Ex：求奇异分解 SVD

1、① $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$，　② $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

解：① $\because A^HA=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$对角形，特根为 $\lambda(A^HA)=\{2,1\}$，

令 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，　正奇异值为 $s_+(A)=\{s_1,s_2\}=\{\sqrt{2},\ 1\}$

因为对角阵 $A^HA=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$有 2 个特征向量 $X_1=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$X_2=e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$（互正交）

令 $Q=\left(\dfrac{x_1}{|x_1|},\dfrac{x_2}{|x_2|}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$（优阵），又 $AX_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$AX_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$|AX_1|=\sqrt{2}$，$|AX_2|=1$

令 $P=\left(\dfrac{Ax_1}{|Ax_1|},\dfrac{Ax_2}{|Ax_2|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}_{3\times2}$（半优阵），可得正 SVD:

$$A=P\Delta Q^H=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^H$$

注：可把 P 扩充为 U 阵 $\tilde{P}$ 如下

$\tilde{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$（U 阵）不唯一；令 $\tilde{Q}=Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，D=$\begin{pmatrix}\Delta\\0\end{pmatrix}_{3\times2}$，

可得 S V D:

$$A=\tilde{P}D\tilde{Q}^H=\tilde{P}\begin{pmatrix}\Delta\\0\end{pmatrix}\tilde{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^H$$

解. ② $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$， 因 $B=A^H=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$， 且已知正 SVD: $A=P\Delta Q^H$

则 $B=A^H=(P\Delta Q^H)^H=Q\Delta P^H$，可得B的正SVD为

$$B=A^H=Q\Delta P^H=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}^H$$

扩充可知 B 的 SVD: $B=A^H=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^H$

备注： ①中 A 的正 SVD $A=P\Delta Q^H=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 也可以写成：

$$A=\breve{P}\Delta\breve{Q}^H=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

因此， A 的正 SVD $A=P\Delta Q^H$ 不唯一.

2. (1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, (2) $A=\begin{pmatrix}i&1\\0&0\\1&i\end{pmatrix}$, (3) $A=\begin{pmatrix}i&2\\1&i\\1&i\end{pmatrix}$ $(i^2=-1)$

Ans(解): (1) 计算 A^HA 可知

$A^HA=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ 为秩 1 阵， 特根为 $\lambda(A^HA)=\{tr(A^HA),\ 0\}=\{5,\ 0\}$，

令 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=0$，可知，正奇异值为 $s_1=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{5}$

因为秩 1 阵 $A^H A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$有 1 个主特征向量 $X_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$， 或 $X_1=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

复习(秩 1 公式): "秩 1 阵 A 中的非零列都是主根 $\lambda_1=tr(A)$ 对应的特征向量"

令 $Q=\left(\dfrac{X_1}{|X_1|}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (半优阵), 又 $AX_1=5\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ， $|AX_1|=\sqrt{5},$

令 $P=\left(\dfrac{Ax_1}{|Ax_1|}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ （半优阵），

可得正 SVD: $A=P\Delta Q^H=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\left(\sqrt{5}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}^H$

扩充可知 A 的 SVD: $A=\tilde{P}D\tilde{Q}^H=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}^H$

备注: SVD 不唯一，也有如下 SVD:

$$A=\tilde{P}D\tilde{Q}^H=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&-2\\2&+1\end{pmatrix}^H$$

或 $A=\tilde{P}D\tilde{Q}^H=\begin{pmatrix}1&&\\&i&\\&&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}^H$， 等等

本题(1)的解法 2：先求 AA^H 如下

$$AA^H=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}(\text{对角阵}),\ \text{则}\lambda(AA^H)=\{5,\ 0,\ 0\},\lambda_1=5$$

正奇异值为 $\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{5}$；

令 $B=A^H$，则$B^H=A$, $B^H B=AA^H$，且 B 的正奇异值为 $\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{5}$

对角形 $B^H B = AA^H = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 必有特征向量 $X_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$BX_1 = A^H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

令 $P = \left(\dfrac{BX_1}{|BX_1|} \right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$（半优阵），　令 $Q = \left(\dfrac{X_1}{|X_1|} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$（半优阵）

