单阵定义：若 $A=A_{n\times n}$ **相似于对角形，即存在可逆**阵 P

使 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$（对角形），$\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}$

称 A 为单纯阵简称“单阵”（也称 A 可对角化）.

其中 $P=(X_1\cdots\cdots X_n)$ 可逆，P 的列 $X_1\cdots\cdots X_n$ 都是 A 的特征向量, 但不一定正交.

备注　正规阵都是单阵！(单阵包含正规阵！正规阵是特殊单阵)

因正规分解：若 $A=A_{n\times n}$ **正规，则存在**优阵 Q（$Q^H=Q^{-1}$）使

$$Q^{-1}AQ=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{（对角形），}\ \lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}$$

故，　正规阵都是单阵

例　(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ Hermit，(2) $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&-\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&1\end{pmatrix}$ Hermit，(3) $W=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&1\end{pmatrix}$ 优阵

可知，$\mathbf{A}$，B，W 都是单阵

例　判定下列三角阵都不是单阵（非单阵）：其中 $(*)\neq 0$ 表示一个非 0 元

(1) $A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$，(2) $A=\begin{pmatrix}a & & (*)\\ & \ddots & \\ 0 & & a\end{pmatrix}$，其中 $\lambda(A)=\{a,\cdots\cdots,a\}$ (n 重根)

解 (1) 假定 $A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$ 为单阵，由定义**存在可逆** P

使 $P^{-1}AP=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$，由本题可知 $\lambda(A)=\{a,a\},\lambda_1=\lambda_2=a$（2 重根）

故 $P^{-1}AP=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}=aI\ \Rightarrow A=P^{-1}(aI)P=aP^{-1}P=aI$

又 $A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}\neq aI$，产生矛盾！　故　$A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$ 为非单阵(不可相似对角化)

(2) 假定 $A=\begin{pmatrix}a & & (*)\\ & \ddots & \\ 0 & & a\end{pmatrix}$ 为单阵，可知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=a$ (n 重根)，由单阵定义，

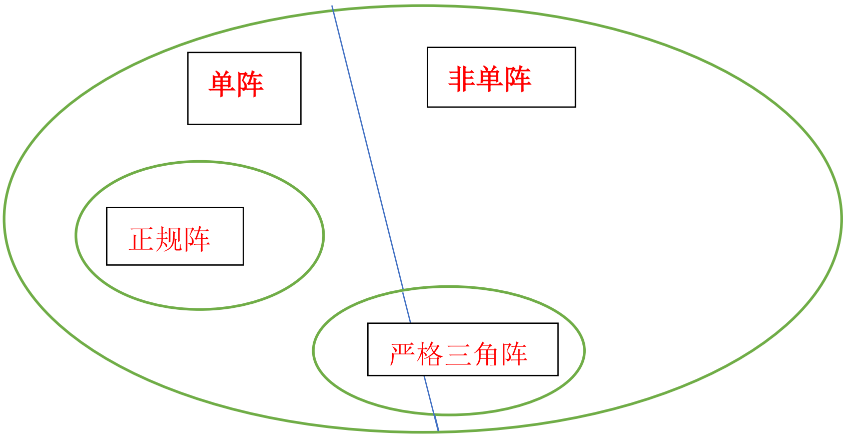
存在可逆 P 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix}=aI \Rightarrow A=P^{-1}(aI)P=aP^{-1}P=aI$

又 $A=\begin{pmatrix} a & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix}\neq aI \because (*)\neq 0$， 产生矛盾，故 A 非单阵

例如，三角阵：$(1)A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(2)A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(3)A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 为非单阵！

备注：单阵包含正规阵！（正规阵是特殊的单阵---正规阵集合是单阵的子集）
还有更多的非单阵如图示

n 方阵集合 $C^{n\times n}$:



由单阵定义可知

单阵 $A=A_{n\times n}$ **恰有 n 个无关的**特征向量 $X_1\cdots\cdots X_n$，**其中** $P=(X_1\cdots\cdots X_n)$ 可逆

备注：由单阵定义可知下面等价条件成立

(1) $A=A_{n\times n}$ 为单阵 $\Leftrightarrow$ A **恰有 n 个无关的**特征向量

(2) $A=A_{n\times n}$ 非单阵！ $\Leftrightarrow$ A **的无关**特征向量个数小于 **n.**

(3) $A=A_{n\times n}$ 为单阵 $\Leftrightarrow$ **每个 k 重根** λ_1 **恰有 k 个无关的**特征向量

(4) $A=A_{n\times n}$ 为单阵 $\Leftrightarrow$ **每个** $k>1$ **重根** λ_1 **的秩** $r(A-\lambda_1 I)=n-k$

