SVD（奇异值分解）

预备知识复习

引理：①任一列向量 X 有： $X^H X=|X|^2=0 \Leftrightarrow X=0$

②$A^H Ax=0$ 与 $Ax=0$ 同解，即 $A^H Ax=0 \Leftrightarrow Ax=0$

③任一 $A=A_{m\times n}$ 有 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\bar{A})=\mathrm{rank}(A^H)$，

秩公式：$\mathrm{rank}(A^H A)=\mathrm{rank}(AA^H)=\mathrm{rank}(A)$

Pf：先证 $A^H Ax=0$ 与 $Ax=0$ 同解（利用 $X^H X=0 \Leftrightarrow X=0$）

∵ 由 $A^H Ax=0 \Rightarrow x^H A^H Ax=0 \Rightarrow (Ax)^H Ax=0 \Rightarrow Ax=0$（同解）

$\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(A^H A)=\mathrm{rank}(A)$

④$A^H A$，AA^H 都是 Hermit 半正定，且有相同正根！

可用结论“AB 与 BA 必有相同非 0 特根”

或∵ $|xI_m - A^H A|=x^{m-n}|xI_n - A^H A|$(换位公式)

⑤$A^H A=0 \Leftrightarrow A=0$

∵ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^H A)=0 \Rightarrow A=0$

（或用公式 $tr(A^H A)=tr(AA^H)=\sum|a_{ij}|^2$，知 $tr(A^H A)=0 \Rightarrow A=0$）

定义：设 $A=A_{m\times n}$，$A^H A$ 的特征值为 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n\ge 0$，

称 $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}$ 为 A 的奇异值（**可含有 0 奇异值**）.

若 $\mathrm{rank}(A^H A)=\mathrm{rank}(A)=r$，则恰有 r 个正根，$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_r>0$，$\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0$，称 $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_r}$ 为 A 的正奇异值（同样 AA^H 也有 r 个正根 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_r>0$）

奇异值分解 SVD 与简化“正 SVD”

正 SVD(又叫短 SVD)：设 $A=A_{m\times n}$， r =rank(A)>0，

正奇异值为 $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_r}$， 则有分解 $A=P\Delta Q^H$

其中$\Delta=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r}\end{pmatrix}$， $P=P_{m,r}$， $Q=Q_{n,r}$ 为半优阵 $P^HP=I_r\ =\ Q^HQ$

可写，**正 SVD 公式：** $$A=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r}\end{pmatrix}Q^H$$

Pf(思路)：∵hermite 分解：$Q^H(A^HA)Q=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$， Q为酉阵

可设$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_r>0$， $\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0$， r=rank(A)

写$Q=(q_1,\cdots,q_n)_{n\times n}$ （$Q^{-1}=Q^H$） 可知Q的列都是特征向量：

$\Rightarrow (A^HA)q_1=\lambda_1q_1,\cdots,(A^HA)q_r=\lambda_rq_r,$ 且$(A^HA)q_{r+1}=0,\cdots,(A^HA)q_n=0$

令 $Q=(q_1,\cdots,q_r)_{n\times r}$ 为半优阵

令 $P=\left(\dfrac{Aq_1}{|Aq_1|},\cdots,\dfrac{Aq_r}{|Aq_r|},\right)_{m\times r}$ 也为半优，验证如下

∵内积$(Aq_1,Aq_2)=(Aq_2)^H(Aq_1)=q_2^H(A^HA)q_1\Rightarrow\lambda_1(q_2^Hq_1)=0$ （正交），

即 $Aq_1\perp Aq_2$，同理也有其它正交： $Aq_1\perp Aq_r$ 等等

∴P 为半优

又知： $|Aq_1|^2=(Aq_1)^H(Aq_1)=q_1^H(A^HA)q_1\Rightarrow\lambda_1|q_1|^2=\lambda_1>0$

$\Rightarrow|Aq_1|=\sqrt{\lambda_1}$， 同理 $|Aq_2|=\sqrt{\lambda_2},\cdots,|Aq_r|=\sqrt{\lambda_r}>0$

