正规阵定义：若方阵 A 适合 $A^H A = AA^H$，则 A 叫正规阵.

注：正规阵必为方阵 （$A^H A = AA^H$ 叫正规条件）

例：1. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 正规，$\because\ A^H A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=AA^H \quad \Rightarrow A$ 为正规

2. $A=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & \mathrm{i}\end{pmatrix}$ 正规：因 $A^H A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=AA^H$

备注：由正规条件 $A^H A = AA^H$，且 $(A^H)^H = A$ 可知

"A 正规$\Leftrightarrow A^H$ 正规，且 A 不正规$\Leftrightarrow A^H$ 不正规"

(记住)常见正规阵：

1. 对角阵 $A=\begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}$ 必正规

$\because$

$$A^H A=\begin{pmatrix}\overline{a_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{a_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{a_1}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{a_n}a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{a_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{a_n}\end{pmatrix}=AA^H$$

例：$A=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0\\ 0 & 3\mathrm{i}\end{pmatrix}$ 对角必正规，$\because\ A^H A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}=AA^H$

2. Hermite 阵与斜 Hermite 阵必正规（$\because\ A^H = \pm A$）

$\because\ A^H A = AA^H = \pm AA$；**例** $A=\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$ Hermite 必正规；$B=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & -1\\ 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}$ 斜 Hermit 正规

3. 实对称与实反对称阵都正规（$\because\ A^T = \pm A \in R^{n\times n}$；且 $A^H = A^T$）

例： 实对称 $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 必正规； 实反对称 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 必正规

4. 优阵(实正交阵)必正规 $\because\ A^H A = I = AA^H\ (A^H = A^{-1})$

例如，优阵 $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$，优阵 $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$(也是hermit)必正规

由已知正规阵可得新正规阵的方法如下：

倍数法则：若 A 正规，任取倍数 k，则 kA 正规，特别 $-A$ 正规（证明显然）

例如

$$\begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & i \\ i & 2i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ 都正规；

又例：$A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$（U 阵）正规 $\Rightarrow \sqrt{2}A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = B$ 也正规

平移法则：若 A 正规，则 $A \pm cI$ 正规（ $cI \pm A$ 也正规）

证：$(A+cI)^{\mathrm{H}}(A+cI) = (A^{\mathrm{H}}+\bar{c}I)(A+cI) \overset{A^{\mathrm{H}}A=AA^{\mathrm{H}}}{=} (A+cI)(A^{\mathrm{H}}+\bar{c}I) = (A+cI)(A+cI)^{\mathrm{H}}$

即 $A+cI$ 正规. 用 $-c$ 代替 c 可知 $A-cI$ 正规

由此可知

备注： 若 A 正规，则 $I+A,\ I-A,\ cI \pm kA$ 都正规

补充定理：若 A 正规，则 A与A^H 必有相同特征向量

即 若 A 正规，且 $AX = cX$，则 $A^H X = \bar{c}X$

证明：只要证 $(A^H - \bar{c}I)X = 0$，即 $(A-cI)^H X = 0$.

因为 $(A-cI)X = 0$ 可知 $|(A-cI)X|^2 = 0$，利用模长公式 $|X|^2 = X^H X$

可得 $0 = |(A-cI)X|^2 = ((A-cI)X)^H (A-cI)X = X^H (A-cI)^H (A-cI)X$

利用平移法可知 $A-cI$ 正规：$(A-cI)^H(A-cI) = (A-cI)(A-cI)^H$

故 $0 = |(A-cI)X|^2 = X^H (A-cI)(A-cI)^H X = |(A-cI)^H X|^2$

即 $|(A-cI)^H X|^2 = 0 \ \Rightarrow\ (A-cI)^H X = 0 \ \Rightarrow\ A^H X = \bar{c}X$ 证毕

备注： 上面结论可写为 “若 A 正规，则 $AX = cX \Leftrightarrow A^H X = \bar{c}X$ ”

