本节主要内容：利用谱公式计算矩阵函数

复习(根遗传公式): 设 n 方阵 A 根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则 $f(A)$ 的根为

$$\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$$

其中 $f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k$

$f(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k$ **为任一多项式(或解析函数)**

备注(引理)： 若多项式 $f(x)$ 使 $f(A)=0$

则 $f(x)$ 的根包含 A 的全体不同根（不含重复次数）

也即， A 的全体根都是 $f(x)$ 的根（不含重复）

证明： 设 n 方阵 A 全体根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则 $f(A)$ 的根为

$$\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$$

由条件 $f(A)=0$ 可知 $\lambda[f(A)]=\lambda[0_{n,n}]=\{0,\cdots,0\}=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$

故 $f(\lambda_1)=\cdots=f(\lambda_n)=0$，

即 A 全体根为 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 都是 $f(x)$ 的根

故 A 的全体不同根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k\,(k\le n)$ 都是 $f(x)$ 的根（不含重复）

必有 $f(\lambda_1)=\cdots=f(\lambda_k)=0$

备注： 若多项式 $f(x)$ 使 $f(A)=0$，称 $f(x)$ **为 A 的 0 化式**

上面引理含义为："**A 的 0 化式** $f(x)$ 含有 A 的全体不同根（不含重复次数）"

推论： A 的全体根都是任一 0 化式 $f(x)$ 的根（不含重复）

例如 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$\lambda(A)=\{1,1,2\}$，**全体不同根** $\lambda_1=1(\text{重复}2\text{次}),\ \lambda_2=2$

令 $f(x)=(x-1)(x-2)$，可知 $f(A)=(A-1)(A-2)=0$，

即 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 为 **A 的 0 化式**

可知，A 的全体根$\{1,1,2\}$都是 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 的根(不含重复次数)

（注意 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 只有 2 个单根 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$ 没有重复根）

例 已知 n 阶阵 A 满足 $A^2-3A+2I=0$，可知 $f(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

为 A 的一个 0 化式，故 $f(x)$ 的根{1，2}包含了 A 的全体根(不含重复次数)

即 A 最多有 2 个不同根{1，2}.

例 已知 n 阶阵 A 满足 $A^2=A$(幂等)，可知 $f(x)=x^2-x=(x-1)x$

为 A 的一个 0 化式，故 $f(x)$ 的根 $\{1,0\}$ 包含了 A 的全体根(不含重复次数)

故 A 最多有 2 个不同根 $1,0$.

例 已知 n 阶阵 A 满足 $A^2=I$，可知 $f(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$

为 A 的一个 0 化式，故 $f(x)$ 的根 $\{1,-1\}$ 包含了 A 的全体根(不含重复次数)

即 A 最多有 2 个不同根 $1,-1$.

备注 1：若 $A^k=0\ (k\geq 2)$ 为幂 0 阵，则 A 的全体根为 $\lambda(A)=\{0,\cdots,0\}$)

证明：因为 $A^k=0$ ， 则 $f(x)=x^k$ 为 A 的一个 0 化式，

可知 A 的全体根都是 0 化式 $f(x)=x^k$ 的根 (不含重复次数)，且 $x^k=0$ 只有 0 根，

故 A 的全体根为 $\lambda(A)=\{0,\cdots,0\}$ ----(全为 0 根)

备注 2：若 $(A-aI)^k=0\ (k\geq 2)$，则 A 的全体根为

$$\lambda(A)=\{a,\cdots,a\}$$ --(n 重根)

即，平移幂 0 阵 A（$(A-a)^k=0$）的全体根为 $\lambda(A)=\{a,\cdots,a\}$

证：因为 $(A-aI)^k=0$ ， 则 $f(x)=(x-a)^k$ 为 A 的 0 化式，

因为 A 的根都是 0 化式 $f(x)=(x-a)^k$ 的根 ，且 $(x-a)^k=0$ 只有一个不同根 $x=a$，

故 A 的全体根为 $\lambda(A)=\{a,\cdots,a\}$ ---(n 重根)

