Matlab 在复变函数中应用

数学实验（一）

华中科技大学《复变函数与积分变换》课程组

二〇〇九年八月

MATLAB 在复变函数中的应用

复变函数的运算是实变函数运算的一种延伸，但由于其自身的一些特殊的性质而显得不同，特别是当它引进了“留数”的概念，且在引入了 Taylor 级数展开 Laplace 变换和 Fourier 变换之后而使其显得更为重要了。

使用 MATLAB 来进行复变函数的各种运算；介绍留数的概念及 MAT–LAB 的实现；介绍在复变函数中有重要应用的 Taylor 展开（Laurent 展开 Laplace 变换和 Fourier 变换）。

1　复数和复矩阵的生成

在 MATLAB 中，复数单位为 $i = j = sqrt(-1)$，其值在工作空间中都显示为 $0 + 1.0000i$。

1.1　复数的生成

复数可由 $z = a + b * i$ 语句生成，也可简写成 $z = a + bi$。

另一种生成复数的语句是 $z = r * \exp(i * theta)$，也可简写成 $z = r * \exp(theta\ i)$，其中 $theta$ 为复数辐角的弧度值，r 为复数的模。

1.2　创建复矩阵

创建复矩阵的方法有两种。

（1）如同一般的矩阵一样以前面介绍的几种方式输入矩阵

例如：$A = [3 + 5 * i, -2 + 3i, 9 * \exp(i * 6), 23 * \exp(33i)]$

（2）可将实、虚矩阵分开创建，再写成和的形式

例如：

$re = rand(3, 2)$；

$im = rand(3, 2)$；

$com = re + i * im$

$$com =$$
$$\begin{bmatrix} 0.6602+0.3093i & 0.3412+0.3704i \\ 0.3420+0.8385i & 0.5341+0.7027i \\ 0.2897+0.5681i & 0.7271+0.5466i \end{bmatrix}$$

注意 实、虚矩阵应大小相同。

2 复数的运算

1．复数的实部和虚部

复数的实部和虚部的提取可由函数 real 和 imag 实现。

调用形式

$real(x)$ 返回复数 x 的实部

$imag(x)$ 返回复数 x 的虚部

2．共轭复数

复数的共轭可由函数 conj 实现。

调用形式

$conj(x)$ 返回复数 x 的共轭复数

3．复数的模和辐角

复数的模和辐角的求解由功能函数 *abs* 和 *angle* 实现。

调用形式

$abs(x)$ 复数 x 的模

$angle(x)$　　复数 x 的辐角

例：求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角

（1）$\dfrac{1}{3+2i}$　　（2）$\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$　　（3）$\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$　　（4）$i^8-4i^{21}+i$

由 MATLAB 输入如下:

$a=[1/(3+2i), 1/i-3i/(1-i), (3=4i)*(2-5i)/2i, i\text{^}8-4*i\text{^}21+i]$

$a=$

$0.2308-0.1538i$　　$1.5000-2.5000i$　　$-3.5000-13.0000i$　　$1.0000-3.0000i$

$real(a)$　　　　%实部

$ans=$

0.2308　　1.5000　　–3.5000　　1.0000

$imag(a)$　　　　%虚部

$ans=$

–0.1538 –2.5000 –13.0000　　–3.0000

$conj(a)$　　　　%共轭复数

$ans=$

0.2308+0.1538i　　1.5000+2.5000i　–3.5000+13.0000i　　1.0000+3.0000i

$abs(a)$　　　　%模

$ans=$

0.2774　　2.9155　　13.4629　　3.1623

$angle(a)$ %辐角

$ans =$

$-0.5880 \; -1.0304 \; -1.8228 \; -1.2490$

4．复数的乘除法

复数的乘除法运算由“/”和“*”实现。

例 复数的乘除法演示。

$x = 4 * \exp(pi/3i)$

$x =$

$2.0000 - 3.4641i$

$y = 3 * \exp(pi/5\, i)$

$y =$

$2.4271 - 1.7634i$

$y1 = 3 * \exp(pi/5 * i)$

$y1 =$

$2.4271 + 1.7634i$

x/y

$ans =$

$1.2181 - 0.5423\, i$

$x/y1$

$ans =$

$0.1394 - 1.3260I$

由此例可见，$(\cdots)/5i$ 相当于 $(\cdots)/(5*i)$，和 $(\cdots)/5*i$ 不相等。

5．复数的平方根

复灵敏的平方根运算由函数 $sprt$ 实现。

调用形式

$sprt(x)$　　返回复数 x 的平方根值

6．复数的幂运算

复数的幂运算的形式为 x^n，结果返回复数 x 的 n 次幂。

例 求下列各式的值

(-1)^$(1/6)$

$ans =$

0.8660+0.5000 i

7．复数的指数和对数运算

复数的指数和对数运算分别由函数 exp 和 log 实现。

调用形式

$\exp(x)$ 返回复数 x 的以 e 为底的指数值

$\log(x)$ 返回复数 x 的以 e 为底的对数值

例 求下列式的值（参见参考资料【4】P.68.2–15）。

$\log(-i)$

$ans =$

$0-1.5708i$

$\log(-3+4i)$

$ans =$

$1.6094+2.2143i$

8．复数的三角函数运算

复数的三角函数运算函数参见下面的复数三角函数

复数三角函数表

函数名	函 数 功 能	函数名	函 数 功 能
$\sin(x)$	返回复数 x 的正弦函数值	$a\sin(x)$	返回复数 x 的反正弦值
$\cos(x)$	返回复数 x 的余弦函数值	$a\cos(x)$	返回复数 x 的反余弦值
$\tan(x)$	返回复数 x 的正切函数值	$a\tan(x)$	返回复数 x 的反正切值
$\cot(x)$	返回复数 x 的余切函数值	$a\cot(x)$	返回复数 x 的反余切值
$\sec(x)$	返回复数 x 的正割函数值	$a\sec(x)$	返回复数 x 的反正割值
$\csc(x)$	返回复数 x 的余割函数值	$a\csc(x)$	返回复数 x 的反余割值
$\sinh(x)$	返回复数 x 的双曲正弦值	$\coth(x)$	返回复数 x 的双曲余切值
$\cosh(x)$	返回复数 x 的双曲余弦值	$\sec h(x)$	返回复数 x 的双曲正割值
$\tanh(x)$	返回复数 x 的双曲正切值	$\csc h(x)$	返回复数 x 的双曲余割值

9． 复数方程求根

复数方程求根或实方程的复数根求解也由函数 solve 实现。见下面的例子.

例 求方程 $x^3+8=0$ 所有的根（参见参考资料【4】P.32.1–16）。

$solve('x\^3+8=0')$

$ans=$

$[\quad -2]$

$[1-i*3\^(1/2)]$

$[1+i*3\^(1/2)]$

3 留数

留数定义:

设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，C 是 a 的充分小看邻域内一条把 a 点包含在其内部的闭路，积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ 称为 $f(z)$ 在 a 点的留数或残数，记作 $\mathrm{Re}\,s[f(z),a]$。在 MATLAB 中，可由函数 residue 实现。

residue 留数函数（部分分式展开）

$[R,P,K]=residue(B,A)$ 函数返回留数，极点和 2 个多项式比值 $B(s)/A(s)$ 的部分分式展开的直接项。

$$\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{R(1)}{s-P(1)}+\frac{R(2)}{s-P(2)}+\cdots+\frac{R(n)}{s-P(n)}+K(s)$$

如果没有重根，则向量 B 和 A 为分子、分母以 s 降幂排列的多项式系数，留数返回为向量 R、极点在向量 P 的位置，直接项返回到向量 K。极点的数目 $n=length(A)-1=length(R)=length(P)$。如果 $length(B)<length(A)$，则直接项系数为空；否则 $length(K)=length(B)-length(A)+1$。如果存在 M 重极点即有 $P(j)=\cdots=P(j+m-1)$ 则展开项包括以下形式

$$\frac{R(j)}{s-P(j)}+\frac{R(j+1)}{(s-P(j))^2}+\cdots+\frac{R(j+m-1)}{(s-P(j))^m}$$

$[B, A]=residue(R, P, K)$ 有 3 个输入变量和 2 个输出变量，函数转换部分因式展开还为系数为 B 和 A 的多项式比的形式。

注意：数值上讲，分式多项式的部分因式展开实际上代表了一类病态问题。如果分母多项式 $A(S)$ 是一个近似有重根的多项式，则在数值上的一点微小变化，包括舍入误差都可能造成极点和留数结果上的巨大变化。因此使用状态空间和零点一极点表述的方法是可取的。

例 求如下函数的奇点处的留数。

$$\frac{z+1}{z^2-2z}$$

在 MATLAB 实现如下

$[r,\ p,k]=residue([1,1],[1,-2,0])$

$r=$

1.5000

–0.5000

$p=$

2

0

$k=$

[ ]

所以可得 $\mathrm{Re}\,s[f(z),2]=1.5;\ \ \mathrm{Re}\,s[f(z),0]=-0.5$ 。

例 计算下面的积分

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$$

其中 C 为正向圆周 $|z|=2$ 。（参见参考资料【4】P.158.例 2）

解：先求被积函数的留数

$[r,\ p,k]=residue([1,0],[1,0,0,0,-1])$

$r=$

0.2500

0.2500

–0.2500–0.0000 i

–0.250+0.0000 i

$p =$

–1.0000

1.0000

0.0000+1.0000 i

0.0000–1.0000 i

$k = 0$

[ ]