(因为 k 重根 λ_1 恰有 $n-r(A-\lambda_1 I)=n-(n-k)=k$ 个无关特征向量)

(5) $A=A_{n\times n}$ 非单阵 $\Leftrightarrow$ 必有一个 $k>1$ **重根** λ_1 **的秩** $r(A-\lambda_1 I)\neq n-k$ **.**

例　判定下列都是单阵

（1）$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$（2）$A=\left(\begin{array}{c|ccc}1&1&1&0\\ \hline 0&2&0&0\\0&1&3&0\\0&1&1&1\end{array}\right)$，(3)$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$,(4)$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$

解：（1）$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$的根为$\lambda(A)=\{1,2,1\},\lambda_1=1$为 k=2 重根

可知 2 重根$\lambda_1=1$的秩$r(A-\lambda_1 I)=r\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=1=3-2=n-2$，故$A$为单

(因为 2 重根$\lambda_1=1$恰有$3-r(A-\lambda_1 I)=2-1=2$个特征向量)

（2）$A=\left(\begin{array}{c|ccc}1&1&1&0\\ \hline 0&2&0&0\\0&1&3&0\\0&1&1&1\end{array}\right)$ 的根为$\lambda(A)=\{1,2,3,1\},\lambda_1=1$为 k=2 重根

2 重根$\lambda_1=1$的秩$r(A-\lambda_1 I)=r\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&1&2&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}=2=4-2=n-2$，故$A$为单

（3）$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$的根为$\lambda(A)=\{1,1,2\},\lambda_1=1$为 2 重根

2 重根$\lambda_1=1$的秩$r(A-I)=r\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=1=3-2=n-2$，故$A$为单

(4)$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$的根为$\lambda(A)=\{1,-2,1\},\lambda_1=1$为 2 重根

2 重根$\lambda_1=1$的秩$r(A-I)=r\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}=1=3-2=n-2$，故$A$为单

例　**判定下列都非单阵**

$$(1)A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ (2)A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ (3)A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$$

解：(1)　$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$的根为$\lambda(A)=\{1,1\},\lambda_1=1$为 2 重根

可知 2 重根$\lambda_1=1$的秩$r(A-\lambda_1 I)=r\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=1=2-1\neq 2-2=n-2$，故$A$为非单

(因为 2 重根$\lambda_1=1$只有$2-r(A-\lambda_1 I)=2-1=1\neq 2$个特征向量)

$(2)A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$的根为$\lambda(A)=\{1,1,2\},\lambda_1=1$为 2 重根

2 重根$\lambda_1=1$的秩$r(A-I)=r\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2=3-1\neq 3-2$，故$A$为非单

$(3)A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$的根为$\lambda(A)=\{2,2,2\},\lambda_1=2$为 k=3 重根

3 重根$\lambda_1=2$的秩$r(A-2I)=r\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=1=3-2\neq 3-3$，故$A$为非单

(因为 3 重根$\lambda_1=2$仅有$3-r(A-2I)=3-1=2$个特征向量)

备注（充分判别法）：若$A=A_{n\times n}$ **恰有 n 个不同根**$\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$，则$A$为单阵

因为 **n 个不同根**$\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$恰好对应 **n 个无关的**特征向量$X_1,\cdots\cdots,X_n$. 故$A$单

例　三角阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$**恰有 n=3 个不同根 1，2，3**，故$A$为单阵

例　$A=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$**恰有 n=2 个不同根**$\lambda_1=4,\lambda_2=1$，故$A$为单阵

注意，以上 2 个方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$， $A=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$不是正规阵（但都是单阵）

习题 Ex: 判定下列是否单阵(用充分判别法)

$(1)A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$(恰有$n=2$个不同根4与1), $(2)A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$, $(3)A=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$

(4)a,b为非0实数，$A=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-a&b\\b&a\end{pmatrix}$是否单阵？

提示：$|xI-A|=(x^2-(a^2+b^2))$ 可知 $\lambda(A)=\{\sqrt{a^2+b^2},\ -\sqrt{a^2+b^2}\}$恰有n=2个不同根

………………………………………………………………………………………

备注： 单阵补充判别法(证明略)

(1)若 $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k$ 为 A 的不同根，且 $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots\cdots(A-\lambda_k I)=0$， 则 A 为单阵.

