5. 奇异值分解（SVD）和简化奇值分解(正 SVD)

（1）奇异值分解 SVD：设 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 秩为 $r(\mathbf{A})=r$，即 $\mathbf{A}$ 有 r 个正奇异值，其余奇异值为 0，

则存在 m 阶酉阵 $\mathbf{P}$ 和 n 阶酉阵 $\mathbf{Q}$，使 $\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}\mathbf{\Delta} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times n}\mathbf{Q}^H$，其中

$$\mathbf{\Delta}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r}\end{pmatrix}_{r\times r}.$$

证明略

（2）可写奇值分解：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{\Delta} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2\end{pmatrix}^H$，其中 $\mathbf{P}_1$ 为 r 列半酉阵，

$\mathbf{Q}_1$ 为 r 列半酉阵，

可得：简化奇值分解(又叫正 SVD)：$\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}_1^{\ H}$.

（3）$\mathbf{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r(\mathbf{A})=r$，奇异值 SVD 分解方法：

①先求 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 的正特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 及对应的特向量 $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\cdots,\mathbf{X}_r$，即有正奇值 $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_r}$；

②令 $\mathbf{Q}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{X}_1}{|\mathbf{X}_1|} & \dfrac{\mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_2|} & \cdots & \dfrac{\mathbf{X}_r}{\mathbf{X}_r}\end{pmatrix}_{n\times r}$ 为半酉阵，$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{AX}_1}{|\mathbf{AX}_1|} & \dfrac{\mathbf{AX}_2}{|\mathbf{AX}_2|} & \cdots & \dfrac{\mathbf{AX}_r}{|\mathbf{AX}_r|}\end{pmatrix}_{m\times n}$ 为半酉阵；

③可得简奇值分解也叫“正奇值分解”（正 SVD）：$\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}_1^{\ H}$，且有 $\mathbf{A}^H=\mathbf{Q}_1\mathbf{\Delta}\mathbf{P}_1^{\ H}$，

其中 $\mathbf{\Delta}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r}\end{pmatrix}_{r\times r}$；

④将半酉阵 $\mathbf{P}_1$ 和 $\mathbf{Q}_1$ 扩为酉阵 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2\end{pmatrix}$，得 SVD：

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Delta} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times n}\mathbf{Q}^H$$

例 1：求 $\mathbf{A}$ 的 SVD：① $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}$；② $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2\mathrm{i}&1\\1&\mathrm{i}\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix}$；③ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$；④ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$。

解:① $r(\mathbf{A})=2$，$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}$，特根 $\lambda_1=5$，对应特向为 $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$；特征根 $\lambda_2=1$，对应特向 $\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&1\end{pmatrix}$。令 $\mathbf{Q}_1=\begin{pmatrix}\frac{\mathbf{X}_1}{|\mathbf{X}_1|}&\frac{\mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$；

$\mathbf{AX}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\mathbf{AX}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，令

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{\mathbf{AX}_1}{|\mathbf{AX}_1|}&\frac{\mathbf{AX}_2}{|\mathbf{AX}_2|}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{5}\\2&0\end{pmatrix}$$

正 SVD 为 $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\boldsymbol{\Delta}\mathbf{Q}_1^H=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{5}\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^H$。把 $\mathbf{P}_1$ 扩为酉阵 $\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&\sqrt{5}&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_1$，

SVD 为 $\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Delta}\\0\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&\sqrt{5}&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^H$。

② $r(\mathbf{A})=r$， $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2\mathrm{i} & 1 & 1\\ 1 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\mathrm{i} & 1\\ 1 & \mathrm{i}\\ 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，特征根 $\lambda_1=6$，对应特向为

$\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$；特征根 $\lambda_2=3$，对应特向量 $\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，即 $\mathbf{\Delta}=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$。令

$\mathbf{Q}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{X}_1}{|\mathbf{X}_1|} & \dfrac{\mathbf{X}_2}{|\mathbf{X}_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；

$\mathbf{AX}_1=\begin{pmatrix}2\mathrm{i} & 1\\ 1 & \mathrm{i}\\ 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\\1\\1\end{pmatrix}$， $\mathbf{AX}_2=\begin{pmatrix}2\mathrm{i} & 1\\ 1 & \mathrm{i}\\ 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$，令

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{AX}_1}{|\mathbf{AX}_1|} & \dfrac{\mathbf{AX}_2}{|\mathbf{AX}_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}。$$

正 SVD 为： $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}_1^{\ H}=\begin{pmatrix}\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^H$ 把 $\mathbf{P}_1$ 扩为酉阵

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}，\quad \mathbf{Q}=\mathbf{Q}_1，$$

SVD 为 $\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}\mathbf{\Delta}\\ 0\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\begin{pmatrix}\dfrac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^H$。

