3 个矩阵函数

3 个常见解析函数(Taylor 级数) $f(x)$ 与矩阵函数 $f(A)$，其中 A 为方阵

(1)令 $f\left(x\right)=e^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{1}{k!}x^{k}+\cdots\cdots$， 把 x 作为不定元

令 $x=A$(方阵) 代入可得

$$f(A)=e^{A}=1+A+\frac{A^{2}}{2}+\frac{A^{3}}{3!}+\cdots\cdots+\frac{A^{k}}{k!}+\cdots(A\text{的指数函数})$$

记为 $e^{\mathbf{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^{k}$， $e^{x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{k}$

(2) 令 $f(x)=\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\cdots\cdots$， 令 $x=A$(方阵) 可得

$$f(A)=\sin A=A-\frac{A^{3}}{3!}+\frac{A^{5}}{5!}-\frac{A^{7}}{7!}+\cdots\cdots(A\text{的正弦})$$

记为 $\sin\mathbf{A}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!}$， $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(3) 取 $f(x)=\cos x=x-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\cdots\cdots$， 令 $x=A$(方阵) 可得

$$f(A)=\cos A=I-\frac{A^{2}}{2!}+\frac{A^{4}}{4!}-\frac{A^{6}}{6!}+\cdots\cdots(A\text{的余弦})$$

记为 $\cos\mathbf{A}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!}$， $\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

为了方便应用，常引入一个参数 t

(1)令 $f(x)=e^{xt}$ (t为参数) 可得

$$f(A)=e^{tA}=I+tA+\frac{t^{2}A^{2}}{2}+\frac{t^{3}A^{3}}{3!}+\cdots\cdots+\frac{t^{k}A^{k}}{k!}+\cdots$$

特别 $t=1$时， $e^{A}=1+x+\frac{A^{2}}{2}+\frac{A^{3}}{3!}+\cdots\cdots+\frac{A^{k}}{k!}+\cdots$

(2) 令 $f(x)=\sin(tx)$ 可得

$$f(A)=\sin(tA)=tA-\frac{t^3A^3}{3!}+\frac{t^5A^5}{5!}-\frac{t^7A^7}{7!}+\cdots\cdots$$

(3)令 $f(x)=\cos(tx)$ 可得

$$f(A)=\cos(tA)=I-\frac{t^2A^2}{2!}+\frac{t^4A^4}{4!}-\frac{t^6A^6}{6!}+\cdots\cdots$$

备注：$e^A,\sin A,\cos A$ 对任何方阵 A 都有定义如下

$$e^A=1+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{A^k}{k!}+\cdots,$$

$$\sin A=A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\frac{A^7}{7!}+\cdots, \qquad \cos A=I-\frac{A^2}{2!}+\frac{A^4}{4!}-\frac{A^6}{6!}+\cdots$$

备注：$e^A,\sin A,\cos A$ 有如下基本性质

(1)若 $A=0=0_{n,n}$(零方阵)，则 $e^0=I$，$\cos 0=I$，$\sin 0=0$

$$\because e^0=I+0+\frac{0^2}{2}+\frac{0^3}{3!}+\cdots\cdots=I\text{；}\quad \cos 0=I-\frac{0^2}{2!}+\frac{0^4}{4!}-\frac{0^6}{6!}+\cdots=I\text{，且}\sin 0=0$$

(2) $\cos(-A)=\cos A$, $\sin(-A)=-\sin A$

$$\because \cos(-A)=I-\frac{(-A)^2}{2!}+\frac{(-A)^4}{4!}-\frac{(-A)^6}{6!}+\cdots=I-\frac{A^2}{2!}+\frac{A^4}{4!}-\frac{A^6}{6!}+\cdots=\cos A$$

$$\sin(-A)=(-A)-\frac{(-A)^3}{3!}+\frac{(-A)^5}{5!}-\frac{(-A)^7}{7!}+\cdots=-(A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\frac{A^7}{7!}+\cdots)=-\sin A$$

(3) Euler 公式：$e^{iA}=\cos A+i\sin A$, $e^{-iA}=\cos A-i\sin A$, $i=\sqrt{-1}$

或 Euler 公式 $\cos A=\frac{1}{2}\left(e^{iA}+e^{-iA}\right)$, $\sin A=\frac{1}{2i}\left(e^{iA}-e^{-iA}\right)$

