本讲主要内容：正规阵谱分解

备注：实对称（反对称）、Hermite 阵、优阵(含实正交阵)都为正规阵

复习：正规分解：若方阵 $A=A_{n\times n}$ **正规，全体互异(不同)根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$，**则存在优阵** Q

（$Q^H=Q^{-1}$）使 A **优相似于对角形 D：可写**

$$Q^{-1}AQ=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1\mathrm{I}_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k\mathrm{I}_k\end{pmatrix}$$（把重根写在一起），

$I_1,\cdots,\mathrm{I}_k$ 为小单位阵.

例如

$$D=\begin{pmatrix}2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} & \\ & 3\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2I_1 & \\ & 3I_2\end{pmatrix}$$

设 $$Q^{-1}AQ=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1\mathrm{I}_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k\mathrm{I}_k\end{pmatrix}$$ （ Q 为 U 阵 ）………… ①

可写 $$D=\lambda_1\begin{pmatrix}I_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & I_2 & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_k\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & I_k\end{pmatrix}$$

令 $$D_1=\begin{pmatrix}I_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix},D_2=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & I_2 & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix},\cdots,D_s=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & I_k\end{pmatrix}$$

代入① $\Rightarrow$ $Q^{-1}AQ=\mathrm{D}=\lambda_1D_1+\lambda_2D_2+\cdots\cdots\lambda_kD_k$

显然，知 ：① $$\mathrm{D}_1+\mathrm{D}_2+\cdots\cdots\mathrm{D}_k=\begin{pmatrix}I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & I_k\end{pmatrix}=I$$ （单位阵）

② $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2=0,\cdots\cdots,\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j=0\ (i\neq j)$

③ $\mathrm{D}_1{}^2=\mathrm{D}_1,\cdots\cdots,\mathrm{D}_k{}^2=\mathrm{D}_k$ （幂等），

因为 $Q^{-1}AQ=\mathrm{D}=\lambda_1D_1+\lambda_2D_2+\cdots\cdots+\lambda_kD_k$

$\Longrightarrow$ $A=QDQ^{-1}=Q(\lambda_1D_1+\cdots\cdots+\lambda_kD_k)Q^{-1}$；

$$A=\lambda_1(QD_1Q^{-1})+\cdots\cdots+\lambda_k(QD_kQ^{-1}),$$

令 $$G_1=QD_1Q^{-1},\cdots\cdots,G_k=QD_kQ^{-1}$$

$\Longrightarrow$ 可写 $A=\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k$ …………②

利用以上结论可知如下公式：

①$G_1+G_2+\cdots+G_k=I$

$\because G_1+G_2+\cdots\cdots+G_k=Q(D_1+\cdots\cdots+D_k)Q^{-1}=QIQ^{-1}=QQ^{-1}=I$

②$G_1G_2=0$，……，$G_iG_j=0(i\neq j)$

$\because G_1G_2=(QD_1Q^{-1})(QD_2Q^{-1})=Q(D_1D_2)Q^{-1}=0$，

③$G_1{}^2=G_1,\cdots\cdots,G_k{}^2=G_k$ (幂等)，因为 $G_1{}^2=(QD_1Q^{-1})^2=G_1,\cdots$ 同理 $G_k{}^2=G_k$

备注③：且有 $G_1{}^H=G_1,\cdots\cdots,G_k{}^H=G_k$ (hermite)

因 $D_1{}^H=D_1,\cdots\cdots,D_k{}^H=D_k$ 可知 $G_1{}^H=(QD_1Q^H)^H=QD_1{}^HQ^H=QD_1Q^H=G_1$

可写主要**公式**如下

正规阵谱公式：若 $A=A_{n\times n}$ **正规，全体互异根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$， **则有**

$$A=\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k$$ （叫 A 的谱分解）

其中 $G_1,\cdots\cdots G_k$ 叫 A 的谱阵

且有公式：①$G_1+G_2+\cdots\cdots G_k=I$

② $G_1G_2=0$，……，$G_iG_j=0(i\neq j)$

③$G_1{}^2=G_1,\cdots\cdots G_k{}^2=G_k$ （幂等），

备注：且有 hermite 公式：$G_1{}^H=G_1,\cdots\cdots,G_k{}^H=G_k$

………………………………………………………………………

利用幂等公式：$G_1{}^2=G_1,\cdots\cdots G_k{}^2=G_k$ 可知

$$G_1{}^p=G_1,\cdots\cdots G_k{}^p=G_k,\quad \mathrm{p}=0,1,2,\cdots$$

备注：也有补充公式：

公式(4)：$A^p=\lambda_1{}^pG_1{}^p+\cdots\cdots+\lambda_k{}^pG_k{}^p$，$\mathrm{p}=0,1,2,\cdots$

公式(5)： $f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$，

其中 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_px^p$ 为任一多项式.

