本讲主要内容：单阵谱分解

复习： 若 $A=A_{n\times n}$ 为单阵（A 可对角化），即存在可逆 P

使 $$P^{-1}AP=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ (对角形)，$\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n\}$

其中 $P=(X_1\cdots\cdots X_n)$ 可逆，P 的列 $X_1\cdots\cdots X_n$ 都是 A 的特向(不一定正交).

单阵谱分解：若 $A=A_{n\times n}$ 为单阵，全体互异根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$， 则有

$$A=\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k$$ （叫 A 的谱分解）

其中 $G_1,\cdots\cdots G_k$ 叫 A 的谱阵

且有公式：① $G_1+G_2+\cdots\cdots G_k=I$

② $G_1G_2=0$， $\cdots\cdots$， $G_iG_j=0(i\neq j)$

③ $G_1^{\ 2}=G_1,\cdots\cdots G_k^{\ 2}=G_k$ （幂等），

Pf(证) 方法与正规谱分解证明完全一样(改写如下)

根据单阵条件：$$P^{-1}AP=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ （A 相似于对角形 D）

可写

$$P^{-1}AP=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1\mathrm{I}_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k\mathrm{I}_k\end{pmatrix}$$ （把重根写在一起）$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (*)

其中 $I_1,\cdots,\mathrm{I}_k$ 为小单位阵.

写 $$D=\lambda_1\begin{pmatrix}I_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & I_2 & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_k\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & I_k\end{pmatrix}$$

令 $$D_1=\begin{pmatrix}I_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix},D_2=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & I_2 & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix},\cdots,D_k=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & I_k\end{pmatrix}$$

代入公式(*) $\Rightarrow$ $$P^{-1}AP=\mathrm{D}=\lambda_1D_1+\lambda_2D_2+\cdots\cdots\lambda_kD_k$$

显然有① $D_1+D_2+\cdots\cdots D_k=\begin{pmatrix} I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & I_k \end{pmatrix}=I$ （单位阵）

② $D_1D_2=0,\cdots\cdots,D_iD_j=0\ (i\neq j)$

③ $D_1^{\ 2}=D_1,\cdots\cdots,D_k^{\ 2}=D_k$ （幂等），

因为 $P^{-1}AP=D=\lambda_1D_1+\lambda_2D_2+\cdots\cdots+\lambda_kD_k$

$\Longrightarrow\ A=PDP^{-1}=P(\lambda_1D_1+\cdots\cdots+\lambda_kD_k)P^{-1}=\lambda_1(PD_1P^{-1})+\cdots\cdots+\lambda_k(PD_kP^{-1})$

令 $G_1=PD_1P^{-1},\cdots\cdots,G_k=PD_kP^{-1}$

$\Longrightarrow$ 谱分解公式 $A=\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k$ …………(**)

利用以上①，②，③可知如下公式：

① $G_1+G_2+\cdots+G_k=I$

$\because G_1+G_2+\cdots\cdots+G_k=P(D_1+\cdots\cdots+D_k)P^{-1}=PIP^{-1}=PP^{-1}=I$

② $G_1G_2=0$，……，$G_iG_j=0(i\neq j)$

$\because G_1G_2=(PD_1P^{-1})(PD_2P^{-1})=P(D_1D_2)P^{-1}=0$，

③ $G_1^{\ 2}=G_1,\cdots\cdots,G_k^{\ 2}=G_k$ (幂等)，因 $G_1^{\ 2}=(PD_1P^{-1})^2=PD_1P^{-1}=G_1,\cdots$ 同理 $G_k^{\ 2}=G_k$

备注：这里没有 hermit 公式：$G_1^{\ H}=G_1,\cdots\cdots,G_k^{\ H}=G_k$ 不一定成立

这里 P 不一定是优阵 $P^{-1}\neq P^H$，例如 $G_1=PD_1P^{-1}\neq PD_1P^H$.

可知 $G_1^{\ H}=(PD_1P^{-1})^H=(P^{-1})^HD_1^{\ H}P^H=(P^{-1})^HD_1P^H\neq PD_1P^{-1}=G_1$.

