【例 1】[取自《张宇线性代数 9 讲》P40，例 3.3]

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^n$.

【分析】

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A^2=AA=\underline{4E},\Rightarrow A^n=\begin{cases}4^k\cdot E & n=\underline{2k}\\ 4^k\cdot A & n=\underline{2k+1}\end{cases}$$

【例 2】[取自《张宇线性代数 9 讲》P39，例 3.2]

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\3&6&-3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

【分析】

$$A=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}=\alpha\beta^T$$

记 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

代数中习惯上写列向量

$$A^2=A\cdot A=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=(-6)\alpha\beta^T=(-6)A$$

$$A^n=\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n个}=\underline{\alpha}\underbrace{(\beta^T\cdot\alpha)(\beta^T\cdot)\cdots(\cdot\alpha)}_{n-1对}\underline{\beta^T}=(-6)^{n-1}\cdot A$$

[注] 称 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\triangleq tr(A)$，叫 A 的迹

若 $\underline{r(A_{n\times n})=1}$，(即 n 行元素均成比例)

$$A^n=[tr(A)]^{n-1}\cdot A$$

【例 3】[取自《张宇线性代数 9 讲》P41，例 3.7]

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【分析】

$A=B+C$，其中 $C=E$ 最好

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B+E$$

$$A^n=(B+E)^n=C_n^0E^n\cdot B^0+C_n^1E^{n-1}\cdot B^1+C_n^2E^{n-2}\cdot B^2+\cdots+C_n^nE^0B^n$$

其中 $B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $B^3=O$

$$A^n=(B+E)^n=C_n^0E^n\cdot B^0+C_n^1E^{n-1}\cdot B^1+C_n^2E^{n-2}\cdot B^2$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&n&0\\0&0&n\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$