公式(4)，(5)证明思路如下：

例如 $A^2=(\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k)^2=\lambda_1{}^2G_1{}^2+\cdots\cdots+\lambda_k{}^2G_k{}^2+0+\cdots\cdots0$
$=\lambda_1{}^2G_1+\cdots\cdots+\lambda_k{}^2G_k$

可知：$A^p=(\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_s)^p=\lambda_1{}^pG_1{}^p+\cdots\cdots+\lambda_k{}^pG_k{}^p+0+\cdots\cdots0$
$=\lambda_1{}^pG_1+\cdots\cdots+\lambda_k{}^pG_k$

取任一多项式： $f(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_px^p$，可知

$$
\begin{aligned}
&f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_pA^p\\
&=c_0(G_1+\cdots+G_k)+c_1(\lambda_1G_1+\cdots+\lambda_kG_k)+\cdots+c_p(\lambda_1{}^pG_1+\cdots+\lambda_k{}^pG_k)^p\\
&=(c_0+c_1\lambda_1+\cdots\cdots+c_p\lambda_1{}^p)G_1+\cdots\cdots+(c_0+c_1\lambda_k+\cdots\cdots+c_p\lambda_k{}^p)G_k\\
&=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \qquad f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k.$$

备注： 公式(5)对任一多项式都成立，故可取特定的 $f(x)$ 代入公式。

取不同的 $f(x)$，由公式 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$ 可求出谱阵 $G_1,\cdots,G_k$

谱阵公式：设 A 正规，全体不同根为 $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_k$，则有谱阵公式

$$G_1=\frac{\cancel{(A-\lambda_1I)}\cdots\cdots(A-\lambda_kI)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}\cdots\cdots(\lambda_1-\lambda_k)},$$

$$G_2=\frac{(A-\lambda_1I)\cancel{(A-\lambda_2I)}\cdots\cdots(A-\lambda_kI)}{(\lambda_2-\lambda_1)\cancel{(\lambda_2-\lambda_2)}\cdots\cdots(\lambda_2-\lambda_k)}$$

……

$$G_k=\frac{(A-\lambda_1)\cdots\cdots\cancel{(A-\lambda_k)}}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots\cdots\cancel{(\lambda_k-\lambda_k)}},$$（可知谱阵都是 A 多项式）

其中，记号“ $\cancel{\square}$ ”表示“没有此项”，（此记号便于记公式，它不是“约分”的含义）

证：先令 $f(x)=\cancel{(x-\lambda_1)}(x-\lambda_2)\cdots\cdots(x-\lambda_k)$，则 $f(\lambda_2)=\cdots=f(\lambda_k)=0$

且 $f(\lambda_1)=\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}(\lambda_1-\lambda_2)\cdots\cdots(\lambda_1-\lambda_k)=(\lambda_1-\lambda_2)\cdots\cdots(\lambda_1-\lambda_k)\neq0$，

代入公式(5)： $f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$：

$$\Longrightarrow \quad f(A)=f(\lambda_1)G_1+0G_2+\cdots+0G_k=f(\lambda_1)G_1$$

$$\Longrightarrow \quad \text{解出}\, G_1=\frac{f(A)}{f(\lambda_1)}=\frac{\cancel{(A-\lambda_1 I)}\cdots\cdots(A-\lambda_k I)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}\cdots\cdots(\lambda_1-\lambda_k)}$$

同理，令 $f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\cdots\cancel{(x-\lambda_k)}$， 由公式(5)解得

$$G_k=\frac{f(A)}{f(\lambda_k)}=\frac{(A-\lambda_1)\cdots\cdots\cancel{(A-\lambda_k)}}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots\cdots\cancel{(\lambda_k-\lambda_k)}};$$

