

算法设计与分析 (2019 年秋季学期)

第三次作业

请于 2019 年 11 月 13 日课上将纸质版作业交到助教处

1 二进制串变换问题 (25 分)

给定两个长度均为 n 的仅由 0 和 1 组成的字符串 a 和 b ，你可以对串 a 进行如下操作：

1. 对任意 $i, j (1 \leq i, j \leq n)$ ，交换 a_i 和 a_j ，操作代价为 $|i - j|$ ；
2. 对任意 $i (1 \leq i \leq n)$ ，取反 a_i ，操作代价为 1；

请你设计算法计算将串 a 变为串 b 所需的最小代价（只能对串 a 进行操作），并分析该算法的时间复杂度。

2 括号匹配问题 (25 分)

定义合法的括号串如下：

1. 空串是合法的括号串；
2. 若串 s 是合法的，则 (s) 和 $[s]$ 也是合法的；
3. 若串 a, b 均是合法的，则 ab 也是合法的。

现在给定由 ‘[’, ‘]’ 和 ‘(’, ‘)’ 构成的字符串，请你设计算法计算该串中合法的子序列的最大长度，并分析该算法时间复杂度。例如字符串 “([()])”，最长的合法子序列 “([()])” 长度为 6。

3 数据修改问题 (25 分)

给定一个长度为 n 的数组 $a[1..n]$ 。最初， a 的所有元素都等于 0。

现要对 a 中的数据进行 Q 次修改，每次修改给定三个数 l_i, r_i 和 $x_i (1 \leq i \leq Q)$ ，其中 $1 \leq l_i \leq r_i \leq n$ 且 $x_i > 0$ ，表示将数组 $a[l..r]$ 中的所有元素均加上 x 。

现允许你从这 Q 次修改中删掉一次，使得删掉这次修改后，执行剩余的修改得到的数组 a 中的最大元素尽可能小。请求出该最小值。

例如，对于一长度为 4 的数组 $a = [0, 0, 0, 0]$ ，有三次修改分别为 $\begin{cases} l_1 = 2, r_1 = 4, x_1 = 2 \\ l_2 = 1, r_2 = 2, x_2 = 2 \\ l_3 = 3, r_3 = 4, x_3 = 1 \end{cases}$ 。

过第一次修改后，该数组变为 $[0, 2, 2, 2]$ ；经过第二次修改后，该数组变为 $[2, 4, 2, 2]$ ；经过第三次修改后，该数组变为 $[2, 4, 3, 3]$ 。

如果我们删掉第 1 次修改，则经过 2、3 次修改得到的数组为 $[2, 2, 1, 1]$ ，该数组中的最大值为 2。可以验证这是在所有可行方案中数组的最大值最小的方案。（删掉第二次修改得到的数组为 $[0, 2, 3, 3]$ ，最大值为 3；删掉第三次修改得到的数组为 $[2, 4, 2, 2]$ ，最大值为 4。）

4 最大矩阵问题 (25 分)

给定一个包含 n 行 m 列的二进制矩阵 M (对于 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, M_{i,j} = 0$ 或 1)。可以对其执行如下两种的操作:

1. 选择矩阵的第 i 行, 并将该行的每个元素取反 (如果该元素为 0 则将其改为 1 , 如果该元素为 1 则将其改为 0);
2. 选择矩阵的第 j 列, 并将该列的每个元素取反。

例如, 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 将第一行取反可以得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; 在此基础上再将第三列取反可以得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。每种操作都可以执行无限次。

最终, 将得到的矩阵的每一行解释为一个数字的二进制表示, 例如, 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的第一行为二进制数 $(101)_2$, 其对应的十进制数为 $4+0+1=5$, 第二行为二进制数 $(111)_2$, 其对应的十进制数为 7 , 第三行为二进制数 $(110)_2$, 其对应的十进制数为 6 , 这三个数之和为 $5+7+6=18$ 。现请你计算在通过执行上述操作可以得到的矩阵中, n 个二进制数之和的最大值。