矩阵理论

§0 补充公式

令 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$， $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$

定义 $f(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_mA^m$，其中 $I=I_n=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}$

若 $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k$， $f(x)\bullet g(x)=g(x)\bullet f(x)$，则 $f(A)\bullet g(A)=g(A)\bullet f(A)$

分块公式

令 $A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$， A_1， A_2 为方阵

则：　（1） $A^k=\begin{pmatrix}A_1^k&0\\0&A_2^k\end{pmatrix}$

（2） $f(A)=\begin{pmatrix}f(A_1)&0\\0&f(A_2)\end{pmatrix}$， $f(x)$ 为多项式

令 $A=\begin{pmatrix}A_1&&&(*)\\&A_2&&\\&&\ddots&\\O&&&A_s\end{pmatrix}$， $A_1,\cdots A_s$ 为方阵

则：　（1） $A^k=\begin{pmatrix}A_1^k&&&(*)\\&A_2^k&&\\&&\ddots&\\O&&&A_s^k\end{pmatrix}$

（2） $f(A)=\begin{pmatrix}f(A_1)&&&(*)\\&f(A_2)&&\\&&\ddots&\\O&&&f(A_s)\end{pmatrix}$

相似关系： $A\backsim B$，（$P^{-1}AP=B$）

则：　（1） $(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP$，（k=0,1,2,…）

（2） $f(P^{-1}AP)=P^{-1}f(A)P$， $f(x)$ 为多项式

许尔公式（schur）： 每个复方阵， $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 都相似于上三角形。

即：$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & (*) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中$\lambda_1,\cdots\lambda_n$的次序可以任意指定

Pf：用归纳法

$n=1$时成立

可以设为（$n-1$）阶方阵成立

对于n阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$设特征值为$\lambda_1,\cdots\lambda_n$

取λ_1对应的特征向量，记为$\alpha_1\neq 0$，$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$

把α_1扩展为可逆方阵$Q=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$

$\therefore Q^TQ=I_n=\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)$

又$\because Q^{-1}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=\left(Q^{-1}\alpha_1,Q^{-1}\alpha_2,\cdots,Q^{-1}\alpha_n\right)$

其中$Q^{-1}\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=e_1$，$Q^{-1}\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=e_2$，…，$Q^{-1}\alpha_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=e_n$

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}AQ&=Q^{-1}A\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)\\
&=Q^{-1}\left(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n\right)\\
&=Q^{-1}\left(\lambda\alpha_1,\cdots,*,*,*\right)\\
&=\left(\lambda_1Q^{-1}\alpha_1,(*),\cdots,(*)\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $=\left(\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\\\vdots\\\vdots\\\vdots\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\vdots\\\vdots\\\vdots\\\vdots\end{pmatrix}\right)$，其中$\mathrm{A}_1$为（$n-1$）阶

$\overset{记}{\underset{为}{=}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & (*)\\0 & \mathrm{A}_1\end{pmatrix}$

$\therefore$由假设，对于A_1必有（$n-1$）阶P_1，可推出$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\therefore$得证。

Eg.知n阶方阵A，适合$\mathrm{A}^k=0$，则$\left|\mathrm{A}+\mathrm{I}\right|=1$

Pf：$A^k=0\Rightarrow$任意特征值$\lambda^k=0\Rightarrow\lambda=0$

即全体特征值为 0，0，…，0

由需要$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & *\\ & \ddots & \\ O & & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left|P^{-1}AP+I\right|=1$

$\because\left|P^{-1}AP+P^{-1}IP\right|=\left|P^{-1}(A+I)P\right|=\left|A+I\right|\Rightarrow\left|A+I\right|=1$

注：（1）若$A\backsim B$（相似），则A、B有相同特征值$\lambda_1,\cdots\lambda_n$

可引入记号：谱集$\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$（全体特征值，含重复）

$\therefore A\backsim B\Rightarrow\sigma(A)=\sigma(B)$

（2）$A\backsim B\Rightarrow|\lambda I-A|=|\lambda I-B|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，特征多项式

$\because P^{-1}AP=B\Rightarrow|\lambda I-A|=\left|P^{-1}(\lambda I-A)P\right|=|\lambda I-B|$

引理： 若$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$，则$|\lambda I-A|=|\lambda I_1-A|=|\lambda I_1-A_1||\lambda I_2-A_2|$

$\Rightarrow\sigma(A)=\sigma(A_1)\cup\sigma(A_2)$

即$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}\cup\{\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_n\}$

设$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$f(x)$为多项式，则$f(B)=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & (*)\\ & \ddots & \\ O & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}$

引理： 若n阶方阵A的谱集$\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，

则$f(A)$的全体特征值为$\{f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)\}$，$f(x)$为多项式

Pf：由许尔定理，$A\backsim B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}\Rightarrow f(A)\backsim f(B)=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & *\\ & \ddots & \\ O & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(x)$的全体特征值为$\{f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)\}$，$f(x)$为多项式

例如：λ为A的特征值$\Rightarrow\lambda^k$为A^k的特征值。（$f(x)=x^k$）

引理： 令 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$， $f(x)=|xI-B|=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$

则 $f(B)=(B-\lambda_1 I)(B-\lambda_2 I)\cdots(B-\lambda_n I)=0$

Pf：当 $n=2$ 时，$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$， $f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

$$\Rightarrow f(B)=(B-\lambda_1 I)(B-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}0 & * \\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\lambda_1-\lambda_2) & * \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

∴得证

★**Cayley 公式：** 设 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $f(x)=|xI-A|=a_0+a_1x+\cdots+x^n$

则 $f(A)=a_0I+a_1A+\cdots+A^n=0$

Pf：由许尔 $P^{-1}AP=B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & (*) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P^{-1}f(A)P=f(P^{-1}AP)=f(B)=0$（引理）

定义： 若多项式 $f(x)$ 使 $f(A)=0$，则称 $f(x)$ 为 A 的一个零化式

结论： 方阵 A 的特征多项式 $f(x)=|xI-A|$ 为 A 的一个零化式

Eg：$A=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$，特征多项式 $f(x)=x^2+1$

可知：$f(A)=A^2+I=\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}+I=0$

且 $f(x)=|xI-A|=(x-i)(x+i)$，（$i=\sqrt{-1},i^2=-1$）

$f(A)=(A-iI)(A+iI)=0$

也可取 $P=\begin{pmatrix}i & -1 \\ 1 & i\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & -1 \\ 1 & -i\end{pmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}i & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$，对角形

Eg：知 $A=\begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ O & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$，则 $A^n=0$

由 Cayley 特征多项式：$f(x)=x^n \Rightarrow f(A)=A^n=0$

Ex.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，并验证 Cayley 定理。

2. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求 $f(x)=|xI-A|$ 验证 $f(A)=0$

补充知识（schur 公式、Cayley 公式）应用

由 $A^n=-(a_0I+a_1A+\cdots+a_{n-1}A^{n-1})$ ①

$\Rightarrow A^{n+1}=A\bullet A^n=-(a_0A+a_1A^2+\cdots+a_{n-1}A^n)$ ②

把①代入② $\Rightarrow A^{n+1}=(*)I+(*)A+\cdots+(*)A^{n-1}$

可知： 任何 $A^m(m\geq n)$ 都可写成 $I,A,\cdots,A^{n-1}$ 的线性组合。

任何多项式 $g(A)$，可写成 $I,A,\cdots,A^{n-1}$ 的组合。

Eg：若 $|A|\neq 0$，$f(x)=|xI-A|=a_0+a_1x+\cdots+x^n$，$a_0=|-A|\neq 0$

则 A^{-1} 可用 A 的多项式表示

$\because a_1A+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}+A^n=-a_0I$

$A(a_1I+\cdots+a_{n-1}A^{n-2}+A^{n-1})=-a_0I$

$\Rightarrow A^{-1}=-\dfrac{1}{a_0}(a_1I+\cdots+a_{n-1}A^{n-2}+A^{n-1})$

零化式定义： 若 $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$，使得 $g(A)=b_0I+b_1A+\cdots+b_mA^m=0$，称 $g(x)$ 为方阵 A 的零化式

注： 方阵 A 的零化式有无穷多个

$\because$ 取特征多项式 $f(x)$ 则 $f(A)=0$

任取式 $h(x)$，$f(A)h(A)=0\Rightarrow f(x)h(x)$ 也是零化式

极小式定义：在方阵A的零化式集合中，去次数最小的且首项系数为 1 的零化式$m_A(x)$，称它为A的极小式

注：极小式唯一

性质：①极小式$m(x)$必为特征多项式$f(x)=|xI-A|$的因式。

②特征多项式$f(x)=|xI-A|$的每个单因子$(x-\lambda)$也是极小式的因子。

③若$f(x)=|xI-A|=(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_s)^{n_s}$，

则极小式$m(x)=(x-\lambda_1)^{l_1}(x-\lambda_2)^{l_2}\cdots(x-\lambda_s)^{l_s}$，

且$1\le l_1\le n_1,1\le l_2\le n_2,\cdots,1\le l_s\le n_s$，$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_s$互不相同。

Eg. $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求极小式$m_A(x)$，$m_B(x)$

解：（1）$|xI-A|=(x-2)^2(x-1)$

极小式为：$(x-2)^2(x-1)$或$(x-2)(x-1)$

计算：$(A-2I)(A-I)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$

$\therefore$极小式为$m_A(x)=(x-2)^2(x-1)$

（2）$|xI-B|=(x-2)^2(x-1)$

计算：$(B-2I)(B-I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$

$\therefore$极小式为$m_B(x)=(x-2)(x-1)$

Eg.求下列极小式$m(x)$

（1）$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，（2）$B=\begin{pmatrix}4&-6&0\\2&-3&0\\-2&3&2\end{pmatrix}$，

（3）$C=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，（4）$D=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

解：（1）特征多项式$|xI-A|=(x-1)^2(x+2)$

极小式为：$(x-1)^2(x+2)$或$(x-1)(x+2)$

验证：$(A-I)(A+2I)=0$

$\therefore$极小式为$m(x)=(x-1)(x+2)$

（3）解法如下

引理： A_1，A_2的极小式为$m_1(x)$，$m_2(x)$

则$\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$的极小式$m(x)$等于$m_1(x)$，$m_2(x)$的最小公倍式

（此引力可推广到$A_1,A_2,\cdots,A_s$ ）

$C=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$极小式为$(x-1)^2$，$A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$极小式为$(x-1)$

取最小公倍式$(x-1)^2$为C的极小式。

（5）$F=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}_{6\times6}$，$A_1=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$

引理： 设$D=\begin{pmatrix}0&1&&O\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\O&&&0\end{pmatrix}$，则$D$的极小式$m(x)=x^n$

验证：先证D的性质（**右推公式**）

设$A=(\alpha_{ij})_{n\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

则有$AD=(0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})$

$AD^2=(0,0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2})$

$AD^k=(0,\cdots,0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-k})$

单位向量技巧： $\because AI=A(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n)=A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$\therefore Ae_1=\alpha_1,Ae_2=\alpha_2,\cdots,Ae_n=\alpha_n$

$\Rightarrow AD=A(0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1})=(0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})$

同理 $AD^2=(AD)D=(0,0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-2})$

可知：$D^{n-1}=(D)D^{n-2}=(0,0,\cdots,0,e_1)\neq 0$

$D^n=(D)D^{n-1}=0$，而特征多项式 $f(x)=|xI-D|=x^n$，极小式为某个 x^k

由计算知：极小式为 $m(x)=x^n$

引理 2： 设 $B=\begin{pmatrix} b & 1 & & O \\ & b & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & b \end{pmatrix}$，则极小式为 $m(x)=(x-b)^n$

$$\because B-bI=D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore (B-bI)^{n-1}=D^{n-1}\neq 0$，且特征多项式 $f(x)=|xI-B|=(x-b)^n$，极小式为某个 $(x-b)^k$

$\therefore$ 极小式为 $m(x)=(x-b)^n$

复习：（1）可用“分块形”行变换求逆

例：$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的逆

（2）“分块形”倍加变换不改变行列式的值

（3）**换位公式**：若 $A=A_{m\times n}$，$B=B_{n\times m}$

则 $|xI_m-kAB|=x^{m-n}|xI_n-kBA|$，（$m\geq n$）

特征值（谱估计）

盖尔圆方法（Ger）

定义： n 阶方阵 $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ 的第 p 个 Ger（盖尔）半径为

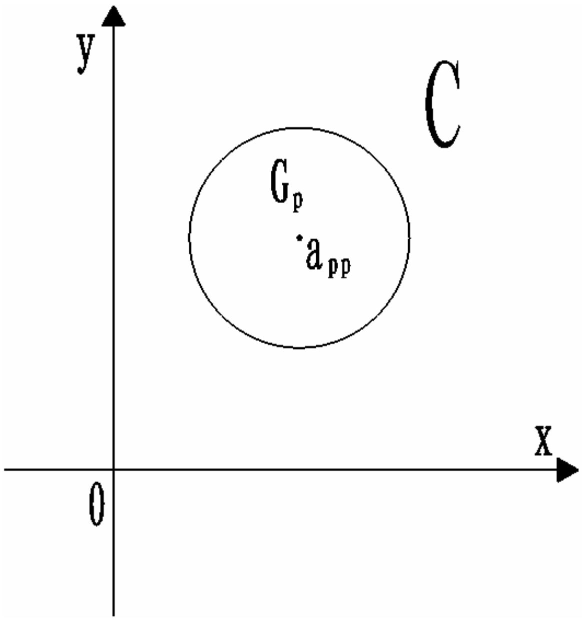
$R_p = |a_{p1}| + |a_{p2}| + \cdots + |\hat{a}_{pp}| + \cdots + |a_{pn}|$，（记号“∧”表示去掉该项）

规定第 p 个 Ger 圆为

$$G_p = \{Z \mid |Z - a_{pp}| \le R_p\},\ Z \in C$$

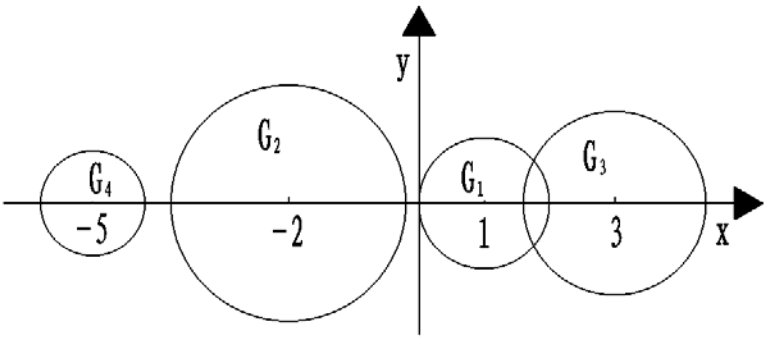
第 1 圆盘定理： 方阵 $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ 的全体特征值（谱）都在 A 的 n 个 Ger 圆的并集中。

即：$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subset G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$，（略证）



Eg. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & -2 & -1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & -5 \end{pmatrix}$，估计 $\sigma(A)$ 的范围。

解：Ger 圆为
$$\begin{aligned} G_1 &: |Z - a_{11}| = |Z - 1| \le R_1 = 1 \\ G_2 &: |Z - a_{22}| = |Z + 2| \le R_2 = 1.8 \\ G_3 &: |Z - a_{33}| = |Z - 3| \le R_3 = 1.4 \\ G_4 &: |Z - a_{44}| = |Z + 5| \le R_4 = 0.8 \end{aligned}$$



