## 7. 正规阵谱分解

（1）正规矩阵的定义：矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 满足条件 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^H$，则称矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵。

正规阵举例：①. 对角阵 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 是正规阵；

②. Hermite 矩阵（$\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$）和斜 Hermite 矩阵（$\mathbf{A}^H=-\mathbf{A}$）都是正规阵；

③. 实对称矩阵（$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$）和反实对称矩阵（$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$）都是正规阵；

④. 酉阵（$\mathbf{A}\mathbf{A}^H=\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{I}$）是正规阵；

⑤. 若矩阵 $\mathbf{A}$ 是正规阵，矩阵 $\mathbf{Q}$ 是酉阵，则矩阵 $\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 也是正规阵；

⑥. 若矩阵 $\mathbf{A}$ 是正规阵，有函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$，则矩阵 $\mathbf{F}=f(\mathbf{A})=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}^2+\cdots+a_k\mathbf{A}^k$ 也为正规阵。

证明：⑤矩阵 $\mathbf{A}$ 是正规阵，则 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^H$，矩阵 $\mathbf{Q}$ 是酉阵，则 $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H=\mathbf{I}$。令 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}$，

$\mathbf{B}\mathbf{B}^H=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q})^H=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}$，

$\mathbf{B}^H\mathbf{B}=(\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q})^H\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{B}\mathbf{B}^H$，故矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 也是正规阵。

例 1：矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 为实反对称，所以矩阵 $\mathbf{A}$ 为正规阵，矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 和矩阵 $\mathbf{C}=\mathbf{I}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 都是正规阵。

（2）三角正规引理：若三角矩阵正规，则此三角矩阵为对角阵.

例 1：三角阵 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$ 为正规阵，则 $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$。

证明：$\mathbf{D}$ 为正规阵，则有 $\mathbf{D}^H\mathbf{D}=\mathbf{D}\mathbf{D}^H$。

$$\mathbf{D}\mathbf{D}^H=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{a}_{11} & 0 & 0\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & 0\\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\bar{a}_{11}+a_{12}\bar{a}_{12}+a_{13}\bar{a}_{13} & * & *\\ * & a_{22}\bar{a}_{22}+a_{23}\bar{a}_{23} & *\\ * & * & a_{33}\bar{a}_{33}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^H\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\bar{a}_{11} & 0 & 0\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & 0\\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\bar{a}_{11} & * & *\\ * & a_{12}\bar{a}_{12}+a_{22}\bar{a}_{22} & *\\ * & * & a_{13}\bar{a}_{13}+a_{23}\bar{a}_{23}+a_{33}\bar{a}_{33}\end{pmatrix}$$

故：$\begin{cases} a_{11}\bar{a}_{11}+a_{12}\bar{a}_{12}+a_{13}\bar{a}_{13}=a_{11}\bar{a}_{11} \\ a_{22}\bar{a}_{22}+a_{23}\bar{a}_{23}=a_{12}\bar{a}_{12}+a_{22}\bar{a}_{22} \\ a_{33}\bar{a}_{33}=a_{13}\bar{a}_{13}+a_{23}\bar{a}_{23}+a_{33}\bar{a}_{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_{12}|^2+|a_{13}|^2=0 \\ |a_{23}|^2=|a_{12}|^2 \\ |a_{13}|^2+|a_{23}|^2=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} a_{12}=0 \\ a_{13}=0 \\ a_{23}=0 \end{cases}$。

（3）正规阵性质

①. 方阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，则存在酉阵 $\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n)$，使 $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，且 $\mathbf{Q}$ 的各列向量 $\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_n$ 为特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 对应的特征向量。可知正规阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 恰有 $n$ 个正交的特征向量。

②. $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，则对任一酉阵 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}$ 为正规阵。

例 1：求由矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{C}=2\mathrm{i}\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 的三角化转换。

解：可得：$\sigma(\mathbf{A})=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，$x_1=\mathrm{i}$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$，$x_2=-\mathrm{i}$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$。

令 $\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$，$\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$。$\because$

$\mathbf{B}=\mathbf{I}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $\sigma(\mathbf{A})=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，

$\therefore \sigma(\mathbf{B})=\{1+\mathrm{i},1-\mathrm{i}\}$。$\mathbf{Q}^H\mathbf{BQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$。

$\because \mathbf{C}=2\mathrm{i}\mathbf{I}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & -1 \\ 1 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ 且 $\sigma(\mathbf{A})=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，$\therefore \sigma(\mathbf{B})=\{3\mathrm{i},\ \mathrm{i}\}$。

$\mathbf{Q}^H\mathbf{CQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$。

③. $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，则某酉阵 $\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n)$，使 $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，如果所有的特征根中有 $s$ 个不同的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，其对应的单位特征向量为 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_s$，特征根 $\lambda_i$ 的重复度为 $n_i$。把矩阵 $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 中相同的特征根写在一起，可以得到

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_s\mathbf{I}_{n_s}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_s\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mathbf{I}_{n_s}\end{pmatrix}。$$

∴

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_s\mathbf{I}_{n_s}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\lambda_1\mathbf{Q}^H\begin{pmatrix}\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H+\cdots+\lambda_s\mathbf{Q}\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mathbf{I}_{n_s}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_s\mathbf{G}_s$$

