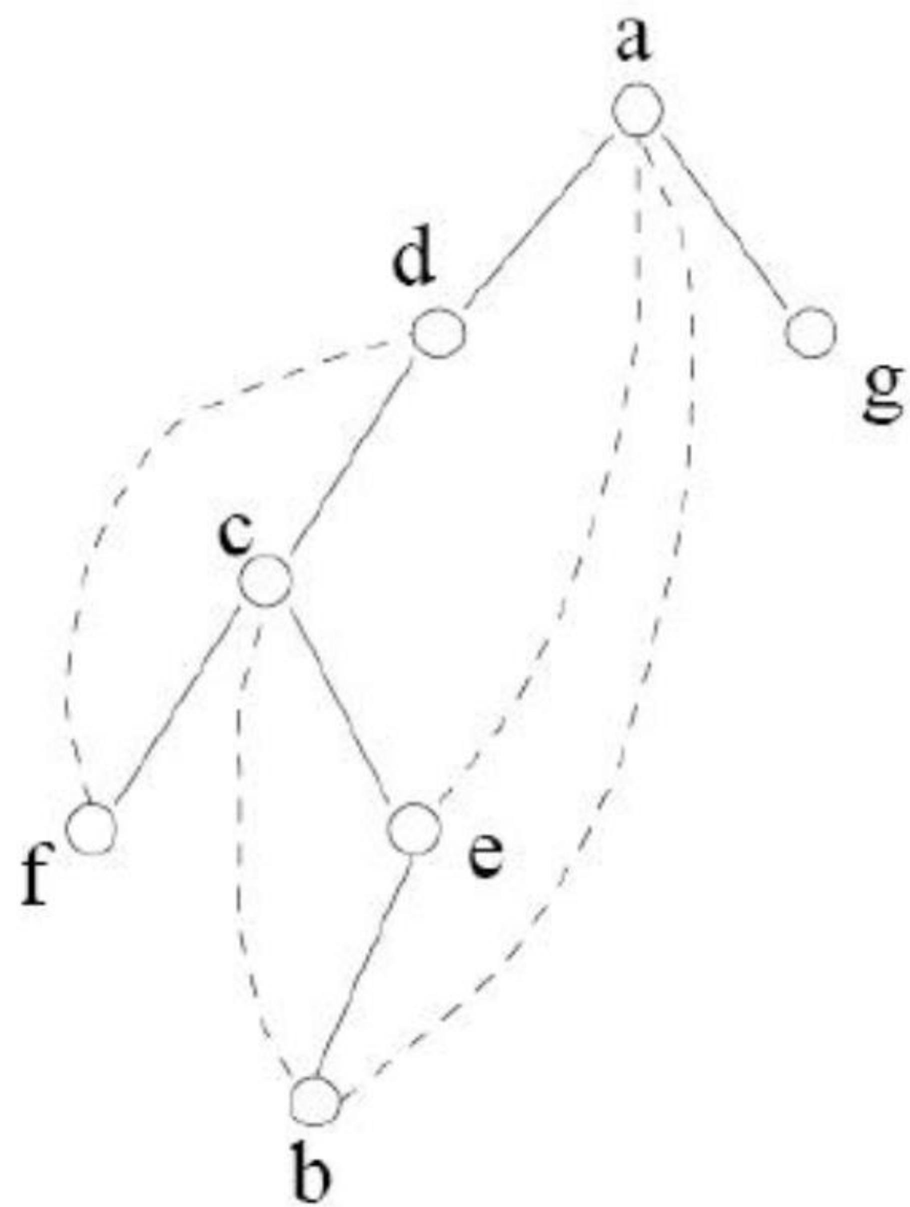
$e :\to a, c, b$ $\quad$ $f :\to d, c$

$g :\to a$



