本节主要内容：矩阵函数求导公式

设 $m\times n$ 矩阵 $A(x)=(a_{ij}(x))_{m\times n}$ 的元素都是 x 的可导函数，

定义 $A(x)$ 关于 x 的**求导为：**

$$A'(x)=\frac{d}{dx}A(x)=(\frac{d}{dx}a_{ij}(x))_{m\times n}$$

同样，若 $A(x)=(a_{ij}(x))_{m\times n}$ **元素都在区间** $[a,b]$ **连续，**它在区间 $[a,b]$ 的积分记为

$$\int_a^b A(x)dx=(\int_a^b a_{ij}(x)dx)_{m\times n}$$

例如，$A(x)=\begin{pmatrix}\cos x & 2x & 0\\ e^x & 1/x & 0\\ 0 & 1 & x^2\end{pmatrix}$ 关于 x 的**求导为**

$$A^{'}(x)=\frac{d}{dx}A(x)=\begin{pmatrix}-\sin x & 2 & 0\\ e^x & -1/x^2 & 0\\ 0 & 0 & 2x\end{pmatrix};$$

且 $A(x)$ 在区间 $[a,b],(0<a<b)$ 的积分为

$$\int_a^b A(x)dx=(\int_a^b a_{ij}(x)dx)_{3\times 3}=\begin{pmatrix}\int_a^b\cos xdx & \int_a^b 2xdx & 0\\ \int_a^b e^x dx & \int_a^b 1/xdx & 0\\ 0 & \int_a^b 1dx & \int_a^b x^2dx\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sin b-\sin a & (b^2-a^2) & 0\\ e^b-e^a & \ln b-\ln a & 0\\ 0 & b-a & (b^3-a^3)/3\end{pmatrix}.$$

备注(引理)：$A'(x)=\dfrac{d}{dx}A(x)\equiv 0$(恒为0) $\Leftrightarrow$ $A(x)$=D(常数矩阵)

定理 设 $A(x)=(a_{ij}(x))_{n\times n}$，$B(x)=(b_{ij}(x))_{n\times n}$ 在区间 $[a,b]$ 可导，则有

1). $\dfrac{d}{dx}(A(x)+B(x))=\dfrac{d}{dx}A(x)+\dfrac{d}{dx}B(x)=A'(x)+B'(x)$.

2). $\dfrac{d}{dx}(A(x)\cdot B(x))=\dfrac{d}{dx}A(x)\cdot B(x)+A(x)\cdot\dfrac{d}{dx}B(x)$

即 $$\frac{d}{dx}(A(x)\cdot B(x)) = A'(x)\cdot B(x) + A(x)\cdot B'(x)$$

特别若函数 $f(x)$ 可导，则有

$$\frac{d}{dx}(f(x)A(x)) = f'(x)A(x) + f(x)A'(x) .$$

3). 若 $x = g(t)$ 关于参数 t 可导，则

$$\frac{d}{dt}(A(x)) = g'(t)\cdot\frac{d}{dx}A(g(t)) .$$

4). $\int_a^b (A(x)+B(x))dx = \int_a^b A(x)dx + \int_a^b B(x)dx$,

且 $\int_a^b \lambda A(x)dx = \lambda\int_a^b A(x)dx$.

5). $\int_a^b A(x)Ddx = \int_a^b A(x)dx\cdot D$，且 $\int_a^b DA(x)dx = D\cdot\int_a^b A(x)dx$.

其中 D 为常数矩阵

6). 若 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则

$$\frac{d}{dx}(\int_a^x A(t)dt) = A(x) , \qquad x\in(a,b)$$

7).若 $A'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则有 $\int_a^b A'(x)dx = A(b) - A(a)$ (N--L公式)

8).若 $A^{-1}(x)$ 可导，则 $\frac{d}{dx}(A^{-1}(x)) = -A^{-1}(x)(\frac{d}{dx}A(x))A^{-1}(x)$

Pf 证. 1)--- 7) (显然成立) 略，只证 8).

8).$\because A(x)\cdot A^{-1}(x) = I$，利用公式 2)可知

$$A'(x)\cdot A^{-1}(x) + A(x)\cdot\frac{d}{dx}(A^{-1}(x)) = 0 .$$

即有 $$\frac{d}{dx}(A^{-1}(x)) = -A^{-1}(x)(\frac{d}{dx}A(x))\cdot A^{-1}(x) .$$

………………………………………………………………………………………

备注：对于含参数 t 的矩阵 A(t)，B(t) 有如下记号与法则.

