复习许尔公式：

许尔公式(1)：方阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 存在可逆阵 $\mathbf{P}$ 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为上三角；

许尔公式(2)：方阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 存在酉阵 $\mathbf{Q}$，使 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 为上三角

其中 A 的根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$

Cayley 定理：A 的特征多项式 $T(x)=|xI-A|=c_0+c_1x+\cdots+x^n$ 满足

$T(A)=c_0I+c_1A+\cdots+A^n=0$ (0 阵)---（也叫 Cayley 公式）

备注：令特征 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，可写特式 $T(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$ 分解式

可写 Cayley 公式：$T(A)=(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)\cdots(A-\lambda_n)=0$ (0 阵)

Pf：（只证 $n=3$，同理可证 $n=n$），复习相似公式：$\mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})$

利用许尔(Schur)公式(1)：$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}, \mathbf{A}\sim\mathbf{D}$ (相似)

利用公式 $\mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})$

$\Longrightarrow \mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{D}), \Rightarrow f(\mathbf{A})\sim f(\mathbf{D})$ （相似）

取特式 $T(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$， 则 $T(\mathbf{A})\sim T(\mathbf{D})$ (相似)

其中 $T(\mathbf{D})=(D-\lambda_1I)(D-\lambda_2I)(D-\lambda_3I)$， 要证 $T(\mathbf{D})=0$

令 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b & c \\ & \lambda_2 & d \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$ 上三角，令单位阵 $I=(e_1,e_2,e_3), e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

可写 $D=(\lambda_1e_1,\lambda_2e_2+be_1,\lambda_3e_3+ce_1+de_2)$ 按列分块，则有

$(D-\lambda_1I)e_1=De_1-\lambda_1e_1=\lambda_1e_1-\lambda_1e_1=\vec{0}$

$(D-\lambda_2I)e_2=De_2-\lambda_2e_2=(\lambda_2e_2+be_1)-\lambda_2e_2=be_1$

$(D-\lambda_3I)e_3=De_3-\lambda_3e_3=(\lambda_3e_3+ce_1+de_2)-\lambda_3e_3=ce_1+de_2$

又$(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)(D-\lambda_3 I)=(D-\lambda_2 I)(D-\lambda_3 I)(D-\lambda_1 I)=(D-\lambda_3 I)(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)$ 可交换

可知$T(\mathbf{D})e_1=(D-\lambda_2 I)(D-\lambda_3 I)(D-\lambda_1 I)e_1=(D-\lambda_2 I)(D-\lambda_3 I)\vec{0}=\vec{0}$

$T(\mathbf{D})e_2=(D-\lambda_3 I)(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)e_2=(D-\lambda_3 I)(D-\lambda_1 I)be_1=b(D-\lambda_3 I)\vec{0}=\vec{0}$

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{D})e_3&=(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)(D-\lambda_3 I)e_3=(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)(ce_1+de_2)\\
&=c(D-\lambda_2 I)(D-\lambda_1 I)e_1+d(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)e_2\\
&=\vec{0}+d(D-\lambda_1 I)be_1=bd(D-\lambda_1 I)e_1=\vec{0}
\end{aligned}$$

可知 $T(\mathbf{D})=T(\mathbf{D})I=T(\mathbf{D})(e_1,e_2,e_3)=(T(\mathbf{D})e_1,T(\mathbf{D})e_2,T(\mathbf{D})e_3)=0$

则$T(\mathbf{A})\sim T(\mathbf{D})=0$（相似），　故 $T(\mathbf{A})=0$

………………………………………………………………………………………

补充根公式 $\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$

根公式：设 n 方阵 A 特征根为$\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$， 则 $f(A)$ 的特根为

$$\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$$

其中 $f(A)=c_0 I+c_1 A+\cdots\cdots+c_k A^k$

$f(x)=c_0+c_1 x+\cdots\cdots+c_k x^k$ **为任一多项式**

特别推论：（记住）

(1)平移公式： $A\pm cI$ 的根为$\lambda(A\pm cI)=\{\lambda_1\pm c,\cdots,\lambda_n\pm c\}$

(2)倍法公式： kA 的根为$\lambda(kA)=\{k\lambda_1,\cdots,k\lambda_n\}$, $\lambda(-A)=\{-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n\}$

(3)幂公式 ： A^p **根公式**为$\lambda(A^p)=\{\lambda_1^p,\cdots,\lambda_n^p\}$, $p=0,1,2,\cdots$

