9. 广谱公式(补充参考)

（1）若矩阵 $\mathbf{A}$ 的极小式为 $\mathrm{m}(x)=(x-a)^k$，$k>1$，则 $\mathbf{A}$ 不是单纯阵，对任一解析函数 $f(x)$ 有公式：

$$f(\mathbf{A})=f(a)\mathbf{I}+f'(a)(\mathbf{A}-a\mathbf{I})+\frac{f''(a)}{2!}(\mathbf{A}-a\mathbf{I})^2+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(\mathbf{A}-a\mathbf{I})^{k-1}.$$

特别，若 $\mathbf{A}$ 的极小式为 $\mathrm{m}(x)=(x-a)^2$，则 $\mathbf{A}$ 对任意解析函数 $f(x)$ 有公式：

$$f(\mathbf{A})=f(a)\mathbf{I}+f'(a)(\mathbf{A}-a\mathbf{I})$$

（2）仅做参考*

若矩阵 $\mathbf{A}$ 有极小式 $\mathrm{m}(x)=(x-a)^2(x-b)$，$a\neq b$，则 $\mathbf{A}$ 不是单纯阵，对任意解析函数 $f(x)$，有广谱公式：

$$f(\mathbf{A})=f(a)\mathbf{G}_1+f(b)\mathbf{G}_2+f'(a)\mathbf{G}_{11}，\text{其中 } \mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2=\mathbf{I}，\ \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2=0.$$

例 1：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，求 $e^{t\mathbf{A}}$ 和 $e^{\mathbf{A}}$。**解**：特征多项式为

$$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-2&0&0\\-1&x-1&-1\\-1&1&x-3\end{vmatrix}=(x-2)^3，\text{因为}$$

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$，极小式为 $\mathrm{m}(x)=(x-2)^2$，$\mathbf{A}$ 不是单阵.

对任意解析函数 $f(x)$ 有：$f(\mathbf{A})=f(2)\mathbf{I}+f'(2)(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$。

令 $f(x)=e^{tx}$，则 $f'(x)=te^{tx}$，故 $f(2)=e^{2t}$，$f'(2)=te^{2t}$。

$$f(\mathbf{A})=e^{t\mathbf{A}}=e^{2t}\mathbf{I}+te^{2t}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{pmatrix}。$$

令 t=1 可得，$e^{\mathbf{A}}=e^2\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$。

例 2：已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 不是单阵，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，计算 f（$\mathbf{A}$）

解：其最小式为 $\mathrm{m}(x)=(x-1)^2(x-2)$，对任意多项式 $f(x)$ 有：

$f(\mathbf{A})=f(1)\mathbf{G}_1+f(2)\mathbf{G}_2+f'(1)\mathbf{G}_{11}$，其中 $\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2=\mathbf{I}$。现取不同的多项式求解 $\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2,\mathbf{G}_{11}$.

①. 令 $f(x)=(x-1)(x-2)$，$f'(x)=(x-1)+(x-2)=2x-3$，即有：$f(1)=f(2)=0$，$f'(1)=-1$，代入公式得：

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=-\mathbf{G}_{11}$，即可求得：

$$\mathbf{G}_{11}=-(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=-\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

②. 令 $f(x)=(x-1)^2$，$f'(x)=2(x-1)$，即有 $f(1)=0$，$f(2)=1$，$f'(1)=0$，代入公式得：$(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2=\mathbf{G}_2$，

即可求得：

$$\mathbf{G}_2=(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}，\mathbf{G}_1=\mathbf{I}-\mathbf{G}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

③. 令 $f(x)=x-2$，$f'(x)=1$，即有 $f(1)=-1$，$f(2)=0$，$f'(1)=1$，代入公式得：

$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=-\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_{11}$，即可求得：

$$\mathbf{G}_1=\mathbf{G}_{11}+2\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

$$f(\mathbf{A})=f\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=f(1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+f(2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+f'(1)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

验证：$\mathbf{A}^{100}=\begin{pmatrix}1&100&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}$，令 $f(x)=x^{100}$，$f'(x)=100x^{99}$，即有 $f(1)=1$，$f(2)=2^{100}$，

$f'(1)=100$，代入公式得：

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2^{100}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+100\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&100&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}。$$

九．矩阵函数计算

（1）矩阵 $\mathbf{A}$ 为单纯阵，则 $f(\mathbf{A})=f(\lambda_1)\mathbf{G}_1+\cdots+f(\lambda_s)\mathbf{G}_s$，对任意解析函数 $f(x)$ 都成立。