St.可知 $\Rightarrow P=\left(\dfrac{Aq_1}{|Aq_1|},\cdots,\dfrac{Aq_r}{|Aq_r|},\right)=\left(\dfrac{Aq_1}{\sqrt{\lambda_1}},\cdots,\dfrac{Aq_r}{\sqrt{\lambda_r}},\right)_{m\times r}$ （为半优）

注：由同解定理“$A^HAx=0\Leftrightarrow Ax=0$”可知

∴

$$A^H A q_{r+1} = \cdots = A^H A q_n = 0 \Rightarrow A q_{r+1} = \cdots = A q_n = 0$$

$$\Rightarrow A(q_1 q_1^H + \cdots + q_r q_r^H) = A(q_1 q_1^H + \cdots + q_r q_r^H + q_{r+1} q_{r+1}^H + \cdots\cdots q_n q_n^H)$$

且 $q_1 q_1^H + \cdots + q_r q_r^H + q_{r+1} q_{r+1}^H + \cdots\cdots q_n q_n^H = (q_1, \cdots, q_n) \begin{pmatrix} q_1^H \\ \vdots \\ q_n^H \end{pmatrix} = \mathrm{Q}\mathrm{Q}^H = I_n = I$

$\therefore$ $A(q_1 q_1^H + \cdots + q_r q_r^H + q_{r+1} q_{r+1}^H + \cdots\cdots q_n q_n^H) = AI = A$

计算可知 $P\Delta Q^H = \left(\dfrac{Aq_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \cdots, \dfrac{Aq_r}{\sqrt{\lambda_r}},\right) \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^H \\ \vdots \\ q_r^H \end{pmatrix} = A(q_1 q_1^H + \cdots + q_r q_r^H) = AI = A$

其中 $Q^H = (q_1, \cdots, q_r)^H = \begin{pmatrix} q_1^H \\ \vdots \\ q_r^H \end{pmatrix}$, $\quad \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} \end{pmatrix}$

即得正 **SVD 公式:** $A = P\Delta Q^H = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} \end{pmatrix} Q^H$ 证毕.

SVD 公式（奇异分解）设 $A = A_{m\times n}$ 正奇值为 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_r} > 0$，r=rank(A)，则有 2 个优阵，W=$W_{m\times m}$ 与 V=$V_{n\times n}$ St 使得

$$A = WDV^H \quad , \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

可写 **SVD 公式**

$$A = \mathrm{W} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \mathrm{V}^H, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

备注：也可写 **SVD 公式**（奇异分解）如下

$$A=P\begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}Q^H,\ \Delta=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r}\end{pmatrix}$$

$P=P_{m,m}$，$Q=Q_{n,n}$ 为 2 个优阵

....

或写 **SVD 公式**：存在 $P=P_{m,m}$，$Q=Q_{n,n}$ 为 2 个优阵，使得

$$A=PDQ^H,\quad D=\begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}.$$

....

Pf 证：由正 **SVD**：$A=P\Delta Q^H$，分别把 P，Q 扩充为优阵如下：

令 W $=P=$（P，Y）$_{m\times n}$， $V=Q=$（Q， X）$_{n\times n}$ （扩充不唯一）

即 W$=P$，$V=Q$ 为 2 个优阵，　且 $V^H=(Q,\ X)^H=\begin{pmatrix}Q^H\\ X^H\end{pmatrix}$

验知：$WDV^H=(P,\ \ Y)\begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix}Q^H\\ X^H\end{pmatrix}=P\Delta Q^H=A$

即得 **SVD 公式**：$A=PDQ^H$ **或** $A=WDV^H$ 　　证毕.

分解方法：

1、　求（A^HA）的特征值 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_r>0$，r=rank(A)，正奇值为 $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_r}$

2、　求 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 对应正交特向：$X_1,\cdots,X_r$（不必单位化）

3、　令列优阵：$Q=\left(\frac{X_1}{|X_1|},\cdots,\frac{X_r}{|X_r|}\right)$； 与 $P=\left(\frac{AX_1}{|AX_1|},\cdots,\frac{AX_r}{|AX_r|}\right)$

则有**正 SVD：** $A=P\Delta Q^H$，其中$\Delta=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r}\end{pmatrix}$

4、 可用观察扩充法求 2 个 U 阵：$W=(P,\ Y)$，$V=(Q,\ X)$

可得 **SVD 公式** $A=WDV^H$， $D=\begin{pmatrix}\Delta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}$

