3 个矩阵函数(续)---- 利用幂 0 条件与 Taylor 公式求 $f(A)$

3 个矩阵函数 $e^{tA}, \cos(tA), \sin(tA)$ 定义如下:

$$e^{tA}=I+tA+\frac{t^2A^2}{2}+\frac{t^3A^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{t^kA^k}{k!}+\cdots$$

$$\sin(tA)=tA-\frac{t^3A^3}{3!}+\frac{t^5A^5}{5!}-\frac{t^7A^7}{7!}+\cdots\cdots$$

$$\cos(tA)=I-\frac{t^2A^2}{2!}+\frac{t^4A^4}{4!}-\frac{t^6A^6}{6!}+\cdots\cdots$$

幂 0 阵定义: 若 $A^k=0\ (k\geq 2)$, A 称为**幂 0 阵**

……………………………………………………………………………………

备注(幂 0 公式 1): 若 $A^k=0\ (k\geq 2)$, $f(x)$ **为任一解析**函数, 则有公式

$$f(A)=f(0)I+f'(0)A+\frac{f''(0)}{2!}A^2+\cdots+\frac{f^{k-1}(0)}{(k-1)!}A^{k-1}$$

证明: 利用 Taylor 级数, 可写 $f(x)$ 为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^k(0)}{k!}x^k+\cdots$$

代入 $x=A$, 利用 $A^k=0$ 可知

$$f(A)=f(0)I+f'(0)A+\frac{f''(0)}{2!}A^2+\cdots+\frac{f^k(0)}{k!}A^k+\cdots$$
$$=f(0)I+f'(0)A+\frac{f''(0)}{2!}A^2+\cdots+\frac{f^{k-1}(0)}{(k-1)!}A^{k-1}$$

故 $f(A)=f(0)I+f'(0)A+\frac{f''(0)}{2!}A^2+\cdots+\frac{f^{k-1}(0)}{(k-1)!}A^{k-1}$ 证毕

备注(幂 0 公式 2). 若 $(A-aI)^k=0\ (k\geq 2)$, $f(x)$ **为任一解析**函数, 则有公式

$$f(A)=f(a)I+f'(a)(A-a)+\frac{f''(a)}{2!}(A-a)^2+\cdots+\frac{f^{k-1}(a)}{(k-1)!}(A-a)^{k-1}$$

证: 利用 Taylor 级数, 可写 $f(x)$ 为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots\cdots$$

代入 $x=A$, 利用 $(A-aI)^k=0$ 可知

$$f(A)=f(a)I+f'(a)(A-a)+\frac{f''(a)}{2!}(A-a)^2+\cdots+\frac{f^k(a)}{k!}(A-a)^k+\cdots$$
$$=f(a)I+f'(a)(A-a)+\frac{f''(a)}{2!}(A-a)^2+\cdots+\frac{f^{k-1}(a)}{(k-1)!}(A-a)^{k-1}$$

故 $f(A)=f(a)I+f'(a)(A-a)+\frac{f''(a)}{2!}(A-a)^2+\cdots+\frac{f^{k-1}(a)}{(k-1)!}(A-a)^{k-1}$ 证毕

例：$(1)A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, 求 e^{tA}， $\cos(tA)$

解：$(1)A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $\lambda(A)=\{0,0\}$, $|xI-A|=x^2$ 由 Cayley 公式可知 $A^2=0$

或直接验证 $A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=0$， 由幂 0 公式 $(k=2)$ 可得公式

$$f(A)=f(0)I+f'(0)A$$ ， $f(x)$ 为任一解析函数

令 $f(x)=e^{tx}, f'(x)=te^{tx}, f(0)=1, f'(0)=t$ 可得

$$\Rightarrow e^{tA}=I+tA=\begin{pmatrix}1+t&-t\\t&1-t\end{pmatrix},$$

令 $f(x)=\cos(tx), f'(x)=-t\sin(tx), f(0)=1, f'(0)=0$

$$\Rightarrow \cos(tA)=I+0A=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