可 见 在 圆 周 $|z|=2$ 内 有 四 个 极 点 ， 所 以 积 分 值 等 于

$2*pi*(0.25+0.25-0.25-0.25)=0$ 。

4 Taylor 级数展开

Taylor 级数开展在复变函数中有很重要的地位，如分析复变函数的解析性等。

函数 $f(x)$ 在 $x = x0$ 点的 Taylor 级数开展为

$$f(x) = x0 + f(x0)(x-x0) + f'(x0)(x-x0)^{\wedge 2}/2!+f''(x0)(x-x0)^{\wedge 3}/3!+\cdots$$

在 MATLAB 中可由函数 taylor 来实现。

taylor 泰勒级数展开

$taylor(f)$ 返回 f 函数的五次幂多项式近似。此功能函数可有 3 个附加参数

$taylor(f, n)$　　返回$n-1$次幂多项式。

$taylor(f, a)$　　返回a点附近的幂多项式近似。

$taylor(r, x)$　　使用独立变量代替函数$findsym(f)$。

例 求下列函数在指定点的泰勒开展式（参见参考资料【4】P.143.12）。

（1）$1/z^2z,\ 0=-1$　　（2）$tgz,\ z0=pi/4$;

MATLAB 实现为:

$taylor(1/x\text{^}2, -1)$

$3+2*x+3*(x+1)\text{^}2+4*(x+1)\text{^}3+5*(x+1)\text{^}4+6*(x+1)\text{^}5$

$taylor(\tan(x), pi/4)$

$ans =$

$1+2*x-1/2*pi+2*(x-1/4*pi)\text{^}2+8/3*(x-1/4*pi)\text{^}3+10/3*$

$(x-1/4*pi)\text{^}4+64/15*(x-1/4*pi)\text{^}5$

例 再看下面的展开式

$taylor(\sin(x)/x, 10)$

$ans =$

$1-1/6*x\text{^}2+1/120*x\text{^}4-1/5040*x\text{^}6+1/362880*x\text{^}8$

展开式说明$x=0$是此函数的伪奇点!

这里的$taylor$展开式运算实质上是符号运算，因此在 MATLAB 中执行此命令前应先定义符号变量$syms\ x, z\cdots$，否则 MATLAB 将给出出错信息!

5　Laplace 变换及其逆变换

1．Laplace 变换

$L = laplace(F)$　　返回以默认独立变量T对符号函数F的 Laplace 变换。函数返回默认为s的函数。如果$F = F(s)$，则 Laplace 函数返回t的函数$L = L(t)$。其中定义L为对t的积分$L(s) = \mathrm{int}(F(t) * \exp(-s*t), 0, \mathrm{inf})$。

$L = laplace(F, t)$　　以t代替s的 Laplace 变换。$laplace(F, t)$等价于$L(t) = \mathrm{int}(F(x) * \exp(-t*x), 0, inf)$。

$L = laplace(F, w, z)$　以z代替s的 Laplace 变换（相对于w的积分）。$laplace(F, w, z)$等价于$L(z) = \mathrm{int}(F(w) * \exp(-z*w), 0, \mathrm{inf})$。

例如:

$syms\ \ a\ \ s\ \ t\ \ w\ \ x$

$laplace(x\text{^}5)$

$ans =$

$120/s\^6$

$paplace(\exp(a*s))$

$ans=$

$1/(t-a)$

$laplace(\sin(w*x),t)$

$ans=$

$w/(t\^2+w\^2)$

$laplace(cons(x*w),w,t)$

$ans=$

$t/(t\^2+x\^2)$

$laplace(x\^sym(3/2),t)$

$ans=$

$3/4*pi\^(1/2)/t\^(5/2)$

$laplace(diff(sym('F(x)')))$

$ans=$

$laplace(F(x),x,s)*s-F(0)$

2．Laplace 逆变换

$F=ilaplace(L)$　　返回以默认独立变量 s 的数量符号 L 的 Laplace 变换，默认返回 t 的函数。如果 $L=L(t)$，则 ilaplace 返回 x 的函数

$F = F(x)$。 $F(x)$定义为对 s 的积分 $F(t) = \mathrm{int}(L(s) * \exp(s * t), s, c - i * \inf, c + i * \inf)$；其中 c 为选定实数，使得$L(s)$的所有奇点都在直线$s = c$的左侧。

$F = ilaplace(L, y)$ 以 y 代替默认的 t 的函数，且有 $ilaplace(L, y)$ 等价于 $F(y) = \mathrm{int}(L(y) * \exp(s * y), s, c - i * \inf, c + i * \inf)$。这里 y 是个数量符号。

