定义：矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A_0 + A_1 + \cdots + A_k + \cdots$ 收敛于 A

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}(A_0 + A_1 + \cdots + A_k) = A，\quad 其中 A_k \in \mathrm{C}^{n\times n}$$

记为 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A_0 + A_1 + \cdots + A_k + \cdots = \mathrm{A}$

引理：**绝对收敛本身必收敛**，即

若 $\sum_{k=0}^{\infty}\|A_k\| = \|A_0\| + \|A_1\| + \cdots + \|A_k\| + \cdots$ 收敛（用某一范数），则 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 收敛

（证略）

引理 1*：(1)若某个范数 $\|A\| < 1$ 则 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + \cdots + A^k + \cdots$ 绝对收敛

(2) $\rho(A) < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 绝对收敛

Pf：(1) $\|A\| < 1 \Rightarrow \|A^k\| \le \|A\|^k$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k = \dfrac{\|I\|}{1-\|A\|}$（绝对收敛）

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + \cdots + A^k + \cdots \text{绝对收敛}$$

(2) $\rho(A) < 1 \Rightarrow$ 某范数 $\|A\| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 绝对收敛

引理 2* 若 $\rho(A) < 1$，则 $I + A + \cdots + A^k + \cdots = (I - A)^{-1}$

Pf：由**引理 1***可知 $(I + A + \cdots + A^k + \cdots)$ 收敛

$$\Rightarrow (I - A)(I + A + \cdots + A^k + \cdots) = I(I + A + \cdots + A^k + \cdots) - A(I + A + \cdots + A^k + \cdots)$$

$$= (I + A + \cdots + A^k + \cdots) - (A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots) = I$$

即 $(I - A)(I + A + \cdots + A^k + \cdots) = I$，由可逆阵定义可得

$$(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^k + \cdots \qquad \text{证毕}$$

推论：若某个范数 $\|A\| < 1$，则 $I + A + \cdots + A^k + \cdots = (I - A)^{-1}$

……………………………………………………………………………………

算子范数(诱导范数)

定理 1：C^n 上任一向量范数$\|x\|_v$ 都产生一个矩阵范数 $\|A\|=\max\limits_{x\neq 0}\{\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\}$， $x\in C^n$

且有相容关系 $\|Ax\|_v\le\|A\|\bullet\|x\|_v$；这种范数$\|A\|$叫算子范数

备注：算子范数公式$\|A\|=\max\limits_{x\neq 0}\{\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\}$可改写为公式$\|\mathbf{A}\|=\max\limits_{\|x\|_v=1}\|\mathbf{A}x\|_v$

即 $\|A\|=\max\limits_{x\neq 0}\{\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\}\Leftrightarrow\|A\|=\max\limits_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v$

$\because\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$,且$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|=1$,,令$Y=\frac{x}{\|x\|}$，可写$\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|=\|AY\|,\|Y\|=1$

故$\|A\|=\max\limits_{x\neq 0}\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\}\Leftrightarrow\|A\|=\max\limits_{\|Y\|=1}\|AY\|\Leftrightarrow\|A\|=\max\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$， $x\in C^n$

定理 1 证明：先证相容关系 $\|Ax\|_v\le\|A\|\bullet\|x\|_v$.

由定义$\|A\|=\max\limits_{x\neq 0}\{\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\}\Rightarrow\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\le\max\limits_{x\neq 0}\{\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\}=\|A\|\Rightarrow\|Ax\|_v\le\|A\|\bullet\|x\|_v$

1）正性：若 $\mathbf{A}\neq 0$，则存在 $x_1\neq 0$使得 $\mathbf{A}x_1\neq 0$，令 $x_0=\frac{x_1}{\|x_1\|_v}$，则$\|x_0\|_v=1$，

故 $\|\mathbf{A}x_0\|_v=\frac{1}{\|x_1\|_v}\|\mathbf{A}x_1\|_v>0$，所以$\|\mathbf{A}\|=\max\limits_{\|x\|_v=1}\|\mathbf{A}x\|_v>0$.

2）齐性：$\forall\lambda\in C$，有$\|\lambda\mathbf{A}\|=\max\limits_{\|x\|_v=1}\|\lambda\mathbf{A}x\|_v=|\lambda|\max\limits_{\|x\|_v=1}\|\mathbf{A}x\|_v=|\lambda|\|\mathbf{A}\|$

3）三角不等式：$\forall\mathbf{A},B\in C^{n\times n}$，$\exists x_0\in C^n$,（$\|x_0\|_v=1$） 使(在 x_0 取最大值)

$\|\mathbf{A}+B\|=\|(\mathbf{A}+B)x_0\|_v\le\|\mathbf{A}x_0\|_v+\|Bx_0\|_v\le\max\limits_{\|x\|_v=1}\|\mathbf{A}x\|_v+\max\limits_{\|x\|_v=1}\|Bx\|_v=\|\mathbf{A}\|+\|B\|$;

4）相容性：$\exists y_0\in C^n$,（$\|y_0\|_v=1$） 使(在 y_0 取最大值)

可知$\|\mathbf{AB}\|=\|(\mathbf{AB})y_0\|_v=\|\mathbf{A}(By_0)\|_v\le\|\mathbf{A}\|\|By_0\|_v\le\|\mathbf{A}\|\|B\|$

或写$\|\mathbf{AB}\|=\|(\mathbf{AB})y_0\|_v=\|\mathbf{A}(By_0)\|_v=\left\|\mathbf{A}(\frac{By_0}{\|By_0\|_v})\right\|_v\|By_0\|_v\le\|\mathbf{A}\|\|By_0\|_v\le\|\mathbf{A}\|\|B\|$

所以，$\| A \|$ 是矩阵范数.