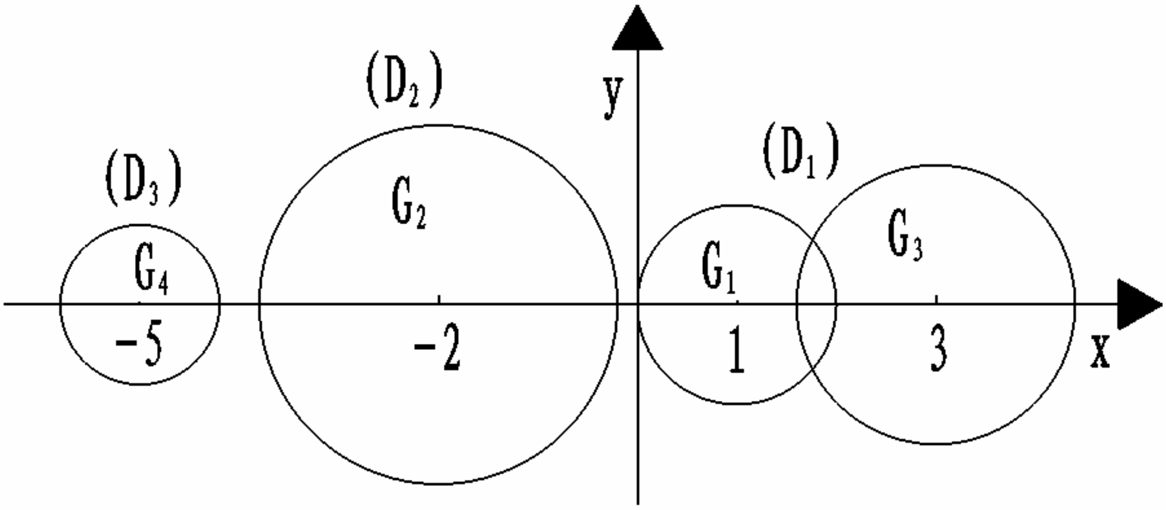
$\sigma(A) \subset G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$

规定： 若 A 的 s 个 Ger 圆相连（或相切）在一起，且与其它 $n-s$ 个圆分离，称此 s 个圆的并集为一个连通区域，简称区域。

特别： 一个孤立圆也是连通区域。

第 2 圆盘定理： 设 D 是 A 的 s 个 Ger 圆构成的区域（分支），则在 D 中恰有 s 个特征值（含重复）

特别： 一个孤立 Ger 圆中恰有一个特征值（略证）



注： A（指上边例子中）至少有两个实特征值（利用实系数方程的虚根成双出现）

Ex.1. $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，（1）估计 $\sigma(A)$，（2）说明 A 至少有 2 个实根

Ex.2.估计下列谱 $\sigma(A)$

（1）$A=\begin{pmatrix} 20 & 5 & 0.3 \\ 4 & 10 & 0.5 \\ 2 & 4 & 10i \end{pmatrix}$，（2）$A=\begin{pmatrix} 20 & 5 & 0.6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 10i \end{pmatrix}$，（3）$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

注： 由于 A 与转置 A^T 有相同的特征值，$\sigma(A)=\sigma(A^T)$，可用 A^T 的 Ger 半径代替 A 的半径。

Ex3.证明n阶方阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 2/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 4 & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 1/n & 6 & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/n & 1/n & \cdots & 2n \end{pmatrix}$恰有$n$个不同实特征值，

且$|A|>1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$

§1Jordan（约当）标准形（简介）

规定： n_k阶上三角阵$J_k=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n_k\times n_k}$ 叫做一个n_k阶 Jordan 块，λ是任意复数。

特别： $n_k=1$时，对应 1 阶 Jordan 块，$J_1=(\lambda)$是一个数λ

定义： 称上三角阵J：$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}_{n\times n}$ 为 Jordan 标准形（矩阵），

其中$J_1,J_2,\cdots J_s$都是 Jordan 块，（$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$）

例如： $J=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$，$J=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} & & \\ & (3) & \\ & & (3) \end{pmatrix}$，$J=(2+i)$

分别为 2 块、3 块、1 块

特别： 对角阵$A=\begin{pmatrix} (\lambda_1) & & & \\ & (\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_n) \end{pmatrix}$含有$n$块

注： Jordan 形J中的快数是确定的，块的排列次序是任意的。

注： 可证明$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$，相似

注： 全体对角元构成全体特征值$\sigma(J)$，$\sigma(J)=\sigma(J_1)\cup\sigma(J_2)\cup\cdots\cup\sigma(J_s)$

Jordan 标准形定理： 每个复n阶方阵A都相似于一个 Jordan 矩阵

即：$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$，（$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$）

且除了 Jordan 块次序外 J 由 A 唯一确定，称 J 是 A 的 Jordan 形。

$\sigma(A)=\sigma(J)=\sigma(J_1)\cup\sigma(J_2)\cup\cdots\cup\sigma(J_s)$

利用求秩方法确定 A 的 J

注： 若 $A\backsim J$，则 $(A\pm bI)^k\backsim(J\pm bI)^k$，$rank(A\pm bI)^k=rank(J\pm bI)^k$

Eg. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 求 Jordan 形 J

注： A 的单根对应 1 阶 Jordan

解：先求特征多项式：$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

可设 $A\backsim J=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & (2) \end{pmatrix}$，*是 1 或 0

取 $b=1$，$(A-I)\backsim(J-I)=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$r(J-I)=r(A-I)=2\Rightarrow *=1$，$J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ex.求下列 Jordan 形

（1）$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

可知：$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+1)^3$

（2）$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Jordan 形（续）

Jordan 标准形定理： 每个n阶复矩阵A都相似于一个 Jordan 形

即：$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$，其中$J_1,J_2,\cdots,J_s$为 Jordan 块（可以重复）

且A的 Jordan 形J由A唯一确定（各块次序可任意）

用求秩$rank(A-bI)^k$可确定J（差分格式）

（1） 求秩：直至有连续两个秩相等为止。

令$r_0=n,r_1=r(A-\lambda I),r_2=r(A-\lambda I)^2,\cdots,r_k=(A-\lambda I)^k,\cdots$

（2） 令$d_0=r_0-r_1,d_1=r_1-r_2,\cdots,d_k=r_k-r_{k+1},\cdots$

（3） 令$l_1=d_0-d_1,l_2=d_1-d_2,\cdots,l_k=d_{k-1}-d_k,\cdots$

结论：（1）J中含λ的块共有$d_0=n-r(A-\lambda I)$个

（2）J中含λ的k阶块恰有l_k个（$k=1,2,3,\cdots$）

Eg. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，求 Jordan 形$J$，（$A\backsim J$）

解：特征多项式：$|xI-A|=\begin{vmatrix} x-3 & 4 \\ -4 & x+5 \end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix}=(x-1)^2(x+1)^2$

特征值$\sigma(A)=\{1,1,-1,-1\}$

求秩数：$\lambda=1$时，$r(A-I)=3,r(A-I)^2=2,r_3=(A-I)^3=2$

令$r_0=n=4,r_1=3,r_2=2,r_3=2$

列表：$\begin{matrix} 4 & & & & \\ & > & 1 & & \\ 3 & & & > & 0 \\ & > & 1 & & \\ 2 & & & > & 1 \\ & > & 0 & & \\ 2 & & & & \end{matrix}$，可知$J$中含有$\lambda=1$的块共有 1 个，

且含$\lambda=1$的 2 阶块有 1 个$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

同理：$\lambda=-1$时，$r(A+I)=3, r(A+I)^2=2, r_3=(A+I)^3=2$

列表：$\begin{matrix} 4 & & & & \\ & > & 1 & & \\ 3 & & & > & 0 \\ & > & 1 & & \\ 2 & & & > & 1 \\ & > & 0 & & \\ 2 & & & & \end{matrix}$，恰有 1 个 2 阶块$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

最后 $J=\begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$，$A \backsim J$

Eg. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，有 $n=4$ 个互异特征值 1，2，3，4

必有 $A \backsim J=\begin{pmatrix} (1) & & & \\ & (2) & & \\ & & (3) & \\ & & & (4) \end{pmatrix}$

Eg. $A=\begin{pmatrix} b & & & & O \\ a_1 & b & & & \\ & a_2 & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ * & & & a_{n-1} & b \end{pmatrix}_{n\times n}$，（$a_i \neq 0$）

A 的 $\sigma(A)=\{b,b,\cdots,b\}$，可设 $A \backsim J=\begin{pmatrix} b & * & & \\ & b & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ O & & & b \end{pmatrix}$，*为 1 或 0

$\because A-bI \backsim J-bI \Rightarrow r(J-bI)=r(A-bI)$

$A-bI=\begin{pmatrix} 0 & & & & O \\ a_1 & 0 & & & \\ & a_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ * & & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$，$r(A-bI)=n-1$

$$J-bI=\begin{pmatrix}0&*&&&\\&0&*&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&*\\O&&&&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{全体*都为 1}$$

$$\therefore J=\begin{pmatrix}b&1&&\\&b&\ddots&\\&&\ddots&1\\O&&&b\end{pmatrix}$$

Eg. $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}$，$|xI-A|=(x-1)^3$，$\sigma(A)=\{1,1,1\}$

可知 $A\backsim J=\begin{pmatrix}(1)&\\&\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$

求 P，已知 $P^{-1}AP=J$

解：令 $P=\{X_1,X_2,X_3\}$，由 $AP=PJ$

$$(AX_1,AX_2,AX_3)=(X_1,X_2,X_2+X_3)\Rightarrow\begin{cases}AX_1=X_1\\AX_2=X_2\\AX_3=X_2+X_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(A-I)X_1=0\\(A-I)X_2=0\\(A-I)X_3=X_2\end{cases}$$

由 $(A-I)X_1=0$ 可得基础解：$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

通解：$X=k_1\alpha+k_2\beta=\begin{pmatrix}k_1+k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=X_2$

求解：$(A-I)X_3=X_2$

增广阵：$(A-I|X_2)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&k_1+k_2\\2&-2&-2&k_1\\-1&1&1&k_2\end{array}\right)$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&k_1+k_2\\0&0&0&k_1+2k_2\\0&0&0&k_1+2k_2\end{array}\right)\Rightarrow k_1+2k_2=0\text{，可取 }k_1=2,k_2=-1$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow x_1-x_2-x_3=1$$

取 $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，令 $X_1=\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$， $X_2=k_1\alpha+k_2\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=J$$

注： A 中元素很小的变化可能引起 Jordan 形很大变化（Butterfly Effect?）

（这就是为什么不能用计算机求 J ）

例： $A(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，（ $\varepsilon\neq 0$ ），可知 $A(\varepsilon)\backsim J(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

令 $\varepsilon\to 0$，求极限 $A(\varepsilon)\to\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=A_0$， $J(\varepsilon)\to\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$

例 1：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -2 & -2\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形 J

解：求出 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+1)^3$，全体特征值为 0，-1，-1，-1

若 A 与相似于 Jordan 标准形 J ： $A\backsim J$，则它们有相同的特征值，从而有

$J=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & -1 & * & \\ & & -1 & * \\ & & & -1\end{pmatrix}$，其中的*等于 1 或 0

注： 若 A 的特征值 λ 是单根，则必有 1 阶 Jordan 块 (λ).

由相似关系 $A+I\backsim J+I=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 0 & * & \\ & & 0 & * \\ & & & 0\end{pmatrix}$

可得秩数：$r(J+I)=r(A+I)=rank\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\2&2&3&2\\1&1&1&1\\-1&-1&-2&-1\end{pmatrix}=2$

可知 $J+I$ 中的 2 个*只有一个等于1，另一个为0，因此

$$J=\begin{pmatrix}0&&&\\&-1&1&\\&&-1&0\\&&&-1\end{pmatrix} 或 J=\begin{pmatrix}0&&&\\&-1&0&\\&&-1&1\\&&&-1\end{pmatrix}$$

这两个 J 本质上是相同的(都含有 3 个 Jordan 块)，只是 Jordan 块的排列次序不同.

注： 如果两个 Jordan 矩阵只是 Jordan 块的次序不同，则认为它们本质上相同. 在这个意义上

本题中的 J 由 A 唯一决定. 可写 $A \backsim J=\begin{pmatrix}0&&&\\&-1&1&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$

另外，可找到一个可逆阵 $P=\begin{pmatrix}-1&0&1&1\\3&-1&0&0\\1&0&-1&0\\-2&1&0&-1\end{pmatrix}$ 使得

$$AP=P\begin{pmatrix}0&&&\\&-1&1&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}=PJ，即 P^{-1}AP=J$$

例 2　　设 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

(1)求 Jordan 标准形 J，并判断 A 可否对角化；(2)求相似变换阵 P，使 $P^{-1}AP=J$

解　A 的特征多项式为：$|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，特征值为 2，1，1。所以

$$A \backsim J=\begin{pmatrix}2&&\\&1&1\\&0&1\end{pmatrix}$$

注： 若 A 的特征值 λ 是单根，则必有 1 阶 Jordan 块 (λ).

由于 J 含有 2 阶 Jordan 块，可知 A 不能对角化.

令 $P=(X_1,X_2,X_3)$，$X_i(i=1,2,3)$ 为列向量，则 $AP=PJ$，即

$$A(X_1,X_2,X_3)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

即 $$AX_1=2X_1, AX_2=X_2, AX_3=X_2+X_3.$$

所以 X_1 为 A 的关于 $\lambda=2$ 的特征向量；X_2 为 A 的关于 $\lambda=1$ 的特征向量；

X_3 是非齐次方程 $(A-I)X_3=X_2$ 的解（广义特征向量）.

由 $(2I-A)X_1=0$ 解出 $X_1=(0,0,1)^T$，

由 $(I-A)X_2=0$ 解出 $X_2=(1,2,-1)^T$，

由 $(A-I)X_3=X_2$ 解出 $X_3=(-1,-1,0)^T$，或 $X_3=(0,1,-1)^T$

令 $P=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$，或 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ 可知

$$AP=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=PJ \quad 即 \quad P^{-1}AP=J.$$

例 3　试证：每个 Jordan 块 J_k 都相似于它的转置 $J_k{}^T$.

Pf：计算可知

$$\begin{bmatrix}0&&&1\\&&\iddots&\\&1&&\\1&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&&1\\&&\iddots&\\&1&&\\1&&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&&&0\\1&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\\0&&1&\lambda\end{bmatrix}.$$

注：由此例可知，每个 Jordan 矩阵 J 都相似于它的转置：

$$J\backsim J^T\text{(下三角矩阵)}.$$

利用此例 3 与 Jordan 标准形定理可得：

推论 3：每个方阵 A 都相似于它的转置 A^T：$A\backsim A^T$.

例 4　设 k 为自然数，$A^k=0$，试证：$|A+I|=1$

证 由 $A^k=0$ 知 A 的特征值全为零，从而 Jordan 标准形 J 的主对角线元素全为零. 利用 $A=PJP^{-1}$，可知 $|A+I|=|PJP^{-1}+I|=|P||J+I||P^{-1}|=1$.

