范数理论

谱半径定义：**称** $\rho(A)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$ **为方阵** $A=A_{n\times n}$ **的谱半径,**

其中，方阵 A 的特征根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$

备注：**任一方阵** $A=A_{n\times n}$**，必有** $\rho(A)\ge 0$ **（非负性）**

思考题：若$A\neq 0$，是否$\rho(A)>0$(为正)?，若$\rho(A)$=0，是否必有A=0?

谱半径性质：(齐次公式) $\rho(kA)=|k|\rho(A)$，**证明**：……

备注：可写齐次公式 $\rho(\frac{A}{k})=\frac{1}{|k|}\rho(A)$，$k\neq 0$.

例如，可取正数 $k=\rho(A)+\varepsilon,\varepsilon>0$**，则有** $\rho(\frac{A}{k})=\rho(\frac{A}{\rho(A)+\varepsilon})=\frac{1}{\rho(A)+\varepsilon}\rho(A)<1$

例：$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，求谱半径 $\rho(A)$

$$\because \lambda_1=\frac{1}{2},\lambda_2=\frac{1}{3},\quad \therefore \rho(A)=\frac{1}{2}$$

例：$A=\begin{pmatrix}2i & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$(上三角)，可知谱半径 $\rho(A)=\max\{|2i|,\ 1\}=2$

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq 0\ \because \lambda_1=0,\lambda_2=0$ (秩 1 阵且 $tr(A)=0, A^2=0$)，可知 $\rho(A)=0$.

备注：本例说明，若 $A\neq 0$，则有可能 $\rho(A)=0$，

即 $\rho(A)=0 \not\Rightarrow A=0$

习题 Ex：求下列特征根 $\lambda(A)$ 与谱半径 $\rho(A)$

1.$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 1 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，2.$A=\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$($i^2=-1$，行和$\equiv 1+i$)；3. $A=\begin{pmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{pmatrix}$($c$为复数)

……………………………………………………………………………………

向量范数

先看向量空间 C^n 中的模长性质

引例 Eg：C^n 中向量 $x=(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)^T$ 的**模长定义为**：

$$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{x^Hx}=\sqrt{tr(xx^H)}=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}$$

有 3 条性质：

① 正性：$|\boldsymbol{x}|>0$(若 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$)，$|\boldsymbol{0}|=0$，(且$|\boldsymbol{x}|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$)

② 齐性：$|k\boldsymbol{x}|=|k||\boldsymbol{x}|$

③ 三角性：$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leq|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$

推论：① $\|-x\|=\|x\|$，② $|\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}|\leq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$， 且 $|\boldsymbol{y}|-|\boldsymbol{x}|\leq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$

即 $|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|$

备注：任一**内积空间** W 中都可引入向量长度（模长）定义如下，

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}，\quad \alpha\in \mathrm{W}$$

且有柯西--许瓦茨不等式：$|(\alpha,\beta)|\leq\sqrt{(\alpha,\alpha)}\sqrt{(\beta,\beta)}=|\alpha|\cdot|\beta|$

由此可得三角性： $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$.

且模长$|\alpha|$具有①正性：$|\alpha|>0$(若$\alpha\neq 0$),②齐性 $|\mathrm{k}\alpha|=|\mathrm{k}||\alpha|$，k为常数 .

例 令矩阵空间$V=\mathrm{C}^{m,n}, A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in \mathrm{C}^{m,n}$，

利用 $\mathrm{C}^{m,n}$ 中内积：$(A,B)=\mathrm{tr}(AB^H)=\mathrm{tr}(B^HA)=\sum a_{ij}\overline{b}_{ij}$,

规定记号 $\|A\|=\sqrt{(A,A)}=\sqrt{tr(AA^H)}=\sqrt{\sum|a_{ij}|^2}$ 叫 A 的 F 范数（模）.

具有 ①正性:$\|A\|>0(A\neq 0)$；②齐性：$\|kA\|=|k|\|A\|$

③三角性：$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

……………………………………………………………………………………..

下面引入任一线性空间(向量空间)中范数定义

范数定义 1：设V 是数域F (实数或复数域)上线性空间，若对于任一$\mathrm{x}\in V$，对应一个非负数，记为$\|\mathrm{x}\|$，满足以下 3 个条件，则称$\|\mathrm{x}\|$ 为空间V 上一个向量范数：

① 正性：$\|\mathrm{x}\|>0$(若$\mathrm{x}\neq 0$)；

② 齐次性：$\|k\mathrm{x}\|=|k|\cdot\|\mathrm{x}\|$， $\forall$倍数$k\in F$

③ 三角不等式：$\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|\leqslant\|\mathrm{x}\|+\|\mathrm{y}\|$，任两个$\mathrm{x},\mathrm{y}\in V$

备注：空间V 上一个向量范数就是V 上一个非负函数$\varphi(\mathrm{x})=\|\mathrm{x}\|, \mathrm{x}\in V$，满足 3 个条件

条件(1) 正性：$\varphi(\mathrm{x})>0$(若$\mathrm{x}\neq 0$)

条件(2) 齐性：$\varphi(k\mathrm{x})=|k|\varphi(\mathrm{x}), k$为任一倍数

条件(3) 三角性：$\varphi(x+y)\leq\varphi(\mathrm{x})+\varphi(\mathrm{y}),\ \mathrm{x},\mathrm{y}\in V$，

关于范数记号$\|\mathrm{x}\|$的说明：

由于上述函数 $\varphi(\mathrm{x})$ 具有内积空间 C^n 中向量模长 $|\mathrm{x}|$ 的 3 个性质(正性，齐性，三角性)

故把范数 $\varphi(\mathrm{x})$ 理解为向量的广义模长，记为 $\varphi(\mathrm{x})=\|\mathrm{x}\|$

因此可写范数定义 2

范数定义 2：若线性空间 V 上有一个函数 $\varphi(\mathrm{x}),\mathrm{x}\in V$ 适合：

① 正性：$\varphi(x)>0,(x\neq\vec{0})$，

② 齐性：$\varphi(kx)=|k|\varphi(x),k$为任一倍数

③ 三角性：$\varphi(x+y)\leq\varphi(x)+\varphi(y)$，

则称 $\varphi(x)$ 为 V 上一个范数，记为 $\varphi(x)=\|x\|$

…………………………………………………………………

复向量空间 C^n 中的常用范数：令向量 $\mathrm{x}=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T\in\mathrm{C}^n$

1 范数：$\|\mathrm{x}\|_1=\sum|x_j|=|x_1|+\cdots+|x_n|$

2 范数：$\|\mathrm{x}\|_2=|\mathrm{x}|=\sqrt{(\mathrm{x},\mathrm{x})}=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}$　（长度 $|\mathrm{x}|$）：

∞范数：$\|\mathrm{x}\|_\infty=\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}$

p-范数：$\|\mathrm{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$， $p\geq1$；

可验证：以上 4 个范数都满足①正性，②齐性， ③三角性

例：$\forall\mathrm{x}=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T\in\mathrm{C}^n$，定义 $\|\mathrm{x}\|_2=(\sum_{i=1}^n|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ 证明 $\|\mathrm{x}\|_2$ 是范数.

证明：$\|\mathrm{x}\|_2$ 显然满足正性和齐次性，下证满足三角不等式.

