预备知识

一．矩阵与行列

1．复习

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，其行列式表示为：$\det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|$。

例 1：计算矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2}$ 的行列式。求得：$\det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$。

例 2：求高阶方阵 $\mathbf{G}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$ 的行列式。求得：$\det(\mathbf{G})=|\mathbf{G}|=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$。

当有：$\mathbf{AC}=\mathbf{CA}$ 时，$\det(\mathbf{G})=|\mathbf{G}|=|\mathbf{AD}-\mathbf{BC}|$。（降阶公式！特别 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{C}$ 有一个是单位阵的特殊情况：）

例 3：求高阶方阵 $\mathbf{G}=\begin{pmatrix} I_n & B \\ C & I_m \end{pmatrix}$ 的行列式，得：$\det(\mathbf{G})=|\mathbf{G}|=|\mathbf{I}_n-\mathbf{BC}|$.

2．二阶求逆

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，**求逆** $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\mathrm{A}|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$（二阶逆公式：当 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，则矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆）

例：求 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$。求得：$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/d \end{pmatrix}$。

3．高阶阵求逆

例 1：求高阶矩阵 $\mathbf{G}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 的逆矩阵（分块上三角矩阵求逆公式）。

解：利用矩阵 $\mathbf{G}$ 的**增广矩阵** $\tilde{\mathbf{G}}=\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I & 0 \\ 0 & D & 0 & I \end{array}\right)$ 来辅助求解。

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I & 0 \\ 0 & D & 0 & I \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{cc|cc} A^{-1}A & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & D & 0 & I \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & D & 0 & I \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1}D & 0 & D^{-1} \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & I & 0 & D^{-1} \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & -(A^{-1}B)D^{-1} \\ 0 & I & 0 & D^{-1} \end{array}\right)$$

，即得：

$$\mathbf{G}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}。$$

例 2：求高阶矩阵 $\mathbf{G}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 的逆矩阵（分块下三角矩阵求逆公式）。

解：利用矩阵 $\mathbf{G}$ 的**增广矩阵** $\tilde{\mathbf{G}}=\left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & I & 0 \\ C & D & 0 & I \end{array}\right)$ 来辅助求解。

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & I & 0 \\ \mathrm{C} & D & 0 & I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cc|cc} A^{-1}A & 0 & A^{-1} & 0 \\ \mathrm{C} & D & 0 & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & 0 \\ \mathrm{C} & D & 0 & I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & 0 \\ D^{-1}\mathrm{C} & D^{-1}D & 0 & D^{-1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & 0 \\ D^{-1}\mathrm{C} & I & 0 & D^{-1} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行变换}} \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & I & -(D^{-1}B)A^{-1} & D^{-1} \end{array}\right)$$

，即得：

$$\mathbf{G}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}。$$

例 3：特别，对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 的逆阵为 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_n \end{pmatrix}$。

二．相似矩阵的概念与性质

1．相似矩阵的概念

如果有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$，则称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，记作 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$（相似）.

2．相似矩阵性质

①传递性：如果 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$ 且 $\mathbf{B}\sim\mathbf{C}$，则 $\mathbf{A}\sim\mathbf{C}$；
②逆向性：如果 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，则 $\mathbf{B}\sim\mathbf{A}$；
③反身性： $\mathbf{A}\sim\mathbf{A}$；
④不变性：如果 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，则 $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$, or $\det(\mathbf{A})=\det(\mathbf{B})$（相似矩阵的行列式不变）；
⑤相同性：如果 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，则 $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=|x\mathbf{I}-\mathbf{B}|$（相似矩阵有相同特征多项式）；
⑥相等性：如果 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，则 $\mathrm{tr}(\mathbf{A})=\mathrm{tr}(\mathbf{B})$（迹相等）。

证明：④: $|\mathbf{B}|=|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}|=|\mathbf{P}^{-1}|\cdot|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{P}|=\dfrac{1}{|\mathbf{P}|}\cdot|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{P}|=|\mathbf{A}|$；

⑤: $|x\mathbf{I}-\mathbf{B}|=|x\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}|=|(x\mathbf{P}^{-1}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{P}|=|\mathbf{P}^{-1}(x\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{P}|=|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$。

3．换位公式:

设矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 和 $\mathbf{B}_{n\times m}$，则 $(\mathbf{AB})_{m\times m}$ 为 m 阶方阵，$(\mathbf{BA})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，可设 $\mathrm{m}\geq n$