。

（3）正规阵谱公式

矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，有 $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_s\mathbf{G}_s$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为互异根，$\mathbf{G}_1,\cdots,\mathbf{G}_s$ 为 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的谱阵，并有：

① $\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{G}_i$；② $\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j=0\ (i\neq j)$；③ $\mathbf{G}_i^2=\mathbf{G}_i=\mathbf{G}_i^H$；④ $\sum_{i=1}^{s}\mathbf{G}_i=\mathbf{I}_n$；⑤ $r(\mathbf{G}_i)=n_i$；

⑥ $f(\mathbf{A})=f(\lambda_1)\mathbf{G}_1+\cdots+f(\lambda_s)\mathbf{G}_s$。

其中 $\mathbf{G}_i$ 的计算公式如下：

$\mathbf{G}_1=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_s)}$，记作：$\mathbf{G}_1=\dfrac{\cancel{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_s)}$；

$\mathbf{G}_2=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\cdots(\lambda_2-\lambda_s)}$，记作：

$\mathbf{G}_2=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)\cdots(\lambda_2-\lambda_s)}$；

……

$\mathbf{G}_s=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{s-1}\mathbf{I})}{(\lambda_s-\lambda_1)(\lambda_s-\lambda_2)\cdots(\lambda_s-\lambda_{s-1})}$，记作：

$\mathbf{G}_s=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{s-1}\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_s-\lambda_1)(\lambda_s-\lambda_2)\cdots(\lambda_s-\lambda_{s-1})(\lambda_s-\lambda_s)}$。

若正规矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 有 3 个不同根，则有：$\mathbf{G}_1=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$；$\mathbf{G}_2=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}$；

$\mathbf{G}_3=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$。

若正规矩阵$\mathbf{A}_{n\times n}$有2个不同根，则有：$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$；$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}$。

证明：正规矩阵$\mathbf{A}_{n\times n}$有2个不同根，则有：$\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\lambda_2\mathbf{G}_2$，矩阵$\mathbf{B}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{C}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$ 可以分别得到：

$\mathbf{B}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}=(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{G}_1+(\lambda_2-\lambda_2)\mathbf{G}_2=(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{G}_1$，即$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$；

$\mathbf{C}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}=(\lambda_1-\lambda_1)\mathbf{G}_1+(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{G}_2=(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{G}_2$，即：$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}$。

例1：正规阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^{100}$的谱分解。

解：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-1&0&2\\0&x&0\\2&0&x-4\end{vmatrix}=(x-1)x(x-4)-4x=(x-5)x^2$，$\lambda_1=5$，$\lambda_2=0$。

$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{1}{5}\mathbf{A}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4&0&2\\0&5&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，∴ $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\lambda_2\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=5^{100}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}=5^{99}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}。$$

例2：正规阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^{100}$的谱分解。

解：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-2&-1\\-1&x-2\end{vmatrix}=(x-2)^2-1=(x-3)(x-1)$，$\lambda_1=3$，$\lambda_2=1$。

$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$。∴ $\mathbf{A}=3\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=3^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+1^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^{100}+1&3^{100}-1\\3^{100}-1&3^{100}+1\end{pmatrix}。$$

例 2：正规阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^{100}$的谱分解。

解：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-2&-1&0\\-1&x-2&0\\0&0&x-3\end{vmatrix}=(x-3)\left[(x-2)^2-1\right]=(x-3)^2(x-1)$，$\lambda_1=3$，$\lambda_2=1$。

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}，\mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}，\therefore$$

$\mathbf{A}=3\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=3^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+1^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^{100}+1&3^{100}-1&0\\3^{100}-1&3^{100}+1&0\\0&0&2\times3^{100}\end{pmatrix}$$

。

分块公式：$\mathbf{A}^k=\begin{pmatrix}\mathbf{B}&0\\0&\mathbf{C}\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^k&0\\0&\mathbf{C}^k\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$，$k=1,2,3,\cdots$。

例 3：正规阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^{100}$的谱分解。（第 5 页例 5）

解：可求得：$\lambda_1=8$，$\lambda_2=-4$。

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\\3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}-9&-3&3&-3\\-3&-9&-3&3\\3&-3&-9&-3\\-3&3&-3&-9\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\-1&1&3&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}，\therefore\mathbf{A}=8\mathbf{G}_1-4\mathbf{G}_2。$$

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=8^{100}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}+(-4)^{100}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\-1&1&3&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}。$$

**8. 单纯矩阵谱分解**

（1）单纯阵的定义：矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 相似于对角阵，即有 $\mathbf{P}^H\mathbf{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，且矩阵 $\mathbf{P}$ 的各列向量（各列向量不一定正交）为矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 所对应的特征向量，则称矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为单纯阵。

（2）单纯矩阵谱分解公式

矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为单纯阵，有 $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_s\mathbf{G}_s$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为互异根，$\mathbf{G}_1,\cdots,\mathbf{G}_s$ 为 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的谱阵，并有：

① $\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{G}_i$；② $\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j=0\ (i\neq j)$；③ $\mathbf{G}_i^2=\mathbf{G}_i$；④ $\sum_{i=1}^{s}\mathbf{G}_i=\mathbf{I}_n$；⑤ $r(\mathbf{G}_i)=n_i$；⑥ $f(\mathbf{A})=f(\lambda_1)\mathbf{G}_1+\cdots+f(\lambda_s)\mathbf{G}_s$。