备注：$\forall \mathrm{x}_0 (\neq 0) \in \mathrm{C}^n$，可写

$$\|\mathrm{Ax}\|_v = \left\| \mathrm{A}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_v \|x\|_v \leq (\max_{\|\mathrm{x}\|_v=1} \|\mathrm{Ax}\|_v) \|x\|_v \leq \|\mathrm{A}\| \|x\|_v .$$

故该矩阵范数 $\| A \|$ 与向量范数 $\| \mathrm{x} \|_v$ 相容.

注：因为 $\|\mathbf{Ax}\|_v$ 是 x 各分量的连续函数，故在有界闭集 $(\| \mathrm{x} \|_v = 1)$ 上可取到最大值，因此上述定义是有意义的，即存在 x_0 使得 $\max_{\|\mathrm{x}\|_v=1} \|\mathrm{Ax}\|_v = \|\mathrm{Ax}_0\|_v, (\|\mathrm{x}_0\| = 1)$.

定理 2：设 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{C}^{n \times n}, \mathrm{x} \in \mathrm{C}^n$，则向量范数 $\|\mathrm{x}\|_1, \|\mathrm{x}\|_2$ 及 $\|\mathrm{x}\|_\infty$ 产生的算子范数为：

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| (\text{列范数});$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_1}，\lambda_1 \text{为} \mathbf{A}^H \mathbf{A} \text{的最大特征值（谱范数）；}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| (\text{行范数}).$$

（证略，见参考书）

小结：常见 3 个算子范数

（1） $\| x \|_\infty$ 产生 $\| A \|_\infty$（行范数），且 $\|Ax\|_\infty \leq \| A \|_\infty \| x \|_\infty$

（2）$\| x \|_1$ 产生 $\| A \|_1$（列范数）， 且 $\|Ax\|_1 \leq \| A \|_1 \| x \|_1$

（3）$\| x \|_2 = | x |$ 产生 $\| A \|_2$（谱范数），且 $\|Ax\|_2 \leq \| A \|_2 \| x \|_2$ ；

复习：任一矩阵范数都有 $\|\boldsymbol{I}\| \geq 1$

特别备注：任一算子范数必有 $\|\boldsymbol{I}\| = 1$

因为，由公式 $\|A\| = \max_{x \neq 0} \{\frac{\| Ax \|_v}{\| x \|_v}\}$，可知 $\|I\| = \max_{x \neq 0} \{\frac{\| Ix \|_v}{\| x \|_v}\} = 1$

推论：若某个 $\|\boldsymbol{I}\|_* > 1$，则 $\|\bullet\|_*$ 不是算子范数！

即，单位阵公式 $\|I\| = 1$ 对任一算子范数成立（其它范数不成立）

例如，$\|\boldsymbol{I}\|_1 = 1$, $\|\boldsymbol{I}\|_\infty = 1$, $\|\boldsymbol{I}\|_2 = 1$;

又 $n>1$时， $\|I_n\|_F=\sqrt{n}>1$， $\|I_n\|_M=n>1$

故 $\|\bullet\|_F, \|\bullet\|_M$ 不是算子范数

思考题： $\|\bullet\|_G$ 是否算子范数？

....

注：可知，$\|\mathbf{A}\|_F$ 与 $\|x\|_2$ 是相容的，而 $\|\mathbf{A}\|_2$ 作为 $\|x\|_2$ 的算子范数自然是相容的，但与 $\|\mathbf{A}\|_F$ 不同. 事实上可知 $\|\mathbf{A}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_F$.

若存在常数 M，使得 $\forall x \in C^n$ 有 $\|\mathbf{A}x\|_v \le M\|x\|_v$，则 $\|\mathbf{A}\| \le M$，即 $\|x\|_v$ 的算子范数是使上述不等式成立的最小常数.

....

注：级数幂数 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_k x^k + \cdots$

产生 $A = A_{n\times n}$ 的幂级数为 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k = C_0 I + C_1 A + C_2 A^2 + \cdots + C_k A^k + \cdots$

收敛定理：设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ 的收敛半径为 R，则

(1) $\rho(A) < R \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ 绝对收敛；

(2)某一范数 $\|A\| < R \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ 绝对收敛

(3) $\rho(A) > R \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ 发散（无意义）（见书中证明）

备注： $\rho(A)=R$ 时， $\sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ 需讨论待定(可能发散，也可能收敛)

特别，3 个幂级数：

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

的收敛半径都是 $R=+\infty$，故任一方阵 A 都满足收敛条件 $\rho(A) < R = +\infty$

因此，对任一方阵 A，下列 3 个矩阵公式都绝对收敛

$$e^{\mathbf{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\ ,\quad \sin\mathbf{A}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ,\quad \cos\mathbf{A}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!}$$

补充 Ex1：给出公式 $\ln(I+\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\mathbf{A}^k}{k}$ 的绝对收敛条件

补充 Ex2：给出公式 $(I-A)^{-2}=\sum_{1}^{\infty}kA^{k-1}$ 的绝对收敛条件

补充 Ex3：给出公式 $A(I-A)^{-2}=\sum_{1}^{\infty}kA^{k}$ 的绝对收敛条件

补充 Ex4：给出公式 $\ln(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(\mathbf{A}-I)^k}{k}$ 的绝对收敛条件

提示：一个收敛条件是 $\rho(A-I)<1$，另一个是？

....