例： $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 求 e^{tA}, $\sin(tA)$

解：可知，根谱 $\lambda(A)=\{2,2,2\}$

验：$(A-2)^2=(A-2)(A-2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$ (不是单阵)

由于特式 $|xI-A|=(x-2)^3$，根据 Cayley 公式 $\Rightarrow (A-2)^3=0$

由幂 0 公式 2，可写公式如下

$$f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2)+\frac{f''(2)(A-2)^2}{2}，\quad f(x) \text{为解析函数}$$

令 $f(x)=e^{tx}, \Rightarrow f'(x)=te^{2t}, f''(x)=t^2e^{2t}, f(2)=e^{2t}, f'(2)=te^{2t}, f''(2)=t^2e^{2t}$

$$\Rightarrow e^{tA}=e^{2t}I+te^{2t}(A-2)+\frac{1}{2}t^2e^{2t}(A-2)^2=e^{2t}\left[I+t\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

$$=e^{2t}\begin{pmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}$$

再令 $f(x)=\sin(tx)$, 可知

$$f'(x)=t\cos(tx), f''(x)=-t^2\sin(tx), f(2)=\sin(2t), f'(2)=t\cos(2t), f''(2)=-t^2\sin(2t)$$

代入公式： $f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2)+\dfrac{f''(2)(A-2)^2}{2}$

$$\sin(tA)=\sin(2t)I+t\cos(2t)(A-2)-\frac{1}{2}t^2\sin(2t)(A-2)^2$$

$$=\sin(2t)I+t\cos(2t)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\frac{t^2}{2}\sin(2t)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sin(2t)&t\cos(2t)&\frac{-t^2}{2}\sin(2t)\\0&\sin(2t)&t\cos(2t)\\0&0&\sin(2t)\end{pmatrix}$$

....

例： $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$ 求 e^{tA}， $\sin(tA)$

解： $|xI-A|=(x-2)^3$，根 $\lambda(A)=\{2,2,2\}$

验： $(A-2)^2=(A-2)(A-2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=0$ （A不是单阵）

由 $(A-2)^2=0$ 可得公式： $f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2)$， $f(x)$ 为解析函数

令 $f(x)=e^{tx},\Rightarrow f'(x)=te^{tx}$， $f(2)=e^{2t}, f'(2)=te^{2t}$

代入公式： $f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2)$

$$\Rightarrow e^{tA}=e^{2t}I+te^{2t}(A-2)=\begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{2t} \end{pmatrix}+e^{2t}t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA}=e^{2t}\left[I+t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]=e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}$$

再令 $f(x)=\sin(tx)$, 知 $f'(x)=t\cos(tx), f(2)=\sin(2t), f'(2)=t\cos(2t)$

代入公式： $f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2)$

$$\Rightarrow \sin(tA)=\sin(2t)I+t\cos(2t)(A-2)=\sin(2t)I+t\cos(2t)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin(2t) & 0 & 0 \\ t\cos(2t) & \sin(2t)-t\cos(2t) & t\cos(2t) \\ t\cos(2t) & -t\cos(2t) & \sin(2t)+t\cos(2t) \end{pmatrix}$$

例 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 求 e^{tA} 与 $(e^{tA})^{-1}$

解： $A-1=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 为秩 1，可知 $\lambda(A-I)=\{\mathrm{tr}(A-I),0,0\}=\{0,0,0\}$

$$\Rightarrow \lambda(A)=\{0+1,0+1,0+1\}=\{1,1,1\}$$

且 $(A-1)^2=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}=0$

由 $(A-1)^2=0$ 可写公式： $f(A)=f(1)I+f'(1)(A-1)$， $f(x)$ 为解析函数

令 $f(x)=e^{tx},\Rightarrow f'(x)=te^{tx}, f(1)=e^{t}, f'(1)=te^{t}$

代入公式 $f(A)=f(1)I+f'(1)(A-1)$

$$\Rightarrow e^{tA}=e^{t}I+te^{t}(A-1)=e^{t}[I+t(A-1)]=e^{t}\begin{pmatrix}1-2t & -2t & 6t\\ -t & 1-t & 3t\\ -t & -t & 1+3t\end{pmatrix}$$

