【例 1】设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为 3 阶可逆矩阵，则 $B^{2020}-2A^2$ = ________.

【分析】

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}\lambda_1^m&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^m\end{pmatrix}$$

$$B^{2020}=\underbrace{P^{-1}A\cancel{P\cdot P^{-1}}A\cancel{P\cdot}\cdots\cancel{P^{-1}}AP}_{2020个}=P^{-1}A^{2020}P$$

$$\Rightarrow B^{2020}=P^{-1}EP=E$$

【例 2】[取自《张宇线性代数 9 讲》P42，例 3.8]

设 $A=\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&a\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 A^n（n 为正整数）.

【分析】

$$A=B+E=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^n=(B+E)^n=C_n^0B^0E^n+C_n^1B^1E^{n-1}+C_n^2B^2E^{n-2}+\cdots+C_n^nB^nE^0$$

$$B^2=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&a^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad B^3=O$$

$$\Rightarrow A^n=E+n\cdot B+\frac{n(n-1)}{2}B^2$$

$$=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&na&nb\\0&0&na\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}a^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&na&nb+\frac{n(n-1)}{2}a^2\\0&1&na\\0&0&1\end{pmatrix}$$