备注： 若 A 的特根为 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n\}$，则 A^H 特根为

$$\lambda(A^H) = \{\bar{\lambda}_1, \cdots\cdots, \bar{\lambda}_n\}$$

例：$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 正规，则平移后 $A + tI = tI + A = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ 也正规

特别，$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + I = A + I$ 正规

优相似定理：**若 A 正规，则 $Q^H AQ$ 也正规，其中 Q 为优阵（$Q^H = Q^{-1}$）**

即， 正规阵的优相似必正规

证明： $\because A^H A = AA^H$ 且 $Q^H Q = QQ^H = I$，令 $B = Q^H AQ$ 验证 $B^H B = BB^H$ 如下：

$$B^H B = (Q^H AQ)^H Q^H AQ = Q^H A^H QQ^H AQ = Q^H A^H AQ = Q^H AA^H Q$$

且 $BB^H = Q^H AQ\,(Q^H AQ)^H = Q^H AQQ^H A^H Q = Q^H AA^H Q \Rightarrow B^H B = BB^H$ 证毕

…………………………………………………………………………………………….

多项正规定理：若 A 正规阵，则 $f(A) = c_0 I + c_1 A + \cdots\cdots + c_k A^k$ 必正规（略证！）

其中 $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots\cdots + c_k x^k$ 为任一多项式

即， 正规阵 A 的多项式 $f(A)$ 也正规！

特注：若 A 正规，则 $I + A,\ I - A,\ aI \pm bA,\ kA$ 都正规

例：$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 正规，则 $f(A) = 2iI + A + A^2 = \begin{pmatrix} 2i-1 & -1 \\ 1 & 2i-1 \end{pmatrix}$ 正规

三角正规定理：**三角正规阵一定是对角形**

即，若三角阵 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_2 & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & b_n \end{pmatrix}$ 正规，则 $B = \begin{pmatrix} b_1 & & & O \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & b_n \end{pmatrix}$ 为对角形！

（同理，**下三角正规阵也是对角阵**）

推论：严格三角阵(非对角形)不是正规阵！

Pf:（只证 $n=3$）

设 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_{12} & b_{13} \\ & b_2 & b_{23} \\ 0 & & b_3 \end{pmatrix}$ 正规（$B^H B = BB^H$），$B^H = \begin{pmatrix} \overline{b_1} & & 0 \\ \overline{b_{12}} & \overline{b_2} & \\ \overline{b_{13}} & \overline{b_{23}} & \overline{b_3} \end{pmatrix}$

$$BB^H = \begin{pmatrix} b_1 & b_{12} & b_{13} \\ & b_2 & b_{23} \\ 0 & & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{b_1} & & 0 \\ \overline{b_{12}} & \overline{b_2} & \\ \overline{b_{13}} & \overline{b_{23}} & \overline{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |b_1|^2 + |b_{12}|^2 + |b_{13}|^2 & & * \\ & |b_{23}|^2 + |b_2|^2 & \\ * & & |b_3|^2 \end{pmatrix},$$

$$B^HB=\begin{pmatrix} |b_1|^2 & & * \\ & |b_{12}|^2+|b_2|^2 & \\ * & & |b_{13}|^2+|b_{23}|^2+|b_3|^2 \end{pmatrix},\quad \text{比较可得}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} |b_1|^2=|b_1|^2+|b_{12}|^2+|b_{13}|^2 \\ |b_{12}|^2+|b_2|^2=|b_{23}|^2+|b_2|^2 \\ |b_{13}|^2+|b_{23}|^2+|b_3|^2=|b_3|^2 \end{cases}\Rightarrow 0=|b_{12}|^2+|b_{13}|^2=0,|b_{13}|^2+|b_{23}|^2=0\Rightarrow|b_{12}|^2=0,|b_{13}|^2=0,|b_{23}|^2=0$$

$$\Rightarrow b_{12}=b_{13}=b_{23}=0\text{即}B=\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{pmatrix}\text{对角形}$$

用递推方法，可证 $n=n$ 阶成立.