补充结论：

每个 Jordan 块 $J_k(b)=\begin{pmatrix} b & 1 & & \\ & b & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & b \end{pmatrix}_{k\times k}$ 的极小式为 $m(x)=(x-b)^k$

每个块 $J_k(b)$ 相似于转置 $J_k(b)^T=\begin{pmatrix} b & & & O \\ 1 & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & b \end{pmatrix}$

Pf：取 $P=\begin{pmatrix} O & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & O \end{pmatrix}_{k\times k}$ 可知 $P^{-1}=P$（正交阵）

计算知：$\begin{pmatrix} b & 1 & & \\ & b & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & & & \\ 1 & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & b \end{pmatrix}$

$J_kP=PJ_k^T\Rightarrow P^{-1}J_kP=J_k^T$，$J_k\backsim J_k^T$

练习：$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix} J_1^T & & & \\ & J_2^T & & \\ & & & \\ & & & J_s^T \end{pmatrix}=J^T$

每个 A 相似于 A^T

$\because A\backsim J\Leftrightarrow A^T\backsim J^T\backsim J\Rightarrow A\backsim A^T$

Ex.1.已知 5 阶阵 A 有条件 $r(A)=3, r(A^2)=2, r(A+I)=4, r(A+I)^2=3$，求 Jordan 形。

2.求下列 Jordan 形

（1）$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，（2）$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Jordan 形公式与结论

参考书：（1）Horn and Johnson: “Matrix Analysis”（矩阵分析）

§3 Jordan 形的一个证明（用分块矩阵方法）

（2）李尚志《线性代数》P370 定理 1（差分格式求 Jordan 形）

利用 $(xI-A)$ 的初等因子求 Jordan 形

定义： 若 $g(x)=(x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\cdots(x-b_s)^{k_s}$，$b_1,b_2,\cdots,b_s$ 互不相同

称 $(x-b_1)^{k_1},(x-b_2)^{k_2},\cdots,(x-b_s)^{k_s}$ 为 $g(x)$ 的初等因子。

定义：（1）若 Jordan 块 $J_k=\begin{pmatrix} b & 1 & & \\ & b & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & b \end{pmatrix}_{n_k\times n_k}$，称 $(x-b)^{n_k}$ 为 J_k 的初等因子

（2）若 $A\backsim J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$（Jordan 形），称 $J_1,J_2,\cdots,J_s$ 的初等因子

$(x-b_1)^{n_1},(x-b_2)^{n_2},\cdots,(x-b_s)^{n_s}$ 为 A 的全体初等因子。

注： A 的初等因子 $(x-b)^k$ 与 Jordan 块一一对应

例如：因子 $(x-b)^k \leftrightarrow \begin{pmatrix} b & 1 & & \\ & b & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & b \end{pmatrix}_{k\times k}$

特别单因子 $(x-b)\leftrightarrow(b)$，（1 阶块）

初等因子定理： 若 $(xI-A)$ 可用初等变换化为对角形

$$(xI-A)\to\begin{pmatrix} g_1(x) & & & \\ & g_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_n(x) \end{pmatrix}_{n\times n}$$

则（1）$g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 的全体初等因子（含重复）恰为 A 的初等因子。

（2）行列式 $|xI-A|=g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)=$ 全体初等因子的积。

$(xI-A)$ 有 3 类初等变换

（1）互换行（或列）（2）用常数$k\neq 0$乘某一行（或列）

（3）倍加法：用多项式$k(x)$乘第j行后加到第i行。（记$r_i+k(x)r_j$）（**注**：第j行不变）

Eg. $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，求 Jordan 形$J$

$$(xI-A)=\begin{pmatrix}x-2&0&0\\-1&x-1&-1\\-1&1&x-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{互换}r_1,r_2}\begin{pmatrix}1&-(x-1)&1\\x-2&0&0\\-1&1&x-3\end{pmatrix}$$

解：令

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-(x-2)r_1}\begin{pmatrix}1&-(x-1)&1\\0&(x-1)(x-2)&-(x-2)\\0&-(x-2)&(x-2)\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(x-1)(x-2)&-(x-2)\\0&-(x-2)&(x-2)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(x-1)(x-2)&-(x-2)\\0&0&(x-2)\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(x-2)^2&0\\0&0&(x-2)\end{pmatrix}$$

全体初等因子为$(x-2)^2,(x-2)$

$\Rightarrow A\backsim J=\begin{pmatrix}2&1&\\0&2&\\&&2\end{pmatrix}$，（Jordan 形）

Eg.把$A=\begin{pmatrix}b&1&&\\&b&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&b\end{pmatrix}_{n\times n}$的$(xI-A)$化成对角形。

解：

$$(xI-b)=\begin{pmatrix}x-b&-1&\cdots&0\\0&x-b&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&-1\\0&0&\cdots&x-b\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}x-b&-1&\cdots&0\\(x-b)^2&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&-1\\(x-b)^n&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}0&-1&\cdots&0\\0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&-1\\(x-b)^n&0&\cdots&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{互换行}}\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&\ddots&\\&&&(x-b)^n\end{pmatrix}$$

Jordan 形于极小式

引理：（1）Jordan 块$J_k(b)=\begin{pmatrix}b&1&&\\&b&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&b\end{pmatrix}_{k\times k}$的极小式为$m(x)=(x-b)^k$

（2）设 $A \backsim J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$（Jordan 形），则 A 的极小式 $m(x)=$ 全体初等因子的最小公倍

推论： A 的极小式 $m(x)$ 分解后的初等因子是 A 的部分初等因子，可用极小式求出 3 阶阵 $A = A_{3\times3}$ 的 Jordan 形

Eg. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$|xI - A| = (x-1)^2(x+2)$

计算：$(A-I)(A+2I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

只有 $(A-I)^2(A-2I) = 0$，（Cayley 公式）

$\Rightarrow A$ 的极小式 $m(x) = (x-1)^2(x-2)$

$\Rightarrow A$ 的初等因子 $(x-1)^2, (x-2)$

$\Rightarrow A \backsim J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，（Jordan 形）

Eg. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，$|xI - A| = (x-2)^3$

计算：$(A-2I)(A-2I) = 0 \Rightarrow m(x) = (x-2)^2$ 有一个 Jordan 块 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \backsim J = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & 0 & 2 \end{pmatrix}$

引理： 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，则 A 的极小式=各块极小式的最小公倍

且各块 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 的 Jordan 块也是 A 的 Jordan 块

Ex.求 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}_{6\times6}$ 的 Jordan 形 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

对角化的条件（判定）

定义： 若有 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 称 A 为可对角化的（也称 A 是单纯的）

引理： 阶数大于 1 的 Jordan 块 J_k 不可对角化（Jordan 块可对角化 $\Leftrightarrow$ 阶数为 1）

Pf：设 $J_k=\begin{pmatrix} b & 1 & & \\ & b & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & b \end{pmatrix}_{k\times k}$，（$k>1$），特征根为 $b, b, \cdots, b$

若 J_k 可对角化：$P^{-1}J_kP=\begin{pmatrix} b & & & \\ & b & & \\ & & \ddots & \\ & & & b \end{pmatrix}=bI \Rightarrow J_k=P(bI)P^{-1}=bI$，矛盾。

定理：（1）若方阵 A 的 Jordan 形中有阶数大于 1 的块，则 A 不能对角化。

（2）A 可对角化 $\Leftrightarrow$ Jordan 块都是 1 阶的，此时 $A \backsim J=\begin{pmatrix} (\lambda_1) & & & \\ & (\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_n) \end{pmatrix}$

（3）A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 的极小式无重根。

（因为：极小式中的初等因子是全体初等因子的公倍）

（4）若 $f(x)$ 是 A 的一个零化式且 $f(x)$ 无重根，则 A 可对角化

（因为零化式为极小式的倍式）

Eg. $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 判定 A 可否对角化

解：$\because |xI-A|=(x-1)^2(x+2)$

计算：$(A-I)(A+2I)=0 \Rightarrow$ 极小式 $m(x)=(x-1)(x+2) \Rightarrow A$ 可对角化：

$$A \backsim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Ex.1.若 $A^2-3A+2I_n=0$，则 A 可对角化

2.若 $A^2=2A$，则 A 可对角化

3.《矩阵分析（史荣昌等）》P111 7（1）（3） 8（1）（3） P110 3 4

§2 线性变换与矩阵

线性空间（向量空间）定义：

集合 V 中有加法“+”与数乘“$k(\bullet)$” $k\in R(C)$，具有 8 条规则（公理）：其中 V 中元素叫“向量”（广元）。

子空间条件：

设 $W\subset V$（空间），若 W 对加法与倍数（数乘）封闭，则 W 是 V 的子空间，生成（张成）自空间，任取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$，称 $W=span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ ={全体组合 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$}，（$k_1,k_2,\cdots,k_s\in R$），为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的生成空间。

可验证： W 对加法与倍数都封闭。

Eg.（1）$m\times n$ 矩阵空间：$R^{m\times n}$，$C^{m\times n}$

方阵：$R^{n\times n}$，$C^{n\times n}$

（2）数组空间：$R^n=\left\{x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},x_i\in R\right\}$，$C^n=\left\{z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix},z_i\in C\right\}$

子空间例子：

（1）核空间(零空间,解空间),设 $A=A_{m\times n}\in R^{m\times n}$,规定：$N(A)=A^{-1}(0)\underline{\underline{\Delta}}\{x\in R^n \mid Ax=0\}$（对加法、倍数封闭）

（2）值空间（列空间）：$R(A)=\{$ 全体 $y=Ax \mid x\in R^n\}$

注： 把 $A=A_{m\times n}$ 按列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 改写 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，令 $x=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}\in R^n$，

写 $Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i \Rightarrow$ 值空间 $R(A)=\{Ax|x\in R^n\}=\left\{y=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i|k_i\in R\right\}$

（全体线性组合），即 $R(A)=span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，（由 A 的列生成）也叫 A 的列向量。

注： $R^n=span(e_1,e_2,\cdots,e_n)=\left\{x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i|x_i\in R\right\}$

“相关组”与“无关组”定义。

“表示”与“组合”： 若 $\alpha=\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i$，称 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ “表示”

也说 α 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的“组合”

极大无关组： 若大组 S 中有 r 个无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，且任何 $r+1$ 个向量都相关

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一个极大无关组，r 叫 S 的秩数 $rank(S)=r$

注： 大组中任 2 个极大无关组互相表示（等价）

唯一表示定理： 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 相关，则有唯一表示：$\beta=\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i$

（系数唯一），此时，规定 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为 β 的坐标。

注： 坐标常写成列 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_s\end{pmatrix}=(k_1,k_2,\cdots,k_s)^T$

基、维数、坐标定义： 设空间 V 中有 n 个无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，且任何 $n+1$ 个元都相关，则称（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$）（有次序）为 V 中一个基，且 n 叫维数，记 $\dim V=n$

注： 空间的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就是 V 中的一个极大无关组（有次序），且维数就是秩数：

$\dim V = rank(V) = n$

坐标定义： 设空间V中有n个无关向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，且任何$n+1$个向量必相关，则任一$\alpha \in V$必有唯一表示$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$，称列向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$为$\alpha$的坐标（此时$V$的基为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$）

注： 向量α与坐标是一一对应（唯一表示定理）

基元$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与单位向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$对应，设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$中基，

$$
\text{则}\begin{cases}
\alpha_1 = 1\bullet\alpha_1 + 0\bullet\alpha_2 + \cdots + 0\bullet\alpha_n \xrightarrow{\text{对应}} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n \\
\alpha_2 = 0\bullet\alpha_1 + 1\bullet\alpha_2 + \cdots + 0\bullet\alpha_n \xrightarrow{\text{对应}} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n \\
\qquad\qquad\qquad\vdots \\
\alpha_n = 0\bullet\alpha_1 + 0\bullet\alpha_2 + \cdots + 1\bullet\alpha_n \xrightarrow{\text{对应}} e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^n
\end{cases}
$$

空间同构： 若V与W是空间，φ：$V \to W$是映射

（1）φ是一一对应，

（2）$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$，$\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$，（保加法、保倍数）

称φ是V到W的同构，记$V \underset{=}{\varphi} W$

性质： （1）同构φ把无关组变成无关组（把基变成基）$\Rightarrow$（保坐标）

（2）φ把相关组变成相关组

Pf：（1）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为无关组，若$\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = 0$，则必有$k_1 = 0, k_2 = 0, \cdots, k_n = 0$

设$\sum_{i=1}^{n} k_i \varphi(\alpha_i) = 0$，（$\varphi$是同构）$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \varphi(k_i\alpha_i) = 0 \Leftrightarrow \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i\right) = 0 = \varphi(0)$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i = 0$（一一对应）$\Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0 \Rightarrow \varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \cdots, \varphi(\alpha_n)$无关

同构定理：（1）任何n维（实）空间V都与R^n同构

（2）任2个n维空间V与W同构（利用（1）与传递性）

Pf:（1）任取$\alpha \in V$（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$）是个固定的基，有$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$

规定坐标映射φ：$V \to R^n$使得$\varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \in R^n$

可知：φ是同构①φ是一一的（唯一定理）

②设$\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i$，$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\alpha_i,\quad \varphi(\alpha+\beta) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = x + y = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

且$\varphi(k\alpha) = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} = kx = k\varphi(\alpha)$

注：利用同构可用R^n（C^n）代表空间V

线性映射：若V与W是空间，φ：$V \to W$是映射，且$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$，

$\varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$，（保加法、保倍数），称$\varphi$是$V$到$W$的线性映射

特别：若$V = W$（同一空间）称线性映射φ：$V \to W$为线性变换

记号：$L(V,W)$（V到W的全体线性映射），$L(V,V)$（全体线性变换），可写$\varphi \in L(V,W)$

或

例子：

恒同映射：I_V：$V \to W$使得$I_V(\alpha) = \alpha$，$\alpha \in V$（是线性的）

零射：0：$V \to W$ 使得 $0(\alpha)=\vec{0}\in W$（$\forall \alpha \in V$）（是线性的）

矩阵映射：令 $A=A_{m\times n}\in R^{m\times n}$，任取 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in R^n$

规定 $\mathscr{A}$： $R^n \to R^m$ 如下 $\mathscr{A}(x)\underset{=}{\Delta} Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in R^n$

$\mathscr{A}(\alpha+\beta)=A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta)$

且 $\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}(\alpha)\Rightarrow$ $\mathscr{A}$为线性的

以后常把 $\mathscr{A}$写成映射：$\mathscr{A}$：$R^n \to R^m \qquad x \to Ax$

值空间 $R(A)=\{Ax \mid x\in R^n\}\subset R^m$

核：$N(A)=A^{-1}(0)=\{x \mid Ax=0\}\subset R^n$

特别：n 阶方阵 $A=A_{n\times n}\in R^{n\times n}$，有线性变换 A： $R^n \to R^n \quad A(x)=Ax\in R^n$

Ex.预习《矩阵分析（史荣昌等）》P24-44

P68 1 3 4 6 8 9

线性映射（变换）性质：设 φ：$V \to W$ 为线性

报组合

把相关组变成相关组

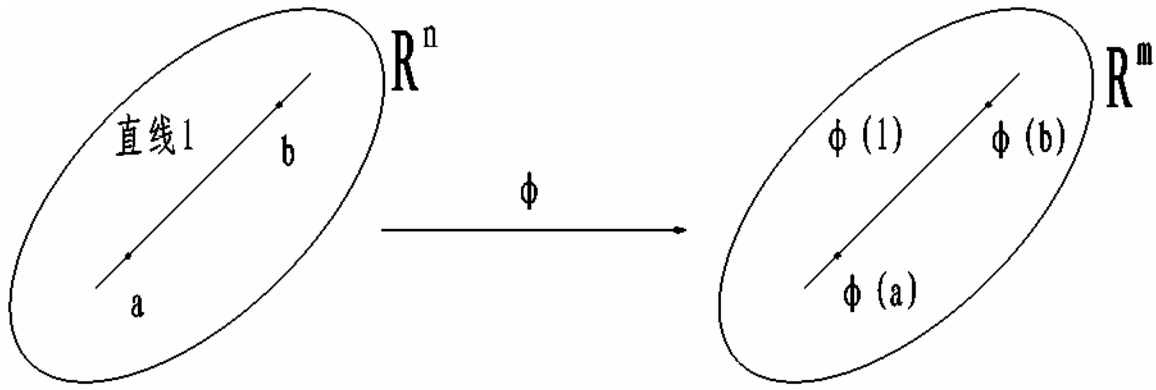
例如：$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(k_i\alpha_i)$（保组合系数）

几何定义：线性映射（变换）φ： $R^n \to R^m$

①φ 把直线变成直线（或退化直线成一点）

②φ 把平行线变成平行（重合）线

Pf：



设 a 、b 决定直线 $l=\{a+t(b-a)|t\in R\}$

$\Rightarrow$ 像 $\varphi(l)=\{\varphi(a)+t[\varphi(b)-\varphi(a)]|t\in R\}$ 也是直线或退为一点

再设 α 、β 是 2 条直线 l_1 、l_2 的方向向量，若 $l_1 /\!/ l_2 \Rightarrow \alpha /\!/ \beta \Rightarrow \alpha = k\beta$

$\varphi(\alpha)=k\varphi(\beta)\Rightarrow\varphi(\alpha)/\!/\varphi(\beta)\Rightarrow\varphi(l_1)/\!/\varphi(l_2)$（或重合）

命题： 若 φ 为线性的，且 $\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_n)$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也无关

Pf：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\Rightarrow\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_n)$ 相关

注： 若 φ ：$V\to W$ 为线性，且 φ 为一一的，则 φ “把无关组变成无关组”

规定： ①任取广元 $\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n$ 称记号 $(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n)$ 为一个广行