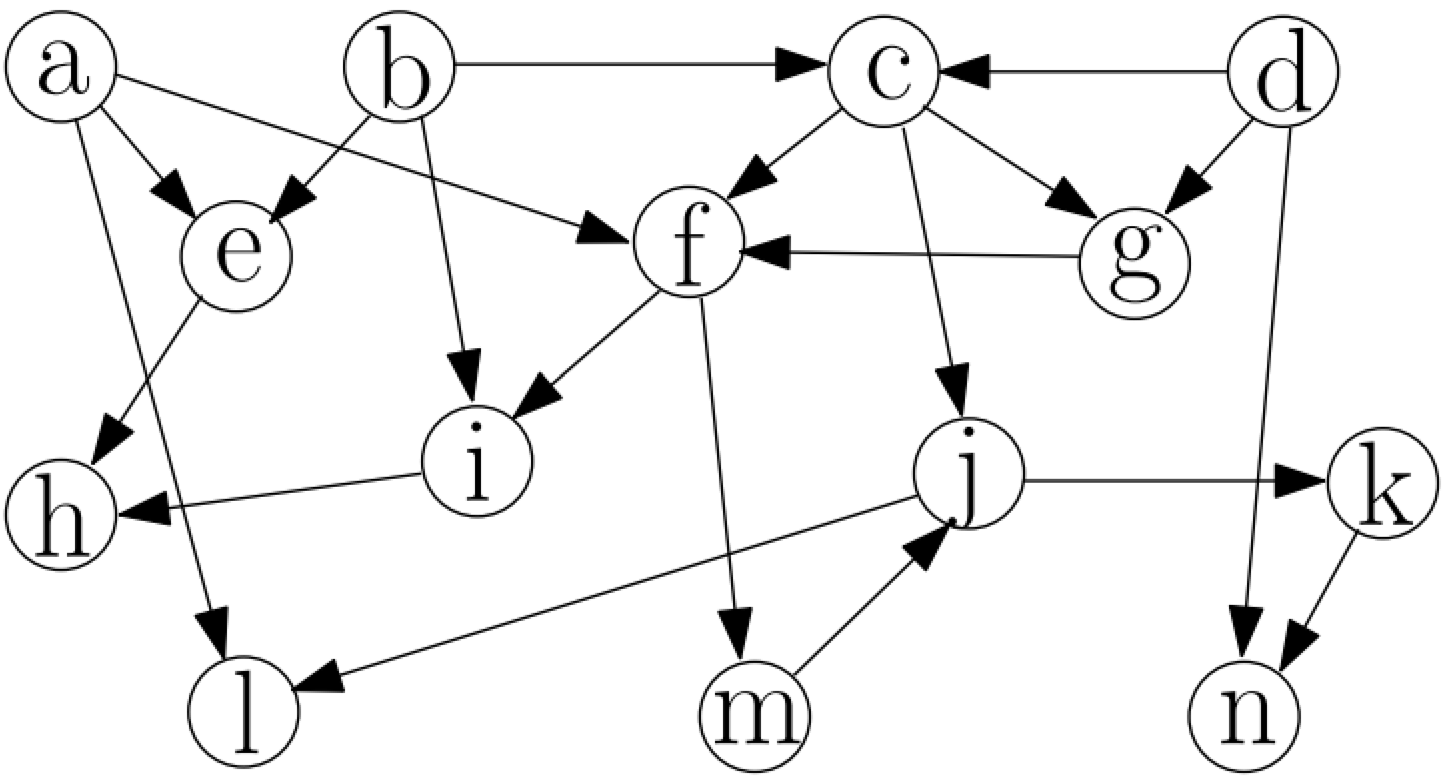
- 以结点a作为起始结点执行深度优先搜索(DFS)，请画出相应的搜索树，并将不在搜索树中的边用虚线在搜索树中标注。