（3）如何判定单纯矩阵

①矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 有互异根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，若 $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})=0$，则矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为单纯阵，矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的极小多项式为 $\mathrm{m}(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_s)$；若 $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})\neq 0$，则矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 不是单纯阵。

②特征多项式 $f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ 无重根，则矩阵 $\mathbf{A}$ 为单纯阵。

（4）极小多项式和零化式的定义及性质

①若多项式 $\mathrm{m}(x)$ 满足 $\mathrm{m}(\mathbf{A})=0$，且 $\mathrm{m}(x)$ 的次数最小，则称 $\mathrm{m}(x)$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的极小多项式。

②若多项式 $f(x)$ 满足 $f(\mathbf{A})=0$，则称 $f(x)$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的零化式，零化式不唯一。

③特征多项式 $f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ 一定是零化式。

④极小多项式一定是特征多项式的因式。

⑤极小多项式必为每个零化式的因式。

（5）求极小多项式的方法：

①设特征多项式 $f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=(x-a)^2(x-b)$，计算 $(\mathbf{A}-a\mathbf{I})(\mathbf{A}-b\mathbf{I})$，若为零，则 $\mathrm{m}(x)=(x-a)(x-b)$；若不为零，则 $\mathrm{m}(x)=(x-a)^2(x-b)$，$a\neq b$。

②设特征多项式 $f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=(x-a)(x-b)(x-c)$，则 $\mathrm{m}(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，$a\neq b\neq c$。

例 1：矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=0$，$f(x)=x^2+3x+2=(x+2)(x+1)=0$ 无重根，矩阵 $\mathbf{A}$ 为单纯阵。

例 2：判定 $\mathbf{A}$ 是否为单纯阵，对单纯阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{100}$ 进行谱分解。$\mathbf{A}=$ ① $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ ②

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} ② \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}。$$

解：①. $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)^2$，$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 1$，矩阵的极小多项式为 $\mathrm{m}(x) = (x-2)(x-1)$，

$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$，故矩阵 $\mathbf{A}$ 是单纯阵。

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}，\therefore \mathbf{A} = 2\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2。$$

$$\mathbf{A}^{100} = \lambda_1^{100}\mathbf{G}_1 + \lambda_2^{100}\mathbf{G}_2 = 2^{100}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1^{100}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{100}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100}-1 & 1 \end{pmatrix}。$$

②. $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x-4 & -6 & 0 \\ 3 & x+5 & 0 \\ 3 & 6 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)[(x-4)(x+5)+18] = (x-1)^2(x+2)$，$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -2$，验证矩阵的极小多项式为 $\mathrm{m}(x) = (x-1)(x+2)$，

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = 0$，故矩阵 $\mathbf{A}$ 是单纯阵。

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}，\therefore \mathbf{A} = \mathbf{G}_1 - 2\mathbf{G}_2。$$

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=1^{100}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}+(-2)^{100}\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}。$$

③. $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-1&-1&0\\0&x-1&0\\0&0&x-2\end{vmatrix}=(x-1)^2(x-2)$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，设 $\mathrm{m}(x)=(x-1)(x-2)$,

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$，故矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 不是单纯阵。

由 24 页的分块公式知。$\mathbf{A}^{100}=\begin{pmatrix}1&100&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}$。

**9. 广谱公式**

**7. 正规阵谱分解**

（1）正规矩阵的定义：矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 满足条件 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^H$，则称矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵。

正规阵举例：①. 对角阵 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$ 是正规阵；

②. Hermite 矩阵（$\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$）和斜 Hermite 矩阵（$\mathbf{A}^H=-\mathbf{A}$）都是正规阵；

③. 实对称矩阵（$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$）和反实对称矩阵（$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$）都是正规阵；

④. 酉阵（$\mathbf{A}\mathbf{A}^H=\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{I}$）是正规阵；

⑤. 若矩阵 $\mathbf{A}$ 是正规阵，矩阵 $\mathbf{Q}$ 是酉阵，则矩阵 $\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 也是正规阵；

⑥. 若矩阵 $\mathbf{A}$ 是正规阵，有函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$，则矩阵 $\mathbf{F}=f(\mathbf{A})=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}^2+\cdots+a_k\mathbf{A}^k$ 也为正规阵。

证明：⑤矩阵 $\mathbf{A}$ 是正规阵，则 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^H$，矩阵 $\mathbf{Q}$ 是酉阵，则 $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H=\mathbf{I}$。令 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}$，

$\mathbf{B}\mathbf{B}^H=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q})^H=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}$，

$\mathbf{B}^H\mathbf{B}=(\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q})^H\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{B}\mathbf{B}^H$，故矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 也是正规阵。

例 1：矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 为实反对称，所以矩阵 $\mathbf{A}$ 为正规阵，矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 和矩阵 $\mathbf{C}=\mathbf{I}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 都是正规阵。

（2）三角正规引理：若三角矩阵正规，则此三角矩阵为对角阵.

