

# 算法设计与分析 (2019 年秋季学期)

## 第一次作业

请于 2019 年 10 月 9 日课上将纸质版作业交到助教处

- 1 对下面每一对表达式  $(A, B)$ , 请判断  $A$  和  $B$  之间的关系是  $O, \Omega$  还是  $\Theta$ 。注意他们之间可能满足多种关系。(每小题 5 分, 共 25 分)

1.  $A = n^3 - 100n, B = n^2$ ;

2.  $A = \log n, B = \log_{1.1} n$ ;

3.  $A = 2^{2n}, B = 2^{3n}$ ;

4.  $A = 2^{\log n}, B = n$ ;

5.  $A = \log \log n, B = 10^{100}$ .

- 2 请给出  $T(n)$  尽可能紧凑的渐进上界并予以说明, 可以假定  $n$  是 2 的幂次。(每小题 4 分, 共 28 分)

1.

$$T(1) = T(2) = 1$$

$$T(n) = T(n-2) + 1 \quad \text{if } n > 2$$

2.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1$$

3.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + n \quad \text{if } n > 1$$

4.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1$$

5.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1$$

6.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 3T(n/2) + n^2 \quad \text{if } n > 1$$

7.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(n/2) + \log n \quad \text{if } n > 1$$

### 3 $k$ 路归并问题 (22 分)

现有  $k$  个有序数组 (从小到大排序), 每个数组中包含  $n$  个元素。您的任务是它们合并成 1 个包含  $kn$  个元素的有序数组。首先来回忆一下课上讲的归并排序算法, 它提供了一种合并有序数组的算法 *Merge*。如果我们有 2 个有序数组大小分别为  $x$  和  $y$ , *Merge* 算法可以用  $O(x + y)$  的时间来合并这两个数组。

1. 如果我们应用 *Merge* 算法先合并第一个和第二个数组, 然后由前后两个数组合并后的数组与第三个合并, 再与第四个合并, 直到合并完  $k$  个数组。请分析这种合并策略的时间复杂度 (请用关于  $k$  和  $n$  的函数表示)。
2. 针对本题的任务, 请给出一个更高效的算法, 并分析它的时间复杂度。(提示: 此题若取得满分, 所设计算法的时间复杂度应为  $O(nk \log k)$ 。)

### 4 局部最小值问题 (25 分)

给定一个由  $n$  ( $n \geq 3$ ) 个互不相同的整数组成的数组  $A[1..n]$ , 其满足  $A[1] > A[2]$  并且  $A[n-1] < A[n]$ 。我们定义数组的**局部最小值**为比它的两个相邻元素 (如果存在) 都小的整数。换言之,  $A[x]$  是局部最小值当且仅当它满足  $A[x] < A[x-1]$  并且  $A[x] < A[x+1]$  ( $1 < x < n$ )。例如, 下图所示数组中包含两个局部最小值, 分别为 3 和 1。

9	3	7	2	1	4	5
---	---	---	---	---	---	---

求局部最小值显然有一个  $O(n)$  的做法, 仅需要扫描一遍整个数组就可以找到所有的局部最小值。请你给出一个算法可以在  $O(\log n)$  的时间复杂度内找出一个数组的局部最小值。如果局部最小值有多个, 仅需要找出任意一个局部最小值即可。(提示: 我们给出的限制条件保证数组至少有一个局部最小值。)