设 $\mathrm{x}=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T,\mathrm{y}=(y_1,\cdots,y_n)^T$，注意到 $\|\mathrm{x}\|_2=(\sum_{i=1}^n|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^Hx}$，即 $\|\mathrm{x}\|_2$ 是 C^n 中内积诱导的模长 $\|\mathrm{x}\|_2=\sqrt{(\mathrm{x},\mathrm{x})}=|\mathrm{x}|$，由 Cauchy 不等式 $|(x,y)|\leq\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$ 得

$$\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|_2^2=(\mathrm{x}+\mathrm{y},\mathrm{x}+\mathrm{y})=(\mathrm{x},\mathrm{x})+(\mathrm{x},\mathrm{y})+(\mathrm{y},\mathrm{x})+(\mathrm{y},\mathrm{y})$$
$$=\|\mathrm{x}\|_2^2+2\,\mathrm{Re}(\mathrm{x},\mathrm{y})+\|y\|_2^2\leq\|\mathrm{x}\|_2^2+2|(\mathrm{x},\mathrm{y})|+\|y\|_2^2$$
$$\leq\|\mathrm{x}\|_2^2+2\|\mathrm{x}\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2=\left(\|\mathrm{x}\|_2+\|y\|_2\right)^2$$

所以 $\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|_2\leq\|\mathrm{x}\|_2+\|y\|_2$.

备注：向量范数性质

(1) 单位化公式：$\mathrm{x}\neq0$ 时，$\dfrac{\mathrm{x}}{\|\mathrm{x}\|}$ 是范数为 1 的向量；

(2) $\|-x\| = \|x\|$；　　　(3) $\|x-y\| \ge |\|x\| - \|y\||$.

备注*：C^n 上有很多(无穷多)范数.

补充题 1： 设正定阵 $A^H = A > 0,\ A \in C^{n\times n}$，定义 $\|x\| = \sqrt{x^H A x},\ x \in C^n$

证明 $\|x\| = \sqrt{x^H A x}$ 是 C^n 上一个范数

提示：先证(1)正性, (2)齐性，再证三角性(3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ 如下：

$\because A > 0$ 由平方根公式 $A = B^2 = B^H B$

$$\Rightarrow\ x^H A x = x^H B^H B x = (Bx)^H Bx = |Bx|^2$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{x^H A x} = \sqrt{|Bx|^2} = |Bx| = \|Bx\|_2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| = \|B(x+y)\|_2 = \|Bx + By\|_2 \le \|Bx\|_2 + \|By\|_2 = \|x\| + \|y\|$$

2. 已知**正定对角阵** $A = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$, $p_1 > 0, \cdots, p_n > 0$，令 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in C^n$

写出范数公式 $\|x\| = \sqrt{x^H A x} = ?$

....

C^n 上范数**等价性**

定理： C^n 上任 2 个范数 $\|x\|_a, \|x\|_b$ 存在 $\exists$ 正数：$k_1 > 0, k_2 > 0$，

st：$k_1\|x\|_b \le \|x\|_a \le k_2\|x\|_b$ 对一切 x 成立

即 $k_1 \le \dfrac{\|x\|_a}{\|x\|_b} \le k_2$ 对一切x成立（证略）

简称 C^n 上任 2 个范数 $\|x\|_a, \|x\|_b$ 都等价 ! ! !

例如，C^n 上，$1 \le \dfrac{\|x\|_1}{\|x\|_\infty} \le n$，$x \in C^n$，　或　$\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\|x\|_\infty}{\|x\|_1} \le 1$；

$$1 \le \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \le \sqrt{n},\quad 或\quad \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \le 1$$

注：由 Cauchy 不等式 $\|x\|_1 = 1|x_1| + \cdots + 1|x_n| \le \sqrt{1^2 + \cdots + 1^2}\sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$

可得 $1 \le \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \le \sqrt{n}$

收敛定义：设 C^n 中向量序列; $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}),(k=1,2\cdots)$，

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$$

若 $x_1^{(k)}\to a_1, x_2^{(k)}\to a_2,\cdots,x_n^{(k)}\to a_n,(k\to\infty)$，

称 $x^{(k)}\to\alpha(k\to\infty)$，　或 $\lim x^{(k)}=\alpha$

收敛引理：$x^{(k)}\to\alpha \Leftrightarrow \left\|x^{(k)}-\alpha\right\|\to 0$，($\|x\|$ 为任一范数)

（先取范数 $\|x\|_1$ 证明引理，再用**范数等价性，**任取其它范数也成立）

………………………………………………………………………………………………

定义*：设 V 是有限维线性空间，$\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta$ 是 V 中的任意两种范数，若存在正数 k_1,k_2 使得 $\forall x\in V$，都有：$k_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le k_2\|x\|_\beta$，则称 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 是等价的.

定理*：有限维线性空间 V 中的任何两种范数都等价.

证明*：设 V 是有限维线性空间，$e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的基，则 $\forall x\in V$，有唯一表达式：

$x=\xi_1 e_1+\cdots+\xi_n e_n=(e_1,\cdots,e_n)\xi$，其中 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$ 为 x 的坐标向量. 可断言 V 中任一范数 $\|x\|$ 都是 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的连续函数，令 $\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\|x\|$，则对 $\forall y=\sum_{i=1}^n \eta_i e_i\in V$，有

$$\left|\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)-\varphi(\eta_1,\cdots,\eta_n)\right|=\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x-y\|=\left\|\sum_{i=1}^n(\xi_i-\eta_i)e_i\right\|$$

$$\le\sum_{i=1}^n(|\xi_i-\eta_i|\|e_i\|)\le(\sum_{i=1}^n\|e_i\|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^n|\xi_i-\eta_i|^2)^{\frac{1}{2}}\quad\text{（柯西不等式）}$$

$$=k(\sum_{i=1}^n|\xi_i-\eta_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $k=(\sum_{i=1}^n\|e_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 为常数，所以 $\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\|x\|$ 是 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的连续函数. 现证定理的结论，设 $\|x\|_\alpha,\|x\|_\beta$ 是 V 中的任意两种范数，要证存在正数 k_1,k_2，使得 $\forall x\in V$ 都有 $k_1\|x\|_\beta\le\|x\|_\alpha\le k_2\|x\|_\beta$. 当 $x=0$ 时，显然成立.

$x\ne 0$ 时，$\|x\|_\beta\ne 0,\|x\|_\alpha\ne 0$，$\|x\|_\alpha,\|x\|_\beta$ 都是 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的连续函数，故 $f(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$

仍是 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的连续函数. 考虑有界闭集 $S=\left\{\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T \left|\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2=1\right.\right\}$,

S 为 R^n 或 C^n 中的单位球面. 因为 $f(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\dfrac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$ 且 $x\neq 0$，所以 f 在 S 上无零点. 由连续性函数性质知，f 在有界闭集 S 上取到最大最小值，即存在 $x_0,y_0\in V$，使得 $\forall x$（x 坐标在 S 上），有

$$0<k_1=\frac{\|x_0\|_\alpha}{\|x_0\|_\beta}\le\frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}\le\frac{\|y_0\|_\alpha}{\|y_0\|_\beta}=k_2$$

其中 $x_0=(e_1,\cdots,e_n)\,\xi'$, $y_0=(e_1,\cdots,e_n)\,\eta'$, 且 ξ', $\eta'\in S$.

