§1.3 平面点集的一般概念

一、平面点集

二、区域

三、平面曲线

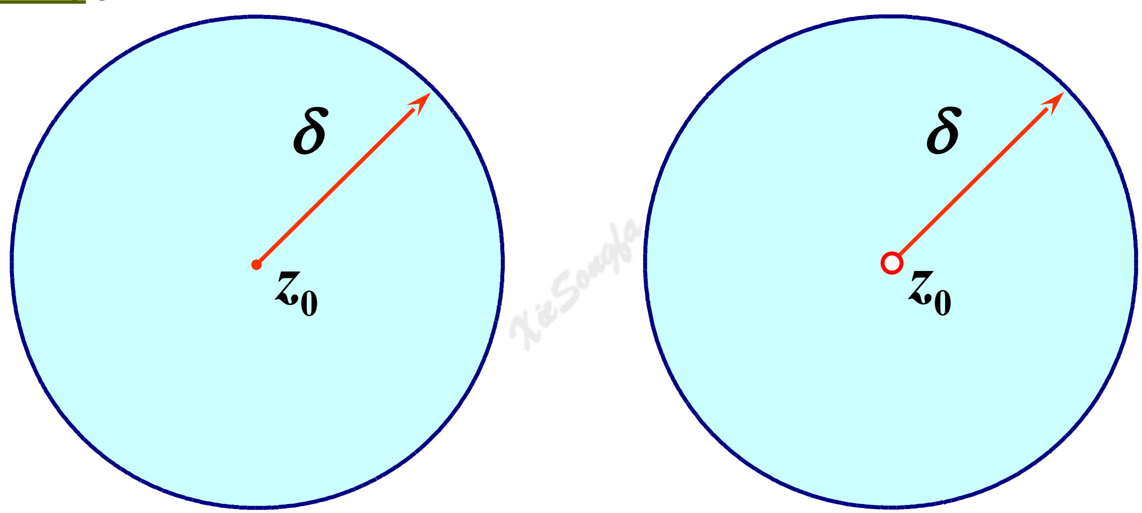
一、平面点集

1. 邻域

定义 设 z_0 为复平面上的一点$\delta > 0$,

(1) 称点集$\{z: |z - z_0| < \delta\}$ z_0 为 δ 点的 邻域;

(2) 称点集$\{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$ z_0 为δ 点的 去心邻域。



一、平面点集

2. 内点、外点与边界点

考虑某平面点集 G 以及某一点 z_0

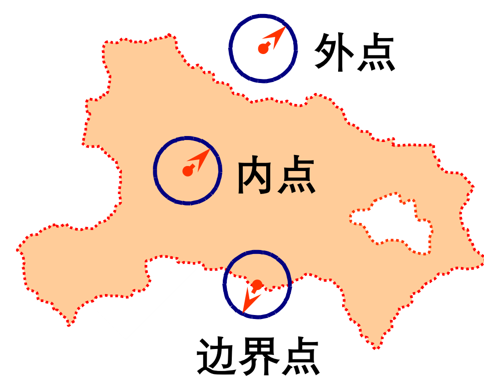
内点 (1) $z_0 \in G$; (2) $\exists \delta > 0, \forall z : |z - z_0| < \delta$, 有 $z \in G$.

外点 (1) $z_0 \notin G$; (2) $\exists \delta > 0, \forall z : |z - z_0| < \delta$, 有 $z \notin G$.

边界点 (1) z_0 不一定属于 G；

(2) $\forall \delta > 0$, 在 $|z - z_0| < \delta$ 中

既有 $z \in G$, 又有 $z \notin G$.



