第一讲　行列式

一、从行列式讲起

先看一个式子：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 我们称其为 2 阶行列式，其中 a_{ij} 的第一个下标 i 表示此元素所在的行数，第二个下标 j 表示此元素所在的列数，$i=1,2,j=1,2$，于是此行列式中有 4 个元素，并且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 这是一个什么样的计算规则？它背后有什么样的意义？

希望读者跟着我的思路走. 请你将此行列式的第一行的两个元素 a_{11}，a_{12} 看成一个 2 维向量 $[a_{11},a_{12}]\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{\alpha}_1$（线性代数中，向量不需要在字母上加箭头写成 $\overrightarrow{\alpha_1}$，只要写 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 即可，此后类同，不再重复）. 将此行列式的第二行的两个元素 a_{21}，a_{22} 看成另一个 2 维向量 $[a_{21},a_{22}]\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{\alpha}_2$. 不失一般性，将其标在直角坐标系中，且以这两个向量为邻边拼出一个 $\square OABC$，则 $S_{\square OABC}=?$

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的长度（模）为 l，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的长度（模）为 m，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 x 轴正向的夹角为 α，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 x 轴正向的夹角为 β，于是，如图 1 所示：

$$
\begin{aligned}
S_{\square OABC} &= l \cdot m \cdot \sin(\beta-\alpha) \\
&= l \cdot m(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha) \\
&= l\cos\alpha \cdot m\sin\beta - l\sin\alpha \cdot m\cos\beta \\
&= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},
\end{aligned}
$$

于是 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=S_{\square OABC}$.

我们看到了一个极其直观有趣的结论：**2 阶行列式是由两个 2 维向量组成的，其（运算规则的）结果为以这两个向量为邻边的平行四边形的面积**. 这不仅得出了 2 阶行列式的计算规则，也能够清楚地看到其几何意义.

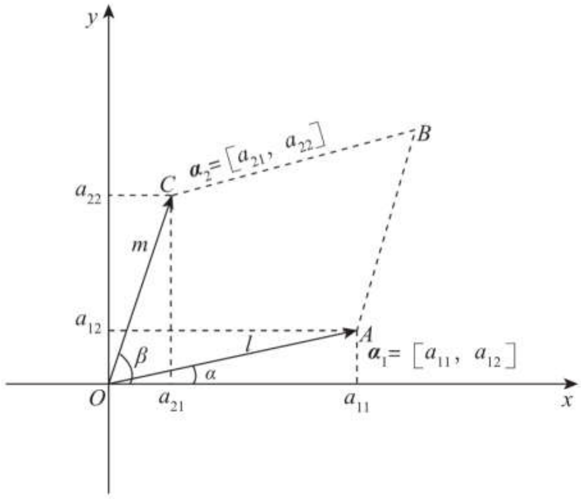

图 1

线性代数这门学问最大的一个特点是“可以作线性推广”——3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是什么？我希望读者能够仿照上述定义回答出：**3 阶行列式是由 3 个 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{12},a_{13}]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21},a_{22},a_{23}]$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[a_{31},a_{32},a_{33}]$ 组成的，其(运算规则的)结果为以这 3 个向量为邻边的平行六面体的体积.** 如图 2 所示：

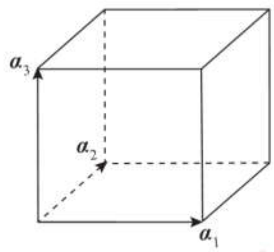

图 2

依此类推，我们便可以给出 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的本质定义：

n 阶行列式由 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}]$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=[a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}]$ 组成，其结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积.

二、行列式的性质

性质 1 行列互换，其值不变，即 $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$.

性质 2 行列式中某行(列)元素全为零，则行列式为零.

性质 3 行列式中某行(列)元素有公因子 $k(k\neq 0)$，则 k 可提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 (1)本书用 k ⓘ表示第 i 行乘 k，$k[j]$表示第 j 列乘 k；读者做题时可不必写出.

(2)以后称上述等式从右到左的运算为**“倍乘”性质**.

性质 4 行列式中某行(列)元素均是两个元素之和，则可拆成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 等式从右到左是两个行列式相加的运算. 如果两个行列式的其他元素对应相等，只有一行(列)不同时，可以相加，相加时其他元素不变，不同元素的行(列)对应相加即可.

性质 5 行列式中两行(列)互换，行列式的值反号.

【注】 (1)以后用 ⓘ↔ⓙ表示第 i 行与第 j 行互换，$[i]\leftrightarrow[j]$表示第 i 列与第 j 列互换；

(2)以后称上述运算为**“互换”性质**.

性质 6 行列式中的两行(列)元素相等或对应成比例，则行列式为零.

性质 7 行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列)，行列式的值不变.

【注 1】 (1)以后用ⓘ$+k$ⓙ表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行，$[i]+k[j]$表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列；

(2)以后称上述运算为**“倍加”性质**.