（2）矩阵 $\mathbf{A}$ 有广谱公式 $f(\mathbf{A})=f(a)\mathbf{G}_1+f(b)\mathbf{G}_2+f'(a)\mathbf{G}_{11}$，对任意解析函数 $f(x)$ 都成立。

（3）常见解析函数的泰勒（Taylor）级数：

① $f(x)=e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$，即

$f(\mathbf{A})=e^{\mathbf{A}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\mathbf{A}^{n-1}$。

② $f(x)=\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，即

$\sin\mathbf{A}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathbf{A}^{2n-1}}{(2n-1)!}$。

③ $f(x)=\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$，即

$\cos\mathbf{A}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathbf{A}^{2n-2}}{(2n-2)!}$。

④ $f(x)=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$，$|x|<1$，即

$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$，$\rho(\mathbf{A})<1$。

⑤ $f(x)=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$，$|x|<1$，即

$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}^{n-1}$，$\rho(\mathbf{A})<1$。

⑥ $f(x)=\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$，$|x|<1$，即

$\ln(\mathbf{I}+\mathbf{A})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\mathbf{A}^n$，$\rho(\mathbf{A})<1$。

例 1：矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求 $e^{t\mathbf{A}}$ 和 $e^{\mathbf{A}}$。**解**：矩阵的特征多项式为：

$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x+1 & 0 & -1\\ -1 & x-2 & 0\\ 4 & 0 & x-3\end{vmatrix}=(x-1)^2(x-2)$，$\sigma(\mathbf{A})=\{1,1,2\}$，验证 $(x-1)(x-2)$ 是否为矩阵的极小多项式。

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}\neq 0$，矩阵 $\mathbf{A}$ 不是单纯阵，

其极小多项式为 $\mathrm{m}(x)=(x-1)^2(x-2)$。$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，对任意解析函数 $f(x)$ 有：

$f(\mathbf{A})=f(1)\mathbf{G}_1+f(2)\mathbf{G}_2+f'(1)\mathbf{G}_{11}$，其中 $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2=0$，$\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2=\mathbf{I}$。现取不同的多项式来求解 $\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2,\mathbf{G}_{11}$。

①. 令 $f(x)=(x-1)(x-2)$，$f'(x)=(x-1)+(x-2)=2x-3$，即有：$f(1)=f(2)=0$，$f'(1)=-1$，代入公式得：

$(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=-\mathbf{G}_{11}$，即可求得：

$\mathbf{G}_{11}=-(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=-\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -4 & 0 & 2\end{pmatrix}$；

②. 令 $f(x)=(x-1)^2$，$f'(x)=2(x-1)$，即有 $f(1)=0$，$f(2)=1$，$f'(1)=0$，代入公式得：$(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2=\mathbf{G}_2$，

即可求得：$\mathbf{G}_2=(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（$\mathbf{G}_1=\mathbf{I}-\mathbf{G}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$）；

③. 令 $f(x)=x-2$，$f'(x)=1$，即有 $f(1)=-1$，$f(2)=0$，$f'(1)=1$，代入公式得：

$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=-\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_{11}$，即可求得：

$$\mathbf{G}_1=\mathbf{G}_{11}+2\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\2&0&-1\\-4&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

令 $f(x)=e^{tx}$，则 $f'(x)=te^{tx}$，故 $f(1)=e^t$， $f(2)=e^{2t}$， $f'(1)=te^t$ 。

$$f(\mathbf{A})=e^{t\mathbf{A}}=f(1)\mathbf{G}_1+f(2)\mathbf{G}_2+f'(1)\mathbf{G}_{11}=e^t\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+te^t\begin{pmatrix}-2&0&1\\2&0&-1\\-4&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^t-2te^t&0&te^t\\e^t-e^{2t}+2te^t&e^{2t}&e^{2t}-e^t-te^t\\-4te^t&0&e^t+2te^t\end{pmatrix}。\text{令 }t=1\text{，则 }e^{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}-e&0&e\\3e-e^2&e^2&e^2-2e\\-4e&0&3e\end{pmatrix}。$$

例 2：矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，求 $e^{t\mathbf{A}}$ 。**解**：矩阵的特征多项式为：

$$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-2&-1&0\\0&x-2&-1\\0&0&x-2\end{vmatrix}=(x-2)^3$$，矩阵 $\mathbf{A}$ 不是单纯阵，

