



# 欧拉

(1707~1783)

## 简介

欧拉(Leonhard Euler)，瑞士数学家及自然科学家。1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔，1783年9月18日在俄国的彼得堡去逝。欧拉是18世纪数学界最杰出的人物之一，他不但为数学界作出贡献，更把数学推至几乎整个物理领域。欧拉研究问题最鲜明的特点是：把数学研究深入到自然与社会的深层。他不仅是位杰出的数学家，而且也是一位理论联系实际的巨匠。此外，他是数学史上最多产的数学家，写了大量的力学、分析学、几何学、变分法的课本，《无穷小分析引论》，《微分学原理》以及《积分学原理》都成为数学中的经典著作。除了教科书外，欧拉平均以每年800页的速度写出创造性论文。他去世后，人们整理出他的研究成果多达74卷。欧拉最大的功绩是扩展了微积分的领域，为微分几何及分析学的一些重要分支，如无穷级数、微分方程等的产生与发展奠定了基础。

## 生平

欧拉小时候他就特别喜欢数学，不满10岁就开始自学《代数学》。这本书连他的几位老师都没读过，可小欧拉却读得津津有味，遇到不懂的地方，就用笔作个记号，事后再向别人请教。

欧拉13岁时进入巴塞尔大学读书，这在当时是个奇迹，小欧拉是整个瑞士大学校园里年龄最小的学生。在大学里，欧拉得到了当时最有名的数学家微积分权威约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667~1748)的精心指导，并逐渐与其建立了深厚的友谊。约翰·伯努利后来曾这样称赞青出于蓝而胜于蓝的学生：“我介绍高等分析时，它还是个孩子，而你将他带大成人。”

两年后的夏天，15岁的欧拉获得巴塞尔大学的学士学位，次年，16岁的欧拉又获得巴塞尔大学的哲学硕士学位。

父亲保罗·欧拉是位牧师，喜欢数学，原希望小欧拉学神学，同时教他一点数学。由于小欧拉的数学天才和异常勤奋的精神，又受到约翰·伯努利的赏识和特殊指导，特别是当他在19岁时撰写的论文《论桅杆配置的船舶问题》获得巴黎

科学院的奖金后，他的父亲就不再反对他攻读数学了。

1725年，约翰·伯努利的儿子丹尼尔·伯努利赴俄国，并向沙皇喀德林一世推荐了欧拉，这样，在1727年5月17日欧拉来到了彼得堡。1733年，年仅26岁的欧拉担任了彼得堡科学院数学教授。

1735年，欧拉解决了一个天文学的难题(计算彗星轨道)，这个问题经几个著名数学家几个月的努力才得到解决，而欧拉却用自己发明的方法，三天便完成了。然而过度的工作使他得了眼病，并且不幸右眼失明了，这时他才28岁。

1741年，欧拉应普鲁士彼德烈大帝的邀请，到柏林担任科学院物理数学所所长，直到1766年，后来在沙皇喀德林二世的诚恳敦聘下重回彼得堡，不料没有多久，左眼视力衰退，最后完全失明。不幸的事情接踵而来，1771年彼得堡的大火灾殃及欧拉住宅，带病而失明的64岁的欧拉被围困在大火中，虽然他被别人从火海中救了出来，但他的书房和大量研究成果全部化为灰烬了。

沉重的打击，仍然没有使欧拉倒下，他发誓要把损失夺回来。在他完全失明之前，还能朦胧地看见东西，他抓紧这最后的时刻，在一块大黑板上疾书他发现的公式，然后口述其内容，由他的学生特别是大儿子A·欧拉（数学家和物理学家）笔录。欧拉完全失明以后，仍然以惊人的毅力与黑暗搏斗，凭着记忆和心算进行研究，直到逝世，竟达17年之久。

1783年9月18日，在不久前才刚计算完气球上升定律的欧拉，在兴奋中突然停止了呼吸，享年76岁。欧拉生活、工作过的三个国家：瑞士、俄国、德国，都把欧拉作为自己的数学家，为有他而感到骄傲。