备注：对于 $V=(Q,\ X)$，可解 AX=0 得到 X（$\because AX=0\Leftrightarrow A^H AX=0$）；

对于 $W=(P,\ Y)$，可解 $A^H Y=0$ 得 Y （$\because A^H Y=0\Leftrightarrow AA^H Y=0$）

Eg：① $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times 2}$ ，② $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$求正 **SVD 与**奇异分解（**SVD**）

解：$A^H A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$为秩 1 阵，根$\lambda(A^H A)=\{4,0\}$， 正奇值为$\sqrt{4}=2$

$\lambda=4$有特征向量$X_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$， 令$Q=\left(\dfrac{X_1}{|X_1|}\right)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，

$$令\ P=\left(\frac{AX_1}{|AX_1|}\right)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$**正 SVD：** $A=P\Delta Q^H=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}(2)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}^H=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}(2)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

扩充为 2 个优阵：$V=(Q,\ \ X)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，（$V^H=V$？）

$$W=(P,\quad Y)=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\text{(优阵)}$$ 不唯一

$\Rightarrow$ **SVD:**

$$A=WDV^H=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

②同理可求 B^HB 的值{4，0，0}，……略去

备注：可用转置法：令 $B^H=A=W\mathbf{D}V^H$

$\Rightarrow$ $B=A^H=(W\mathbf{D}V^H)^H=V\mathbf{D}^H W^H$，得 B 的 **SVD** 为

$$B=VD^HW^H=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ex：求奇异分解 **SVD**

1、① $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，② $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；

2、 $(1)A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$， $(2)A=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$， $(3)A=\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ $(i^2=-1)$

（解答见其它部分）

例： $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ r(A)=2, 求正 SVD 与 SVD

$$\because A^H A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=5,\lambda_2=1$（ 奇异值 $\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{5},\sqrt{\lambda_2}=1$）

$(A^H A)=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}$有 2 个特征向量 $x_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$， $x_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ （正交）

令 $Q=\left(\frac{x_1}{|x_1|},\frac{x_2}{|x_2|}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$Ax_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\quad Ax_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$|Ax_1|=\sqrt{5}\quad |Ax_2|=1$

$P=\left(\frac{Ax_1}{|Ax_1|},\frac{Ax_2}{|Ax_2|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&1\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0\end{pmatrix}_{3\times2}$ （半 U）

可得正 SVD：

$$A=P\Delta Q^H=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&1\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^H$$

注：可把 P 扩充为 U 阵 P 如下：

$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&1&0\\\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{-1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&\sqrt{5}&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$ (U 阵) 不唯一

令 $Q=Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，D=$\begin{pmatrix}\Delta\\0\end{pmatrix}_{3\times2}$， 可得 S V D：

$$A=PDQ^{H}=P\begin{pmatrix}\Delta\\0\end{pmatrix}_{3\times2}Q^{H}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&\sqrt5&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt5&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{H}$$

例：$A=\begin{pmatrix}2i&1\\1&i\\1&i\end{pmatrix}$（$r(A)=2$）求正 SVD 与 SVD

$\because A^{H}A=\begin{pmatrix}-2i&1&1\\1&-i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2i&1\\1&i\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\0&3\end{pmatrix}$为对角形!，可知$\lambda_1=6,\lambda_2=3$

（ 奇异值$\sqrt{\lambda_1}=\sqrt6,\sqrt{\lambda_2}=\sqrt3$）有 2 个特向$x_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$（正交）

令$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$Ax_1=\begin{pmatrix}2i\\1\\1\end{pmatrix}$　$Ax_2=\begin{pmatrix}1\\i\\i\end{pmatrix}$

$|Ax_1|=\sqrt6$　$|Ax_2|=\sqrt3$

令$P=\left(\frac{Ax_1}{|Ax_1|},\frac{Ax_2}{|Ax_2|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{2i}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{i}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{i}{\sqrt3}\end{pmatrix}$（半 U 阵）

正 SVD 为　　$A=P\Delta Q^{H}$ ，　　$\Delta=\begin{pmatrix}\sqrt6&\\&\sqrt3\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2i}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{i}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{i}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt6&\\&\sqrt3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{H}$$