边界 G 的边界点的全体称为 G 的边界。

一、平面点集

3. 开集与闭集

开集 如果 G 的每个点都是它的内点，则称 G 为开集。

闭集 如果 G 的边界点全部都属于 G，则称 G 为闭集。

4. 有界集与无界集

定义 若存在 $\delta > 0$，使得点集 G 包含在原点的 δ 邻域内，则 G 称为有界集,否则称为非有界集或无界集。

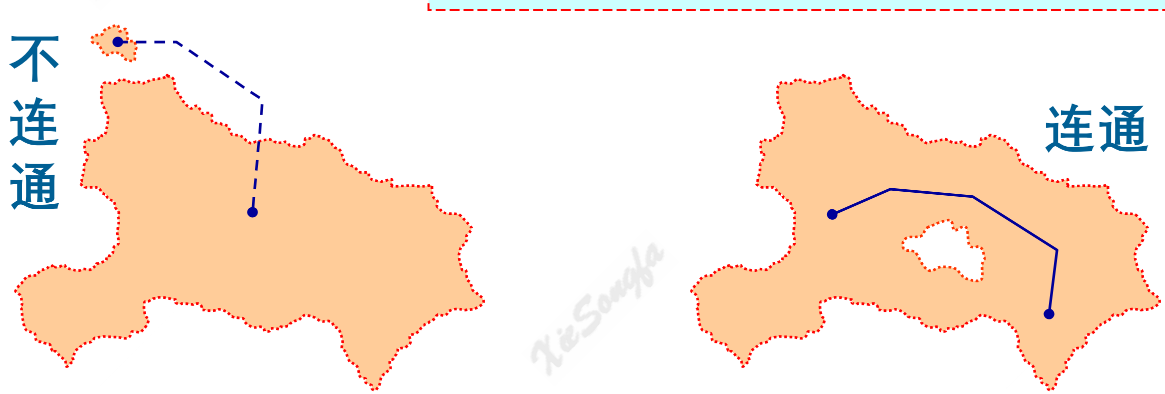
二、区域

1. 区域与闭区域

区域 平面点集 D 称为一个区域，如果它满足下列两个条件：

(1) D 是一个开集；

(2) D 是连通的，即 D 中任何两点都可以用完全属于 D 的一条折线连接起来。



闭区域 区域 D 与它的边界一起构成闭区域或闭域，记作 $\overline{D}$。

二、区域

2. 有界区域与无界区域(顾名思义)

3. 内区域与外区域

定义 一条"简单闭曲线(?)"把整个复平面分成两个区域其中有界的一个称为该简单闭曲线的内部(内区域)另一个称为该简单闭曲线的外部(外区域)如何围出面积最大的区域)。