## 学术成就

欧拉最先把对数定义为乘方的逆运算，并且最先发现了对数是无穷多值的。欧拉还使三角学成为一门系统的科学，他首先用比值来给出三角函数的定义，而在他以前一直是以线段的长度作为定义的。欧拉对整个三角学作了分析性的研究。在这以前，每个公式仅从图中推出，大部分以叙述表达。欧拉却从最初几个公式解析地推导出了全部三角公式，还获得了许多新的公式。欧拉用 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 表示三角形的三条边，用 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 表示每条边所对应的角，从而使叙述大大地简化。欧拉还给出了著名的欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ，该公式将三角函数与指数函数联结起来。

在代数学方面，他发现了每个实系数多项式必分解为一次或二次因子之积。欧拉还给出了费马小定理的三个证明，并引入了数论中重要的欧拉函数，他研究数论的一系列成果，使得数论成为数学中的一个独立分支。欧拉又用解析方法

讨论数论问题，发现了 $\zeta$ 函数所满足的函数方程，并引入欧拉乘积。欧拉还解决了著名的哥尼斯堡七桥问题，创立了拓扑学。

在常微分方程方面，欧拉完整地解决了 $n$ 阶常系数线性齐次微分方程的问题，对于非齐次微分方程，他提出了一种降低方程阶的解法；在偏微分方程方面，欧拉将二维物体振动的问题，归结出了一、二、三维波动方程的解法。欧拉所写的《方程的积分法研究》更是偏微分方程在纯数学研究中的第一篇论文。

在微分几何方面，欧拉引入了空间曲线的参数方程，给出了空间曲线曲率半径的解析表达方式。在1766年，他出版了《关于曲面上曲线的研究》，这是欧拉对微分几何最重要的贡献，更是微分几何发展史上一个里程碑。他将曲面表为 $z = f(x, y)$ ，并引入一系列标准符号以表示 $z$ 对 $x, y$ 的偏导数，这些符号至今仍通用。此外，在该著作中，他还得到了曲面在任意截面上截线的曲率公式。

欧拉在分析学上的贡献不胜枚举，如他引入了 $\Gamma$ -函数和 $B$ -函数，还证明了椭圆积分的加法定理，以及最早引入二重积分等等。《无穷小分析引论》一书便是他划时代的代表作，当时数学家们称他为“分析学的化身”。

欧拉还把自己多年研究变分问题所取得的成果集中发表在《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》中，从而创立了一个新的分支——变分法。

古典力学的基础是牛顿奠定的，而欧拉则是其主要建筑师。1736年，欧拉出版了《力学，或解析地叙述运动的理论》，在这里他最早明确地提出质点或粒子的概念，最早研究质点沿任意一曲线运动时的速度，并在有关速度与加速度问题上应用矢量的概念。

欧拉创立了分析力学、刚体力学，研究和发展的弹性理论、振动理论以及材料力学。1738年，欧拉的论文《论火》获得法国科学院设立的回答热本质问题征文的奖金，在这篇文章中，欧拉把热本质看成是分子的振动。1739年，欧拉出版了一部音乐理论著作，他把振动理论应用到音乐的理论中去。

同时，欧拉还与达朗贝尔、拉格朗日一起成为天体力学的创立者，发表了《行星和彗星的运动理论》、《月球运动理论》、《日蚀的计算》等著作。欧拉对天文学中的“三体问题”月球运动及摄动问题进行了研究。后来，他解决了牛顿没有解决的月球运动问题，首创了月球绕地球运动地精确理论。

为了更好地进行天文观测，他曾研究了光学、天文望远镜和显微镜。研究了光通过各种介质的现象和有关的分色效应，提出了复杂的物镜原理，发表过有关光学仪器的专著，对望远镜和显微镜的设计计算理论做出过开创性的贡献。在1771年他又发表了总结性著作《屈光学》。

欧拉还研究了流体的运动性质，建立了理想流体运动的基本微分方程，发

表了《流体运动原理》和《流体运动的一般原理》等论文，成为流体力学的创始人。他不但把数学应用于自然科学，而且还把某一学科所得到的成果应用于另一学科。比如，他把自己所建立的理想流体运动的基本方程用于人体血液的流动，从而在生物学上添上了他的贡献，又以流体力学、潮汐理论为基础，丰富和发展了船舶设计制造及航海理论，出版了《航海科学》一书。

