8. **奇异值**

设矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}$，则 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 有相同正根为 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，$r=r(\mathbf{A})$，称 $\sqrt{x_1},\sqrt{x_2},\cdots,\sqrt{x_r}$ 为 $\mathbf{A}$ 的正奇异值，记作

$s_i=\sqrt{x_i}$ 或 $\sigma_i=\sqrt{x_i}$。如果按从大到小的顺序排列：$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_r$，称 s_1 为 $\mathbf{A}$ 的最大奇异值。

例 1：求下列正奇异值，① $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$；② $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$。

解：① $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$，$\left|\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0$，

可知 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 有 2 个特征根 $x_1=5$，$x_2=0$，$\therefore$ 正奇异值为 $s_1=\sqrt{x_1}=\sqrt{5}$。

② $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$，$\left|\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}2&2\\2&2\end{vmatrix}=0$，

可知 $x_1+x_2=2+2=4$，$x_1x_2=0$ 故 2 个特征根为 $x_1=4$，$x_2=0$，

$\therefore$ 正奇异值为 $s_1=\sqrt{x_1}=\sqrt{4}=2$.

9. **预酉阵**

设非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 互相正交，记 $\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2\perp\cdots\perp\boldsymbol{\alpha}_t$，称矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_t\end{pmatrix}$ 为预酉阵。

若矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_t\end{pmatrix}$ 为预酉阵，则 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{\alpha}_1|^2&0&\cdots&0\\0&|\boldsymbol{\alpha}_2|^2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&|\boldsymbol{\alpha}_t|^2\end{pmatrix}$ 为对角形.

例 1：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\because[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\boldsymbol{\alpha}_2^H\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1-1=0$，$\therefore\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2$。

$\therefore\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ 为预酉阵，$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$。

例 2：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$，$\because[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\boldsymbol{\alpha}_2^H\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}=-\mathrm{i}+\mathrm{i}=0$，$\therefore\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2$。

$\therefore \mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$为预酉阵，$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$。

例 3：如果$\boldsymbol{\alpha}_1 \perp \boldsymbol{\alpha}_2$，$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)$，则$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{\alpha}_1|^2 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{\alpha}_2|^2 \end{pmatrix}$。

证：$\because \boldsymbol{\alpha}_1 \perp \boldsymbol{\alpha}_2$，$\therefore [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\boldsymbol{\alpha}_2^H\boldsymbol{\alpha}_1=0$，$[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1]=\boldsymbol{\alpha}_1^H\boldsymbol{\alpha}_2=0$。

$$\therefore \mathbf{A}^H\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)^H(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^H \\ \boldsymbol{\alpha}_2^H \end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^H\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^H\boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_2^H\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^H\boldsymbol{\alpha}_2 \end{pmatrix}==\begin{pmatrix} |\boldsymbol{\alpha}_1|^2 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{\alpha}_2|^2 \end{pmatrix}。$$

10. 半酉阵和酉阵

设一组 n 元非 0 列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 互相正交，记作 $\boldsymbol{\alpha}_1 \perp \boldsymbol{\alpha}_2 \perp \cdots \perp \boldsymbol{\alpha}_t$，且有 $|\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_2|=\cdots=|\boldsymbol{\alpha}_t|=1$，称矩阵$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_t)$为列酉阵或次酉阵(半酉阵)。

$t=n$时，称$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n)$为酉阵。

列酉阵(半酉阵)的又可定义为：若$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{I}$，则$\mathbf{A}$为列酉阵(半酉阵)。

酉阵可定义为：若$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^H=\mathbf{I}$，则$\mathbf{A}$为酉阵。

性质：①若$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_t)$为列酉阵(半酉阵)，改变列的次序后得到矩阵$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_t)$也为列酉阵。②若$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_t)$为半酉阵，复数$b_1,b_2,\cdots,b_t$满足$|b_1|=|b_2|=\cdots=|b_t|=1$，则矩

$\mathbf{B}=(b_1\boldsymbol{\alpha}_1 \quad b_2\boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad b_t\boldsymbol{\alpha}_t)$也为(半酉阵)列酉阵.