4. 单连通域与多连通域

定义 设 D 为区域，如果 D 内的任何一条简单闭曲线的内部仍属于 D，则 D 称为单连通域否则称为多连通域。

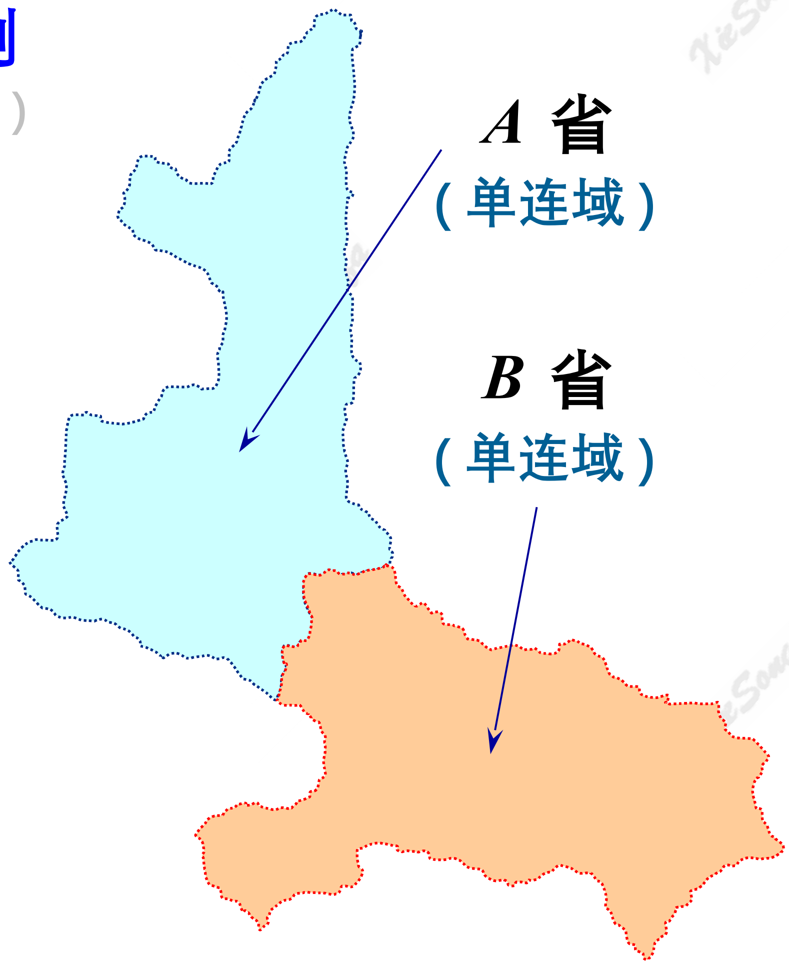
- 多连通域又可具体分为二连域、三连域、……。

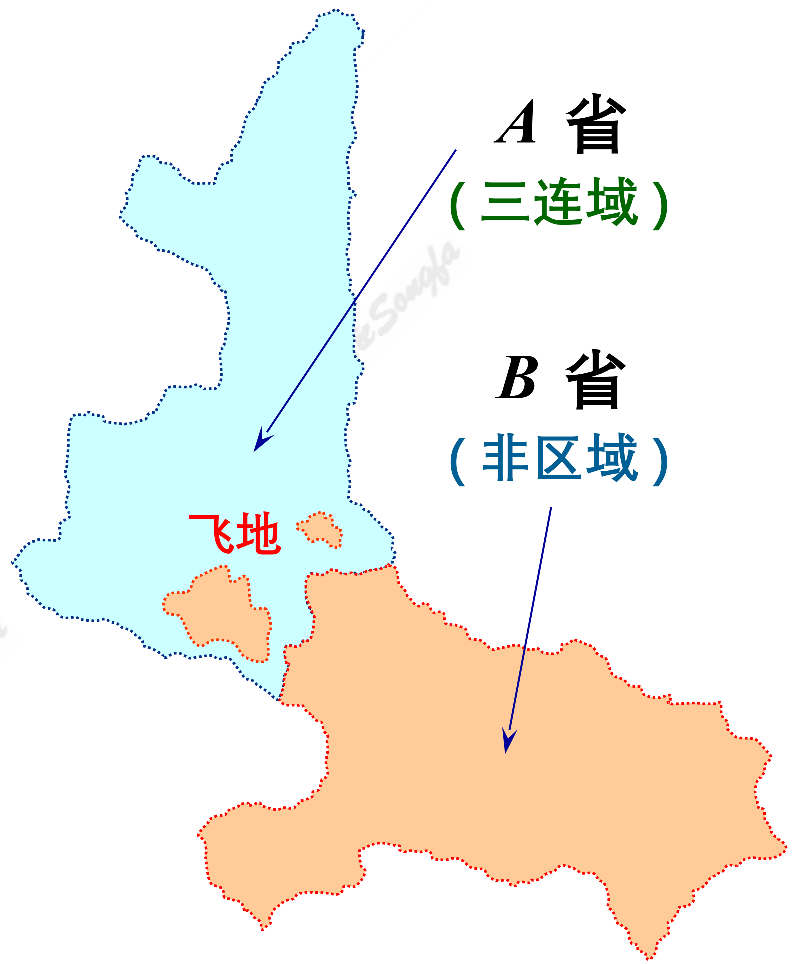
二、区域

4. 单连通域与多连通域

举例

（杜撰）

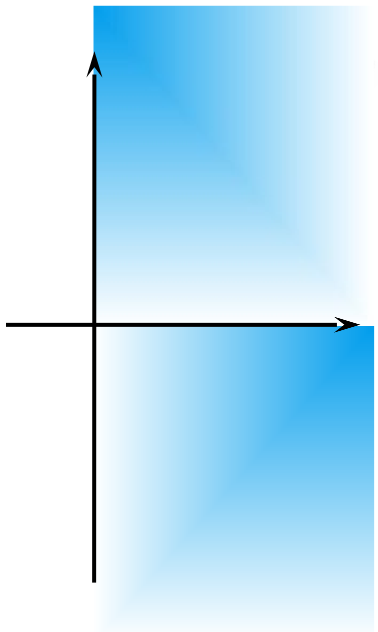




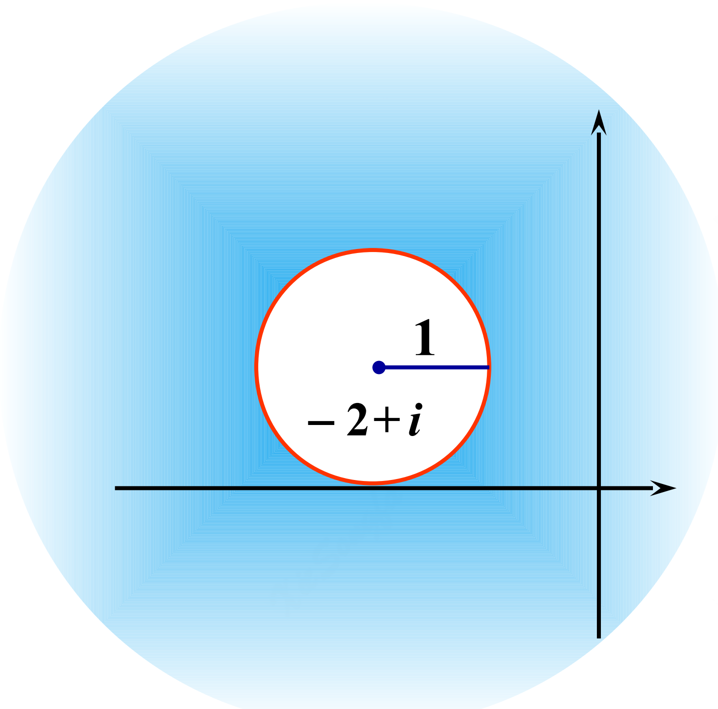
例 (1) $z+\bar{z}>0,\quad \Rightarrow \quad x>0;$

(2) $|z+2-i|\geq 1,\quad \Rightarrow \quad |z-(-2+i)|\geq 1;$

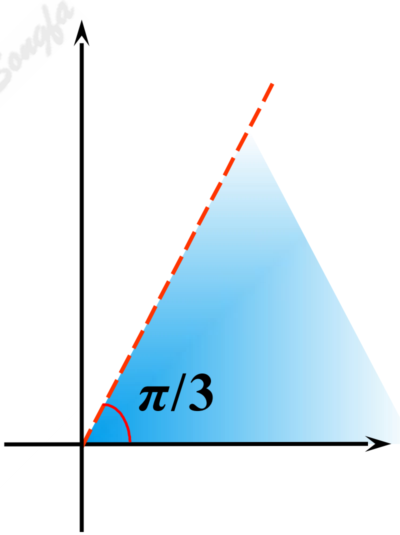