Pf：（只证$n=3$），复习相似公式：$\mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})$

利用许尔(Schur)公式(1)：$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}\sim\mathbf{D}$（相似）

利用公式 $\mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})$

$$\Longrightarrow \mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{D})=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & \tilde{*} \\ & f(\lambda_2) & \\ & & f(\lambda_3)\end{pmatrix}, f(\mathbf{A})\sim f(\mathbf{D})\ \text{（相似）}$$

$\Longrightarrow$ $f(A)$ 的特根为 $\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)\}$. 证毕

备注：若 A 可逆（A^{-1} 存在），可取解析函数 $f(x)=x^{-1}$ 可写 $f(A)=A^{-1}$

逆根公式：若 A 可逆， A^{-1} 的根为 $\lambda(A^{-1})=\{\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}\}=\{\frac{1}{\lambda_1},\cdots, \frac{1}{\lambda_n}\}$

备注：若 A 半正定（$\sqrt{A}$ 存在），可取解析函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 可写 $f(A)=\sqrt{A}$

方根公式：若 A 半正， $\sqrt{A}$ 的根为 $\lambda(\sqrt{A})=\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots,\sqrt{\lambda_n}\}$

备注：可写解析函数 $f(x)=\mathbf{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots=\sum_0^\infty c_kx^k$ 幂级数

可写 $f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k+\cdots\cdots=\sum_0^\infty c_kA^k$ **叫** A 幂级数

也有相似公式：$\mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})$！

可得推广**根公式：**

推广根公式： 设 n 方阵 A 特根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$， 则 $f(A)$ 的特根为

$$\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots, f(\lambda_n)\}$$

其中 $f(x)=\mathbf{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots=\sum_0^\infty c_kx^k$ **为任一解析**函数

$$f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k+\cdots\cdots=\sum_0^\infty c_kA^k$$

特别例子：令指数函数 $f(x)=e^x$ 展开后

$$f(x)=e^x=\sum\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\frac{x^k}{k!}+\cdots$$

可写 $f(A)=e^A=\sum\frac{A^k}{k!}=I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\cdots+\frac{A^k}{k!}+\cdots$

注意： e^A 对任一方阵 A 都有如上定义

备注（e^A 根公式）： 设 n 方阵 A 特根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$， 则 e^A 的特根为

$$\lambda(e^A)=\{e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots,\ e^{\lambda n}\}$$

Pf 证：令解析函数 $f(x)=e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots\dfrac{x^k}{k!}+\cdots$

用推广根公式可知 $f(A)=e^A$ 的根为 $\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}=\{e^{\lambda_1},\ \cdots,\ e^{\lambda_n}\}$

即 $$\lambda(e^A)=\{e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots,\ e^{\lambda_n}\}$$ **证毕**

#推论：令 n 方阵 $A=(a_{i,j})$，则 $f(A)=e^A$ 的行列式为

$$\det(e^A)=|e^A|=e^{\mathbf{tr}(A)}=e^{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}$$

Pf 证：因为 $\lambda(e^A)=\{e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots,\ e^{\lambda_n}\}$，可知行列式

$$\det(e^A)=|e^A|=e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n}=e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=e^{\mathbf{tr}(A)}$$

且 $\mathbf{tr}(A)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

可知 $$\det(e^A)=|e^A|=e^{\mathbf{tr}(A)}=e^{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}$$ **证毕**

备注：任 n 方阵 $A=(a_{i,j})$，则 e^A 必可逆！即 $(e^A)^{-1}$ 存在

因为 $\det(e^A)=|e^A|=e^{\mathbf{tr}(A)}\neq 0$ 则 e^A 必可逆

例如 $A=\begin{pmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{pmatrix}$，$\mathbf{tr}(A)=0+0=0$，则 $e^A=e^{\begin{pmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{pmatrix}}$ 必可逆

且行列式 $\det(e^A)=e^{\mathbf{tr}(A)}=e^{\mathbf{0}}=1\neq 0$

…………………………………………………………………….

