满秩分解(高低分解)：设 $A=A_{m\times n}$，秩 $r(A)=r>0$，则有**满秩分解** $A=BC$

其中 $B=B_{m\times r},C=C_{r\times n}$（也叫高低分解），且 $r(B)=r,r(C)=r$

B 叫列满阵（高阵），C 叫行满阵（低阵）

注， 有些是平凡高低分解（可能没什么用），例如：

② 设 $A=A_{n\times n}$ 为可逆（$|A|\neq 0$，$r(A)=n$）$A=I_{n\times n}A_{n\times n}=A_{n\times n}I_{n\times n}=A^2A^{-1}$

② $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}_{3\times 2}$ （高阵 $r(A)=2$）则 $A=AI_2$

③ $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}_{2\times 3}$ （低阵 $r(A)=2$），则 $A=I_2A_{2\times 3}$

证明：利用正 SVD： $A=P\Delta Q^H$ （Δ 可逆），$P\in C^{m\times r}$，$Q\in C^{n\times r}$，$Q^H\in C^{r\times n}$

$$\text{令}B=P\text{是}m\times r\text{(列优)高阵},\ C=\Delta Q^H\text{是}r\times n\text{低阵}\Rightarrow A=BC$$

$B=B_{m\times r},C=C_{r\times n}$ 分别为列满阵（高阵），行满阵（低阵） 证毕

分解方法：先把 $A=A_{m\times n}$ 用行变换（只用行变换，不用列变换！）化为简化阶梯形如下：

$A\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}I_r&(*)\\\cdots&\cdots\\0&0\end{pmatrix},r=r(A),\ I_r=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}_{r\times r}=\begin{pmatrix}e_1&e_2&\cdots&e_r\end{pmatrix}$ 取出 A 中前 r 列，

记为 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n$

令 $B=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots\alpha_r)_{m\times r}$， 令 $C=\begin{pmatrix}I_r&(*)\end{pmatrix}_{r\times n}$

可得高低分解： $A=BC$

一般情形： $A\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}\vec{0}&\cdots&e_1&\cdots&\vec{0}&\cdots&e_r&\cdots&*&\cdots&*\\0&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}=D$ 有 r 个阶梯

在 A 中取 r 个列 $\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_r$ 与 D 中单位列向量 $e_1\quad e_2\quad\cdots\quad e_n$ 的位置一一对应！

令 $B=(\beta_1,\beta_2\cdots\cdots\beta_r)_{m\times r}$，$C=\begin{pmatrix}\vec{0}&,\cdots&e_1&,&\cdots&,&e_r&*&\cdots&*\end{pmatrix}_{r\times n}$

可得 $A=BC$

例 1： $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 求满分解 $A=BC$

$$A\xrightarrow{\text{行变换}r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\text{其中}I_r=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$ 令 $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}_{3\times2}$ (取前2列!)， 令 $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}_{2\times3}$

可得 $A=BC=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

例 2： $A=\begin{pmatrix}2&1&6&1&0\\3&2&10&1&0\\2&3&10&-1&3\\4&4&16&0&-1\end{pmatrix}$， 求满分解 $A=BC$

$$A\xrightarrow{\text{行变}_1}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad r(A)=2$$

e_1 e_2 e_3（单位向量在 1，2，5 列）

故，在 A 中取 1，2，5 列： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$

令 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\2&3&3\\4&4&-1\end{pmatrix}_{4\times3}$， $C=\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}_{3\times5}$

可得 $A=BC$

练习：求 $A=\begin{pmatrix}1&3&2&1&4\\2&6&1&0&7\\3&9&3&1&11\end{pmatrix}_{3\times5}$ 的高低分解

$$A \xrightarrow{r_3-(r_1+r_2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{-3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e_1 e_3

取 A 中 1，3 列

令 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

得 $A = BC$

或 $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e_1 e_5

可取 A 中第 1，5 列

令 $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

得 $A = BC$

注：若 $A = BC$ 则 $A^H = C^H B^H$，$A^T = C^T B^T$

注意以下矩阵：

秩为 1 的分解：若 $r(A) = 1$（各列成比例），则 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \alpha\beta$ 其中 α 是 A 中的一个非 0 列

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$（各列成比例）$r(A) = 1$

取 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$A=BC=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & -1\\1 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\2 & 4 & -4\\-2 & -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\end{pmatrix}$

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 求满分解

$r(A)=2$ 取 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\alpha_1&=1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2\\ \alpha_2&=0\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2\\ \alpha_3&=1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2\end{aligned}$$

写 $A=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1 & 4\\2 & 6 & 1 & 0 & 7\\3 & 9 & 3 & 1 & 11\end{pmatrix}_{3\times5}$

取前 2 行 $A_1=(1,3,2,1,4)$

$A_2=(2,6,1,0,7)$

$$A_1 = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2$$
$$A_2 = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 \qquad 写\ A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = 1 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2$$

可得分解 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$