定义：元素$a_{ij}(\mathrm{t})$以t为变元的矩阵$\mathrm{A(t)}=(a_{ij}(\mathrm{t}))_{m\times n}$称为函数矩阵，

若每个$a_{ij}(\mathrm{t})$在[a, b]上是连续，可导，可积时，则称A(t)在[a,b]上．

连续，可导，可积. 定义

$$\mathrm{A'(t)}=\frac{d}{dt}\mathrm{A(t)}=(a'_{ij}(\mathrm{t}))_{m\times n};\qquad \int_a^b \mathrm{A(t)}dt=(\int_a^b a_{ij}(\mathrm{t})dt)_{m\times n}.$$

命题1. 设A(t)，B(t)为适当阶的可导矩阵，则

1) $\frac{d}{dt}(\mathrm{A(t)}+\mathrm{B}(t))=\frac{d}{dt}\mathrm{A(t)}+\frac{d}{dt}\mathrm{B(t)};$

2) $\frac{d}{dt}(\mathrm{A(t)B(t)})=\left(\frac{d\mathrm{A}(t)}{dt}\right)\mathrm{B(t)}+\mathrm{A}(t)\frac{d}{dt}\mathrm{B(t)};$

特别，$\lambda(t)$为可导函数，则$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathrm{A(t)})=\frac{d\lambda(t)}{dt}\mathrm{A(t)}+\lambda(t)\frac{d}{dt}\mathrm{A(t)}$

3) $\mathrm{u}=f(t)$可导时，$\frac{d}{dt}(\mathrm{A(u)})=f'(t)\frac{d}{du}\mathrm{A(u)};$

4) $\int_a^b \mathrm{A}'(t)dt=\mathrm{A(b)}-\mathrm{A(a)}$ (N-L公式).

………………………………………………………………………………………

常见 3 个矩阵函数(含有参数 t)：$f(At)=e^{tA},\cos(tA),\sin(tA)$

定理　设方阵$\mathrm{A}\in\mathrm{C}^{n\times n}$，则

1) $\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{\mathrm{At}}=\mathrm{Ae}^{\mathrm{At}}=\mathrm{e}^{\mathrm{At}}\mathrm{A}$；

2) $\frac{d}{dt}\sin\mathrm{At}=\mathrm{AcosAt}=(\mathrm{cosAt})\mathrm{A}$；

3) $\frac{d}{dt}\mathrm{cosAt}=-\mathrm{AsinAt}=-(\mathrm{sinAt})\mathrm{A};$

可写求导公式：$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}=e^{tA}A;$

$$\frac{d}{dt}(\cos tA)=-A\sin tA$$

$$\frac{d}{dt}(\sin tA)=A\cos tA$$

备注 1：在公式$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}=e^{tA}A$中，用$(-A)$代替$A$可得：

$$\frac{d}{dt}e^{-tA}=-Ae^{tA}=-e^{tA}A$$

备注 2：$\because\frac{d}{dt}(e^{-tA}\mathrm{X(t)})=-Ae^{-tA}\mathrm{X(t)}+e^{-tA}\mathrm{X}'(\mathrm{t})=e^{-tA}(\mathrm{X'(t)}-A\mathrm{X(t)})$ 可得

常用公式：$e^{-tA}(X'(t)-AX(t))=\frac{d}{dt}(e^{-tA}X(t))$

证：只证1)，由$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$得

$$\frac{d}{dt}e^{At}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k=A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}=Ae^{At}=e^{At}A$$ 证毕

备注：也可写：$\frac{d}{dt}e^{tA}=\left(e^{tA}\right)'_t=\mathbf{A}e^{tA}=e^{tA}\mathbf{A}$，

$$\because \sin t\mathbf{A}=\frac{1}{2i}\left(e^{it\mathbf{A}}-e^{-it\mathbf{A}}\right),\quad \cos t\mathbf{A}=\frac{1}{2}\left(e^{it\mathbf{A}}+e^{-it\mathbf{A}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\sin t\mathbf{A}=\frac{1}{2i}\left(e^{it\mathbf{A}}-e^{-it\mathbf{A}}\right)'=\frac{1}{2i}\left(i\mathbf{A}e^{it\mathbf{A}}+i\mathbf{A}e^{-it\mathbf{A}}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{A}\left(e^{it\mathbf{A}}+e^{-it\mathbf{A}}\right)=\mathbf{A}\cos t\mathbf{A}$$

$$\frac{d}{dt}\cos t\mathbf{A}=\frac{1}{2}\left(e^{it\mathbf{A}}+e^{-it\mathbf{A}}\right)'=\frac{1}{2}\left(e^{it\mathbf{A}}i\mathbf{A}-e^{-it\mathbf{A}}i\mathbf{A}\right)=\frac{i}{2}\left(e^{it\mathbf{A}}-e^{-it\mathbf{A}}\right)\mathbf{A}=-\left(\sin t\mathbf{A}\right)\mathbf{A}$$

……………………………………………………………………………………..