例 用“平移法”与“秩 1 公式”求下列特征根 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，(2) $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$，(3) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

解：(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，平移可知

$\because A-I=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 为秩1，由秩 1 公式 $\Rightarrow$ $\lambda(A-I)=\{\mathrm{tr}(A-I),0,0\}=\{1,0,0\}$

且 $A=(A-I)+I$，由**平移公式：** $\lambda(A\pm cI)=\{\lambda_1\pm c,\cdots,\lambda_n\pm c\}$ 可知

$\Rightarrow\quad \lambda(A)=\{1+1,0+1,0+1\}=\{2,1,1\}$

解：$(2)A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$，$\because A-I=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ -3 & -6 & 0\\ -3 & -6 & 0\end{pmatrix}$为秩1

由秩 1 公式 $\Rightarrow \lambda(A-I)=\left\{\mathrm{tr}(A-I),0,0\right\}=\{-3,0,0\}$

由**平移法** $\Rightarrow \lambda(A)=\{-3+1,0+1,0+1\}=\{-2,1,1\}$

解：$(3)A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ $\because A-2I=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$为秩1

由秩 1 公式 $\Rightarrow \lambda(A-2I)=\left\{\mathrm{tr}(A-2I),0,0\right\}=\{0,0,0\}$

由**平移法** $\Rightarrow \lambda(A)=\{0+2,0+2,0+2\}=\{2,2,2\}$

例　用“平移法”与“秩 1 公式”求根$\lambda(A)$： $A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & -3 & 3\\ 3 & -3 & -1 & -3\\ -3 & 3 & -3 & -1\end{pmatrix}$

解： $A+4I=\begin{pmatrix}3 & -3 & 3 & -3\\ -3 & 3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3 & -3\\ -3 & 3 & -3 & 3\end{pmatrix}$为秩 1 阵，由秩 1 公式

$\Rightarrow \lambda(A+4I)=\left\{\mathrm{tr}(A+4I),0,0,0\right\}=\{12,0,0,0\}$

由**平移法** $\Rightarrow \lambda(A)=\{8,-4,-4,-4\}$

例 $A=\begin{pmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{pmatrix}$, c为复数，求特根$\lambda(A)$

解：$A+cI=\begin{pmatrix}c & c & c\\ c & c & c\\ c & c & c\end{pmatrix}$为秩 1 阵，由秩 1 公式

$\Rightarrow \lambda(A+cI)=\left\{\mathrm{tr}(A+cI),0,0\right\}=\{3c,0,0\}$

由**平移法** $\Rightarrow \lambda(A)=\{2c,-c,-c\}$

例： $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$， 求特根 $\lambda(A)$ 与特式 $|xI-A|$

因为 $A-I=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 6\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ 秩为 1， 由秩 1 公式

$\Rightarrow\ \lambda(A-I)=\{\mathrm{tr}(A-I),0,0\}=\{0,0,0\}\Rightarrow\ \lambda(A)=\{0+1,0+1,0+1\}=\{1,1,1\}$

可知 $|xI-A|=(x-1)^3$

例： $A=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & 4\end{pmatrix}$， 求特根 $\lambda(A)$ 与特式 $|xI-A|$

令 $\because\ A-3I=\begin{pmatrix}4 & 4 & -1\\ 4 & 4 & -1\\ -4 & -4 & 1\end{pmatrix}$ 秩为 1， 由秩 1 公式

$\Rightarrow\ \lambda(A-3I)=\{\mathrm{tr}(A-3I),0,0\}=\{9,0,0\}\Rightarrow\ \lambda(A)=\{12,\ 3,\ 3\}$

特式 $|xI-A|=(x-12)(x-3)^2$

习题 1： 求特根 $\lambda(A)$ 与特式 $|xI-A|$

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $(A-1=?)$， (2) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 3\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$， $A-1=?$， (3) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$， $A-2=?$

(4) $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $A-I=?$ ， (5) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$， $A-I=?$

(6) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$， $A-2=?$ (7) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A-2=?$

(8) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$， $A-2=?$ (9) $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$， $A-I=?$

$(10)A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}, A-2=?$，$(11)A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}, A-1=?$

备注（镜面阵）：设非 0 列 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T\neq 0$，令 $A=I-\dfrac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}$（叫镜面阵），

其中 $|\alpha|^2=\alpha^H\alpha$.