令 $t=(-t)$，可得逆阵 $(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}=e^{-t}\begin{pmatrix}1+2t & 2t & -6t\\ t & 1+t & -3t\\ t & t & 1-3t\end{pmatrix}$

习题 Ex: 求 e^{tA} 与 $(e^{tA})^{-1}$

$$(1)A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad (2)A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}, A-3=?$$

....

备注(若当块)：n 阶上三角 $A=\begin{pmatrix}a & 1 & & & 0\\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & a\end{pmatrix}_{n,n}$ 叫 n 阶 Jordan 块

可知$\lambda=a$为n重根．若 $a=0$， **可得 n 阶 0 根 Jordan 块：**

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}_{n,n}=(0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}), e_j\text{为单位阵I的各列},$$

可知 $A-aI=D=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & 0\\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}$,

备注(引理)　设 n 阶 0 根 Jordan 块

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}_{n,n}=(0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1})$$

则有公式

$$D^2 = D(0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}) = (0,0,e_1,\cdots,e_{n-2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = DD^2 = D(0,0,e_1,\cdots,e_{n-2}) = (0,0,0,e_1\cdots,e_{n-3}) == \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

....

$$D^{n-1} = DD^{n-2} = D(0,0,\cdots,e_1,e_2) = (0,0,\cdots 0,e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^n = DD^{n-1} = D(0,0,\cdots,0,e_1) = (0,0,\cdots 0,0) == \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = 0$$

且 $D^{n+1} = 0$

定理：n 阶 Jordan 块 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}$ 对任一解析函数 $f(x)$ 有公式

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(a) & f'(a) & \frac{1}{2!}f''(a) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) \\ & f(a) & f'(a) & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}f''(a) \\ & & & f(a) & f'(a) \\ & & & & f(a) \end{pmatrix}$$

或 $f(A)=\begin{pmatrix} f(a) & \frac{1}{1!}f'(a) & \frac{1}{2!}f''(a) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) \\ & f(a) & \frac{1}{1!}f'(a) & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}f''(a) \\ & & & f(a) & \frac{1}{1!}f'(a) \\ & & & & f(a) \end{pmatrix}$

证：可知 $A-aI=D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$，且 $(A-aI)^n=D^n=0$

由幂 0 公式可知，对**任一解析**函数 $f(x)$ 必有：

$$f(A)=f(a)I+f'(a)(A-a)+\frac{f''(a)}{2!}(A-a)^2+\cdots+\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(A-a)^{n-1}$$

$$=f(a)I+f'(a)D+\frac{f''(a)}{2!}D^2+\cdots+\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}D^{n-1}$$

$$=f(a)I+f'(a)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}+\frac{f''(a)}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}+\cdots+\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} f(a) & f'(a) & \frac{1}{2!}f''(a) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) \\ & f(a) & f'(a) & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}f''(a) \\ & & & f(a) & f'(a) \\ & & & & f(a) \end{pmatrix},$$ 证毕.