则有**换位公式**：$|x\mathbf{I}-\mathbf{AB}|=x^{m-n}|x\mathbf{I}-\mathbf{BA}|$，即 $\det(x\mathbf{I}_m-\mathbf{AB})=x^{m-n}\det(x\mathbf{I}_n-\mathbf{BA})$

Pf(证明)：令 m+n 阶矩阵：$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix}_{m+n}$，$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}_{m+n}$，$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ 且

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

可知，$\mathbf{CP}=\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}$ 且

$$\mathbf{PD}=\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}$$

即 $\mathbf{PD}=\begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}=\mathbf{CP}$，得 $\mathbf{C}=\mathbf{PDP}^{-1}$，所以 $\mathbf{C}\sim\mathbf{D}$（相似）。

根据相似性质⑤可得 $|x\mathbf{I}-\mathbf{C}|=|x\mathbf{I}-\mathbf{D}|$，代入矩阵并化简得：

$$|x\mathbf{I}_{m+n}-\mathbf{C}|=\begin{vmatrix} x\mathbf{I}_m-\mathbf{AB} & 0 \\ -\mathbf{B} & x\mathbf{I}_n \end{vmatrix}=|(x\mathbf{I}_m-\mathbf{AB})(x\mathbf{I}_n)|=x^n|x\mathbf{I}_m-\mathbf{AB}|$$

$$|x\mathbf{I}_{m+n}-\mathbf{D}|=\begin{vmatrix} x\mathbf{I}_m & 0 \\ -\mathbf{B} & x\mathbf{I}_n-\mathbf{BA} \end{vmatrix}=|(x\mathbf{I}_m)(x\mathbf{I}_n-\mathbf{BA})|=x^m|x\mathbf{I}_n-\mathbf{BA}|$$

即 $x^n|x\mathbf{I}_m-\mathbf{AB}|=x^m|x\mathbf{I}_n-\mathbf{BA}|$，所以 $|x\mathbf{I}_m-\mathbf{AB}|=x^{m-n}|x\mathbf{I}_n-\mathbf{BA}|$

备注：也可写换位公式：令 $\mathbf{A}_{\mathrm{n}\times p}$ 和 $\mathbf{B}_{\mathrm{p}\times n}$，且 $\mathrm{n}\geq p$

则 $|x\mathbf{I}_{\mathrm{n}}-\mathbf{AB}|=x^{n-p}|x\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}|$，或 $\det(x\mathbf{I}_{\mathrm{n}}-\mathbf{AB})=x^{n-p}\det(x\mathbf{I}_p-\mathbf{BA})$

4．推论

①$|\mathbf{I}_m-\mathbf{AB}|=|\mathbf{I}_n-\mathbf{BA}|$；②若 $m>n$，则 $|\mathbf{AB}|=0$。

证明：①．换位公式中令 $x=1$ 即可得证；②．换位公式中令 $x=0$ 可得 $|-\mathbf{AB}|=(-1)^m|\mathbf{AB}|=0$，即 $|\mathbf{AB}|=0$。

例 1：设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 $|\mathbf{AB}|$。解：$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，

$$|\mathbf{AB}|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

例 2：设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$，求 $|\mathbf{AB}|$。

解：$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}$，$|\mathbf{AB}|=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{vmatrix}=0$

例 3：设 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$，证明：$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}$。

证明：利用矩阵 $\mathbf{P}$ 的增广矩阵 $\tilde{\mathbf{P}}$ 作行变换来证明，

$$\tilde{\mathbf{P}}=\left(\begin{array}{cc|cc} I & A & I & 0 \\ 0 & I & 0 & I \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & I & -A \\ 0 & I & 0 & I \end{array}\right)。$$

例 4：设 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$，证明：$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}$。

证明：$\because \tilde{\mathbf{P}}=\left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & I & 0 \\ A & I & 0 & I \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & I & 0 \\ 0 & I & -A & I \end{array}\right)$，$\therefore \mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}$。

5．换位公式与秩 1 阵公式

例 1：设有全 1 方阵: $\mathbf{A}_{n\times n}=(1)_{n\times n}$，求 $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$。 解：设 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}=(1\quad 1\quad \cdots\quad 1)_{1\times n}^{T}=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=(1\quad 1\quad \cdots\quad 1)_{1\times n}，\text{ 则 } \boldsymbol{\beta\alpha}=n$$

由换位公式知：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=|x\mathbf{I}_n-\boldsymbol{\alpha\beta}|=x^{n-1}|x\mathbf{I}_1-\boldsymbol{\beta\alpha}|=x^{n-1}(x-n)$。