得 $B = A^H$ 的正 SVD ：

$$B = P\Delta Q^H = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (\sqrt{5}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^H$$,可得 $A = B^H$ 的的正 SVD:

$$A = B^H = Q\Delta P^H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\sqrt{5}) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^H$$

Ans(解)：(2) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$，计算可知

$$A^H A = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ 为对角形，

特根为 $\lambda(A^H A) = \{2, 2\}$，　令 $\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 2$

正奇异值为 $s_+(A) = \{ s_1, s_2 \} = \{ \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2} \} = \{ \sqrt{2}, \sqrt{2} \}$

即，　正奇异值为　$s_1 = \sqrt{2}$，$s_2 = \sqrt{2}$　(2个奇值相同)

因为对角阵 $A^H A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 有 2 个特向 $X_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$X = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　（互正交）

令 $Q = (X_1, X_2) = (e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$（优阵），计算 $AX_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$

令 $P=\left(\frac{Ax_1}{|Ax_1|},\frac{Ax_2}{|Ax_2|}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$（半优阵），令 $\Delta=\begin{pmatrix} s_1 & \\ & s_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

可得正 SVD：$A=P\Delta Q^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^H$

扩充可得 SVD：$A=\tilde{P}D\tilde{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^H$

备注 1　SVD 不唯一，也有如下 SVD：

$$A=\tilde{P}D\tilde{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^H$$

或 $A=\tilde{P}D\tilde{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^H$

备注 2　正 SVD：$A=P\Delta Q^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^H$ 不唯一，

也可写正 SVD：$A=\breve{P}\Delta\breve{Q}^H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^H$

……..

习题2 (3) $A=\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ $(i^2=-1)$，求正 SVD 与 SVD，且求 $B=A^H=\begin{pmatrix} -i & 1 & 1 \\ 2 & -i & -i \end{pmatrix}$ 正 SVD

解：$\because A^HA=\begin{pmatrix} -i & 1 & 1 \\ 2 & -i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ 为对角形，令 $\lambda_1=3,\lambda_2=6$ 可知

对角形 A^HA 有 2 个特向 $X_1=e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$X=e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$（互正交）；

正奇值为 $\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{3},\sqrt{\lambda_2}=\sqrt{6}$

令$Q=(X_1,\ X_2\ )=(e_1,\ e_2\ )=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，　　计算$AX_1=\begin{pmatrix}i\\1\\1\end{pmatrix}$　$AX_2=\begin{pmatrix}2\\i\\i\end{pmatrix}$

$$|AX_1|=\sqrt{3}\ ,\ \ |AX_2|=\sqrt{6}$$

令$P=\left(\frac{Ax_1}{|Ax_1|},\frac{Ax_2}{|Ax_2|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$（半U阵），

正SVD为　　$A=P\Delta Q^H$，　其中　$\Delta=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \\ & \sqrt{6}\end{pmatrix}$

即　$A=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \\ & \sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^H$

（观察扩充）可知SVD：　$A=WDV^H=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\0 & \sqrt{6}\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^H$

或记作　$A=\underline{P}D\underline{Q}^H=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\0 & \sqrt{6}\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^H$

备注1：因为$B=A^H=\begin{pmatrix}-i & 1 & 1\\2 & -i & -i\end{pmatrix}$，且已知正SVD：　$A=P\Delta Q^H$

则　$A^H=(P\Delta Q^H)^H=Q\Delta P^H$，可得$B=A^H$的正SVD为

$$B=A^H=Q\Delta P^H=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^H$$

备注 2，正 SVD 扩充后 SVD 不唯一（本题另外答案有如下）：

$$A=WDV^H=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{6}}&\frac{i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{6}}&\frac{-i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&\sqrt{6}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^H$$

或 $A=WDV^H=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{6}}&\frac{-i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{6}}&\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&\sqrt{6}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^H$ 等等，

大家还可以写出 SVD 的其它形式…?

....

已知本题(3)正 SVD 为 $A=P\Delta Q^H$ ， 其中 $\Delta=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\\&\sqrt{6}\end{pmatrix}$

即 $$A=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\\&\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^H$$

也可以写成另外一个正 SVD：

$A=\breve{P}\Delta\breve{Q}^H=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{i}{\sqrt{3}}\\\frac{i}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{i}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6}&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^H$ （大家自己验证一下：右边的乘积==左边的 A）