可知 SVD 为　$A=PDQ^{H}=\begin{pmatrix} \frac{2i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{H}$

特别有：$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\neq 0$（非 0 列向量），　求正 SVD

$$A^{H}A=\begin{pmatrix} \overline{a_1} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\left(|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2\right)>0$$

$\lambda_1=|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2$（奇异值 $\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2}$）

令 $\Delta=\sqrt{\lambda_1}$ 令 $Q_1=(1), x_1=1$ 令 $P=\dfrac{1}{\sqrt{|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2}}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$（半优阵）

正 SVDS：$A=P_1\Delta Q_1^{H}=\dfrac{1}{\sqrt{|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2}}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\Delta(1)^{H}$

可写列向量 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，且 $|\alpha|^2=\alpha^{H}\alpha=|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2$

它的正 SVD 为　$\alpha=\dfrac{\alpha}{|\alpha|}(|\alpha|)(1)^{H}$

注：若已知（正 SVD）$A=P_1\Delta Q_1^{H}$ 可得 $A^{H}=Q_1\Delta P_1^{H}$ $(\because \Delta^{H}=\Delta)$

即 A^{H} 的 SVD 可用 A 的 SVD 导出，在计算时，只要求 A^{H} 与 A 中任一个 SVD 即可.

例：$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ 求 SVD

注：（$r(A)=1$ 只有一个正奇异值 $\sqrt{\lambda_1}>0$）

$$A^H A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ 秩 1 阵

$\lambda_1=10,\lambda_2=0,\lambda_3=0$ $\lambda(A^H A)=\{10,0,0\}$ ，正奇异值：$\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{10}>0$

$\because A^H A=5(\alpha\beta)=5\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}(1\quad 0\quad -1)$ 有特向 $x_1=\alpha=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

$$Ax_1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\frac{Ax_1}{|Ax_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix},\quad \frac{x_1}{|x_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

令 $\Delta=(\sqrt{\lambda_1})=\sqrt{10}$

令 $P=\left(\frac{Ax_1}{|Ax_1|}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$ ，　$Q=\left(\frac{x_1}{|x_1|}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

正 S V D 为　　$A=P\Delta Q^H=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}(\sqrt{10})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}^H$

把 P 扩充为 U 阵 P （不唯一）；把 Q_1 扩充为 U 阵 Q （不唯一）

$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ，$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

的 SVD：$A=P\begin{pmatrix}\Delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q^H=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{10} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^H$

注：A^H 的 SVD 为　$A^H=Q\begin{pmatrix}\sqrt{10} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^H$

例：求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ 与 B=$A^H=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的正 SVD 与 SVD

注：$r(A)=1$， 只有一个正奇异值 $\sqrt{\lambda_1}>0$

$$A^H A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ （对角阵）

$\lambda_1=13,\lambda_2=0,\lambda_3=0 \quad \lambda(A^H A)=\{13,0,0\} \quad \Delta=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{13}$ 有 特 征 向 量 $x_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

（$|x_1|=1$）， $Ax_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |Ax_1|=\sqrt{13}$

令 $P_1=\left(\frac{Ax_1}{|Ax_1|}\right)=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ， $Q_1=x_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

正 SVD：$A=P_1\Delta Q_1{}^H=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}(\sqrt{13})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^H$

$$A^H=Q_1{}^H\Delta P_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(\sqrt{13})\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}^H$$

把 P_1 扩充为 U 阵（不唯一），把 Q_1 扩充为 U 阵 Q（不唯一）

$P=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$， $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$

得 SVD：$A=P\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^H=P\begin{pmatrix} \sqrt{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}I^H$

且有 $A^H=Q\begin{pmatrix} \sqrt{13} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^H$

补充 Ex ： 1． $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

验证：$\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ex 2. 令 $\boldsymbol{A}$ 为一个矩阵，奇异值分解为

$$\mathrm{A}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

用奇异值分解：（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的秩；

（2）求值域 $\boldsymbol{R(A)}$ 的一组规范正交基

（提示：用正ＳＶＤ：$A=\mathrm{P}\Delta\mathrm{Q}^{H}$，P 中的列就是一组规范正交基）.