许尔估计定理：任一**方阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，全体根 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$

满足 $|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2\le\sum|a_{i,j}|^2$ ------**叫许尔估计**

备注：若$|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2=\sum|a_{i,j}|^2$，则 $\mathbf{A}$ 为正规阵

证明 利用许尔公式：存在优阵 $\mathbf{Q}$，使 $\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为上三角

$$\Rightarrow\ \mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Q}=(\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q})^H=\mathbf{D}^H$$

$\Rightarrow\ \mathbf{Q}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=(\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q})^H(\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Q})=\mathbf{D}^H\mathbf{D}$，因为 $\mathbf{Q}^H=\mathbf{Q}^{-1}$，

可知 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{D}^H\mathbf{D}$，即 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 相似于 $\mathbf{D}^H\mathbf{D}$

故 $tr(\mathbf{A}^H\mathbf{A})=tr(\mathbf{D}^H\mathbf{D})$

由迹公式知 $tr(\mathbf{A}^H\mathbf{A})=tr(AA^H)=\sum|a_{i,j}|^2$，

且有 $tr(\mathbf{D}^H\mathbf{D})=|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2+\sum|*|^2$，代入 $tr(\mathbf{A}^H\mathbf{A})=tr(\mathbf{D}^H\mathbf{D})$

$$\sum|a_{i,j}|^2=|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2+\sum|*|^2\ge|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2$$

故 $|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2\le\sum|a_{i,j}|^2$.

备注：若$|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2=\sum|a_{i,j}|^2$，

且$\sum|a_{i,j}|^2=|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2+\sum|*|^2\geq|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2$

可知，$\sum|*|^2=0\Rightarrow$ D中每个元素(*)=0, 故

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{AQ}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$ 为对角形（正规阵），且 $\mathbf{Q}$ 为优阵，

故 $\mathbf{A}$ 为正规阵.

思考题*：1.令 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0\\ 0 & 0 & a_2\\ a_3 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 每个$a_j>0$

求特式$|\lambda I-A|$；求$\lambda(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$与$|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+|\lambda_3|^2$；

写出许尔估计；写出 $\mathbf{AA}^{\mathrm{H}}=\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ 成立的条件

2.令 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & a_1 & & & 0\\ & 0 & a_2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1}\\ a_n & & & & 0\end{pmatrix}$, 每个$a_j>0$

求特式$|\lambda I-A|$；求$\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$与$|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2$；

写出许尔估计；写出 $\mathbf{AA}^{\mathrm{H}}=\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ 成立的条件

特征值（谱估计）

盖尔圆定理--Ger 园盘

定义：n 阶方阵 $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ 的第 p 个 Ger 盖尔半径为

$R_p=|a_{p1}|+|a_{p2}|+\cdots+\cancel{|a_{pp}|}+\cdots+|a_{pn}|$，（记号“$\cancel{|a_{pp}|}$”表示去掉该项）

规定第 p 个 Ger 园盘为

$G_p=\{Z\,\big|\,|Z-a_{pp}|\leq R_p\}$， $Z\in C$， $p=1,2,\cdots,n$

第 1 圆盘定理. 方阵 $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ 的全体特征根都在 A 的 n 个 Ger 园盘并集中

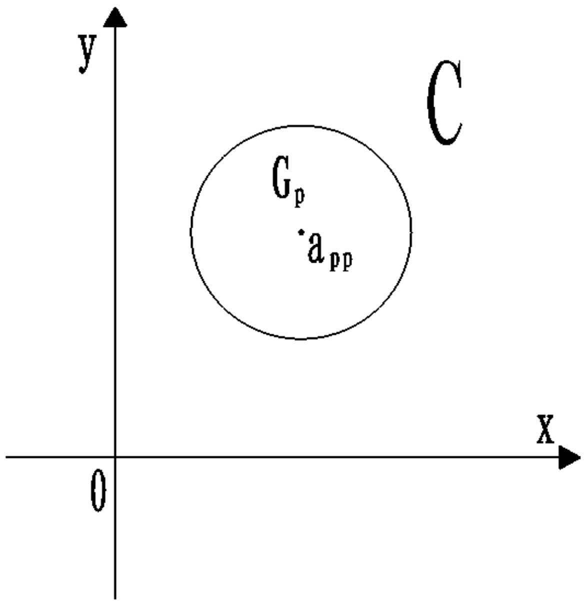
即：$\lambda(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}\subset G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n$（略证）

备注：记号 $G(A)=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n$ 表示 n 个 Ger 园盘并集

园盘定理说：$\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\subset G(A)$

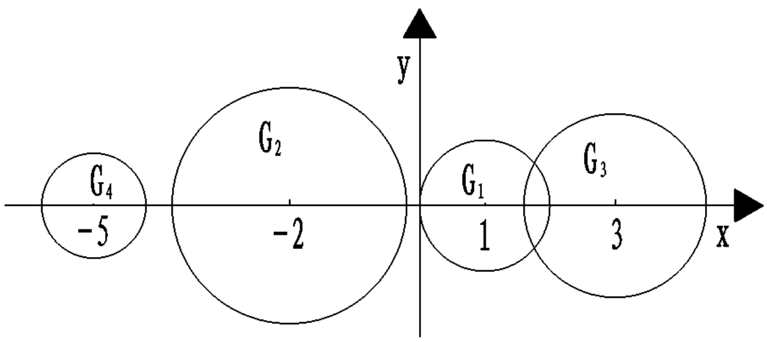
即，Ger 园盘并集 $G(A)$ 覆盖了全体特征根：$\lambda(A)\subset G(A)$

也即，A 的全体根被 n 个 Ger 圆盖住！



Eg. $A=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.6 & -2 & -1 & 0.2\\ 0.3 & 0.4 & 3 & 0.7\\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & -5\end{pmatrix}$，估计 $\lambda(A)$ 的范围。