②若有“组合” $\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\otimes_i$ ，称公式 $\alpha=(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$ 为广阵格式

要点： 要把组合系数写成列

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 可由 $\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n$ 组合表示：$\begin{cases}\alpha_1=\sum_{i=1}^{n}k_{i1}\otimes_i\\\alpha_2=\sum_{i=1}^{n}k_{i2}\otimes_i\\\quad\vdots\\\alpha_p=\sum_{i=1}^{n}k_{ip}\otimes_i\end{cases}$

规定广阵格式如下：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)=(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n)B_{n\times p}$

$$B_{n\times p}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}k_{11}\\k_{12}\\\vdots\\k_{1p}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}k_{21}\\k_{22}\\\vdots\\k_{2p}\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}k_{n1}\\k_{n2}\\\vdots\\k_{np}\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{n\times p}\underline{\underline{\text{记为}}}\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p\right)$$

即 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right)=\left(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n\right)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{21}&\cdots&k_{n1}\\k_{12}&k_{22}&\cdots&k_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k_{1p}&k_{2p}&\cdots&k_{np}\end{pmatrix}$

广阵原理： ①一切线性组合都有广阵格式。

②若广元 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 表示，

则有广阵格式 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B_{n\times p}$

要求： 系数阵 $B_{n\times p}$ 中的列就是组合系数

性质：（引理 1） 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是广元，I_n 为单位阵，则

（1）$\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)I_n$

（2）结合公式：$\left[\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B\right]C=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)(BC)$

（3）消去律：（唯一性公式）：若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 无关（基元），且

$$\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)C\Leftrightarrow B=C$$

要证：$\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B\underline{\underline{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\text{无关}}}\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)C\Rightarrow B=C$

先证 B、C 只有一列 $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$、$C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$

令 $\alpha=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)B=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)C\Rightarrow\alpha=\sum_{i=1}^{n}b_i\varepsilon_i=\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon_i\Rightarrow b_i=c_i\Rightarrow B=C$

设 B、C 恰有 2 列 $B=\left(\beta_1,\beta_2\right)_{n\times2}$、$C=\left(\gamma_1,\gamma_2\right)_{n\times2}$

由 $\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\left(\beta_1,\beta_2\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\left(\gamma_1,\gamma_2\right)$

$\Leftrightarrow\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\beta_1=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\gamma_1,\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\beta_2=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right)\gamma_2$

$$\Rightarrow \beta_1=\gamma_1,\beta_2=\gamma_2 \Rightarrow B=(\beta_1,\beta_2)=(\gamma_1,\gamma_2)=C$$

记号规定： $\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\underline{\underline{\Delta}}(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))$（$\varphi$：$V\to W$ 是线性映射）

性质（4）： 若 φ 是线性映射，则 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B=[\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)]B$（右提取公式）

Pf：先设 B 只有 1 列 $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B=\sum_{i=1}^n b_i\varepsilon_i$$

$$\Rightarrow \varphi[(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B]=\varphi\left(\sum_{i=1}^n b_i\varepsilon_i\right)=\sum_{i=1}^n b_i\varphi(\varepsilon_i)=(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi[(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B]=(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))B=\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B$$

若 $B=(\beta_1,\beta_2)_{n\times 2}$ 恰有 2 列，可同样证明

Eg.设 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\in R^{2\times 2}$

$\alpha=\varepsilon_1+2\varepsilon_2 \Rightarrow \alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，或 $\alpha=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Eg. R^3（行向量）中取 $\varepsilon_1=\overrightarrow{(1,0,0)},\varepsilon_2=\overrightarrow{(0,1,0)},\varepsilon_3=\overrightarrow{(0,0,1)}$

$$\alpha_1=\overrightarrow{(1,1,2)},\alpha_2=\overrightarrow{(0,1,1)}\Rightarrow \alpha_1=1\bullet\varepsilon_1+1\bullet\varepsilon_2+2\bullet\varepsilon_3,\alpha_2=0\bullet\varepsilon_1+1\bullet\varepsilon_2+1\bullet\varepsilon_3$$

$(\alpha_1,\alpha_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$ 或 $\left(\overrightarrow{(1,1,2)},\overrightarrow{(0,1,1)}\right)=\left(\overrightarrow{(1,0,0)},\overrightarrow{(0,1,0)},\overrightarrow{(0,0,1)}\right)\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$

改为“列向量” $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$

例如：线性组合必有广阵

（甲）=3（红）+7（白），（乙）=4（红）+6（白）$\Leftrightarrow$ $(\text{甲},\text{乙})=(\text{红},\text{白})\begin{pmatrix}3&4\\7&6\end{pmatrix}$

应用： 线性变换矩阵公式：设φ：$V\to W$为线性的（$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$）为基

则有公式$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$

其中$A_{n\times n}$叫φ在基（$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$）下的矩阵（表示阵）

Pf：设：$\begin{cases}\varphi(\varepsilon_1)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i1}\varepsilon_i\\ \varphi(\varepsilon_2)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i2}\varepsilon_i\\ \vdots\\ \varphi(\varepsilon_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{in}\varepsilon_i\end{cases}$，即$\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n)$可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$表示

由广阵原理$\Rightarrow(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A_{n\times n}$（$A$中列就是组合系数）

注： 在给定基下，φ有唯一矩阵A（用消去律）$\Rightarrow\varphi\Leftrightarrow A$是一一对应的

V到V全体线性变换集合$L(V,V)$与方阵集合$R^{n\times n}$可等同有$L(V,V)\underline{\underline{(同构)}}R^{n\times n}$

同理：若φ：$V\to W$（$\dim V=n,\dim W=m$）为线性的

且（$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$）为$V$中基，（$g_1,g_2,\cdots,g_n$）为$W$中基

$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)A_{m\times n}\Rightarrow\varphi\Leftrightarrow A_{m\times n}$为一一对应

广阵格式及应用

引理：（广阵原理）： 一切线性组合都有广阵格式。

若广元$\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_p$可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$“表示”

则有$(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_p)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B_{n\times p}$

其中系数阵B中列就是原组合系数

线性映射的矩阵（表示阵）

设φ：$V\to W$线性变换，固定基$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，$\dim V=n$

则$\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n)$（在$V$中）可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$表示

有广阵格式$(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A_{n\times n}$

称$A=A_{n\times n}$为φ在固定基下的矩阵（表示阵）

注： 固定基：每个线性变换 φ：$V \to W$ 对应一个唯一矩阵 A

即 $\varphi \leftrightarrow A$ 是一一对应（双射）

（利用消去法：$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B \Rightarrow A=B$）

消去前提：线性无关（基就是线性无关的）

推论： 全体线性变换空间 $L(V,V) \leftrightarrow R^{n\times n}$（方阵空间）是同构

可写 $L(V,V)\underline{\underline{\text{同构}}}R^{n\times n}$（实域上），$L(V,V)=C^{n\times n}$（复域上）

注： 固定基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n \in V$，$\forall \alpha \in V$，$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i$

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$，引入坐标同构 σ：$V \to R^n$（C^n）

使得 $\sigma(\alpha)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in R^n$，$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\sigma(\alpha)$

$$\text{令}\begin{cases}\varphi(\varepsilon_1)=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\varepsilon_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\sigma(\varepsilon_1)\\ \varphi(\varepsilon_2)=\sum_{i=1}^{n}a_{i2}\varepsilon_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\sigma(\varepsilon_2)\\ \qquad\vdots\\ \varphi(\varepsilon_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{in}\varepsilon_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\sigma(\varepsilon_n)\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))_{n\times n}$$

令 σ：$V \to R^n$ 为坐标同构映射，则 $V\underline{\underline{\sigma}}R^n$，$L(V,V)\underline{\underline{\sigma}}R^{n\times n}$

推广：设φ：$V \to W$线性映射，记为$\varphi \in L(V,W)$（全体线性映射）

固定基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n \in V$，再固定基$g_1,g_2,\cdots,g_n \in W$，（$\dim V = n$，$\dim W = m$）

$\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n)$（在$W$中）可由$g_1,g_2,\cdots,g_n$表示

用广阵格式$(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n)) = (g_1,g_2,\cdots,g_n)A_{m\times n}$

称$A = A_{m\times n}$为φ在固定基下的矩阵（表示阵）

可知：每个$\varphi \in L(V,W)$对应唯一的矩阵$A = A_{m\times n}$

推论：（全体线性映射）$L(V,W)$在固定基下与$R^{m\times n}$或$C^{m\times n}$同构

可写$L(V,W)\underline{\underline{\sigma}}R^{m\times n}$或$L(V,W)\underline{\underline{\sigma}}C^{m\times n}$

规定：V^n表示n维空间，W^m表示m维空间

（全体线性映射）$L(V^n,W^m)\underline{\underline{(同构)}}R^{m\times n}$或$C^{m\times n}$

坐标公式：固定基$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) \in V$，$(g_1,g_2,\cdots,g_m) \in W$

$\forall \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i$，$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} b_i g_i$

取坐标：$\alpha \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in R^n$，$\varphi(\alpha) \leftrightarrow y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in R^m$，则$y = A_{m\times n}$，即$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = A_{m\times n}$

Pf：$\alpha = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x \Rightarrow \varphi(\alpha) = (\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))x = (g_1,g_2,\cdots,g_m)A_{m\times n}x$

又写$\varphi(\alpha) = (g_1,g_2,\cdots,g_m)y \Rightarrow (g_1,g_2,\cdots,g_m)Ax = (g_1,g_2,\cdots,g_m)y \Rightarrow Ax = y$

结论：设$\varphi \in L(V^n,W^m)$（固定 2 个基），则$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) = (g_1,g_2,\cdots,g_m)A_{m\times n}$

$\forall \alpha \in V$，$\alpha = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x$，$\varphi(\alpha) = (g_1,g_2,\cdots,g_m)y$

则$\varphi \leftrightarrow A$互相对应，$\alpha \to \varphi(\alpha)$可用$x \to Ax$代替

即：若$\beta = \varphi(\alpha)$则可写$y = Ax$

注：A：$R^n \to R^m$是线性映射，可代替φ：$V \to W$

Eg.零映射θ：$V^n \to W^m$，固定基$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$和$(g_1,g_2,\cdots,g_m)$

$\forall\alpha\in V$，$\theta(\alpha)=O\in W$

$$\begin{cases}\theta(\varepsilon_1)=0=0\bullet g_1+0\bullet g_2+\cdots+0\bullet g_m\\ \theta(\varepsilon_2)=0=0\bullet g_1+0\bullet g_2+\cdots+0\bullet g_m\\ \qquad\qquad\vdots\\ \theta(\varepsilon_n)=0=0\bullet g_1+0\bullet g_2+\cdots+0\bullet g_m\end{cases}\Rightarrow(\theta(\varepsilon_1),\theta(\varepsilon_2),\cdots,\theta(\varepsilon_n))=(g_1,g_2,\cdots,g_m)O_{m\times n}$$

$\theta\leftrightarrow O_{m\times n}\in R^{m\times n}$

Eg.恒同映射：I_V：$V\to V$，$\forall\alpha\in V$，$I_V(\alpha)=\alpha$

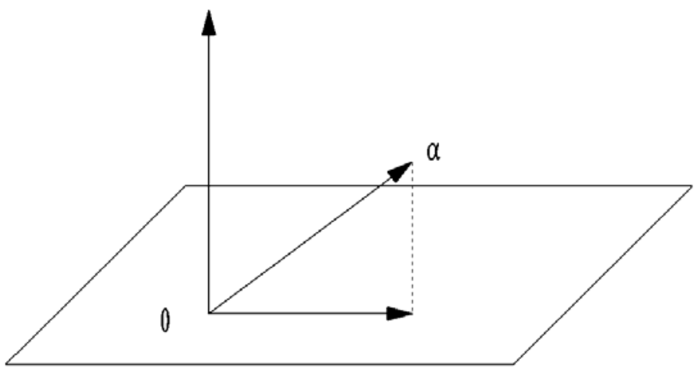
$$\begin{cases}I_V(\varepsilon_1)=\varepsilon_1=1\bullet\varepsilon_1+0\bullet\varepsilon_2+\cdots+0\bullet\varepsilon_n\\ I_V(\varepsilon_2)=\varepsilon_2=0\bullet\varepsilon_1+1\bullet\varepsilon_2+\cdots+0\bullet\varepsilon_n\\ \qquad\qquad\vdots\\ I_V(\varepsilon_n)=\varepsilon_n=0\bullet\varepsilon_1+0\bullet\varepsilon_2+\cdots+1\bullet\varepsilon_n\end{cases}\Rightarrow I_V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)I_n$$

$I_V\leftrightarrow I_n$（单位阵）

设$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x$，则$\varphi(\alpha)$坐标$y=I_nx=x$

Eg.设$V=span(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，$\varphi$：$V\to V$，$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i\in V$

使得$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\right)=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2$（投影）



$$\because\begin{cases}\varphi(\varepsilon_1)=\varepsilon_1=1\bullet\varepsilon_1+0\bullet\varepsilon_2+\cdots+0\bullet\varepsilon_n\\ \varphi(\varepsilon_2)=\varepsilon_2=0\bullet\varepsilon_1+1\bullet\varepsilon_2+\cdots+0\bullet\varepsilon_n\\ \varphi(\varepsilon_3)=0=0\bullet\varepsilon_1+0\bullet\varepsilon_2+\cdots+0\bullet\varepsilon_n\\ \\ \varphi(\varepsilon_n)=0=0\bullet\varepsilon_1+0\bullet\varepsilon_2+\cdots+0\bullet\varepsilon_n\end{cases}\Rightarrow\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

坐标公式：$y=Ax$，$x\in R^n$

Eg. V 基$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，取$W=span(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，$\varphi$： $V\to W$，$\varphi\in L(V,W)$

使得$\varphi(\alpha)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\right)=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2\in W$ （投影）

$$\begin{cases}\varphi(\varepsilon_1)=\varepsilon_1=1\bullet\varepsilon_1+0\bullet\varepsilon_2\\\varphi(\varepsilon_2)=\varepsilon_2=0\bullet\varepsilon_1+1\bullet\varepsilon_2\\\varphi(\varepsilon_3)=0=0\bullet\varepsilon_1+0\bullet\varepsilon_2\\\qquad\vdots\\\varphi(\varepsilon_n)=0=0\bullet\varepsilon_1+0\bullet\varepsilon_2\end{cases}\Rightarrow\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{2\times n}$$

Ex.令$V_n(x)=span(1,x,\cdots,x^{n-1})=\{f=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}|a_i\in R\}$

（全体次数小于n的多项式空间）

（1）令$\varphi=\dfrac{d}{dx}$：$V\to V$（求导），求φ在基$(1,x,\cdots,x^{n-1})$的矩阵A

（2）令$\varphi=\dfrac{d}{dx}$：$V_n(x)\to V_{n-1}(x)$（求导），求φ在基$(1,x,\cdots,x^{n-1})$与基$(1,x,\cdots,x^{n-2})$下的矩阵。

换基公式：设V中 2 个基$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$与$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$

则它们互换表示（由广阵格式）可写：$(g_1,g_2,\cdots,g_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)P$，（$P=P_{n\times n}$）

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)Q$，（$Q=Q_{n\times n}$）

则P可逆，且$Q=P^{-1}$，$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)P^{-1}$

Pf：$\because(g_1,g_2,\cdots,g_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)P\underline{\underline{代入}}(g_1,g_2,\cdots,g_n)QP$，（消去）

$\therefore I_n=QP\Rightarrow Q=P^{-1}$

称P是(ε)到(g)的过度阵

规定记号：$(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，$(g)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$。（2 个坐标系）

换基公式：$(g)=(\varepsilon)P$，$(\varepsilon)=(g)P^{-1}$

换坐标公式：若$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x=(\varepsilon)x$

且$\alpha=\sum_{i=1}^{n}y_i g_i=(g_1,g_2,\cdots,g_n)y=(g)y$

则有坐标公式$x=Py$或$y=P^{-1}x$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in R^n$

Pf：$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\underline{\underline{\text{写}}}(\varepsilon)x$，且$\alpha=(g_1,g_2,\cdots,g_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(g)y$

