1.n 阶行列式由 n 个 n 维向量组成，其结果为以 n 个向量为邻边的 n 维图形体积

2.行列式中两行互换，行列式的值反号

3.$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

4.副对角线行列式的值为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \dots a_{n,1}$

5.

范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

6.

行和或列和相等的行列式(行和是指每一行元素相加的和,列和同理)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n \times n} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

7.第二数学归纳法：验证 n=1 和 n=2 时成立，假设 n<k 时成立，证明 n=k 时成立

8.n 阶行列式有 n！项，每项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

9.求具体型行列式：消 0 化三角形法，加边法，递推法，数归法，范德蒙行列式

10.$|kA_{nxn}| = k^n |A_{nxn}|$

11. $|AB| = |A||B|$

12. $AB = AC \;\&\; |A| \neq 0 => B = C$

13. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

14. $AA^* = A^*A = |A|E$

15. $|A^*| = |A|^{n-1}$

16.$(kA)^* = k^{n-1}A^* \ (k \neq 0)$

17. $A^* = |A|A^{-1}$

18.$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

19.$a_{ij} = A_{ij} => A^T = A^* => |A^*| = |A^T| = |A| = |A|^{n-1} => |A| = 0/1$

20.$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$ $\ E_i^{-1}(k) = E_i\left(\frac{1}{k}\right)$ $\ E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$

21.矩阵的 n 次方:

1.试计算A^2/A^4，期待结果为kE

2.若$r(A_{nxn})=1$，$A^n=[tr(A)]^{n-1}\cdot A$（拆$A=\alpha\beta^T$（均为列向量），$A^2=\beta^T\alpha * A$)

3.$A^n=(B+E)^n=C_n^0B^0E^n+C_n^1B^1E^{n-1}+C_n^2B^2E^{n-2}+\cdots+C_n^nB^nE^0=E+nB+C_n^2B^2$

4.若 A 可以相似对角化，即$P^{-1}AP=\Lambda$，则$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

22.求A^{-1}:

1.定义法：$AB=E => B=A^{-1}$；$A=BC => A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$

2.A^*法：$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

3.初等变换法：$(A|E)\rightarrow(E|A^{-1})$

23.行阶梯形矩阵：若有零行，全在下方；从行上看，自左边起，出现连续零的个数自上而下严格单增。

24.行最简阶梯形矩阵：台角位置元素为 1，台角之上全为 0。

25.主左定，副右调，直角元素不戴帽，不要忘记加负号

$$A=\begin{pmatrix}B&O\\D&C\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1}&O\\-C^{-1}DB^{-1}&C^{-1}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}B&D\\O&C\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1}&-B^{-1}DC^{-1}\\O&C^{-1}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}O&B\\C&D\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-C^{-1}DB^{-1}&C^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}D&B\\C&O\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}O&C^{-1}\\B^{-1}&-B^{-1}DC^{-1}\end{pmatrix}$$

26.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&&\\&\boldsymbol{A}_2&\\&&\boldsymbol{A}_3\end{pmatrix}\text{可逆,则 }\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&&\\&\boldsymbol{A}_2^{-1}&\\&&\boldsymbol{A}_3^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}&&\boldsymbol{A}_1\\&\boldsymbol{A}_2&\\\boldsymbol{A}_3&&\end{pmatrix}\text{可逆,则 }\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}&&\boldsymbol{A}_3^{-1}\\&\boldsymbol{A}_2^{-1}&\\\boldsymbol{A}_1^{-1}&&\end{pmatrix}$$

27.

(6) 设 $\boldsymbol{A}_{n\times n},\boldsymbol{B}_{m\times m}$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$$

28.