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$$，极小多项式为 $\mathrm{m}(x)=(x-2)^3$。对任意解析函数 $f(x)$ 有：$f(\mathbf{A})=f(2)\mathbf{I}+f'(2)(\mathbf{A}-2\mathbf{I})+0.5f''(2)(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2$。令 $f(x)=e^{tx}$，则 $f'(x)=te^{tx}$， $f''(x)=t^2e^{tx}$， 故 $f(2)=e^{2t}$， $f'(2)=te^{2t}$， $f''(2)=t^2e^{2t}$ 。故：

$$e^{t\mathbf{A}}=e^{2t}\mathbf{I}+te^{2t}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})+0.5t^2e^{2t}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2$$

$$=e^{2t}\left[\mathbf{I}+t(\mathbf{A}-2\mathbf{I})+0.5t^2(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\right]=e^{2t}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+0.5t^2\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=e^{2t}\begin{pmatrix}1&t&0.5t^2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}$$

。

例 3：矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}$，求 $e^{t\mathbf{A}}$。**解**：特征多项式为：

$$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x-1&4\\3&x-2\end{vmatrix}=(x-5)(x+2)$$，$\sigma(\mathbf{A})=\{5,-2\}$，

$\mathbf{A}$ 为单阵。对任解析函数 $f(x)$ 有谱公式：$f(\mathbf{A})=f(5)\mathbf{G}_1+f(-2)\mathbf{G}_2$，其中 $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2=0$，$\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2=\mathbf{I}$。

$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}$, $\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=-\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-4&4\\3&-3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}4&-4\\-3&3\end{pmatrix}$。令 $f(x)=e^{tx}$，

则 $f'(x)=te^{tx}$，故 $f(5)=e^{5t}$，$f(-2)=e^{-2t}$。

$$e^{t\mathbf{A}}=e^{5t}\mathbf{G}_1+e^{-2t}\mathbf{G}_2=\frac{e^{5t}}{7}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}+\frac{e^{-2t}}{7}\begin{pmatrix}4&-4\\-3&3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3e^{5t}+4e^{-2t}&4e^{5t}-4e^{-2t}\\3e^{5t}-3e^{-2t}&4e^{5t}+3e^{-2t}\end{pmatrix}。$$

例 4：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，求 $e^{t\mathbf{A}}$。解：可知知，$\mathbf{A}$ 是单纯阵，$\lambda_1=1$ 二重根，$\lambda_2=-2$。

$f(\mathbf{A})=e^{t\mathbf{A}}=f(1)\mathbf{G}_1+f(-2)\mathbf{G}_2=e^{t}\mathbf{G}_1+e^{-2t}\mathbf{G}_2$，代入 $\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{G}_2$ 得：

$$e^{t\mathbf{A}}=e^{t}\mathbf{G}_1+e^{-2t}\mathbf{G}_2=e^{t}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}+e^{-2t}\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{t}-e^{-2t}&2e^{t}-2e^{-2t}&0\\e^{-2t}-e^{t}&2e^{-2t}-e^{t}&0\\e^{-2t}-e^{t}&2e^{-2t}-2e^{t}&e^{t}\end{pmatrix}$$

例 5：矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，求 $e^{t\mathbf{A}}$。**解**：矩阵的特征多项式为：$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}x&1\\-1&x\end{vmatrix}=x^2+1$，

$\lambda_1=\mathrm{i}$，$\lambda_2=-\mathrm{i}$，矩阵 $\mathbf{A}$

是单纯阵，对任意解析函数 $f(x)$ 有：$f(\mathbf{A})=f(\mathrm{i})\mathbf{G}_1+f(-\mathrm{i})\mathbf{G}_2$。令 $f(x)=e^{tx}$，故 $f(\mathrm{i})=e^{\mathrm{i}t}$，$f(-\mathrm{i})=e^{-\mathrm{i}t}$。

$\mathbf{G}_1=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1\\-1&\mathrm{i}\end{pmatrix}$，$\mathbf{G}_2=\dfrac{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}}{\lambda_2-\lambda_1}=-\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&1\\-1&-\mathrm{i}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&-1\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix}$。

$$e^{t\mathbf{A}}=e^{\mathrm{i}t}\mathbf{G}_1+e^{-\mathrm{i}t}\mathbf{G}_2=\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1\\-1&\mathrm{i}\end{pmatrix}+\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&-1\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{e^{\mathrm{i}t}+e^{-\mathrm{i}t}}{2}&\dfrac{e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\\\dfrac{e^{-\mathrm{i}t}-e^{\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}&\dfrac{e^{\mathrm{i}t}+e^{-\mathrm{i}t}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$$