解：Ger 圆为 $$\begin{aligned}G_1&:|Z-a_{11}|=|Z-1|\le R_1=1\\ G_2&:|Z-a_{22}|=|Z+2|\le R_2=1.8\\ G_3&:|Z-a_{33}|=|Z-3|\le R_3=1.4\\ G_4&:|Z-a_{44}|=|Z+5|\le R_4=0.8\end{aligned}$$



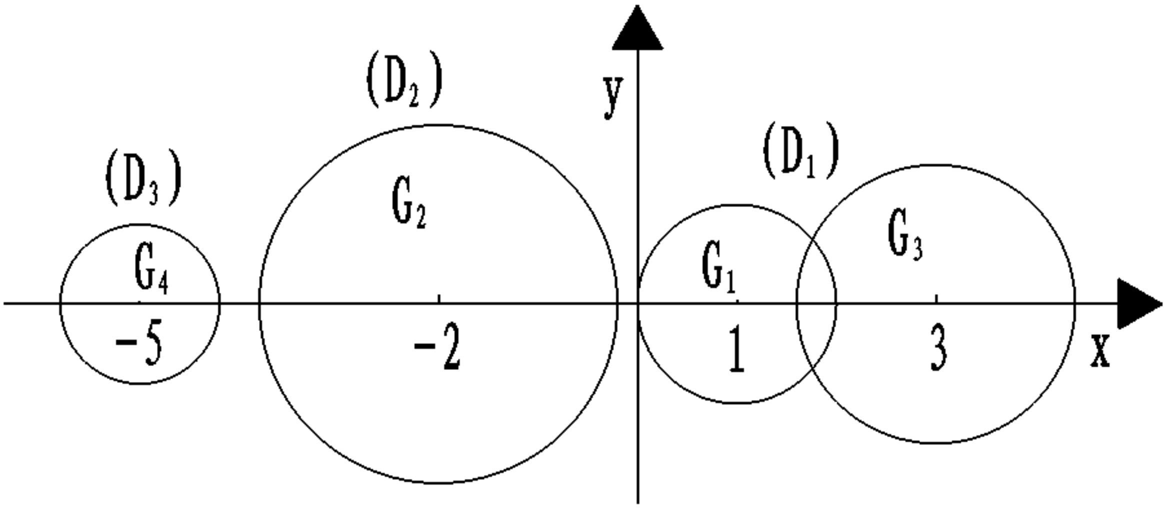
$\lambda(A)\subset G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4$

规定. 若 A 的 k 个 Ger 圆相连（或相切）在一起，且与其它 $n-k$ 个圆分离，称此 k 个圆的并集为一个连通分支，简称**分支**.

特别， 一个孤立圆是一个分支

第 2 圆盘定理. 设 D 是 A 的 k 个 Ger 圆构成的**分支**，则 D 中恰有 k 个特征值（含重复）

特别. 一个孤立 Ger 圆中恰有一个特征值



注 A（指上边例子中）至少有两个实特征值（**利用实系数方程的虚根必成双出现**）

Ex.1. $A=\begin{pmatrix}9&1&-2&1\\0&8&1&1\\-1&0&4&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$，（1）估计 $\lambda(A)$，（2）说明 A 至少有 2 个实根

Ex.2.估计下列 $\lambda(A)$

（1）$A=\begin{pmatrix}20&5&0.3\\4&10&0.5\\2&4&10i\end{pmatrix}$，（2）$A=\begin{pmatrix}20&5&0.6\\4&10&1\\1&2&10i\end{pmatrix}$，（3）$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\2&3&5\end{pmatrix}$

注 由于 A 与转置 A^T 有相同特征值：$\lambda(A)=\lambda(A^T)$，可用 A^T 的 Ger 半径代替 A 的半径

复习:盖尔（Ger）圆盘

备注：本部分的证明见参考书

Ger 圆，特征根估计

盖尔 Ger 圆

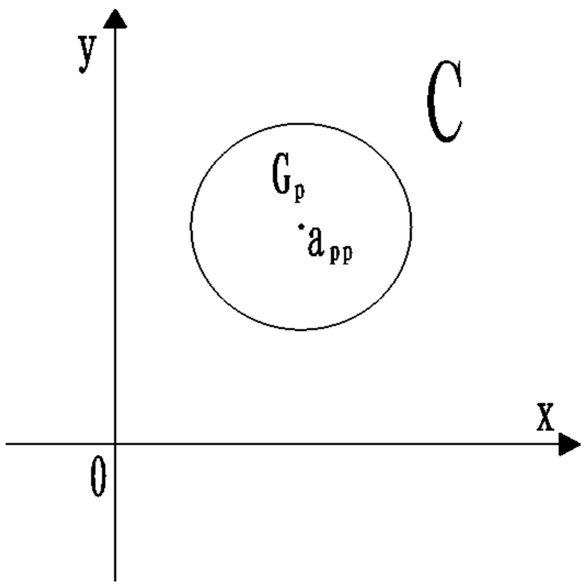
定义： n 阶方阵 $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个 Ger（盖尔）半径为

$$R_1=\cancel{|a_{11}|}+|a_{12}|+\cdots\cdots+|a_{1n}|,\quad R_2=|a_{21}|+\cancel{|a_{22}|}+\cdots\cdots+|a_{2n}|,\quad \ldots\ldots,$$

$$R_n=|a_{n1}|+|a_{n2}|+\cdots\cdots+\cancel{|a_{nn}|}$$

其中：$R_p=|a_{p1}|+\cdots+\cancel{|a_{pp}|}+\cdots+|a_{pn}|$，（记号 $\cancel{|a_{pp}|}$ 表示去掉该项）

规定第 p 个 Ger 圆盘为: $G_p=\{Z \| Z-a_{pp}|\le R_p\}$，$Z\in$ 复平面 C， $p=1,2$，…， n



备注：记号 $G(A)=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n$ 表示 n 个 Ger 圆盘并集

圆盘定理 1： 方阵 $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ 的特征根都在 n 个 Ger 圆的并集中.

