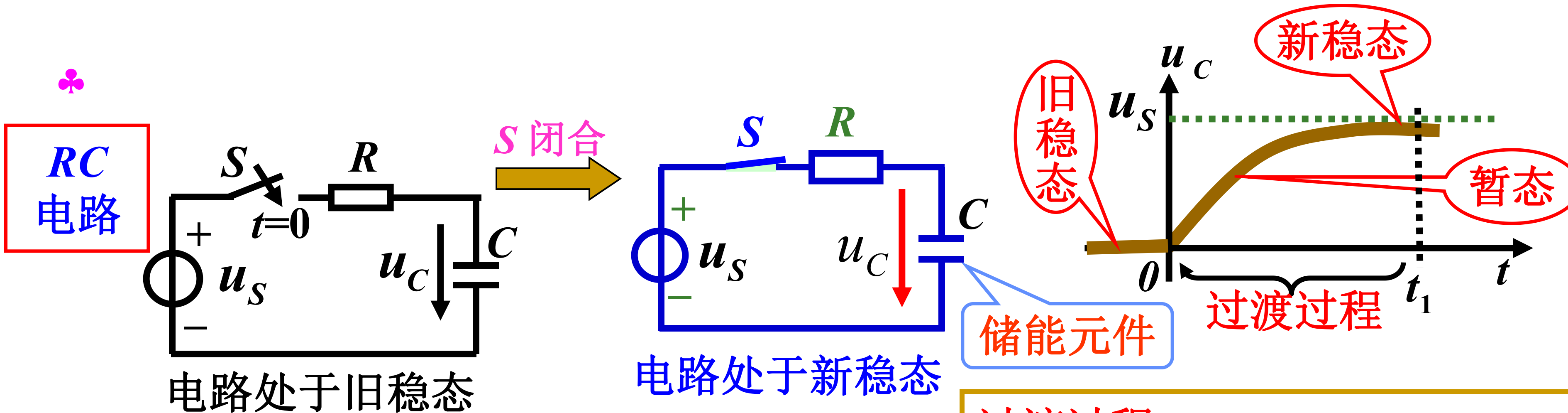
第七章 电容 电感及动态电路

- 电阻：消耗电能的一种理想化元件
- 电容：储存电场能量的一种理想化元件
- 电感：储存磁场能量的一种理想化元件

什么是暂态过程？

在含有电感、电容元件的电路中，当电路的结构或元件参数发生变化时，电路就会从一种稳定状态（电压、电流已达到稳定值）转变到另一种稳定状态，这种转变需要经历一个时间过程，我们将这个时间过程称之为过渡过程，也称暂态过程。

“稳态”与 “暂态”的概念:



过渡过程：旧稳态 ⟹ 稳态

♣ 产生过渡过程的电路及原因?