证明：由定义 $e^{iA}=I+iA+\frac{(iA)^2}{2}+\frac{(iA)^3}{3!}+\frac{(iA)^4}{4!}+\cdots\cdots$

$$=I+iA-\frac{A^2}{2}-\frac{iA^3}{3!}+\frac{A^4}{4!}+\frac{iA^5}{5!}-\frac{A^6}{6!}-\frac{iA^7}{7!}+\cdots\cdots$$

$$=\left(I-\frac{A^2}{2}+\frac{A^4}{4!}-\frac{A^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\frac{A^7}{7!}+\cdots\right)$$

$$=\cos A+i\sin A \text{（由}\cos A,\ \sin A\text{定义）}$$

因为 $\cos(-A)=\cos(A),\ \sin(-A)=-\sin(A)$，可知

$$e^{-iA}=e^{i(-A)}=\cos(-A)+i\sin(-A)=\cos A-i\sin A$$ 证毕

特别：取 1 阶矩阵 $A=(x)$（x 为任一复数），

代入 Euler 公式 $e^{iA}=\cos A+i\sin A,\quad e^{-iA}=\cos A-i\sin A$

得"经典 Euler 公式"：$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

即 $\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right),\quad \sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$

备注： 用 (tx) 代替 x，可得含参数 t 的 Euler 公式

$$e^{itx}=\cos(tx)+i\sin(tx),\qquad e^{-itx}=\cos(tx)-i\sin(tx)$$

$$e^{itA}=\cos(tA)+i\sin(tA),\qquad e^{-itA}=\cos(tA)-i\sin(tA)$$

交换公式：若 AB=BA 可交换，则有**交换公式** $e^{A}\cdot e^{B}=e^{A+B}=e^{B}\cdot e^{A}$

注：$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$（$\because BA=AB$）

同理 $(A+B)^3=(A+B)(A+B)^2=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$（$\because BA=AB$）

Pf 证：$e^{A}\cdot e^{B}=\left(I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\frac{A^4}{4!}+\cdots\cdots\right)\cdot\left(I+B+\frac{B^2}{2}+\frac{B^3}{3!}+\frac{B^4}{4!}+\cdots\cdots\right)$

$$=I+(A+B)+\left(\frac{A^2}{2}+AB+\frac{B^2}{2}\right)+(\cdots)+\cdots$$

$$=I+(A+B)+\frac{1}{2}\left(A^2+2AB+B^2\right)+\frac{1}{3!}\left(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\right)+\cdots$$

$$=I+(A+B)+\frac{1}{2}(A+B)^2+\frac{1}{3!}(A+B)^3+\cdots$$

$$\overset{\text{定义}}{=}e^{A+B}$$

即有 $e^{A}\cdot e^{B}=e^{A+B}$，同理可知 $e^{B}\cdot e^{A}=e^{B+A}$，显然 $e^{B+A}=e^{A+B}$

故，$e^{A}\cdot e^{B}=e^{A+B}=e^{B}\cdot e^{A}$ 证毕

备注(特别公式)：$e^{A}\cdot e^{-A}=e^{-A}\cdot e^{A}=I$

证明：$\because A(-A)=(-A)A\Rightarrow e^{A}\cdot e^{-A}=e^{A+(-A)}=e^{0}=I$

可逆公式：任一方阵 A 都有 e^A 可逆，且 $(e^A)^{-1}=e^{-A}$ （$\because e^A\cdot e^{-A}=I$ 单位阵）

备注：如果 $AB\neq BA$,则可能 $e^A\cdot e^B\neq e^{A+B}\neq e^B\cdot e^A$ (见参考书例子或本文后面反例！)

备注：公式 $(e^A)^{-1}=e^{-A}$ 中用 (tA) 代替 A，可得含参数公式

$$(e^{tA})^{-1}=e^{-tA},\quad \text{且 } e^{tA}\cdot e^{-tA}=I$$

例　证明公式 $\sin^2 A+\cos^2 A=I$ （任一方阵 A）

证：利用 Euler 公式 $\cos A=\frac{1}{2}\left(e^{iA}+e^{-iA}\right)$，$\sin A=\frac{1}{2i}\left(e^{iA}-e^{-iA}\right)$，再用可逆公式

可知　$\cos^2 A=\frac{1}{4}\left(e^{2iA}+2e^0+e^{-2iA}\right)$，　$\sin^2 A=\frac{-1}{4}\left(e^{iA}-2e^0+e^{-2iA}\right)$

相加　$\sin^2 A+\cos^2 A=\frac{1}{4}(0+4I+0)=I$

....

