补充公式

复习：正规阵谱公式： 若 $A = A_{n\times n}$ **正规，全体互异根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$， **则有**

$$A = \lambda_1 G_1 + \cdots\cdots + \lambda_k G_k \quad \text{（叫 } A \text{ 的谱分解）}$$

且 $f(A) = f(\lambda_1)G_1 + \cdots\cdots + f(\lambda_k)G_k$

对**任一多项式成立**

其中 $G_1,\cdots\cdots G_k$ 叫 A 的谱阵

且有公式：① $G_1 + G_2 + \cdots\cdots G_k = I$

② $G_1G_2 = 0$，……，$G_iG_j = 0 (i \neq j)$

③ $G_1^{\ 2} = G_1, \cdots\cdots G_k^{\ 2} = G_k$（幂等），

备注：且有 **hermite** 公式：$G_1^{\ H} = G_1, \cdots\cdots, G_k^{\ H} = G_k$

……………………………………………………………………

补充公式 1 若 $A = A_{n\times n}$ **正规，全体互异根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k \neq 0$，则有

$$A^{-1} = \lambda_1^{\ -1}G_1 + \cdots\cdots + \lambda_k^{\ -1}G_k \quad \text{(叫 } A^{-1} \text{ 的谱分解）}$$

补充公式 2 若 $A = A_{n\times n}$ **hermit 半正定（正规），全体互异根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k \geq 0$，则

$$\sqrt{A} = \sqrt{\lambda_1}G_1 + \cdots\cdots + \sqrt{\lambda_k}G_k \quad \text{(叫 } \sqrt{A} \text{ 谱公式）}$$

(公式 1) 证明: 令 $A^{-1} = \lambda_1^{\ -1}G_1 + \cdots\cdots + \lambda_k^{\ -1}G_k$ (右边有定义)

验证可知：
$$AA^{-1} = (\lambda_1 G_1 + \cdots\cdots + \lambda_k G_k)(\lambda_1^{\ -1}G_1 + \cdots\cdots + \lambda_k^{\ -1}G_k)$$
$$= G_1^{\ 2} + \cdots\cdots + G_k^{\ 2} + 0 + 0 + \cdots 0 = G_1 + G_2 + \cdots\cdots G_k = I$$

或计算
$$AA^{-1} = A(\lambda_1^{\ -1}G_1 + \cdots\cdots + \lambda_k^{\ -1}G_k) = \lambda_1^{\ -1}AG_1 + \cdots\cdots + \lambda_k^{\ -1}AG_k$$
$$= \lambda_1^{\ -1}\lambda_1 G_1 + \cdots\cdots + \lambda_k^{\ -1}\lambda_k G_k = G_1 + G_2 + \cdots\cdots G_k = I$$

证毕

(公式 2) 证明：令 $\sqrt{A} = \sqrt{\lambda_1}G_1 + \cdots\cdots + \sqrt{\lambda_k}G_k$ ？

计算知
$$(\sqrt{A})^2 = (\sqrt{\lambda_1}G_1 + \cdots\cdots + \sqrt{\lambda_k}G_k)^2 = \lambda_1 G_1^{\ 2} + \cdots\cdots + \lambda_k G_k^{\ 2} + 0 + \cdots\cdots 0$$
$$= \lambda_1 G_1 + \cdots\cdots + \lambda_k G_k = A$$

补充习题 1 ：求谱分解，用补充公式求 A^{-1} 平方根 $\sqrt{A}$

(1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，　(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，求 A^{-1} 与 $\sqrt{A}$