电容为储能元件，它储存电场能量，其大小为： $W_C = \int_0^t uidt = \frac{1}{2}cu^2$

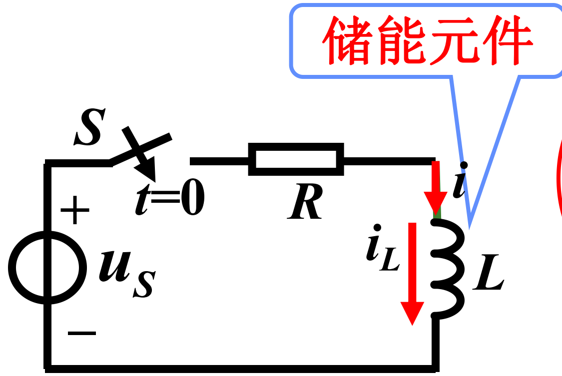
因为能量的存储和释放需要一个过程，所以RC电路存在过渡过程。

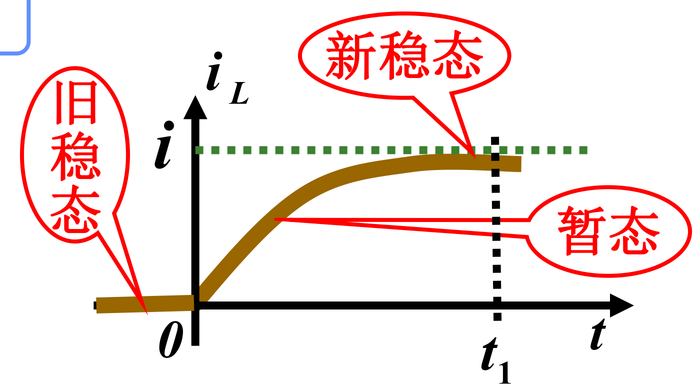
过渡过程的发生，引起电路的变化统称为“换路”。

*LR*电路

电感为储能元件，它储存的能量为磁场能量，其大小为：

$$W_L = \int_0^t ui\,dt = \frac{1}{2}Li^2$$

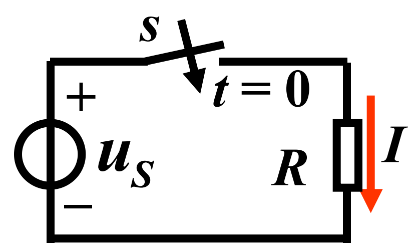


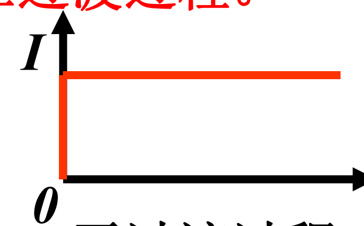


因为能量的存储和释放需要一个过程，所以*RL*电路也存在过渡过程。

纯电阻电路

电阻是耗能元件，其上电流随电压比例变化，不存在过渡过程。





无过渡过程

研究过渡过程的意义：过渡过程是一种自然现象，直流电路、交流电路都存在过渡过程。

对它的研究很重要。过渡过程的存在有利有弊。有利的方面，如电子技术中常用它来产生各种波形；不利的方面，如在暂态过程发生的瞬间，可能出现过压或过流，致使设备损坏，必须采取防范措施。

在直流电路中(稳态时)，电容相当于断路；(隔直流作用)
电感相当于短路。(通直流作用)

产生暂态过程的原因？

内因：储能元件的存在

外因：<u>换路</u>——电路状态的改变

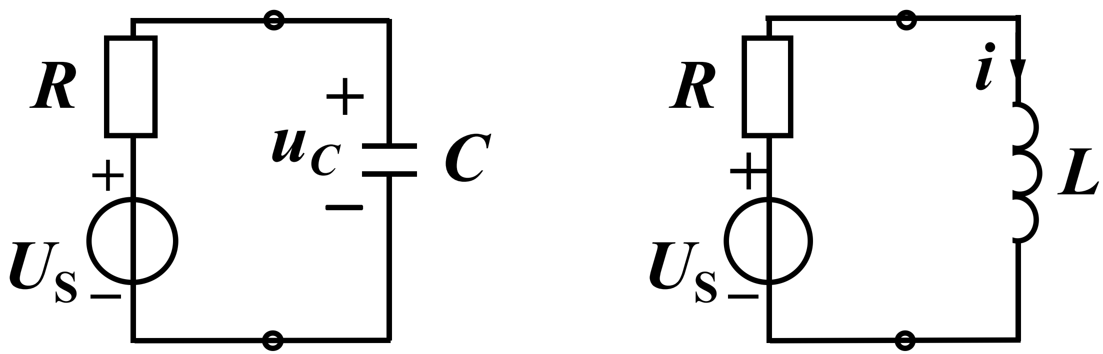
1）电路接通、断开电源

2）电路中电源的升高或降低

3）电路中元件参数的改变

暂态分析：

分析含储能元件电路发生换路后，从一个稳态向另一个稳态过渡过程中各物理量所遵循的规律。



注意：本章研究的电路暂态过程的特点：

1、只含一个电容C 或电感L（一阶电路）

2、激励源：直流电源

3、研究的对象是两个稳定状态之间的过渡过程

什么是一阶电路?

只含有一个(或等效为一个)储能元件的线性网络

用线性常系数一阶微分方程描述

什么是高阶电路?