将 $x\in V$ 的坐标 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$ 单位化， 记为

$$x'=\frac{1}{k}(\xi_1,\cdots,\ \xi_n)^T,\quad k=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2\right)^{1/2}}$$

可写 $$\frac{x}{k}=(e_1,\cdots,e_n)x'=\frac{\xi_1}{k}e_1+\cdots+\frac{\xi_n}{k}e_n,\quad k=\left(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2\right)^{1/2}$$

可知 $\dfrac{x}{k}$ 的坐标 $x'\in S$，故 $k_1\le\dfrac{\left\|x/k\right\|_\alpha}{\left\|x/k\right\|_\beta}\le k_2$，

由范数齐次性可知 $k_1\le\dfrac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta}\le k_2$ 证毕

....

范数收敛*

定义*：设 $X_1,\cdots,X_m,\cdots$ 是线性空间 V 中的元素序列，若 $X_0\in V$，使得

$\lim\limits_{m\to\infty}\|X_m-X_0\|_\alpha=0$，称序列 $\{X_m\}$ 按范数 $\|\bullet\|_\alpha$ 收敛于 X_0，记为 $\lim\limits_{m\to\infty}X_m\overset{\alpha}{=}X_0$.

定理*：设 V 是有限维线性空间，$X_0\in V$

1） 若序列 $\{X_m\}$ 按某一范数收敛于 X_0，则 $\{X_m\}$ 按任何范数都收敛 X_0，

即，有限维线性空间按范数收敛是互相等价的.

2） 序列 $\{X_m\}$ 按范数收敛于 $X_0\Leftrightarrow$ 按坐标收敛于 X_0.

证：1） 设 $\|x\|_\alpha,\|x\|_\beta$ 是 V 中的任意两种范数，则存在正数 k_1,k_2，使得 $\forall x\in V$ 都有

$k_1\|x\|_\beta\le\|x\|_\alpha\le k_2\|x\|_\beta$. 若 $\lim\limits_{m\to\infty}\|x_m-x_0\|_\alpha=0$，则有 $0\le\|x_m-x_0\|_\beta\le\dfrac{1}{k_1}\|x_m-x_0\|_\alpha$，所

以 $\lim\limits_{m\to\infty}\|\mathrm{x_m}-\mathrm{x_0}\|_\beta=0$，即序列 $\{x_m\}$ 按 β 范数收敛于 x_0．反之亦然.

2) 取 V 的一组基底 $e_1,\cdots,e_n$．令 $\mathrm{x}_m=\xi_1^{(m)}e_1+\cdots+\xi_n^{(m)}e_n\ (m=1,2,\cdots)$，

$x_0=\xi_1^{(0)}e_1+\cdots+\xi_n^{(0)}e_n$. 由 2 范数定义，$\forall \mathrm{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in \mathrm{C^n}, \|\mathrm{x}\|_2=(\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

由 1) 知道，按范数收敛是等价的，所以有

$$\lim_{m\to\infty}\|\mathrm{x}_m-\mathrm{x}_0\|=0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\|\mathrm{x_m}-\mathrm{x_0}\|_2=0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(0)}\right|^2)^{\frac{1}{2}}=0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\xi_i^{(m)}=\xi_i^{(0)},\quad \mathrm{i}=1,2\cdots,n$$

注：有限维空间中的序列 $\{X_m\}$ 按任一种范数收敛都等价于按坐标收敛.

……………………………………………………………………………………

矩阵范数

矩阵的广义范数：若 $\forall \mathbf{A}\in \mathrm{C}^{m\times n}$ 均对应一个实数，记做 $\|\mathbf{A}\|$，满足 3 个条件

① 正性：当 $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$ 时，$\|\mathbf{A}\|>0$，当且仅当 $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ 时 $\|\mathbf{A}\|=0$；

②齐次性：$\|k\mathbf{A}\|=|k|\cdot\|\mathbf{A}\|$，$\forall k\in \mathrm{C}$；

② 三角不等式：对任何两个同型矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$，有 $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leqslant\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$；

则称 $\|\mathbf{A}\|$ **是矩阵 A 的向量范数（矩阵的广义范数）**.

注：任一 m×n 矩阵 $\mathbf{A}\in \mathrm{C}^{m\times n}$ 均可看做 mn 维空间 $\mathrm{C}^{m\cdot n}$ 中向量(拉直后).

故可将向量范数性质直接移植到矩阵上来.

与前面类似，我们有如下定理：

定理*：1) $\mathbf{A}\in \mathrm{C}^{m\times n}$ 的任一范数均是 $\mathbf{A}$ 的元素的连续函数；

2）任意两个范数是等价的，即对 2 个范数 $\|\mathbf{A}\|_\alpha,\|\mathbf{A}\|_\beta$，存在正数 k_1,k_2，使得 $\forall \mathbf{A}\in \mathrm{C}^{m\times n}$，

都有：$\mathrm{k_1}\|\mathbf{A}\|_\beta\leq\|\mathbf{A}\|_\alpha\leq \mathrm{k_2}\|\mathbf{A}\|_\beta$，即 $k_1\leq\dfrac{\|\mathrm{A}\|_\alpha}{\|\mathrm{A}\|_\beta}\leq k_2$

3）矩阵序列 $\{\mathbf{A}_\mathrm{k}\}$ 按任一范数收敛于 $\mathbf{A}_0 \Leftrightarrow$ 按元素收敛 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{ij}^k=a_{ij}^0,\forall i,j$.

矩阵可以视为拉直的向量，但是矩阵还有乘法运算，在考虑范数时，自然要两者兼顾.为方便起见我们只考虑**方阵**，得到下面的定义：

矩阵范数定义 1：对于任一方阵 $\mathbf{A}\in \mathrm{C}^{n,n}$，**矩阵范数** $\|\mathbf{A}\|$ 表示按某个法则与 $\mathbf{A}$ 对应的非负

函数，且满足 4 个条件：

(1) 正性：当 $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$ 时，$\|\mathbf{A}\|>0$，当且仅当 $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ 时 $\|\mathbf{A}\|=0$；

(2) 齐性：$\|k\mathbf{A}\|=|k|\cdot\|\mathbf{A}\|$，$\forall k\in\mathrm{C}$；

(3) 三角式：对于任两个矩阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}\in\mathrm{C}^{n,n}$，有 $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leqslant\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$；

(4) 相容性(次乘性)：$\|\mathbf{AB}\|\leqslant\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}\in\mathrm{C}^{n,n}$.

备注：满足以上 4 条件的矩阵范数 $\|\mathbf{A}\|$ 也叫**相容范数（或乘积范数）**

备注：矩阵范数定义 2：设方阵空间 $\mathrm{C}^{n\times n}$ 上非负函数 $\varphi(A), A\in\mathrm{C}^{n\times n}$

适合：①正性：$\varphi(A)>0(A\neq 0)$

②齐性：$\varphi(kA)=|k|\varphi(A),\ \ k\in\mathrm{C}$

③三角性：$\varphi(A+B)\leq\varphi(A)+\varphi(B), A,B\in\mathrm{C}^{n\times n}$

④相容性：$\varphi(AB)\leq\varphi(A)\varphi(B)$,（比较 $\|\mathbf{AB}\|\leq\|\mathbf{A}\|\bullet\|\mathbf{B}\|$）

称 $\varphi(A)$ 为空间 $\mathrm{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数（方阵范数），

记矩阵范数为 $\varphi(A)=\|A\|$.