11. 酉阵等价条件

n阶方阵$\mathbf{A}$为酉阵的等价条件：

①$\mathbf{A}$的列互相正交，且长度为 1；

②$\mathbf{A}^H=\mathbf{A}^{-1}$；

③$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^H=\mathbf{I}$；

④$\mathbf{A}$的行向量互相正交，且长度为 1；

12. 把预酉阵修正为半酉阵(列酉阵)

若$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_t)$为预酉阵，令$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|} & \cdots & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_t}{|\boldsymbol{\alpha}_t|} \end{pmatrix}$，则$\mathbf{B}$为列酉阵，

$\mathbf{B}^H\mathbf{B}=\mathbf{I}$。

$$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_t)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_2|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_t|} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|} & \cdots & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_t}{|\boldsymbol{\alpha}_t|} \end{pmatrix}$$

例 1：$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$为预酉阵，$|\boldsymbol{\alpha}_1|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{\alpha}_2|=\sqrt{2}$。可知

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$为列酉阵。

例 2：$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$为预酉阵，$|\boldsymbol{\alpha}_1|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{\alpha}_2|=\sqrt{2}$。

得知$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$为列酉阵。

例 3：矩阵$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$，求酉阵$\mathbf{B}$。

解：$\because [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\boldsymbol{\alpha}_2^H\boldsymbol{\alpha}_1=0$，$[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\boldsymbol{\alpha}_3^H\boldsymbol{\alpha}_2=0$，$[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1]=\boldsymbol{\alpha}_1^H\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即$\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2\perp\boldsymbol{\alpha}_3$，

$\therefore \mathbf{A}$为预酉阵。又$\because |\boldsymbol{\alpha}_1|=3$，$|\boldsymbol{\alpha}_2|=3$，$|\boldsymbol{\alpha}_3|=3$，$\mathbf{B}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$

为酉阵。

例 4：预酉阵$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$，求酉阵$\mathbf{B}$。

解：知$\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2\perp\boldsymbol{\alpha}_3$，$|\boldsymbol{\alpha}_1|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{\alpha}_2|=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{\alpha}_3|=\sqrt{2}$，

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{-2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$$为酉阵。

例 5：预半酉：$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1 & 2\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$，求半酉阵$\mathbf{B}$。**解**：$\because$

$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\boldsymbol{\alpha}_2^H\boldsymbol{\alpha}_1=(-2\mathrm{i} \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}=0$，$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2$，有$|\boldsymbol{\alpha}_1|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{\alpha}_2|=\sqrt{6}$，

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\sqrt{3}} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$为列酉阵。

例 6：预半酉：$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，求列酉阵$\mathbf{B}$。**解**：$\because [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\boldsymbol{\alpha}_2^H\boldsymbol{\alpha}_1=0$，$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2$，有$|\boldsymbol{\alpha}_1|=2$，$|\boldsymbol{\alpha}_2|=2$，

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{2} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$为列酉阵。

例 7：预酉 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，求酉阵$\mathbf{B}$。**解**：易知 $\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2\perp\boldsymbol{\alpha}_3\perp\boldsymbol{\alpha}_4$，有 $|\boldsymbol{\alpha}_1|=2$，$|\boldsymbol{\alpha}_2|=2$，$|\boldsymbol{\alpha}_3|=2$，$|\boldsymbol{\alpha}_4|=2$。

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_4}{|\boldsymbol{\alpha}_4|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{2} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{2} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{2} & \frac{\boldsymbol{\alpha}_4}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$为列酉阵。

13. 一个酉阵公式(镜面阵)

①列向量$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$是单位向量，即$|\boldsymbol{\varepsilon}|^2=|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2=1$，则矩阵$\mathbf{A}=\mathbf{I}-2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H$是酉阵且$\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$。

证明：$\mathbf{A}^H=\left(\mathbf{I}-2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H\right)^H=\mathbf{I}^H-2\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H\right)^H=\mathbf{I}-2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H=\mathbf{A}$，
$\mathbf{A}^2=\left(\mathbf{I}-2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H\right)^2=\left(\mathbf{I}-2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H\right)\left(\mathbf{I}-2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H\right)=\mathbf{I}-4\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H+4\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H=\mathbf{I}$，故$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}=\mathbf{A}^H$，$\therefore$ $\mathbf{A}$是酉阵。

②有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，可知 $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$ 为单位向量，则 $\mathbf{A}=\mathbf{I}-2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H=\mathbf{I}-2\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^H}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}$ 为酉阵，

$\det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|=-1$，且矩阵 $\mathbf{A}$ 有一特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，其对应特征值为 -1，即 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$；

$\sigma(\mathbf{A})=\{-1,1,\cdots,1\}$。

证：由换位公式：$\det(\mathbf{A})=\det\left(\mathbf{I}-2\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^H}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}\right)=\det\left(\mathbf{I}-2\dfrac{\boldsymbol{\alpha}^H\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}\right)=-1$。