3. 基础解系和解的结构

(1)基础解系：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，①是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；②线性无关；③方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出，则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系．

(2)通解：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数．

29.部分相关=>整体相关；整体无关=>部分无关；原来相关=>缩短必相关；原来无关=>延长必无关

30.对于一个成员的向量组，若α=0 则相关，若α≠0 则无关

31.n 维空间由 n 个 n 维线性无关向量组表示，若$\beta_1\beta_2\dots\beta_s$可由$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t$表出，且 s>t，则$\beta_1\beta_2\dots\beta_s$必相关；若$\beta_1\beta_2\dots\beta_s$可由$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t$表出，且$\beta_1\beta_2\dots\beta_s$线性无关，则 s≤t

32.反证法

33.对于等价向量组 I，II：$r(I)=r(II)=r(I|II)$

34.对于等价矩阵 A，B：$r(A)=r(B)$

35.对于非齐次线性方程组若$r(A)\neq r([A,b])$，则无解；若$r(A)=r([A,b])=n$，则方程组有唯一解；若$r(A)=r([A,b])=r<n$，则方程组有无穷多解。

36.

$$\begin{array}{ccccc} & & x_3 & & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$s=4-3=1$

$\xi=(\quad 1 \quad)^T$

$\xi=(1\ -2\ 1\ 0)^T$

齐次通解为 $k\xi$

非齐次通解为 $k\xi+\eta$ $\eta=(b-4\ \ 7-2b\ \ 0\ \ b-2)^T$

37.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\xi_1=(0\ 0\ 1\ 0)^T$

$\xi_2=(-1\ 1\ 0\ 1)^T$

$s=4-2=2$

(I)的通解 $(\forall k_1,k_2)$

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

38.对于同解方程组 A，B：$r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

39.

设 r 为(II)的任一解，即 $A^TAr=0$

$r^TA^TAr=0\Rightarrow(Ar)^TAr=0\Rightarrow\|Ar\|^2=0\Rightarrow Ar=0$

故 r 也是(I)的解

40.$\forall A_{mxn}$，均有$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

41.若α_t可由$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{t-1}$表示，则$r(\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_{t-1})=r(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{t-1}\alpha_t)$

42. $r(A)=0 <=> A=O$

43. $r(A_{mxn})\le \min(m,n)$

44. $r(A_{nxn}^{n+1})=r(A_{nxn}^{n})$

45. $r(A+B)\le r(A|B)\le r(A)+r(B)$　　((A+B)=(A|B)·X => A+B 可以由 A|B 表示出)

46. $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$　　((AB)=A·B => AB 可以由 A 表示出)

47.若$\mathrm{AB}=0$，$r(A)+r(B)\le n$　（n 为 A 的列数）

48. A_{nxn}: $r(A)=n => |A|\ne 0 => |A^*|\ne 0 => r(A^*)=n$

$r(A)=n-1 => |A|=0 => AA^*=0 => r(A)+r(A^*)\le n => 0\le r(A^*)\le 1$

$r(A)=n-1\ => \exists\, n-1$阶子式$\ne 0 => \exists M_{ij}\ne 0 => \exists A_{ij}\ne 0 => A^*\ne O$

$=> r(A^*)=1$

$r(A)<n-1 => \forall\, n-1$阶子式$=0 => \forall M_{ij}=0 => \forall A_{ij}=0 => A^*=O$

$=> r(A^*)=0$

49. $[\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n]=[\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n]\cdot C$，C 为由基 ζ 到基η的过渡矩阵

50. x为基ζ下的坐标，y 为基η下的坐标，C 为过渡矩阵=>$x=Cy$

51. $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=0 => \alpha$与$\beta$为正交向量

52. $||\alpha||=(\alpha,\alpha)$

53.标准正交向量组：$(\alpha,\beta)=0\ \&\ (\alpha,\alpha)=1$

54.施密特正交化：$\beta_1=\alpha_1\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\quad \beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