例 1：三角阵 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$ 为正规阵，则 $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$。

证明：$\mathbf{D}$ 为正规阵，则有 $\mathbf{D}^H\mathbf{D}=\mathbf{D}\mathbf{D}^H$。

$$\mathbf{D}\mathbf{D}^H=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{a}_{11} & 0 & 0\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & 0\\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\bar{a}_{11}+a_{12}\bar{a}_{12}+a_{13}\bar{a}_{13} & * & *\\ * & a_{22}\bar{a}_{22}+a_{23}\bar{a}_{23} & *\\ * & * & a_{33}\bar{a}_{33}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^H\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\bar{a}_{11} & 0 & 0\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & 0\\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\bar{a}_{11} & * & *\\ * & a_{12}\bar{a}_{12}+a_{22}\bar{a}_{22} & *\\ * & * & a_{13}\bar{a}_{13}+a_{23}\bar{a}_{23}+a_{33}\bar{a}_{33}\end{pmatrix}$$

故：$\begin{cases}a_{11}\bar{a}_{11}+a_{12}\bar{a}_{12}+a_{13}\bar{a}_{13}=a_{11}\bar{a}_{11}\\ a_{22}\bar{a}_{22}+a_{23}\bar{a}_{23}=a_{12}\bar{a}_{12}+a_{22}\bar{a}_{22}\\ a_{33}\bar{a}_{33}=a_{13}\bar{a}_{13}+a_{23}\bar{a}_{23}+a_{33}\bar{a}_{33}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a_{12}|^2+|a_{13}|^2=0\\ |a_{23}|^2=|a_{12}|^2\\ |a_{13}|^2+|a_{23}|^2=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a_{12}=0\\ a_{13}=0\\ a_{23}=0\end{cases}$。

（3）正规阵性质

①. 方阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，则存在酉阵 $\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_1\ \cdots\ \mathbf{q}_n)$，使 $\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，

$\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，且 $\mathbf{Q}$ 的各列向量 $\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_n$ 为特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 对应的特征向量。

可知正规阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 恰有 $n$ 个正交的特征向量。

②. $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，则对任一酉阵 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 为正规阵。

例 1：求由矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{C}=2\mathrm{i}\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 的三角化转换。

解：可得：$\sigma(\mathbf{A})=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，$x_1=\mathrm{i}$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}$，$x_2=-\mathrm{i}$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$。

令 $\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ 。 $\because$ $\mathbf{B}=\mathbf{I}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $\sigma(\mathbf{A})=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，

$\therefore \sigma(\mathbf{B})=\{1+\mathrm{i},1-\mathrm{i}\}$。$\mathbf{Q}^H\mathbf{BQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$。

$\because \mathbf{C}=2\mathrm{i}\mathbf{I}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & -1 \\ 1 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ 且 $\sigma(\mathbf{A})=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，$\therefore \sigma(\mathbf{B})=\{3\mathrm{i},\ \mathrm{i}\}$。

$\mathbf{Q}^H\mathbf{CQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$。

③. $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，则某酉阵 $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n\end{pmatrix}$，使 $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，如果所有的特征根中有 $s$ 个不同的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，其对应的单位特征向量为 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_s$，特征根 $\lambda_i$ 的重复度为 $n_i$ 。把矩阵 $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 中相同的特征根写在一起，可以得到

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_s\mathbf{I}_{n_s} \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}+\cdots+\lambda_s\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{I}_{n_s} \end{pmatrix}。$$

$\therefore$

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_s\mathbf{I}_{n_s} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\lambda_1\mathbf{Q}^H\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\mathbf{Q}^H+\cdots+\lambda_s\mathbf{Q}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{I}_{n_s} \end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_s\mathbf{G}_s$$

。

（3）正规阵谱公式

矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，有 $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_s\mathbf{G}_s$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为互异根，$\mathbf{G}_1,\cdots,\mathbf{G}_s$ 为 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的谱阵，并有：

① $\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{G}_i$；② $\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j=0\ (i\neq j)$；③ $\mathbf{G}_i^2=\mathbf{G}_i=\mathbf{G}_i^H$；④ $\sum_{i=1}^{s}\mathbf{G}_i=\mathbf{I}_n$；⑤ $r(\mathbf{G}_i)=n_i$；

⑥ $f(\mathbf{A})=f(\lambda_1)\mathbf{G}_1+\cdots+f(\lambda_s)\mathbf{G}_s$。

其中 $\mathbf{G}_i$ 的计算公式如下：

$$\mathbf{G}_1=\frac{(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_s)}\text{，记作：}\mathbf{G}_1=\frac{\cancel{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_s)}；$$

$\mathbf{G}_2=\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\cdots(\lambda_2-\lambda_s)}$，记作：

$\mathbf{G}_2=\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\cancel{(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})}(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)\cancel{(\lambda_2-\lambda_2)}(\lambda_2-\lambda_3)\cdots(\lambda_2-\lambda_s)}$；

……

$\mathbf{G}_s=\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{s-1}\mathbf{I})}{(\lambda_s-\lambda_1)(\lambda_s-\lambda_2)\cdots(\lambda_s-\lambda_{s-1})}$，记作：

$\mathbf{G}_s=\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{s-1}\mathbf{I})\cancel{(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}}{(\lambda_s-\lambda_1)(\lambda_s-\lambda_2)\cdots(\lambda_s-\lambda_{s-1})\cancel{(\lambda_s-\lambda_s)}}$。

若正规矩阵$\mathbf{A}_{n\times n}$有 3 个不同根，则有：$\mathbf{G}_1=\frac{(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$；$\mathbf{G}_2=\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}$；

$\mathbf{G}_3=\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$。

若正规矩阵$\mathbf{A}_{n\times n}$有 2 个不同根，则有：$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$；$\mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}$。