$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\left(\mathbf{I}-2\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^H}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}\right)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-2\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^H\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}=\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$。

例 1：向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为单位向量，

$$\mathbf{A}=\mathbf{I}-2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$为酉阵。

14. 酉阵性质

①若 $\mathbf{A}$ 是酉阵，向量 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 正交，即 $\mathbf{X}\perp\mathbf{Y}$，则 $|\mathbf{AX}|^2=|\mathbf{X}|^2$，且 $\mathbf{AX}\perp\mathbf{AY}$。

证明：$\because$ $\mathbf{A}$ 是酉阵，$\therefore$ $\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^H=\mathbf{I}$，$\therefore$ $|\mathbf{AX}|^2=(\mathbf{AX})^H\mathbf{AX}=\mathbf{X}^H\mathbf{A}^H\mathbf{AX}=\mathbf{X}^H\mathbf{X}=|\mathbf{X}|^2$.

$\because$ $\mathbf{X}\perp\mathbf{Y}$ 则内积 $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=\mathbf{Y}^H\mathbf{X}=0$. $\because$ 内积 $[\mathbf{AX},\mathbf{AY}]=(\mathbf{AY})^H\mathbf{AX}=\mathbf{Y}^H\mathbf{A}^H\mathbf{AX}=0$ $\therefore$ $\mathbf{AX}\perp\mathbf{AY}$

① 矩阵 $\mathbf{A}$ 是酉阵，若 $\det(\mathbf{A})>0$，则 $\mathbf{A}$ 表示旋转，若 $\det(\mathbf{A})<0$，则 $\mathbf{A}$ 表示反射。

例 1：优阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$，向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{X}^*=\mathbf{AX}$ 表示把向量 $\mathbf{X}$ 逆转 α 角。

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^H=\mathbf{I}$，$\det(\mathbf{A})=1>0$。当 $\alpha=90^\circ$ 时，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$。

例 2：优阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\cos\beta&\sin\beta\\-\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}$，向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{X}^*=\mathbf{BX}$ 表示把向量 $\mathbf{X}$ 顺转 β 角。

$\mathbf{B}^H\mathbf{B}=\mathbf{B}\mathbf{B}^H=\mathbf{I}$，$\det(\mathbf{B})=1>0$。当 $\beta=90^\circ$ 时，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$。

例 3：优阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{X}^*=\mathbf{AX}$ 表示把向量 $\mathbf{X}$ 绕 x_3 轴转动 α 角。

例 4：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}^k=\begin{pmatrix}\cos k\alpha & -\sin k\alpha\\ \sin k\alpha & \cos k\alpha\end{pmatrix}$，$k$ 为正整数。

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix}。$$

例 5：$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{30}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}^{30}=\begin{pmatrix}\cos 10\pi & -\sin 10\pi\\ \sin 10\pi & \cos 10\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。

例 6：$\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}^{30}=2^{30}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{30}=2^{30}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。

例 7：

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{40}=\left[\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right]^{40}=2^{20}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}^{40}=2^{20}\begin{pmatrix}\cos 10\pi & -\sin 10\pi\\ \sin 10\pi & \cos 10\pi\end{pmatrix}=2^{20}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

八．许米特公式与 QR 分解

1. 正交化公式（Schmidt 许米特公式）

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 为一组线性无关的列向量，令：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1;\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1;\quad \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2;\quad \cdots;$$

$$\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r-1}]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}，\text{则 } \boldsymbol{\beta}_1\perp\boldsymbol{\beta}_2\perp\boldsymbol{\beta}_3\perp\cdots\perp\boldsymbol{\beta}_r。$$

证明：$[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1]=\left[\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\right]=[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]=0$；

$$[\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1]=\left[\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1\right]=[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1]=0$$

; ……

2. 单位化公式

$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_r=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_r}{|\boldsymbol{\beta}_r|}$ 为一组单位正交向量。向量

$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|} & \dfrac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|} & \cdots & \dfrac{\boldsymbol{\beta}_r}{|\boldsymbol{\beta}_r|}\end{pmatrix}$为列酉阵，即$\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}=\mathbf{I}$。

3. 正交三角分解（UR 或 QR 分解）

矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_t\end{pmatrix}$，$r(\mathbf{A})=r$，则有：$\mathbf{A}=\mathbf{QR}$，其中$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_3 & \cdots & \boldsymbol{\varepsilon}_r\end{pmatrix}$为列酉阵（半优阵），