例 2：设秩 1 阵：

$$\mathbf{A}_{n\times n}=\begin{pmatrix} k_1b_1 & k_1b_2 & \cdots & k_1b_n \\ k_2b_1 & k_2b_2 & \cdots & k_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_nb_1 & k_nb_2 & \cdots & k_nb_n \end{pmatrix}(\text{比例阵}),\text{令}\boldsymbol{\alpha}=(k_1\quad k_2\quad \cdots\quad k_n)^T=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

证明 **秩 1 公式：** $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{n-1}\left[x-\mathrm{tr}(\mathbf{A})\right]$，其中 $\mathrm{tr}(\mathbf{A})=\text{A的迹!}$

解：设 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(k_1\quad k_2\quad \cdots\quad k_n)_{1\times n}^T$，$\boldsymbol{\beta}=(\mathrm{b}_1\quad b_2\quad \cdots\quad b_n)_{1\times n}$，则：

$\boldsymbol{\beta\alpha}=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$， 即 $\boldsymbol{\beta\alpha}=\mathrm{tr}(\mathbf{A})=\text{A的迹!}$

故：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=|x\mathbf{I}_n-\boldsymbol{\alpha\beta}|=x^{n-1}|x\mathbf{I}_1-\boldsymbol{\beta\alpha}|=x^{n-1}\left[x-\mathrm{tr}(\mathbf{A})\right]$。

例 3：设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ 求 $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$。解：$\mathbf{A}$ 为秩 1 阵（比例阵），则

$$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{3-1}\left[x-\mathrm{tr}(\mathbf{A})\right]=x^2(x+2).$$

例 4：设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$，求 $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$。解：$\mathbf{A}$ 为秩 1 阵，

$$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{3-1}\left[x-\mathrm{tr}(\mathbf{A})\right]=x^2(x-9)。$$

例 5：设”秩 1 方阵” $\mathbf{A}_{n\times n}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times 1}\boldsymbol{\beta}_{1\times n}$（比例阵），则：向量 $\boldsymbol{\alpha}_{n\times 1}$ 是 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ 对应的特征

向量。

证：$\because \mathbf{A}_{n\times n}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times 1}\boldsymbol{\beta}_{1\times n}$ 的秩为一，$\therefore \boldsymbol{\beta\alpha}=\operatorname{tr}(\mathbf{A})$。

$\because \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_{n\times 1}\operatorname{tr}(\mathbf{A})=\operatorname{tr}(\mathbf{A})\boldsymbol{\alpha}$，$\therefore \boldsymbol{\alpha}$ 是特征根 $\lambda_1=\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ 的特征向量。

三. 根公式

1. 定义记号

方阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 有 n 个特征根记为 $\lambda(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 或 $\sigma(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，

也称 $\sigma(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱，函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$ 和 n 阶方阵

$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_k\boldsymbol{A}^k$。

则 $f(\boldsymbol{A})$ 的谱（特征根集合）为 $\sigma[f(\mathrm{A})]=\lambda[f(\mathrm{A})]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$

例 1 $\lambda(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{aI}+\boldsymbol{A}$，求 $\lambda[f(\mathrm{A})]$

解：$\lambda[f(\mathrm{A})]=\{a+\lambda_1,\cdots,\ a+\lambda_n\}$

例：设 $\mathbf{F}=\begin{pmatrix}2&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&2\end{pmatrix}_{n\times n}$ 求特征根 $\sigma(\mathbf{F})$. $\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$

解：因为 $\mathbf{F}=f(\mathbf{A})=\mathbf{I}+\mathbf{A}$，$n$ 阶全 1 阵 $\mathbf{A}$ 的谱为 $\sigma(\mathbf{A})=\{n,0,\cdots,0\}$，

则 $\sigma(\mathbf{F})=\sigma(f(\mathbf{A}))=\{n+1,1,\cdots,1\}$。

例 3：$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}0&-1&\cdots&-1\\-1&0&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-1&-1&\cdots&0\end{pmatrix}_{n\times n}$ 求 $\lambda(\mathrm{F})$ 与特征式 $|\lambda\mathrm{I}-\mathrm{F}|$. 令 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$

解：$\mathbf{F}=f(\mathbf{A})=\mathbf{I}-\mathbf{A}$，故，全 1 阵 $\mathbf{A}$ 的谱为 $\lambda(\mathrm{A})=\{n,0\cdots,0\}$，故

$\lambda(\mathrm{F})=\{1-n,1-0\cdots,1-0\}$，可知 $|x\mathbf{I}-\mathbf{F}|==(x+n-1)(x-1)^{n-1}$。

2. 根公式复习

若方阵 $\mathbf{A}$ 的全体特征根为 $\lambda(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则 $f(\mathbf{A})$ 的全体特征根为：