含有多个独立储能元件的线性网络

用线性常系数高阶微分方程描述

一阶动态电路的求解方法

经典法：

用数学方法求解一阶微分方程；

三要素法：

以初始值，稳态值和时间常数代入公式求解。

7.3 电容

- 重点

1.电容元件；

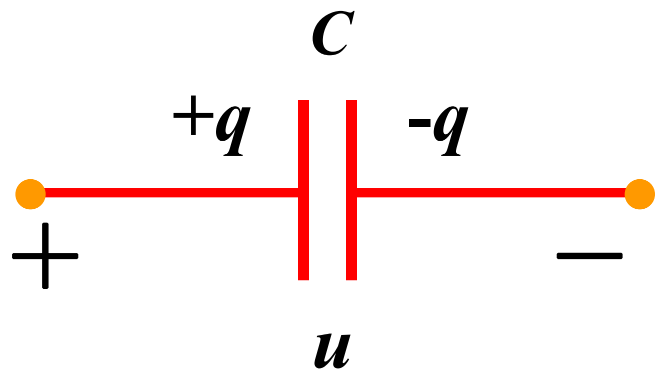
2.电容元件的VCR及功率、能量；

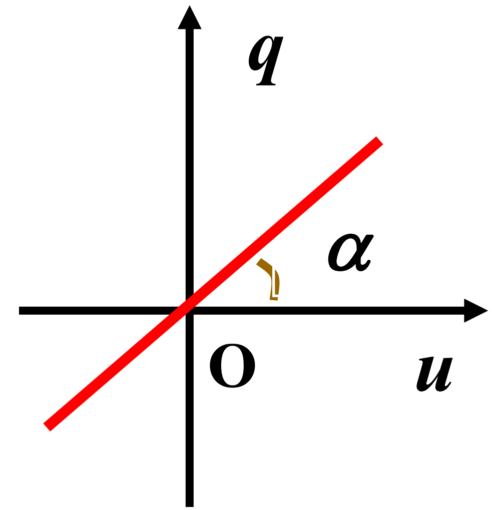
1. 线性定常电容元件

任何时刻，电容元件极板上的电荷q与电压 u 成正比。

$q \sim u$ 特性是过原点的直线。

电路符号



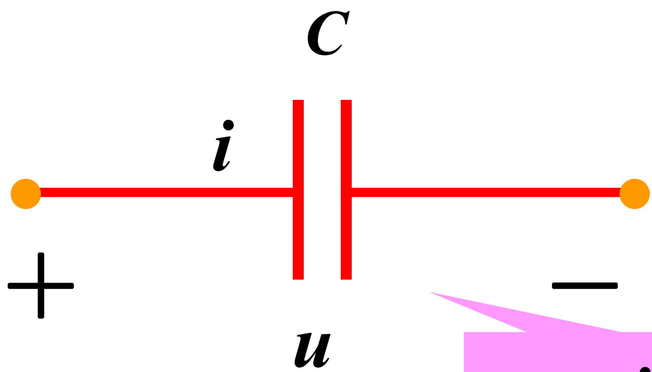


$$q(t) = Cu(t)$$

单位

C 称为电容器的电容, 单位：F (法) (Farad，法拉), 常用μF，p F等表示。

2.线性电容的电压、电流关系



u、i 取关联参考方向

电容元件VCR的微分关系

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

表明：

(1) i的大小取决于u的变化率，与u的大小无关，电容是动态元件；

(2) 当u为常数(直流)时，$i=0$。电容相当于开路，电容有隔断直流作用；

(3) 实际电路中通过电容的电流i为有限值，则电容电压u必定是时间的连续函数.

电容的电压：

$$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)d\xi$$

电容元件VCR
的积分关系

表明

电容元件有记忆电流的作用，故称电容为记忆元件

注

（1）当u，i为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号 ；

（2）上式中$u(t_0)$称为电容电压的初始值，它反映电容初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

3. 电容的功率和储能

● 功率

$$p = ui = u \cdot C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

u、i 取关联参考方向

(1) 当电容充电，$u>0$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t>0$，则$i>0$，$q\uparrow$，$p>0$，
电容吸收功率。

(2) 当电容放电，$u>0$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t<0$，则$i<0$，$q\downarrow$，$p<0$，
电容发出功率.