备注：若已知 $f(At)=W(t)$，两边求导 $\frac{d}{dt}f(tA)=\frac{d}{dt}W(t)\Rightarrow f'(tA)A=W'(t)$

令 $t=0$ 代入可得公式 $f'(0)A=W'(0)$

特别，若 $e^{tA}=W(t)$ 两边求导 $\frac{d}{dt}e^{tA}=\frac{d}{dt}W(t)\Rightarrow e^{tA}A=W'(t)$

令 $t=0$ 代入可得 $A=W'(0)$

例 已知 $e^{tA}=W(t)$ 求 A

(1) $e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos at & -\sin at\\ \sin at & \cos at\end{pmatrix}$， (2) $e^{tA}=\begin{pmatrix}1+t & -t\\ t & 1-t\end{pmatrix}$

解： (1) 两边求导 $\frac{d}{dt}e^{tA}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos at & -\sin at\\ \sin at & \cos at\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{tA}A=\begin{pmatrix}(\cos at)' & -(\sin at)'\\ (\sin at)' & (\cos at)'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\sin at & -a\cos at\\ a\cos at & -a\sin at\end{pmatrix}$$

令 $t=0$ 代入可得 $A=\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}$

(2) 两边求导 $\frac{d}{dt}e^{tA}=\begin{pmatrix}1+t & -t\\ t & 1-t\end{pmatrix}'\Rightarrow e^{tA}A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

令 $t=0$ 代入可得 $A=\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

补充题 Ex：已知 $e^{tA}=W(t)$ 求 A

$$(1)e^{tA}=\begin{pmatrix} e^t & e^t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},(2)\ e^{tA}=e^{-t}\begin{pmatrix} 1+2t & 2t & -6t \\ t & 1+t & -3t \\ t & t & 1-3t \end{pmatrix},(3)e^{tA}=e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}$$

提示(3)：先求导 $(e^{tA})'=A\cdot e^{tA}=2\cdot e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

令 $t=0$ 代入可得：$(e^{tA})'|_{t=0}=A\cdot e^0=2\cdot e^0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+e^0\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

思考题：已知 $\sin tA=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6\sin 2t & 4\sin 2t-2\sin t & 2\sin 2t-4\sin t \\ 0 & 0 & 6\sin t \\ t & 6\sin t & 0 \end{pmatrix}$，求 A

一阶线性常系数微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt}=a_{11}x_1(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t)+f_1(t), \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt}=a_{n1}x_1(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t)+f_n(t) \end{cases}$$

满足初始条件 $x_i(t_0)=c_i, i=1,\dots,n$

由微分方程的理论知，上述方程的解是存在的，稳定的，
且满足初始条件的解是唯一的.

令 $A=(a_{ij})_{n\times n}, \vec{c}=(c_1,\cdots,c_n)^T, x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^T, f(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))^T$.

上述方程可写为矩阵方程 $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t), \\ x(t_0)=\vec{c}\text{(初始条件)} \end{cases}$

备注：其中 $f(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))^T$ 叫非齐次项，

若 $f(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))^T=\vec{0}$

可得齐次微分方程$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ x(t_0) = \vec{c} \end{cases}$

求解齐次微分方程

引理：若 $\dfrac{dA(t)}{dt} = A'(t) \equiv 0$，则 $A(t) \equiv C$（常数矩阵）

定理 1：齐次方程 $\dfrac{dx}{dt} = Ax, x(0) = \vec{c}$, 其中 $x = \left(x_1(t), \cdots, x_n(t)\right)^T, A = A_{n\times n}$ 为常数矩阵

有唯一解公式：$x = e^{At}\vec{c}$ 即 $x = e^{At}x(0)$

Pf：$\because \dfrac{dx}{dt} = Ax \Leftrightarrow \dfrac{dx}{dt} - Ax = 0 \Leftrightarrow e^{-tA}(\dfrac{dx}{dt} - Ax) = 0$

利用公式：$e^{-tA}(\mathrm{X}'(\mathrm{t}) - A\mathrm{X}(\mathrm{t})) = \dfrac{d}{dt}(e^{-tA}\mathrm{X}(\mathrm{t}))$

可写方程 $e^{-tA}(\dfrac{dx}{dt} - Ax) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}(e^{-tA}x) = 0$

由引理可知 $e^{-tA}x = C$ 常数矩阵 $\Leftrightarrow x = e^{tA}C$(通解)