可令 $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ **单位化，可写镜面阵** $A=I-2\varepsilon\varepsilon^H$，**其中** $\varepsilon^H\varepsilon=|\varepsilon|^2=1$

证明：**镜面阵** $A=I-2\varepsilon\varepsilon^H$，**(** $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$，$|\varepsilon|=1$**) 满足**

1. $A^H=A$(hermite阵)，$A^2=I$，即$A^{-1}=A$，且 $A^{-1}=A=A^H$，A 为优阵

2. $\lambda(A)=\{-1,1,1,\cdots,1\}$，行列式$\det(A)=-1$

1 证：$A^H=(I-2\varepsilon\varepsilon^H)^H=I^H-2(\varepsilon\varepsilon^H)^H=I-2\varepsilon\varepsilon^H=A$

再验：$A^2=AA=(I-2\varepsilon\varepsilon^H)\cdot(I-2\varepsilon\varepsilon^H)$

$$=I-2\varepsilon\varepsilon^H-2\varepsilon\varepsilon^H+4\varepsilon(\varepsilon^H\varepsilon)\varepsilon^H$$
$$=I-4\varepsilon\varepsilon^H+4\varepsilon\varepsilon^H(\because \varepsilon^H\varepsilon=1)$$
$$=I \quad 即\ A^2=I,$$

可知 $A^H=A$(hermite阵)，$A^2=I$，即$A^{-1}=A$，**即** $A^{-1}=A=A^H$

因为 $A^{-1}=A^H$，　　**故** A 为优阵

2 证：$\because A-I=-2\varepsilon\varepsilon^H=-2\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\vdots\\\varepsilon_n\end{pmatrix}(\overline{\varepsilon_1},\cdots,\overline{\varepsilon_n})$秩为1，由秩 1 公式

$\Rightarrow$ $\lambda(A-I)=\{-2\mathrm{tr}(\varepsilon\varepsilon^H),0,\cdots,0\}$，用换位公式$\mathrm{tr}(\varepsilon\varepsilon^H)=\mathrm{tr}(\varepsilon^H\varepsilon)=\varepsilon^H\varepsilon=|\varepsilon|^2=1$

$\Rightarrow$ $\lambda(A-I)=\{-2,0,\cdots,0\}$，由**平移法** $\Rightarrow\lambda(A)=\{-1,1,1,\cdots,1\}$

$\Rightarrow$ 行列式$\det(A)=(-1)\bullet1\bullet1\cdots1=-1$　$A-I=-2\varepsilon\varepsilon^H=$

证法 2： $\because \varepsilon^H\varepsilon=1$ $\Rightarrow$ $\lambda(\varepsilon^H\varepsilon)=\{1\}$ **由换位公式** $\Rightarrow$n 方阵 $\varepsilon\varepsilon^H$ 与 1 阶阵 $\varepsilon^H\varepsilon$

只差$n-1$个 0 根$\Rightarrow$ $\lambda(\varepsilon\varepsilon^H)=\{1,\ \mathbf{0},\cdots,\ \mathbf{0}\}\Rightarrow\lambda(2\varepsilon\varepsilon^H)=\{2,\ \mathbf{0},\cdots,\ \mathbf{0}\}$ 可知

$$\Rightarrow\lambda(A)=\lambda(I-2\varepsilon\varepsilon^H)=\{-1,\ 1,\ 1,\cdots,\ 1\}$$

注：若$\alpha\neq 0$令$\varepsilon=\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$， 则$A=I-2\varepsilon\varepsilon^H=I-\dfrac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}$为**镜面优阵**

例：$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求**镜面优阵**$A=I-2\varepsilon\varepsilon^H=I-\dfrac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}$

解： 令$\varepsilon=\dfrac{\alpha}{|\alpha|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$A=I-2\varepsilon\varepsilon^H=I-\frac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}=I-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left[3I-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$$

备注：镜面阵$A=I-\dfrac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}$**有特向**$\alpha$**使**$A\alpha=-\alpha$**（特根**$\lambda=-1$**）**

$$\because A\alpha=\left(I-\frac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}\right)\alpha=\alpha-\frac{2}{|\alpha|^2}\alpha(\alpha^H\alpha)=\alpha-2\alpha=-\alpha(\because\alpha^H\alpha=|\alpha|^2)$$

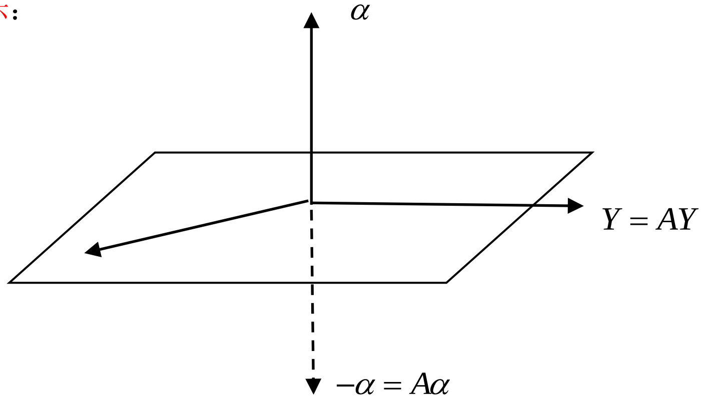
备注：**镜面阵**$A=I-\dfrac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}$ 其它特征向量如下

