高低分解习题----答案

（1） $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$，（2） $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&1&4\\2&1&2&0&7\\3&2&4&1&11\end{pmatrix}$ 求满秩分解（高低分解）

Ans(解) （1），秩 $r(\mathbf{A})=1$， $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\end{pmatrix}$ **秩 1 分解**

Ans(解) （2） 方法 1

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c|cccc|c}1&1&2&1&4\\2&1&2&0&7\\3&2&4&1&11\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&1&4\\0&-1&-2&-2&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)r_2]{r_1+4r_2}\left(\begin{array}{c|cccc|c}1&-3&-6&-7&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

取 A 中 1，5 列，令

$$B=(\alpha_1,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&4\\2&7\\3&11\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&-3&-6&-7&0\\0&1&2&2&1\end{pmatrix},\quad r(\mathbf{A})=2$$

$$\therefore\ \mathbf{A}=BC=\begin{pmatrix}1&4\\2&7\\3&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&-6&-7&0\\0&1&2&2&1\end{pmatrix}$$

方法 2

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c|ccc|c}1&1&2&1&4\\2&1&2&0&7\\3&2&4&1&11\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&1&4\\0&-1&-2&-2&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{c|ccc|c}1&0&0&-1&3\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

取 A 中 1，2 列，令

$$B=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0&-1&3\\0&1&2&2&1\end{pmatrix},\quad r(\mathbf{A})=2$$

$$\therefore\ \mathbf{A}=BC=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&3\\0&1&2&2&1\end{pmatrix}$$

补充习题 Ex: 求满秩分解（高低分解）

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&4&2&6\\1&2&1&3\end{pmatrix}$(秩 1)；　(2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&0&2&2\\1&1&2&3\end{pmatrix}$，

(3) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&2&3\\1&3&2&0&4\\2&4&4&2&7\end{pmatrix}$；　(4) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求满秩分解

提示(4)：有满秩分解 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{BC}$（不唯一）