正规阵复习与补充

优相似定理：若 A 正规，则 $Q^{-1}AQ$ 也正规，其中 Q 为优阵（$Q^H=Q^{-1}$）

即， 正规阵的优相似必正规！

正规分解定理：若 $A=A_{n\times n}$ **正规，则存在**优阵 Q（$Q^H=Q^{-1}$）使

$$Q^{-1}AQ=Q^HAQ=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{（对角形）}$$

其中，特根 $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n$ 次序任意， $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}$

备注：$Q=(q_1,\cdots,q_n)$ 中列都是特向： $Aq_1=\lambda_1 q_1,\cdots,\ Aq_n=\lambda_1 q_n$

推论 1： 正规阵的一定优相似于对角形！（$Q^{-1}AQ=Q^HAQ=\mathrm{D}$）

推论 2(逆正规定理)：若 A **优相似于对角形，则 A 必**正规

即，若存在优阵（$Q^H=Q^{-1}$）使 $Q^{-1}AQ=\mathrm{D}$ 为对角形，**则 A 必正规**

Pf 证： **因为** $Q^{-1}AQ=\mathrm{D}$ 为对角形，且 **Q 为优阵（$Q^H=Q^{-1}$），可写**

$Q\mathrm{D}Q^{-1}=A$，即 D 优相似于 A，且 对角形 D **必正规，**

根据优相似定理，则 A 必正规 **证毕**

推论 3 $A=A_{n\times n}$ **正规 $\Leftrightarrow$ A 优相似于对角形！**

多项正规定理：若 A 为正规阵，则 $f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k$ 必正规

其中 $f(x)=\mathrm{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k$ 为任一多项式

即， 正规阵 A 的多项式 $f(A)$ 也正规！

Pf 证：**先复习一个相似公式：** $f(\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P})=\mathrm{P}^{-1}f(A)\mathrm{P},\quad f(\mathrm{P}A\mathrm{P}^{-1})=\mathrm{P}f(A)\mathrm{P}^{-1}$

对任一多项式 $f(x)=\mathrm{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k$ 成立

若 A 为正规阵，由于正规分解可知，存在优阵 Q（$Q^H=Q^{-1}$）使

$Q^{-1}AQ=\mathrm{D}$ 为对角形，代入**任一多项式 $f(x)=\mathrm{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k$ 有**

$$f(Q^{-1}AQ)=f(D)=\mathrm{c}_0I+c_1D+\cdots\cdots+c_kD^k \text{ 为对角形！}$$

即 $Q^{-1}f(A)Q=f(D)$ 为对角形， 且 Q **为优阵（$Q^H=Q^{-1}$）**

可知，$f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k$ 优阵于对角形 $f(D)$，故 $f(A)$ 正规.　证毕

特别：若 A 正规，则 $I+A,\ I-A,\ aI\pm bA,\ kA$ 都正规

判定正规例子

例 1　优阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 正规，则 $B=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=aI+bA$ 正规

例 2　$A=\begin{pmatrix}0&c&c\\c&0&c\\c&c&0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 正规(?)，c为任一复数

…………………………………………………………………………………………

补充**：循环阵(生活中的正规阵)

n-循环阵：$A=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&\cdots&a_{n-3}&a_{n-2}\\a_{n-2}&a_{n-1}&a_0&\cdots&a_{n-4}&a_{n-3}\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_2&a_3&&\cdots&a_0&a_1\\a_1&a_2&&\cdots&a_{n-1}&a_0\end{pmatrix}\in \mathrm{C}^{n,n}$

记为　$A=\overrightarrow{[a_0,\ \ a_1,\ \ \cdots\ \ a_{n-1}]}$，$a_j$为复数

例如　4-循环阵 $A=\overrightarrow{[a_0,\ \ a_1,\ \ a_2\ \ a_3]}=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\a_3&a_0&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_3&a_0\end{pmatrix}$；

3-循环阵 $A=[a_0,a_1,a_2]=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2\\a_2&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_0\end{pmatrix}$ ；2-循环阵 $A=[a_0,a_1]=\begin{pmatrix}a_0&a_1\\a_1&a_0\end{pmatrix}$

备注　$\Omega=\overline{[0,1,0\cdots,0]}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&&\cdots&0&1\\1&0&&\cdots&0&0\end{pmatrix}\in \mathbf{C}^{n,n}$ 叫基本循环阵（基阵）