注：若 A 正规，且只有 2 个不同根$(\lambda_1\neq\lambda_2)$，则有谱公式

$$G_1=\frac{\cancel{(A-\lambda_1)}(A-\lambda_2)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{A-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}, \qquad G_2=\frac{A-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}; \qquad \text{且}\, G_1+G_2=I$$

注，若 A 只有 3 个不同根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则有谱公式

$$G_1=\frac{\cancel{(A-\lambda_1 I)}(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}=\frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$$

$$G_2=\frac{(A-\lambda_1 I)\cancel{(A-\lambda_2 I)}(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)\cancel{(\lambda_2-\lambda_2)}(\lambda_2-\lambda_3)}=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}$$

$$G_3=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cancel{(A-\lambda_3 I)}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\cancel{(\lambda_3-\lambda_3)}}=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}.$$

例： $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$(实对称正规阵), 求谱分解与 $A^{100}+1=?$

可知（秩 1 阵），全体根 $\lambda(A)=\{5,0,0\}$， 有 2 个不同根为 $\lambda_1=5,\lambda_2=0$，令

$$G_1=\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{A-0}{5-0}=\frac{1}{5}A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$$

$$G_2=\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{A-5I}{0-5}=\frac{1}{5}(5I-A)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&0&2\\0&5&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

可验 $G_1+G_2=I$ ， （也可由 $G_2=I-G_1$ 求 G_2）

得谱公式： $A=\lambda_1 G_1+\lambda_2 G_2$， 且 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2$

即 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2=f(5)G_1+f(0)G_2$

令： $f(x)=x^{100}+1$， $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} f(A)=A^{100}+1&=f(5)G_1+f(0)G_2=(5^{100}+1)G_1+1G_2 \\ &=5^{100}G_1+(G_1+G_2)=5^{99}A+I \end{aligned}$$

注： $A^{100}=\lambda_1^{100}G_1+0\ G_2=5^{100}\left(\frac{1}{5}A\right)=5^{99}A$

小结：正规阵 A 有谱公式： $A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\cdots\cdots+\lambda_sG_s$，且

$$A^p=\lambda_1{}^pG_1{}^p+\cdots\cdots+\lambda_k{}^pG_k{}^p，且 G_1+G_2+\cdots\cdots G_s=I$$

备注**：若 A 正规，则有

补充公式（6）： $AG_1=\lambda_1G_1$， $AG_2=\lambda_2G_2,\cdots\cdots,AG_k=\lambda_kG_k$

结论： G_1， $G_2,\cdots\cdots,G_k$ 中各列都是 A 的特征向量!!!（分别属于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ ）

证： $\because AG_1=(\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k)G_1=(\lambda_1G_1{}^2+0\cdots\cdots+0)=\lambda_1G_1$,

例如，观察前例中 G_1， G_2 中的列，可知特向为： $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ （且互正交）

例： $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$（对称正规阵） $\lambda_1=3,\lambda_2=1$，求 A 与 $f(A)$ 的谱公式， $A^{100}=?$

解：A 正规，有谱阵： $G_1=\dfrac{A-\lambda_2I}{(\lambda_1-\lambda_2)}=\dfrac{A-I}{3-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$$G_2=\frac{A-\lambda_1I}{(\lambda_2-\lambda_1)}=\frac{A-3I}{1-3}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\quad (G_1+G_2=I)$$

注：观察 G_1， G_2 的列，可知特向为： $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ （且正交）

得谱分解： $A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2=3G_1+1G_2$，且 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2$

且 $A^{100}=3^{100}G_1+1^{100}G_2=\dfrac{3^{100}}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3^{100}+1&3^{100}-1\\3^{100}-1&3^{100}+1\end{pmatrix}$

注：有时可用分块公式 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix}$ 求 A^k

例如：$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$A_2=(2)$ 求 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{100}$ （不必用 A 的谱公式）

因为 $A_1^{100}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{100}+1 & 3^{100}-1 \\ 3^{100}-1 & 3^{100}+1 \end{pmatrix}$，

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} \frac{3^{100}+1}{2} & \frac{3^{100}-1}{2} & 0 \\ \frac{3^{100}-1}{2} & \frac{3^{100}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$$

例（备用）：求 $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ 与 $f(A)$ 的谱公式，计算 A^{100}

Ans: 观察可知 $A+4I$ 为秩 1 阵，故 $\lambda(A+4I)=\{12,0,0,0\}$，利用“求的平移法”