$\lambda[f(\mathrm{A})]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$；若 X 是 $\mathbf{A}$ 的特根 λ_1 所对应的特征向量，即 $\mathrm{AX}=\lambda_1\mathrm{X}$，

则 X 也是 $f(\mathbf{A})$ 的特征向量，其对应的特根为 $f(\lambda_1)$，即有 $f(\mathbf{A})\mathrm{X}=f(\lambda_1)\mathrm{X}$

3. 补充定理

如果 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的各行元素之和为常数 a，则 $x=a$ 是一个特根，对应的特向量为

全 1 向量：$\mathbf{X}=(1,1,\cdots,1)^T$。（备注：各列元素之和为常数 a 时 $x=a$ **也是一个特根**）

证：$\mathbf{AX}=\mathbf{A}(1,1,\cdots,1)^T=(a,a,\cdots,a)^T=a(1,1,\cdots,1)^T=a\mathbf{X}$。

例 1：n 阶全 1 矩阵 $\mathbf{A}$，其各行元素之和为常数 n，$x=n$ 是一个特根，对应特征向量为

$\mathbf{X}=(1,1,\cdots,1)^T$

例 2：令 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\lambda(\mathrm{A})=\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ，则 $\lambda_1+\lambda_2=a+d=\mathrm{tr}(A),\ \lambda_1\lambda_2=ad-bc=|A|$.

例 3：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$\lambda(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 则 $\begin{matrix} \lambda_1+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}(\mathrm{A}) \\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\mathrm{A}|=\det(\mathrm{A}) \end{matrix}$

例 4：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$的各行元素的和为$4$，则 $\lambda_1=4$为一特根，其特向为全 1 向量

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；另一个根为$\lambda_2=5-4=1$，特向为$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，全体根$\sigma(\mathbf{A})=\{4,1\}$.

例 5：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$各行元素和为$15$，则 $\lambda_1=15$为一特根，其对应特向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

例 6：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$求特根$\lambda(\mathrm{A})$与特向量. 解：设 $\lambda(\mathrm{A})=\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ，求得：$\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$.

令 $\lambda_1=i$ 对应特向为$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\lambda_2=-i$ 对应特向$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\mathrm{i}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=-\mathrm{i}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$则$\begin{cases} a_2=\mathrm{i}a_1 \\ -a_1=\mathrm{i}a_2 \end{cases}$和$\begin{cases} b_2=-\mathrm{i}b_1 \\ -b_1=-\mathrm{i}b_2 \end{cases}$。

可得 $\lambda_1=i$ 对应的特向为$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$，$\lambda_2=-i$ 对应的特征向为$\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.

例 7：$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$，求$\sigma(\mathbf{F})$和$|x\mathbf{I}-\mathbf{F}|$.

令 $\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

解∵ $\mathbf{F}=f(\mathbf{A})=-4\mathbf{I}+\mathbf{A}$，$\mathbf{A}$ 为秩 1 比例阵，$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{4-1}[x-\mathrm{tra}(\mathbf{A})]=x^3(x-12)$。

∴ $\sigma(\mathbf{A})=\{12,0,0,0\}$，∴ $\sigma(\mathbf{F})=\{8,-4,-4,-4\}$，$|x\mathbf{I}-\mathbf{F}|=(x+4)^3(x-8)$.

$\because\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 3 & -3\\ -3 & 3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3 & -3\\ -3 & 3 & -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -3 & 3 & -3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，则 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

是 $\mathbf{A}$ 的特根 $x=12$ 对应的特向量，也是矩阵 $\mathbf{F}$ 的特根 $x=8$ 对应的特向。

例 8：求 $\sigma(\mathbf{F})$ 和 $|x\mathbf{I}-\mathbf{F}|$，矩阵 $\mathbf{F}$ 为如下：

① $\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$, ② $\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & 4\end{pmatrix}$, ③ $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 3\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$, ④ $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$。

解：① $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 6\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\end{pmatrix}$,

② $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 4 & -1\\ 4 & 4 & -1\\ -4 & -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 4 & -1\end{pmatrix}$,

③ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 3\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, ④ $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}$。

① $\mathbf{F}=\mathbf{I}+\mathbf{A}$，$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=0$，② $\mathbf{F}=3\mathbf{I}+\mathbf{A}$，$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=9$，③ $\mathbf{F}=\mathbf{A}$，$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=0$，④ $\mathbf{F}=\mathbf{I}+\mathbf{A}$，$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=0$。