$F = ilaplace(L, y, x)$ 以 x 代替 t 的函数， $ilaplace(L, y, x)$ 等价于 $F(y) = \mathrm{int}(L(y) * \exp(x * y), y, c - i * \inf, c + i * \inf)$，对 y 取积分。

例如:

$syms\ s\ t\ w\ x\ y$

$ilaplace(1/(s-1))$

$ans =$

$\exp(t)$

$ilaplace(1/(t\text{^}2+1))$

$ans =$

$\sin(x)$

ilaplace $(\hat{t}(-sym(5/2)),x)$

$ans =$

$4/3/pi\wedge(1/2)*x\wedge(3/2)$

ilaplace$(y/(y\wedge 2+w\wedge 2),y,x)$

$ans =$

cos$(w*x)$

ilaplace($sym('laplace(F(x),x,s)'),s,x,)$

$ans =$

F(x)

6 Four ier 变换及其逆变换

1. Fourier 积分变换

F=fourier(f) 返回以默认独立变量 x 对符号函数 f 的 Fourier 变换，默认返回 w 的函数。如果 $f=f(w)$，则 fourier 函数返回 t 的函数 F=F(t)。定义 F(w)int(f(x)*exp($-i*w*x),x,-\inf,\inf),$ 为对 x 的积分。

$F=$ fourier(f,v) 以 v 代替默认值 w 的 Fourier 变换，且有 fourier(f,v) 等价于 F(

$v) = \text{int}(f(x) * \exp(-i * v * x), x, -\inf, \inf)$。

fourier(f,u,v)　　以 v 代替 x 且对 u 积分，且有 fourier(f,u,v) $<=>$ F（v）= int

$(f(u) * \exp(-i * v * u), u, -\inf, \inf)$。

例如:

$syms \;\; t \;\; v \;\; w \;\; x$

fourier（1/t）

$ans =$

$i * pi * (Heaviside(-w) - Heaviside(w))$

$fourier(\exp(-\hat{x}2), x, t)$

$ans =$

$p\hat{i}(1/2) * \exp(-1/4 * \hat{t}2)$

fourier$(\exp(-t) * sym('Heaviside(t)'), v)$

$ans =$

$1/(1 + i * v)$

fourier$(diff(sym('F(x)')), x, w)$

$ans =$

$i * w * fourier(F(x), x, w)$

2·Fourier 逆变换

$f = ifourier(F)$　　返回以默认独立变量 w 对符号函数 F 的 Fourier 逆变换，默认返回 x 的函数 Fourier 逆变换应用于返回 x 的函数，即由 F=F(w) 推出 $f = f(x)$。如果 F=F(x)，则 ifourier 函数返回 t 的函数 $f = f(t)$。定义 $f(x) = 1/(2*pi)*\text{int}(F(w)*\exp(i*w*x), w, -\inf, \inf)$，对 w 的积分。

$f = ifourier(F, u)$　　以 u 代替 x 的函数，且有 ifourier(F, u) 等价于 $f(u) = 1/(2*pi)*\text{int}(F(w)*\exp(i*w*u, w, -\inf, \inf)$ 对 w 积分。

$f = ifourier(F, v, u)$　　以 v 代替 w 的 Fourier 逆变换，且有 $ifourier(F, v, u)$ $<=>$ $f(u) = 1/(2*pi)*\text{int}(F(v)*\exp(i*v*u, v-\inf, \inf)$，积分针对 v。

例如:

$syms \quad t \;\; u \;\; w \;\; x$

$ifourier(w*\exp(-3*w)*sym('Heaviside(w)')$

$ans =$

$1/2/pi/(3-i*t)\hat{}2$

$ifourier(1/(1+\hat{w}2), u$

$ans =$

$1/2*\exp(-u)*Heaviside(u) = 1/2*\exp(u)*Heaviside-u)$

```
ifourier(v/(1+w^2),u)

ans

i/(1+w^2)*Dirac(1,u)

ifourier(sym(′ fourier(f(x),x,w) ′ ),w,x)

ans=
    f(x)
```

Matlab 中复变函数命令集

定义符号变量　Syms

虚单位　z=Sqrt(-1)
复数表示　z=x+y*i
指数表示　z=r*exp(i*a)
求实部　Real(z)
求虚部　Imag(z)
求共轭　Conj(z)
求模　Abs(z)
求幅角　Angle(z)

三角函数　z=sin(z)
　　z=cos(z)
指数函数　z=exp(z)
对数函数　z=log(z)

幂函数 z=z^a

解方程 expr='方程式'；

Solve(expr)

泰劳展开 Taylor(e,z)

求留数 [r,p,k]=residue(p,q)

傅立叶变换 Fourier(e,z,w)

逆傅立叶变换 Ifourier(e,w,z)

拉普拉斯变换 Laplace(e,w,t)

逆拉普拉斯变换 Ilaplace(e,t,x)