令 $t = 0$ 代入通解可得：$x(0) = C$，故有唯一解 $x = e^{At}x(0)$ 证毕

定理 2 齐次方程 $\dfrac{dY}{dt} = AY + YB, Y(0) = D, Y = \left(y_{ij}(t)\right)_{n\times p}, A = A_{n,n}, B = B_{p,p}$

有唯一解公式 $Y = e^{At}De^{Bt}$，即 $Y = e^{At}Y(0)e^{Bt}$

Pf：因为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(e^{-At}Ye^{-Bt}\right) = (e^{-At})'Ye^{-Bt} + e^{-At}\frac{dY}{dt}e^{-Bt} + e^{-At}Y(e^{-Bt})' \\
&= -e^{-At}AYe^{-Bt} + e^{-At}\frac{dY}{dt}e^{-Bt} - e^{-At}YBe^{-Bt} \\
&= e^{-At}(\frac{dY}{dt} - AY - YB)e^{-Bt}
\end{aligned}
$$

可写方程：

$$\frac{dY}{dt} = AY + YB \Leftrightarrow e^{-At}(\frac{dY}{dt} - AY - YB)e^{-Bt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-At}Ye^{-Bt}\right) \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-At}Ye^{-Bt} = C\text{常数矩阵} \Leftrightarrow Y = e^{At}Ce^{Bt}\text{(通解)}$$

令 $t = 0$ 代入通解得：$\mathrm{Y}(0) = C$，有唯一解 $Y = e^{At}Y(0)e^{Bt}$ 证毕

特别：B=0 时，$\dfrac{dY}{dt} = AY$，有通解 $Y = e^{At}\mathrm{C}$

A=0 时，$\frac{dY}{dt}=YB$，有通解 $Y=Ce^{Bt}$

可知 $\frac{dx}{dt}=Ax, x(0)=\vec{C}, x=\left(x_1(t),\cdots,x_n(t)\right)^T$，有唯一解 $x=e^{At}\vec{C}$

例 设 $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$，$x=x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}$，

求解齐次微分方程组 $\frac{dx}{dt}=Ax$，初始条件 $x(0)=\vec{c}=\begin{pmatrix}0, & 1, & 0\end{pmatrix}^T$

解 $A-I=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}(-2,\ 2,\ 1)$ 可知 $\lambda(A)=\{0,\ 1,\ 1\}$, A 为单阵

令 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1$ 可知，$f(A)$ 的谱公式为

$$f(A)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2\text{，其中}$$

$$G_1=\frac{\cancel{(A-\lambda_1)}(A-\lambda_2)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{(A-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)}=-(A-1)=I-A=\begin{pmatrix}4 & -4 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$G_2=I-G_1=A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

令 $f(x)=e^{tx}\Rightarrow f(0)=1,\ f(1)=e^t$，

得 $e^{tA}=1G_1+e^tG_2=(I-A)+e^tA=\begin{pmatrix}4-3e^t & -4+4e^t & -2+2e^t\\ 2-2e^t & -2+3e^t & -1+e^t\\ 2-2e^t & -2+2e^t & -1+2e^t\end{pmatrix}$

由齐次微分方程 $\frac{dx}{dt}=Ax,\ x(0)=\vec{c}$ 解公式 $x=e^{tA}\vec{c}$

得 $x=e^{tA}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+4e^t\\ -2+3e^t\\ -2+2e^t\end{pmatrix}$，可验 $t=0$ 时 $x(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\vec{c}$.

例 求解微分方程组 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x-y\\ \frac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$

解 令 $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$，可写方程 $\frac{dX}{dt}=AX$

通解公式为 $X=e^{tA}C,\ C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

其中 $A=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow(A-2)^2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=0$

由 $(A-2)^2=0$ 可得广谱公式 $f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2)$，$f(x)$ 为解析函数

令 $f(x)=e^{tx},\Rightarrow f'(x)=te^{tx}$，$f(2)=e^{2t},\ f'(2)=te^{2t}$

代入公式：　$f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2)$

$$\Rightarrow e^{tA}=e^{2t}I+te^{2t}(A-2)=e^{2t}\left[I+t\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right]=e^{2t}\begin{pmatrix}1+t&-t\\t&1-t\end{pmatrix}$$

可知 $X=e^{tA}C=e^{2t}\begin{pmatrix}1+t&-t\\t&1-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}c_1(1+t)-c_2t\\c_1t+c_2(1-t)\end{pmatrix}$

可得通解 $\begin{cases}x=(c_1(1+t)-c_2t)e^{2t}\\y=(c_1t+c_2(1-t))e^{2t}\end{cases}$　c_1，c_2为任意常数