问题1-提示

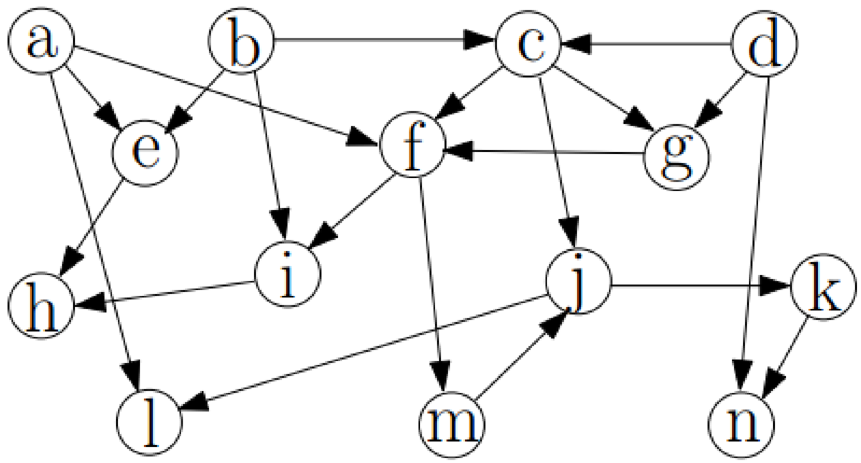


问题2

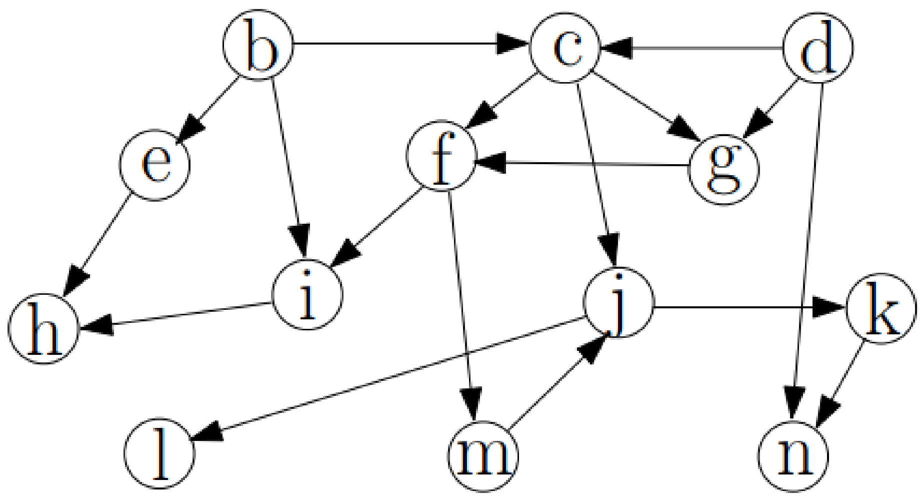
- 对下面的有向图进行拓扑排序。



问题2-提示



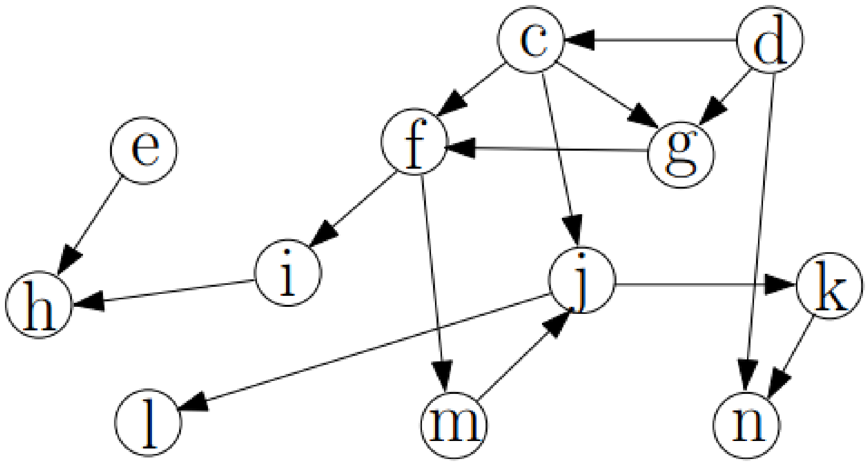
$Q = \{a, b, d\}$



$Q = \{b, d\}$

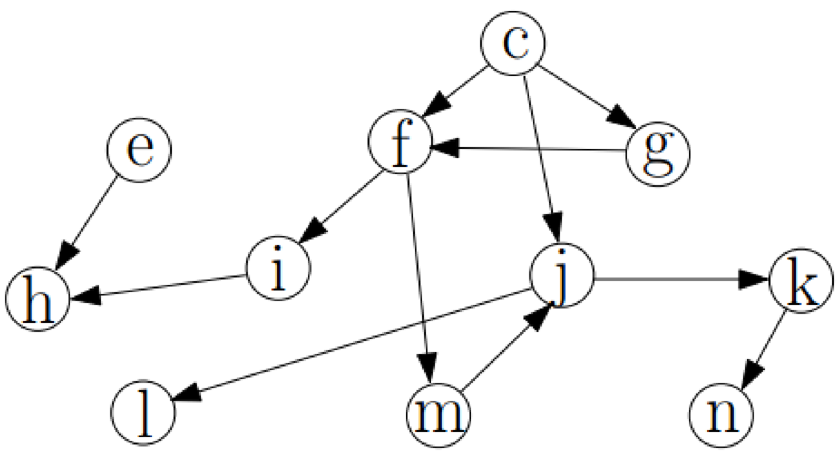
Output: a

问题2-提示



$Q = \{d, e\}$

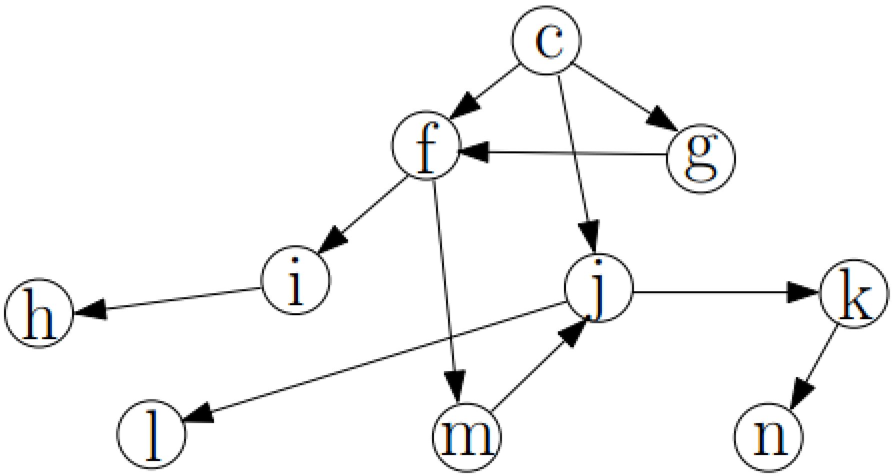
Output: a, b



$Q = \{e, c\}$

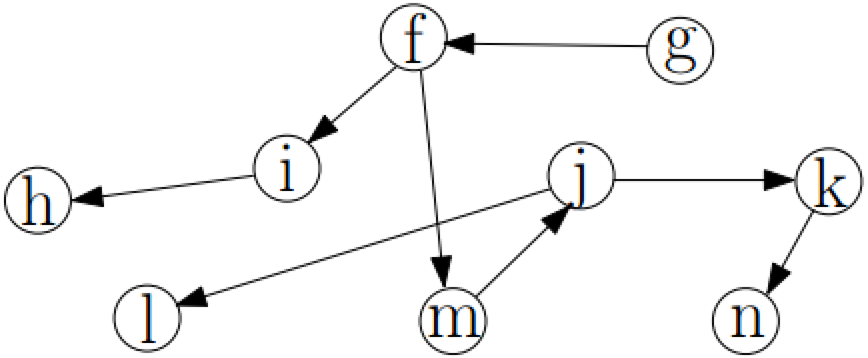
Output: a, b, d

问题2-提示



$Q = \{c\}$

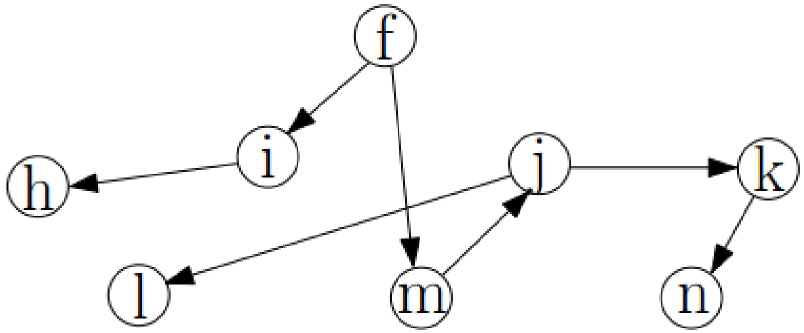