表明

电容能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为电场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电容元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

● 电容的储能

$$W_C = \int_0^t uidt = \frac{1}{2}cu^2$$

表明

（1）电容的储能只与当时的电压值有关，电容电压不能跃变，反映了储能不能跃变；

（2）电容储存的能量一定大于或等于零。

7.4 电感

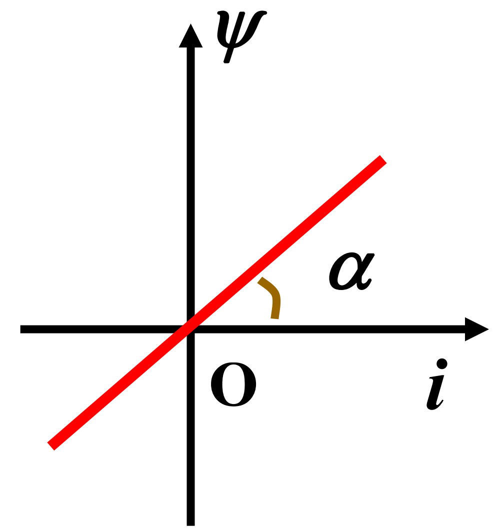
- 重点

1. 电感元件；

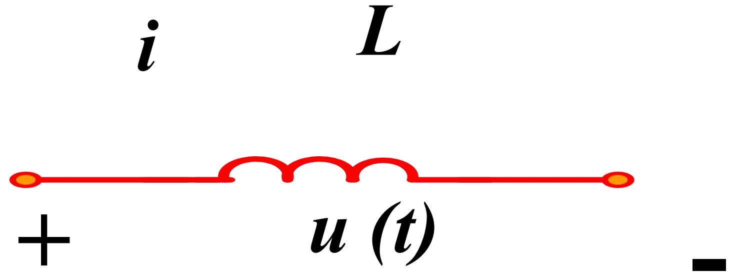
2. 电感元件的VCR及功率、能量；

1. 线性定常电感元件

任何时刻，通过电感元件的电流i与其磁链ψ 成正比。$\psi \sim i$ 特性是过原点的直线



- 电路符号



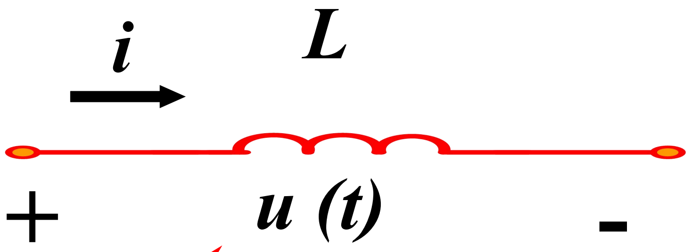
$$\psi(t) = Li(t)$$

- 单位

L 称为电感器的自感系数, L的单位：H (亨) (Henry，亨利)，常用μH，m H表示。

2. 线性电感的电压、电流关系

电感元件VCR
的微分关系



根据电磁感应定律与楞次定律

u、i 取关联

$$u(t)=\frac{d\psi}{d\,t}=L\frac{di(t)}{d\,t}$$

表明：

(1) 电感电压u 的大小取决于i 的变化率，与i 的大小无关，电感是动态元件；

(2) 当i为常数(直流)时，u =0。电感相当于短路；

(3)实际电路中电感的电压 u为有限值，则电感电流i 不能跃变，必定是时间的连续函数.

电感的电流：

$$i_L(t)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u_L(\xi)d\xi$$

电感元件VCR
的积分关系

表明

电感元件有记忆电压的作用，故称电感为记忆元件

注

（1）当u，i为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号；

（2）上式中$i(t_0)$称为电感电流的初始值，它反映电感初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

3. 电感的功率和储能

u、i 取关联参考方向

功率

$$p = iu = i \cdot L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

(1) 当电流*增大*，$i>0$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t>0$，则$u>0$，$\psi\uparrow$，$p>0$，电感吸收功率。

(2) 当电流减小，$i>0$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t<0$，则$u<0$，$\psi\downarrow$，$p<0$，电感发出功率。

表明

电感能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为磁场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电感元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

电感的储能

$$W_L = \int_0^t ui\,dt = \frac{1}{2}Li^2$$

表明

思考：能量公式的相似性

思考：能量储存的方式

（1）电感的储能只与当时的电流值有关，电感电流不能跃变，反映了储能不能跃变；

（2）电感储存的能量一定大于或等于零。

电容元件与电感元件的比较：

电容 C

$$q(t) = Cu(t)$$

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)d\xi$$

$$p = ui = u \cdot C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$W_C = \int_0^t uidt = \frac{1}{2}cu^2$$