55. $r(A)=k$ =>存在 k 阶子式不为 0，k+1 阶子式全为 0

56.特征方程：$|\lambda E-A|\zeta=0$　$(\zeta\ne 0)$

57. $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

58. $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

59.证明|A|≠0 可通过求 r(A)得 A 不满秩

60.写 $A\zeta=\lambda\zeta$ 时要注意说明 $\zeta\ne 0$

61.特征值特征向量的求法：①定义法（$A\zeta=\lambda\zeta$）②特征方程法（$|\lambda E-A|=0$）(kζ，k≠0)

62.解特征方程时最好先提出一个含λ的因式

63. $P^{-1}AP=B => A\sim B$

64. $P^{-1}AP=\Lambda => P=[\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n]$，$\Lambda=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n]$　n 个特征向量线性无关

65. $A\sim B => r(A)=r(B)$

$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

$tr(A)=tr(B)\quad |A|=|B|$

$A^m\sim B^m\quad f(A)\sim f(B)$

$A^*\sim B^*\quad f(A^*)\sim f(B^*)$

$A^{-1}\sim B^{-1}\quad f(A^{-1})\sim f(B^{-1})$

66.

1）普通 $\mathbf{A}$，$\lambda_1\ne\lambda_2\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 无关

$\lambda_1=\lambda_2$，则不确定

2）实对称 $\mathbf{A}$，$\lambda_1\ne\lambda_2\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_1\perp\boldsymbol{\xi}_2$ 正交

$\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 一定无关，不一定正交

67.

$A\sim\Lambda$ 判别方法

1）两个充分条件

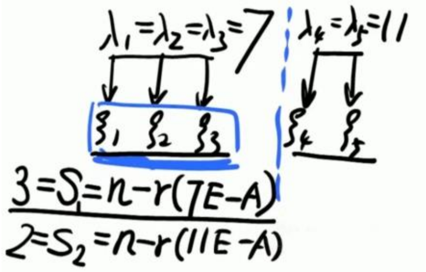
A 有 n 个不同的特征值，则 $A\sim\Lambda$；

A 为实对称矩阵，则 $A\sim\Lambda$.

2）两个必要条件

A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow A\sim\Lambda$；

$n_i=n-r(\lambda_i E-A)$，λ_i 为 n_i 重根 $\Leftrightarrow A\sim\Lambda$.



68.

$A\sim B$ 判别方法

①证 $A\sim\Lambda_1$ ②证 $B\sim\Lambda_2$ ③$\Lambda_1=\Lambda_2$，由传递性得 $A\sim B$

69.二次型：$f(x)=x^TAx\quad(A^T=A)$

70.

1）理论 $f=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ （d 为实数） 标准形

$f=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$（$p$－正惯性指数，$q$－负惯性指数） 规范形

71.二次型化标准型规范型：拉式配方法；正交变换法：设$X=PY(P^T=P^{-1})=>f=x^TAx=Y^TP^TAPY=Y^T(P^{-1}AP)Y=Y^T\Lambda Y=(y_1\ y_2\ y_3)\cdot diag(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)\cdot(y_1\ y_2\ y_3)^T$ 步骤:1.求 A 的特征值，特征向量；2.特征向量单位化正交化为规范正交基；3.规范正交基组成变换矩阵 P

72.

f 的正定性

① 定义：若 $\forall x\neq 0$，均有 $f=x^TAx>0$，称 f 正定，A 正定.

② 必要条件：A 正定，则 $a_{ii}>0$，$|A|>0$，$A^T=A$.

③ 充要条件：

f 正定 $\Leftrightarrow A$ 正定 $\Leftrightarrow A^{-1}$ 正定 $\Leftrightarrow \lambda_i>0$

$\Leftrightarrow p=n \Leftrightarrow$ 顺序主子式均大于 0.

$\Leftrightarrow A$ 合同于 E

$\Leftrightarrow \exists$ 可逆矩阵 D，使 $A=D^TD$

73.A 与 B 合同⇔有可逆矩阵 C 使得$C^TAC=B$⇔x^TAx,x^TBx有相同的正，负惯性指数