

第九章 Laplace 变换

§9.1 Laplace 变换的概念

§9.2 Laplace 变换的性质

§9.3 Laplace 逆变换

§9.4 Laplace 变换的应用

§9.1 Laplace 变换的概念

- 一、Laplace 变换的引入
- 二、Laplace 变换的定义
- 三、存在性定理
- 四、几个常用函数的 Laplace 变换

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“局限性”？

- 当函数 $f(t)$ 满足 Dirichlet 条件，且在 $+\infty$ 上可积时，便可以进行古典意义下的 Fourier 变换。
- 由于绝对可积是一个相当强的条件，使得一些简单函数（如常数函数、线性函数、正弦函数与余弦函数等等）的 Fourier 变换也受到限制。

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“局限性”？

- 广义 Fourier 变换的引入，扩大了古典 Fourier 变换的应用范围，使得“缓增”函数也能进行 Fourier 变换，而将周期函数的 Fourier 级数与 Fourier 变换统一起来。
- 广义 Fourier 变换对以指数级增长的函数如 e^{at} ($a > 0$) 等仍然无能为力；而且在变换式中出现冲激函数，也使人感到不太满意。

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“局限性”？

- 在工程实际问题中，许多以时间 t 为自变量的函数（比如起始时刻为零的因果信号等）在 $t < 0$ 时为零，而有些甚至在 $t < 0$ 时根本没有意义。
- 因此在对这些函数进行 Fourier 变换时，没有必要（或者不可能）在整个实轴上进行。

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换要进行改造？

基本想法

(1) 将函数 $f(t)$ 乘以一个 **单位阶跃函数** $u(t)$,
使得函数在 $t < 0$ 的部分补零 (或者充零) ;

(2) 将函数再乘上一个 **衰减指数函数** $e^{-\beta t} (\beta > 0)$,
使得函数在 $t > 0$ 的部分尽快地衰减下来。

● 这样, 就有希望使得函数 $f(t) \cdot u(t) \cdot e^{-\beta t}$ 满足 Fourier 变换的条件, 从而对它进行 Fourier 变换。

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换要进行改造？

实施结果

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\beta+j\omega)t}dt\end{aligned}$$

将上式中的 $\beta + j\omega$ 记为就得到了一种新的变换：

$$, \quad \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \xrightarrow{\text{记为}} F(s).$$

注意 上述广义积分存在的关键：

变量 s 的实部 $\operatorname{Re}s = \beta$ 足够大。

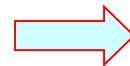
二、Laplace 变换的定义

定义 设函数 $f(t)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的实值函数对于复参数 $s = \beta + j\omega$, 积分 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ 在复平面 s 的某一区域内收敛则称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换 或 像函数, 记为 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, 即

P214
定义
9.1

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

相应地, 称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换 或 像原函数 记为 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.



Laplace 简介

注 $f(t)$ 的 Laplace 变换就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换。

§9.1 Laplace 变换的概念

例 $\mathcal{L}[1] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}, \quad (\operatorname{Re} s > 0)$

P214

例 9.1 $\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad (\operatorname{Re} s > 0)$

$\mathcal{L}[\operatorname{sgn} t] = \int_0^{+\infty} \operatorname{sgn} t e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad (\operatorname{Re} s > 0)$

P215 例 9.2 $\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}, \quad (\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a)$

P217 例 9.3

要点 进行积分时，确定 s 的取值范围，保证积分存在。

● 从上述例子可以看出

- (1) 即使函数以指数级增长，其 Laplace 变换仍然存在；
- (2) 即使函数不同，但其 Laplace 变换的结果可能相同。

问题 (1) 到底哪些函数存在 Laplace 变换呢？

若存在，收敛域（或者存在域）如何？有何特点？

(2) Laplace 逆变换如何做？是否惟一？

三、存在性定理

定理 设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时, 满足

P216
定理
9.1

：

(1) 在任何有限区间上分段连续；

(2) 具有有限的增长性，

即存在常数 c 及 $M > 0$, 使得 $|f(t)| \leq M e^{ct}$

(其中, c 称为函数 $f(t)$ 的“增长”指

数)

则象函数 $F(s)$ 在半平面 $s > c$ 上一定存在且解析。

证明 (略)