(3) $0<\arg z<\pi/3.$



区域



闭区域



(角形)区域

三、平面曲线

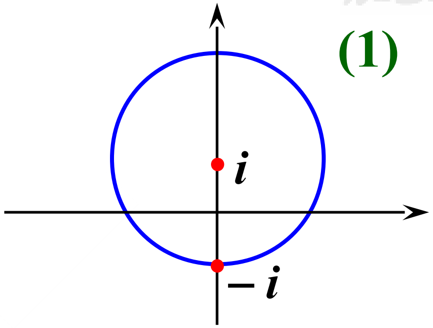
1. 方程式

- 在直角平面上 $f(x,y)=0$. （比较熟悉）
- 在复平面上 $f(z)=0$. （比较陌生）
- 如何相互转换？

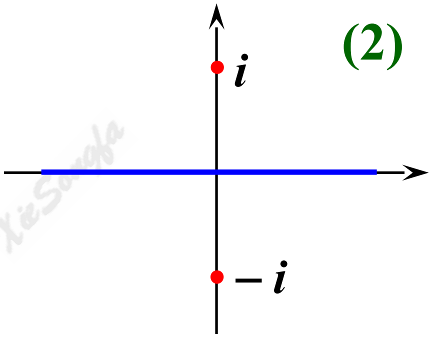
(1) $f(x,y)=0 \xrightarrow[y=(z-\overline{z})/(2i)]{x=(z+\overline{z})/2} \tilde{f}(z)=0$. （建立方程）

(2) $f(z)=0 \xrightarrow{z=x+iy} \tilde{f}(x,y)=0$. （理解方程）

例 (1) $|z-i|=2$, $\Rightarrow x^2+(y-1)^2=4$.