补充习题：用 Euler 公式证明 $2\sin A\cos A=\sin(2A)$，$\cos^2 A-\sin^2 A=\cos(2A)$

....

注意：　e^A 对任一方阵 A 都有定义，且可逆 $(e^A)^{-1}=e^{-A}$！

备注（e^A 根公式）：设方阵 A 特根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，　则 e^A 的特根为

$$\lambda(e^A)=\{e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots,\ e^{\lambda n}\}$$

Pf 证：**令解析**函数 $f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots\frac{x^k}{k!}+\cdots$

用根公式可知 $f(A)=e^A$ 的根为 $\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}=\{e^{\lambda_1},\ \cdots,\ e^{\lambda_n}\}$

即　$$\lambda(e^A)=\{e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots,\ e^{\lambda_n}\}$$　证毕

推论：令 n 方阵 $A=(a_{i,j})$，则 $f(A)=e^A$ 的行列式为

$$\det(e^A)=|e^A|=e^{\mathbf{tr}(A)}=e^{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}$$

Pf 证：因为 $\lambda(e^A)=\{e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots,\ e^{\lambda_n}\}$，可知行列式

$$\det(e^A)=|e^A|=e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n}=e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=e^{\mathbf{tr}(A)}$$

且 $\mathbf{tr}(A)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

可知　$\det(e^A)=|e^A|=e^{\mathbf{tr}(A)}=e^{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}$　证毕

备注：因为 $\det(e^A) = |e^A| = e^{\mathbf{tr}(A)} \neq 0$ 又可知 e^A 必可逆

例如 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$\mathbf{tr}(A)=0$，则 $e^A = e^{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}$ 可逆

且行列式 $\det(e^A) = e^{\mathbf{tr}(A)} = e^{\mathbf{0}} = 1 \neq 0$

……………………………………………………………………

备注：对一些特殊矩阵可以利用定义求出 e^{tA}，见下面的例子

（用定义 $e^{tA} = I + tA + \dfrac{(tA)^2}{2} + \dfrac{(tA)^3}{3!} + \cdots\cdots$ 可求 e^{tA} 的例子）

例 证明幂等公式：若 $A^2 = A$，则有公式 $e^{tA} = I + (e^t - 1)A$

Pf 证：若 $A^2 = A$，可知 $A^3 = A, A^4 = A, \cdots, A^k = A, \cdots$，可知

$$e^{tA} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots = I + tA + \frac{t^2 A}{2} + \frac{t^3 A}{3!} + \cdots$$
$$= I + (t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots)A = I + (e^t - 1)A$$

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，计算 e^A, e^B

解 $\because A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = A,\quad B^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix} = B$ 为幂等阵

可知 $e^{tA} = I + (e^t - 1)A$，$e^{tB} = I + (e^t - 1)B$

令参数 $t = 1$ 可得 $e^A = I + (e-1)A = \begin{pmatrix}e & 0\\ e-1 & 1\end{pmatrix}$

$$e^B = I + (e-1)B = \begin{pmatrix}e & 0\\ -(e-1) & 1\end{pmatrix}$$

……………………………………………………………………

备注： 对角公式(*)：若 $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$(对角)，则 $f(D) = \begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}$

Pf：$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$(对角)$\Rightarrow D^k=\begin{pmatrix}\lambda_1{}^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n{}^k\end{pmatrix}, k=0,1,2,\cdots,(D^0=I)$

令 $f(x)=\mathbf{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots=\sum_0^\infty c_kx^k$ 为任一解析函数，可知

$$f(D)=c_0I+c_1D+\cdots\cdots+c_kD^k+\cdots\cdots=\sum_0^\infty c_kD^k$$

$$=\sum_0^\infty c_k\begin{pmatrix}\lambda_1{}^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n{}^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_0^\infty c_k\lambda_1{}^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_0^\infty c_k\lambda_n{}^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