按列分块可记　$\Omega=(\mathbf{e}_n,\ \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\cdots,\mathbf{e}_{n-1})$，其中 $\mathbf{e}_j$是单位阵$\mathbf{I}$的第j列，$\mathbf{I}=(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n)$

(利用乘法的列向量技巧) 计算可知 任取矩阵 A，按列分块记为

$\mathbf{A}=(\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 $\mathbf{A}\Omega=\mathbf{A}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\cdots,\mathbf{e}_{n-1})=(\mathbf{Ae}_n, \mathbf{Ae}_1,\cdots,\mathbf{Ae}_{n-1})=(\alpha_n, \alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$

即 $\mathbf{A}\Omega$ 中的列恰好把 **A** 的列"$\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_n$"改变次序为"$\alpha_n, \alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$" 可得

$\Omega^2=\Omega\Omega=(\mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1\cdots,\mathbf{e}_{n-2})$, $\Omega^3=\Omega^2\Omega=(\mathbf{e}_{n-2}, \mathbf{e}_{n-1},\mathbf{e}_n\cdots,\mathbf{e}_{n-3})$,$\cdots$ 等等，可写如下：

$\Omega^2=(\mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1\cdots,\mathbf{e}_{n-2})$, $\Omega^3=(\mathbf{e}_{n-2}, \mathbf{e}_{n-1},\mathbf{e}_n\cdots,\mathbf{e}_{n-3})$,$\cdots$， $\Omega^{n-1}=(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3,\cdots,\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1)$

特别 $\Omega^n=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_{n-1},\mathbf{e}_n)=\mathbf{I}$ **单位阵**

例： 3-循环阵 $A=[a_0,a_1,a_2]=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$，基阵 $\Omega=(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

可知 $\Omega^2=(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$， $\Omega^3=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{I}$

可写 $A=[a_0,a_1,a_2]=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+a_2\Omega^2$

2-循环阵 $A=[a_0,a_1]=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$，基阵 $\Omega=(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，可知 $\Omega^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{I}$

可写 $A=[a_0,a_1]=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega$

补充题：设 4-循环阵 $A=[\overrightarrow{a_0, \quad a_1, \quad a_2 \quad a_3}]=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$， $\Omega=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$基阵，

验证： $A=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+a_2\Omega^2+a_3\Omega^3$

一般可得如下结论

定理 1： 可写 n-循环阵 $A=[\overrightarrow{a_0, \quad a_1, \quad \cdots \quad a_{n-1}}]=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+\cdots+a_{n-1}\Omega^{n-1}$

其中 $\Omega=(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\cdots,\mathbf{e}_{n-1})=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&&\cdots&0&1\\1&0&&\cdots&0&0\end{pmatrix}$ 为基阵

备注 1 可写 n−循环阵 $A=\overrightarrow{[a_0,\ a_1,\ \cdots\ a_{n-1}]}=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+\cdots+a_{n-1}\Omega^{n-1}=f(\Omega)$

其中 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots a_{n-1}x^{n-1}$

定理 2： n−循环阵 $A=\overrightarrow{[a_0,\ a_1,\ \cdots\ a_{n-1}]}$ 是正规阵

Pf： **因为基阵** $\Omega=(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\cdots,\mathbf{e}_{n-1})$ 是优阵(必正规)，**则多项式** $f(\Omega)$ 也正规

且 n−**循环阵** $A=\overrightarrow{[a_0,\ a_1,\ \cdots\ a_{n-1}]}=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+\cdots+a_{n-1}\Omega^{n-1}=f(\Omega)$

可知， **n−循环阵** $A=\overrightarrow{[a_0,\ a_1,\ \cdots\ a_{n-1}]}$ 是正规阵

备注 令 $\Omega=(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\cdots,\mathbf{e}_{n-1})$ 则 $\Omega^{\mathbf{n}}=\mathbf{I}$, $\Omega^{\mathbf{n+1}}=\Omega,\Omega^{\mathbf{n+2}}=\Omega^2,\cdots,\Omega^{\mathbf{2n}}=\mathbf{I},\Omega^{\mathbf{2n+1}}=\Omega,\cdots$

若多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots a_{n+p}x^{n+\mathbf{p}}$ $(p\ge 1)$ 的次数>n-1

可知 $f(\Omega)=\tilde{f}(\Omega)=\tilde{a}_0\mathbf{I}+\tilde{a}_1\Omega+\cdots+\tilde{a}_{n-1}\Omega^{n-1}$