$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}b_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_r\end{pmatrix}$且$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_r$均大于零。①各列$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$通过正交化公式得到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$，再令$\boldsymbol{\varepsilon}_i=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_i}{|\boldsymbol{\beta}_i|}$（$i=1,2,3,\cdots r$）。②如果$r=n$，$|\mathbf{A}|\neq 0$，$r(\mathbf{A})=n$；

$\mathbf{A}=\mathbf{QR}\Rightarrow\mathbf{R}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}$。

例 1，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$，求$\mathbf{A}=\mathbf{QR}$分解。

解：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{\beta}_1|=\sqrt{3}$，

$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}-\dfrac{\mathrm{i}}{3}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5\mathrm{i}\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{\beta}_2|=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$．$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}5\mathrm{i}\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$，可得$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{5\mathrm{i}}{\sqrt{42}} \\ \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \dfrac{4}{\sqrt{42}} \\ \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$（半优阵）。

令 $\mathbf{R}=\mathbf{Q}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}}\\ \frac{-5i}{\sqrt{42}} & \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \frac{i}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$。

得 $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$

4. 许尔公式（Schur）

许尔公式(1)：方阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 存在可逆阵 $\mathbf{P}$ 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为上三角阵；

许尔公式(2)：方阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 存在酉阵 $\mathbf{Q}$，使 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为上三角阵.

证明略(用归纳法).

例 1：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，令 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，有 $\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

令 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，有 $\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & -1\end{pmatrix}。$$

例 2：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2+\mathrm{i} & 1\\ 1 & 2-\mathrm{i}\end{pmatrix}$，令 $\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1\\ 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}$，有 $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 1\\ 1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}$，

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 1\\ 1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+\mathrm{i} & 1\\ 1 & 2-\mathrm{i}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1\\ 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-2\mathrm{i} & 2-2\mathrm{i}\\ 2 & -2\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1\\ 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

推论：①每个方阵都酉相似于上三角阵；

② 若 $\mathbf{A}$ 是 Hermite 阵：$\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$，则存在酉阵 $\mathbf{Q}$ 使 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为对角阵。

证：据许尔公式知：$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为上三角阵，则 $(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ})^H=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \bar{*} & \cdots & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}$ 为

下三角阵，又

$$\left(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\right)^{H}=\left(\mathbf{Q}^{H}\mathbf{A}\mathbf{Q}\right)^{H}=\mathbf{Q}^{H}\mathbf{A}^{H}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\text{，即}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{*} & \cdots & \overline{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

∴所有的元素* 都为 0，且 $\lambda_i=\overline{\lambda_i}$，即 λ_i 为实数（$i=1,2,3,\cdots,n$）。

例：Hermit 阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1\end{pmatrix}$，求优 $\mathbf{Q}$ 使 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ 为对角形

令 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

解：$\mathbf{A}=4\mathbf{I}+\mathbf{B}$，易求：$\sigma(\mathbf{A})=\{12,0,0,0\}$，特征根 12 对应的特征向量为 $(1\quad -1\quad 1\quad -1)^{\mathrm{T}}$，

$\sigma(\mathbf{B})=\{8,-4,-4,-4\}$，特征根 8 对应特向为 $(1\quad -1\quad 1\quad -1)^{\mathrm{T}}$。

令 $\mathbf{Q}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\mathbf{Q}$ 为酉阵，则 $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^{H}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，

可得：

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}8 & -8 & 8 & -8 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

例 4：Hermite 阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$，求优 $\mathbf{Q}$ 使 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 为对角

解：求得：$\sigma(\mathbf{A})=\{1,-1\}$，特征根 1 对应特征向量为 $(1\quad -\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$，特征根 -1 对应特征向量为

$(-\mathrm{i}\quad 1)^{\mathrm{T}}$，

令 $\mathbf{Q}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$，$\mathbf{Q}$ 为酉阵，则 $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^{H}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$.

即

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

推论：任一 $\mathbf{A}_{m\times n}$，则 $\mathbf{A}^{H}\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{AA}^{H}$ 都为 Hermite 阵，对 $\mathbf{A}^{H}\mathbf{A}$，存在酉阵 $\mathbf{Q}$（$\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^{H}$），使得：

$\mathbf{Q}^{-1}\left(\mathbf{A}^{H}\mathbf{A}\right)\mathbf{Q}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$，$\mathbf{Q}$ 中列向量都是 $\mathbf{A}^{H}\mathbf{A}$ 的特征向量，对应特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为实数且非负，因为 $\mathbf{A}^{H}\mathbf{A}$ 半正定.