1. $P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ $\quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
2. 对立事件思想
3. P(任取)= P(先后无放回的取)
4. $P(\mathrm{A}) = 0$不代表 A 是不可能事件，$P(\mathrm{A}) = 1$不代表 A 是必然事件
5. P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)
6. 两两互斥：$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
7. 相互独立：事件集中任意数量事件的组合都有$P(A_{i1}A_{i2}\dots A_{in}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\dots P(A_{in})$
8. 相互独立的事件中任意数量的事件换成其对立事件仍互相独立
9. $P(A-B) = P(A\&\sim B) = P(A) - P(AB)$
10. $P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1})$
11. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, A_iA_j = \emptyset,$ 对任意事件 B 有：$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_iB$，$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$
12. $P\left(A_j\middle|B\right) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P\left(B\middle|A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P\left(B\middle|A_i\right)}$
13. $\lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$
14. 0-1 分布：$E(X) = p \quad D(X) = pq$
15. $X \sim B(n,p)$：$E(X) = np \quad D(X) = npq$
16. $X \sim U(a,b)$：$E(X) = \frac{1}{a+b} \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
17. 几何分布：$X \sim G(p): P\{X = k\} = q^{k-1}p \quad E(X) = \frac{1}{p} \quad D(X) = \frac{q}{p^2}$
18. 泊松分布：源源不断的质点来流个数/稀有事件发生的概率

    $X \sim P(\lambda)$: $P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad E(X) = \lambda \quad D(X) = \lambda$
19. 指数分布：等待型分布/寿命分布 λ为失效率

    $X \sim E(\lambda)$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$; $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \ge 0 \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

    $P(X \ge t + s \mid X \ge t) = P(X \ge s)$
20. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
21. 分布函数$F_X(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x), -\infty < x < +\infty$
22. $Y = g(x), F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(x) \le y) = P\left(x \in I_y\right) = \int_{I_y} f(x)dx$
23. 对于随机变量函数的分布函数记得曲线在直线下方
24. 若$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$，则 x 与 y 相互独立
25. $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
26. $F_X(x) = F(x,+\infty) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y)$
27. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$（画图求边缘）
28. 求边缘概率密度时，求谁不积谁，不积先定界，界内画条线，先交写下限，后交写上限
29. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}} = arctane^x$

30. $P(X<Y)=\iint_{x<y\cap D^+}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}f(x,y)dy$

31. $\int_a^b dx\int_c^d f dy=\int_c^d dy\int_a^b f dx$

32.$Z=X+Y=>F_z(z)=P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z)=\iint_{D:X+Y\leq z}f(x,y)d\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy$
$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z}f(x,u-x)du=\int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)dx=\int_{-\infty}^{z}g(u)du$

$$f_Z(z)=F_z'(z)=g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

$$Z=X+Y=>Z\sim f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$$

若 X,Y 独立：$Z\sim f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$

33. $DX=E(X-EX)^2=EX^2-(EX)^2$

34. $cov(X,Y)=cov(Y,X)=E(X-EX)(Y-EY)=E(XY)-EXEY$

35. $cov(aX,bY)=abcov(X,Y)$

36. $\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ $|\rho_{XY}|\leq 1$

37. $\rho_{XY}=1=>P(Y=aX+b)=1\ (a>0)$

38. $\rho_{XY}=-1=>P(Y=aX+b)=1\ (a<0)$

39. 若 X,Y 相互独立，$E(XY)=EXEY$，$D(X\pm Y)=DX+DY$

40. 一般地，$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2cov(X,Y)$

41. Gamma 函数：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ $\Gamma(n+1)=n!$

42. 切比雪夫不等式：$P(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$

43. $E(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)=a_1EX_1+a_2EX_2+\cdots+a_nEX_n$

44. $D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=DX_1+DX_2+\cdots+DX_n+\sum_{1\leq i<j\leq n}2cov(X_i,X_j)$

45. 依概率收敛于 a：$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$

46. 切比雪夫大数定律要求方差有上界

47. 伯努利大数定律：频率依概率收敛于概率

48. 辛钦大数定律：独立同分布的随机变量序列的均值依概率收敛于分布期望

49. $EX^2=DX+(EX)^2$

50. 求一个参数的矩估计量：1.$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ 2.$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx$ 3.令 $\bar{X}=EX=>\hat{\theta}_M=f(\bar{X})$
求两个参数的矩估计量：1.$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ $\overline{X^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {x_i}^2$
2.$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta,\lambda)dx$ $EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,\theta,\lambda)dx$
3.令 $\bar{X}=EX$ $\overline{X^2}=EX^2=>\hat{\theta}_M,\hat{\lambda}_M$