③ $r(\mathbf{A})=1$， $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&0&0\\-5&0&5\end{pmatrix}$，特征根 $\lambda_1=10$，特向量为 $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$。即 $\mathbf{\Delta}=\left(\sqrt{10}\right)$。令 $\mathbf{Q}_1=\left(\dfrac{\mathbf{X}_1}{|\mathbf{X}_1|}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$；

$\mathbf{AX}_1=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$，令 $\mathbf{P}_1=\left(\dfrac{\mathbf{AX}_1}{|\mathbf{AX}_1|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$。正

正 SVD 为： $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}_1^H=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\left(\sqrt{10}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}^H$。

把 $\mathbf{P}_1$ 扩为酉阵 $\mathbf{P}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix}$，把 $\mathbf{Q}_1$ 扩为酉阵 $\mathbf{Q}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\sqrt{2}&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

得 SVD： $\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}\mathbf{\Delta}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{10}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\sqrt{2}&0\\-1&0&1\end{pmatrix}^H$。

④ $r(\mathbf{A})=1$, $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,特征根 $\lambda_1=13$,特向为 $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$。

即 $\mathbf{\Delta}=\left(\sqrt{13}\right)$。令 $\mathbf{Q}_1=\left(\dfrac{\mathbf{X}_1}{|\mathbf{X}_1|}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$； $\mathbf{AX}_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，令

$\mathbf{P}_1=\left(\dfrac{\mathbf{AX}_1}{|\mathbf{AX}_1|}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$。得正 SVD：

$\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}_1^H=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\left(\sqrt{13}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^H$ 把 $\mathbf{P}_1$ 扩为酉阵 $\mathbf{P}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2&3\\3&-2\end{pmatrix}$ 把 $\mathbf{Q}_1$ 扩为酉阵

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

SVD 为：$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Delta}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2&3\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{13}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^H$.

且 $\mathbf{A}^H=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Delta}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^H\mathbf{P}^H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{13}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2&3\\3&-2\end{pmatrix}^H$。

6. 满秩分解

（1）定义：矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r(\mathbf{A})=r$，有 $\mathbf{B}_{m\times r}$ 和 $\mathbf{C}_{r\times n}$ 使得 $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$，且 $r(\mathbf{B})=r(\mathbf{C})=r$。

证明：有简易 SVD 可得：$\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\boldsymbol{\Delta}\mathbf{Q}_1{}^H$，其中 $\boldsymbol{\Delta}$ 为 r 阶对角阵，$\mathbf{P}_1\in\mathbf{C}^{m\times r}$，$\mathbf{Q}_1\in\mathbf{C}^{n\times r}$。

令：$\mathbf{B}=\mathbf{P}_1\in\mathbf{C}^{m\times r}$，$\mathbf{C}=\boldsymbol{\Delta}\mathbf{Q}_1{}^H\in\mathbf{C}^{r\times n}$，即可得：$\mathbf{A}=\mathbf{BC}$。

（2）分解方法：①将 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 通过行变换得矩阵 $\mathbf{S}_{m\times n}$，要求 $\mathbf{S}_{m\times n}$ 中 r 行以下元素全为 0，并且有 r 列元素只有 1 的线性无关的单位向量；②在矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 中取出与 $\mathbf{S}_{m\times n}$ 中单位向量对应列的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，令 $\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_r)$，$\mathbf{C}$ 为 $\mathbf{S}_{m\times n}$ 中的前 r 行组成的矩阵，即可得：$\mathbf{A}=\mathbf{BC}$。

例 1：求矩阵满秩分解：① $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$；② $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&6&1&0\\3&2&10&1&0\\2&3&10&-1&3\\4&4&16&0&-1\end{pmatrix}$；③ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$；

④ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&2&1&4\\2&6&1&0&7\\3&9&3&1&11\end{pmatrix}$；⑤ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\2&-2&4&6\\1&-1&2&3\end{pmatrix}$；⑥ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$。

解：① $r(\mathbf{A})=2$，$\because\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:c}1&1&2\\0&1&1\\1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{cc:c}1&0&1\\0&1&1\\\hdashline 0&0&0\end{array}\right)$，$\therefore\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$。

② $r(\mathbf{A})=3$，

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 10 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 16 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2(2r_1-r_2)]{\substack{2r_1-r_2 \\ r_4-2r_1 \\ r_2-3(2r_1-r_2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_4 \\ r_3-r_4-4r_2 \\ r_4-(2r_3-r_2) \\ r_2\sim r_3}} \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

，取第 1, 2, 5 列, 可得分解

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

③ $r(\mathbf{A})=1$， $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$。

④ $r(\mathbf{A})=2$ ，

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 9 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_3-r_2-r_1 \\ -(r_2-2r_1)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-4r_2} \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 3 & -10 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

取第 1, 5 列, 可得分解

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}。$$

⑤ $r(\mathbf{A})=1$， $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$。

⑥ $r(\mathbf{A})=1$， $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$。