…………………………………………………………………………………… 证毕

令函数 $f(x)=e^{tx}(t\text{为参数})=\sum_{k=0}^\infty\frac{(tx)^k}{k!}$， $f(\mathrm{D})=e^{tD}=\sum_{k=0}^\infty\frac{(tD)^k}{k!}$

可知 $f(\lambda_1)=e^{t\lambda_1},\cdots,f(\lambda_n)=e^{t\lambda_n}$， 利用上面对角公式(*)， 可得

备注：若 $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$(对角)，则 $e^{tD}=\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_1}\end{pmatrix}$

特别， $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$(对角)，则 $e^{D}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_1}\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,计算 e^{A+B}

解：$\because A+B=\begin{pmatrix}2 & \\ & 0\end{pmatrix}$为对角$\Rightarrow e^{A+B}=\begin{pmatrix}e^2 & \\ & e^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

备注(思考题)：本例可验证 $e^A\cdot e^B\neq e^{A+B}\neq e^B\cdot e^A$，且可知 $AB\neq BA$ 不可交换！

……………………………………………………………………………………

补充题 Ex: 用幂等公式求 e^{tA} 与 e^A

1. (1) $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$， (2) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 求 e^A, e^B, e^{A+B}，验证 $e^A\cdot e^B\neq e^{A+B}\neq e^B\cdot e^A$

例：$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，用定义验证公式：$e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$

解：

$$\because A^0=I, A^1=A, A^2=-I,\ A^3=A^2A=-A,\ A^4=A^2A^2=I,$$
$$A^5=A^4A=A,\ A^6=-I, A^7=-A, A^8=I, A^9=A\cdots\cdots$$

(可写公式：$A^{2k}=(-1)^k I$，$A^{2k+1}=(-1)^k A$，$k=0,1,2,\cdots$)

可知 $e^{tA}=I+tA+\dfrac{(tA)^2}{2}+\dfrac{(tA)^3}{3!}+\dfrac{(tA)^4}{4!}+\cdots\cdots$

$$=I+tA-\frac{t^2}{2}I-\frac{t^3}{3!}A+\frac{t^4}{4!}I+\frac{t^5}{5!}A+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots\cdots\right)I+\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\cdots\cdots\right)A$$

$$=(\cos t)I+(\sin t)A=\begin{pmatrix}\cos t & 0\\ 0 & \cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \sin t\\ -\sin t & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

可得公式 $e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$

即有公式 $e^{t\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}=e^{\begin{pmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$

备注：可用 e^{tA} 求逆 $(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}$

例：$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$， $e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$，求 $(e^{tA})^{-1}$

$$(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}\overset{\text{把t换成}-t}{=}\begin{pmatrix}\cos(-t) & \sin(-t)\\ -\sin(-t) & \cos(-t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

……………………………………………………………………………………………

补充习题：$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，用 e^{tA} 定义计算 $e^{tA}=?$，用 e^{tA} 求逆 $(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}=?$

……………………………………………………………………………………………..

备注(单位阵公式)： $f(I)=f(1)I$ ， 其中 $f(x)$ **为任一解析**函数

证： 利用对角公式：若 $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$(对角) ，则 $f(D)=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}$

令 $D=I=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$ 则 $f(D)=f(I)=\begin{pmatrix}f(1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(1)\end{pmatrix}=f(1)I$

即 $f(I)=\begin{pmatrix}f(1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(1)\end{pmatrix}=f(1)I$ 证毕

证法 2：**任一解析**函数 $f(x)=\mathbf{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots=\sum_0^\infty c_kx^k$

$$\Rightarrow f(I)=\sum_0^\infty c_kI^k=\sum_0^\infty c_kI=(\sum_0^\infty c_k)I=f(1)I$$ 证毕

令 $A=I$ 代入 $e^{tA},\cos(tA),\sin(tA)$ 可得如下**(单位阵公式)**

单位阵公式： $e^{tI}=e^tI$, $\sin(tI)=\sin(t)I$, $\cos(tI)=\cos(t)I$

特别 ， $e^I=eI=\begin{pmatrix}e & & \\ & \ddots & \\ & & e\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$

