练习 Ex1：求正奇异值 (1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$; (2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}i&i\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $i^2=-1$； (3) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$; (4) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&\mathrm{i}\end{pmatrix}$

Ans(解答)：(1)方法 1，计算 $A^H A$ 可知

$A^H A=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\6&9\end{pmatrix}$ 为秩 1 阵，特根为 $\lambda(A^H A)=\left\{tr(A^H A),\ 0\right\}=\{13,\ 0\}$，

令 $\lambda_1=13$，$\lambda_2=0$，由奇异值定义可知，正奇异值为 $s_1=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{13}$.

方法 2，计算 AA^H 可知

$AA^H=\begin{pmatrix}2&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$(对角阵)，则 $\lambda(AA^H)=\{13,\ 0,\ 0\}$，$\lambda_1=13$

正奇异值为 $s_1=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{13}$

Ans(解答)：(2) 计算 $A^H A$ 可知

$\because A^H A=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&0&1\\-\mathrm{i}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&i\\0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$ 秩 1 阵，特根为 $\lambda(A^H A)=\left\{tr(A^H A),\ 0\right\}=\{4,\ 0\}$

正奇异值为 $s_1=\sqrt{4}=2$

Ans：(3) 计算 $A^H A$ 可知

$A^H A=(\bar{i},\ \bar{i},\ 1)\begin{pmatrix}i\\i\\1\end{pmatrix}=\left(|i|^2+|i|^2+|1|^2\right)=3$ 为 1 阶阵，根为 $\lambda(A^H A)=\{3\}$

正奇异值为 $s_1=\sqrt{3}$

Ans(解)：(4) 计算 AA^H 可知

$AA^H=(1,\ 1,\ \mathrm{i})\begin{pmatrix}1\\1\\-i\end{pmatrix}=\left(1+1+|i|^2\right)=3$ 为 1 阶阵，根为 $\lambda(AA^H)=\{3\}$

正奇异值为 $s_1=\sqrt{3}$

Ex2 求方阵的全体奇异值 $s(A)=\{\ s_1,\ s_2\cdots,\ s_n\ \}$与特征值 $\lambda(A)=\{t_1,t_2,\cdots t_n\}$

$$(1)A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix};\ (2)A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix};\ (2)A=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix},i^2=-1;\ (4)A=-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Ans(解)：(1) 计算 A^HA 可知，$\because A^HA=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$秩1阵，

特根为 $\lambda(A^HA)=\{tr(A^HA),\ 0\}=\{4,\ 0\}$， 令 $\lambda_1=4$，$\lambda_2=0$

全体奇异值为 $s(A)=\{\ s_1,\ s_2\}=\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2}\ \}=\{2,\quad 0\}$

即全体奇异值为 $s_1=2$，$s_2=0$ (含0奇异值!)

另外， $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$(秩 1 阵)， A 的全体根为 $\lambda(A)=\{tr(A),\ 0\}=\{2,\ 0\}$

即 A 的全体根为 $t_1=2,t_2=0$， 可记作 $\lambda(A)=\{t_1,t_2\}=\{2,\quad 0\}$，

Ans(答)：(2) 计算 A^HA 可知，$\because A^HA=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$对角形，

特根为 $\lambda(A^HA)=\{1,\ 1\}$， 即 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1$

全体奇异值为 $s(A)=\{\ s_1,\ s_2\}=\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2}\ \}=\{1,1\ \}$

即全体奇异值为 $s_1=1$，$s_2=1$ (2个奇值相同)

另外，$\because A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$的特式 $|tI-A|=t^2+1$，可知 A 的根为 $\lambda(A)=\{-i,\ \mathrm{i}\}$

即 A 的全体根，可记作 $\lambda(A)=\{t_1,t_2\}=\{-i,\ \mathrm{i}\}$

Ans(答)：(3) 计算 A^HA 可知，$\because A^HA=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&1\\1&-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$对角形，

特根为 $\lambda(A^HA)=\{2,\ 2\}$， 即 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=2$

全体奇异值为 $s(A)=\{\ s_1,\ s_2\}=\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2}\ \}=\{\sqrt{2},\sqrt{2}\ \}$

即全体奇异值为 $s_1=\sqrt{2}$，$s_2=\sqrt{2}$ (2个奇值相同)

另外，$\because A=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$的特式 $|tI-A|=(t-i)^2-1$，可知 A 的根为 $\lambda(A)=\{i-1,\ i+1\}$

即 A 的全体根，可记作 $\lambda(A)=\{t_1,t_2\}=\{i-1,\ i+1\}$

Ans(答)：(4) 计算 $A^H A$ 可知，$\because A^H A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$秩1阵

根为 $\lambda(A^H A)=\{tr(A^H A),\ 0,\quad 0\}=\{9,\ 0,\ 0\}$，令 $\lambda_1=9$，$\lambda_2=\lambda_3=0$

全体奇异值为 $s(A)=\{\ s_1,s_2,s_3\}=\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2}\ ,\sqrt{\lambda_3}\}=\{3,\quad 0,\quad 0\ \}$

全体奇异值为 $s_1=3$，$s_2=s_3=0$ （含0奇异值！）

另外，$A=-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$(秩 1 阵)，$A$ 的全体根为 $\lambda(A)=\{tr(A),\ 0,0\}=\{-3,0,0\}$

即 A 的全体根可记作 $\lambda(A)=\{t_1,t_2,t_2\}=\{-3,\ \ 0,\ 0\}$，

………………………………………………………………………………………..

Ex3 设矩阵 $A=A_{m\times n}$ 全体正奇异值为 $s_+(A)=\{\ s_1,s_2\cdots,\ s_r>0\}$，r=rank(A)

证明：$s_1{}^2+s_2{}^2+\cdots+s_r{}^2=tr(A^H A)$; $s_1{}^2+s_2{}^2+\cdots+s_r{}^2=\sum|a_{i,j}|^2$

Pf(证)：由正奇异值定义 $s_+(A)=\{\ s_1,s_2\cdots,\ s_r\ \}=\{\ \sqrt{\lambda_1},\cdots,\ \sqrt{\lambda_r}\ \}$

其中 $\lambda\left(A^H A\right)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,0,\cdots,0\}$，r=rank(A)，可知

$$s_1{}^2+s_2{}^2+\cdots+s_r{}^2=\lambda_1+\cdots,+\lambda_r+0+\cdots 0=tr(A^H A)$$

又设 $A=\left(a_{i,j}\right)\in C^{m,n}$，利用迹公式：$tr(A^H A)=\sum|a_{i,j}|^2$

故 $s_1{}^2+s_2{}^2+\cdots+s_r{}^2=tr(A^H A)$; $s_1{}^2+s_2{}^2+\cdots+s_r{}^2=\sum|a_{i,j}|^2$ 成立.