电感 L

$$\psi(t) = Li(t)$$

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt} = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi)d\xi$$

$$p = iu = i \cdot L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$W_L = \int_0^t ui\,dt = \frac{1}{2}Li^2$$

结论

（1） 元件方程的形式是相似的；

（2） 若把u-i，q-ψ，C-L，i-u互换, 可由电容元件的方程得到电感元件的方程；

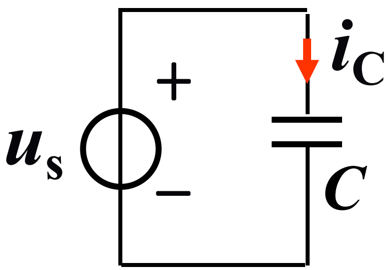
（3） C和L称为对偶元件, Ψ、q等称为对偶元素；

延伸

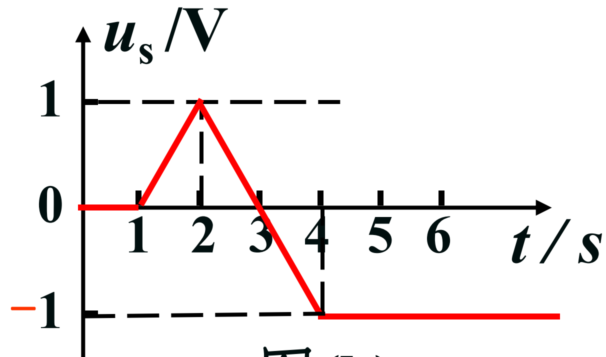
（1） 元件的暂态过程是相似的；

（2） 暂态过程的求解也是相似的；

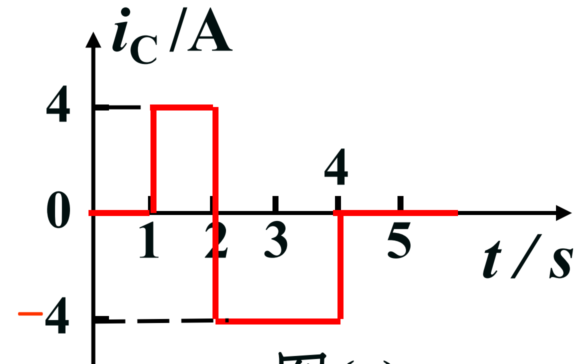
- 例1：在图(a)所示电路中，已知$C=4\mathrm{F}$，电压波形如图(b)，求i_C并画出其波形图。



图(a)



图(b)



图(c)

- 解：用分段表示法，得u_s函数表达式

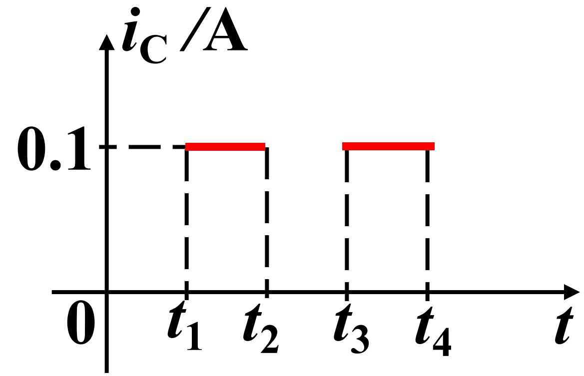
$$u_s=\begin{cases}0 & t<1\mathrm{s}\\ t-1 & 1\mathrm{s}\le t\le 2\mathrm{s}\\ -t+3 & 2\mathrm{s}\le t\le 4\mathrm{s}\\ -1 & t>4\mathrm{s}\end{cases}$$

得$$i_C=\begin{cases}0 & t<1\mathrm{s}\\ 4\,\mathrm{A} & 1\mathrm{s}<t<2\mathrm{s}\\ -4\mathrm{A} & 2\mathrm{s}<t<4\mathrm{s}\\ 0 & t>4\mathrm{s}\end{cases}$$

根据电容伏安特性的微分形式 $$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}$$

- 例2. 已知电容C=1μF，电容与电源连接后，得到的充电电流为间断的随机脉冲，电流脉冲波形如图(a)所示，每个电流脉冲的幅值均为0.1A，持续1μs时间。设电容在$t=0$时刻的初始电压值$u_C(0)=0$，求当电容充电累计到电容电压为u_C=100V时，共需要输入几个电流脉冲？