● 两点说明

(1) 像函数 $F(s)$ 的存在域一般是一个右半平面 $\text{Re } s > c$
 '即只要复数 s 的实部足够大就可以了。

● 因此在进行 Laplace 变换时，常常略去存在域，
 只有在非常必要时才特别注明。

(2) 在 Laplace 变换中的函数一般均约定在 $t < 0$ 时为零，
 即函数 $f(t)$ 等价于函数 $t)u(t)$ 。

● 比如 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] = 1$ 。

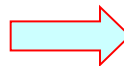
四、几个常用函数的 Laplace 变换

$$(1) \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s};$$

$$(2) \mathcal{L}[\delta(t)] = 1;$$

解 (2) $\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt$

$$= e^{-st} \Big|_{t=0} = 1.$$



含冲激函数的
拉氏变换问题

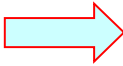
四、几个常用函数的 Laplace 变换

$$(1) \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s};$$

$$(2) \mathcal{L}[\delta(t)] = 1;$$

$$(3) \mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}} = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}};$$

解 (3) $\mathcal{L}[t^m] = \int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt = \frac{1}{-s} \int_0^{+\infty} t^m d e^{-st}$


(Γ 函数简介)

$$= \frac{1}{-s} t^m e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + \frac{m}{s} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-st} dt = \frac{m}{s} \mathcal{L}[t^{m-1}]$$

$$= \frac{m(m-1)}{s^2} \mathcal{L}[t^{m-2}] = \cdots = \frac{m!}{s^m} \mathcal{L}[1] = \frac{m!}{s^{m+1}}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

$$(1) \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s};$$

$$(4) \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a};$$

$$(2) \mathcal{L}[\delta(t)] = 1;$$

$$(5) \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2};$$

$$(3) \mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}} = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}};$$

解 (5) $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} e^{jat} e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} e^{-jat} e^{-st} dt \right)$

$$= \frac{1}{2} (\mathcal{L}[e^{jat}] + \mathcal{L}[e^{-jat}])$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-ja} + \frac{1}{s+ja} \right) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

$$(1) \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s};$$

$$(4) \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a};$$

$$(2) \mathcal{L}[\delta(t)] = 1;$$

$$(5) \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2};$$

$$(3) \mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}} = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}};$$

$$(6) \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

解 (6) $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{2j} \left(\int_0^{+\infty} e^{jat} e^{-st} dt - \int_0^{+\infty} e^{-jat} e^{-st} dt \right)$

$$= \frac{1}{2j} (\mathcal{L}[e^{jat}] - \mathcal{L}[e^{-jat}])$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - ja} - \frac{1}{s + ja} \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

$$(1) \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s};$$

$$(4) \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a};$$

$$(2) \mathcal{L}[\delta(t)] = 1;$$

$$(5) \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2};$$

$$(3) \mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}} = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}};$$

$$(6) \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

特点 变换的结果均为 分式函数。



轻松一下

.....

附：人物介绍——拉普拉斯



拉普拉斯

Laplace , Pierre-Simon

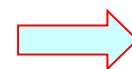
(1749 ~ 1827)

法国数学家、天文学家

- 天体力学的主要奠基人，天体演化学的创立者之一。
- 分析概率论的创始人，应用数学的先驱。
- 因研究太阳系稳定性的动力学问题被誉为法国的牛顿和天体力学之父。

附：人物介绍——拉普拉斯

- 1749 年 3 月 23 日，生于法国卡尔瓦多斯的博蒙昂诺日
- 1795 年任巴黎综合工科学学校教授。
- 1816 年被选为法兰西学院院士，次年任该院院长。
- 1827 年 3 月 5 日，卒于巴黎。
- 曾任拿破仑的老师，并在拿破仑政府中担任过内政部长
- 发表的天文学、数学和物理学的论文有 270 多篇。
- 专著合计有 4000 多页。其中最有代表性的专著有：
《天体力学》《宇宙体系论》和《概率分析理论》



(返回)

附：Γ-函数 (gamma 函数) 简介

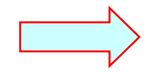
定义 Γ-函数定义为 $\Gamma(m) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{m-1} dt$, $0 < m < +\infty$.

性质 $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(m+1) = m \Gamma(m)$.

证明 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1$;

$$\begin{aligned}
 \Gamma(m+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^m dt = -\int_0^{+\infty} t^m de^{-t} \\
 &= -t^m e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt^m \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-t} m t^{m-1} dt = m \Gamma(m).
 \end{aligned}$$

● 特别地，当 m 为正整数时， $\Gamma(n+1) = n!$.



(返回)

附：关于含冲激函数的 Laplace 变换问题

- 当函数 $f(t)$ 在 0 附近有界($f(0)$), 的取值将不会影响其 Laplace 变换的结果。
- 当函数 $f(t)$ 在 0 处含冲激函数时, 有必要考察一下其 Laplace 变换中积分下限的设定对积分下限分别取 0^+ 和 0^- , 可得到下面两种形式的 Laplace 变换:

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \int_{0^+}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt;$$

$$\mathcal{L}_-[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

- 本教材采用了后一种形式作为 函数的 Laplace 变换。

