

Design and Analysis of Algorithms

Tutorial 6: Graph Algorithms



童咏昕

北京航空航天大学 计算机学院

yxtong@buaa.edu.cn

问题1

- 令图 $G = (V, E)$ 为一个连通的无向图。证明：
$$\log(E) = \Theta(\log V)$$

问题1-提示

- 首先图 G 的边数 $E \leq \frac{V(V+1)}{2} < V^2$, 有

$$\log E \leq \log V^2 = 2 \log V$$

因此 $\log E = O(\log V)$.

- 由于图 G 为连通图, 因此 $V - 1 \leq E$, 对于足够大的图, 有 $\frac{V}{2} \leq E$ (当图的结点数大于等于2即可), 取对数有

$$\log V - 1 \leq \log E \implies \log E = \Omega(\log V)$$

结合上述两方面即有

$$\log E = \Theta(\log V)$$

问题2

- 带权无向图 $G = (V, E)$, 其边所带权值均非负, T 为 G 的一颗最小生成树。现将图 G 的每条边的权值 w 替换为 w^2 , 得到一个新的图 G' .
 - T 是否仍为所得新的图的最小生成树?
 - 原图 G 中由结点 u 到结点 v 的一条最短路径 $u \rightarrow v$ 是否仍为新的图中由 u 到 v 的最短路径?
- 请证明或推翻上述两个猜想。

问题2-提示

- 生成树 T 仍为新的图 G' 的最小生成树。
证明：令 T' 为所得新的图 G' 的一颗最小生成树。若 T' 与 T 不同，则 T' 中一定存在一条边 e' 不在 T 内。现将 e' 从 T' 中删去，则 T' 分为互不连通的两部分，令 S 和 $V - S$ 分别表示这两部分，令割(Cut) $C = (S, V - S)$ 。
- 将 e' 加入树 T 中，将会在 T 中产生一个环(Cycle)。显然环中存在一条边 e (不同于 e') 穿过割 C 。由于 T 为 G 的最小生成树，因此 $w(e) \leq w(e')$ (否则我们在 T 中将边 e 替换为 e' 得到新的生成树的权值比 T 的权值更小)，因此 $w(e)^2 \leq w(e')^2$ 。