其中 $\tilde{f}(x)=\tilde{a}_0+\tilde{a}_1x+\cdots+\tilde{a}_{n-1}x^{n-1}$ 的系数 $\tilde{a}_j$ 由原系数 a_0，$a_1\cdots$，a_{n+p} 确定

推论 1 任取多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots a_{n+p}x^{n+\mathbf{p}}$

则 $f(\Omega)=\tilde{f}(\Omega)=\tilde{a}_0\mathbf{I}+\tilde{a}_1\Omega+\cdots+\tilde{a}_{n-1}\Omega^{n-1}$ $=[\tilde{a}_0,\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_{n-1}]$ 为循环阵

特别，任取 2 个多项式 $f(x)$，$g(x)$， 则 $f(\Omega)g(\Omega)$ 是循环阵

推论 2 任 2 个 n-循环阵 A,B 之积 AB 也是循环阵（必正规）

Pf: 令 $\mathbf{A}=\overrightarrow{[a_0,\ a_1,\ \cdots\ a_{n-1}]}$, $\mathbf{B}=\overrightarrow{[b_0,\ b_1,\ \cdots\ b_{n-1}]}$ **则**

$\mathbf{A}=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+\cdots+a_{n-1}\Omega^{n-1}=f(\Omega)$，$\mathbf{B}=b_0\mathbf{I}+b_1\Omega+\cdots+b_{n-1}\Omega^{n-1}=g(\Omega)$

故 $\mathbf{AB}=f(\Omega)g(\Omega)$ 必为循环阵！

备注： n-循环阵的集合对乘法 AB 是封闭的！

思考题： 若循环阵 A 可逆，问逆阵 A^{-1} 是否循环阵？？

备注　基阵 $\Omega=(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\cdots,\mathbf{e}_{n-1})=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&&\cdots&0&1\\1&0&&\cdots&0&0\end{pmatrix}$(实优阵)为正规

利用正规分解：存在优阵 Q（$Q^H=Q^{-1}$）使

$$Q^{-1}\Omega Q=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix},\quad \text{特根 } \lambda(\Omega)=\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}$$

$Q=(q_1,\cdots,q_n)$ 中列都是正交特向：$\Omega q_1=\lambda_1 q_1,\cdots,\ \Omega q_n=\lambda_n q_n$

任 n-循环阵 $\mathbf{A}=\overrightarrow{[a_0,\ \ a_1,\ \ \cdots\ \ a_{n-1}]}=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+\cdots+a_{n-1}\Omega^{n-1}=f(\Omega)$ **必有**

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{-1}f(\Omega)\mathbf{Q}=f(\mathbf{Q}^{-1}\Omega\mathbf{Q})=f(\mathbf{D})=\begin{pmatrix}f(\lambda_1)&&0\\&\ddots&\\0&&f(\lambda_n)\end{pmatrix}\text{为对角形}$$

此公式对一切 n-循环阵都成立！

定理　一切 n-循环阵可用一个优阵 **Q** 同时对角化！

即 给定 $\Omega=(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\cdots,\mathbf{e}_{n-1})$ 的全体单位正交特向 $q_1,\cdots,q_n$，$\lambda(\Omega)=\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}$

取上面的优阵 $Q=(q_1,\cdots,q_n)$ -----(Q 的结构见后面**备注****)

则对所有 n-循环阵 $\mathbf{A}=\overrightarrow{[a_0,\ \ a_1,\ \ \cdots\ \ a_{n-1}]}=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+\cdots+a_{n-1}\Omega^{n-1}=f(\Omega)$

满足　$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=f(\mathbf{D})=\begin{pmatrix}f(\lambda_1)&&0\\&\ddots&\\0&&f(\lambda_n)\end{pmatrix}$为对角

推论　所有 n-循环阵 **A** 具有与基阵 Ω 相同的特征向量 $q_1,\cdots,q_n$

备注　循环阵 $\mathbf{A}=\overrightarrow{[a_0,\ \ a_1,\ \ \cdots\ \ a_{n-1}]}$ 的特根公式为

$\lambda(\mathrm{A})=\{f(\lambda_1),\cdots\cdots,f(\lambda_n)\}$，其中 $\lambda(\Omega)=\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}$

备注** 基阵 $\Omega = (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \cdots, \mathbf{e}_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $\Omega^n = I$

令特根 $\lambda(\Omega) = \{\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n\}$，则 $\lambda(\Omega^n) = \{\lambda_1{}^n, \cdots\cdots, \lambda_n{}^n\}$