备注(**幂 0 阵定义)** **若** $A^k=0\ (k\geq 2)$， A 称为**幂 0 阵**

利用幂 0 阵可直接计算 3 个矩阵函数 $e^{tA},\cos(tA),\sin(tA)$ ， 已知定义：

$$e^{tA}=I+tA+\frac{t^2A^2}{2}+\frac{t^3A^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{t^kA^k}{k!}+\cdots$$

$$\sin(tA)=tA-\frac{t^3A^3}{3!}+\frac{t^5A^5}{5!}-\frac{t^7A^7}{7!}+\cdots\cdots$$

$$\cos(tA)=I-\frac{t^2A^2}{2!}+\frac{t^4A^4}{4!}-\frac{t^6A^6}{6!}+\cdots\cdots$$

备注（幂 0 公式)： 若 $A^k=0\ (k\geq 2)$， 则有公式

$$e^{tA}=I+tA+\frac{t^2A^2}{2}+\frac{t^3A^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{t^kA^{k-1}}{(k-1)!}$$

例：$(1)A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，　$(2)A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 求 e^{tA}，$\cos(tA)$，$\sin(tA)$，逆阵 $(e^{tA})^{-1}=?$

解：$(1)A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$\lambda(A)=\{0,0\}$，$|xI-A|=x^2$ 由 Cayley 公式可知 $A^2=0$

或直接验证 $A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=0$，由幂 0 公式 $A^2=0\ (k=2)$ 可得

$$\Rightarrow e^{tA}=I+tA=\begin{pmatrix}1+t & -t\\ t & 1-t\end{pmatrix}$$

另外，$\sin(tA)=tA-\frac{t^3A^3}{3!}+\frac{t^5A^5}{5!}-\frac{t^7A^7}{7!}+\cdots=tA=t\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，

$$\cos(tA)=I-\frac{t^2A^2}{2!}+\frac{t^4A^4}{4!}-\frac{t^6A^6}{6!}+\cdots=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

特别 $t=-1$ 时 可得 $e^{tA}=\begin{pmatrix}1+t & -t\\ t & 1-t\end{pmatrix}$ 的逆阵 $(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}$

$$\Rightarrow (e^{tA})^{-1}=e^{-tA}=\begin{pmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{pmatrix}$$

特别 $t=1$ 时，$\Rightarrow e^{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\sin(A)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$\cos A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$(2)A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 可知 $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0$

利用**幂 0 公式** $(A^3=0)$

$$e^{tA}=I+tA+\frac{t^2A^2}{2}+\frac{t^3A^3}{3!}+\cdots=I+tA+\frac{t^2A^2}{2}=\begin{pmatrix}1 & t & t^2/2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sin(tA)=tA-\frac{t^3A^3}{3!}+\cdots=tA=\begin{pmatrix}0&t&0\\0&0&t\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\cos(tA)=I-\frac{t^2A^2}{2!}+\cdots=I-\frac{t^2A^2}{2!}=\begin{pmatrix}1&0&t^2/2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

特别 $t=-1$ 时 可得 e^{tA} 的逆阵 $(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}$，即

$$\begin{pmatrix}1&t&t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=e^{-tA}=\begin{pmatrix}1&-t&t^2/2\\0&1&-t\\0&0&1\end{pmatrix}$$

补充题 Ex: 求 e^{tA}， $\cos(tA)$， $\sin(tA)$，逆阵 $(e^{tA})^{-1}$

$$(1)A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad (2)A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ (3)A=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&-1&-1\\6&3&3\end{pmatrix}(A^2=?)$$

……………………………………………………………………………………………

备注：若 $(A-aI)^k=0\ (k\geq 2)$，称 A 为‘平移幂 0 阵’

例(平移幂 0 公式): 若 $(A-aI)^2=0$，则 $e^{tA}=e^{ta}[I+t(A-aI)]$

证：若 $(A-aI)^2=0$，则有（幂 0 公式）：

$$e^{t(A-aI)}=I+t(A-aI)+\frac{(t(A-aI))^2}{2}+\frac{(t(A-aI))^3}{3!}+\cdots=I+t(A-aI)$$