例　求解 2 阶微分方程 $x''=-x$，其中$x=x(t),x''=x''(t)$

解 令 $y=x'=x'(t)$，可写方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\\dfrac{dy}{dt}=-x\end{cases}\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

令 $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，可写方程 $\frac{dX}{dt}=AX$

通解公式为 $X=e^{tA}C,\ C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

其中 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$(单阵)$\Rightarrow e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$

可知 $X=e^{tA}C=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\cos t+c_2\sin t\\c_2\cos t-c_1\sin t\end{pmatrix}$

可得原方程 $x''=-x$ 通解 $x=c_1\cos t+c_2\sin t$，c_1，c_2为任意常数

……………………………………………………………………………………

Ex：1. 求解齐次微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+2y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases}$

2. 求解微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$ 且$x(0)=1, y(0)=1$

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，解微分方程 $\dfrac{dX}{dt}=AX$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, 且$x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$，解微分方程 $\dfrac{dx}{dt}=Ax, x=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}, x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$，求解 $\dfrac{dx}{dt}=Ax,\ x=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix},\ x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

6.求解 2 阶微分方程 $x''=-a^2x$, 其中$a>0$, $x=x(t)$.

提示：令 $ay=x'$，可写方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ay\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-ax\end{cases}\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

令 $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}$，可写方程 $\dfrac{dX}{dt}=AX$

……………………………………………………………………………………

备注定理：非齐次方程 $\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=\mathrm{A}x(t)+f(t),\\ x(t_0)=\vec{c}(\text{初始条件})\end{cases}$

有唯一解 $x(t)=e^{A(t-t_0)}\vec{c}+e^{At}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-Au}f(u)du$

$$\because \frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{A}x(t) + f(t) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-At}\left(\frac{dx(t)}{dt} - \mathrm{A}x(t)\right) = \mathrm{e}^{-At} f(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(\mathrm{e}^{-At} x(t))}{dt} == \mathrm{e}^{-At} f(t),$$

两边积分: $\int_{t_0}^{t} \frac{d(\mathrm{e}^{-At} x(t))}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-At} f(t) dt$,可得

$$\mathrm{e}^{-At} x(t) - \mathrm{e}^{-At_0} x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-At} f(t) dt,$$ 于是方程组的解为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{c} + e^{At}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-At} f(t) dt$$

或记为 $x(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{c} + e^{At}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-Au} f(u) du$ 证毕

特别，当$f(x) \equiv 0$时，可得齐次方程组解为$x(t)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\vec{c}$.

注：要求方程组的解，主要是求e^{At}.

例：$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，求解$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \mathrm{A}x(t) + f(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$

其中$x(t)=(x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, $x_0=(1,0,-1)^T$, $f(t)=(1,-t,t)^T$.

解：先计算e^{At}， $e^{At} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}$.

解公式为

$$x(t)=\mathrm{e}^{At}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

$$= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{e}^{2(t-\tau)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t-\tau & 1-t+\tau & t-\tau \\ t-\tau & -t+\tau & 1+t-\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \\ \tau \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 3/2 - 1/2e^{-2t} \\ 1/2(t^2+t-2) + (-t^2/2 + 3t/2 + 1)e^{-2t} \\ (2t^2+t+1/2)e^{-2t} - 3/2 \end{pmatrix}.$$

……………………………………………………………………………

补充 Ex

1. 利用求导公式证明：微分方程 $\frac{dx}{dt}=Ax+b(t)$ 满足条件 $x(0)=C$

有解公式 $x(t)=e^{At}C+e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}b(\tau)d\tau$

2.设 $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$， $b(t)=\begin{pmatrix}e^t\\ 0\\ e^{2t}\end{pmatrix}$， $x=x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}, x(0)=C=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，

求解微分方程 $\frac{dx}{dt}=Ax+b(t)$，且 $x(0)=C$

提示： $e^{At}=\begin{pmatrix}4-3e^t & -4+4e^t & -2+2e^t\\ 2-2e^t & -2+3e^t & -1+e^t\\ 2-2e^t & -2+2e^t & -1+2e^t\end{pmatrix}$, $e^{At}C=e^{tA}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+4e^t\\ -2+3e^t\\ -2+2e^t\end{pmatrix}$

且解公式为 $x(t)=e^{At}C+e^{At}\int_0^t e^{-Au}b(u)du=?$

3. 若 $A=A_{n,n}$ 可逆，则 $\int_0^t e^{A\tau}d\tau=A^{-1}e^{At}-A^{-1}$

4. 思考题： 证明 $e^{(A+2\pi iI)}=e^{A}$

…………………………………………………………………….