1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
2. 正项级数的判敛：
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛⇔$\{S_n\}$有上界
   b) 若$u_n \le v_n$ 则：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散=>$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛=>$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛
   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 => u_n$小　$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty => v_n$小　$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \ne 0$ =>同敛散
   d) 比值判别法（达朗贝尔判别法）：

      $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ =>收敛　$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ =>发散　$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ =>该法失效
   e) 根式判别法（柯西判别法）：

      $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ =>收敛　$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ =>发散　$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ =>该法失效
3. 交错级数的判敛

   莱布尼兹判别法：若$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 且 $u_n \ge u_{n+1}$ 则级数收敛

   p-级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，$p > 1$则收敛，$p \le 1$则发散

   广义 p-级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$，$p > 1$则收敛，$p \le 1$则发散

   交错 p-级数：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$　$p > 1$则绝对收敛，$0 < p \le 1$则条件收敛
4. 任意项级数的判敛

   $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

   $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$拆成正项级数+交错级数收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛
5. 幂级数的判敛
   a) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n => \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$
   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \varphi(x) < 1$ 或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \varphi(x) < 1$ 求收敛区间
   c) 单独讨论端点 a，b，判断收敛域
6. ln(1+x)的展开式中 x 的范围是$(-1,1]$
7. 先积后导：$s(x) = (\int s(x)dx)'$

   $$\frac{1}{(1+x)^2} = \left(\int \frac{1}{(1+x)^2}dx\right)' = \left(-\frac{1}{1+x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n \quad (|x|<1)$$

   $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x\left(\int \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x|<1)$$
8. 先导后积：$s(x) = s(a) + \int_a^x s'(t)dt$

   $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = S(0) + \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right)' dt = 0 + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x)$$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - 1$
10. $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n => S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$

11. 狄利克雷收敛定理：设$f(x)$以$2l$为周期，在$[-l,l]$上满足连续或只有有限个第一类间断点，且只有有限个极值点。则$f(x)$的傅里叶级数$S(x)$在$[-l,l]$上处处收敛，且：

$S(x)=f(x)$　（x 为连续点）

$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$　（x 为间断点）

$S(x)=\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$　（x 为端点）

12. 周期为$2l$的函数的傅里叶展开：

$$f(x)\sim S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{l}+b_n sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

若函数为奇函数（积展开）：$a_0=0$，$a_n=0$，$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{n\pi x}{l}dx$

若函数为偶函数（偶展开）：$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$，$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx$，$b_n=0$