# 第五讲　大数定律与中心极限定理

## 综述

1. 收敛
2. 三个定律，两大定理　P 147

## 一、依概率收敛

设 $\{X_n\}$ 为一 $r.v$ 序列，$X$ 为一 $r.v$（或 $a$ 为常数），
若 $\forall \varepsilon > 0$，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$，
则称 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 $X$ 或 $a$，记：$X_n \xrightarrow{P} X$ 或 $X_n \xrightarrow{P} a$.

**【例】** 设 $\{X_n\}$，$X_n \sim f_n(x) = \dfrac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$，$-\infty < x < +\infty$，证明

$X_n \xrightarrow{P} 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - 0| < \varepsilon\} = 1$.

**【分析】**

$$P\{-\varepsilon < X_n < \varepsilon\} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\cdot \arctan nx \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{2}{\pi}\arctan n\varepsilon$$

## 二、大数定律

### 1. 切比雪夫大数定律

设 $\{X_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 是相互独立的随机变量序列，若方差 $DX_k$ 存在且一致有上界，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

一致有界皆有共同的上界，与 $k$ 无关.

### 2. 伯努利大数定律

设 $u_n$ 是 $n$ 重伯努利试验中事件 $A$ 发生的次数，在每次试验中 $A$ 发生的概率为 $p$，则

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

### 3. 辛钦大数定律

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，若 $EX_n = \mu$ 存在，则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$.

**【注】** 在满足一定条件的基础上，所有大数定律都在讲一个结论

$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)$.

**【例 1】**［取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》P149，例 7.2］

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立的随机变量序列，$X_n$ 服从参数为 $n$ 的指数分布（$n \geqslant 1$），则下列随机变量序列中不服从切比雪夫大数定律的是（　　）.

(A) $X_1, \frac{1}{2}X_2, \cdots, \frac{1}{n}X_n, \cdots$　　(B) $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$

(C) $X_1, 2X_2, \cdots, nX_n, \cdots$　　(D) $X_1, 2^2X_2, \cdots, n^2X_n, \cdots$

**【分析】**

(D) $D(n^2X_n) = n^4 \cdot DX_n = n^4 \cdot \dfrac{1}{n^2}$

$= n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ 无界

**【例 3】**［取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》P151，例 7.6］

设总体 $X$ 服从参数为 2 的指数分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于________.

**【分析】**

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = EX_i^2$$
$$= DX_i + (EX_i)^2 = \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}$$

## 三、中心极限定理（$n \to \infty$）

不论 $X_i \overset{iid}{\sim} F(\mu, \sigma^2)$，$\mu = EX_i$，$\sigma^2 = DX_i$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2) \Rightarrow \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

**【例】**［取自《张宇概率论与数理统计 9 讲》P154，习题 7.3］

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立同分布随机变量序列，且均服从参数为 $\lambda(\lambda > 1)$ 的指数分布，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则（　　）.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2}\right)$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} \sim N(0,1)，即$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$$