常用矩阵范数：令方阵 $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in\mathrm{C}^{n\times n}$

列范数（最大列和）：$\|\mathbf{A}\|_1=\max\limits_j\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$（$j=1,2,\cdots,n$）；

行范数（最大行和）：$\|\mathbf{A}\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$（$i=1,2,,\cdots,n$）；

谱范数：$\|\mathbf{A}\|_2=\left(\lambda_1\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)\right)^{1/2}$，$\lambda_1\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)$ 表示 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 的最大特征值，

即 $\|\mathbf{A}\|_2$ 是 $\mathbf{A}$ 的最大奇异值；

总和范数(求总和)：$\|\mathbf{A}\|_M=\sum\left|a_{ij}\right|$；

F-范数（Frobenious 范数）：$\|\mathbf{A}\|_\mathrm{F}=\left(\sum\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{tr(\mathbf{A}^H\mathbf{A})}$；

G-范数：$\|\mathbf{A}\|_G=n\bullet\max\limits_{i,j}\{$ 最大的 $|a_{ij}|$ $\}$

备注 1： 可以证明上面的 6 个常用矩阵范数都满足**矩阵范数的** 4 个条件.

特别有相容条件(4) $\|\mathbf{AB}\|\leqslant\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}\in\mathrm{C}^{n,n}$ （证明略）

备注 2：任两个范数是等价的，即对 2 个范数$\|\mathbf{A}\|_\alpha, \|\mathbf{A}\|_\beta$，存在正数$k_1, k_2$，使得$\forall \mathbf{A} \in C^{n\times n}$，

$$\text{都有}\quad k_1 \le \frac{\|\mathrm{A}\|_\alpha}{\|\mathrm{A}\|_\beta} \le k_2$$

特别，任一矩阵范数$\|\mathbf{A}\|$都与总和范数$\|\mathbf{A}\|_M = \sum |a_{i,j}|$ 等价：存在正数k_1, k_2

$$\text{使}\quad k_1 \le \frac{\|\mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A}\|_M} \le k_2,\ \text{即}\ \ k_1\|\mathrm{A}\|_M \le \|\mathrm{A}\| \le k_2\|\mathrm{A}\|_M$$

例如有，$\frac{1}{n} \le \frac{\|\mathrm{A}\|_1}{\|\mathrm{A}\|_M} \le 1$；$\frac{1}{n} \le \frac{\|\mathrm{A}\|_\infty}{\|\mathrm{A}\|_M} \le 1$；$\frac{1}{n} \le \frac{\|\mathrm{A}\|_F}{\|\mathrm{A}\|_M} \le 1$

……………………………………………………………………………………………

例 1：设$\mathbf{A} \in C^{n\times n}$，证明$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr(\mathbf{A}^H\mathbf{A})}$ 是 $\mathbf{A}$ 的矩阵范数.

证：只需证相容性. 设$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，$\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\begin{aligned}\|\mathbf{AB}\|_F^2 &= \sum_{i,\ j=1}^{n} |c_{ij}|^2 = \sum_{i,\ j=1}^{n} |a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}|^2 \\ &\le \sum_{i,\ j=1}^{n} (|a_{i1}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2)(|b_{1j}|^2 + \cdots + |b_{nj}|^2)(\text{柯西不等式}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(|a_{i1}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2)\sum_{j=1}^{n}(|b_{1j}|^2 + \cdots + |b_{nj}|^2)(\text{提取公因式}) \\ &= \|\mathbf{A}\|_F^2\, \|\mathbf{B}\|_F^2;\end{aligned}$$

所以，$\|\mathbf{AB}\|_F^2 \le \|\mathbf{A}\|_F^2\, \|\mathbf{B}\|_F^2$.　　　　　　　　　　证毕

例 2：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，求$\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_F$，$\|\mathbf{A}\|_M = \sum |a_{i,j}|$

解：$A^H A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，$\lambda(A^H A) = \{4,\ 0\}$，

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0$，可知最大奇异值$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = 2$

且行范数$\|A\|_1 = \max\{1+1, 1+1\} = 2$

F-范数$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

总和范数$\|\mathbf{A}\|_M = \sum |a_{i,j}| = 4$

例 3： $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & i & 1\end{pmatrix}$，求常见矩阵范数

解　行范数 $\|A\|_\infty=\max\left\{1+|-1|+0,1+1+2,\frac{1}{2}+|i|+1\right\}=4$；

列范数 $\|A\|_1=\max\left\{1+1+\frac{1}{2},|-1|+1+|i|,2+1\right\}=3$；

总和范数 $\|A\|_M=8.5$； F-范数 $\|A\|_F=\sqrt{10.25}$；

G 范数 $\|\mathbf{A}\|_G=n\bullet\max\limits_{i,j}\{\text{最大的}|a_{ij}|\}=3\bullet 2=6$

…………………………………………………………………………………..

备注#： 3 种范数记号：令方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}=\underset{\text{各列}}{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_n\end{pmatrix}$(各行)

可用如下记号

∞范数： $\|A\|_\infty=\max\{\|A_1\|_1,\|A_2\|_1,\cdots,\|A_n\|_1\}$ （行范数）

1 范数： $\|A\|_1=\max\{\|\alpha_1\|_1,\|\alpha_2\|_1,\cdots,\|\alpha_n\|_1\}$ （列范数）

2 范数(谱范数)： $\|A\|_2=\sqrt{\text{最大的}\lambda_1(A^HA)}=\sqrt{\lambda_1}$ （最大奇异值）

都有①正性；②齐性；③三角性；④相容性： $\|AB\|\le\|A\|\bullet\|B\|$

备注*(公式)： $\|A\|_\infty=\|A^H\|_1$， $\|A\|_1=\|A^H\|_\infty$

$\|A\|_2=\|A^H\|_2$， $\|\mathbf{A}\|_F=\|\mathbf{A}^H\|_F=(tr(\mathbf{A}^H\mathbf{A}))^{1/2}$

定理*：1） U,V 为酉阵，则 $\|U\mathbf{A}\|_F=\|\mathbf{A}V\|_F=\|U\mathbf{A}V\|_F=\|\mathbf{A}\|_F$

2） $\mathbf{A}\in C^{n\times n}$，$x\in C^n$，则 $\|\mathbf{A}x\|_2\le\|\mathbf{A}\|_F\|x\|_2$；

证明：1) 显然 $\|U\mathbf{A}\|_F^2=tr((U\mathbf{A})^H(U\mathbf{A}))=tr(\mathbf{A}^HU^HU\mathbf{A})=tr(\mathbf{A}^H\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|_F^2$，所以

$\|U\mathbf{A}\|_F=\|\mathbf{A}\|_F$. 注意到 $\|\mathbf{A}\|_F=\|\mathbf{A}^H\|_F$， V^H 为酉阵，我们有

$\|\mathbf{A}V\|_F=\|(\mathbf{A}V)^H\|_F=\|V^H\mathbf{A}^H\|_F=\|\mathbf{A}^H\|_F=\|\mathbf{A}\|_F$，

$\|\mathbf{A}V\|_F=\|U\mathbf{A}V\|_F=\|\mathbf{A}\|_F$.

2) 记 $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 第 i 行为 $\mathbf{A}_{\mathrm{i}}$， 即 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \vdots \\ \mathbf{A}_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{A}X=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 X\\ \vdots \\ \mathbf{A}_{\mathrm{n}}X\end{pmatrix}$, 其中$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}$.