若$Y\perp\alpha$ （$Y\neq 0$），则$AY=1\cdot Y=Y$， 即$\lambda=1$的特向Y都与α 正交

证：若$Y\perp\alpha$ （$Y\neq 0$），则内积$(Y,\alpha)=\alpha^H Y=0$

$$\Rightarrow AY=\left(I-\frac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}\right)Y=Y-\frac{2}{|\alpha|^2}\alpha(\alpha^H Y)=Y-0=Y$$

如图所示：



备注：复习换位公式

换位公式：令 $\mathbf{A}_{n\times p}$ 和 $\mathbf{B}_{p\times n}$，且 $n\ge p$

$$\text{则}\ \det(x\mathbf{I}_n-\mathbf{AB})=x^{n-p}\det(x\mathbf{I}_p-\mathbf{BA})$$

$$\text{或}\ |x\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}|=x^{n-p}|x\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}|,$$

换位公式推论：1. $\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{BA}$ 只差 $n-p$ 个 0 根， 其中 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times p}$， $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{p\times n}$

2. $\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{BA}$ 必有相同的非 0 根

例 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&4\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$，用“平移法”求根 $\lambda(A)$ 与特式 $|xI-A|$

解： $\because\ A-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&4\\-1&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=BC(\text{高低分解})$

换位：$CB=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&4\\-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\-1&-3\end{pmatrix}$

平移：$CB-2=\begin{pmatrix}1&5\\-1&-5\end{pmatrix}$ 秩 1 ， 由秩 1 公式

$\Rightarrow\quad \lambda(CB-2)=\{tr(CB-2),0\}=\{-4,0\}\ \Rightarrow \lambda(CB)=\{-2,\ \ 2\}$

由换位公式：BC 与 CB 只差 $3-2=1$ 个 0 根

$\Rightarrow \lambda(A-1)=\lambda(BC)=\{-2,\ \ 2,\ \ 0\}\Rightarrow \lambda(A)=\lambda(BC)=\{-1,\ \ 3,\ \ 1\}$

$$\Rightarrow |\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

例 $A=\begin{pmatrix}-1&i&0\\-i&0&-i\\0&i&-1\end{pmatrix}$ 用“平移法”求根 $\lambda(A)$ 与特式 $|xI-A|$

解： $\because\ A-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&4\\-1&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=BC(\text{高低分解})$

$\because\ A+I=\begin{pmatrix}0&i&0\\-i&1&-i\\0&i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i\\-i&1\\0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=BC(\text{高低分解})$

换位：$CB=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\-i&1\\0&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2i\\-i&1\end{pmatrix}$

平移：$CB+I=\begin{pmatrix}1&2i\\-i&2\end{pmatrix}$秩 1 ，由秩 1 公式

$\Rightarrow \quad \lambda(CB+I)=\{tr(CB+I),0\}=\{3,0\} \ \Rightarrow \lambda(CB)=\{2, \quad -1\}$

由换位公式： BC 与 CB 只差 $3-2=1$ 个 0 根

$\Rightarrow \lambda(A+1)=\lambda(BC)=\{2, \ -1, \ 0\} \Rightarrow \lambda(A)=\lambda(BC)=\{1, \ -2, \ -1\}$

$$\Rightarrow |\lambda I-A|=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$$

有 3 个不同特征根： $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2.$

....

备注： 上例中 A 为 hermit 正规阵，可用 3 个谱阵的列求出 3 个特征向量如下

特向分别为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\-2i\\1\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}$ 互正交，单位化得优阵： ，

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{2i}{\sqrt{6}}&0&\frac{i}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$ 为优阵，使得 $Q^H AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

....

补充习题 Ex: 求根 $\lambda(A)$ 与特式 $|xI-A|$ (模仿上面例子)

$(1)A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\1&3&-1\\1&4&-2\end{pmatrix}$, $(2)A=\begin{pmatrix}-1&-i&0\\i&0&i\\0&-i&-1\end{pmatrix}$, $(3)A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}, A+2=?$

$(4)A=\begin{pmatrix}0&i&-1\\-i&0&i\\-1&-i&0\end{pmatrix}, A+1=?$, $(5)A=\begin{pmatrix}0&-i&1\\i&0&i\\1&-i&0\end{pmatrix}, A+1=?$