Output: a, b, d, e



$Q = \{g\}$

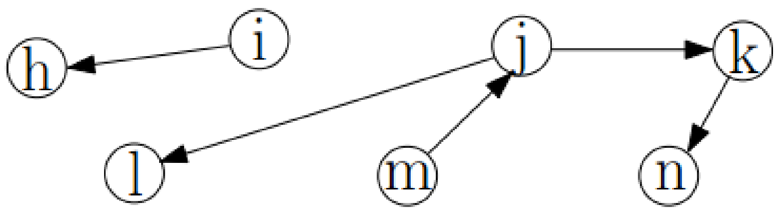
Output: a, b, d, e, c

问题2-提示



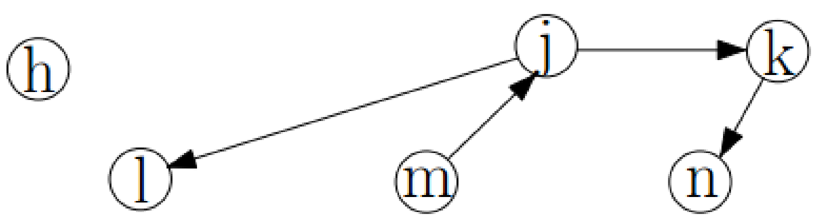
$Q = \{f\}$

Output: a, b, d, e, c, g



$Q = \{i, m\}$

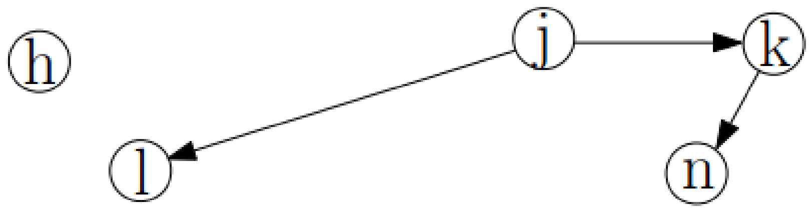
Output: a, b, d, e, c, g, f



$Q = \{m, h\}$

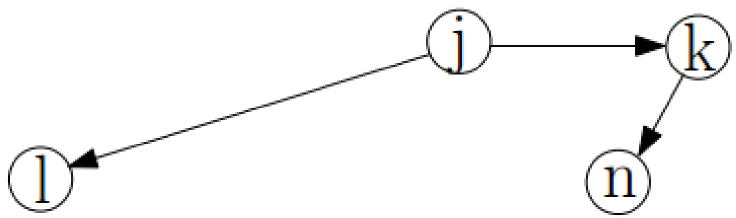
Output: a, b, d, e, c, g, f, i

问题2-提示



$Q = \{h, j\}$

Output: $a, b, d, e, c, g, f, i, m$



$Q = \{j\}$

Output: $a, b, d, e, c, g, f, i, m, h$