练习题 1：若三角阵 $B=\begin{pmatrix} b_1 & c \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ 正规，则 $B=\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ 为对角形

练习题 2：若分块阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ 正规，则 $\mathrm{C}=0$，且B，D都正规，$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}$

其中“**0 表示 0 阵**”

提示：设 $A=\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ 正规，则 $A^HA=AA^H$ ，且 $A^H=\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}^H=\begin{pmatrix} \mathrm{B}^H & 0 \\ \mathrm{C}^H & \mathrm{D}^H \end{pmatrix}$

$$A^HA=\begin{pmatrix} \mathrm{B}^H & 0 \\ \mathrm{C}^H & \mathrm{D}^H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{B}^H\mathrm{B} & \mathrm{B}^H\mathrm{C} \\ \mathrm{C}^H\mathrm{B} & \mathrm{C}^H\mathrm{C}+\mathrm{D}^H\mathrm{D} \end{pmatrix},$$

$$AA^H=\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{B}^H & 0 \\ \mathrm{C}^H & \mathrm{D}^H \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{BB}^H+\mathrm{CC}^H & \mathrm{CD}^H \\ \mathrm{DC}^H & \mathrm{DD}^H \end{pmatrix},$$ 比较 2 个对角元可得

$\mathrm{BB}^H+\mathrm{CC}^H=\mathrm{B}^H\mathrm{B}$，且 $\mathrm{DD}^H=\mathrm{C}^H\mathrm{C}+\mathrm{D}^H\mathrm{D}$ ，则 $\mathrm{tr}(\mathrm{BB}^H)+\mathrm{tr}(\mathrm{CC}^H)=\mathrm{tr}(\mathrm{B}^H\mathrm{B})$

利用迹换位公式： $\mathrm{tr}(\mathrm{BB}^H)=\mathrm{tr}(\mathrm{B}^H\mathrm{B})$ 代入上式可知 $\mathrm{tr}(\mathrm{CC}^H)=0$

利用迹公式可写 $\mathrm{tr}(\mathrm{CC}^H)=\sum|c_{i,j}|^2=0$，其中 $\mathrm{C}=(c_{i,j})$，必有 $\mathrm{C}=0$(零阵)

且可知 $\mathrm{BB}^H=\mathrm{B}^H\mathrm{B}$，$\mathrm{DD}^H=\mathrm{D}^H\mathrm{D}$，即B，D都正规.

备注： 利用习题 2 结论可直接证明“三角正规定理”（自己证明）

三角正规定理：三角正规阵一定是对角形

备注(推论)：严格三角阵(非对角形)不是正规阵！

反例：严格上三角 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 非正规（不是正规阵）

由备注：“A 正规⇔ A^H 正规，且 A 不正规⇔ A^H 不正规”

同理，严格下三角 $A^H=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, B^H=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ 非正规

………………………………………………………………

正规分解定理：若 $A=A_{n\times n}$ **正规，则存在**优阵 Q（$Q^H=Q^{-1}$）使

$$Q^{-1}AQ=Q^HAQ=D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{（对角形）}$$

其中，特根 $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$ 次序任意，$\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}$

证：设 $A=A_{n\times n}$ **正规，由**优相似定理，Q^HAQ 也正规（Q 为任一优阵）

用许尔公式，存在优阵 Q，使 $Q^HAQ=D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$（上三角）