例如， $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$满足$(A-2)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=0$

故 A 的全体根为 $\lambda(A)=\{2,\ 2,\ 2\}$

……………………………………………………………………………………………………

下面主要讨论单阵 *A* 的 $f(A)$ 计算公式

复习单阵谱公式：**单阵 *A* 有谱分解** $A=\lambda_1 G_1+\lambda_2 G_2+\cdots\cdots+\lambda_k G_k$，

且 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$

其中 $f(x)=\mathbf{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots$ 为解析函数

例 已知 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$为单阵，用谱公式计算 e^{tA}

解：可知 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$有两个不同根，记为 $\lambda_1=\mathrm{i}$，$\lambda_2=-\mathrm{i}$

A 是单纯阵，对任解析函数 $f(x)$ 有谱公式：$f(\mathbf{A})=f(\mathrm{i})\mathbf{G}_1+f(-\mathrm{i})\mathbf{G}_2$

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1\\-1&\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&1\\-1&-\mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&-1\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

令 $f(x)=e^{tx}$，故 $f(\mathrm{i})=e^{\mathrm{i}t}$，$f(-\mathrm{i})=e^{-\mathrm{i}t}$

$$e^{t\mathbf{A}}=e^{\mathrm{i}t}\mathbf{G}_1+e^{-\mathrm{i}t}\mathbf{G}_2=\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1\\-1&\mathrm{i}\end{pmatrix}+\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&-1\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{e^{\mathrm{i}t}+e^{-\mathrm{i}t}}{2}&\frac{e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\\\frac{e^{-\mathrm{i}t}-e^{\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}&\frac{e^{\mathrm{i}t}+e^{-\mathrm{i}t}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$$

备注 Euler 公式：$\cos t=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$，　$\sin t=\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)$

……………………………………………………………………………………

思考题：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-a\\a&0\end{pmatrix}(a\neq 0)$，证明 $e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos at&-\sin at\\\sin at&\cos at\end{pmatrix}$

提示：可用谱**公式与 Euler 公式**，也可利用公式：$e^{\begin{pmatrix}0&-t\\t&0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\\sin t&\cos t\end{pmatrix}$

……………………………………………………………………………………

例：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}$，求 $e^{t\mathbf{A}}$ 与 $(e^{A})^{-1}$，求行列式 $|e^{t\mathbf{A}}|=?$

解：特征多项式为 $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-1&4\\3&x-2\end{vmatrix}=(x-5)(x+2)$，$\lambda(\mathbf{A})=\{5,-2\}$ 有 2 个不同根，

$\mathbf{A}$ 为单纯阵. 对任解析函数 $f(x)$ 有谱公式：$f(\mathbf{A})=f(5)\mathbf{G}_1+f(-2)\mathbf{G}_2$，

其中，$\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2=\mathbf{I}$，$\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2=0$，可知

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}_2=\mathbf{I}-\mathbf{G}_1=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4&-4\\-3&3\end{pmatrix}.$$

令 $f(x)=e^{tx}$，则 $f(5)=e^{5t}$，$f(-2)=e^{-2t}$，

$$e^{t\mathbf{A}}=e^{5t}\mathbf{G}_1+e^{-2t}\mathbf{G}_2=\frac{e^{5t}}{7}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}+\frac{e^{-2t}}{7}\begin{pmatrix}4&-4\\-3&3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3e^{5t}+4e^{-2t}&4e^{5t}-4e^{-2t}\\3e^{5t}-3e^{-2t}&4e^{5t}+3e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

$$(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}\overset{(\text{把t换成}-\text{t})}{=}\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3e^{-5t}+4e^{2t}&4e^{-5t}-4e^{2t}\\3e^{-5t}-3e^{2t}&4e^{-5t}+3e^{2t}\end{pmatrix}$$

令 t=1，$(e^{A})^{-1}=e^{-A}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3e^{-5}+4e^{2}&4e^{-5}-4e^{2}\\3e^{-5}-3e^{2}&4e^{-5}+3e^{2}\end{pmatrix}$

利用公式 $|e^{\mathbf{A}}|=e^{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}$ 可知，$|e^{t\mathbf{A}}|=e^{\mathrm{tr}(t\mathbf{A})}=e^{(1+2)t}=e^{3t}$

例 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，求 $e^{t\mathbf{A}}$，$e^{\mathbf{A}}$ 与行列式 $\det(e^{\mathbf{A}})$

解：可知 $\lambda(A)=\{1,-2,1\}$，令 2 个不同根 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$，且 $\mathbf{A}$ 是单阵(?)