由 Cauchy 不等式有：

$$\left|\mathbf{A}_i \mathrm{x}\right|^2=\left|a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n\right|^2\leq\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|^2\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^2=\left\|\mathbf{A}_i^T\right\|_2^2\left\|\mathrm{x}\right\|_2^2,\quad \mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n}.$$

相加可得 $\left\|\mathbf{A}\mathrm{x}\right\|_2^2\leq\left(\left\|\mathbf{A}\right\|_{\mathrm{F}}\left\|\mathrm{x}\right\|_2\right)^2$ 证毕

思考题：设 $P=P_{n,n}$为优阵, $\mathbf{A}\in\mathrm{C}^{n\times n}$，则 $\|P^{-1}\mathrm{A}P\|_2=\|\mathrm{A}\|_2$, $\|P^{-1}\mathrm{A}P\|_F=\|\mathrm{A}\|_F$

……………………………………………………………………………

思考题*(新范数引理)：已知 $\mathrm{C}^{n\times n}$ 上一个矩阵范数 $\|\bullet\|$, $P=P_{n,n}$是可逆阵，

令 $\varphi(\mathbf{A})=\|P^{-1}\mathbf{A}P\|$, 或$\varphi(\mathbf{A})=\|P\mathbf{A}P^{-1}\|$, $\mathbf{A}\in\mathrm{C}^{n\times n}$

证明：$\varphi(\mathbf{A})$ 是 $\mathrm{C}^{n\times n}$ 上一个矩阵范数

提示：要证①正性：$\varphi(A)>0(A\neq 0)$； ②齐性：$\varphi(kA)=|k|\varphi(A)$, $k\in\mathrm{C}$

③三角性：$\varphi(A+B)\leq\varphi(A)+\varphi(B)$；④相容性：$\varphi(AB)\leq\varphi(A)\varphi(B)$

$$\because\ \varphi(AB)=\left\|P^{-1}ABP\right\|=\left\|(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)\right\|\leq\left\|P^{-1}AP\right\|\left\|P^{-1}BP\right\|=\varphi(A)\varphi(B)$$

可记这个新矩阵范数为 $\varphi(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{P}}$ (与P有关)

……………………………………………………………………………

备注：矩阵范数有下列不等式（记住）

1. $\|A\pm B\|\leq\|A\|+\|B\|$，**推广有** $\|A_1\pm A_2\pm\cdots\pm A_k\|\leq\|A_1\|+\|A_2\|+\cdots+\|A_k\|$

2. $\|AB\|\leq\|A\|\cdot\|B\|$ **推广有** $\|A_1A_2\cdots\cdots A_k\|\leq\|A_1\|\cdot\|A_2\|\cdots\cdots\|A_k\|$

特别记住： $\|A^k\|\leq\|A\|^k$ （$k=1,2,3\cdots\cdots$）

也有幂公式： $\rho(A^k)=[\rho(A)]^k$, $k=1,2,3\cdots\cdots$

证明：由谱半径定义 $\rho(A)=\max\left\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\right\}$

其中，方阵 $A=A_{n\times n}$ 特征根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$

可知 $\lambda(A^k)=\{\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k\}\Rightarrow\rho(A^k)=\max\{|\lambda_1|^k,\cdots,|\lambda_n|^k\}=[\rho(A)]^k$

备注(齐次公式): $\|k\mathbf{A}\| = |k|\cdot\|\mathbf{A}\|$, $\rho(kA) = |k|\rho(A)$, $\forall k \in \mathrm{C}$

特别 $\|-\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|$, $\rho(-A) = \rho(A)$

……………………………………………………………………………..

备注：矩阵范数产生向量范数

定理 1：$\mathrm{C}^{n\times n}$ 上任一矩阵范数$\|\bullet\|$都产生（诱导）一个向量范数$\varphi(X) = \|X\|_{\mathrm{v}}$

St：$\varphi(AX) \le \|A\|\varphi(X)$， 即$\|AX\|_{\mathrm{v}} \le \|A\|\|X\|_{\mathrm{v}}$， $\forall A \in \mathrm{C}^{n,n}, \forall X \in \mathrm{C}^{n}$

Pf：固定一个辅助向量：$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \ne \vec{0}$，任一 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

则 $X\alpha^T = X(a_1, \ \cdots, \ a_n) = (a_1X, \ \cdots, \ a_nX) \in \mathrm{C}^{n\times n}$

规定函数$\varphi(X) \triangleq \| X\alpha^T \| = \| (a_1X, \ \cdots, \ a_nX) \|$（右边含义明确！）

备注：可取单位向量$\alpha = e_1 = (1,0,\cdots,0)^T \in \mathrm{C}^n$

则可知 $\varphi(X) \triangleq \| X\alpha^T \| = \|X(1,0,\cdots,0)\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\|$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{C}^n$

Check：显然①$\|X\| > 0 (X \ne 0)$，②$\|kX\| = |k|\|X\|$，③三角性：令 $X, Y \in \mathrm{C}^n$

$\because \varphi(X+Y) = \|(X+Y)\alpha^T\| = \|X\alpha^T + Y\alpha^T\| \le \| X\alpha^T \| + \| Y\alpha^T \| = \varphi(X) + \varphi(Y)$

故 $\varphi(X)$ 为C^n上一个向量范数， 可记为$\varphi(X) = \|\mathrm{X}\|_v$

再证相容性：$\varphi(AX) = \|(AX)\alpha^T\| = \|A(X\alpha^T)\| \le \|A\|\| X\alpha^T \| = \|A\|\varphi(X)$

即 $\|AX\|_{\mathrm{v}} \le \|A\|\|X\|_{\mathrm{v}}$ 证毕

备注(**定义**)： 若矩阵范数$\|A\|_m$与向量范数$\|x\|_v$适合 $\|Ax\|_v \le \|A\|_m \bullet \|x\|_v$

则说$\|A\|_m$与$\|x\|_v$相容.

可写相容条件： $\|Ax\| \le \|A\| \bullet \|x\|$， $A \in \mathrm{C}^{n,n}, X \in \mathrm{C}^n$

例如， F 范数与向量模长$\|x\|_2 = |x|$**相容**：$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F \bullet \|x\|_2$ （证略）；

$\|A\|_M$与$\|x\|_1$，$\|x\|_\infty$都**相容**：$\|Ax\|_1 \le \|A\|_M \bullet \|x\|_1$，$\|Ax\|_\infty \le \|A\|_M \bullet \|x\|_\infty$（证略）；

G 范数$\|A\|_G$与范数$\|x\|_\infty$，$\|x\|_1$，模长$|x|$都**相容**：$\|Ax\|_\infty \le \|A\|_G \bullet \|x\|_\infty$，

$$\|Ax\|_1 \le \|A\|_G \bullet \|x\|_1, \qquad \|Ax\|_2 \le \|A\|_G \bullet \|x\|_2$$（证略）

…………………………………………………………………………………………..

备注：矩阵范数产生向量范数定理可写如下

定理 1：$C^{n\times n}$上任一矩阵范数$\|A\|$都产生一个向量范数$\varphi(X)=\|X\|_v$

满足相容条件 $\|AX\|_v \le \|A\|\|X\|_v$，$\forall A\in C^{n,n}, \forall X\in C^n$

备注：记住向量范数生成公式，取辅助向量**$\alpha=e_1=(1,0,\cdots,0)^T$

$C^{n\times n}$**上任一矩阵范数**$\|A\|$**都产生一个向量范数公式：**

$$\|X\|_v \triangleq \|X\alpha^T\| = \left\|\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\|, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in C^n$$

其中取$\alpha^T=(1,0,\cdots,0)$

$\|X\|_v$满足相容条件：$\|AX\|_v \le \|A\|\|X\|_v$，$A\in C^{n,n}, X\in C^n$

例：令矩阵$\|A\|=\|A\|_F$，取$\alpha^T=(1,0,\cdots,0)$，

由公式：$$\|X\|_V \triangleq \|X\alpha^T\|_F = \left\|\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\|_F = \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2} = \|X\|_2$$

可知，F 范数$\|A\|_F$可产生向量范数：$\|X\|_V=\|X\|_2$

由前定理可知 $\|AX\|_2 \le \|A\|_F\|X\|_2$，$A\in C^{n,n}, X\in C^n$

补充题 Ex1. 利用矩阵范数产生向量范数公式（取辅助向量$\alpha^T=(1,0,\cdots,0)$）

$$\|X\|_v \triangleq \|X\alpha^T\| = \left\|\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\|, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in C^n$$

求下列矩阵范数**产生的向量范数**$\|X\|_v=?$，并写出对应的相容条件

(1) 总和范数$\|\mathbf{A}\|_M=\sum|a_{ij}|$；(2) 列范数$\|\mathbf{A}\|_1$；(3) 行范数$\|\mathbf{A}\|_\infty$

…………………………………………………………………………………………..

