2. 逆序法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n} = \underbrace{a_{\square}a_{\square}\cdots a_{\square}}_{n!\text{个}}$$

① 展开后有n!个项.

② 每项是取自不同行、不同列n个元素的乘积

③ 行下标顺排后，每项乘以 $(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}$

☆ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & a_{22} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$

右上三角行列式　　左下三角行列式　　(主)对角行列式

$$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

☆ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 \\ a_{n1} & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix}$

左上三角行列式　　右下三角行列式　　副对角行列式

☆ $= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1}$

3. 展开式法定义（展开定理）$|A_{n\times n}|$

① 余子式 $M_{ij} = \left| \quad a_{ij} \quad \right|_{(n-1)\times(n-1)}$

② 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

③ 展开公式（降阶）

$$D_n = |A_{n\times n}| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ \quad i=1,2,\cdots,n \quad (\text{按第}i\text{行展开}) \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ \quad j=1,2,\cdots,n \quad (\text{按第}j\text{列展开}) \end{cases}$$

注：哪一行(列)含0元素最多，就按其展开.

(例1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$$= 1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 34 \end{vmatrix} + 2\cdot\cancel{(-1)}^4\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 34 & 34 \end{vmatrix} + 5(-1)^5\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 34 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -67 + 272 + 315 = \boxed{520}$$