可写主要**公式**如下

单阵谱公式：若 $A=A_{n\times n}$ **单阵，全体互异根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$， **则有**

$$A=\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k$$ （叫 A 的谱分解）

其中 $G_1,\cdots\cdots G_k$ 叫 A 的谱阵

且有公式：① $G_1+G_2+\cdots\cdots G_k=I$

② $G_1G_2=0$，……，$G_iG_j=0(i\neq j)$

③$G_1^2=G_1,\cdots\cdots G_k^2=G_k$（幂等），

备注：这里没有 hermit 公式：$G_1^H=G_1,\cdots\cdots,G_k^H=G_k$ 不一定成立

……………………………………………………………………………..

利用幂等公式：$G_1^2=G_1,\cdots\cdots G_k^2=G_k$ 可知

$$G_1^p=G_1,\cdots\cdots G_k^p=G_k，\quad \mathrm{p}=0,1,2,\cdots$$

备注：且有补充公式：

公式(4)：$A^p=\lambda_1^pG_1^p+\cdots\cdots+\lambda_k^pG_k^p$，$\mathrm{p}=0,1,2,\cdots$

公式(5)：$f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$，

其中 $f(x)=\mathrm{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_px^p$ **为任一多项式.**

公式(4)，(5)证明思路如下：

例如 $A^2=(\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k)^2=\lambda_1^2G_1^2+\cdots\cdots+\lambda_k^2G_k^2+0+\cdots\cdots0$
$=\lambda_1^2G_1+\cdots\cdots+\lambda_k^2G_k$

可知：$A^p=(\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_s)^p=\lambda_1^pG_1^p+\cdots\cdots+\lambda_k^pG_k^p+0+\cdots\cdots0$
$=\lambda_1^pG_1+\cdots\cdots+\lambda_k^pG_k$

任一多项式： $f(x)=\mathrm{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_px^p$**，可知**

$$\begin{aligned}
&f(A)=\mathrm{c}_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_pA^p\\
&=\mathrm{c}_0(G_1+\cdots+G_k)+c_1(\lambda_1G_1+\cdots+\lambda_kG_k)+\cdots+c_p(\lambda_1^pG_1+\cdots+\lambda_k^pG_k)^p\\
&=(\mathrm{c}_0+c_1\lambda_1+\cdots\cdots+c_p\lambda_1^p)G_1+\cdots\cdots+(\mathrm{c}_0+c_1\lambda_k+\cdots\cdots+c_p\lambda_k^p)G_k\\
&=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k.$$

备注： **公式**(5)对**任一多项式都成立，**故可取**特定的** $f(x)$ **代入公式**(5)

取不同的 $f(x)$，由公式 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$ 可求出**谱阵** $G_1,\cdots,G_k$

谱阵公式：设 A 单阵，全体不同根为 $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_k$，则有**谱阵公式**

$$G_1=\frac{\cancel{(A-\lambda_1I)}\cdots\cdots(A-\lambda_kI)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}\cdots\cdots(\lambda_1-\lambda_k)},$$

$$G_2=\frac{(A-\lambda_1 I)\cancel{(A-\lambda_2 I)}\cdots\cdots(A-\lambda_k I)}{(\lambda_2-\lambda_1)\cancel{(\lambda_2-\lambda_2)}\cdots\cdots(\lambda_2-\lambda_k)}$$

……

$$G_k=\frac{(A-\lambda_1)\cdots\cdots\cancel{(A-\lambda_k)}}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots\cdots\cancel{(\lambda_k-\lambda_k)}}$$，（可知**谱阵都是 A 多项式**）

其中，记号“$\cancel{\square}$”表示“没有此项”，（此记号便于记公式，它不是“约分”的含义）

证：先令 $f(x)=\cancel{(x-\lambda_1)}(x-\lambda_2)\cdots\cdots(x-\lambda_k)$，则 $f(\lambda_2)=\cdots=f(\lambda_k)=0$

且 $f(\lambda_1)=\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}(\lambda_1-\lambda_2)\cdots\cdots(\lambda_1-\lambda_k)=(\lambda_1-\lambda_2)\cdots\cdots(\lambda_1-\lambda_k)\neq 0$，