复习谱半径定义：$\rho(A)=\max\{|\lambda_1|,\cdots\cdots|\lambda_n|\}$，$\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，$A=A_{n\times n}$

幂公式： $\rho(A^k)=[\rho(A)]^k$，$k=0,1,2,3,\cdots$

齐次公式： $\rho(kA)=|k|\rho(A)$

备注： 可写齐次公式 $\rho(\frac{A}{k})=\frac{1}{|k|}\rho(A)$， $k\neq 0$．例如，可取正数 $k=\rho(A)+\varepsilon,\varepsilon>0$

则有 $\rho(\frac{A}{k})=\rho(\frac{A}{\rho(A)+\varepsilon})=\frac{1}{\rho(A)+\varepsilon}\rho(A)<1$

……………………………………………………………………………………

定理(谱范不等式)： $\rho(\mathbf{A})\leqslant\|\mathbf{A}\|$，对一切矩阵范数$\|\mathbf{A}\|$成立

备注：若 **A** 是正规阵，则 $\rho(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|_2$．

证法 1：任取矩阵范数$\|\mathbf{A}\|$，它产生一个向量范数$\|X\|$，且$\|AX\|\leq\|A\|\|X\|$

任取 **A** 的特征值 λ，有特征向量 $x\neq 0$ 使得 $\mathbf{A}x=\lambda x$，

则$|\lambda|\|x\|=\|\lambda x\|=\|\mathbf{A}x\|\leq\|\mathbf{A}\|\|x\|$，且$\|x\|>0(x\neq 0)$

可知$|\lambda|\leq\|\mathbf{A}\|$， 由谱半径定义可得 $\rho(\mathbf{A})\leqslant\|\mathbf{A}\|$.

证法 2：可设 $\lambda(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\},|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$， $\rho(\mathrm{A})=\max\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}=|\lambda_1|$

取特征向量 $X\neq 0$ 使 $\mathbf{A}X=\lambda_1 X$， 令矩阵 $\mathrm{B}=(X,X,\cdots,X)_{n,n}\neq 0$

可知 $\mathbf{A}\mathrm{B}=(\mathbf{A}X,\cdots,\mathbf{A}X)=\lambda_1(X,,\cdots,X)=\lambda_1\mathrm{B}$

$|\lambda_1|\cdot\|\mathrm{B}\|=\|\lambda_1\mathrm{B}\|=\|\mathbf{A}\mathrm{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathrm{B}\|$， 且 $\|\mathrm{B}\|>0$

故 $|\lambda_1|\leq\|\mathbf{A}\|$，即 $\rho(\mathbf{A})\leq\|\mathbf{A}\|$ 证毕

注．证法 2 只用$\|\mathbf{A}\mathrm{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathrm{B}\|$，不用结论$\|AX\|\leq\|A\|\|X\|$

……………………………………………………………………………………

小结： $A\in\mathrm{C}^{n\times n}$， $\|A\|$为任一矩阵范数，则有

(1) $\|A^k\|\leq\|A\|^k$， 且 $\|I\|\geq 1$

$\because\|A^2\|\leq\|A\|\|A\|,\|A^3\|\leq\|A\|^3,\cdots$,故$\|A^k\|\leq\|A\|^k$

可知$\|I\|=\|I^2\|\leq\|I\|^2\Longrightarrow 1\leq\|I\|$,即有$\|I\|\geq 1$

或 $\|I\|\geq\rho(I)=1$, 可得 $\|I\|\geq 1$

(2)**幂公式：** $\rho(A^k)=[\rho(A)]^k$，$k=0,1,2,3,\cdots$

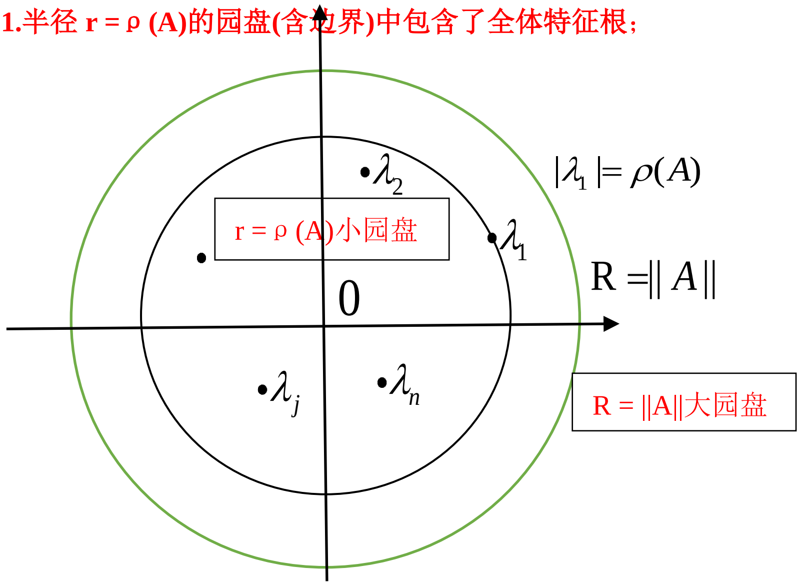
(3)谱范不等式： $\rho(A)\leq\|A\|$ （任一范数）

特别，A 为正规， 则 $\rho(A)=\|A\|_2$ **（由正规分解定理可得）**

备注：谱范不等式可图示如下，可设谱半径 ρ (A)= λ $_1$

如图示 $\rho(A)\le\|A\|$: **1.半径 r = ρ (A)的园盘(含边界)中包含了全体特征根;**

设 $|\lambda_1|=\rho(A)$



2 半径 R = ||A||的大园盘(含边界，不唯一)包含了全体特征根;

复习新范数公式*: 固定可逆阵 $P=P_{n\times n}$，$\|A\|$ 为矩阵范数 $A\in C^{n\times n}$

令 $\varphi(A)=\|P^{-1}AP\|$，则 $\varphi(A)$ 也是矩阵范数

记新范数为 $\varphi(A)=\|A\|_P$，或记 $\varphi(A)=\|A\|_{新}$

见前面思考题*证明：∵条件①；②；③显然；只证④：由定义

$$\varphi(AB)=\left\|P^{-1}ABP\right\|=\left\|(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)\right\|\le\left\|P^{-1}AP\right\|\left\|P^{-1}BP\right\|=\varphi(A)\varphi(B)$$

小范数定理：设 $\mathbf{A}\in C^{n\times n}$ 固定，任取很小正数 $\forall\varepsilon>0$，则有矩阵范数 $\|(\bullet)\|$