可知 $\lambda(A)=\{8,-4,-4,-4\}$， A 的不同根为 $\lambda_1=8, \lambda_2=-4$

因为 A 正规，可用谱阵公式

$$G_1=\frac{A-\lambda_2 I}{(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{1}{12}(A+4)=\frac{3}{12}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_2=\frac{A-\lambda_1 I}{(\lambda_2-\lambda_1)}=\frac{-1}{12}(A-8)=\frac{-3}{12}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(注：$G_1+G_2=I$)

可得谱公式：$A=\lambda_1 G_1+\lambda_2 G_2=8G_1-4G_2$，且 $f(A)=f(8)G_1+f(-4)G_2$

且 $A^{100}=8^{100}G_1+(-4)^{100}G_2=8^{100}G_1+4^{100}G_2$

Eg 例 . $A=\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$，（$i=\sqrt{-1}$）求 $f(A)$ 谱分解，计算 A^{100}

解： $\left|xI-A\right|=(x-3)x$，$\lambda(A)=\{3,0\}$，$\lambda_1=3$，$\lambda_2=0$

$A^H=A$（正规），必有谱分解：$A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2$，$f(A)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2$

有谱阵：$G_1=\dfrac{A-\lambda_2I}{(\lambda_1-\lambda_2)}=\dfrac{A-0I}{3-0}=\dfrac{1}{3}A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 1+i & 1\end{pmatrix}$

$$G_2=\frac{A-\lambda_1I}{(\lambda_2-\lambda_1)}=\frac{A-3I}{0-3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & i-1\\ -1-i & 2\end{pmatrix}\ (G_1+G_2=I)$$

谱分解 $A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2=3\left(\dfrac{A}{3}\right)+0\left(\dfrac{A-3I}{-3}\right)$，　$f(A)=f(3)G_1+f(0)G_2$

$$A^{100}=3^{100}G_1+0^{100}G_2=3^{100}G_1=3^{100}\left(\frac{A}{3}\right)=3^{99}A$$

备注： 利用补充公式(6),可知 G_1，G_2 中各列都是 A 的特征向量！

观察 G_1， G_2 的列，可知 2 个特向 $\begin{pmatrix}1-i\\ 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\ 1+i\end{pmatrix}$（互正交）不唯一

即知 $\lambda_1=3$：特向 $X_1=\begin{pmatrix}1-i\\ 1\end{pmatrix}$；$\lambda_2=0$：特向量 $X_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1+i\end{pmatrix}$

令 $Q=\left(\frac{X_1}{|X_1|},\frac{X_2}{|X_2|}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1-i & -1\\ 1 & 1+i\end{pmatrix}$（优阵 $Q^H=Q^{-1}$），

可知正规分解(也是 hermite 分解)：

$$Q^HAQ=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}(1+i) & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(1-i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 1+i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}(1-i) & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(1+i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

....

Ex.求下列为正规阵 A 与 $f(A)$ 的谱分解，计算 $A^{100}=?$

（1）$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，（2）$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，（3）$A=\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$，(4) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

（5）$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，　（6）$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

补充题： $A=\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 用分块法求 $A^{100}=?$

思考题：

1\. $A=\begin{pmatrix}3 & 1-i\\ 1+i & 2\end{pmatrix}$，（$i=\sqrt{-1}$）(1)求 $f(A)$ 谱分解，计算 A^{100}；

(2)利用谱阵 G_1， G_2 的列写出 2 个特征向量(是否正交)

(3)求优阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=D$ 为对角形

提示：先用“平移法”求秩 1 阵 $A-I$ 的根 $\lambda(A-I)=?$

2\. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，(1)求 $f(A)$ 谱分解，计算 A^{100}；

(2)利用谱阵 G_1， G_2 的列写出 3 个特征向量(是否正交)

(3)求优阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=D$ 为对角形

(4)令 $B=\sqrt{\lambda_1}G_1+\sqrt{\lambda_2}G_2$，证明： $B^2=(\sqrt{\lambda_1}G_1+\sqrt{\lambda_2}G_2)^2=\lambda_1G_1+\lambda_1G_2=A$

可得平方根公式： $\sqrt{A}=\sqrt{\lambda_1}G_1+\sqrt{\lambda_2}G_2$

(5)用公式 $\sqrt{A}=\sqrt{\lambda_1}G_1+\sqrt{\lambda_2}G_2$ 计算平方根 $\sqrt{A}=?$