又 $\lambda(\Omega^n) = \lambda(I) = \{1, 1, \cdots, 1\}$，故 $\lambda_1{}^n = 1, \cdots\cdots, \lambda_n{}^n = 1$，即 $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ 恰好是

方程 $\lambda^n = 1$ 的 n 个根(就是复平面上单位圆周的 n 等分点)，可记

$\lambda_j = e^{i\frac{2j\pi}{n}} = \cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}, j = 1, 2, \cdots, n$，特别有 $\lambda_n = 1$，且 $\lambda_j = \lambda_1{}^j$

令 $X_j = \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \lambda_j{}^2 \\ \vdots \\ \lambda_j{}^n \end{pmatrix}$ 可知 $\Omega X_j = \Omega \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \lambda_j{}^2 \\ \vdots \\ \lambda_j{}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_j{}^2 \\ \lambda_j{}^3 \\ \vdots \\ \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \lambda_j{}^2 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \lambda_j{}^2 \\ \vdots \\ \lambda_j{}^n \end{pmatrix} = \lambda_j X_j$

即 X_j 就是 Ω 的特征向量(属于特根 λ_j), 故 Ω 恰有 n 个特征向量 $X_1, \cdots, X_n$

验证可知 $X_1 \perp, \cdots, \perp X_n$ (互正交), 且 $|X_1| = \cdots = |X_n| = \sqrt{n}$

注：$X_1 \perp, \cdots, \perp X_n$ 的一个简单证明是利用已知定理“正规阵的属于不同根的特征向量互正交”即得，因为基阵 Ω 恰有 n 个不同根，所以它的 n 个特向互相正交!

令优阵 $Q = (q_1, \cdots, q_n) = (\frac{X_1}{|X_1|}, \cdots, \frac{X_n}{|X_n|}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1{}^2 & \lambda_2{}^2 & \cdots & \lambda_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1{}^n & \lambda_2{}^n & \cdots & \lambda_n{}^n \end{pmatrix}$ 叫 **“傅里叶优阵”**

可得**正规分解：** $Q^{-1}\Omega Q = \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$，$\lambda(\Omega) = \{\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n\}$

由于特征向量可相差非零的倍数，也可写**傅里叶优阵如下**

$$Q = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1{}^{n-1} & \lambda_2{}^{n-1} & \cdots & \lambda_n{}^{n-1} \end{pmatrix} \text{ 使得 } Q^{-1}\Omega Q = \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda(\Omega) = \{\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n\}$

例： $\Omega=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$(4 循环基本阵)，求优阵 Q 使 $Q^{-1}\Omega Q=D$ 为对角形

因为 $\Omega^4=I$ (也可知特征方程为 $\lambda^4-1=0$)，求解方程 $\lambda^4=1$ 可得 4 个根

$\lambda(\Omega)=\{\lambda_1=i,\lambda_2=-1,\lambda_3=-i,\lambda_4=1\}$， 令优阵

$$Q=\tfrac{1}{\sqrt{4}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\\lambda_1{}^2&\lambda_2{}^2&\lambda_3{}^2&\lambda_4{}^2\\\lambda_1{}^3&\lambda_2{}^3&\lambda_3{}^3&\lambda_4{}^3\end{pmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\i&-1&-i&1\\-1&1&-1&1\\-i&-1&i&1\end{pmatrix}(\text{不唯一})$$

可知 $$Q^{-1}\Omega Q=D=\begin{pmatrix}i&&&\\&-1&&\\&&-i&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

且可知 4−循环阵 $A=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+a_2\Omega^2+a_3\Omega^3$ 具有分解

$$Q^{-1}AQ=f(D)=\begin{pmatrix}f(i)&&&\\&f(-1)&&\\&&f(-i)&\\&&&f(1)\end{pmatrix}$$

补充题:

1 求 2−循环阵 $A=[a_0,a_1]=\begin{pmatrix}a_0&a_1\\a_1&a_0\end{pmatrix}$ 的基阵 Ω=$(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)$=$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 的正交特征向量，并且

求优阵 Q (2 阶傅里叶阵)， 使 $Q^{-1}AQ=f(D)$ 为对角形，且 $Q^{-1}\Omega Q=D=?$

2(思考题) 求 3 循环阵 $A=[a_0,a_1，\ a_2]$ 的基阵 Ω=$(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 的正交特征向量，

求优阵 Q (3 阶傅里叶阵)， 使 $Q^{-1}AQ=f(D)$ 为对角形. $Q^{-1}\Omega Q=D=?$

……………………………………………………………………………………