即： $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\subset G(A)$

即， A 的全体根被 n 个 Ger 圆**盖住**

规定： 若 A 有 k 个 Ger 圆相连在一起，且与其它 n- k 个圆分离，称此 k 个圆盘为一个连通分支，简称分支.

注： 一个孤立圆为一个分支

圆盘定理 2： 设 A 的 k 个 Ger 圆构成一个连通分支 D，则在 D 中恰有 k 个特征根（含重复）.

特别，　一个孤立圆中恰有一个根

注：由于 A 与转置 A^T 有相同特征根，可用 A^T 的 Ger 半径代替 A 的半径，可得 A 的列圆盘定理： A 的列圆盘可记为 $G'_p=\left\{Z\left|\left|Z-a_{pp}\right|\le \tilde{R}_p\right.\right\},p=1,2,\cdots,n$

其中 $\tilde{R}_p=\left|a_{1p}\right|+\left|a_{2p}\right|+\cdots+\cancel{\left|a_{pp}\right|}+\cdots+\left|a_{np}\right|$ 叫列半径

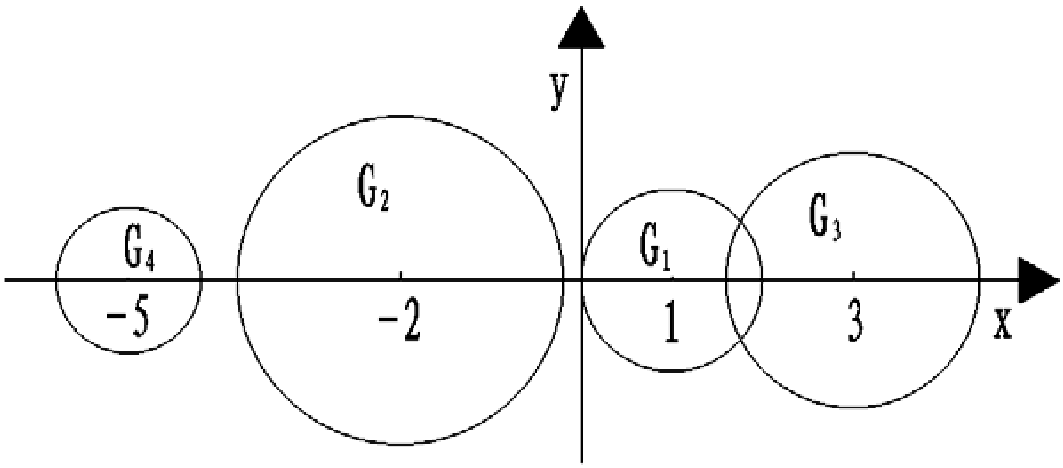
Eg. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & -2 & -1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & -5 \end{pmatrix}$，画 **A** 的盖尔圆，估计 $\lambda(A)$ 范围.

解：4 个 Ger 圆为

$$\begin{aligned} G_1 &: \left|Z-a_{11}\right|=\left|Z-1\right|\le R_1=1 \\ G_2 &: \left|Z-a_{22}\right|=\left|Z+2\right|\le R_2=1.8 \\ G_3 &: \left|Z-a_{33}\right|=\left|Z-3\right|\le R_3=1.4 \\ G_4 &: \left|Z-a_{44}\right|=\left|Z+5\right|\le R_4=0.8 \end{aligned}$$

，　如图示

$$\lambda(A)\subset G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4,$$



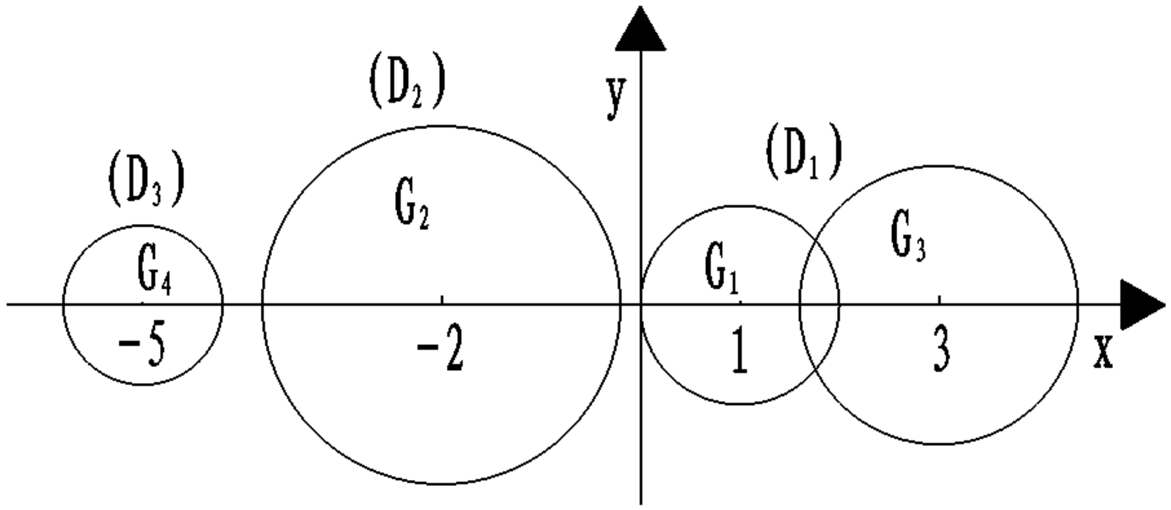
注：实矩阵 A 的 n 个 Ger 圆中心都在 x 轴上

复习定理：实系数方程的虚根一定共轭（成双）出现.