$\Rightarrow\alpha=(g)y\underline{\underline{(g)=(\varepsilon)P}}(\varepsilon)Py=(\varepsilon)x=\varepsilon$（消去）$\Rightarrow Py=x$

记号：$(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，$(g)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，$\varphi(\varepsilon)=(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))$

换基相似定理：设φ：$V\to V$为线性变换，固定2个基

$(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，$(g)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$

令$\varphi(\varepsilon)=(\varepsilon)A$（表示公式），$\varphi(g)=(g)B$（第2表示）

$(g)=(\varepsilon)P$或$(\varepsilon)=(g)P^{-1}$（换基公式）

则：$B=P^{-1}AP$　　相似

Pf：$\varphi(g)=(g)B$，且$\varphi(g)=\varphi((\varepsilon)P)=\varphi(\varepsilon)P=(\varepsilon)AP=(g)P^{-1}AP$

$(g)B=(g)P^{-1}AP\Rightarrow B=P^{-1}AP$

Ex. 《矩阵分析（史荣昌等）》P68　9 10 12 19

坐标与广阵格式应用

广阵原理：若广元$\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_p$可由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$“表示”，

则由公式$(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_p)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B_{n\times p}$

Eg. $V=span(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，$W=span(g_1,g_2)$

固定基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$，$\{g_1,g_2\}$

令线性映射φ：$V \to W \quad \forall \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \in V$

使得$\varphi(\alpha) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i\right) = x_1 g_1 + x_2 g_2$

$$\begin{cases} \varphi(\varepsilon_1) = g_1 = 1 \bullet g_1 + 0 \bullet g_2 \\ \varphi(\varepsilon_2) = g_2 = 0 \bullet g_1 + 1 \bullet g_2 \\ \varphi(\varepsilon_3) = 0 = 0 \bullet g_1 + 0 \bullet g_2 \\ \qquad \vdots \\ \varphi(\varepsilon_n) = 0 = 0 \bullet g_1 + 0 \bullet g_2 \end{cases}$$

$$(\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2), \cdots, \varphi(\varepsilon_n)) = (g_1, g_2,)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{2\times n}$$

简写$\varphi(\varepsilon) = (g)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$，$(g) = (g_1, g_2)$，$\varphi(\varepsilon) = (\varphi(\varepsilon)) = (\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2), \cdots, \varphi(\varepsilon_n))$

令φ：$V^n \to W^m$为线性的，固定基$(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$，$(g) = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$

则$\varphi(\varepsilon) = (g)A_{m\times n}$，$(\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2), \cdots, \varphi(\varepsilon_n)) = (g_1, g_2, \cdots, g_m)A_{m\times n}$

$A_{m\times n}$叫φ的表示阵（在固定基下）

换基相似公式：设φ：$V \to V$为线性的或$\varphi \in L(V,V)$

固定基$(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$，$(g) = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$

记：$\varphi(\varepsilon) = (\varepsilon)A_{n\times n}$或$(\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2), \cdots, \varphi(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A$

$\varphi(g) = (g)B_{n\times n}$或$(\varphi(g_1), \varphi(g_2), \cdots, \varphi(g_n)) = (g_1, g_2, \cdots, g_n)B$

$(g) = (\varepsilon)P$（换基公式）或$(\varepsilon) = (g)P^{-1}$

则：$B = P^{-1}AP$（相似）

推论：（1）线性变换φ：$V \to V$在不同基下的矩阵是相似关系

（2）在复数域上可取一个基$(g) = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$，使$\varphi$在该基下的矩阵$B$是 Jordan 形，

即 $B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$（Jordan 形）

小结：固定基下常用下列“替换”（替身）

（1）V^n 用 R^n 或 C^n 代替

（2）广元 $\alpha\in V^n$ 可用坐标 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 代替（$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$）

（3）线性变换 φ：$V\to V$ 用矩阵代替

（4）相元 $\varphi(\alpha)$ 用 Ax 代替

固定基 (ε) 下 $\begin{cases} (\alpha)\leftrightarrow(x)\in R^n \\ \varphi(\alpha)\leftrightarrow Ax \\ \varphi\leftrightarrow A \\ V^n \underline{\underline{同构}} R^n 或 C^n \\ L(\overline{\overline{V,V}})=R^{n\times n} \end{cases}$

Eg.设 $V=R(x)_n=\left\{f=a_0+a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}\middle|a_i\in R\right\}$（全体次数小于 n 的多项式）

$\dim V=n$，$\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 是一个基

另 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为互不相同的数

$$\begin{aligned} f_1(x)&=(x-\hat{b}_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n) \\ f_2(x)&=(x-b_1)(x-\hat{b}_2)\cdots(x-b_n) \\ &\vdots \\ f_n(x)&=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-\hat{b}_n) \end{aligned}$$

“$\wedge$”表示删掉一项

$f_j(x)=(x-b_1)\cdots(x-\hat{b}_j)\cdots(x-b_n)$

$$g_1(x)=\frac{f_1(x)}{f_1(b_1)},g_2(x)=\frac{f_2(x)}{f_2(b_2)},\cdots,g_n(x)=\frac{f_n(x)}{f_n(b_n)}\in V$$

取值 $\begin{cases} g_1(b_1)=\dfrac{f_1(b_1)}{f_1(b_1)}=1,g_1(b_2)=0,\cdots,g_1(b_n)=0 \\ g_2(b_1)=0,g_2(b_2)=1,\cdots,g_2(b_n)=0 \\ \vdots \\ g_n(b_1)=0,g_n(b_2)=0,\cdots,g_n(b_n)=1 \end{cases}$

证明：（1）$g_1, g_2, \cdots, g_n$ 是 V 的基

（2）求 $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ 到 $(1, x, \cdots, x^{n-1})$ 的过度阵 P

Pf：引入映射 φ：$V \to R^n$ $\quad \forall f \in V$

$$\varphi(f) \triangleq \begin{pmatrix} f(b_1) \\ f(b_2) \\ \vdots \\ f(b_n) \end{pmatrix}，\ \varphi \text{ 是线性的：} \begin{matrix} \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g) \\ \varphi(kf) = k\varphi(f) \end{matrix}$$

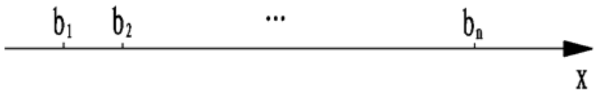
$$\Rightarrow \varphi(g_1) = \begin{pmatrix} g_1(b_1) \\ g_1(b_2) \\ \vdots \\ g_1(b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \varphi(g_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \cdots, \varphi(g_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e_n \in R^n$$

$\Rightarrow \{\varphi(g_1) = e_1, \varphi(g_2) = e_2, \cdots, \varphi(g_n) = e_n\}$ 为无关组 $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ 也无关（是基）

设换基公式 $(1, x, \cdots, x^{n-1}) = (g_1, g_2, \cdots, g_n)P$

$$\Rightarrow (\varphi(1), \varphi(x), \cdots, \varphi(x^{n-1})) = (\varphi(g_1), \varphi(g_2), \cdots, \varphi(g_n))P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^{n-1} \\ 1 & b_2 & b_2^2 & \cdots & b_2^{n-1} \\ 1 & b_3 & b_3^2 & \cdots & b_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b_n & b_n^2 & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix} = I_n P \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^{n-1} \\ 1 & b_2 & b_2^2 & \cdots & b_2^{n-1} \\ 1 & b_3 & b_3^2 & \cdots & b_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b_n & b_n^2 & \cdots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}$$



注： 固定 n 个不同点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$；

规定"取值映射" $\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(b_1) \\ f(b_2) \\ \vdots \\ f(b_n) \end{pmatrix} \in R^n$，$\varphi$：$V \to R^n$ 为线性

$$\text{令 } \varphi(h) = \begin{pmatrix} h(b_1) \\ h(b_2) \\ \vdots \\ h(b_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(f+h) = \begin{pmatrix} f(b_1)+h(b_1) \\ f(b_2)+h(b_2) \\ \vdots \\ f(b_n)+h(b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(b_1) \\ f(b_2) \\ \vdots \\ f(b_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(b_1) \\ h(b_2) \\ \vdots \\ h(b_n) \end{pmatrix}$$

$$f\equiv 1\text{时，}\varphi(f)=\varphi(1)\begin{pmatrix} f(b_1)\\ f(b_2)\\ \vdots \\ f(b_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$$

实际上： φ：$V=R(x)\to R^n$ 是同构，$R(x)_n \underline{\underline{\text{同构}\varphi}} R^n$

0 点引理： 固定 $b_1,b_2,\cdots,b_n$（互异）；$g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 同上

则：（1）$1=\sum_{i=1}^{n}g_i(x)$；（2）$x=\sum_{i=1}^{n}b_i g_i(x)$；

（3）$g_i(x)g_j(x)$ 含有因子 $(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$（$i\neq j$）

Pf：$\because (1,x,\cdots,x^{n-1})=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x))P$；$P=\begin{pmatrix}1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^{n-1}\\ 1 & b_2 & b_2^2 & \cdots & b_2^{n-1}\\ 1 & b_3 & b_3^2 & \cdots & b_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & b_n & b_n^2 & \cdots & b_n^{n-1}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases} 1=\sum_{i=1}^{n}g_i(x)\\ x=\sum_{i=1}^{n}b_i g_i(x)\\ \vdots\\ x^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}b_i^{n-1}g_i(x)\end{cases}\text{，有 } x^k=\sum_{i=1}^{n}b_i^k g_i(x)$$

（3）例如

$$\begin{matrix} g_1(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_1(b_1)}=\dfrac{(x\hat{-}b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}{f_1(b_1)}\\ g_2(x)=\dfrac{f_2(x)}{f_2(b_2)}=\dfrac{(x-b_1)(x\hat{-}b_2)\cdots(x-b_n)}{f_2(b_2)}\end{matrix}\Rightarrow g_1(x)g_2(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)(\cdots)$$

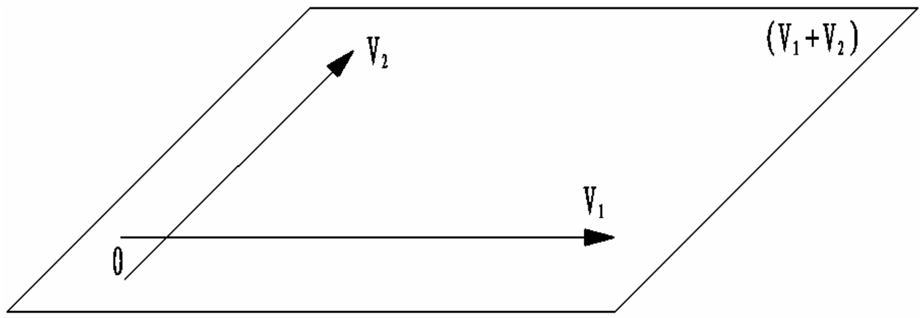
推论： 固定 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 与 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 任取方阵 $A=A_{p\times p}$

有（1）$I=\sum_{i=1}^{n}g_i(A)$；（2）$A=\sum_{i=1}^{n}b_i g_i(A)$

和空间定义： 设 V_1，V_2 是子空间

称 $V_1+V_2\underline{\underline{\Delta}}\{\text{全体}\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$ 为 V_1，V_2 的和（可知 V_1+V_2 是子空间）

注： 并集$V_1 \cup V_2$一般不是子空间，$V_1 \cup V_2 \subset V_1 + V_2$



同理V_1，V_2，V_3为子空间，可定义$V_1 + V_2 + V_3 = \{全体\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 | \alpha_i \in V_i\}$

维数公式： $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

或$rank(V_1 + V_2) = rankV_1 + rankV_2 - rank(V_1 \cap V_2)$

直和定义： 设V_1，V_2为子空间，且 0 元具有唯一分解性

即：$0 = \alpha_1 + \alpha_2$（$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$）必有$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$

称$V_1 + V_2$为直和，记为$V_1 \oplus V_2$

定理： $V_1 + V_2$为直和$V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$

同理：3 个子空间V_1，V_2，V_3

若 0 元具有唯一分解：$0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$（$\alpha_i \in V_i$）

则称$V_1 + V_2 + V_3$为直和，记为$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$

直和维数公式： $\dim(V_1 \oplus V)_2 \Leftrightarrow \dim V_1 + \dim V_2$

$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$

补空间： 若$V_1 + V_2 = V$（全空间）且$V_1 \cap V_2 = \{0\}$，即$V_1 \oplus V_2 = V$

称V_2为V_1的补空间

注： V_1的补空间可能很多

生成元公式： 设$V_1 = span(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$，$V_2 = span(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$

则$V_1 + V_2 = span(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$

注：$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$未必无关

同构方法（替身法）

先固定基$(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，空间为$V=span(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$

固定基$(g)=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$，空间为$W=span(g_1,g_2,\cdots,g_m)$

可用下列代替法：

（1）$\alpha\in V$ 写成坐标 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$ 或 C^n（$\because V\underline{\underline{同构}}R^n$ 或 C^n）

$\beta\in W$ 写成坐标 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T\in R^m$ 或 C^m（$\because W\underline{\underline{同构}}R^m$ 或 C^m）

（2）线性变换：$\varphi\in L(V,V)$写成方阵 $A_{n\times n}$ 且有表示公式：$\varphi(\varepsilon)=(\varepsilon)A_{n\times n}$

公式：$\varphi(\varepsilon)=\lambda\alpha$ 写成 $Ax=\lambda x$

（3）$\varphi(\alpha)$写成 Ax

（4）映射$\varphi\in L(V,W)$写成矩阵 $A_{m\times n}=A$，有表示公式：$\varphi(\varepsilon)=(g)A_{m\times n}$

（5）$\varphi(\alpha)$写成 $A_{m\times n}x$，公式$\varphi(\alpha)=\beta$ 写成 $A_{m\times n}x=y$（坐标公式）

注： 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$无关，则坐标 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 也无关

一般秩 $rank(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=rank(X_1,X_2,\cdots,X_s)$

Ex.取$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1&3\\1&0\end{pmatrix}$为 $R^{2\times2}$ 中基，且φ是线性的

$$\varphi(\alpha_1)=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\varphi(\alpha_2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\varphi(\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\varphi(\alpha_4)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

求φ的表示矩阵（公式）

解：利用“拉直同构”可写

$$\alpha_1=(1,0,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,0,2)^T,\alpha_4=(1,3,1,0)^T\in R^4$$

$$\varphi(\alpha_1)=(1,1,0,0)^T,\varphi(\alpha_2)=(0,0,0,0)^T,\varphi(\alpha_3)=(0,0,1,1)^T,\varphi(\alpha_4)=(0,1,0,1)^T\in R^4$$

设表示公式：$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A$

$$(\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\varphi(\alpha_3),\varphi(\alpha_4))=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A$$

$$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)^{-1}\left(\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\varphi(\alpha_3),\varphi(\alpha_4)\right)=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&3\\1&1&0&1\\1&1&2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

映射：$\varphi\in L(V,W)$ 的相空间（值域）与核

规定：相空间为 $\mathscr{R}(\varphi)=\varphi(V)=\left\{全体\varphi(\alpha)\middle|\alpha\in V\right\}\subset W$

核空间为 $\mathscr{N}(\varphi)=\varphi^{-1}(0)=\left\{全体\alpha\middle|\varphi(\alpha)=0\right\}\subset V$

（1）相空间的秩为：$rank(\varphi)=\dim\mathscr{R}(\varphi)=rank\ \mathscr{R}(\varphi)$，也叫映射 φ 的秩数

（2）核空间的维数（秩数）：$rank\,\mathscr{N}(\varphi)=\dim\mathscr{N}(\varphi)$ 也叫 φ 的 0 度

0 度公式：$\dim\mathscr{N}(\varphi)+\dim\mathscr{R}(\varphi)=n\qquad \varphi\in L(V^n,W^m)$