- 解：据式 $u_C = u_C(0_-) + \dfrac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i_C \mathrm{d}t$



(a)

$\because u_C(0)=0$，

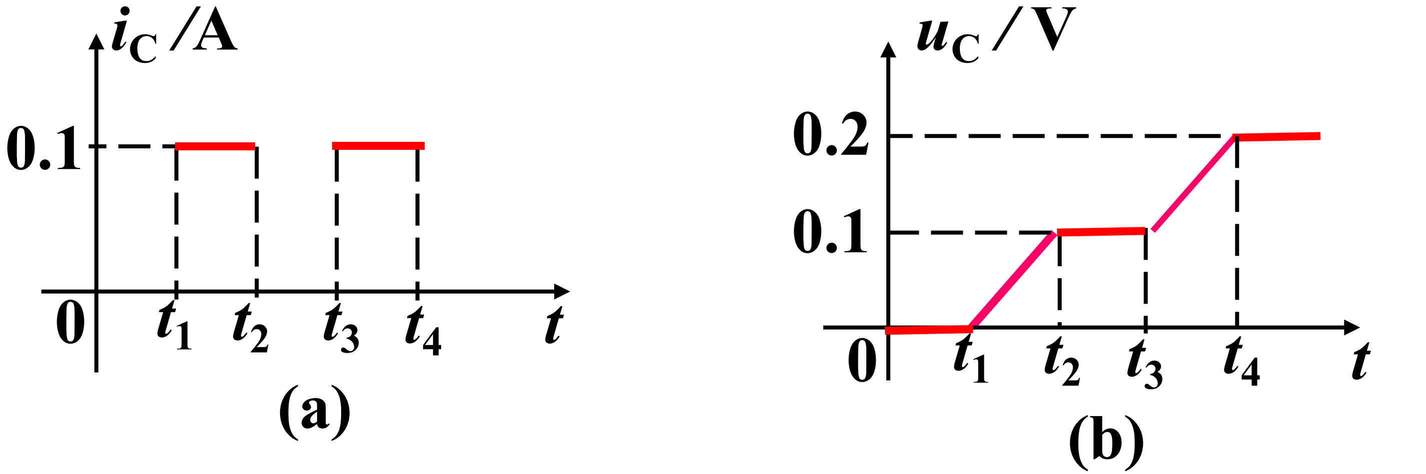
且从0到t_1期间没有电流脉冲$i=0$

$\therefore$ $-\infty$到t_1期间，电容电压$u_C(t_1)=0$

从 t_1到 t_2期间出现第一个电流脉冲，分段积分得：

$$u_c(t_2) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_2} i\mathrm{d}t = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_1} i\mathrm{d}t + \frac{1}{C}\int_{t_1}^{t_2} i\mathrm{d}t = u_c(t_1) + \frac{1}{1\times10^{-6}}\int_{t_1}^{t_2} 0.1\mathrm{d}t = 0.1\,\mathrm{V}$$

- 例2.



∵从 t_2到 t_3期间，$i_C = 0$

∴电压维持不变$u_C(t_3) = 0.1\text{V}$，t_3到t_4期间出现第二个电流脉冲

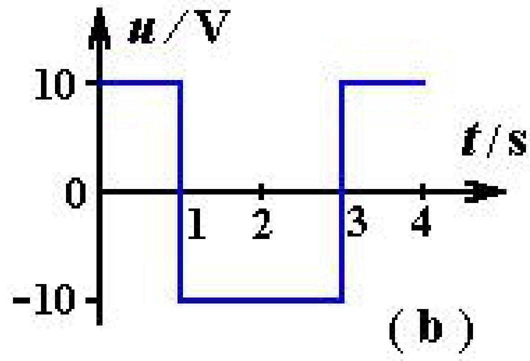
$$u_c(t_4) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_4} i\mathrm{d}t = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_3} i\mathrm{d}t + \frac{1}{C}\int_{t_3}^{t_4} i\mathrm{d}t = u_c(t_3) + \frac{1}{1\times 10^{-6}}\int_{t_3}^{t_4} 0.1\mathrm{d}t = 0.2\ \text{V}$$