$\because B=Q^HAQ$ 是正规三角阵，由“三角正规定理”可知，

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{为对角}$$

即 $Q^{-1}AQ=D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 成立

备注：由 $Q^{-1}AQ=D$ 为对角形，可知 $Q=(q_1,\cdots,q_n)$ 中列都是特向量：

$$Aq_1=\lambda_1q_1,\cdots,\quad Aq_n=\lambda_1q_n$$

另外，优阵 $Q=(q_1,\cdots,q_n)$ 中各列互正交 $q_1\perp q_2,\cdots\perp q_n$

推论(记住)： 正规阵 A 恰有 n 个正交特向（ $q_1\perp q_2,\cdots\perp q_n$ ）

使 $$Aq_1=\lambda_1q_1,\cdots,\quad Aq_n=\lambda_1q_n$$

注：正规分解**定理也是本科“实对称阵定理”的推广**

备注(补充定理)： 正规阵不同特征根对应的特征向量正交！

即，　若正规阵A满足：$AX=\lambda_1 X$，$AY=\lambda_2 Y$，且$\lambda_2\neq\lambda_1$，则 $X\perp Y$

Pf（提示）：设 $AX=\lambda_1 X$，$AY=\lambda_2 Y$，且$\lambda_2\neq\lambda_1$ 要证明内积（X，Y)=0

由于内积定义 $(X,Y)=Y^H X$，且 $A^H=A$, 且 A 正规可知 $A^H Y=\bar{\lambda}_2 Y$ (上面补充定理)，

计算可得：

$$\lambda_2(X,Y)=(X,\bar{\lambda}_2 Y)=(X,A^H Y)=(A^H Y)^H X=Y^H AX=Y^H(AX)=(AX,Y)$$

$$(AX,Y)=(\lambda_1 X,Y)=\lambda_1(X,Y),\text{可知}\lambda_2(X,Y)=\lambda_1(X,Y)$$

因为$\lambda_2\neq\lambda_1$且，$(\lambda_2-\lambda_1)(X,Y)=0$，则$(X,Y)=0$ (正交)　　证毕

正规分解方法：先求特根 $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$，求正交特向量 $X_1\perp\cdots\cdots\perp X_n$

$$\text{令优阵 } Q=(q_1,\cdots,q_n)=\left(\frac{X_1}{|X_1|},\cdots,\frac{X_n}{|X_n|}\right)$$

则有**正规分解** $Q^H AQ=D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为对角

可写**正规分解** $A=QDQ^H$，　$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为对角

例，$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 正规，$\lambda_1=i,\lambda_2=-i$（不同根），取 $X_1=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$, $AX_1=\begin{pmatrix}-1\\i\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=iX_1$

取 $X_2=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, $AX_2=\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=-iX_2$ 可知：$X_1=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ 为 A 的正交特向，

($x_1\perp x_2$) 令优阵 $Q=\left(\frac{x_1}{|x_1|},\frac{x_2}{|x_2|}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$，　可得 $Q^H AQ=D=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$

例：（用平移法）令 $B=I+A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 正规，$\lambda(B)=\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{1+i,1-i\}$ 且

$x_1=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ 为正交特向，取优阵 $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$ （$Q^H=Q^{-1}$）

得**正规分解**　$Q^H BQ=\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}$

例(平移法)：设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$B=2iI+A=\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$（正规）

$\lambda(B)=\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{3i,i\}$ 且 $x_1=\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 为正交特向

取 $Q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$（优阵 $Q^H=Q^{-1}$），　得**正规分解** $Q^H BQ=\begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

备注：　设 A 正规，且 $Q^H AQ=D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

设 $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n$ 有 s 个不同（互异）根 $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s$，可把重根排在一起可写

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s I_s \end{pmatrix}$$

例如：$B=\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} & \\ & 3\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2I_1 & \\ & 3I_2 \end{pmatrix}$（$I_1,I_2$ 为小单位阵）

可写**正规分解**：$Q^H AQ=B=\begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s I_s \end{pmatrix}$.

Ex.用法则或定义判定下列为正规：

（1）$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　（2）$A=\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$　（3）$A=\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

（4）$A=\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（5）$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（6）$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ex2 求**正规分解**

（1）$A=\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$，（2）$A=\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，（3）$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，（4）$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ex. 证：斜 Hermite 阵 $A=-A^H$ 的特征值全为纯虚或 0（利用 iA 为 Hermit 阵）