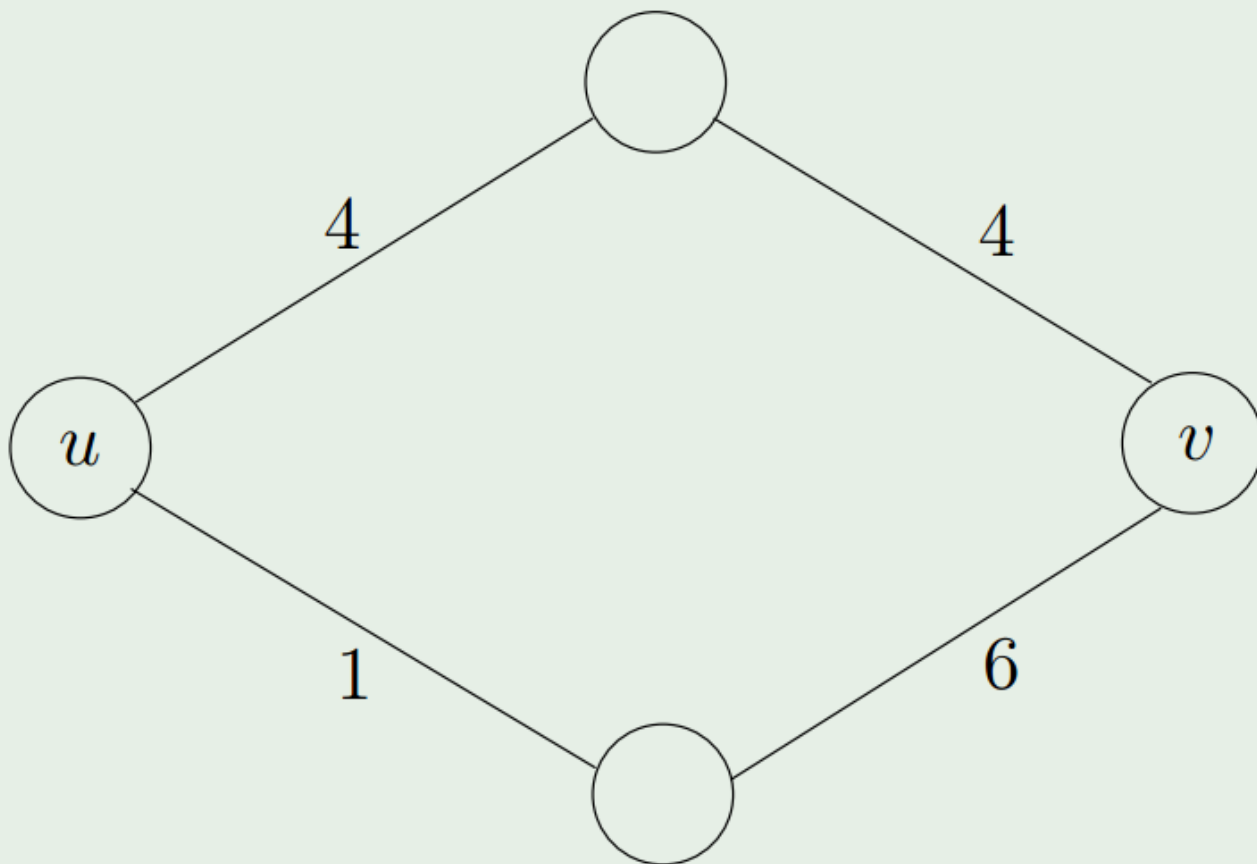
问题2-提示

- 现在在 T' 中将 e' 替换为 e , 则所得的仍为 G' 中的一颗生成树, 称为 T'' , 且 T'' 的权重不会超过 T' 的权重。
- 与 T' 相比, T'' 与 T 不同的边的数量少一条(e' 替换为 e). 重复上述步骤, 最终可以将 T' 转换为 T 。而在每一轮转换中, 树的权重不会增加。因此 T 同样为 G' 的最小生成树。

问题2-提示

- 最短路径：
不一定，下图是一个反例。

Example



问题3

- 无向图 $G = (V, E)$, 每条边的权值 $c_e \geq 0$. T 为图 G 的一个最小生成树。现向图 G 中添加一条新的边 (u, v) , 其权值为 c . 请给出一个算法测试 T 是否仍为新得到的图的最小生成树。算法的时间复杂度要求为 $O(|V|)$.

问题3-提示

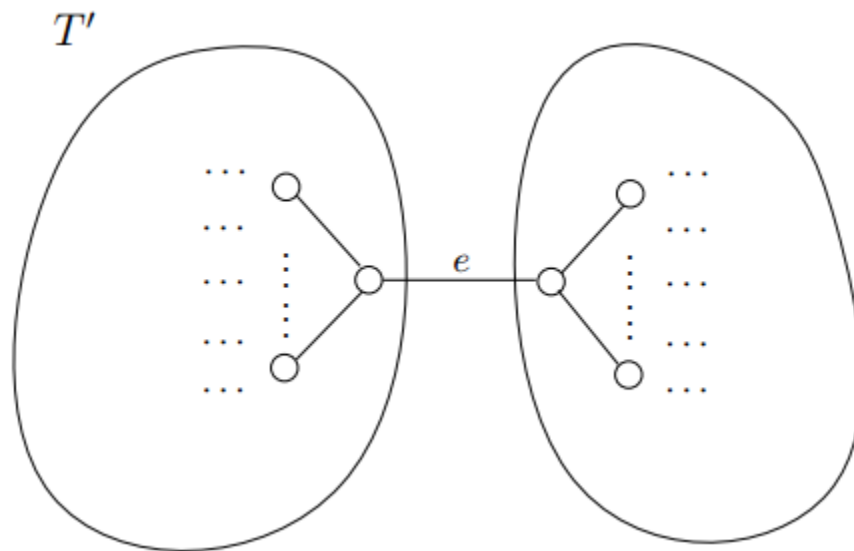
- 算法流程如下：在 T 中使用DFS或者BFS寻找由结点 u 到结点 v 的路径，该路径与添加的边 $e = (u, v)$ 形成一个环(Cycle)，检查边 e 是否为环中具有最大权值的边，若是，则 T 仍为一颗最小生成树；否则不是。
- 显然算法的时间复杂度为 $O(|V|)$.

问题3-提示

- 正确性：接下来证明 T 仍为一颗最小生成树当且仅当 e 为环中权值为大的边。
- \Rightarrow ：若 T 为新得到的图的最小生成树，则 e 为环中权值最大的边。
将边 e 添加到树 T 中，将导致一个环。若环中存在一条边 e' 满足 $w(e') > w(e)$ ，则将 e' 替换为 e ，产生一颗新的生成树，且其权值小于 T ，导致矛盾。因此 e 为环中权值最大的边。

问题3-提示

- \Leftarrow : 若 e 为环中权值最大的边, 则 T 为新得到的图的最小生成树。
假设 T 不是新得到的图的最小生成树, 则新得到的图的任意最小生成树 T' 一定包括边 e (否则 T' 也应该是原图 G 的最小生成树), 考虑由边 e 导致的割, 如下图所示。



问题3-提示

- 环中存在一条不同于 e 的边 e' 穿过这个割。在 T' 中将 e 替换为 e' ，将得到一颗新的生成树。由于 $w(e) \geq w(e')$ ，因此新的生成树的权值不会大于 T' 的权值，这与假设矛盾。因此 T 为新得到的图的最小生成树。