51. 求最大似然估计量:
   a) 离散型：1.令概率为p_i的事件发生的次数为v_i 2.$L(\theta)=p_1(\theta)^{v_1}\cdot p_2(\theta)^{v_2}\cdot\ldots\cdot p_n(\theta)^{v_n}$
   b) 连续型：1.已知 X 的概率密度为$f(x;\theta)$ 2.$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)$ $(0\leq x_i\leq\theta)$

3.求$ln(L(\theta))$ 4.令$\frac{d(ln(L(\theta)))}{d\theta}=0=>\hat{\theta}_L=f(v_i)$

52. 对于满足正态分布 N（μ，σ²）的独立同分布随机变量，$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$

$$var(\bar{X})=D\bar{X}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$cov(X_i,\bar{X}) = cov\left(X_i,\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\right) = cov\left(X_i,\frac{1}{n}X_1\right)+cov\left(X_i,\frac{1}{n}X_2\right)+\cdots+cov\left(X_i,\frac{1}{n}X_n\right)$$

$$=\frac{1}{n}cov(X_i,X_i)=\frac{1}{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$$

53. 对于iid的X_i和X_j，$cov(X_i,X_j)=EX_iX_j-EX_i\cdot EX_j=0$ （独立变量间的协方差为 0）
54. $cov(X,X)=DX$
55.

（1）样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；

（2）样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$；

样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$；

（3）样本 k 阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots)$；

（4）样本 k 阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k(k=1,2,\cdots)$.

56. 无偏性：给出$\hat{\theta}$，若$E\hat{\theta}=\theta$，则$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量
57. 有效性：若$E\hat{\theta}_1=E\hat{\theta}_2=\theta$，当$D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$时，称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效
58. 一致性：（应用切比雪夫不等式）当$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$或$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\ge\varepsilon\}=0$时，称$\hat{\theta}$为$\theta$的一致（相合）估计
59. 中心极限定理：$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$
60. $F_{(n)}(x)=P\{X_{(n)}\le x\}=P\{X_1\le x,X_2\le x,\dots,X_n\le x\}=P\{X_1\le x\}P\{X_2\le x\}\dots P\{X_n\le x\}=[F(x)]^n$
    $f_{(n)}(x)=F'_{(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$
61. $F_{(1)}(x)=P\{X_{(1)}\le x\}=1-P\{X_{(1)}>x\}=1-P\{X_1>x,X_2>x,\dots,X_n>x\}$
    $=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\dots P\{X_n>x\}=1-[1-F(x)]^n$
    $f_{(1)}(x)=F'_{(1)}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$
62. $EX_{(n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_n(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xn[F(x)]^{n-1}f(x)dx$
63. $DX_{(n)}=E({X_{(n)}}^2)-(EX_{(n)})^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_n(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xn[F(x)]^{n-1}f(x)dx\right]^2$
64. 若$X_i\ \widetilde{iid}\ X$，则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=X$
65. 上α分位点为μ_α是指：点μ_α的右侧，概率密度线下侧，x 轴上方图形面积为α
66. $X_1,X_2,\dots,X_n\ \widetilde{iid}\ N(0,1)$，$\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2\sim\chi^2(n)$
    $X_1\sim\chi^2(n_1)$，$X_2\sim\chi^2(n_2)$，则$X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$
    若$X\sim\chi^2(n),EX=n,DX=2n$
67. $X\sim N(0,1),\mathrm{Y}\sim\chi^2(n),t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$

    t分布关于$x=0$对称，$Et=0$

    $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$
68. $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$

    $F\sim F(n_1,n_2)=>\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

    $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\cdot F_\alpha(n_2,n_1)=1$

69. $X_1, X_2, \dots, X_n \ \widetilde{iid}\ N(\mu, \sigma^2) => \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) => \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{(\bar{X} - \mu)^2}{S^2/n} = \frac{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2 /1}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/n-1} \sim \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(n-1)} \sim F(1, n-1)$$

70. $P\left(|\bar{X} - \mu| < u_{\frac{a}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - a => \ \bar{X} - u_{\frac{a}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + u_{\frac{a}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$