结论：“实矩阵 A 的虚特征根必成双出现”

特别，实矩阵 A 的独立圆中恰有一个实根

例　在上例中 **A**，证明 **A** 至少有两个实特征根（利用**实矩阵**虚根成双出现）



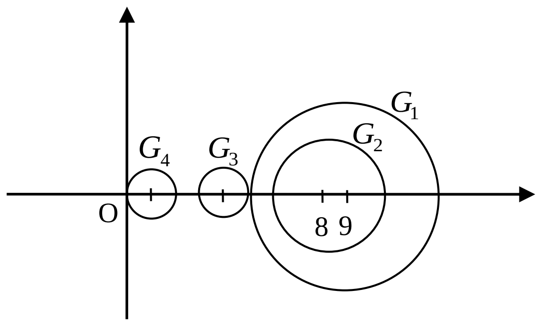
如图，上例中共有 3 个分支 D1，D2， D3

因为“实矩阵的虚根必成双出现”,在 2 个独立园分支中各有一个实根，

故，至少有两个实特征根.

例 画 **A** 的盖尔圆; 证明 A 至少有两个实特征根 $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解：盖尔圆为 $G_1:|z-9|\le 4$，$G_2:|z-8|\le 2$，$G_3:|z-4|\le 1$，$G_4:|z-1|\le 1$



如图，A 为实矩阵，孤立圆 G_4 中有一个实特征根，连通分支 $G_1\cup G_2\cup G_3$ 中含有三个根，

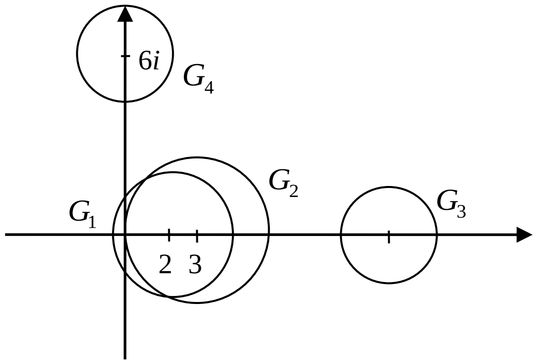
其中必有一个实根（否则 $G_1\cup G_2\cup G_3$ 将出现四个特征根，矛盾），A 至少有两个实根

例 估计 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2i & 0 \\ 0 & -i & 10 & i \\ -2 & 0 & 0 & 6i \end{pmatrix}$ 的特征值范围.

解 4 个盖尔圆为

$$G_1:|z-2|\le 3 \quad G_2:|z-3|\le 3 \quad G_3:|z-10|\le 2 \quad G_4:|z-6i|\le 2$$

如图，A 的 4 个特征值在并集 $G(A)$ 中，其中 G_3, G_4 中各有一个，$G_1 \bigcup G_2$ 中有两个.



推论 1 对方阵 A，若原点 $O \notin \bigcup_{i=1}^{n} G_i$（即 0 在 n 个盖尔圆之外），则 A 为可逆阵.

因为，否则 $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$，则 0 为 A 的根，故 $0 \in \bigcup_{i=1}^{n} G_i$，矛盾.

推论 2. 若 $A = (a_{ij})_{n,n}$ 行对角占优：$\left|a_{pp}\right| > R_p \ (p = 1, \cdots, n)$，则 A 为可逆阵.

同理，若 $A = (a_{ij})_{n,n}$ **列对角占优**：$\left|a_{pp}\right| > \tilde{R}_p \ (p = 1, \cdots, n)$，则 A 可逆.

其中按列半径为 $\tilde{R}_p = \left|a_{1p}\right| + \left|a_{2p}\right| + \cdots + \cancel{\left|a_{pp}\right|} + \cdots + \left|a_{np}\right|$

证： 否则 0 为 A 的特征根，故存在一个盖尔圆 G_k 使

$0 \in G_k = \{z \,\big|\, \left|z - a_{kk}\right| \le R_k\}$，得 $\left|a_{kk}\right| \le R_k$ 矛盾.

推论 3. 若 A 的 n 个 Ger 圆互相分离（都是孤立圆），则 A 是单阵（可对角化）

特别，若实矩阵 A 的 n 个 Ger 圆互相分离，则特征根全为实数.

其它例子， $A = \begin{pmatrix} 3 & b & b^2 \\ -b & 1 & b^2 \\ -b & -b^2 & 5 \end{pmatrix}$ ($b = \dfrac{1}{2}$),判断 A 是否单阵(可对角化).

Pf：A 的盖尔圆半径为 $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$，3 个盖尔圆为

$|Z-3| \le \frac{3}{4}$; $|Z-1| \le \frac{3}{4}$; $|Z-5| \le \frac{3}{4}$， 画出 A 的盖尔圆如下：

$$\cdots\cdots 0 \cdots \odot \ \odot \ \odot \cdots \to\to\to x$$

可知 3 个盖尔圆中心在 x 轴上，都是独立的圆，且 A 为实矩阵

故有 3 个不同实特征值； A 有 3 个不同特征值，故 A 可对角化，为单阵

另外，可知 3 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 适合

$$\lambda_1\ge 1-\tfrac{3}{4},\lambda_2\ge 3-\tfrac{3}{4},\lambda_3\ge 5-\tfrac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow\quad |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ge \tfrac{1}{4}\times\tfrac{9}{4}\times\tfrac{17}{4}=\tfrac{9\times 17}{64}.$$