或 $rank\left(\varphi^{-1}(0)\right)+rank(\varphi)=n$

注： φ 写成 $A=A_{m\times n}$

$\varphi^{-1}(0)=\left\{\alpha\middle|\varphi(\alpha)=0\right\}$ 写成 $A^{-1}(0)=\left\{x\middle|Ax=0\right\}$（解空间）

相空间 $\mathscr{R}(\varphi)=\left\{\varphi(\alpha)\middle|\alpha\in V\right\}$ 写成 $\mathscr{R}(A)=\left\{Ax\middle|x\in R^n\right\}$

规定： $A=A_{m\times n}$ 的列空间为 $\mathscr{R}(A)=\left\{Ax\middle|x\in R^n\right\}\subset R^m$

$A=A_{m\times n}$ 的核空间 $\mathscr{N}(A)=A^{-1}(0)=\left\{x\middle|Ax=0\right\}\subset R^n$（解空间）

改写 $A_{m\times n}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$，$A_{m\times n}x=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\mathscr{R}(A)=\{Ax\}=\left\{全体\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i\right\}=span\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$（由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 生成）

$\Rightarrow\dim\mathscr{R}(A)=rank\,\mathscr{R}(A)=rank\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=rank(A)$

由公式 $rankA^{-1}(0)+rank(A)=n\Rightarrow rank\varphi^{-1}(0)+rank(\varphi)=n$

$A_{m\times n}x=0$ 的基础解有 $(n-r)$ 个 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}$，$r=rank(A)$，通解：$x=\sum_{i=1}^{n-r}c_i\xi_i$

$\Rightarrow$核 $\mathcal{N}(A)=A^{-1}(0)=\{x|Ax=0\}=span(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})$（解空间）

$\Rightarrow \dim\mathcal{N}(A)=rank\,\mathcal{N}(A)=rank(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})=n-r$

$\Rightarrow rank\,\mathcal{N}(A)=n-rank(A)\Leftrightarrow rank\,\mathcal{N}(A)+rank(A)=0$

引理： $\varphi\in L(V^n,W^m)$写成$A=A_{m\times n}$，$R^n\to R^m$

则：（1）$rank(\varphi)=rank(A)=rank\,\mathcal{R}(A)$（列空间维数）

（2）$rank(\varphi^{-1}(0))=rank(A^{-1}(0))$或$rank\,\mathcal{N}(\varphi)=rank\,\mathcal{N}(A)$

φ与A的不变子空间：

设$\varphi\in L(V,V)$固定基下，可写$A\in L(R^n\to R^m)$

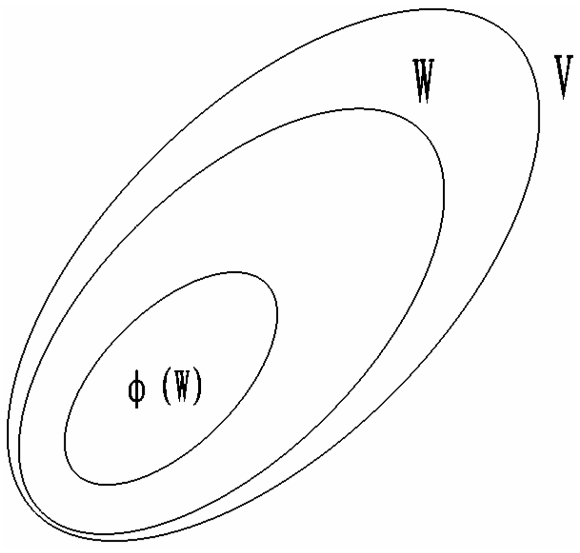
若子空间$W\subset V$使得$\forall\alpha\in W$，$\varphi(\alpha)\in W$

即$\varphi(W)\subset W$，称W是φ的不变子空间

平凡不变子空间$\{0\}$与V都是φ的不变子空间

取特征子空间$V(\lambda)=\{\alpha|\varphi(\alpha)=\lambda\alpha\}=\{\alpha|(\varphi-\lambda I)\alpha=0\}$（$\lambda$的特征向量含$\vec{0}$）

$V(\lambda)$是φ的不变子空间，若$\alpha\in V(\alpha)$，验证：$\varphi(\alpha)\in V(\lambda)$



$A=A_{n\times n}$的不变子空间$W\subset R^n$（或C^n）

使得$A(W)\subset W$，即任何$x\in W$，$Ax\in W$

特征子空间$V(\lambda)=\{x|Ax=\lambda x\}=\{x|(A-\lambda I)x=0\}$是$A$的不变子空间

引理： 若$W=span(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r)$是$V=span(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$中子空间

$(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r)$为基，$\varphi\in L(V,V)$

设W是φ的不变子空间，则有表示阵$A=\begin{pmatrix} A_{r\times r} & (*) \\ 0 & (*) \end{pmatrix}_{n\times n}$

Pf：由定义：
$$\begin{cases} \varphi(\varepsilon_1)=(*)\varepsilon_1+(*)\varepsilon_2+\cdots+(*)\varepsilon_r+0\bullet\varepsilon_{r+1}+\cdots+0\bullet\varepsilon_n \\ \varphi(\varepsilon_2)=(*)\varepsilon_1+(*)\varepsilon_2+\cdots+(*)\varepsilon_r+0\bullet\varepsilon_{r+1}+\cdots+0\bullet\varepsilon_n \\ \vdots \\ \varphi(\varepsilon_r)=(*)\varepsilon_1+(*)\varepsilon_2+\cdots+(*)\varepsilon_r+0\bullet\varepsilon_{r+1}+\cdots+0\bullet\varepsilon_n \\ \varphi(\varepsilon_{r+1})=(*)\varepsilon_1+(*)\varepsilon_2+\cdots+(*)\varepsilon_n \\ \vdots \\ \varphi(\varepsilon_n)=(*)\varepsilon_1+(*)\varepsilon_2+\cdots+(*)\varepsilon_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r)\begin{pmatrix} (A_{r\times r}) & (*) \\ 0 & (*) \end{pmatrix}$$

定理： 若$\varphi\in L(V,V)$有 2 个不变子空间$W_1,W_2\subset V$，且$W_1\oplus W_2=V$（直和）

可设$W_1=span(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r)$，$W_2=span(\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_n)$

则φ的矩阵为$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\underline{\text{记为}}A=A_1\oplus A_2$

注： 若W是φ的不变子空间，限制映射$\varphi|_W$：$W\to W$是W到W的线性变换

引理：（1）复数域上方阵$A=A_{n\times n}$必有特征值与特征向量，使得$Ax=\lambda x$（$x\neq\vec{0}$）

（2）复数域上，线性变换$\varphi\in L(V,V)$，$\dim V=n$，必有特征向量$\exists\alpha$：$\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$（$\alpha\neq 0$）

（3）设W是$\varphi\in L(V,V)$的不变子空间，则φ在W上必有特征向量$\exists\alpha\in W$：$\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$（$\alpha\neq 0$）（$\because\varphi|_W$：$W\to W$也是线性变换）

Ex. 若$AB=BA$（A，B是方阵），令$V(\lambda)=\{x|Ax=\lambda x\}$（特征子空间）

证明：（1）$V(\lambda)$是A与B的不变子空间

（2）$V(\lambda)$中有一个$x\neq 0$是B的特征向量（用引理（3））

（3）A、B 有公共特征向量

线性变换的规范表示

R^n 中规范基 $e_1=(1,0,\cdots,0)^T, e_2=(0,1,\cdots,0)^T, \cdots, e_n=(0,0,\cdots,1)^T \in R^n$

R^m 中规范基 $\tilde{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T, \tilde{e}_2=(0,1,\cdots,0)^T, \cdots, \tilde{e}_m=(0,0,\cdots,1)^T \in R^m$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in R^n$， $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T \in R^m$， $y=\sum_{i=1}^{m} y_i \tilde{e}_i$

规范公式： 每个线性的 φ： $R^n \to R^m$ 或 $\varphi \in L(R^n, R^m)$ 都有一个（唯一的）矩阵

$A=A_{m\times n} \in R^{m\times n}$，使得 $\varphi(x)=Ax$， $x \in R^n$，其中 $A=(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\cdots,\varphi(e_n))_{m\times n}$

Pf：$\because x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$， $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i)=(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\cdots,\varphi(e_n))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

令 $A=(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\cdots,\varphi(e_n))=A_{m\times n} \in R^{m\times n} \Rightarrow \varphi(x)=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=Ax$

实际上： φ 在规范基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 与 $(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_m)$ 下的表示公式

$\varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_m)A_{m\times n}$，其中 $(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_m)=I_m$（单位阵）

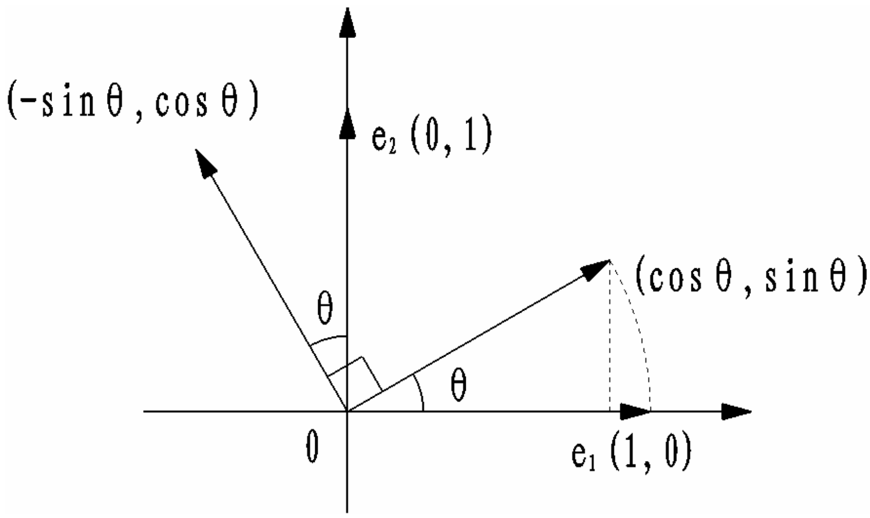
$\Rightarrow \varphi(e_1,e_2,\cdots,e_n)=A_{m\times n}$

在实用中，可把 φ： $R^n \to R^m$ 写成 A： $R^n \to R^m$（可写 $\varphi=A$ ）

矩阵 $A=A_{m\times n}$ 有双重身份：（1） A 是矩阵；（2） A： $R^n \to R^m$（ $A \in L(R^n, R^m)$ ）为线性映射

注： 若 R^n 中为行向量，在公式中应该为列向量

Eg. 令 θ 旋转 φ： $R^2 \to R^2$，求 $A=A_{2\times 2}$ 使得 $\varphi(x)=Ax$



$\because \varphi(e_1)=(\cos\theta,\sin\theta)^T=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$，$\varphi(e_2)=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

令 $A=(\varphi(e_1),\varphi(e_2))=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 公式 $\varphi(x)=Ax=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\cos\theta-x_2\sin\theta\\ x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\end{pmatrix}$

令 $y=Ax$，$y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y_1=x_1\cos\theta-x_2\sin\theta\\ y_2=x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\end{cases}$

Eg.令 $\varphi\in L(R^3,R^2)$，即 φ：$R^3\to R^2$ 为线性

使得：$\varphi(x)=(x_1+x_2,x_2+x_3)^T$，$\forall x=(x_1,x_2,x_3)^T\in R^3$

求 $A=A_{2\times3}$ 使得 $\varphi(x)=Ax$

解：$\varphi(e_1)=\varphi(1,0,0)^T=(1,0)^T$，$\varphi(e_2)=\varphi(0,1,0)^T=(1,1)^T$，$\varphi(e_3)=\varphi(0,0,1)^T=(0,1)^T$

$A=(\varphi(e_1),\varphi(e_2),\varphi(e_3))=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}_{2\times3}$

计算 $\varphi(x)=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_2+x_3\end{pmatrix}$

一般表示公式：设 $(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，$(g)=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$ 分别为

φ：$R^n\to R^m$ 为线性的

设表示式：$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(g_1,g_2,\cdots,g_m)A$

则有：$A=(g_1,g_2,\cdots,g_m)^{-1}(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))$

其中$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$为可逆方阵

方法：可用行变换$(g_1,g_2,\cdots,g_n|\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))\xrightarrow{\text{行变}}(I_m|A)$求出$A$

注： $R^{m\times n}$中的矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$

可用“拉直法”：$A\to\vec{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{mn})^T\in R^{mn}$，$B\to\vec{B}=(b_{11},b_{12},\cdots,b_{mn})^T\in R^{mn}$

“$\to$”：$R^{m\times n}\to R^{mn}$为线性（同构）

$\overrightarrow{(A+B)}=\overrightarrow{(a_{ij}+b_{ij})}=(a_{11}+b_{11},\cdots,a_{mn}+b_{mn})^T=(a_{11},\cdots,a_{mn})^T+(b_{11},\cdots,b_{mn})^T=\vec{A}+\vec{B}$

同理$\overrightarrow{(kA)}=k\vec{A}$

应用： 若φ：$R^{2\times2}\to R^{2\times2}$为线性，取基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$，$(g_1,g_2,g_3,g_4)$

由公式$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(g_1,g_2,g_3,g_4)A_{4\times4}$

拉直$\left(\overrightarrow{\varphi(\varepsilon_1)},\overrightarrow{\varphi(\varepsilon_2)},\overrightarrow{\varphi(\varepsilon_3)},\overrightarrow{\varphi(\varepsilon_4)}\right)=(\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3,\vec{g}_4)A$

$\Rightarrow A=(\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3,\vec{g}_4)^{-1}\left(\overrightarrow{\varphi(\varepsilon_1)},\overrightarrow{\varphi(\varepsilon_2)},\overrightarrow{\varphi(\varepsilon_3)},\overrightarrow{\varphi(\varepsilon_4)}\right)$

实用中可写： $\alpha=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$

Ex. 1. 令φ：$R^2\to R^3$为线性的

且$\forall x\in R^2$，$\varphi(x)=(x_2,x_1+x_2,x_1-x_2)^T$

（1） 求规范公式$\varphi(x)=Ax$中的A

（2） 若取基$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$与$(g_1,g_2,g_3)$，其中$\varepsilon_1=(1,2)^T$，$\varepsilon_2=(3,1)^T$，$g_1=(1,0,0)^T$，$g_2=(1,1,0)^T$，$g_3=(1,1,1)^T$，求公式$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(g_1,g_2,g_3)B$中的表示阵$B$（可用初等行变换求$B$）

线性变换应用参考书： Steven Leon《线性代数与应用》

§4 应用 1：计算机图形与动画设计；应用 2：飞机运动矩阵表示

§3　欧式空间与QR分解

标准欧式空间：R^n 中引入标准内积（点积）

标准内积（点积） $x \bullet y = (x, y) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \bullet (y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

有公式：$x \bullet y = (x, y) = x^T y = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$，$x \bullet x = x^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

长度公式：$|x| = \sqrt{x \bullet x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$，$|x|^2 = x \bullet x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

正交（垂直）：$x \perp y \Leftrightarrow x \bullet y = (x, y) = 0$

勾股定理：（1）$x \perp y \Rightarrow (x \pm y)^2 = |x|^2 + |y|^2$

（2）$x \perp y \Rightarrow (kx \pm ly)^2 = k^2 |x|^2 + l^2 |y|^2$（$\because kx \perp ly$）

正交组与正交基：若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in R^n$ 互相正交（且非 0），（$\alpha_1 \perp \alpha_2 \perp \cdots \perp \alpha_s$）

称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为一个正交组

称生成空间 $W = span(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 中有正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$

若单位化：$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}, \varepsilon_2 = \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}, \cdots, \varepsilon_s = \frac{\alpha_s}{|\alpha_s|}$，可得单位（规范）正交组（基）$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s$

定义：若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s \in R^n$ 为单位正交组（基）

称矩阵 $A = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s)_{n \times s}$ 为正交高阵（次正交阵）（$s \le n$）