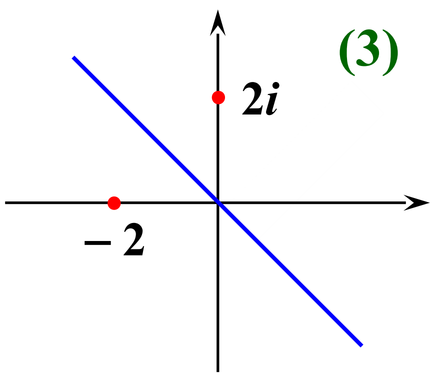
(2) $|z+i|=|z-i|$, $\Rightarrow y=0$.

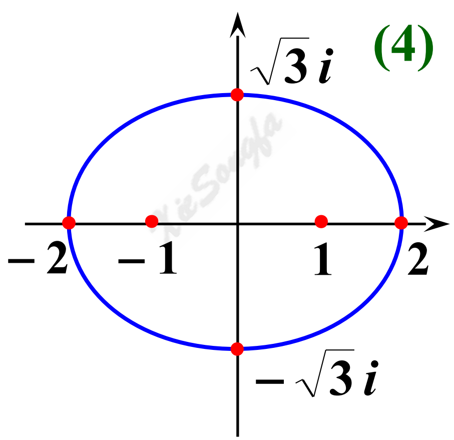


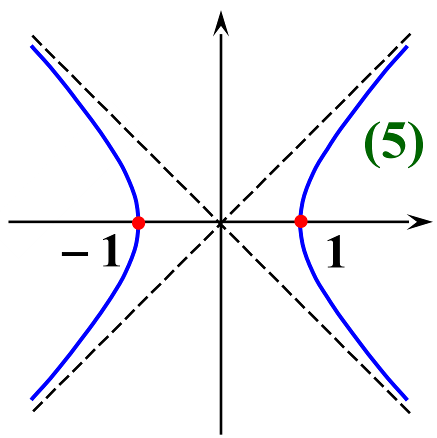
(3) $|z-2i|=|z+2|$, $\Rightarrow y=-x$.

(4) $|z+1|+|z-1|=4$, $\Rightarrow \dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$.

(5) $\mathrm{Re}(z^2)=1$, $\Rightarrow x^2-y^2=1$.







三、平面曲线

2. 参数式

- 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta).$

- 在复平面上 $z = z(t) = x(t) + i\,y(t),\ (\alpha \le t \le \beta).$

例如 考察以原点为圆心、以 R 为半径的圆周的方程。

(1) 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(\theta) = R\cos\theta, \\ y = y(\theta) = R\sin\theta, \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi).$

(2) 在复平面上 $z = z(\theta) = x(\theta) + i\,y(\theta) = R(\cos\theta + i\sin\theta),$

$$\Rightarrow \quad z = R\mathrm{e}^{i\theta}, \quad (0 \le \theta \le 2\pi).$$

三、平面曲线

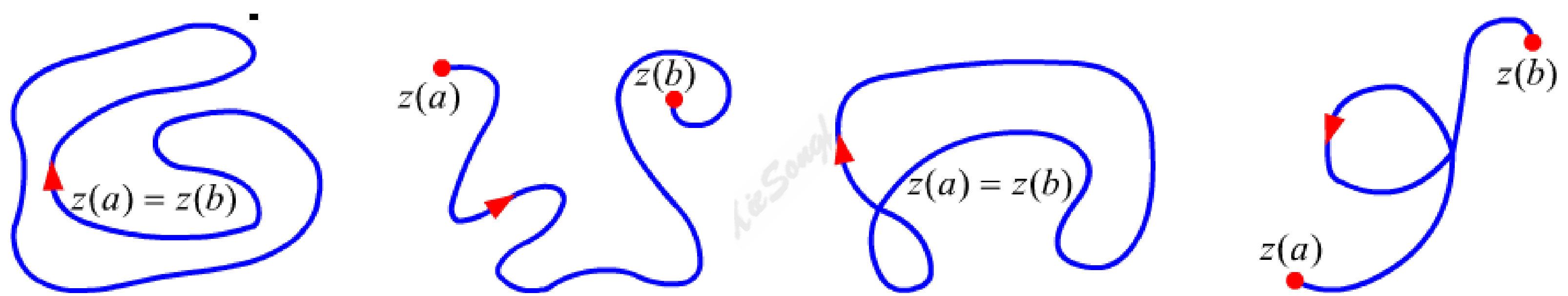
3. 曲线的分类

考虑曲线 $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$.