代入公式(5)：$f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$：

$$\Longrightarrow f(A)=f(\lambda_1)G_1+0G_2+\cdots+0G_k=f(\lambda_1)G_1$$

$$\Longrightarrow \text{解出 } G_1=\frac{f(A)}{f(\lambda_1)}=\frac{\cancel{(A-\lambda_1 I)}\cdots\cdots(A-\lambda_k I)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}\cdots\cdots(\lambda_1-\lambda_k)}$$

同理，令 $f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\cdots\cancel{(x-\lambda_k)}$，由公式(5)解得

$$G_k=\frac{f(A)}{f(\lambda_k)}=\frac{(A-\lambda_1)\cdots\cdots\cancel{(A-\lambda_k)}}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots\cdots\cancel{(\lambda_k-\lambda_k)}};$$

注：若 A 单阵，且只有 2 个不同根($\lambda_1\neq\lambda_2$)，则有谱公式

$$G_1=\frac{\cancel{(A-\lambda_1)}(A-\lambda_2)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{A-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad G_2=\frac{A-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1};\qquad \text{且 } G_1+G_2=I$$

注，若 A 只有 3 个不同根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则有谱公式

$$G_1=\frac{\cancel{(A-\lambda_1 I)}(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}=\frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$$

$$G_2=\frac{(A-\lambda_1 I)\cancel{(A-\lambda_2 I)}(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)\cancel{(\lambda_2-\lambda_2)}(\lambda_2-\lambda_3)}=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}$$

$$G_3=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cancel{(A-\lambda_3 I)}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\cancel{(\lambda_3-\lambda_3)}}=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}.$$

备注：可把多项式 $f(x)$ 推广为解析函数 $f(x)=\mathbf{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots=\sum_{0}^{\infty}c_kx^k$

可写 $f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k+\cdots\cdots=\sum_0^{\infty}c_kA^k$ 叫 A 幂级数

利用取极限方法可知，若 A 单阵，则有谱公式：

$$f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$$

对解析函数 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots=\sum_0^{\infty}c_kx^k$ 成立！

特别：令指数函数 $f(x)=e^{tx}$ （t为参数）展开后

$$f(x)=e^{tx}=\sum\frac{(tx)^k}{k!}=1+tx+\frac{(tx)^2}{2}+\frac{(tx)^3}{3!}+\cdots+\frac{(tx)^k}{k!}+\cdots$$

任一方阵 A 都有 $f(A)$ 定义如下：

可写 $f(A)=e^{tA}=I+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\cdots+\frac{(tA)^k}{k!}+\cdots$

参数 $t=1$ 时 $f(A)=e^{A}=I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\cdots+\frac{A^k}{k!}+\cdots$

特别参数 $t=0$ 时，（或 $A=0=0_{n\times n}$ ）可知 $e^{0_{n\times n}}=I$

小结：单阵 A 有谱公式 $A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\cdots\cdots+\lambda_kG_k$，

且 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$

$f(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots$ 为解析函数

备注：单阵 A 有补充公式**

补充公式（6）：$AG_1=\lambda_1G_1$，$AG_2=\lambda_2G_2,\cdots\cdots,AG_k=\lambda_kG_k$

结论：G_1，$G_2,\cdots\cdots,G_k$ 中各列都是 A 的特征向量！！！（分别属于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ ）

证：$\because AG_1=(\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k)G_1=(\lambda_1G_1^2+0\cdots\cdots+0)=\lambda_1G_1$,

例：$A=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}$ 求谱分解与 A^{100}，写出 2 个特征向量；（备注：求 $e^{tA}=?$）

解：$|xI-A|=(x-5)(x+2)$，根 $\lambda(A)=\{5,-2\}$， $\lambda_1=5$，$\lambda_2=-2$

2 阶方阵恰有 2 个不同根，故 A 是单阵

$$G_1=\frac{\cancel{(A-5)}(A+2)}{\cancel{(5-5)}(5+2)}=\frac{A+2}{7}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}$$

$$G_2=\frac{(A-5)\cancel{(A+2)}}{(-2-5)\cancel{(-2+2)}}=\frac{-1}{7}(A-5)=\frac{-1}{7}\begin{pmatrix}-4&4\\3&-3\end{pmatrix}(G_1+G_2=I)$$