∵①②③④中所有的 $\mathbf{A}$ 矩阵都为秩 1 阵（比例阵），

∴ ① $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{3-1}[x-\mathrm{tra}(\mathbf{A})]=x^2(x-0)=x^3$，$\sigma(\mathbf{A})=\{0,0,0\}$，故 $\sigma(\mathbf{F})=\{1,1,1\}$，$|x\mathbf{I}-\mathrm{F}|=(x-1)^3$；

② $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{3-1}[x-\mathrm{tra}(\mathbf{A})]=x^2(x-9)$，$\sigma(\mathbf{A})=\{9,0,0\}$，故 $\sigma(\mathbf{F})=\{12,3,3\}$，$|x\mathbf{I}-\mathrm{F}|=(x-3)^2(x-12)$；

③ $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{3-1}[x-\mathrm{tra}(\mathbf{A})]=x^2(x-0)=x^3$，$\sigma(\mathbf{A})=\{0,0,0\}$，故 $\sigma(\mathbf{F})=\{0,0,0\}$，$|x\mathbf{I}-\mathrm{F}|=x^3$；

④ $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{3-1}[x-\mathrm{tra}(\mathbf{A})]=x^2(x-0)=x^3$，$\sigma(\mathbf{A})=\{0,0,0\}$，故 $\sigma(\mathbf{F})=\{1,1,1\}$，$|x\mathbf{I}-\mathrm{F}|=(x-1)^3$。

四．向量的标准内积

实矩阵 $\mathbf{R}^n$ 和复矩阵 $\mathbf{C}^n$，$\mathbf{R}^n\subset\mathbf{C}^n$，$\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 的所有分量 x_i 均为实数，$\mathbf{C}^n$ 中

的向量$\mathbf{Z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$的所有分量中必有$z_i$为虚数，一般未作详细说明的向量均为$\mathbf{C}^n$内的向量。。

1. 向量的标准内积

在 $\mathbf{C}^n$ 中引入标准内积，设列向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，有内积：

$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n$。

2. 标准内积的性质

①$[\mathbf{X},\mathbf{X}]=x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\cdots+x_n\bar{x}_n=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2=|\mathbf{X}|^2$；

②$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n$；

③$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=\overline{[\mathbf{Y},\mathbf{X}]}$；

④$[k\mathbf{X},\mathbf{Y}]=k[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$，$[\mathbf{X},k\mathbf{Y}]=\bar{k}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$；

⑤如果$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n=0$，则称向量$\mathbf{X}$与向量$\mathbf{Y}$正交，记作$\mathbf{X}\perp\mathbf{Y}$；

⑥如果$\mathbf{X}\perp\mathbf{Y}$，则$|\mathbf{X}+\mathbf{Y}|^2=|\mathbf{X}|^2+|\mathbf{Y}|^2$，如果$\mathbf{X}\perp\mathbf{Y}\perp\mathbf{Z}$，则$|\mathbf{X}+\mathbf{Y}+\mathbf{Z}|^2=|\mathbf{X}|^2+|\mathbf{Y}|^2+|\mathbf{Z}|^2$。

例 1：向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$及任意非零数$k_1$和$k_2$，证明$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$，$k_1\boldsymbol{\alpha}\perp k_2\boldsymbol{\beta}$。（$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$）

证明：$\because [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2=1\times\bar{\mathrm{i}}+\mathrm{i}\times\bar{1}=-\mathrm{i}+\mathrm{i}=0$，$\therefore \boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$。

$\because$ $[k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\beta}]=k_1\bar{k}_2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=k_1\bar{k}_2(a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2)=k_1\bar{k}_2(1\times\bar{\mathrm{i}}+\mathrm{i}\times\bar{1})=k_1\bar{k}_2(-\mathrm{i}+\mathrm{i})=0$，$\therefore$ $k_1\boldsymbol{\alpha}\perp k_2\boldsymbol{\beta}$。

例 2：向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$，证明$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$。（$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$）

证明：$\because [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2+a_3\bar{b}_3=1\times\bar{0}+1\times\bar{\mathrm{i}}+\mathrm{i}\times\bar{1}=0-\mathrm{i}+\mathrm{i}=0$，$\therefore \boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$。

3. 共轭转置及性质

矩阵$\mathbf{X}$的普通转置记作$\mathbf{X}^T$，矩阵$\mathbf{X}$的共轭转置（Hermite 转置）记作$\mathbf{X}^H=\overline{\mathbf{X}}^T$.