特别：$s = n$ 时 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 R^n 中正交基

称 $A = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)_{n \times n}$ 为正交阵

例：$A = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ 为正交高阵

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \bullet \varepsilon_2 = 0$

计算 $A^T A=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$

正交高阵性质： $A=A_{n\times s}$ 为次正交 $A^T A=I_s$

Pf：$A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s)$，$A^T=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \vdots\\ \varepsilon_s^T\end{pmatrix}\Rightarrow A^T A=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \vdots\\ \varepsilon_s^T\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s)=\begin{pmatrix}1&&0\\&1&\\0&&\ddots\\&&&1\end{pmatrix}$

特别：$A=A_{n\times n}$ 为正交阵 $\Leftrightarrow A^T A=I_n$（此时 $A^T=A^{-1}$）

QR 公式：若 $A=A_{n\times s}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，秩为 $rank(A)=s$，（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关）

则有正交高阵 $Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s)_{n\times s}$ 与上三角阵 $R=R_{s\times s}$

使得 $A=QR=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s)\begin{pmatrix}t_1&&(*)\\&t_2&\ddots\\0&&&t_s\end{pmatrix}$

Ex.《矩阵分析》P70 12（1）（2） 13 P68 3 6

QR 分解：若 $A=A_{n\times s}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 为高阵，（$rank(A)=$ 列数）

则分解 $A=QR$ 基中 $Q=Q_{n\times s}$ 为正交高阵（次正交阵），R 为上三角

Pf：由许米特（Schmidt）正交公式

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2\bullet\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1$$

令

$$\vdots$$

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s\bullet\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1-\frac{(\alpha_s\bullet\beta_2)}{|\beta_2|^2}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s\bullet\beta_{s-1})}{|\beta_{s-1}|^2}\beta_{s-1}$$

注： 此时 $\beta_1\perp\beta_2\perp\cdots\perp\beta_s$（互正交）

且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 互相表示

$$\begin{cases}\alpha_1=\beta_1\\ \alpha_2=(*)\beta_1+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_s=(*)\beta_1+(*)\beta_2+\cdots+\beta_s\end{cases}\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\begin{pmatrix}1&*&\cdots&*\\0&1&\cdots&*\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

单位化$\varepsilon_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|},\varepsilon_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|},\cdots,\varepsilon_s=\dfrac{\beta_s}{|\beta_s|}$或$\beta_1=|\beta_1|\varepsilon_1,\beta_2=|\beta_2|\varepsilon_2,\cdots,\beta_s=|\beta_s|\varepsilon_s$

$$\Rightarrow(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s)\begin{pmatrix}|\beta_1| & & & O\\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |\beta_s|\end{pmatrix}_{s\times s}$$ 代入上式

$$\Rightarrow A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s)\begin{pmatrix}|\beta_1| & & & *\\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |\beta_s|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & (*)\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1\end{pmatrix}_{s\times s}$$

令$R=\begin{pmatrix}|\beta_1| & & & *\\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |\beta_s|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & (*)\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\beta_1| & & & (*)'\\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |\beta_s|\end{pmatrix}$上三角

$Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s)_{n\times s}$为正交高阵

$\Rightarrow A=QR=Q_{n\times s}R_{s\times s}$

特别： $A=A_{n\times n}$为可逆方阵，也有$A=Q_{n\times n}R_{n\times n}$

注： 若$Q=Q_{n\times s}$为正交高阵，则$Q^TQ=I_s$

由$A=QR\Rightarrow R=Q^TA$（$\because Q^TQ=I$）

Eg. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}_{4\times 3}$ （高阵）

解：$\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(-1,4,4,-1)^T$，$\alpha_3=(4,-2,2,0)^T$

令$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$|\beta_1|^2=4$，$|\beta_1|=2$

$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2\bullet\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1=\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2},-\dfrac{5}{2}\right)^T=\dfrac{5}{2}(-1,1,1,-1)^T$，$|\beta_2|^2=25$，$|\beta_2|=5$

$\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3\bullet\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3\bullet\beta_2)}{|\beta_2|^2}\beta_2=(2,-2,2,-2)^T$，$|\beta_3|^2=16$，$|\beta_3|=4$

单位化：$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T,\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{2}(-1,1,1,-1)^T,\varepsilon_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$

令 $Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}_{4\times 3}$ （正交高阵）

令 $R=Q^TA=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ （上三角）

$\Rightarrow A=QR$

Ex.求 QR 分解

（1） $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ （2） $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 2}$

正交阵定义： 若方阵 $A=A_{n\times n}$ 的 n 个列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为单位正交组（基）

性质： 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)_{n\times n}$ 为正交阵（$\alpha_1\perp\alpha_2\perp\cdots\perp\alpha_n$）

（1） $A^TA=I_n$ 且 $A^{-1}=A^T$ 或 $AA^T=I_n$

（2）长度公式：$|Ax|^2=|x|^2$ （$x\in R^n$）（$\because |Ax|^2=(Ax)^T(Ax)=x^Tx$）

复欧空间（酉空间）C^n

设复 n 元数组空间 $C^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T|x_1,x_2,\cdots,x_n\in C\}$

任取 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in C^n$

规定：标准内积（点积）如下：$(x,y)=x\bullet y=y^Hx=(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i$

注： y^H 表示复共轭转置也叫 Hermite 转置

复内积性质：

（1）$\left(y,x\right)=\overline{\left(x,y\right)}$或$y\bullet x=\overline{x\bullet y}$

（2）$\left(kx,y\right)=k\left(x,y\right)$，$\left(x,ky\right)=\bar{k}\left(x,y\right)$或$x\bullet\left(ky\right)=\bar{k}\left(x\bullet y\right)$

（3）$\left(x,y+z\right)=\left(x,y\right)+\left(x,z\right)$或$x\bullet\left(y+z\right)=x\bullet y+x\bullet z$

（4）正定性：$\left(x,x\right)=x^{H}x\geq 0$，长度公式：$\left|x\right|=\sqrt{\left(x,x\right)}=\sqrt{x^{H}x}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^{2}}$， $x\in C^{n}$

注： $x^{H}x=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^{2}$

许互次（Schwarz）不等式：$\left|\left(x,y\right)\right|\leq\left|x\right|\bullet\left|y\right|$

正交定义：$x\perp y\Leftrightarrow\left(x,y\right)=x\bullet y=0$（$\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i=0$）

注： $\left(x,y\right)=x\bullet y=0$必有$\left(y,x\right)=y\bullet x=0$，$\because\left(y,x\right)=\overline{\left(x,y\right)}=\bar{0}=0$

引理： $x\perp y\Leftrightarrow\left(x,y\right)=0\Leftrightarrow\left(y,x\right)=0$

勾股定理： $x\perp y\Rightarrow\left|\left(x\pm y\right)\right|^{2}=\left|x\right|^{2}+\left|y\right|^{2}$

Pf：$\left|\left(x+y\right)\right|^{2}=\left(x+y\right)\bullet\left(x+y\right)=x\bullet x+y\bullet y+x\bullet y+y\bullet x=\left|x\right|^{2}+\left|y\right|^{2}$

次酉阵定义： 若$A=A_{n\times s}$中列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是单位正交组，则称$A$为次酉阵

称$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)_{n\times s}$为次酉阵，$\alpha_1\perp\alpha_2\perp\cdots\perp\alpha_s$，$\left|\alpha_1\right|^{2}=\left|\alpha_2\right|^{2}=\cdots=\left|\alpha_s\right|^{2}=1$

性质： $A=A_{n\times s}$为次酉阵$\Leftrightarrow\bar{A}^{T}A=I_s$记为$A^{H}A=I_s$

注： $A^{H}=\bar{A}^{T}=\overline{A^{T}}$表示 Hermite 转置

Pf：$\because\alpha_1\perp\alpha_2\perp\cdots\perp\alpha_s\Rightarrow\alpha_1^{H}\alpha_2=0,\cdots,\alpha_s^{H}\alpha_{s-1}=0$

$$\Rightarrow A^{H}A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{H}\\ \alpha_2^{H}\\ \vdots\\ \alpha_s^{H}\end{pmatrix}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)=\begin{pmatrix}1 & & O\\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1\end{pmatrix}=I_s$$

特别对方阵$A=A_{n\times n}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$

若各列互正交且长度为 1，则称A为酉阵

酉阵性质： $A=A_{n\times n}$为酉阵$\Rightarrow A^{H}A=I_n$或$A^{-1}=A^{H}$

引理：$A=A_{n\times n}$ 为酉阵 $\Leftrightarrow A^H A=AA^H=I_n \Leftrightarrow A^{-1}=A^H$

注： 用“$\mathscr{U}$”表示“酉”

$\mathscr{U}$ R 分解公式： 每个高阵 $A=A_{n\times s}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$（$rank(A)=$列数）

都有分解 $A=QR$，$Q=Q_{n\times s}$ 为次酉，R 为上三角（正交线性）

注： 许 Schmidt 正交公式在 $\mathscr{U}$ 空间 C^n 中也成立

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为无关组

$$\text{令}\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2\bullet\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s=\alpha_s-\dfrac{(\alpha_s\bullet\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1-\dfrac{(\alpha_s\bullet\beta_2)}{|\beta_2|^2}\beta_2-\cdots-\dfrac{(\alpha_s\bullet\beta_{s-1})}{|\beta_{s-1}|^2}\beta_{s-1}\end{cases}\text{，则 }\beta_1\perp\beta_2\perp\cdots\perp\beta_s$$

Eg. $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2)$，求 QR 分解

$\alpha_1=(1,i)^T$，$\alpha_2=(i,1)^T$

$\beta_1=\alpha_1=(1,i)^T$，$|\beta_1|^2=2$，$|\beta_1|=\sqrt{2}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2\bullet\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1=\alpha_2-0\bullet\alpha_1=\alpha_2=(i,1)^T$$

$\beta_1\perp\beta_2$（$\alpha_1\perp\alpha_2$）

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1,\quad \varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2$$

$$Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\text{（为 }\mathscr{U}\text{ 阵）}$$

令 $A=QR\Rightarrow R=Q^H A$

C^n 中标准内积（点积）（称 C^n 为复欧空间或 $\mathscr{U}$ 空间）

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T \in C^n$

内积为： $x\bullet y=(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i=(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=y^H x$

特别： $x,y\in R^n\subset C^n$，有 $x\bullet y=(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$

性质：（1）$y\bullet x=\overline{x\bullet y}$；（2）$x\bullet(y+z)=x\bullet y+x\bullet z$；

（3）$(x,ky)=\bar{k}(x,y)$；（4）$x\bullet x=x^H x=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$（长度平方）

C^n 中的正交条件"$x\perp y$"

定义： $x\perp y\Leftrightarrow x\bullet y=0$ 或 $y\bullet x=0$

勾股定理： $x\perp y\Rightarrow |(x\pm y)|^2=|x|^2+|y|^2$

Eg. $\alpha=(1,i,i)^T$，$\beta=(2,-i,-i)^T$，则 $\alpha\perp\beta$

$\because \alpha\bullet\beta=\beta^H\alpha=(\bar{2},\overline{-i},\overline{-i})\begin{pmatrix}1\\i\\i\end{pmatrix}=2+i^2+i^2=0$

验证：$|(\alpha+\beta)|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$

次酉阵定义： 若 $A=A_{n\times s}$ 中列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是单位正交组（$\alpha_1\perp\alpha_2\perp\cdots\perp\alpha_s$）

则称 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)_{n\times s}$ 为次酉阵

引理： $A=A_{n\times s}$ 为次酉阵 $\Leftrightarrow \overline{A}^T A=I_s$

酉阵定义： 若方阵 $A=A_{n\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的列构成单位正交基，称 A 为 $\mathscr{U}$ 阵

引理： $A=A_{n\times n}$ 为 $\mathscr{U}$ 阵 $\Rightarrow A^H A=I_n$ 或 $A^{-1}=A^H$

特别： 实正交阵（$A\in R^{n\times n}$，$A^T A=I_n$）都是 $\mathscr{U}$ 阵

例：$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3}\\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$为$\mathscr{U}$阵

注： Schmidt 正交化公式仍成立

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为无关组，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$互相正交

其中：$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2\bullet\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s\bullet\beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1-\frac{(\alpha_s\bullet\beta_2)}{|\beta_2|^2}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s\bullet\beta_{s-1})}{|\beta_{s-1}|^2}\beta_{s-1}\end{cases}$$

QR（或$\mathscr{U}R$）分解

（1）若$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)_{n\times s}$为高阵（$rank(A)=s$）

则$A=QR$，$Q=Q_{n\times s}$为次酉阵（$Q^HQ=I_s$），R为上三角阵

（2）若方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)_{n\times n}$为可逆方阵

则$A=QR$，$Q=Q_{n\times n}$为酉阵（$Q^HQ=I_n$），R为上三角阵

方法： 先把A中列正交单位化可得Q，设$A=QR$解出$R=Q^HA$

Ex.求QR分解

（1）$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$　　（2）$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & 1\\ 1 & -1\\ i & 0\end{pmatrix}$

许尔公式：每个方阵$A=A_{n\times n}$相似于上三角阵

即：$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (*)\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

许尔公式 2：每个方阵 $A=A_{n\times n}$ 都酉相似于上三角阵

即存在 $\mathscr{U}$ 阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=Q^{H}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (*)\\ & \lambda_2 & \ddots \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$

Pf：$\because P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (*)\\ & \lambda_2 & \ddots \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$

用 QR 分解 $P=QR$ 写 $R=\begin{pmatrix}t_1 & & (*)\\ & t_2 & \ddots \\ O & & t_n\end{pmatrix}$，$Q^{H}Q=I_n$，$Q^{-1}=Q^{H}$

$$P^{-1}AP=R^{-1}\left(Q^{-1}AQ\right)R=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (*)\\ & \lambda_2 & \ddots \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1}AQ=R\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (*)\\ & \lambda_2 & \ddots \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}R^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}t_1 & & (*)\\ & t_2 & \ddots \\ O & & t_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (*)\\ & \lambda_2 & \ddots \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1^{-1} & & (*)\\ & t_2^{-1} & \ddots \\ O & & t_n^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (*)'\\ & \lambda_2 & \ddots \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Hermite 阵定义： 若 $A^{H}=A$ 称 A 为 Hermite 阵

注： 若 $A^{H}=A$ 则 A 为方阵

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 1-i\\ 1+i & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & i\\ -i & 5\end{pmatrix}$ 为 Hermite 阵

$$A^{H}=\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{1+i}\\ \overline{1-i} & \overline{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1-i\\ 1+i & 2\end{pmatrix}=A,\quad B^{H}=\begin{pmatrix}\overline{3} & \overline{-i}\\ \overline{i} & \overline{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & i\\ -i & 5\end{pmatrix}=B$$

特别： 是对称阵 $A=A^{T}\in R^{n\times n}$ 也是 Hermite 阵（$\because A^{H}=\overline{A}^{T}=A^{T}$）

反 Hermite 阵定义： 若 $A^H=-A$

实反对称阵 $A^T=-A\in R^{n\times n}$ 也是反 Hermite 阵

引理：（1）A 为 Hermite 阵 $\Leftrightarrow iA$ 为反 Hermite 阵或 $\dfrac{A}{i}$ 为反 Hermite 阵

（2）A 为反 Hermite 阵 $\Leftrightarrow iA$ 为 Hermite 阵

Pf：（1）$\because (iA)^H=(\bar{i})A^H=(-i)A=-iA$

例：$A=i\begin{pmatrix}1 & 1-i\\ 1+i & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 1+i\\ -1+i & 2i\end{pmatrix}$ 为反 Hermite 阵

注： 反 Hermite 阵对角线为纯虚的（或 0）

注： $(AB)^H=B^HA^H$，$(A+B)^H=A^H+B^H$

Hermite 阵对角线为实数

Eg. 设 $\varepsilon=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in C^n$，$|\varepsilon|^2=\varepsilon^H\varepsilon=\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2=1$（单位长）

令 $Q=I_n-2\varepsilon\varepsilon^H$

则（1）$Q^H=Q$；（2）$Q^HQ=I_n$，即 Q 为 $\mathscr{U}$ 阵；（3）$Q^{-1}=Q$

解：（1）$Q^H=(I_n-2\varepsilon\varepsilon^H)^H=(I_n)^H-2(\varepsilon\varepsilon^H)^H=I_n-2\varepsilon\varepsilon^H=Q$