【注 2】 以上 7 个性质均可由本书前言中“一、从行列式讲起”所介绍的行列式的几何背景直观地得到，而不需复杂抽象的分析. 如性质 6 所说到的“两行元素对应成比例，

则行列式为零",可取$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$,因向量[2,3]与向量[4,6]为平行向量,故$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=S_{\Box}=0$,如图1—1所示,一目了然.

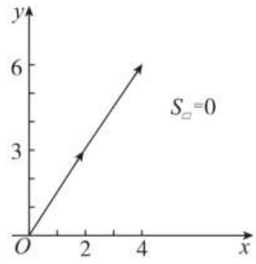

图 1—1

三、行列式的展开定理

1. 余子式

在 n 阶行列式中,去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行,第 j 列元素,由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的$n-1$阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记成 M_{ij},即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 代数余子式

余子式 M_{ij} 乘$(-1)^{i+j}$后称为 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

显然也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

3. 行列式按某一行(列)展开的展开公式

行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和,即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n), \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

四、几个重要的行列式

1. 上(下)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

3. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

4. 行和或列和相等的行列式(行和是指每一行元素相加的和,列和同理)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n \times n} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

五、例题

【例 1】［取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P71，A 组 42（数学二 P59，A 组 40；数学三 P61，A 组 23）］

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

【分析】

【例 2】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P72,A 组 61(数学二 P61,A 组 72;数学三 P62,A 组 36)]

计算行列式
$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}.$$

【分析】

【例 3】[取自《张宇线性代数 9 讲》P11,例 1.9]

计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}.$$

【分析】

【例 4】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题 · 习题分册》数学一 P73,A 组 62(数学二 P61,A 组 70;数学三 P72,B 组 80)]

计算 $D_5=\begin{vmatrix}1-x & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x\end{vmatrix}.$

【分析】

【例 5】[取自《张宇线性代数 9 讲》P17,习题 1.7]

计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

第二讲　矩阵

一、矩阵的定义及其基本运算

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数，排成 m 行 n 列的矩形表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 当 $m=n$ 时，称为 n 阶方阵.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times k}$. 若 $m=s,n=k$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵.

2. 矩阵的基本运算

(1)**相等**　$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times k}\Leftrightarrow m=s,n=k$，且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且对应元素相等.

(2)**加法**　两个矩阵是同型矩阵时，可以相加，即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中，$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，即对应元素相加.

(3)**数乘矩阵**　设 k 是一个数，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵. 数 k 和 $\boldsymbol{A}$ 的乘积称为数乘矩阵，即

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$
$$=(ka_{ij})_{m\times n},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都乘以 k.

(4)**矩阵的乘法**　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 矩阵(矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数必须与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的

行数相等)，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可乘，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times n$ 矩阵，记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$. $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 s 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的 s 个对应元素两两乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

矩阵乘法满足下列运算规律：

①**结合律** $(\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times r})\boldsymbol{C}_{r\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}(\boldsymbol{B}_{s\times r}\boldsymbol{C}_{r\times n})$；

②**分配律** $\boldsymbol{A}_{m\times s}(\boldsymbol{B}_{s\times n}+\boldsymbol{C}_{s\times n})=\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}+\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{C}_{s\times n}$；

$(\boldsymbol{A}_{m\times s}+\boldsymbol{B}_{m\times s})\boldsymbol{C}_{s\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{C}_{s\times n}+\boldsymbol{B}_{m\times s}\boldsymbol{C}_{s\times n}$；

③**数乘与矩阵乘积的结合律**

$$(k\boldsymbol{A}_{m\times s})\boldsymbol{B}_{s\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}(k\boldsymbol{B}_{s\times n})=k(\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}).$$

【注】 矩阵的乘法一般情况下不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

例如
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix},\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}.$$

【例 1】[取自《张宇线性代数 9 讲》P40，例 3.3]

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^n$.

【分析】

【例 2】[取自《张宇线性代数 9 讲》P39，例 3.2]

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\3&6&-3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

【分析】

【例 3】[取自《张宇线性代数 9 讲》P41,例 3.7]

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^n$.

【分析】

二、初等变换法与求 A^{-1}

1. 初等变换

(1)一个非零常数乘矩阵的某一行(列);

(2)互换矩阵中某两行(列)的位置;

(3)将某行(列)的 k 倍加到另一行(列).

以上三种变换称为矩阵的三种初等行(列)变换,且分别称为倍乘、互换、倍加初等行(列)变换.

【例 1】化 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\1 & -1 & 2 & -1 & 0\\4 & -2 & 6 & 3 & -4\\2 & 4 & -2 & 4 & -7\end{bmatrix}$ 为行阶梯型矩阵

【分析】

【例 2】化 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$为行最简阶梯型矩阵

【分析】

2. 用初等变换求逆矩阵的方法

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1}],$$

【例】[取自《张宇线性代数 9 讲》**P**47,例 3.19]

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

【分析】

第三讲　方程组

一、齐次线性方程组的求解

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

称为 m 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组，其向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j=1,2,\cdots,n.$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

1. 有解的条件

当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时（$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关），方程组（Ⅰ）有唯一零解；

当 $r(\boldsymbol{A})=r<n$ 时（$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关），方程组（Ⅰ）有非零解，且有 $n-r$ 个线性无关解．

2. 解的性质

若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2)=\mathbf{0}$，其中 k_1,k_2 是任意常数．

3. 基础解系和解的结构

(1)基础解系:设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$,①是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解;②线性无关;③方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出,则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(2)通解:设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

4. 求解方法

①将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化成阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$(或最简阶梯形矩阵),初等行变换将方程组化为同解方程组,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解,只需解 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 即可. 设 $r(\mathbf{A})=r$,

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n},$$

其中,m 是原方程组中方程个数,n 是未知量个数;

②按列找出一个秩为 $r(A)$ 的子矩阵;

③按照基础解系的定义写出通解。

【例】[取自《张宇线性代数 9 讲》P104,例 6.1]

求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

的通解.

