补充结论与公式----平方根公式

特商公式: $\lambda_1 = \dfrac{x^H Ax}{|x|^2}$,

其中 $Ax = \lambda_1 x$， λ_1 是 A 的任一特征根，且 $x \neq 0$ 是特征向量

正定阵定义：设 A 是 Hermite（$A^H = A$） $x \in C^n$ 是复向量，若 $f(x) = x^H Ax > 0$ 对一切非 0 向量 $x \neq 0$ 成立，则称 A 为正定（Hermite）阵. “A>0”代表正定阵 A

半正定定义：设 A 是 Hermite（$A^H = A$） $x \in C^n$ 是复向量，若 $f(x) = x^H Ax \geq 0$ 对一切非 0 向量 x 成立，则称 A 为半正定（Hermite）. “$A \geq 0$”代表半正定阵 A

备注：半正阵定义中包含正定阵，正定阵是特殊的半正定阵

正定等价条件：设 A 为 Hermite（$A^H = A$）则下列条件等价

（1）A 为正定(A>0) ⇔(2) A 有分解 $A = P^H P$,或 $A = PP^H$ ，P 可逆⇔

(3)特根 $\lambda(A) = \{\lambda_1 > 0，\lambda_2 > 0, \cdots\cdots \lambda_n > 0\}$ 为正—用**特商公式证**(1)⇒ (3)

证：(2)用 Hermit 分解：若 **A** 是 Hermite（$\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$），则存在优阵 $\mathbf{Q}$，

$$\text{使}\quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}D\mathbf{Q}^H，\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{为对角阵}$$

且 A 正定(A>0)，则特根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都为正数

$$\text{令}\ C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}，\ \text{则}C^H = C，\ \text{且}C^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

故 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}D\mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}CC^H\mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}C(\mathbf{Q}C)^H$ ，令 $P = QC$,必可逆

则 $A = PP^H$,或 $A = (P^H)^H P^H$，即 (1) ⇒ (2)

另外，若有 $A = P^H P$， P 可逆，

因为 $x \neq 0$ 时 $Px \neq 0 \Rightarrow$ 二次形 $x^H Ax = (Px)^H (Px) = |Px|^2 > 0$

故 A 正定(A>0) 即 (1) ⇔ (2) **证毕**

………………………………………………………………………………………………

也有半正定等价条件：设 A 为 Hermite（$A^H = A$）则下列条件等价

（1）A 为半正定 $\Leftrightarrow$（2）A有分解 $A=P^HP$,或 $A=PP^H$ $\Leftrightarrow$

(3)全根 $\lambda(A)=\{\lambda_1\ge 0,\ \lambda_2\ge 0,\cdots\cdots\lambda_n\ge 0\}$ 都非负

定理：设 $A=A_{m\times n}$ 则 A^HA, AA^H 都半正定，且 A^HA, AA^H 的根为非负

证明：因为二次形 $f=x^H(A^HA)x=(Ax)^H(Ax)=|Ax|^2\ge 0$（长度平方公式）

同样，$f=x^H(AA^H)x=(A^Hx)^H(A^Hx)=|A^Hx|^2\ge 0$ **证毕**

备注：若 $A=A_{m\times n}$ 为高阵(列满秩),或 $A=A_{n\times n}$ 可逆（det(A)=$|A|\ne 0$）则 A^HA 正定

因为 $x\ne 0$ 时 $Ax\ne 0\Rightarrow$ 二次形$x^H(AA^H)x=(Ax)^H(Ax)=|Ax|^2>0$

备注：若 $A=A_{n\times n}$ 是 Hermite 阵，则 A 的根 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots\cdots\lambda_n\}$ 都为实数。

平方根公式： 若 A 为半正定，或 A 为正定(A>0)，则有分解

$$\mathbf{A}=\mathrm{B}^2,\ \text{且}\mathrm{B}^H=\mathrm{B}\ \text{为 Hermite 半正定}(\mathrm{B}\ge 0)$$

B 叫 **A** 的平方根， 记为 $\mathrm{B}=\sqrt{\mathbf{A}}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$

可写公式 $\mathbf{A}=(\sqrt{\mathbf{A}})^2$，或 $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ **都为合理写法!**

证：用 **Hermit 分解**：若 **A** 是 Hermite（$\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$），存在优阵 $\mathbf{Q}$，

$$\text{使}\quad \mathbf{A}=\mathbf{Q}D\mathbf{Q}^H,\ D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}\ \text{为对角阵}$$

且 A 半正定，则根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都为非负(或正数)

$$\text{令 } \mathrm{C}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix},\ \text{则}\mathrm{C}^H=\mathrm{C}\ge 0\text{半正，且}\mathrm{C}^2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}=\mathrm{D}$$

$$\text{再令}\quad \mathrm{B}=\mathbf{Q}\mathrm{C}\mathbf{Q}^H=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H,$$

则 $\mathrm{B}^H=(\mathbf{Q}\mathrm{C}\mathbf{Q}^H)^H=\mathbf{Q}\mathrm{C}\mathbf{Q}^H=\mathrm{B}$ 为 Hermite

且 $\mathrm{B}=\mathbf{Q}\mathrm{C}\mathbf{Q}^H=\mathbf{Q}\mathrm{C}\mathbf{Q}^{-1}$ 与 C 相似，故

$\lambda(B)=\lambda(C)=\left\{\sqrt{\lambda_1}\geq 0,\cdots\cdots\sqrt{\lambda_n}\geq 0\right\}$非负，即 $B^H=B\geq 0$ 半正定

可验：$B^2=(QCQ^{-1})^2=QC^2Q^{-1}=QDQ^H=A$　　证毕

备注：可知平方根公式：　$B=\sqrt{A}=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^H$

其中 **Q** 为优阵，　**Q** 中列都是 A 的特征向量(互正交！)

例 1：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$为 Hermit 半正定，$\lambda(A)=\{\lambda_1=2,\quad \lambda_2=0\}$非负

求平方根　$\sqrt{\mathbf{A}}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}=?$

可知 2 个特向 $X_1=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$互正交，使 $AX_1=2X_1$，$AX_2=0X_2=0$

令 $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\frac{X_1}{|X_1|} & \frac{X_2}{|X_2|}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$为优阵，　$\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$，则

$$\sqrt{\mathbf{A}}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{0}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -i\sqrt{2}\\ i\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$$

可验 $(\sqrt{\mathbf{A}})^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}^2=A$

也可验本题的 Hermit 分解：

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -2i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=D$$

补充习题 Ex

1 **求平方根**　$\sqrt{\mathbf{A}}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}=?$

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$为 Hermit 半正定，$\lambda(A)=\{\lambda_1=4,\quad \lambda_2=0\}$非负

(2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$为 Hermit 正定，$\lambda(A)=\{\lambda_1=4,\quad \lambda_2=2\}$

(3) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$为 Hermit 正定，$\lambda(\mathrm{A})=\{\lambda_1=3,\quad \lambda_2=1\}$

(4) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，求$\sqrt{A}$