必有谱公式，$f(\mathbf{A})=f(1)\mathbf{G}_1+f(-2)\mathbf{G}_2$，

其中 $G_1=\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{3}(A+2)=\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$，$G_2=I-G_1=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}$

令 $f(x)=e^{tx}$，$f(1)=e^{t}$，$f(-2)=e^{-2t}$，代入 $\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{G}_2$ 得：

$$e^{t\mathbf{A}}=e^{t}\mathbf{G}_1+e^{-2t}\mathbf{G}_2=e^{t}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}+e^{-2t}\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{t}-e^{-2t}&2e^{t}-2e^{-2t}&0\\e^{-2t}-e^{t}&2e^{-2t}-e^{t}&0\\e^{-2t}-e^{t}&2e^{-2t}-2e^{t}&e^{t}\end{pmatrix}$$

令 t=1， $e^{\mathbf{A}} == \begin{pmatrix} 2e-e^{-2} & 2e-2e^{-2} & 0 \\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-e & 0 \\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-2e & e \end{pmatrix}$

可知， 行列式 $\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\mathrm{tr}(\mathbf{A})} = e^{0} = 1$

……………………………………………………………………………

习题 Ex1. 用谱公式计算 $e^{t\mathbf{A}}$ ， 求 $e^{\mathbf{A}}$ 与行列式 $\det(e^{\mathbf{A}})$

$$(1)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ (2)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ (3)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ (4)\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

习题 Ex2. 用谱公式计算 $e^{t\mathbf{A}}$ 与 $(e^{t\mathbf{A}})^{-1}$

$$(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, (3)A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (4)A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

………………………………………………………………………………………………

习题 Ex3. 用谱公式计算 $e^{t\mathbf{A}}$

$$(1)A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, (2)A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, (3)A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

习题 Ex4 求 $f(A)$ 的谱分解公式； 求 $\cos(\pi A)$

$$.(1)A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ (2)A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

思考题: 设 n 阶正规阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 求谱分解 $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$；根据 G_1, G_2

写出 A 的 n 个无关的特征向量； 求 $\sin(\pi A)$ 与 $\det(e^{\mathbf{A}})$

………………………………………………………………………………………………

下面讨论一类非单阵的 $f(A)$ 公式(广谱公式)

备注： 若 $\mathbf{A}$ 满足 $(\mathrm{A}-a\mathrm{I})^2(\mathrm{A}-b\mathrm{I}) = 0$, 且 $a \neq b$ ， 即 $\mathbf{A}$ 有 0 化式 $(x-a)^2(x-b)$

则有广谱公式： $f(\mathbf{A}) = f(a)\mathbf{G}_1 + f(b)\mathbf{G}_2 + f'(a)\mathrm{D}_1$， $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 = \mathbf{I}$

其中 $f(x)$ 为任一解析函数，$\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathrm{D}_1$ 为固定矩阵（叫广谱阵）

证明(略).

例1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求 $e^{t\mathbf{A}}$ 和 $e^{\mathbf{A}}$

解：特征多项式$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -1 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 4 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$，$\lambda(\mathbf{A}) = \{1,1,2\}$，

验$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$. $\mathbf{A}$ 不是单阵.