欧拉渊博的知识，无穷的创造精力和丰富的著作，都令人惊叹不已！他从19岁开始发表论文，直到76岁，半个多世纪写下了浩如烟海的书籍和论文，可以说欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家。据统计，他那不倦的一生，共写下了886本书籍和论文(全集七十余卷，牛顿全集八卷，高斯全集十二卷)，其中分析、代数、数论占40%，几何占18%，物理和力学占28%，天文学占11%，弹道学、航海学、建筑学等占3%，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年。

如今几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字，从初等几何的欧拉线、多面体的欧拉定理、立体解析几何的欧拉变换公式、四次方程的欧拉解法到数论中的欧拉函数、微分方程的欧拉方程、级数论的欧拉常数、变分学的欧拉方程、复变函数的欧拉公式等等，数也数不清。课本上常见的如  $i$ 、 $e$ 、 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\lg$ 、 $\Delta x$ 、 $\Sigma$ 、 $f(x)$  等等，也都是他创立并推广的；圆周率  $\pi$  虽然不是欧拉首创，但却是经过欧拉的倡导才得以广泛流行。

## 人物影响与历史地位

欧拉本人虽不是教师，但他对教学的影响超过任何人。他身为世界上第一流的学者、教授，肩负着解决高深课题的重担，但却能无视“名流”的非议，热心于数学的普及工作。他编写的《无穷小分析引论》、《微分法》和《积分法》产生了深远的影响。

欧拉在这方面与其它数学家如高斯、牛顿等都不同，后者所写的书一是数量少，二是艰涩难明，别人很难读懂。而欧拉的文字既轻松易懂，堪称这方面的典范。他从来不压缩字句，总是津津有味地把他那丰富的思想和广泛的兴趣写得有声有色。他用德、俄、英文发表过大量的通俗文章，还编写过大量中小学教科书。他编写的初等代数和算术的教科书考虑细致，叙述有条有理。他用许多新的思想的叙述方法，使得这些书既严密又易于理解。

有的学者认为，自从1784年以后，初等微积分和高等微积分教科书基本上都抄袭欧拉的书。19世纪伟大数学家高斯曾说：“研究欧拉的著作永远是了解数学的最好方法。”

欧拉不但重视教育，而且重视人才，欧拉的风格是很高尚的。拉格朗日是稍后于欧拉的大数学家，从19岁起和欧拉通信，讨论“等周问题”的一般解法，从而引起了变分法的诞生。等周问题是欧拉多年来苦心考虑的问题，拉格朗日的解法，博得欧拉的热烈赞扬。1759年10月2日欧拉在回信中盛称拉格朗日的成就，并谦虚地压下自己在这方面较不成熟的作品暂不发表，使年青的拉格朗日的工作得以发表和流传，并赢得巨大的声誉。他晚年的时候，欧洲所有的数学家都把他当作老师，著名数学家拉普拉斯曾说过：“读读欧拉、读读欧拉，它是我们大家的老师！”

历史上，能够跟欧拉相比的人的确不多，有的历史学家把欧拉和阿基米德、牛顿、高斯列为有史以来贡献最大的四位数学家，依据是他们都有一个共同的特点，就是在创建纯粹理论的同时，还应用这些数学工具去解决大量天文、物理和力学等方面的实际问题，他们的工作是跨学科的，他们不断地从实践中吸取丰富的营养，但又不满足于具体问题的解决，而是把宇宙看作是一个有机的整体，力图揭示它的奥秘和内在规律。

## 其 它

欧拉的记忆力是惊人的！他能背诵前一百个质数的前十次幂，能背诵罗马诗人维吉尔(Virgil)的史诗 Aeneid，能背诵全部的数学公式。直至晚年，他还能复述年轻时的笔记的全部内容。

欧拉的心算能力是罕见的，心算并不限于简单的运算，高等数学一样可以用心算去完成。有一个例子足以说明他的本领，欧拉的两个学生把一个复杂的收敛级数的17项加起来，算到第50位数字，两人相差一个单位，欧拉为了确定究竟谁对，用心算进行全部运算，最后把错误找了出来。

欧拉的毅力是极其顽强的，他可以在任何不良的环境中工作，他常常抱着孩子在膝上完成论文，也不顾孩子在旁边喧哗。他那顽强的毅力和孜孜不倦的治学精神，使他在双目失明以后，也没有停止对数学的研究。在失明后的17年间，他还口述了几本书和400篇左右的论文。