记住公式：若 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}$ 为 k 阶 Jordan 块, 则有公式

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(a) & f'(a) & \frac{1}{2!}f''(a) & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} \\ & f(a) & f'(a) & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}f''(a) \\ & & & f(a) & f'(a) \\ & & & & f(a) \end{pmatrix},\quad f(x)\text{ 为解析函数}$$

Remark. 引入参数，用tx代替x，可得$f(tx), f(tA)$的公式

$$f(At)=\begin{pmatrix} f(at) & \frac{t}{1!}f'(at) & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(at) \\ & f(at) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t}{1!}f'(at) \\ & & & f(at) \end{pmatrix}$$

例如 3 阶若当块 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，可得 $\sin(tA)=\begin{pmatrix} \sin(2t) & t\cos(2t) & \frac{-t^2}{2}\sin(2t) \\ 0 & \sin(2t) & t\cos(2t) \\ 0 & 0 & \sin(2t) \end{pmatrix}$

特别，取 $f(tx)=e^{tx}, f(tA)=e^{tA}$，可得

$$f(tA)=e^{tA}=\begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{at} \\ & e^{at} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{at} \\ & & & e^{at} \end{pmatrix}$$

例如，3 阶 Jordan 块 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，代入上面公式可得

$$e^{tA}=\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ 与前面例子结论相同.

……………………………………………………………………………………

思考题：若 $A=\begin{pmatrix} a & & & & \\ 1 & a & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & a \end{pmatrix}$ 为 k 阶下若当块， $f(x)$ 为解析函数

写出公式 $f(A)=?$， $f(tA)=?$

…………………………………………………………………………………………..

补充题：1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, (A-2=?)$，求根 $\lambda(A)$，求 e^{tA}

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{-1} \\ 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix}$ 求 e^{tA} 与 $(e^{tA})^{-1}$，3. $A=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 e^{tA} 与 $(e^{tA})^{-1}$

求下面 4 个矩阵的 e^{tA}：

$$4. A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ 5. A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ 6. A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ 7. A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

…………………………………………………………………………………………………

备注(分块公式)：设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，则有分块公式 $f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{pmatrix}$

其中 $f(x)$ 为解析函数

例　用分块公式求下列矩阵 A 的 $f(A)$ 公式，求 e^{tA}， $A^{100}=?$，

$$(1)\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ (2) A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ (3) A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解　(1)可写 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为若当块, $A_2=(2)$，

可知 $f(A_1)=\begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ 0 & f(1) \end{pmatrix}, f(A_2)=f(2)$，

可得公式 $f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(1) & f'(1) & 0 \\ 0 & f(1) & 0 \\ 0 & 0 & f(2) \end{pmatrix}$

令 $f(x)=e^{tx},\Rightarrow f'(x)=te^{tx},\ f(1)=e^{t},\ f'(1)=te^{t}$

可知 $e^{tA}=\begin{pmatrix} e^{t} & te^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

令 $f(x)=x^{100},\Rightarrow f'(x)=100x^{99},\ f(1)=1,\ f'(1)=100$

可知 $A^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 100 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$

(2)可写$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$为若当块

可得公式 $f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(1) & f'(1) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(2) & f'(2) \\ 0 & 0 & 0 & f(2) \end{pmatrix}$

$f(x)=e^{tx},\Rightarrow f'(x)=te^{tx},\ f''(x)=t^{2}e^{tx}$ 可得

$$e^{tA}=\begin{pmatrix} e^{t} & te^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

令 $f(x)=x^{100},\Rightarrow f'(x)=100x^{99},$

可得 $$A^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} & 100\times 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$$

$$(3)A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}, A_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}\text{若当块，}A_2=(2)$$

可得公式 $f(A)=\begin{pmatrix}f(A_1)&0\\0&f(A_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(0)&f'(0)&\frac{1}{2}f''(0)&0\\0&f(0)&f'(0)&0\\0&0&f(0)&0\\0&0&0&f(2)\end{pmatrix}$

可知 $e^{tA}=\begin{pmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2&0\\0&1&t&0\\0&0&1&0\\0&0&0&e^{2t}\end{pmatrix}$， $A^{100}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2^{100}\end{pmatrix}$

补充题： 写出下列矩阵 A 的 $f(A)$ 公式，求 e^{tA}， $A^{100}=?$

$$(1)A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},(2)A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},(3)A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},(4)A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

$$(5)A=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},\quad(6)A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix};$$