或，2 重根 $\lambda_1 = 1$的秩$r(A-I) = r\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 = 3-1 \neq 3-2, (n=3)$，故 A 非单

由 Cayley 公式可知 $(\mathrm{A}-1)^2(\mathrm{A}-2) = 0$，任解析函数 $f(x)$ 有广谱公式：

$$f(\mathbf{A}) = f(1)\mathbf{G}_1 + f(2)\mathbf{G}_2 + f'(1)D_1\text{，其中 } \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 = \mathbf{I}$$

可取不同的多项式来求$\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, D_1$

① 令 $f(x) = (x-1)(x-2)$，$f'(x) = (x-1)+(x-2) = 2x-3$，有 $f(1) = f(2) = 0$

$f'(1) = -1$，代入公式得：

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = -D_1$，可得

$$D_1 = -(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = -\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

② 令 $f(x) = (x-1)^2$，$f'(x) = 2(x-1)$，有 $f(1) = 0$，$f(2) = 1$，$f'(1) = 0$，代入公式得：

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2 = \mathbf{G}_2,$$

可求：$\mathbf{G}_2 = (\mathbf{A}-\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{G}_1=\mathbf{I}-\mathbf{G}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

或令 $f(x)=x-2$， $f'(x)=1$，即有 $f(1)=-1$， $f(2)=0$， $f'(1)=1$，代入公式得：

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=-\mathbf{G}_1+D_1,$$

得 $\mathbf{G}_1=D_1+2\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\2&0&-1\\-4&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

令 $f(x)=e^{tx}$，则 $f'(x)=te^{tx}$，故 $f(1)=e^t$， $f(2)=e^{2t}$， $f'(1)=te^t$ 。

$$f(\mathbf{A})=e^{t\mathbf{A}}=f(1)\mathbf{G}_1+f(2)\mathbf{G}_2+f'(1)D_1=e^tG_1+e^{2t}G_2+te^tD_1$$

即有 $e^{tA}=e^tG_1+e^{2t}G_2+te^tD_1=e^t\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+te^t\begin{pmatrix}-2&0&1\\2&0&-1\\-4&0&2\end{pmatrix}$

化简： $e^{tA}=\begin{pmatrix}e^t-2te^t&0&te^t\\e^t-e^{2t}+2te^t&e^{2t}&e^{2t}-e^t-te^t\\-4te^t&0&e^t+2te^t\end{pmatrix}$，

令 $t=1$，则 $e^{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}-e&0&e\\3e-e^2&e^2&e^2-2e\\-4e&0&3e\end{pmatrix}$.

例 2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$（非单阵），写出 $f(A)$ 的公式 ，求 $e^{t\mathbf{A}}$

解： $\lambda(\mathbf{A})=\{1,1,2\}$，令 $\lambda_1=1$， $\lambda_2=2$，由 Cayley 公式可知 $(\mathrm{A}-1)^2(\mathrm{A}-2)=0$

即有 0 化式 $(x-1)^2(x-2)$

必有广谱公式： $f(\mathbf{A})=f(1)\mathbf{G}_1+f(2)\mathbf{G}_2+f'(1)D_1$，其中 $\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2=\mathbf{I}$

现取不同的多项式来求 $\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2,D_1$

(1) 令 $f(x)=(x-1)(x-2)$， $f'(x)=(x-1)+(x-2)=2x-3$，有 $f(1)=f(2)=0$

$f'(1)=-1$，代入公式得： $(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=-D_1$，可得

$$D_1=-(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=-\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

(2) 令 $f(x)=(x-1)^2$，$f'(x)=2(x-1)$，有 $f(1)=0$，$f(2)=1$，$f'(1)=0$，代入公式得：

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2=\mathbf{G}_2$ ， 可求：

$$\mathbf{G}_2=(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}_1=\mathbf{I}-\mathbf{G}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

$$f(\mathbf{A})==f(1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+f(2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+f'(1)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

即有公式 $f(A)=\begin{pmatrix}f(1)&f'(1)&0\\0&f(1)&0\\0&0&f(2)\end{pmatrix}$.