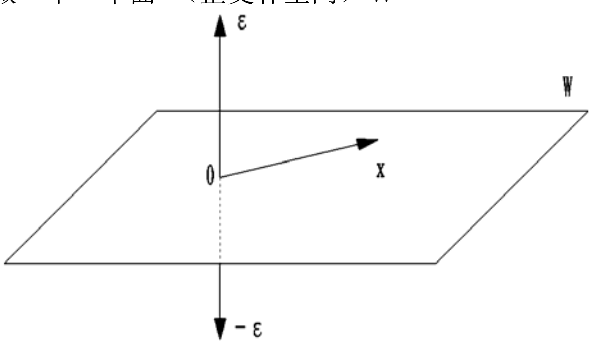
（2）$Q^HQ=Q\bullet Q=(I_n-2\varepsilon\varepsilon^H)^2=I_n+4(\varepsilon\varepsilon^H)(\varepsilon\varepsilon^H)-4\varepsilon\varepsilon^H=I_n$，$Q$ 为 $\mathscr{U}$ 阵

称这种 $\mathscr{U}$ 阵 Q 为镜面阵（或 Householder 阵）

镜面阵性质： 设 $Q=I_n-2\varepsilon\varepsilon^H$，$|\varepsilon|^2=\varepsilon^H\varepsilon=1$

（在空间 R^n 中 $\varepsilon^H=\varepsilon^T$；$Q=I_n-2\varepsilon\varepsilon^H$）

如图：以 ε 为法向做一个“平面”（正交补空间）W



（1）$Q\varepsilon=-\varepsilon$，$\varepsilon$ 是属于-1 的特征向量

（2）若 $x \perp \varepsilon$，则 $Qx = x$，属于 1 的特征向量

Pf:（1）$Q\varepsilon = \left(I_n - 2\varepsilon\varepsilon^T\right)\varepsilon = \varepsilon - 2\varepsilon\varepsilon^T\varepsilon = \varepsilon - 2\varepsilon = -\varepsilon$

（2）若 $x \perp \varepsilon \Rightarrow \varepsilon^T x = 0$，$Qx = \left(I_n - 2\varepsilon\varepsilon^T\right)x = x - 2\varepsilon\left(\varepsilon^T x\right) = x$

（3）Q 恰有 n 个特征向量：$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$（无关）

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 为 $W = \varepsilon^{\perp}$ 中的基，属于 1 的特征向量

令 $P = \left(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}\right)$ 为可逆

$$\Rightarrow P^{-1}QP = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q \text{ 有 } n \text{ 个特征值为 } \{-1, 1, \cdots, 1\}\text{（}n-1\text{ 重）}$$

$$\Rightarrow |Q| = \left|I_n - 2\varepsilon\varepsilon^H\right| = (-1) \bullet 1 \bullet \cdots \bullet 1 = -1$$

注： 若 $A = A_{n \times n}$ 为 $\mathscr{U}$ 阵（或正交阵），则有：

（1）保长度：$|Ax|^2 = |x|^2$

（2）保内积：$(Ax, Ay) = (x, y)$

Pf:（1）$|Ax|^2 = (Ax)^H (Ax) = x^H \left(A^H A\right)x = x^H x = |x|^2$

（2）$(Ax, Ay) = (Ay)^H (Ax) = y^H \left(A^H A\right)x = y^H x = (x, y)$

推论： 若 $x \perp y$，则 $Ax \perp Ay$，A 为 $\mathscr{U}$ 阵

正规阵条件： $A^H A = AA^H$

注： 正规阵必为方阵

可知：Hermite 阵；反 Hermite 阵；$\mathscr{U}$ 阵（正交阵）都是正规的

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$A^H A = AA^H$，$A$ 为正规的

引理： 上三角正规阵一定是对角阵

Pf：设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$，$A^H=\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & & & O \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$

由条件：$AA^H=A^HA \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{1i}\right|^2=\left|a_{11}\right|^2 \Rightarrow \sum\limits_{i=2}^{n}\left|a_{1i}\right|^2=0$

同理：$a_{23}=a_{24}=\cdots=a_{2n}=0$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

推论： 若 A 为上三角正交阵，则 A 为对角阵。

正规阵理论（$A^HA=AA^H$）

引理：（1）每个上三角正规阵一定是对角阵

（2）正规阵经过 $\mathscr{U}$ 变换仍是正规阵：A 为正规阵，且 Q 为 $\mathscr{U}$ 阵 $\Rightarrow Q^HAQ$ 为正规阵

Pf：$\because A^HA=AA^H \Rightarrow Q^HA^HAQ=Q^HAA^HQ \Rightarrow \left(Q^HA^HQ\right)\left(Q^HAQ\right)=\left(Q^HAQ\right)\left(Q^HA^HQ\right)$

正规分解： $A=A_{n\times n}$ 为正规阵，则有阵 Q（$Q^HQ=I_n$，$Q^{-1}=Q^H$）

使得 $Q^HAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Pf：用许尔（第 2 公式）$\Rightarrow$ 存在 $\mathscr{U}$ 阵 Q 使得 $Q^HAQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (*) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$（上三角）

且 Q^HAQ 也正规，由引理 Q^HAQ 为对角阵 $Q^HAQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

正规阵结论

写$Q=\left(q_1,q_2,\cdots,q_n\right)$ （$q_1,q_2,\cdots,q_n$互正交）

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & O\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow AQ=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & O\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\left(q_1,q_2,\cdots,q_n\right)=\left(q_1,q_2,\cdots,q_n\right)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & O\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\left(Aq_1,Aq_2,\cdots,Aq_n\right)=\left(\lambda_1q_1,\lambda_2q_2,\cdots,\lambda_nq_n\right)$$

$$Aq_1=\lambda_1q_1,Aq_2=\lambda_2q_2,\cdots,Aq_n=\lambda_nq_n$$

（1）正规阵$A=A_{n\times n}$有n个互相正交的特征向量$q_1,q_2,\cdots,q_n$

注： $x\perp y$（正交）$\Leftrightarrow y^Hx=0$或$x^Hy=0$

$q_1\perp q_2\perp\cdots\perp q_n\Leftrightarrow q_k^Hq_l=0$（$k\neq l$）

$$Q=\left(q_1,q_2,\cdots,q_n\right),\quad Q^H=\begin{pmatrix}q_1^H\\ q_2^H\\ \vdots\\ q_n^H\end{pmatrix},\ (QQ^H=Q^HQ=I_n)$$

$$\Rightarrow QQ^H=\left(q_1,q_2,\cdots,q_n\right)\begin{pmatrix}q_1^H\\ q_2^H\\ \vdots\\ q_n^H\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n q_iq_i^H=I_n$$

令$Q_1=q_1q_1^H,Q_2=q_2q_2^H,\cdots,Q_n=q_nq_n^H$都是 Hermite 阵

$Q_1^H=Q_1,Q_2^H=Q_2,\cdots,Q_n^H=Q_n$；且$Q_1^2=Q_1,Q_2^2=Q_2,\cdots,Q_n^2=Q_n$

$$Q_1^2=Q_1Q_1=\left(q_1q_1^H\right)\left(q_1q_1^H\right)=q_1\left(q_1^Hq_1\right)q_1^H=q_1q_1^H=Q_1$$

（2）$A=A_{n\times n}$为正规阵，则有分解公式： $A=\sum_{i=1}^n\lambda_iQ_i$ （谱分解）

且$Q_1^2=Q_1=Q_1^H,Q_2^2=Q_2=Q_2^H,\cdots,Q_n^2=Q_n=Q_n^H$， $Q_1+Q_2+\cdots+Q_n=I_n$

Pf：$\because A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^H = (q_1, q_2, \cdots, q_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^H \\ q_2^H \\ \vdots \\ q_n^H \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(q_i q_i^H\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i$$

注： 分解中的$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$叫投影阵

性质：（1）$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = I_n$

（2）$Q_1^2 = Q_1 = Q_1^H, Q_2^2 = Q_2 = Q_2^H, \cdots, Q_n^2 = Q_n = Q_n^H$

（3）$Q_1 Q_2 = 0, \cdots, Q_k Q_l = 0$，（$k \neq l$）

$\because Q_1 Q_2 = \left(q_1 q_1^H\right)\left(q_2 q_2^H\right) = q_1\left(q_1^H q_2\right)q_2^H = 0$，（$q_1 \perp q_2$）

（4）$AQ_1 = \lambda_1 Q_1, AQ_2 = \lambda_2 Q_2, \cdots, AQ_n = \lambda_n Q_n$

（5）$A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k Q_i$

（6）$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) Q_i$，（$f(x)$为多项式）

Pf：$\because A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i$

$$\Rightarrow AQ_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i\right) Q_1 = \lambda_1 Q_1^2 + \lambda_2 Q_2 Q_1 + \cdots + \lambda_n Q_n Q_1 = \lambda_1 Q_1^2 + 0 + \cdots + 0$$

$AQ_1 = \lambda_1 Q_1^2 = \lambda_1 Q_1$，同理$AQ_2 = \lambda_2 Q_2$

Pf：（5）若$A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k Q_i$（归纳法）

$$\Rightarrow A^{k+1} = A \bullet A^k = A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k Q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \left(AQ_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{k+1} Q_i$$

Pf：（6）写$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m = a_0\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i\right) + \cdots + a_m\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m Q_i\right)$$

$$=\left(a_0+a_1\lambda_1+\cdots+a_m\lambda_1^m\right)Q_1+\left(a_0+a_1\lambda_2+\cdots+a_m\lambda_2^m\right)Q_2+\cdots+\left(a_0+a_1\lambda_n+\cdots+a_m\lambda_n^m\right)Q_2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f\left(\lambda_i\right)Q_i$$

注： $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 有重根时，可合并部分 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$

例如：$\lambda_1=\lambda_2$ 时：$\lambda_1Q_1+\lambda_2Q_2=\lambda_1\left(Q_1+Q_2\right)$

写 $G_1=Q_1+Q_2$，且 $G_1^H=G_1=G_1^2=\left(Q_1+Q_2\right)^2=Q_1+Q_2$

正规谱分解公式： 设 A 为正规阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为互异特征值，则存在 $G_1,G_2,\cdots,G_s$ 使得

（1）$A=\sum_{i=1}^{s}\lambda_iG_i$（注：$G_1,G_2,\cdots,G_s$ 由 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 合并）

（2）$G_1+G_2+\cdots+G_s=I_n$

（3）$G_1^2=G_1=G_1^H,G_2^2=G_2=G_2^H,\cdots,G_s^2=G_s=G_s^H$

（4）$G_1G_2=0,\cdots,G_kG_l=0$，（$k\neq l$）

（5）$AG_1=\lambda_1G_1,AG_2=\lambda_2G_2,\cdots,AG_s=\lambda_sG_s$

（6）$A^k=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^kG_i$

（7）$f\left(A\right)=\sum_{i=1}^{s}f\left(\lambda_i\right)G_i$

$k=0$ 时，$A^0=I_n=G_1+G_2+\cdots+G_s$

$k=1$ 时，$A^1=\sum_{i=1}^{s}\lambda_iG_i$，（$G_1G_2=0,\cdots,G_sG_{s-1}=0$）

注： 其中 $G_1,G_2,\cdots,G_s$ 叫 A 的投影阵

引入 $g\left(x\right)=\prod_{i=1}^{s}\left(x-\lambda_i\right)$，（$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 互异）

$$g_1(x)=(x-\hat{\lambda}_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_s)\quad (\text{去掉}(x-\lambda_1))$$
$$g_2(x)=(x-\lambda_1)(x-\hat{\lambda}_2)\cdots(x-\lambda_s)\quad (\text{去掉}(x-\lambda_2))$$
$$\vdots$$
$$g_s(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\hat{\lambda}_s)\quad (\text{去掉}(x-\lambda_s))$$

则 $g_1(\lambda_1)\neq 0, g_2(\lambda_2)\neq 0,\cdots,g_s(\lambda_s)\neq 0$

令 $G_1=\varphi_1(A)=\dfrac{g_1(A)}{g_1(\lambda_1)},G_2=\varphi_2(A)=\dfrac{g_2(A)}{g_2(\lambda_2)},\cdots,G_s=\varphi_s(A)=\dfrac{g_s(A)}{g_s(\lambda_s)}$

则 $A=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i G_i$； $A^k=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^k G_i$

Pf：由公式 $f(A)=\sum_{i=1}^{s}f(\lambda_i)G_i$，（$f(x)$为任取）

取 $f(x)=g_1(x)\Rightarrow g_1(A)=\sum_{i=1}^{s}g_1(\lambda_i)G_i\Rightarrow g_1(A)=g_1(\lambda_1)G_1\Rightarrow G_1=\dfrac{g_1(A)}{g_1(\lambda_1)}=\varphi_1(A)$

同理：取 $f(x)=g_2(x)\Rightarrow G_2=\dfrac{g_2(A)}{g_2(\lambda_2)}=\varphi_2(A)$

取 $f(x)=g_s(x)\Rightarrow G_s=\dfrac{g_s(A)}{g_s(\lambda_s)}=\varphi_s(A)$

Eg. $A=\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 1+i & 1\end{pmatrix}$，（$i=\sqrt{-1}$，$i^2=-1$），$A^H=A$（正规）

解：$|xI-A|=(x-3)x$，$\sigma(A)=\{3,0\}$，$\lambda_1=3$，$\lambda_2=0$

$\lambda_1=3$：特征向量 $q_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1-i\\ 1\end{pmatrix}$；$\lambda_2=0$：特征向量 $q_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ 1+i\end{pmatrix}$

令 $Q=(q_1,q_2)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1-i & -1\\ 1 & 1+i\end{pmatrix}$，$Q$ 为 $\mathscr{U}$ 阵（$Q^HQ=I$）

$$\Rightarrow Q^HAQ=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}(1+i) & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(1-i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 1+i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}(1-i) & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(1+i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\lambda_1q_1q_1^H+\lambda_2q_2q_2^H=3\cdot G_1+0\cdot G_2$$

方法 2：用投影阵公式： $g(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)=(x-3)(x-0)$

$g_1(x)=(x-\hat{\lambda_1})(x-\lambda_2)=x$， $g_2(x)=(x-\lambda_1)(x-\hat{\lambda_2})=(x-3)$

$G_1=\dfrac{g_1(A)}{g_1(\lambda_1)}=\dfrac{A}{3}$， $G_2=\dfrac{g_2(A)}{g_2(\lambda_2)}=\dfrac{A-3I}{0-3}$

$$A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2=\lambda_1\left(\frac{A}{3}\right)+\lambda_2\left(\frac{A-3I}{-3}\right)\Rightarrow A^{100}=3^{100}\left(\frac{A}{3}\right)+0^{100}\left(\frac{A-3I}{-3}\right)$$

Ex.判定下列矩阵为正规，并写出谱分解公式（ $f(A)=?$ ）

（1） $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ （2） $A=\begin{pmatrix}1&1-i\\1+i&0\end{pmatrix}$ （3） $A=\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}$

（4） $A=\begin{pmatrix}1&-i&0\\i&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ （5） $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ （6） $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

《矩阵分析》P179-180：2 5（2）（4） 3（1） 8（仿例 3.6.5）

Eg.证明：若 $A^H=A$（Hermite），则 A 的特征值全为实数

Pf：$\because A^H=A$ 为正规阵

$$\Rightarrow Q^HAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&O\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\O&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$，（Q 为 $\mathscr{U}$ 阵）

$$\left(Q^HAQ\right)^H=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&O\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\O&&&\lambda_n\end{pmatrix}^H=\begin{pmatrix}\overline{\lambda_1}&&&O\\&\overline{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\O&&&\overline{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

左边：$Q^HA^HQ=Q^HAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&O\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\O&&&\lambda_n\end{pmatrix}\Rightarrow\overline{\lambda_1}=\lambda_1,\overline{\lambda_2}=\lambda_2,\cdots,\overline{\lambda_n}=\lambda_n$

$\therefore\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为实数

Ex.斜 Hermite 阵 $A=-A^H$ 的特征值全为纯虚或 0（可用 iA 为 Hermite 阵）