Ex.1. $A=\begin{pmatrix}9&1&1&1\\0&8&1&0\\1&0&4&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$，（1）估计根 $\lambda(A)$，（2 说明 A 至少有 2 个实根

Ex2 思考题. 证明方阵 $A=\begin{pmatrix}2&2/n&1/n&\cdots&1/n\\1/n&4&1/n&\cdots&1/n\\1/n&1/n&6&\cdots&1/n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1/n&1/n&1/n&\cdots&2n\end{pmatrix}$ 有 n 个不同实特征根，

且 $|A|>1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)$

其它（练习） 设 $A=\begin{pmatrix}1+i&2&-1\\-i&-1&2+i\\3&1+2i&2i\end{pmatrix}$（$i^2=-1$），$x=\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}$

（1）计算 $\|A\|_1$ 与 $\|A\|_\infty$.　　（2）计算 $\|Ax\|_1$，$\|Ax\|_2$ 及 $\|Ax\|_\infty$.

解：1）、$\|A\|_1=\max\limits_{1\le i\le 3}\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{ji}|=4+\sqrt{2}$（列范数）

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=5+\sqrt{5}\text{（行范数）}$$

2）、$Ax=(i-2,i+3,5i)^T$，所以 $\|Ax\|_1=|i-2|+|i+3|+|5i|=\sqrt{10}+\sqrt{5}+5$

$$\|Ax\|_2=\sqrt{|i-2|^2+|i+3|^2+|5i|^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$\|Ax\|_\infty=\max\{|i-2|,|i+3|,|5i|\}=5$$

。。

定义 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 令 $R_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|-|a_{ii}|,\ i=1,2,\cdots,n$.

令 $G_i=\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z-a_{ii}|\le R_i\}\ \ i=1,\cdots,n$. 即 G_i 为复平面 $\mathbb{C}$ 上以 a_{ii} 为中心，R_i 为半径的**闭圆盘**，称为 A 的一个**盖尔圆**. A 有 n 个盖尔圆.

规定记号 $G(A)=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$ 表示盖尔圆盘并集

定理（圆盘定理） 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$， n 个盖尔圆 $G_1,G_2,\cdots,G_n$， 则

1） A 的任一特征值 $\lambda\in G(A)=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$

2）若 A 的 n 个盖尔圆盘中有 k 个的并形成一个连通分支 D，且与其余的 $n-k$ 个圆盘都不相交，则在此连通分支 D 中恰有 A 的 k 个特征值（含重复）. 特别孤立盖尔圆内恰有一个特征值.

例 1 估计矩阵

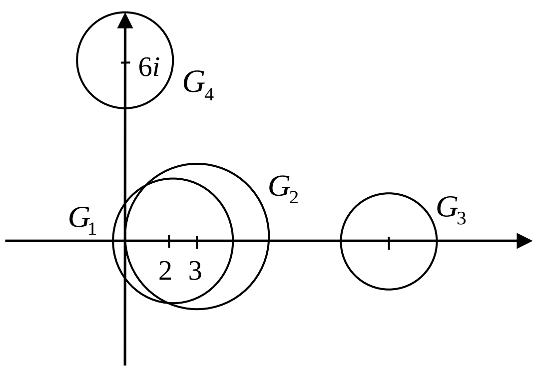
$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-2&0\\-1&3&2i&0\\0&-i&10&i\\-2&0&0&6i\end{pmatrix}$$

的特征值范围.

解 A 的四个盖尔圆为

$$G_1:|z-2|\le 3\quad G_2:|z-3|\le 3\quad G_3:|z-10|\le 2\quad G_4:|z-6i|\le 2$$

如图可知 A 的四个特征值在 $G(A)$ 中，其中 G_3,G_4 中各有一个， $G_1\cup G_2$ 中有两个.



推论 1 对 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$， n 个盖尔圆 $G_1,G_2,\cdots,G_n$， 若原点 $O\notin\bigcup_{p=1}^{n}G_p$， 则 A 为非奇异

阵.

事实上，若$|A|=\prod_{p=1}^{n}\lambda_p=0$，则 0 为 A 的特征值，故$0\in\bigcup_{p=1}^{n}G_p$. 矛盾.

推论 2 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 若 A 对角占优，即$|a_{ii}|>R_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\ (i=1,\cdots,n)$（行占优）

或$|a_{jj}|>\tilde{R}_j=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}|\ (j=1,\cdots,n)$（列占优），则 A 为非奇异阵.

证明 否则 0 为 A 的特征值，故存在某个盖尔圆 G_k 使

$0\in G_k=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-a_{kk}|\le R_k\}$，进而$|a_{kk}|\le R_k$ 矛盾.

又，A^T 与 A 有相同特征值. 故 A 列对角占优即为 A^T 行对角占优. 由此证 A^T 非奇异，故 A 非奇异. 证毕

推论 3 若 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的 n 个盖尔圆中有 k 个孤立圆，则 A 至少有 k 个互异特征值，特别 A 的 n 个盖尔圆两两不相交，则 A 有 n 个互异特征值，从而 A 可对角化.

推论 4 若实矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的盖尔圆中有 k 个孤立圆，则 A 至少有 k 个实特征根，特别若 n 个盖尔圆两两不相交，则 A 有 n 个互异实特征值.

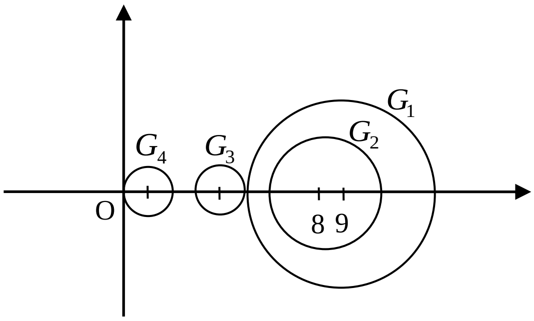
事实上，A 的 n 个盖尔圆的圆心都在实轴上，故每孤立盖尔圆中只能有一个特征值，而实矩阵 A 若有复特征值则必共轭对出现，故孤立盖尔圆中的特征值必为实特征值（否则其共轭也出现在该圆中. 矛盾）.