性质：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^H=\mathbf{A}^H+\mathbf{B}^H$，$(\mathbf{AB})^H=\mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$，$(\mathbf{ABC})^H=\mathbf{C}^H\mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$；

$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$，$(\mathbf{ABC})^{-1}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$，$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$均为同阶可逆方阵。

例 1：列向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$，证明模长公式：$|\boldsymbol{\alpha}|^2=\boldsymbol{\alpha}^H\boldsymbol{\alpha}$.

证明：$\because$ $\boldsymbol{\alpha}^H=(\bar{a}_1 \ \cdots \ \bar{a}_n)$，$\therefore$

$$\boldsymbol{\alpha}^H\boldsymbol{\alpha}=(\bar{a}_1 \ \cdots \ \bar{a}_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\bar{a}_1a_1+\cdots+\bar{a}_na_n=|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2。$$

例 2：列向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$，证明：内积公式 $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=\mathbf{Y}^H\mathbf{X}$。

证明：$\because$ $\mathbf{Y}^H=(\bar{y}_1 \ \cdots \ \bar{y}_n)$，$\therefore$ $\mathbf{Y}^H\mathbf{X}=(\bar{y}_1 \ \cdots \ \bar{y}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n=[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$。

五．矩阵的标准内积（补充参考）*

同阶复矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，规定 2 个矩阵的标准内积 $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ 如下

内积：$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^H)=\mathrm{tr}(\mathbf{B}^H\mathbf{A})=\sum a_{ij}\bar{b}_{ij}$

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 为 m 阶方阵，且有 $\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)=\mathrm{tr}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})=\sum a_{ij}\bar{a}_{ij}=\sum|a_{ij}|^2$。

$\mathbf{B}^H\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$\mathbf{A}\mathbf{B}^H$ 为 m 阶方阵，且有 $\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^H)=\mathrm{tr}(\mathbf{B}^H\mathbf{A})=\sum a_{ij}\bar{b}_{ij}$。

$[\mathbf{A},\mathbf{A}]=\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)=\mathrm{tr}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})=\sum a_{ij}\bar{a}_{ij}=\sum|a_{ij}|^2$.

六．常用特殊矩阵

1. 对角矩阵

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}^H=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1&0&\cdots&0\\0&\bar{\lambda}_2&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\bar{\lambda}_n\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^H\mathbf{D}=\mathbf{D}\mathbf{D}^H=\begin{pmatrix}|\lambda_1|^2&0&\cdots&0\\0&|\lambda_2|^2&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&|\lambda_n|^2\end{pmatrix}。$$

2. 三角矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}b_1 & * & \cdots & * \\ 0 & b_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{AB}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2b_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}。$$

3. Hermite 矩阵

若 $\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 为 Hermite 矩阵；若 $\mathbf{B}^H=-\mathbf{B}$，则称矩阵 $\mathbf{B}$ 为斜或反 Hermite 矩阵。

例 1. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}$，证明：矩阵 $\mathbf{A}$ 为 Hermite，矩阵 $\mathbf{B}$ 为斜 Hermite 矩阵。

证明：$\mathbf{A}^H=\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{-\mathrm{i}} \\ \overline{\mathrm{i}} & \overline{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2\end{pmatrix}=\mathbf{A}$，$\mathbf{B}^H=\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{i}} & \overline{-1} \\ \overline{1} & \overline{\mathrm{i}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}=-\mathbf{B}$。

例 2. 若 $\mathbf{A}$ 为 Hermite 矩阵，$\mathbf{B}$ 为斜 Hermite 矩阵，则 $\mathrm{i}\mathbf{A}$ 为斜 Hermite 矩阵，$\mathrm{i}\mathbf{B}$ 为 Hermite 矩阵。

证明：$\because$ $\mathbf{A}$ 为 Hermite 矩阵，$\therefore \mathbf{A}^H=\mathbf{A}$，$\because (\mathrm{i}\mathbf{A})^H=\mathrm{i}^H\mathbf{A}^H=-\mathrm{i}\mathbf{A}$，$\therefore \mathrm{i}\mathbf{A}$ 为斜 Hermite 矩阵。

$\because$ $\mathbf{B}$ 为斜 Hermite 矩阵，$\therefore \mathbf{B}^H=-\mathbf{B}$，$\because (\mathrm{i}\mathbf{B})^H=\mathrm{i}^H\mathbf{B}^H=-\mathrm{i}(-\mathbf{B})=\mathrm{i}\mathbf{B}$，$\therefore \mathrm{i}\mathbf{B}$ 为 Hermite 矩阵。

总结：Hermite 矩阵的主对角线元素都为实数，其他元素共轭对称，即 $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$。