证明：正规矩阵$\mathbf{A}_{n\times n}$有 2 个不同根，则有：$\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\lambda_2\mathbf{G}_2$，矩阵$\mathbf{B}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}$和$\mathbf{C}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$可以分别得到：

$\mathbf{B}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}=(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{G}_1+(\lambda_2-\lambda_2)\mathbf{G}_2=(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{G}_1$，即$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$；

$\mathbf{C}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}=(\lambda_1-\lambda_1)\mathbf{G}_1+(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{G}_2=(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{G}_2$，即：$\mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}$。

例 1：正规阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^{100}$的谱分解。

解：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-1&0&2\\0&x&0\\2&0&x-4\end{vmatrix}=(x-1)x(x-4)-4x=(x-5)x^2$，$\lambda_1=5$，$\lambda_2=0$。

$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{5}\mathbf{A}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&0&2\\0&5&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，∴

$\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\lambda_2\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=5^{100}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}=5^{99}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}。$$

例 2：正规阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{100}$ 的谱分解。

解：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-2&-1\\-1&x-2\end{vmatrix}=(x-2)^2-1=(x-3)(x-1)$，$\lambda_1=3$，$\lambda_2=1$。

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}，\quad \mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}。\quad\therefore$$

$\mathbf{A}=3\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=3^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+1^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^{100}+1&3^{100}-1\\3^{100}-1&3^{100}+1\end{pmatrix}。$$

例 2：正规阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{100}$ 的谱分解。

解：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-2&-1&0\\-1&x-2&0\\0&0&x-3\end{vmatrix}=(x-3)\left[(x-2)^2-1\right]=(x-3)^2(x-1)$，$\lambda_1=3$，$\lambda_2=1$。

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}，\mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}，\therefore$$

$\mathbf{A}=3\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=3^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+1^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^{100}+1&3^{100}-1&0\\3^{100}-1&3^{100}+1&0\\0&0&2\times3^{100}\end{pmatrix}$$

。

分块公式：$\mathbf{A}^k=\begin{pmatrix}\mathbf{B}&0\\0&\mathbf{C}\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^k&0\\0&\mathbf{C}^k\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$，$k=1,2,3,\cdots$。

例 3：正规阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{100}$ 的谱分解。（第 5 页例 5）

解：可求得：$\lambda_1=8$，$\lambda_2=-4$。

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\\3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}-9&-3&3&-3\\-3&-9&-3&3\\3&-3&-9&-3\\-3&3&-3&-9\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\-1&1&3&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}，\therefore \mathbf{A}=8\mathbf{G}_1-4\mathbf{G}_2。$$

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=8^{100}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}+(-4)^{100}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\-1&1&3&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}。$$

**8. 单纯矩阵谱分解**

（1）单纯阵的定义：矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 相似于对角阵，即有 $\mathbf{P}^H\mathbf{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，且矩阵 $\mathbf{P}$ 的各列向量（各列向量不一定正交）为矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 所对应的特征向量，则称矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为单纯阵。

（2）单纯矩阵谱分解公式

矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为单纯阵，有 $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_s\mathbf{G}_s$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为互异根，$\mathbf{G}_1,\cdots,\mathbf{G}_s$ 为 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的谱阵，并有：

① $\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{G}_i$；② $\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j=0\ (i\neq j)$；③ $\mathbf{G}_i^2=\mathbf{G}_i$；④ $\sum_{i=1}^{s}\mathbf{G}_i=\mathbf{I}_n$；⑤ $r(\mathbf{G}_i)=n_i$；⑥

$f(\mathbf{A})=f(\lambda_1)\mathbf{G}_1+\cdots+f(\lambda_s)\mathbf{G}_s$。

（3）如何判定单纯矩阵

①矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 有互异根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，若 $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})=0$，则矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为单纯阵，矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的极小多项式为 $\mathrm{m}(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_s)$；若 $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})\neq 0$，则矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 不是单纯阵。

②特征多项式 $f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ 无重根，则矩阵 $\mathbf{A}$ 为单纯阵。

（4）极小多项式和零化式的定义及性质

①若多项式$\mathrm{m}(x)$满足$\mathrm{m}(\mathbf{A})=0$，且$\mathrm{m}(x)$的次数最小，则称$\mathrm{m}(x)$是矩阵$\mathbf{A}$的极小多项式。

②若多项式$f(x)$满足$f(\mathbf{A})=0$，则称$f(x)$是矩阵$\mathbf{A}$的零化式，零化式不唯一。

③特征多项式$f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$一定是零化式。

④极小多项式一定是特征多项式的因式。

⑤极小多项式必为每个零化式的因式。

（5）求极小多项式的方法：

①设特征多项式$f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=(x-a)^2(x-b)$，计算$(\mathbf{A}-a\mathbf{I})(\mathbf{A}-b\mathbf{I})$，若为零，则$\mathrm{m}(x)=(x-a)(x-b)$；若不为零，则$\mathrm{m}(x)=(x-a)^2(x-b)$，$a\neq b$。

②设特征多项式$f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=(x-a)(x-b)(x-c)$，则$\mathrm{m}(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，$a\neq b\neq c$。

例 1：矩阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=0$，$f(x)=x^2+3x+2=(x+2)(x+1)=0$无重根，矩阵$\mathbf{A}$为单纯阵。

例 2：判定$\mathbf{A}$是否为单纯阵，对单纯阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^{100}$进行谱分解。$\mathbf{A}=$①$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$②$\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$②$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。

