$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{matrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\theta$$

空间平面方程:

一般式: $Ax+By+Cz+D=0$

点法式: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

截距式: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

空间直线方程:

一般式: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

点向式: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

参数式: $x=x_0+lt\quad y=y_0+mt\quad z=z_0+nt$

点到平面的距离公式

点(x_0,y_0,z_0)到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为:

$$\mathrm{d}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

空间曲线方程:

一般式$\mathit{\Gamma}$: $F(x,y,z)=0\quad G(x,y,z)=0$

参数方程$\mathit{\Gamma}$: $\mathrm{x}=\varphi(t)\quad y=\gamma(t)\quad z=\rho(t)\quad t\epsilon[\alpha,\beta]$

空间曲线在坐标面的投影方程:

xOy: $\varphi(x,y)=0\ \&\ z=0$

空间曲线在坐标面的投影区域:

xOy: $D=\{(x,y)|\varphi(x,y)\le 0\}$

空间曲面:

曲面方程:

$$F(x,y,z)=0 \quad z=z(x,y)$$

二次曲面:

椭球面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

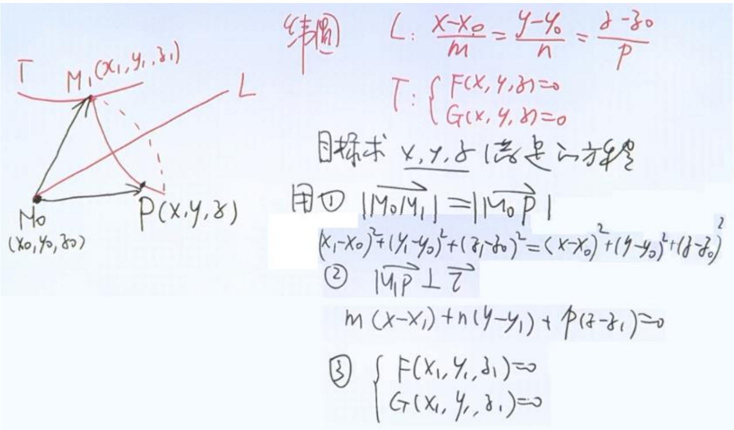
单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

椭圆抛物面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

椭圆锥面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$

旋转曲面: 曲线 Γ 围绕直线 L 旋转一周形成的曲面



空间曲面的切平面:

曲面$F(x,y,z)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面法向量为:

$n=(A,B,C) \quad A=F'(x)|_{P_0} \quad B=F'(y)|_{P_0} \quad C=F'(z)|_{P_0}$

曲面$z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面法向量为:

$n=(A,B,C) \quad A=f'(x)|_{P_0} \quad B=f'(y)|_{P_0} \quad C=-1$

空间曲面 $z=z(x,y)$, $(x,y)\epsilon D$ 的面积:

$$S=\iint_D\sqrt{1+{z_x'}^2+{z_y'}^2}dxdy$$

方向导数:

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{u(x_0+tcos\alpha,y_0+tcos\beta,z_0+tcos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}\quad (cos\beta=sin\alpha)$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}=u_x^{'}|_{P_0}\cdot cos\alpha+u_y^{'}|_{P_0}\cdot cos\beta+u_z^{'}|_{P_0}\cdot cos\gamma$$

方向余弦:

$$u=(x,y,z)=>cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

梯度:

$$grad(u)|_{P_0}=\{u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0)\}$$

三重积分:

先一后二法：先定水平限，后穿铅锤线

先二后一法：先定铅锤限，后截水平面

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iint_? dxdy\int_?^? f(x,y,z)dz=\int_?^? dz\iint_? f(x,y,z)dxdy$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{r_1}^{r_2}f(rsin\varphi cos\theta,rsin\varphi sin\theta,rcos\varphi)r^2\sin\varphi dr$$

第一型曲线积分:

$$\int_a^b f(x)dx\to\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'_x)^2}dx$$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{t_0}^{t_1}f\big(l(t),m(t)\big)\sqrt{\big(l'(t)\big)^2+\big(m'(t)\big)^2}dt$$

$x=l(t)\quad y=m(t)\quad t_0<t<t_1$

第一型曲面积分:

$$\iint_D f(x,y)dxdy\to\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{Dxy}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+\big(z'_y\big)^2}dxdy$$

重心，质心与形心:

重心和质心一致

平面薄片：$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma}$　　空间物体：$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dv}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)dv}$

光滑曲线：$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y,z)ds}{\int_L\rho(x,y,z)ds}$　　光滑曲面：$\bar{x}=\frac{\iint_\Sigma x\rho(x,y,z)dS}{\iint_\Sigma\rho(x,y,z)dS}$

当密度函数为常数时，形心与前二者一致

平面薄片：$\bar{x}=\frac{\iint_D xd\sigma}{\iint_D d\sigma}$　　　　空间物体：$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega xdv}{\iiint_\Omega dv}$

光滑曲线：$\bar{x}=\frac{\int_L xds}{\int_L ds}$　　　　光滑曲面：$\bar{x}=\frac{\iint_\Sigma xdS}{\iint_\Sigma dS}$

第二型曲线积分：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta [P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)]dt$$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_1}^{x_2} [P\big(x,y(x)\big)+Q\big(x,y(x)\big)y'(x)]dx$$

$\oint_{L^+} Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma$　逆时针为正向（左手向内）

设 D 是单连通区域，若$P(x,y),Q(x,y)$在 D 上连续且具有一阶连续偏导数：

a) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

b) $\oint_L Pdx+Qdy=0$

c) $\int_{L_{\widehat{ab}}} Pdx+Qdy$ 与路径无关

d) 存在$u(x,y),du=Pdx+Qdy$

e) $grad(u)=P(x,y)i+Q(x,y)j$

f) $Pdx+Qdy=0$为全微分方程

第二型曲面积分：

$$\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

$$\iint_\Sigma=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint_{\Sigma_0}$$

空间第二型曲线积分：

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$（右手定则）

cos为曲面Σ的单位化的偏微分　（注意对称性）