补充结论： “高低分解， 左右逆公式，左消法与右消法， 协调公式”

满秩分解（也叫高低分解）设 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r(\mathbf{A})=r$，则有分解 $\mathrm{A}=\mathbf{B}_{m\times r}\mathbf{C}_{r\times n}$

其中 $B=B_{m\times r}$ 为列满秩(高阵)，$C=C_{r\times n}$ 为行满秩(低阵)；

分解方法：①用行变换把 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 化为阶梯阵 $\mathrm{S}=\mathbf{S}_{m\times n}$，在 $\mathbf{S}$ 中有 r 个单位列向量 $e_1,e_2,\cdots,e_r$；
②在原 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 中取出与 $\mathbf{S}_{m\times n}$ 中 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 位置对应的列：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，
令 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\beta_1, & \beta_2 & \cdots & \beta_r\end{pmatrix}$，$\mathbf{C}$ 为 $\mathbf{S}$ 中的前 r 行组成的矩阵，可得分解：$\mathbf{A}=\mathbf{BC}$；

引理 1：设 $A\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}I_r & D\\ 0 & 0\end{pmatrix}\overset{\text{记作}}{==}S$ (行阶梯形)

则 A 中前 r 列 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为无关，可得分解 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(I_r,\quad D)=BC$ 证明如下：

Pf(证明)：由条件可知 $A=P\begin{pmatrix}I_r & D\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，（$P$ 为初等阵之积，P 可逆）

$\because \begin{pmatrix}I_r & D\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r\\ 0\end{pmatrix}(I_r,\quad D)$ 令 $P\begin{pmatrix}I_r\\ 0\end{pmatrix}=B=B_{m\times r}$ 可知

$$\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}I_r\\ 0\end{pmatrix}(I_r,\quad D)=B(I_r\mid\quad D)$$

$$\because A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r\mid\cdots\alpha_n)=B(I_r\mid\quad D)=(BI_r\mid\quad BD)=(B\mid,\cdots)$$

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r\mid\cdots)=(B\mid\cdots)\Rightarrow(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=B\Rightarrow A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(I_r,\quad D)$$

令 $B=B_{m\times r}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$---(B 为高阵)，再令 $C=(I_r,\quad D)$---(C 为低阵)

可得**高低分解** $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$， 证毕.

同样，当 I_r 的单位列向量 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ **分布在其它位置时，也有相应的结论。**

特别有**秩 1 分解**

秩 1 分解：若 $rank(A)=1$，则 $A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)=\alpha\beta$

Pf：$\because A=A_{m\times n},rank(A)=1\Rightarrow$ 有一个非 0 列 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}$，其它列都为 α 的倍数。可写

$$\alpha_1=b_1\alpha,\cdots,\alpha_n=b_n\alpha$$

$$\Rightarrow A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(b_1\alpha,\cdots,b_n\alpha)=(\alpha b_1,\cdots,\alpha b_n)=\alpha(b_1,\cdots,b_n)=\alpha\beta$$

Eg：$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1,1,1)$

Eg：$A=\begin{pmatrix}0&1&-1&-1&1\\0&-2&2&-2&6\\0&1&-1&-2&3\end{pmatrix}_{3\times5}\xrightarrow{\text{行变}}\begin{pmatrix}0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，取

$$B=(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&-2\\1&-2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&-2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

例：求满秩分解：① $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$；② $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&6&1&0\\3&2&10&1&0\\2&3&10&-1&3\\4&4&16&0&-1\end{pmatrix}$（略讲）；

③ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$；④ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&2&1&4\\2&6&1&0&7\\3&9&3&1&11\end{pmatrix}$；

⑤ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&-2&4&6\\1&-1&2&3\end{pmatrix}$；⑥ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$。

解：① $r(\mathbf{A})=2$，$\because \mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:c}1&1&2\\0&1&1\\1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{cc:c}1&0&1\\0&1&1\\ \hdashline 0&0&0\end{array}\right)$，$\therefore \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

②（不讲）

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:cc:c}2&1&6&1&0\\3&2&10&1&0\\2&3&10&-1&3\\4&4&16&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{2r_1-r_2\\r_4-2r_1\\r_2-3(2r_1-r_2)\\r_3-2(2r_1-r_2)}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&2&4&-2&0\\0&3&6&-3&3\\0&2&4&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2-r_4\\r_3-r_4-4\tilde{r}_2\\r_4-(2\tilde{r}_3-\tilde{r}_2)\\\tilde{r}_2\sim\tilde{r}_3}}\left(\begin{array}{cc:cc:c}1&0&2&1&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\\ \hdashline 0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\therefore \mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\2&3&3\\4&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}; \quad r(\mathbf{A})=3$$

③ $r(\mathbf{A})=1$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\end{pmatrix}$**秩 1 分解**

④ ，

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c:cccc}1&3&2&1&4\\2&6&1&0&7\\3&9&3&1&11\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&3&2&1&4\\0&0&-3&-2&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)r_2]{r_1+4r_2}\left(\begin{array}{c:ccc:c}1&3&-10&-7&0\\0&0&3&2&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