使得 St：$\|\mathbf{A}\|\le\rho(\mathbf{A})+\varepsilon$

Pf：只证 n=2 （同样可证 $n>2$ 情况），设 $A=A_{2\times2}$，任取 $\varepsilon>0$

∵许尔公式 $\Rightarrow Q^{-1}AQ=B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$ (上三角)， 令 $t>0$

令 $D=\begin{pmatrix}t & \\ & t^2\end{pmatrix}, D^{-1}=\begin{pmatrix}t^{-1} & \\ & t^{-2}\end{pmatrix}\Rightarrow D^{-1}BD=\begin{pmatrix}\lambda_1 & tb\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

可取 $t>0$ 很小，使 $|tb|<\varepsilon$，可知

（列范数）$\|D^{-1}BD\|_1=\left\|\begin{pmatrix}\lambda_1 & tb\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right\|_1\le\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\}+|tb|<\rho(A)+\varepsilon$

令$P=QD\Rightarrow P^{-1}AP=(QD)^{-1}A(QD)=D^{-1}(Q^{-1}AQ)D=D^{-1}BD$

则 $\left\|P^{-1}AP\right\|_1=\| D^{-1}BD\|_1<\rho(A)+\varepsilon$

由新范数公式：固定可逆阵$P=P_{n\times n}$，取列范数$\| \mathrm{X}\|_1$，$\mathrm{X}\in \mathrm{C}^{n\times n}$

令$\varphi(\mathrm{X})=\| P^{-1}\mathrm{X}P\|_1$，则$\varphi(\mathrm{X})$为新矩阵范数

记为 $\varphi(\mathrm{X})=\| \mathrm{X}\|_{新}=\| P^{-1}\mathrm{X}P\|_1$

令$\mathrm{X}=A$可知 $\varphi(A)=\left\|P^{-1}AP\right\|_1=\| D^{-1}BD\|_1<\rho(A)+\varepsilon$

$\Rightarrow \varphi(A)=\| A\|_{新}<\rho(A)+\varepsilon$ 证毕

特别推论：若$\rho(A)<1$，则有某个范数 $\| A\|_{新}<1$.

证：$\because$ $\rho(A)<1$，则$1-\rho(A)>0$，取$\varepsilon>0$很小，例如$\varepsilon<\frac{1}{2}[1-\rho(A)]$

可知$\rho(A)+\varepsilon<\rho(A)+\frac{1}{2}[1-\rho(A)]=\frac{1}{2}[1+\rho(A)]<1$, 即$\rho(A)+\varepsilon<1$，

利用小范数定理可知，存在范数$\| A\|_{新}<\rho(A)+\varepsilon<1$

备注：固定任一方阵 A，$\forall\varepsilon>0$，则有某个范数$\|\bullet\|_{\varepsilon}$，

st：$\|A\|_{\varepsilon}<\rho(A)+\varepsilon$，

特别，若$\rho(A)<1$，则有某范数$\|A\|_{\varepsilon}<1$.

注意：这里$\|\bullet\|_{\varepsilon}$与 A 有关！对于其它矩阵 B，$\|B\|_{\varepsilon}\le\rho(B)+\varepsilon$不一定成立.

补充备注：关于小范数定理$n\ge 2$的一个证明如下

Pf：$\because$ A∽J(相似于 Jordan 形)

可写 Jordan 形：$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \otimes & & & 0\\ & \lambda_2 & \otimes & & \\ & & \lambda_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \otimes\\ 0 & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中$\otimes$为 0 或 1

由‘Jordan 形定理’可知

$\exists$可逆 $P = P_{n\times n}$， st $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \otimes & & & 0 \\ & \lambda_2 & \otimes & & \\ & & \lambda_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \otimes \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

取 $D = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^n \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & & & \\ & \varepsilon^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{-n} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow D^{-1}JD = D^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \otimes & & & 0 \\ & \lambda_2 & \otimes & & \\ & & \lambda_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \otimes \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \otimes\varepsilon & & & 0 \\ & \lambda_2 & \otimes\varepsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & \otimes\varepsilon \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

令 $Q = PD$ 则 $Q^{-1}AQ = D^{-1}(P^{-1}AP)D = D^{-1}JD = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \otimes\varepsilon & & & 0 \\ & \lambda_2 & \otimes\varepsilon & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & \otimes\varepsilon \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

不妨设谱半径 $\rho(A) = \{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\} = |\lambda_1|$

$\because |\lambda_1| + |\otimes\varepsilon| \le |\lambda_1| + \varepsilon$， $|\lambda_2| + |\otimes\varepsilon| \le |\lambda_2| + \varepsilon$， $\cdots$

可知行范数 $\|D^{-1}JD\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \lambda_1 & \otimes\varepsilon & & & 0 \\ & \lambda_2 & \otimes\varepsilon & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1} & \otimes\varepsilon \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \right\|_\infty \le |\lambda_1| + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$

即 $|\mathrm{P}^{-1}AP\|_\infty = \|D^{-1}JD\|_\infty \le \rho(A) + \varepsilon$

令 $\varphi(\mathrm{X}) = \| P^{-1}\mathrm{X}P \|_\infty, \mathrm{X} \in \mathrm{C}^{n\times n}$， 则 $\varphi(\mathrm{X})$ 为新矩阵范数

记为 $\varphi(\mathrm{X}) = \| \mathrm{X} \|_{新} = \| P^{-1}\mathrm{X}P \|_\infty$

令 $\mathrm{X} = A$ 可知 $\varphi(A) = \| \mathrm{P}^{-1}AP\|_\infty = \|D^{-1}JD\|_\infty \le \rho(A) + \varepsilon$

$\Rightarrow \varphi(A) = \| A \|_{新} \le \rho(A) + \varepsilon$ 证毕

思考题：若 $A=A_{n,n}$ 为单阵(相似于对角形)，则存在矩阵范数 $\|X\|_{新}, X\in C^{n\times n}$

使得 $\|A\|_{新}=\rho(A)$

提示：利用新范数公式 $\varphi(X)=\|X\|_{新}=\|P^{-1}XP\|_1, X\in C^{n\times n}$

……………………………………………………………………………

定理*： 设 $\mathbf{A}\in C^{n\times n}$， $\|\mathbf{A}\|$ 是矩阵范数，若 $\|\mathbf{A}\|<1$，则 $I-\mathbf{A}$ 非奇异(可逆)，

$$\text{且} \left\|(I-\mathbf{A})^{-1}\right\|\le\frac{\|I\|}{1-\|\mathbf{A}\|}$$

证明：若 $I-\mathbf{A}$ 奇异，则 $(I-\mathbf{A})x=0$ 存在非零解 $x_0\neq 0$， 故有 $\mathbf{A}x_0=Ix_0=x_0$，

从而 $\|x_0\|=\|\mathbf{A}x_0\|\le\|\mathbf{A}\|\|x_0\|,(\|x_0\|>0)\Rightarrow\|\mathbf{A}\|\ge 1,$ 矛盾!

所以 $I-\mathbf{A}$ 非奇异. 另一方面，令 $B=(I-\mathbf{A})^{-1}$， $B(I-\mathbf{A})=I$， 有 $B=I+B\mathbf{A}$，

所以 $\|B\|=\|I+B\mathbf{A}\|\le\|I\|+\|B\mathbf{A}\|\le\|I\|+\|B\|\cdot\|\mathbf{A}\|$，

$$\text{故} \quad \left\|(I-\mathbf{A})^{-1}\right\|=\|B\|\le\frac{\|I\|}{1-\|\mathbf{A}\|}.$$

备注定义：若方阵 A 满足 $A^k\to 0(k\to\infty)$，或 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$，称 A 为收敛阵.