（4）矩阵的指数函数和三角函数：

规定：$e^{\mathbf{A}t}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)!}\mathbf{A}^{n-1}t^{n-1}$，$\sin\mathbf{A}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n-1)!}\mathbf{A}^{2n-1}t^{2n-1}$，

$$\cos \mathbf{A}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-2)!}\mathbf{A}^{2n-2}t^{2n-2}.$$

定理：下列公式成立

①. $e^{\mathbf{A}\mu}e^{\mathbf{A}\upsilon}=e^{\mathbf{A}(\mu+\upsilon)}$，$e^{t\mathbf{I}}=e^{t}\mathbf{I}$，$e^{\mathbf{0}}=\mathbf{I}$； ② . $e^{\mathrm{i}t\mathbf{A}}=\cos t\mathbf{A}+\mathrm{i}\sin t\mathbf{A}$ ，$\sin^2\mathbf{A}+\cos^2\mathbf{A}=\mathbf{I}$；

③. 对任意矩阵$\mathbf{A}$，$e^{\mathbf{A}}$总是可逆，$\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1}=e^{-\mathbf{A}}$； ④ . $\cos(-\mathbf{A})=\cos\mathbf{A}$ ，$\sin(-\mathbf{A})=-\sin\mathbf{A}$；

⑤. $\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}}=\left(e^{t\mathbf{A}}\right)'_t=\mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}=e^{t\mathbf{A}}\mathbf{A}$, $\det\left(e^{t\mathbf{A}}\right)=e^{\mathrm{tr}(t\mathbf{A})}$； ⑥ . $\cos t\mathbf{A}=\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t\mathbf{A}}+e^{-\mathrm{i}t\mathbf{A}}\right)$ ，$\sin t\mathbf{A}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t\mathbf{A}}-e^{-\mathrm{i}t\mathbf{A}}\right)$；

⑦. $\frac{d}{dt}\cos t\mathbf{A}=-\mathbf{A}\sin t\mathbf{A}=-(\sin t\mathbf{A})\mathbf{A}$，$\frac{d}{dt}\sin t\mathbf{A}=\mathbf{A}\cos t\mathbf{A}=(\cos t\mathbf{A})\mathbf{A}$；

⑧. 若方阵$\mathbf{A}_{n\times n}$和$\mathbf{B}_{n\times n}$可交换：$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$则$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}=e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$；且有公式：

$\sin(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\sin\mathbf{A}\cos\mathbf{B}\pm\cos\mathbf{A}\sin\mathbf{B}$，$\cos(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\cos\mathbf{A}\cos\mathbf{B}\mp\sin\mathbf{A}\sin\mathbf{B}$.

例 1：证明：$\det\left(e^{\mathbf{A}}\right)=e^{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}$。证：设$\sigma(\mathbf{A})=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=x_1+x_2+\cdots+x_n$，且$\sigma\left(e^{\mathbf{A}}\right)=\left\{e^{x_1},e^{x_2},\cdots,e^{x_n}\right\}$，故$\det\left(e^{\mathbf{A}}\right)=\left|e^{\mathbf{A}}\right|=e^{x_1}e^{x_2}\cdots e^{x_n}=e^{x_1+x_2+\cdots+x_n}=e^{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}$

由此可知$|e^{\mathbf{A}}|$非 0，故为$e^{\mathbf{A}}$可逆阵.

例 2：设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$，求$\det\left(e^{\mathbf{A}}\right)$。解：$\det\left(e^{\mathbf{A}}\right)=e^{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}=e^{7}$。

例 3：矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ，求 $\det\left(e^{t\mathbf{A}}\right)$ 。解：$\det\left(e^{t\mathbf{A}}\right)=e^{\mathrm{tr}(t\mathbf{A})}=e^{0}=1$ ；

$$\det\left(e^{t\mathbf{A}}\right)=\begin{vmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{vmatrix}=\cos^2 t+\sin^2 t=1。$$

例 4：已知：$e^{t\mathbf{A}}=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}$。解：两边对 t 求导，左边为

$$\mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}=2e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

右边为 $2e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ ，又有：

$$\left(e^{t\mathbf{A}}\right)^{-1}=e^{-t\mathbf{A}}=e^{-2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\-t&1+t&-t\\-t&t&1-t\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}=\left[2e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\right]e^{-2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\-t&1+t&-t\\-t&t&1-t\end{pmatrix}=\left[2\begin{pmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1&0&\\-t&1+t&\\-t&t&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\2t+1&1-2t&2t+1\\2t+1&-2t-1&2t+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-t&1+t&-t\\-t&t&1-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}.$$

………………………………………………………..

十．向量和矩阵的范数