②单位矩阵 $E_n=\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}1 & & \boldsymbol{O}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$；

③数量阵 $k\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}k & & \boldsymbol{O}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & k\end{pmatrix}_{n\times n}$；

④对角阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \boldsymbol{O}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & \lambda_n\end{pmatrix}_{n\times n}$；

⑤上下三角阵；

⑥对称阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$；

⑦反对称阵 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^T\Leftrightarrow\begin{cases}a_{ii}=0,\\ a_{ij}=-a_{ji},i\neq j;\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 5\\ +1 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

⑧正交阵 $\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$.

n 阶正交阵 A 由 n 个两两正交的单位向量组(规范正交基)组成.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m\end{pmatrix}$$

3. 左行右列定理

初等阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘(右乘)$\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{PA}(\boldsymbol{AP})$，就是对 $\boldsymbol{A}$ 做了一次与 $\boldsymbol{P}$ 相同的初等行(列)变换.

【例 1】[取自《张宇线性代数 9 讲》P66，例 4.17]

设 A 是 3 阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 列和第 2 列得到 B，A^*，B^* 分别是 A，B 的伴随矩阵，则 B^* 可由(　　).

(A)$\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列互换得到　　(B)$\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行互换得到

(C)$-\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列互换得到　　(D)$-\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行互换得到

【分析】

$AE_{12}=B$　　$B=AE_{12}$

$|B|=-|A|$　　$B^{-1}=E_{12}A^{-1}$

$A^*=\boxed{|A|A^{-1}}$

$B^*=\underline{|B|B^{-1}}=-|A|E_{12}A^{-1}$

$=E_{12}(-|A|A^{-1})=E_{12}(-A^*)$

五、求 A 的逆

1. 定义法(针对抽象型矩阵)

方法一　利用定义求逆矩阵：

根据题设条件，找出一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

【例 1】[取自《张宇线性代数 9 讲》P48，例 3.20]

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，并求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

【分析】

$AB=A+B\Rightarrow \underline{AB}-A-\underline{B}=0$

$\Rightarrow \underline{AB}-\underline{A}-\underline{B}-E+\underline{E}=0$

$\Rightarrow (A-E)B-(A-E)=E$

$\Rightarrow (A-E)(B-E)=E$

方法二　将 A 分解成为若干个可逆矩阵的乘积：

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$

【例 2】[取自《张宇线性代数 9 讲》P49，例 3.22]

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆方阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 是可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，并求$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

【分析】

$\underline{A^{-1}+B^{-1}}$. $\underline{A}$、$\underline{B}$ 均可逆，则

$A+B=A(E+A^{-1}B)=A(B^{-1}+A^{-1})B$

$\Rightarrow (A+B)^{-1}=B^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$

已知 $A=\begin{bmatrix}B & O\\ D & C\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $r\times r$ 可逆矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $s\times s$ 可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 A^{-1}.

设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & W\end{pmatrix}$，因 $|A|=\begin{vmatrix}B & O\\ D & C\end{vmatrix}=|B||C|\neq 0$

则 $AA^{-1}=E$，即 $\begin{pmatrix}B & O\\ D & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & O\\ O & E\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}BX=E\Longrightarrow X=B^{-1}\\ BY=0\Longrightarrow Y=0\\ DX+CZ=0\Rightarrow Z=-C^{-1}DB^{-1}\\ \cancel{DY}+CW=E\Rightarrow W=C^{-1}\end{cases}$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1} & O\\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1}\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}B & O\\ D & C\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1} & O\\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1}\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}B & D\\ O & C\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1}\\ O & C^{-1}\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}O & B\\ C & D\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-C^{-1}DB^{-1} & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}D & B\\ C & O\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1}\end{pmatrix}$

5) 若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 均可逆，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix}\text{可逆，则 }\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \\ & & \boldsymbol{A}_3^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} & & \boldsymbol{A}_1\\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ \boldsymbol{A}_3 & & \end{pmatrix}\text{可逆，则 }\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} & & \boldsymbol{A}_3^{-1}\\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & \end{pmatrix}$$

(6) 设 $\boldsymbol{A}_{n\times n},\boldsymbol{B}_{m\times m}$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

【例】设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & B\\ C & O\end{pmatrix}$$

试求(Ⅰ)$|\boldsymbol{A}|$ 中所有元素的代数余子式之和，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$；

(Ⅱ)$|\boldsymbol{A}|$ 中第 k 行元素代数余子式之和，即 $\sum\limits_{j=1}^{n}A_{kj}$.

【分析】

(Ⅰ) 求 $A^*=\underline{|A|}\underline{A^{-1}}$

$|A|=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}$

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & \cdots & 0 & n\\ \hline 1 & & & & 0\\ & 2 & & & 0\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & n-1 & 0\end{array}\right)$$

$$A^*=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\left(\begin{array}{cccc|c}0 & \cdots & & 0 & n\\ \hline 1 & & & & 0\\ & 2 & & & \vdots\\ & & \ddots & & \\ & & & n-1 & 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

(Ⅱ) $\sum\limits_{j=1}^{n}A_{kj}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\cdot k$