解：①. $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-1&-1&0\\0&x-2&0\\0&-1&x-1\end{vmatrix}=(x-2)(x-1)^2$，$\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，矩阵的极小多项式为$\mathrm{m}(x)=(x-2)(x-1)$，

$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I})=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=0$，故矩阵$\mathbf{A}$是单纯阵。

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=-\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}，\therefore \mathbf{A}=2\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2。$$

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=2^{100}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}+1^{100}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^{100}-1&0\\0&0&0\\0&2^{100}-1&1\end{pmatrix}。$$

②. $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-4&-6&0\\3&x+5&0\\3&6&x-1\end{vmatrix}=(x-1)[(x-4)(x+5)+18]=(x-1)^2(x+2)$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$，验证矩阵的极小多项式为 $\mathrm{m}(x)=(x-1)(x+2)$，

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+2\mathbf{I})=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}=0$，故矩阵 $\mathbf{A}$ 是单纯阵。

$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$，

$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}$，$\therefore$ $\mathbf{A}=\mathbf{G}_1-2\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=1^{100}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}+(-2)^{100}\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}。$$

③. $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-1&-1&0\\0&x-1&0\\0&0&x-2\end{vmatrix}=(x-1)^2(x-2)$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，设 $\mathrm{m}(x)=(x-1)(x-2)$,

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$，故矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 不是单纯阵。

由 24 页的分块公式知。$\mathbf{A}^{100}=\begin{pmatrix}1&100&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}$。

**9. 广谱公式**

**7. 正规阵谱分解**

（1）正规矩阵的定义：矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 满足条件 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^H$，则称矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵。

正规阵举例：①. 对角阵 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 是正规阵；

②. Hermite 矩阵（$\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$）和斜 Hermite 矩阵（$\mathbf{A}^H=-\mathbf{A}$）都是正规阵；

③. 实对称矩阵（$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$）和反实对称矩阵（$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$）都是正规阵；

④. 酉阵（$\mathbf{AA}^H=\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{I}$）是正规阵；

⑤. 若矩阵 $\mathbf{A}$ 是正规阵，矩阵 $\mathbf{Q}$ 是酉阵，则矩阵 $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}$ 也是正规阵；

⑥. 若矩阵 $\mathbf{A}$ 是正规阵，有函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$，则矩阵 $\mathbf{F}=f(\mathbf{A})=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}^2+\cdots+a_k\mathbf{A}^k$ 也为正规阵。

证明：⑤矩阵 $\mathbf{A}$ 是正规阵，则 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{AA}^H$，矩阵 $\mathbf{Q}$ 是酉阵，则 $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}=\mathbf{QQ}^H=\mathbf{I}$。令 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}$，

$\mathbf{BB}^H=\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}\right)^H=\mathbf{Q}^H\mathbf{AQQ}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{AA}^H\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{AQ}$，

$\mathbf{B}^H\mathbf{B}=\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}\right)^H\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{QQ}^H\mathbf{AQ}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{AQ}=\mathbf{BB}^H$，故矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}$ 也是正规阵。

例 1：矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 为实反对称，所以矩阵 $\mathbf{A}$ 为正规阵，矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 和矩阵 $\mathbf{C}=\mathbf{I}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 都是正规阵。

（2）三角正规引理：若三角矩阵正规，则此三角矩阵为对角阵.

例 1：三角阵 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$ 为正规阵，则 $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$。

证明：$\mathbf{D}$ 为正规阵，则有 $\mathbf{D}^H\mathbf{D}=\mathbf{DD}^H$。

$$\mathbf{DD}^H=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{a}_{11} & 0 & 0\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & 0\\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\bar{a}_{11}+a_{12}\bar{a}_{12}+a_{13}\bar{a}_{13} & * & *\\ * & a_{22}\bar{a}_{22}+a_{23}\bar{a}_{23} & *\\ * & * & a_{33}\bar{a}_{33}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^H\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\bar{a}_{11} & 0 & 0\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & 0\\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\bar{a}_{11} & * & *\\ * & a_{12}\bar{a}_{12}+a_{22}\bar{a}_{22} & *\\ * & * & a_{13}\bar{a}_{13}+a_{23}\bar{a}_{23}+a_{33}\bar{a}_{33}\end{pmatrix}$$

故：$\begin{cases} a_{11}\bar{a}_{11}+a_{12}\bar{a}_{12}+a_{13}\bar{a}_{13}=a_{11}\bar{a}_{11} \\ a_{22}\bar{a}_{22}+a_{23}\bar{a}_{23}=a_{12}\bar{a}_{12}+a_{22}\bar{a}_{22} \\ a_{33}\bar{a}_{33}=a_{13}\bar{a}_{13}+a_{23}\bar{a}_{23}+a_{33}\bar{a}_{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_{12}|^2+|a_{13}|^2=0 \\ |a_{23}|^2=|a_{12}|^2 \\ |a_{13}|^2+|a_{23}|^2=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} a_{12}=0 \\ a_{13}=0 \\ a_{23}=0 \end{cases}$。

（3）正规阵性质

①. 方阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，则存在酉阵 $\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n)$，使 $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，

$\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，且 $\mathbf{Q}$ 的各列向量 $\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_n$ 为特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 对应的特征向量。