得谱分解：$A=5G_1+(-2)G_2$，　且 $f(A)=f(5)G_1+f(-2)G_2$

$$A^{100}=5^{100}G_1+(-2)^{100}G_2=5^{100}G_1+2^{100}G_2$$

由补充公式(6)可知 G_1，G_2 中各列都是 A 的特征向量！

观察取 G_1，G_2 的列，可知 2 个特向 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$不唯一（不正交）

备注：求 e^{tA} 如下

令 $f(x)=e^{tx}, f(5)=e^{5t}, f(-2)=e^{-2t}$

$$\Rightarrow e^{tA}=f(5)G_1+f(-2)G_2=e^{5t}\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}+e^{-2t}\frac{-1}{7}\begin{pmatrix}-4&4\\3&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3e^{5t}+4e^{-2t}&4e^{5t}-4e^{-2t}\\3e^{5t}-3e^{-2t}&4e^{5t}+3e^{-2t}\end{pmatrix}$$

即　$e^{tA}=I+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\cdots+\frac{(tA)^k}{k!}+\cdots=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3e^{5t}+4e^{-2t}&4e^{5t}-4e^{-2t}\\3e^{5t}-3e^{-2t}&4e^{5t}+3e^{-2t}\end{pmatrix}$

$t=1$时 $e^A=I+A+\frac{A^2}{2}+\cdots+\frac{A^k}{k!}+\cdots\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3e^5+4e^{-2}&4e^5-4e^{-2}\\3e^5-3e^{-2}&4e^5+3e^{-2}\end{pmatrix}$

小结：若 A 单阵，**全体互异根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$，　**则有**

$$A=\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k\text{（叫 }A\text{ 的谱分解）}$$

且 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$

对**任一**解析函数**成立**

且有公式：①$G_1+G_2+\cdots\cdots G_k=I$

② $G_1G_2=0$，……，$G_iG_j=0(i\neq j)$

③$G_1^{\ 2}=G_1,\cdots\cdots G_k^{\ 2}=G_k$（幂等），

……………………………………………………………………

例 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，判定单阵再求谱分解，求 A^{100}

解(1) $\lambda(A)=\{1,2,1\}$，不同根 $\lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_3=1$

可知 3 阶阵恰有 3 个不同根，故 A 是单阵

$$G_1=\frac{\cancel{(A-\lambda_1 I)}(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{\cancel{(\lambda_1-\lambda_1)}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}=\frac{(A-2)(A-I)}{(3-2)(3-1)}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$G_2=\frac{(A-\lambda_1 I)\cancel{(A-\lambda_2 I)}(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)\cancel{(\lambda_2-\lambda_2)}(\lambda_2-\lambda_3)}=\frac{(A-3)(A-I)}{(2-3)(2-1)}=-\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

且 $G_3=I-(G_1+G_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ （ $\because G_1+G_2+G_3=I$ ）

得谱分解：$A=3G_1+2G_2+1G_3$， 且 $f(A)=f(3)G_1+f(2)G_2+f(1)G_3$

$$A^{100}=3^{100}G_1+2^{100}G_2+1^{100}G_2=3^{100}G_1+2^{100}G_2+1G_3$$

备注：观察 G_1,G_2,G_3 的列，恰有 3 个特向：$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ （不正交）不唯一

习题 Ex 判定单阵再求谱分解，求 A^{100}；利用谱阵的列写出特征向量:

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, (2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$ (3) $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

例：判定单阵再求谱分解，求 A^{100}

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, (2) $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$, (3) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

解(1) $\lambda(A)=\{1,2,1\}$，令不同根 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，

验： $(A-1I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$，A 为单阵

或，2 重根 $\lambda_1=1$ 的秩 $r(A-\lambda_1 I)=r\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=1=3-2=n-2$，故 A 为单