$Q = \{k, l\}$

Output: $a, b, d, e, c, g, f, i, m, h, j$

问题2–提示

$$Q = \{l, n\}$$

Output: $a, b, d, e, c, g, f, i, m, h, j, k$

l n

$$Q = \{n\}$$

Output: $a, b, d, e, c, g, f, i, m, h, j, k, l$

n

$$Q = \{\}$$

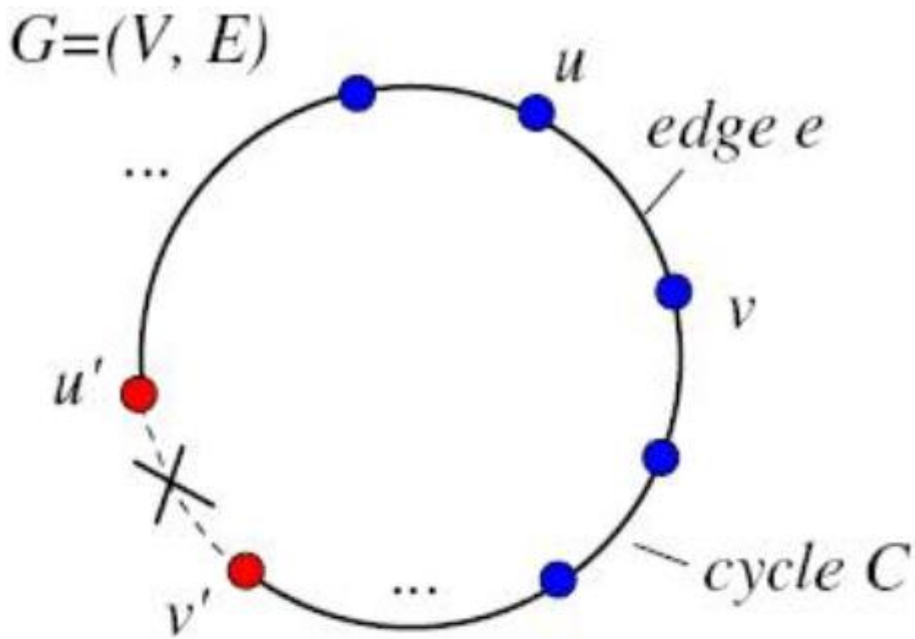
Output: $a, b, d, e, c, g, f, i, m, h, j, k, l, n$

问题3

- 无向连通图$G = (V, E)$，各边的权重(weight)各不相同。令C为图G的一个环(Cycle)，而e为环C中权重最大的边，证明：G中存在不包括边e的最小生成树。

问题3-提示

- 反证法：考虑G的一个包含边e的最小生成树T. 如图所示，其中边$e = (\mathrm{u}, \mathrm{v})$为环$C$中权重最大的边，其权重记为$W(u, v)$.



- 对于环C中的任意其他边(u', v')有$W(u', v') < W(u, v)$

问题3-提示

- 生成树T包括边e, 但无环。因此环C中至少有一条边不在T中。
- 现在将边e从树T中移除，则T分为两个较小规模的树T_1, T_2, 同一个树上的结点可连通，而不同树上的结点不连通. 同时环C中的结点也分为不可连通的两部分。
- 因此我们总可以找到不同于u, v的结点u', v'，边(u', v')在图G中，但u'与v'分别位于树T_1, T_2上（即边(u', v')不在树T上）。

问题3-提示

- 接下来添加边(u′, v')，则T_1, T_2形成一颗新的树T′, 这课树为图G的生成树。T′的总权重为

$$\mathrm{W}(T') = W(T) - W(u, v) + W(u', v')$$

- 由于$W(u', v') < W(u, v)$, 因此$W(T') < W(T)$, 这与假设条件矛盾。因此总存在一颗不包括边e的最小生成树。