可知正规阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 恰有 $n$ 个正交的特征向量。

②. $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，则对任一酉阵 $\mathbf{Q}$， $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}$ 为正规阵。

例 1：求由矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$， $\mathbf{B}=\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{C}=2\mathrm{i}\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 的三角化转换。

解：可得：$\sigma(\mathbf{A})=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，$x_1=\mathrm{i}$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$， $x_2=-\mathrm{i}$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$。

令 $\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$， $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$。 $\because$

$\mathbf{B}=\mathbf{I}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $\sigma(\mathbf{A})=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，

$\therefore \sigma(\mathbf{B})=\{1+\mathrm{i},1-\mathrm{i}\}$。 $\mathbf{Q}^H\mathbf{BQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$。

$\because \mathbf{C}=2\mathrm{i}\mathbf{I}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & -1 \\ 1 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ 且 $\sigma(\mathbf{A})=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，$\therefore \sigma(\mathbf{B})=\{3\mathrm{i},\ \mathrm{i}\}$。

$\mathbf{Q}^H\mathbf{CQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$。

③. $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，则某酉阵 $\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n)$，使 $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，如果所有的特征根中有 $s$ 个不同的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，其对应的单位特征向量为 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_s$，特征根 $\lambda_i$ 的重复度为 $n_i$。把矩阵 $\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 中相同的特征根写在一起，可以得到

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_s\mathbf{I}_{n_s}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_s\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mathbf{I}_{n_s}\end{pmatrix}。$$

∴

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_s\mathbf{I}_{n_s}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\lambda_1\mathbf{Q}^H\begin{pmatrix}\mathbf{I}_{n_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H+\cdots+\lambda_s\mathbf{Q}\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mathbf{I}_{n_s}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_s\mathbf{G}_s$$

。

（3）正规阵谱公式

矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为正规阵，有 $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_s\mathbf{G}_s$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为互异根，$\mathbf{G}_1,\cdots,\mathbf{G}_s$ 为 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的谱阵，并有：

① $\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{G}_i$；② $\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j=0\ (i\neq j)$；③ $\mathbf{G}_i^2=\mathbf{G}_i=\mathbf{G}_i^H$；④ $\sum_{i=1}^{s}\mathbf{G}_i=\mathbf{I}_n$；⑤ $r(\mathbf{G}_i)=n_i$；

⑥ $f(\mathbf{A})=f(\lambda_1)\mathbf{G}_1+\cdots+f(\lambda_s)\mathbf{G}_s$。

其中 $\mathbf{G}_i$ 的计算公式如下：

$\mathbf{G}_1=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_s)}$，记作：$\mathbf{G}_1=\dfrac{\cancel{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_s)}$；

$\mathbf{G}_2=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\cdots(\lambda_2-\lambda_s)}$，记作：

$\mathbf{G}_2=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)\cdots(\lambda_2-\lambda_s)}$；

……

$\mathbf{G}_s=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{s-1}\mathbf{I})}{(\lambda_s-\lambda_1)(\lambda_s-\lambda_2)\cdots(\lambda_s-\lambda_{s-1})}$，记作：

$\mathbf{G}_s=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{s-1}\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})}{(\lambda_s-\lambda_1)(\lambda_s-\lambda_2)\cdots(\lambda_s-\lambda_{s-1})(\lambda_s-\lambda_s)}$。

若正规矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 有 3 个不同根，则有：$\mathbf{G}_1=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$；$\mathbf{G}_2=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}$；

$\mathbf{G}_3=\dfrac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$。

若正规矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 有 2 个不同根，则有：$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$；$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}$。

证明：正规矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 有 2 个不同根，则有：$\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\lambda_2\mathbf{G}_2$，矩阵 $\mathbf{B}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{C}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$ 可以分别得到：

$\mathbf{B}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}=(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{G}_1+(\lambda_2-\lambda_2)\mathbf{G}_2=(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{G}_1$，即 $\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}$；

$\mathbf{C}=f(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}=(\lambda_1-\lambda_1)\mathbf{G}_1+(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{G}_2=(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{G}_2$，即：$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}$。

例 1：正规阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{100}$ 的谱分解。

解：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-1&0&2\\0&x&0\\2&0&x-4\end{vmatrix}=(x-1)x(x-4)-4x=(x-5)x^2$，$\lambda_1=5$，$\lambda_2=0$。

$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{1}{5}\mathbf{A}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$，$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4&0&2\\0&5&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，$\therefore$ $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\lambda_2\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=5^{100}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}=5^{99}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}。$$

例 2：正规阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{100}$ 的谱分解。

解：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-2&-1\\-1&x-2\end{vmatrix}=(x-2)^2-1=(x-3)(x-1)$，$\lambda_1=3$，$\lambda_2=1$。

$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$。$\therefore$ $\mathbf{A}=3\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=3^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+1^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^{100}+1&3^{100}-1\\3^{100}-1&3^{100}+1\end{pmatrix}。$$

例 2：正规阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{100}$ 的谱分解。

解：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-2&-1&0\\-1&x-2&0\\0&0&x-3\end{vmatrix}=(x-3)\left[(x-2)^2-1\right]=(x-3)^2(x-1)$，$\lambda_1=3$，$\lambda_2=1$。

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}，\ \mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}，\ \therefore$$