令 $f(x)=e^{tx},\Rightarrow f'(x)=te^{tx},\ f(1)=e^t,\ f'(1)=te^t$

可知 $e^{tA}=\begin{pmatrix}e^t&te^t&0\\0&e^t&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}$

备注：令 $f(x)=x^{100}$，$f'(x)=100x^{99}$，即有 $f(1)=1, f(2)=2^{100}, f'(1)=100$

可知 $\mathbf{A}^{100}=\begin{pmatrix}1&100&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}$,

也可写 $\mathbf{A}^{100}$ 广谱分解：

$$\mathbf{A}^{100}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2^{100}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+100\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&100&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}$$

……………………………………………………………………………………

补充题：写出 $f(A)$ 的公式 ， 求 $e^{t\mathbf{A}}$

$$(1)\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix},\ (2)\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-4\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix},(3)\begin{pmatrix}1&2&-6\\1&0&-3\\1&1&-4\end{pmatrix},(4)A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$(5)A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},\quad (6)\ A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

思考题：求下面的 e^{tA}， $\sin A$

$$(1)A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}(\text{单阵});\quad (2)A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}(\text{非单阵})$$

提示(2)： $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$， $(A-2I)(A-I)\neq 0$，

由 Cayley 公式可知 $(A-2)^2(A-1)=0$， 即 0 化式为 $(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

可写广谱公式： $f(A)=f(1)G_1+f(2)G_2+f'(2)D$， $f(x)$ 为任意解析式

令 $f(x)=(x-2)^2$, 可知 $f(1)=1,\ f(2)=f'(2)=0$ 代入公式可得

$$G_1=(A-2I)^2=\cdots$$

再令 $f(x)=(x-2)(x-1)$, 可知 $f'(x)=(x-1)+(x-2),\ f'(2)=1$

代入公式可得 $D=(A-2I)(A-I)=\cdots$

令 $f(x)=(x-1)$, 可知 $f(1)=0,\ f(2)=1,\ f'(x)\ \equiv 1,\ f'(2)=1$

可得 $G_2+D=(A-I),\quad G_2=(A-I)(3I-A)=\cdots$

或 $G_2=I-G_1=I-(A-2I)^2=(A-I)(3I-A)$

可得： $f(A)=f(1)(A-2I)^2+f(2)(A-I)(3I-A)+f'(2)(A-2I)(A-I)$

可得化简公式： $f(A)=\begin{pmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{pmatrix}_{3\times 3}$

令 $f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x$ 代入公式得

$$\sin A=f(A)=f(1)G_1+f(2)G_2+f'(2)D$$
$$=\begin{pmatrix}\sin 2 & 12\sin 1-12\sin 2+13\cos 2 & -4\sin 1+4\sin 2\\ 0 & \sin 2 & 0\\ 0 & -3\sin 1+3sin2 & \sin 1\end{pmatrix}$$

思考题*：设 4 阶方阵 A 有特征根 $\lambda(A)=\{1,-1,0,0\}$，求 $\cos A,\quad \sin A$

提示：特式为 $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=(x^2-1)x^2$ 由 Cayley 公式知 $A^4-A^2=0\Rightarrow A^4=A^2$

再用 $\cos A,\quad \sin A$ 的定义化简计算.

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

补充题 Ex

Ex1. 证明公式 $(e^A)^H=e^{A^H}$

提示：用定义 $e^{\mathbf{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\Rightarrow(e^{\mathbf{A}})^H=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k)^H=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathbf{A}^k)^H=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathbf{A}^H)^k=?$

Ex2. 若 $A^H=A$(为hermite阵)，则 e^{iA}为优阵，即 $(e^{iA})^H=(e^{iA})^{-1}$, 或 $(e^{iA})^He^{iA}=I$

Ex3. 若 $A^H=-A$(斜hermite阵)，则 e^A为优阵，即 $(e^A)^H=(e^A)^{-1}$, 或 $(e^A)^He^A=I$

例如，若t为实数, 则$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{pmatrix}$为斜hermite阵($\mathrm{A}^H=-\mathrm{A}$), 可知

$$e^{\mathrm{A}}=e^{\begin{pmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{pmatrix}}=e^{t\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}=e^{tB}=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\text{为实优阵(正交阵)}$$

（给出 Ex2，Ex3 的严格证明）