例 2 证明

$$A=\begin{pmatrix}9&1&-2&1\\0&8&1&1\\-1&0&4&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

至少有两个实特征值.

证明： A 的盖尔圆 $G_1:|z-9|\le 4$，$G_2:|z-8|\le 2$，$G_3:|z-4|\le 1$，$G_4:|z-1|\le 1$.



如图，G_4为孤立圆，有一个实特征值，$G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3$中含 A 的另三个特征值，其中必有一个为实特征值（否则$G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3$将出现四个特征值. 矛盾.）

注意：对 A^T 也可使用盖尔圆定理（因为 A^T 与 A 有相同特征值）.

设 A^T 的盖尔圆 $G_1', G_2', \cdots, G_n'$. 同样有圆盘定理. G_i 与 G_i' 有同一个圆心（$1 \le i \le n$），故特征值 $\lambda_j \in (\bigcup_{i=1}^{n} G_i) \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} G_i')$.

****

补充：谱半径估计

定义 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$，称 A 的 n 个特征值的模的最大者为 A 的**谱半径**，记为 $\rho(A)$.

谱半径在特征值估计以及数值分析，数值代数等都有重要应用.

定理 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$，则 $\rho(A)$ 不大于 A 的任一矩阵范数，即 $\rho(A) \le \|A\|$.

特别 $\rho(A) \le \|A\|_\infty$ (行范数)，　且 $\rho(A) \le \|A\|_1$ 即 $\rho(A) \le \|A^T\|_\infty$.

....

选学内容 ：**正矩阵**

正矩阵定义： 一个实矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$，

(1)若对每一 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a_{ij} \ge 0}$，则称 A 为非负的(nonnegative),

记为 $A \ge 0$.

(2)若对每一 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a_{ij} > 0}$，则称 A 为正的(positive)，

记为 $A > 0$.

正矩阵与谱半径定理　设非负阵 $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n} \ge \mathbf{0}$，

令 $\mathbf{h} =$ (A 的最小行和)，$l =$ (A的最小列和)，则

(1) $\mathbf{h} \le \rho(A) \le \|A\|_\infty$ (A 的最大行和),

(2) $l \le \rho(A) \le \|A\|_1$ (A 的最大列和).

特别 $A = A_{n\times n} > \mathbf{0}$ 为**正矩阵**，且 $\mathbf{h} < \|A\|_\infty$ 或 $l < \|A\|_1$ 则有

$$\mathrm{h} < \rho(A) < \|A\|_\infty \text{ 或 } l < \rho(A) < \|A\|_1$$

证明略.

例 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ 谱半径 $\rho(\mathrm{B})$ 范围是

$h(\mathrm{B}) \le \rho(\mathrm{B}) < \|\mathrm{B}\|_\infty$， 即 $\frac{4}{5} < \rho(\mathrm{B}) < 1$

……………………………………………………………………..

备注补充：有人提问：幂级数收敛半径求法？答案是‘按高数的方法求’因为已经假定大家都学过了高等数学。

例如: ln(1+x) 的展开幂级数收敛半径为 r=1；(1+x) 的幂级数收敛半径为 r=1；等等……

提醒一下，ln(1+x)的收敛半径为 r=1，绝对收敛范围是单位园盘|x|<1,

不可写成区间（-1，1)，因为这里 x 是在复数范围变化！

注意，矩阵函数里的 x 一般 都是复数（实数仅是特殊情况）

……………………………………….

下面是几个收敛半径的例子

例如: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ 的收敛半径为 r=1;

$(I-x)^{-1} = 1 + x + \cdots + x^k + \cdots$ 的收敛半径为 r=1;

$(I-x)^{-2} = 1 + x + 2x + 3x^2 + \cdots + kx^{k-1} + \cdots = \sum_{1}^{\infty} kx^{k-1}$ 的收敛半径 r=1;

由前面文件中的‘**收敛定理**’：设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ 收敛半径为 r，则有结论

(1)若 $\rho(A) < r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ 绝对收敛；

(2)若某范数$\|A\| < \mathrm{r} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ 绝对收敛

(3)若 $\rho(A) > r \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ 发散（无意义）（见参考书中证明）

备注：$\rho(A) = \mathrm{r}$ 时，$\sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k$ 需讨论待定(可能发散，也可能收敛)

例 1：公式$\ln(I + \mathbf{A}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\mathbf{A}^k}{k}$ 的绝对收敛条件是 $\rho(A) < 1$

或某个范数$\|A\| < 1$，（因为$(I - x)^{-1} = 1 + x + \cdots + x^k + \cdots$收敛半径为 r=1）

例 2：公式$(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^k + \cdots$绝对收敛条件是 $\rho(A) < 1$，

或某个范数$\|A\| < 1$，（因为$\ln(1 + x) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ 收敛半径为 r=1）

例 3：公式$(I - A)^{-2} = \sum_{1}^{\infty} kA^{k-1}$ 绝对收敛条件是 $\rho(A) < 1$，或某个范数$\|A\| < 1$，

（因为$(I - x)^{-2} = 1 + x + 2x + 3x^2 + \cdots + kx^{k-1} + \cdots = \sum_{1}^{\infty} kx^{k-1}$ 收敛半径为 r=1）

……………………………………………………………………