【分析】

二、非齐次线性方程组

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{Ⅱ}$$

称为 m 个方程 n 个未知量的非齐次线性方程组，其向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j=1,2,\cdots,n, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

矩阵 $\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵，简记成 $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$ 或 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$.

1. 有解的条件

若 $r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])$（$\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出），则方程组（Ⅱ）无解；

若 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=n$（即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 线性相关），则方程组（Ⅱ）有唯一解；

若 $r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=r<n$，则方程组（Ⅱ）有无穷多解.

2. 解的性质

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\xi}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，则(1) $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解；(2) $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

3. 求解方法和通解结构

将增广矩阵作初等行变换化成阶梯形（或最简阶梯形）矩阵，求出对应齐次线性方程组的通解加上一个非齐次线性方程组的特解即是非齐次线性方程组的通解.

【例 1】[取自《张宇线性代数 9 讲》P106，例 6.2]

求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3, \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7, \end{cases}$$

并用对应的齐次方程组的基础解系表示通解.

【分析】

【例 2】[取自《张宇线性代数 9 讲》P122,例 6.25]

求线性方程组

$$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3+3x_4=11, \\ -3x_1+x_2-4x_3-2x_4=-6, \\ -x_1-9x_2+3x_4=15, \end{cases}$$

满足条件 $x_1=x_2$ 的全部解.

【分析】

第四讲　特征值与二次型

一、特征值与特征向量的基本概念

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ 是一个数，若存在 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}, \tag{①}$$

则称 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

由①式，得

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0},$$

因 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，故

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0. \tag{②}$$

②式称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，是未知量 λ 的 n 次方程，有 n 个根(重根按照重数计)，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为特征矩阵，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 称为特征多项式.

【例】[取自《张宇线性代数 9 讲》P131，例 7.2(1)]

【分析】

二、矩阵相似的定义

1. 定义 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，记成 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

三、矩阵相似对角化的定义

若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，记 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

四、求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$

对于 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，若其成立，则 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n]$，$\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，且 $\boldsymbol{\xi}_i$ 对应的特征值为 λ_i，故此问题事实上仍是求解 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的问题.

五、二次型的定义及其矩阵表达式

n 元变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\\cdots\cdots\\+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

称为 n **元二次型**,简称**二次型**.

考研只研究系数 $a_{ij}\in\mathbf{R}(i\leqslant j,i,j=1,2,\cdots,n)$的情况,且称此二次型 f 为**实二次型**.

因为 $x_ix_j=x_jx_i$,现若令 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$,于是

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+\\&\quad\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 &(*)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_ix_j, &(**)\end{aligned}$$

其中(*)式称为完全展开式,(**)式称为和式. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$

则二次型可表示为

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}). \qquad (***)$$

(***)式称为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵表达式,实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵**. 这里需要着重多说几句.

二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个**对称矩阵**,其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$a_{ij}=a_{ji}$,即满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$. 为什么要强调这一点?

事实上,一个二次型可以有不同的写法,例如三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2,$$

可以写成

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+3x_2x_1,$$

也可以写成

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_1$$

等. 对应地用矩阵表示也有多种形式：

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \quad ①$$

$$=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&1&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \quad ②$$

$$=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}. \quad ③$$

这样，代表二次型的矩阵就不唯一了，不利于研究二次型问题. 现在我们立了“规矩”，**规定二次型的矩阵必须是对称矩阵，代表二次型的矩阵就是唯一的了**. 所以只有对称矩阵才是二次型的矩阵，也只有用对称矩阵表达的式子才是二次型的矩阵表达式，上面第③种写法是按“规矩”写的. 再看两个例子.

【注例】写出三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$ 的二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【分析】

六、线性变换的定义

对于 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若令

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n, \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n, \\ \qquad\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n, \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$，则可写为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

上式称为从 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 到 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**线性变换**. 若线性变换的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，即 $|\boldsymbol{C}|\neq 0$，则称为**可逆线性变换**. 现给出 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，则

$$f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}.$$

记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{y}).$$

此时，二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 通过线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 得到一个新二次型 $g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$.

【例】[取自《张宇考研数学题源探析经典 1000 题·习题分册》数学一 P86，B 组 116（数学二 P79，B 组 139；数学三 P79，B 组 154）]

已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3.$$

(1)写出二次型 f 的矩阵表达式；

(2)用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

【分析】