例 3：若矩阵 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，证明：$\mathbf{A}+\mathbf{A}^H$ 为 Hermite 矩阵，$\mathbf{A}-\mathbf{A}^H$ 为斜 Hermite 矩阵。

证明：$\because (\mathbf{A}+\mathbf{A}^H)^H=\mathbf{A}^H+(\mathbf{A}^H)^H=\mathbf{A}^H+\mathbf{A}$，$\therefore \mathbf{A}+\mathbf{A}^H$ 为 Hermite 矩阵。

$\because (\mathbf{A}-\mathbf{A}^H)^H=\mathbf{A}^H-(\mathbf{A}^H)^H=\mathbf{A}^H-\mathbf{A}=-(\mathbf{A}-\mathbf{A}^H)$，$\therefore \mathbf{A}-\mathbf{A}^H$ 为斜 Hermite 矩阵。

有：$\mathbf{A}=\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^H}{2}+\dfrac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^H}{2}$，$\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^H}{2}$ 为 Hermite 矩阵，$\dfrac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^H}{2}$ 为斜 Hermite 矩阵。

例 4：任给矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，证明：$\mathbf{AA}^H$ 和 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 都为 Hermite 阵。

证明：$\because (\mathbf{AA}^H)^H=(\mathbf{A}^H)^H\mathbf{A}^H=\mathbf{AA}^H$，$\therefore \mathbf{AA}^H$ 为 Hermite 矩阵。

$\because (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^H=\mathbf{A}^H(\mathbf{A}^H)^H=\mathbf{A}^H\mathbf{A}$，$\therefore \mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 为 Hermite 矩阵。

例 5：矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^H=(1\quad 1\quad -\mathrm{i})$，$\mathbf{AA}^H=\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ \mathrm{i}\end{pmatrix}(1\quad 1\quad -\mathrm{i})=\begin{pmatrix}1 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=3$。

七. Hermite 矩阵与二次型

1. **定义**：设矩阵 $\mathbf{A}$ 和复向量 $\mathbf{X}$，$\mathbf{A}$ 是 Hermite，即 $\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$，则称 $f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H\mathbf{AX}$ 为 A 的二次型。

定理：$\mathbf{A}$ 是 Hermite，任一复向量 $\mathbf{X}$，则 $f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H\mathbf{A}\mathbf{X}$ 为实数！

证：$f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H\mathbf{A}\mathbf{X}$ 为 1 阶方阵，取共轭 $\overline{f(\mathrm{X})}=[f(\mathrm{X})]^H=(\mathrm{X}^H\mathrm{AX})^H=\mathrm{X}^H\mathrm{AX}=f(\mathrm{X})$.

例 1：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 2\end{pmatrix}$，向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，求向量 $\mathbf{A}$ 的二次型。

解：

$$f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H\mathbf{A}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1-\mathrm{i}\bar{x}_2 & \mathrm{i}\bar{x}_1+2\bar{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=(\bar{x}_1-\mathrm{i}\bar{x}_2)x_1+(\mathrm{i}\bar{x}_1+2\bar{x}_2)x_2$$

$$=\bar{x}_1x_1-\mathrm{i}\bar{x}_2x_1+\mathrm{i}\bar{x}_1x_2+2\bar{x}_2x_2=|x_1|^2+2|x_2|^2+\mathrm{i}\bar{x}_1x_2+\overline{\mathrm{i}\bar{x}_1x_2}$$

例 2：设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 为 Hermite 矩阵，向量 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，求向量 $\mathbf{A}$ 的二次型。（$\bar{b}=c$）

解：

$$f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H\mathbf{A}\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\bar{x}_1+c\bar{x}_2 & b\bar{x}_1+d\bar{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=(a\bar{x}_1+c\bar{x}_2)x_1+(b\bar{x}_1+d\bar{x}_2)x_2$$

$$=a\bar{x}_1x_1+c\bar{x}_2x_1+b\bar{x}_1x_2+d\bar{x}_2x_2=a|x_1|^2+d|x_2|^2+b\bar{x}_1x_2+\overline{b\bar{x}_1x_2}$$

2. 正定阵和半正定阵

设有矩阵 $\mathbf{A}$ 和复向量 $\mathbf{X}$，$\mathbf{A}$ 是 Hermite 矩阵，即 $\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$，若 $f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H\mathbf{A}\mathbf{X}>0$ 对一切非零向量 $\mathbf{X}$ 都成立，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 为正定阵，记作“$\mathbf{A}>0$”。