简单曲线 $\forall t_1 \in (\alpha, \beta)$, $t_2 \in [\alpha, \beta]$, 当 $t_1 \ne t_2$ 时, $z(t_1) \ne z(t_2)$.

简单闭曲线 简单曲线且 $z(\alpha) = z(\beta)$.

光滑曲线 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 连续且 $z'(t) \ne 0$.

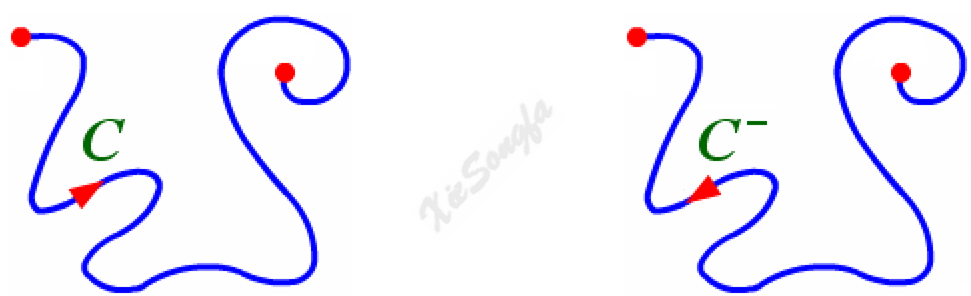


简单、闭　　简单、不闭　　不简单、闭　　不简单、不闭

三、平面曲线

4. 有向曲线

定义 设 C 为平面上一条给定的光滑(或分段光滑)曲线，如果指定 C 的两个可能方向中的一个作为正向，则 C 为带有方向的曲线，称为有向曲线，仍记为 C。相应地，C^- 则代表与 C 的方向相反(即 C 的负方向)的曲线。

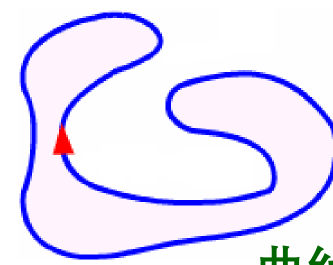


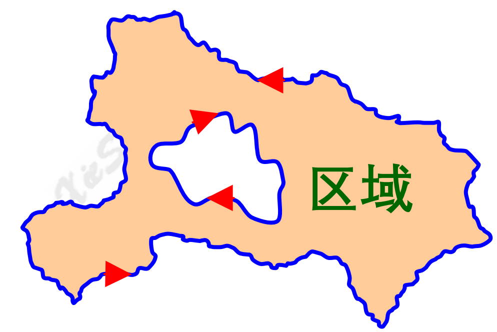
三、平面曲线

4. 有向曲线

- 简单闭曲线的正向一般约定为：

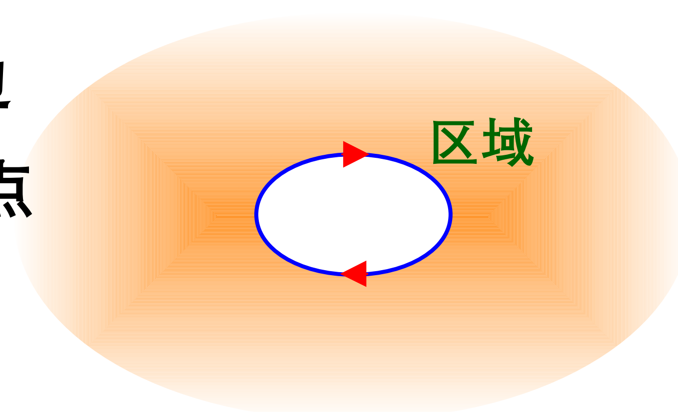
当曲线上的点 P 顺此方向沿曲线前进时，曲线所围成的有界区域始终位于 P 点的左边。





- 区域边界曲线的正向一般约定为：

当边界上的点 P 顺此方向沿边界前进时，所考察的区域始终位于 P 点的左边。注意区域可以是多连域。



轻松一下吧……