备注引理：** $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0 \Leftrightarrow \|A^k\|_M\to 0$ (总和范数)

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0\Leftrightarrow A^k$中每个元素$a_{ij}^{(k)}\to 0$, 其中$A^k=(a_{ij}^{(k)})$

$$\Leftrightarrow\|A^k\|_M=\sum_{i,j}|a_{ij}^{(k)}|\to 0(k\to\infty)$$

利用范数等价性可知

推论 1： $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0\Leftrightarrow\|A^k\|\to 0$ (任一范数成立)

即， A **为收敛阵** $\Leftrightarrow\|A^k\|_M\to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|A^k\|\to 0$(任一范数成立)

定理 1： (1) $\rho(A)<1\Leftrightarrow \|A^k\|\to 0(k\to\infty)\Leftrightarrow A^k\to 0(k\to\infty)$

(2)某一范数 $\|A\|<1\Rightarrow \|A^k\|\to 0(k\to\infty)$

Pf：先证明(2)，若某范数 $\|A\|<1\Rightarrow\left\|A^k\right\|\le\|A\|^k\to 0\Rightarrow\left\|A^k\right\|\to 0$

再证(1)：若 $\rho(A)<1\Rightarrow\exists$ 某小范数 $\|A\|<1\Rightarrow\left\|A^k\right\|\le\|A\|^k\to 0\Rightarrow\left\|A^k\right\|\to 0$

另外，若$\|A^k\| \to 0$且$\rho(A^k) \le \|A^k\| \to 0 \Rightarrow \rho(A^k) \to 0$，

又$[\rho(A)]^k = \rho(A^k) \to 0$, 且$\rho(A) \ge 0$，必有$\rho(A) < 1$　　　　证毕

定理 2：(1) $\rho(A) < 1 \Leftrightarrow A^k \to 0 (k \to \infty)$；

(2)某一范数$\|A\| < 1 \Rightarrow A^k \to 0 (k \to \infty)$

………………………………………………………………………..

推论（备用）：$\forall \varepsilon > 0$，$\dfrac{A^k}{[\rho(A)+\varepsilon]^k} \to 0$，$(k \to \infty)$

Pf：令 $B = \dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon} \Rightarrow \rho(B) = \dfrac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1 \Rightarrow B^k \to 0$，$(k \to \infty)$

…………………………………………………………………

牛曼公式(收敛公式)：

(1) 若$\rho(A) < 1$，则$I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots = (I - A)^{-1}$

(2) 若某范数$\|A\| < 1$，则$I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots = (I - A)^{-1}$

利用定理 2‘$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow A^k \to 0$’可直观证明牛曼公式如下

Pf：(1)若$\rho(A) < 1$则 $A^k \to 0 (k \to \infty)$

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) = I(I + A + A^2 + \cdots + A^k) - A(I + A + A^2 + \cdots + A^k)$$
$$= I - A^{k+1}$$

公式$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) = I - A^{k+1}$两边令$k \to \infty$求极限($A^{k+1} \to 0$)

可得 $(I - A)(I + A + \cdots + A^k + \cdots) = I$，由可逆阵定义可知

$$(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^k + \cdots$$　　　　证毕

(2)若某范数$\|A\| < 1$则$\rho(A) \le \|A\| < 1$，由(1)可得结论成立.

备注：若$\rho(A) \ge 1$，则$I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$发散(无意义)

Pf(用反证法)：如果$I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$**收敛，则可知**

$$A^k \to 0 (k \to \infty) \Rightarrow \rho(A^k) \to 0 (k \to \infty)$$

由公式$\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$，可知$[\rho(A)]^k \to 0$，必有$\rho(A) < 1$

与条件 $\rho(A)\geq 1$ 矛盾，故 $I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$ 发散.

小结（收敛公式）

1. 若 $\rho(\mathbf{A})<1$ 则有公式 $I+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots\cdots+\mathbf{A}^k=(I-\mathbf{A})^{-1}$
2. 若 $\|\mathbf{A}\|<1$ 也有公式 $I+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots\cdots+\mathbf{A}^k=(I-\mathbf{A})^{-1}$
3. 若 $\rho(A)\geq 1$ 则 $I+\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+\cdots+\mathrm{A}^k+\cdots$ 发散.

例：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，求 $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k$.

解：$\|\mathbf{A}\|_1=1+\frac{1}{3}>1$, $\|\mathbf{A}\|_\infty=1+\frac{1}{2}>1$, 但 $\rho(\mathbf{A})=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\}=\max\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{2}<1$，

所以 $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k$ 收敛，且 $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

备注：利用公式 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ 可得

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\frac{2}{6}-0}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

例：$A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$，求 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$，其中 $|a|<1$

解：$\because \|A\|_1=|a|<1$，$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k$ 收敛

$\therefore$ 有公式 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix}$

例：$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，求 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$

解：$\because \rho(A)=1$，故 $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k$ 发散无意义.

也可利用 $A^k=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}(-1)^k & k(-1)^{k-1}\\ 0 & (-1)^k\end{pmatrix}$ 可知

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}(-1)^k & k(-1)^{k-1}\\ 0 & (-1)^k\end{pmatrix} \text{发散}$$

习题 Ex. 求下列 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$

1. $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}, |a|<1$; 2. $A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.1\\ 0.2 & 0.4\end{pmatrix}$; 3. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; 4. $A=\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$

补充题 1. $A=\begin{pmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{pmatrix}$ (c为复数)，求谱半径 $\rho(A)$；

求复数c的范围，使 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛，且求 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=?$

补充题 2. 利用牛曼公式证明**定理*：**设 $\mathbf{A}\in \mathrm{C}^{n\times n}$，且某一矩阵范数 $\|\mathbf{A}\|<1$，则 $I-\mathbf{A}$ 可逆

$$\text{且} \|(I-\mathbf{A})^{-1}\|\le \frac{\|I\|}{1-\|\mathbf{A}\|}$$

提示：$\because \|\mathbf{A}\|<1$ 由牛曼公式 $\Rightarrow I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots=(I-A)^{-1}$

$\Rightarrow (I-A)^{-1}$ 存在，故 $I-\mathbf{A}$ 可逆，且

$$\begin{aligned}
&\|(I-A)^{-1}\|=\|I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots\|\\
&\le\|I\|+\|A\|+\|A^2\|+\cdots+\|A^k\|+\cdots(\text{利用三角性})\\
&\le\|I\|+\|A\|+\|A\|^2+\cdots+\|A\|^k+\cdots\quad (\because \|A^k\|\le\|A\|^k)\\
&\le\|I\|+\|A\|\,\|I\|+\|A\|^2\,\|I\|+\cdots+\|A\|^k\,\|I\|+\cdots(\because \|I\|\ge 1)\\
&=\frac{\|I\|}{1-\|A\|},\qquad \text{即}\quad \|(I-\mathbf{A})^{-1}\|\le\frac{\|I\|}{1-\|\mathbf{A}\|}
\end{aligned}$$

备注： 若 $\|\mathbf{A}\|$ 为**算子范数**，且 $\|\mathbf{A}\|<1$，则有

$$\|(I-\mathbf{A})^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|\mathbf{A}\|}(\because \|I\|=1)$$

……………………………………………………………………………………