或 $A-I=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ 为秩 1，且 $tr(A-I)=1\neq 0 \quad\Rightarrow\quad A-I$ 为单阵， A 为单

令 $G_1=\dfrac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{1}{(-1)}(A-2)=(2I-A)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$$G_2=I-G_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \because G_1+G_2=I$$

得谱分解： $A=1G_1+2G_2$， $\qquad f(A)=f(1)G_1+f(2)G_2$

且 $\qquad A^{100}=1^{100}G_1+2^{100}G_2=G_1+2^{100}G_2$

备注：观察 G_1， G_2 的列，可知 3 个特向为: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 不唯一（不正交）

解(2)： $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$ ， $\lambda(A)=\{1,-2,1\}$，令 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$

验：$(A-1)(A+2)=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$，A 为单阵

或 $A-I=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}$ 为秩 1，且 $tr(A-I)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad A$ 为单

或 2 重根 $\lambda_1=1$ 的秩 $r(A-I)=r\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}=1=3-2=n-2$，故 A 为单

令 $G_1=\dfrac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{1}{3}(A+2)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$， $G_2=I-G_1=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

得谱公式：$A=1G_1+(-2)G_2$，$f(A)=f(1)G_1+f(-2)G_2$

$$A^{100}=1^{100}G_1+(-2)^{100}G_2=G_1+2^{100}G_2$$

解(3)：$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \lambda(A)=\{1,1,2\}$，令 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$

验：$(A-1)(A-2)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ & & \\ & & \end{pmatrix}\neq 0$, A 非单阵

故 A 没有谱公式!!!

可知 $\because \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}(k\geq 1) \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix}1 & 100\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

用分块公式可知 $A^{100}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{100} & \\ & 2^{100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 100 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{100}\end{pmatrix}$

…………………………………………………………………………………………

备注：有时可用分块公式 $\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}A_1^k & 0\\ 0 & A_2^k\end{pmatrix}$ 求 A^k

……………………………………………………………………………………………..

习题 Ex1. 求 A 与 $f(A)$ 的谱分解，计算 $A^{100}=?$

（1） $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，（2） $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，（3） $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

补充题：$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，用分块法求 $A^{100}=?$

习题 Ex2. **判定单**阵，求 A 与 $f(A)$ 的谱分解；利用谱阵 G_1，G_2 的列写出特征向量

$(1) A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $(2) a,b$为非0实数，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

提示：$|xI-A|=(x^2-(a^2+b^2))$ 可知 $\lambda(A)=\{\sqrt{a^2+b^2},\ -\sqrt{a^2+b^2}\}$恰有n=2个不同根

....

补充公式： 若 A 单阵，**互异根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k\neq 0$，则有

$$A^{-1}=\lambda_1^{-1}G_1+\cdots\cdots+\lambda_k^{-1}G_k$$ （叫 A^{-1} 的谱分解）

(公式)证明:令 $A^{-1}=\lambda_1^{-1}G_1+\cdots\cdots+\lambda_k^{-1}G_k$ (右边有定义)

验证可知：
$$\begin{aligned} AA^{-1}&=(\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_kG_k)(\lambda_1^{-1}G_1+\cdots\cdots+\lambda_k^{-1}G_k)\\ &=G_1^{\,2}+\cdots\cdots+G_k^{\,2}+0+0+\cdots 0=G_1+G_2+\cdots\cdots G_k=I \end{aligned}$$

或计算
$$\begin{aligned} AA^{-1}&=A(\lambda_1^{-1}G_1+\cdots\cdots+\lambda_k^{-1}G_k)=\lambda_1^{-1}AG_1+\cdots\cdots+\lambda_k^{-1}AG_k\\ &=\lambda_1^{-1}\lambda_1G_1+\cdots\cdots+\lambda_k^{-1}\lambda_kG_k=G_1+G_2+\cdots\cdots G_k=I \end{aligned}$$
证毕

补充习题 ：求谱分解，用公式 $A^{-1}=\lambda_1^{-1}G_1+\cdots\cdots+\lambda_k^{-1}G_k$ **求** A^{-1}

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，(2) $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}