$\mathbf{A}=3\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$。

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=3^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+1^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^{100}+1&3^{100}-1&0\\3^{100}-1&3^{100}+1&0\\0&0&2\times3^{100}\end{pmatrix}$$

。

分块公式：$\mathbf{A}^k=\begin{pmatrix}\mathbf{B}&0\\0&\mathbf{C}\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^k&0\\0&\mathbf{C}^k\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$，$k=1,2,3,\cdots$。

例 3：正规阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{100}$ 的谱分解。（第 5 页例 5）

解：可求得：$\lambda_1=8$，$\lambda_2=-4$。

$$\mathbf{G}_1=\frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\\3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2=\frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}-9&-3&3&-3\\-3&-9&-3&3\\3&-3&-9&-3\\-3&3&-3&-9\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\-1&1&3&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}，\ \therefore \mathbf{A}=8\mathbf{G}_1-4\mathbf{G}_2。$$

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=8^{100}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}+(-4)^{100}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\-1&1&3&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}。$$

**8. 单纯矩阵谱分解**

（1）单纯阵的定义：矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 相似于对角阵，即有 $\mathbf{P}^H\mathbf{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，且矩阵 $\mathbf{P}$ 的各列向量（各列向量不一定正交）为矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 所对应的特征向量，则称矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为单纯阵。

（2）单纯矩阵谱分解公式

矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为单纯阵，有 $\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{G}_1+\cdots+\lambda_s\mathbf{G}_s$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为互异根，$\mathbf{G}_1,\cdots,\mathbf{G}_s$ 为 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的谱阵，并有：

① $\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{G}_i$；② $\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j=0\ (i\neq j)$；③ $\mathbf{G}_i^2=\mathbf{G}_i$；④ $\sum_{i=1}^{s}\mathbf{G}_i=\mathbf{I}_n$；⑤ $r(\mathbf{G}_i)=n_i$；⑥ $f(\mathbf{A})=f(\lambda_1)\mathbf{G}_1+\cdots+f(\lambda_s)\mathbf{G}_s$。

（3）如何判定单纯矩阵

①矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 有互异根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，若 $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})=0$，则矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 为单纯阵，矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 的极小多项式为 $\mathrm{m}(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_s)$；若 $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_s\mathbf{I})\neq 0$，则矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 不是单纯阵。

②特征多项式 $f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ 无重根，则矩阵 $\mathbf{A}$ 为单纯阵。

（4）极小多项式和零化式的定义及性质

①若多项式 $\mathrm{m}(x)$ 满足 $\mathrm{m}(\mathbf{A})=0$，且 $\mathrm{m}(x)$ 的次数最小，则称 $\mathrm{m}(x)$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的极小多项式。

②若多项式 $f(x)$ 满足 $f(\mathbf{A})=0$，则称 $f(x)$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的零化式，零化式不唯一。

③特征多项式 $f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ 一定是零化式。

④极小多项式一定是特征多项式的因式。

⑤极小多项式必为每个零化式的因式。

（5）求极小多项式的方法：

①设特征多项式 $f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=(x-a)^2(x-b)$，计算 $(\mathbf{A}-a\mathbf{I})(\mathbf{A}-b\mathbf{I})$，若为零，则 $\mathrm{m}(x)=(x-a)(x-b)$；若不为零，则 $\mathrm{m}(x)=(x-a)^2(x-b)$，$a\neq b$。

②设特征多项式 $f(x)=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=(x-a)(x-b)(x-c)$，则 $\mathrm{m}(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，$a\neq b\neq c$。

例 1：矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=0$，$f(x)=x^2+3x+2=(x+2)(x+1)=0$ 无重根，矩阵 $\mathbf{A}$ 为单纯阵。

例 2：判定 $\mathbf{A}$ 是否为单纯阵，对单纯阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^{100}$ 进行谱分解。$\mathbf{A}=$① $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ ②

$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。

解：①. $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)^2$，$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 1$，矩阵的极小多项式为 $\mathrm{m}(x) = (x-2)(x-1)$，

$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$，故矩阵 $\mathbf{A}$ 是单纯阵。

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}，\therefore \mathbf{A} = 2\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2。$$

$$\mathbf{A}^{100} = \lambda_1^{100}\mathbf{G}_1 + \lambda_2^{100}\mathbf{G}_2 = 2^{100}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1^{100}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{100}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100}-1 & 1 \end{pmatrix}。$$

②. $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x-4 & -6 & 0 \\ 3 & x+5 & 0 \\ 3 & 6 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)[(x-4)(x+5)+18] = (x-1)^2(x+2)$，$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -2$，验证矩阵的极小多项式为 $\mathrm{m}(x) = (x-1)(x+2)$，

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = 0$，故矩阵 $\mathbf{A}$ 是单纯阵。

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}，\therefore \mathbf{A} = \mathbf{G}_1 - 2\mathbf{G}_2。$$

$$\mathbf{A}^{100}=\lambda_1^{100}\mathbf{G}_1+\lambda_2^{100}\mathbf{G}_2=1^{100}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}+(-2)^{100}\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}。$$

③．$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-1&-1&0\\0&x-1&0\\0&0&x-2\end{vmatrix}=(x-1)^2(x-2)$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，设

$\mathrm{m}(x)=(x-1)(x-2)$,

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$，故矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 不是单纯阵。

由 24 页的分块公式知。$\mathbf{A}^{100}=\begin{pmatrix}1&100&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}$。

**9. 广谱公式**