设有矩阵 $\mathbf{A}$ 和复向量 $\mathbf{X}$，$\mathbf{A}$ 是 Hermite 矩阵，即 $\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$，若 $f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H\mathbf{A}\mathbf{X}\geqslant 0$ 对一切非零向量 $\mathbf{X}$ 都成立，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 为半正定阵，记作：“$\mathbf{A}\geqslant 0$”。

3. 引理

①设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 为 Hermite 阵，即 $\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$，则 $\mathbf{A}$ 的全体特根 $\lambda(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 都为实数。

证：设 λ_1 为 $\mathbf{A}$ 的任一特征根，且非零向量 $\mathbf{X}$ 是 λ_1 对应的特征向量，则 $\mathrm{AX}=\lambda_1\mathbf{X}$

$\because f(\mathrm{X})=\mathrm{X}^H\mathrm{AX}=\lambda_1\mathrm{X}^H\mathrm{X}=\lambda_1|\mathrm{X}|^2$ 为实数，$|\mathbf{X}|^2$ 为实数，$\therefore \lambda_1=\frac{\mathrm{XAX^H}}{|\mathrm{X}|^2}$ 为实数。

②若 Hermit 阵 $\mathbf{A}$ 全体特征根都是正数，则 A 为正定阵（充要条件）

4. 定理：任一矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}$，则 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 为 m 阶半正定阵，$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 为 n 阶半正定阵.

证明：$\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 的二次型为 $f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)\mathbf{X}=\mathbf{X}^H\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{X}=(\mathbf{A}^H\mathbf{X})^H\mathbf{A}^H\mathbf{X}=|\mathbf{A}^H\mathbf{X}|^2\geqslant 0$。

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 的二次型为 $f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{X}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{X}=(\mathbf{A}\mathbf{X})^H\mathbf{A}\mathbf{X}=|\mathbf{A}\mathbf{X}|^2\geqslant 0$。

例 1：设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可逆，即 $\det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|\neq 0$，则 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 和 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 都是正定阵。

证明：$\because n$ 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可逆，$\therefore$ 对于非零向量 $\mathbf{X}$，有 $\mathbf{A}\mathbf{X}\neq 0$

$\mathbf{AA}^H$ 的二次型为 $f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H(\mathbf{AA}^H)\mathbf{X}=\mathbf{X}^H\mathbf{AA}^H\mathbf{X}=(\mathbf{A}^H\mathbf{X})^H\mathbf{A}^H\mathbf{X}=|\mathbf{A}^H\mathbf{X}|^2>0$。

$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 的二次型为 $f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^H(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{X}^H\mathbf{A}^H\mathbf{AX}=(\mathbf{AX})^H\mathbf{AX}=|\mathbf{AX}|^2>0$。

5. 引理：方程 $\mathbf{AX}=0$ 与方程 $\mathbf{A}^H\mathbf{AX}=0$ 同解。

证明：显然 $\mathbf{AX}=0$ 的解也是 $\mathbf{A}^H\mathbf{AX}=0$ 的解； 又

$\because\ 0=\mathbf{X}^H\mathbf{A}^H\mathbf{AX}=(\mathbf{AX})^H\mathbf{AX}=|\mathbf{AX}|^2=0$，$\therefore\ \mathbf{AX}=0$。

6. 秩公式：$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}^H\mathbf{A})=r(\mathbf{AA}^H)=r$

证明：设 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r(\mathbf{A})=r$， $\mathbf{AX}=0$ 的解空间维数为 $n-r$， $\mathbf{A}^H\mathbf{AX}=0$ 的解空间维数也为 $n-r$

由引理可得秩公式：$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}^H\mathbf{A})=r(\mathbf{AA}^H)=r$。

7. 换位公式推论

①矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 和 $\mathbf{B}_{n\times n}$ 为同阶方阵，则相同根 $\sigma(\mathbf{AB})=\sigma(\mathbf{BA})=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$；

②矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 和 $\mathbf{B}_{n\times m}$ $(m>n)$，$\mathbf{AB}$ 为 m 阶方阵，$\mathbf{BA}$ 为 n 阶方阵，则 $\sigma(\mathbf{BA})=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\sigma(\mathbf{AB})=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,0_1,0_2,\cdots,0_{m-n}\}$；

③矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 和 $\mathbf{B}_{n\times m}$ $(m>n)$，且有 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^H$，则 $\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{BA}$ 都为半正定阵，且正特征根相同。

例 1：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^H=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 则：$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$，

$\mathbf{AA}^H=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\sigma(\mathbf{A}^H\mathbf{A})=\{2,1\}$，$\sigma(\mathbf{AA}^H)=\{2,1,0\}$。

8. 奇异值