取 A 中 1 与 5 列，令

$$B=(\alpha_1,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&4\\2&7\\3&11\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&3&-10&-7&0\\0&0&3&2&1\end{pmatrix}\text{，}\ r(\mathbf{A})=2$$

$$\therefore \mathbf{A}=BC=\begin{pmatrix}1&4\\2&7\\3&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-10&-7&0\\0&0&3&2&1\end{pmatrix}$$

⑤ $r(\mathbf{A})=1$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&-2&4&6\\1&-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&3\end{pmatrix}$。

⑥ $r(\mathbf{A})=1$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2\end{pmatrix}$。

补充：左右逆公式（高低阵性质）

引理： ①若 $B=B_{m\times r}$ 为**高阵(**列满秩)，则有左逆阵 B_L 使 st：$B_LB=I$

②若 $C=C_{r\times m}$ 为左右逆**公式阵(**行满秩），则存在右逆阵 C_R 使得 $CC_R=I$

其中左右逆**公式为**：$\boldsymbol{B_L=(B^HB)^{-1}B^H}$，$\boldsymbol{C_R=C^H(CC^H)^{-1}}$

证： 条件可知 $r(B^HB)=r(B)=r,\ r(CC^H)=r(C)=r$，故

(B^HB)，(CC^H) 都是 r 阶满秩方阵（都可逆），$(B^HB)^{-1},(CC^H)^{-1}$ 都存在.

令 $B_L=(B^HB)^{-1}B^H$， $C_R=C^H(CC^H)^{-1}$(都有定义)

则有 $B_LB=(B^HB)^{-1}B^HB=I$， $CC_R=CC^H(CC^H)^{-1}=I$ 证毕

推论：①若 B 为列满秩(高阵)，则**左消法**成立：$BX=BY\Rightarrow X=Y$

②若 C 为行满秩(低阵)，则**右消法**成立：$PC=QC\quad\Rightarrow P=Q$

证：①若 B 列满秩(高阵)，且 $BX=BY$，则

$$B_LBX=B_LBY\ \Rightarrow\ X=Y，\quad \text{证毕}$$

定理（协调公式）：任给 $\mathbf{A}$ 的 2 个高低分解： $\mathbf{A}=BC$， $\mathbf{A}=\tilde{B}\tilde{C}$ 则有

协调公式 $\tilde{B}=BP,\ \tilde{C}=P^{-1}C$， P 为可逆阵

证：条件可得 $\tilde{B}\tilde{C}=BC\ \Rightarrow\ \tilde{B}\tilde{C}\tilde{C}_R=BC\tilde{C}_R\ \Rightarrow\tilde{B}=B(C\tilde{C}_R)$

同理 $\tilde{B}_L\tilde{B}\tilde{C}=\tilde{B}_LBC\ \Rightarrow\ \tilde{C}=(\tilde{B}_LB)C$

设 $rank(\mathbf{A})=r$，可知 $(\tilde{B}_LB)$，$(C\tilde{C}_R)$ 都是 r 阶方阵，且有

$$(\tilde{B}_LB)(C\tilde{C}_R)=\tilde{B}_L(BC)\tilde{C}_R=\tilde{B}_L(\tilde{B}\tilde{C})\tilde{C}_R=(\tilde{B}_L\tilde{B})(\tilde{C}\tilde{C}_R)=I$$

故 $(\tilde{B}_LB)$，$(C\tilde{C}_R)$ 都是可逆方阵，且 $(C\tilde{C}_R)=(\tilde{B}_LB)^{-1}$，

令 $P=(C\tilde{C}_R)$，则 $(\tilde{B}_LB)=P^{-1}$，可得 $\tilde{B}=BP,\ \tilde{C}=P^{-1}C$ 证毕

例 1：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}$，求左逆 A_L，验证 $A_LA=I$． 若 $AX=AY$ 是否有 $X=Y$？

解：可知 $\mathbf{A}\in C^{3\times2}$ 为列满秩(高阵)，$r(\mathbf{A})=2$，用左逆公式

$$\mathbf{A}_L=(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H，\text{其中 }\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}，\ \mathbf{A}^H=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_L=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&5&0\end{pmatrix}$$

可验证 $A_LA==\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$

利用高阵左消法则，可知 $AX=AY\Rightarrow\ X=Y$

补充习题 Ex

1． $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&i\\1&0\\0&i\end{pmatrix},i^2=-1$，求左逆 A_L，验证 $A_LA=I$． 若 $AX=AY$ 是否有 $X=Y$？

2. $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$（是否高阵），求 $\mathbf{B}$ 的左逆 $\mathbf{B}_L=$？ 验证 $B_LB=I$

3. $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$（是否低阵），求 $\mathbf{C}$ 的右逆 $\mathbf{C}_R=$？ 验证 $\mathbf{CC}_R=I$

提示： $\mathbf{C}_L=\mathbf{C}^H(\mathbf{CC}^H)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&2\end{pmatrix}$

4. 思考题：已知乘积 $BC=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&-1\\2&0&1\end{pmatrix}$， 其中 $B=B_{3\times2}$ ， $C=B_{2\times3}$

求 $CB=$？ (且用协调公式判断：乘积 CB 是否唯一？)