此时 $m(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\cdots(x-\lambda_k)$ 称为 A 的极小多项式

(2)若 $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k$ 为 A 全体不同根，且 $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots\cdots(A-\lambda_k I)\neq 0$， 则 A 非单阵

例 判定下列都是单阵（**用补充判别法**）

（1）$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$， $(2)A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $(3)A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$

解：（1）$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$的根为 $\lambda(A)=\{1,2,1\}$， 不同根为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,(\lambda_1\neq\lambda_2)$

验：$(A-1)(A-2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$，故 A 为单阵

且极小式 $m(x)=(x-1)(x-2)$

解：（2）$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$根为 $\lambda(A)=\{1,1,2\}$， 不同根为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,(\lambda_1\neq\lambda_2)$

因为 $(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=0$，故 A 为单阵

且极小式 $m(x)=(x-1)(x-2)$

(3) $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$ 根为 $\lambda(A)=\{1,-2,1\}$，有 2 个不同根 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,(\lambda_1\neq\lambda_2)$

验：$(A-I)(A+2I)=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}=0$，故 A 为单阵

且极小式 $m(x)=(x-1)(x+2)$

例　判定下列都非单阵（用补充判别法）

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, (2) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的根为 $\lambda(A)=\{1,1,2\}$，不同根为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,(\lambda_1\neq\lambda_2)$

验：$(A-1)(A-2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ & & \\ & & \end{pmatrix}\neq 0$，故 A 不是单阵

备注：极小式 $m(x)\neq(x-1)(x-2)$，可知极小式 $m(x)=(x-1)^2(x-2)$

(2) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$ 根为 $\lambda(A)=\{2,2,2\}$，只有 1 个不同根 $\lambda_1=2$

且 $(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\neq 0$，故 A 不是单阵

……………………………………………………………………………………..

补充知识(选学内容)：0 化式：

0 化式定义： 若多项式 $f(x)$ 适合 $f(A)=0$ 称 $f(x)$ 为 A 的 0 化式

（补充）***0 化判别法***：若 A 的 0 化式 $f(x)$ 无重根（$f(A)=0$），则 A 为单阵(证略)

例：已知 $A^2+3A+2I=0$，**则 A 是单阵**

因为 $f(x)=x^2+3x+2$ 为 A 的 0 化式：$f(A)=A^2+3A+2I=0$

且 $f(x)=(x+1)(x+2)$ 无重根，**则 A 是单阵**

例 已知 $A^2=I$，**则 A 是单阵**

解：可知 $f(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$ 为 A 的 0 化式，且无重根，**故 A 是单阵**

例 已知 $A^k=I,(k>1)$，**则 A 是单阵**

解：令 $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{k}}$，可知 $f(x)=x^k-1=(x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{k-1})$ 无重根！

且 $f(A)=A^k-I=0$，故 $f(x)=x^k-1$ 为 A 的无重根 0 化式，**故 A 是单阵**

……………………………………………………………………………………

注：若 $f(A)=0$，显然 $f(A)g(A)=0$，可知 $f(x)g(x)$ 也是 0 化式（任取 $g(x)$）

注：若 $f(x)$ 为 A 的 0 化式，则 A 有很多 0 化式：$f(x)g(x)$！

且可任取多项式 $g(x)$，可知 $f(x)g(x)$ 的次数可以很高.

极小式定义：若多项式 $m(x)$ 使 $m(A)=0$ 且 $m(x)$ 具有最小次数，则称 $m(x)$ 是 A 的极小式.

（极小式 $m(x)$ 恰为次数最小的 0 化式）

备注：极小式 $m(x)$ 必为每个 0 化式 $f(x)$ 的因子！(证略)

即，若 $f(A)=0$，则有分解 $f(x)=m(x)\cdot g(x)$）

…………………………………………………………………………………………..

Cayley 定理：A 的特征多项式 $T(x)=|xI-A|=c_0+c_1x+\cdots+x^n$ 满足

$$T(A)=c_0I+c_1A+\cdots+A^n=0\ (0\text{ 阵})\text{---}$$ **(也叫 Cayley 公式)**

即，特征多项式 $T(x)=|xI-A|$ 恰是 n 次的 0 化式

备注：极小式 $m(x)$ 必是特征式 $T(x)=|xI-A|$ 的因子：$T(x)=m(x)g(x)$

…………………………………………………………………………………………..