即有 $e^{t(A-aI)}=I+t(A-aI)$

且 $e^{tA}=e^{taI+t(A-aI)}=e^{taI}e^{t(A-aI)}=e^{ta}[I+t(A-aI)]$

故 $e^{tA}=e^{ta}[I+t(A-aI)]$

……………………………………………………………………………………………

思考题 1：若 $(A-aI)^3=0$，证明 $e^{tA}=e^{ta}[I+t(A-aI)+\frac{t^2(A-aI)^2}{2}]$

思考题 2： $A=\begin{pmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}$,求 $(A-aI)^3$，求 e^{tA}

……………………………………………………………………………………………

例 $A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-2&0&-1\\6&3&2\end{pmatrix}$ 求 e^{tA} 与 $(e^{tA})^{-1}$

解：$A-1=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&-1&-1\\6&3&3\end{pmatrix}$ 为秩 1，且 $(A-1)^2=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&-1&-1\\6&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&-1&-1\\6&3&3\end{pmatrix}=0$

(注：$\lambda(A-I)=\{\mathrm{tr}(A-I),0,0\}=\{0,0,0\}\Rightarrow\ \lambda(A)=\{0+1,0+1,0+1\}=\{1,1,1\}$)

可知 $(A-1)^2=0$， 用公式 $e^{tA}=e^{ta}[I+t(A-aI)]$，若 $(A-a)^2=0$

可得 $e^{tA}=e^{t}[I+t(A-I)]=e^{t}\begin{pmatrix}1-2t&-t&-t\\-2t&1-t&-t\\6t&3t&1+3t\end{pmatrix}$

令 $t=(-t)$，可知逆阵 $(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}=e^{-t}\begin{pmatrix}1+2t&t&t\\2t&1+t&t\\-6t&-3t&1-3t\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$，求 e^{tA}

解：$A-2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 秩1，且 $(A-2)^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=0$

用平移幂 0 公式：$e^{tA}=e^{ta}[I+t(A-aI)]$，其中 $(A-a)^2=0$

得 $e^{tA}=e^{2t}[I+t(A-2)]=e^{2t}\begin{pmatrix}1&t&t\\\mathbf{0}&1-t&-t\\\mathbf{0}&t&1+t\end{pmatrix}$

……………………………………………………………………………..

备注(思考题)：若 $A=A_{n,n}$ 为秩 1 阵，则 $A^2=\lambda_1 A$，其中 $\lambda_1=\mathrm{tr}(A)$

提示：设 $A=\alpha\beta$ 为秩 1 分解，则 $\lambda_1=\mathrm{tr}(A)=\beta\alpha$ 且 $A^2=\alpha\beta\alpha\beta=?$

特别，若 $A=A_{n,n}$ 为秩 1 阵，且 $\mathrm{tr}(A)=0$，则 $A^2=0$

备注：若 $(A-aI)$ 为秩 1，且 $\mathrm{tr}(A-aI)=0$，则 $(A-aI)^2=0$

根据这个备注的条件，可直接判定 $(A-aI)^2=0$，参考下面例子

…………………………………………………………………………………………..

例 1： $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 求 e^{tA}

解： $A-a=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为秩 1，且 $\mathrm{tr}(A-aI)=0$ 可知 $(A-aI)^2=0$

用平移幂 0 公式： $e^{tA}=e^{ta}[I+t(A-aI)]$，其中 $(A-a)^2=0$

可得 $e^{tA}=e^{ta}[I+t(A-aI)]=e^{ta}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{ta} & te^{ta} \\ 0 & e^{ta} \end{pmatrix}$

例 2： $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$， 求 e^{tA}

解： $A+1=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 为秩 1，且 $\mathrm{tr}(A+I)=0$ 可知 $(A+I)^2=0$

用平移幂 0 公式： $e^{tA}=e^{ta}[I+t(A-aI)]$，其中 $(A-a)^2=0$

可得 $e^{tA}=e^{-t}[I+t(A+I)]=e^{-t}\begin{pmatrix} 1+2t & -2t \\ 2t & 1-2t \end{pmatrix}$

…………………………………………………………………………..

补充题 Ex:

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$， 求 e^{tA}； 2. $A=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$， 求 $(A-2I)^2$，求 $e^{t(A-2)}$与e^{tA}

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 3 \end{pmatrix}$， **求** e^{tA} **与** $(e^{tA})^{-1}$

4. $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$， **求** e^{tA} **与** $(e^{tA})^{-1}$

5.思考题: $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$， 求 $(A-aI)^3$， 求 e^{tA}

………………………………………………………………待续