备注(参考内容可略)：3 阶方阵的极小式 $m(x)$ 求法(利用特式 $|xI-A|$)：

1. 若 $|xI-A|=(x-a)(x-b)(x-c)(a\neq b\neq c)$，则极小式 $m(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

2. 设 $|xI-A|=(x-a)^2(x-b)(a\neq b)$，可验 $(A-aI)(A-bI)=0$ 是否成立

若 $(A-aI)(A-bI)=0$，则极小式 $m(x)=(x-a)(x-b)$

若 $(A-aI)(A-bI)\neq 0$，则极小式 $m(x)=(x-a)^2(x-b)$

3. 设 $|xI-A|=(x-a)^3$：

若 $(A-aI)\neq 0$，且 $(A-aI)^2=0$，则极小式 $m(x)=(x-a)^2$

若 $(A-aI)\neq 0$，且 $(A-aI)^2\neq 0$，则极小式 $m(x)=(x-a)^3$

例：求极小式 $m(x)=?$

$$(1)A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix},(2)A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ (3)A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix},(4)A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

解：(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 根为 $\lambda(A)=\{1,1,2\}$，特式 $|xI-A|=(x-1)^2(x-2)$

不同根为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2(\lambda_1\neq\lambda_2)$

因 $(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=0$，极小式 $m(x)=(x-1)(x-2)$

解：(2) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 根为 $\lambda(A)=\{1,1,2\}$，特式 $|xI-A|=(x-1)^2(x-2)$

因 $(A-1)(A-2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ & & \\ & & \end{pmatrix}\neq 0$

极小式 $m(x)\neq(x-1)(x-2)$，可知极小式 $m(x)=(x-1)^2(x-2)$

解：$(3)A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$ 根为 $\lambda(A)=\{2,2,2\}$，特式 $|xI-A|=(x-2)^3$

验：$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=0$，$(A-2I)\neq 0$

可知，极小式为 $m(x)=(x-2)^2$

解：$(4) A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 根为 $\lambda(A)=\{2,2,2\}$，特式 $|xI-A|=(x-2)^3$

验：$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$，极小式为 $m(x)=(x-2)^3$

注：由 Cayley 定理可知 $(A-2I)^3=0$

备注(选学内容): 单阵充要条件：A 为单阵 $\Leftrightarrow$ 极小式 $m(x)$ 无重根.

特别：若 $m(x)$ 有重根，则 A 不是单阵.

检查前例中，(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 极小式 $m(x)=(x-1)(x-2)$ 无重根，故 A 为单；

(2) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 极小式 $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ 有重根，**故 A 非单！**

$(3) A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$ 极小式为 $m(x)=(x-2)^2$ 有重根，**故 A 非单！**

解：$(4) A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 极小式为 $m(x)=(x-2)^3$ 有重根，**故 A 非单！**

....

习题 Ex: 判断下列矩阵是否单阵

$(1) A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$, $(2) A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $(3) A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $(4) A=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$

$(5) A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$, $(6) A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $(7) A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}$, $(8) A=\begin{pmatrix}1&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&2\end{pmatrix}$ (hermite?)

(9) c 为复数，$A=\begin{pmatrix}0&c&c\\c&0&c\\c&c&0\end{pmatrix}$ 是否正规？是否单阵？

(10) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&1\\0&0&3&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}$是否正规？是否单阵？（提示：用单阵充分条件）

(11) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$是否正规？是否单阵？(提示：用求秩法或反证明法)

备注（单阵遗传性）：若 $A=A_{n\times n}$ 为单阵，则 $f(A)$ 为单阵

其中 $f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k$

$f(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k$ 为任一多项式

Pf： 复习相似公式：$\mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})$

由单阵定义：若 $A=A_{n\times n}$ 为单阵存在可逆阵 P

使 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$（对角形），$\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}$

即 $\mathbf{P}^{-1}A\mathbf{P}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\0&&\lambda_{\mathbf{n}}\end{pmatrix}, A\sim\mathbf{D}$（相似于对角形）

利用公式 $\mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})$

$\Longrightarrow \mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{D})=\begin{pmatrix}f(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&f(\lambda_n)\end{pmatrix}, f(\mathbf{A})\sim f(\mathbf{D})$（相似于对角形）

$\Longrightarrow f(A)$ 为单阵 证毕

推论： (1) **平移法**： 若 A 为单， 则 $A\pm cI$ 为单 (可知 A 为单$\Leftrightarrow A\pm cI$ 为单)

若 A 非单，则 $A\pm cI$ 非单！

(2) **倍法**： 若 A 为单，则 kA 的为单

(3) **幂法** ： 若 A 为单，则 A^p 为单， $p=0,1,2,\cdots$

(4) 若 A 为单，则 $kA+cI$ 为单

备注(相似性)： 若 A 为单，且 $A\sim B$（相似） 则 B 为单

备注问题：秩 1 方阵是否单阵？

结论 1：若方阵 $A=A_{n\times n}$ 为秩 1，且 $\mathbf{tr}(A)\neq 0$ ，**则 A 为**单阵

Pf：因为 $A=A_{n\times n}$ 为秩 1 $\Rightarrow \lambda(A)=\{\mathrm{tr}(A),0,\cdots,0\}$，全体不同根为 $\lambda_1=\mathrm{tr}(A),\lambda_2=0$

$\lambda_2=0$ 为 $n-1$ 重根，求秩 $\mathbf{r}(A-\lambda_2 I)=\mathbf{r}(A-0I)=\mathbf{r}(A)=1=n-(n-1)$，故 A **为**单阵

(因为 $\lambda_2=0$ 恰有 $n-1$ 个无关特向，且 $\lambda_1=\mathbf{tr}(A)\neq 0$ 恰有 1 个特向，A 共有 n 个无关特征向量，故 A **为**单阵) **证毕**

结论 2：若方阵 $A=A_{n\times n}$ 为秩 1，且 $\mathbf{tr}(A)=0$ ，**则 A 非单阵**

Pf： A 为秩 1 $\Rightarrow \lambda(A)=\{\mathrm{tr}(A),0,\cdots,0\}=\{0,0,\cdots,0\}$，全体根 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

$\lambda_1=0$ 为 n 重根，求秩 $\mathbf{r}(A-\lambda_1 I)=\mathbf{r}(A-0I)=\mathbf{r}(A)=1=n-(n-1)\neq n-n$，故 A **非**单阵

(因为 $\lambda_1=0$ 恰有 $n-1$ 个无关特向，A 共有 n-1 个无关特向，故 A **非**单阵) 证毕

例 判定下列是否单阵：

$$(1)A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix},(2)A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix},(3)A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix},(4)A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix},$$

解：$(1)A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$ 可知 $(A-I)=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}$ 为秩 1，且 $tr(A-I)=-3\neq 0$

$\Rightarrow$ $A-I$ 为单阵，由平移法$\Rightarrow$ A 为单阵

$(2)A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}$，$\Rightarrow A-3I=\begin{pmatrix}4&4&-1\\4&4&-1\\-4&-4&1\end{pmatrix}$ 秩为 1，$tr(A-3I)=9\neq 0$

$\Rightarrow$ $A-3I$ 为单阵，由平移法$\Rightarrow$ A 为单阵

$(3)A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A-I=\begin{pmatrix}-2&-2&6\\-1&-1&3\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ 为秩 1 阵， 且 $tr(A-I)=0$

$\Rightarrow$ $A-I$ 非单阵，由平移法$\Rightarrow$ A 非单阵

$(4)A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow A-2I=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ 为秩 1 阵， 且 $tr(A-2I)=0$

$\Rightarrow$ $A-I$ 非单阵，由平移法$\Rightarrow$ A 非单阵

补充习题 Ex1: 判定下列是否单阵

$$(1)A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix},A-2=?，\ (2)A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{pmatrix},A-2=?$$

$$(3)\ A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix},\ A-I=?,\ (4)A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix},A-2=?$$

补充习题 Ex2: 判定下列是否单阵

$$(1)A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix},\ A-2=?,\ (2)A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-2&0&-1\\6&3&4\end{pmatrix},A-I=?\quad(3)A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$(4)A=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix},A-2=?$$

补充习题 Ex3: 判定下列是否正规阵？是否单阵？

$$(1)A=\begin{pmatrix}-1&i&0\\-i&0&-i\\0&i&-1\end{pmatrix}(\text{是否hermite}),(2)A=\begin{pmatrix}0&-i&1\\i&0&i\\1&-i&0\end{pmatrix},(3)\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&i&1\\-i&0&-i\\1&i&0\end{pmatrix},$$

$$(4)c\text{为复数},A=\begin{pmatrix}0&c&c\\c&0&c\\c&c&0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\text{是否正规}$$

$$(5)a,b\text{为实数，}\ A=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-a&b\\b&a\end{pmatrix}\text{是否正规？}$$

提示：$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}A=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$ 为优阵 $\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$ 正规

$$(6)\alpha,\beta\text{为复数，}\ A=\begin{pmatrix}\alpha&\bar{\beta}\\\beta&-\bar{\alpha}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-\alpha&\bar{\beta}\\\beta&\bar{\alpha}\end{pmatrix}\text{是否正规}$$

提示：$\frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}A=\frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}\begin{pmatrix}\alpha&\bar{\beta}\\\beta&-\bar{\alpha}\end{pmatrix}$ 为优阵 $\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$ 正规