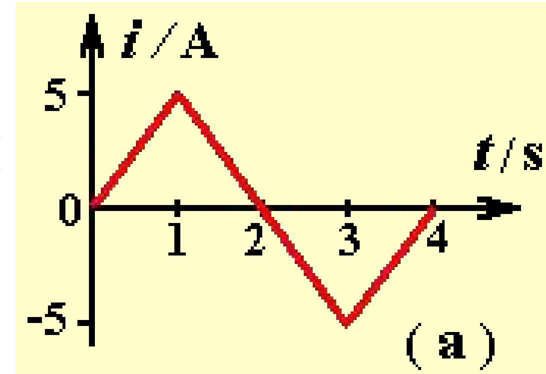
∵每个电流脉冲使电容电压上升0.1V

∴累计到$u_C = 100\text{V}$时，共需要1000个电流脉冲

- 例3：在下图电路中，已知$L=2\mathrm{H}$，电流$i\,(t)$的数学表达式为

$$i\,(t)=\begin{cases}5\,t \\ (-5\,t+10)\mathrm{A} \\ (5\,t-20)\mathrm{A}\end{cases}$$





(1) 画出$i\,(t)$的波形；(2)求$u\,(t)$,并画出波形；(3)求$t=2.5\mathrm{s}$时电感元件的功率和储能。

- 解：(1) $i(t)$的波形如图(a)所示；

$$(3)\quad P(2.5\mathrm{s})=ui\Big|_{t=2.5\mathrm{s}}=(-10)(-2.5)=25\ \mathrm{W}$$

$$W(2.5\mathrm{s})=\frac{1}{2}Li^2\Big|_{t=2.5\mathrm{s}}=6.25\ J$$

1s

3s

4s

7.5 换路定则（电容电压和电感电流）

由于电路结构（例如电路的接通、断开、短路等）或参数的变化而引起电路从一种状态转变到另一种状态称之为换路。

将换路的那一瞬间定为t=0，把换路前的最终时刻定为$t=0_-$，将换路后的最初时刻定为$t=0_+$，这样换路经历的时间为从0_-到0_+。

根据理论分析计算表明，从0_-到0_+瞬间，电容元件上的电压和电感元件中的电流不能发生跃变，因此换路定则用公式表示为

$$\boxed{u_C(0_+) = u_C(0_-)} \qquad \boxed{i_L(0_+) = i_L(0_-)}$$

注意：只有电容元件二端的电压$u_c(0_+)$和电感元件中流过的电流$i_L(0_+)$满足换路定则，而电路中其它参数的初始值如$i_c(0_+)$、 $u_L(0_+)$、$i_R(0_+)$、 $u_R(0_+)$等都不满足换路定则。

换路定则仅适用于换路瞬间，可根据它来确定$t=0_+$时刻电路中的电压与电流，也就是暂态过程的初始值。

动态电路换路定则

1. 线性电容上电荷、电压与电流的关系为：

$$q(t)=q(t_0)+\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)d\xi \qquad u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)d\xi$$

令 $t_0=0_-$, $t=0_+$ 有

$$q(0_+)=q(0_-)+\int_{0_-}^{0_+} i_C dt \qquad u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C dt$$

电流 $i_C(t)$为有限值，其积分项为0，即电容上的电荷与电压不发生跃变。

在换路前后 $i_C(t)$ 为有限值的条件下：

$$\boxed{q(0_+)=q(0_-)，\quad u_C(0_+)=u_C(0_-)}$$

换路定则1：在换路瞬间，电容上的电荷q与电压u_C不发生跃变。

2. 线性电感上磁通链电流与电压的关系为

$$\psi_L(t)=\psi_L(t_0)+\int_{t_0}^{t}u_L(\xi)d\xi \qquad i_L(t)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u_L(\xi)d\xi$$

令 $t_0=0_-,t=0_+$ 有

$$\psi_L(0_+)=\psi_L(0_-)+\int_{0_-}^{0_+}u_L dt \qquad i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+}u_L dt$$

电压 $u_L(t)$ 为有限值，其积分项为0 ，即电感上的磁通链与电流不发生跃变。

在换路前后 $u_L(t)$为有限值的条件下：

$$\boxed{\psi_L(0_+)=\psi_L(0_-),\quad i_L(0_+)=i_L(0_-)}$$

换路定则2：在换路瞬间，电感上的磁通链 Ψ_L与电流 i_L不发生跃变。

求初始值的步骤:

1. 由换路前电路（一般为稳定状态）求出$u_C(0_-)$和$i_L(0_-)$。

   电容（电感）相当于开路（短路）。

2. 由换路定律得$u_C(0_+)$和$i_L(0_+)$。

3. 画0_+等效电路。

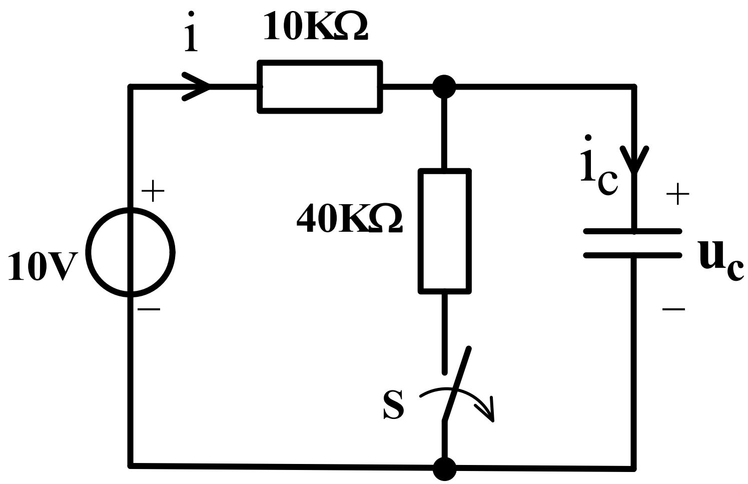
   a. 若$u_C(0_+)$或$i_L(0_+)$为零，电容（电感）用短路（开路）替代。

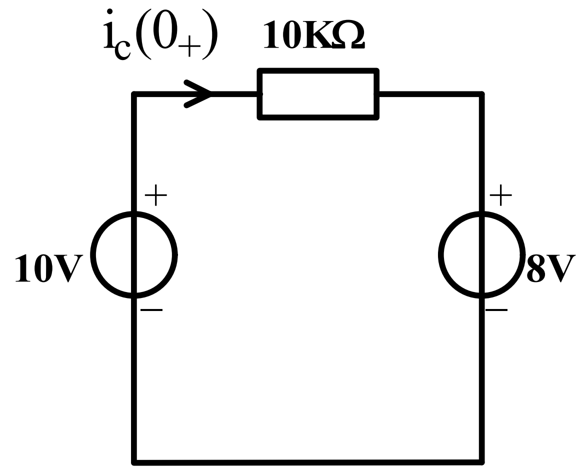
   b. 若$u_C(0_+)$或$i_L(0_+)$不为零，电容（电感）用电压源（电流源）替代。

   注意：电压源（电流源）取0_+时刻值，其方向同原假定的电容电压、电感电流方向。

4. 由0_+电路求所需各变量的0_+值。

例1：如图所示的电路在换路前已处于稳态，在t=0时打开开关S，试求换路后的$u_c(0_+)$、$i_c(0_+)$





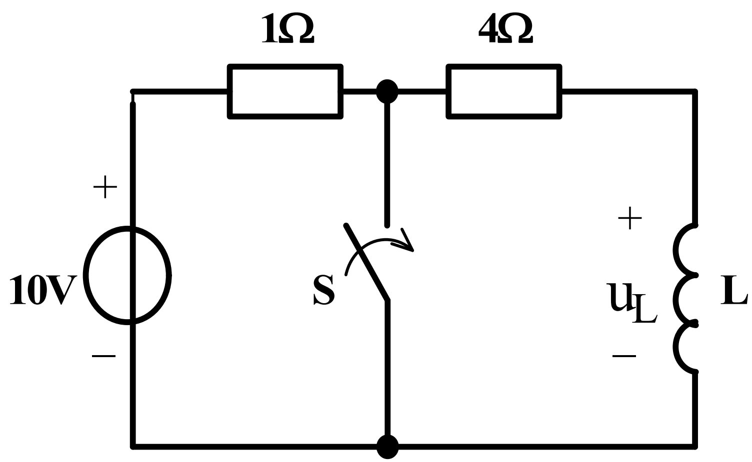
解：t=0_时，电容相当于开路，可得 $$u_C(0_-)=\frac{10\times 40}{10+40}=8\text{V}$$

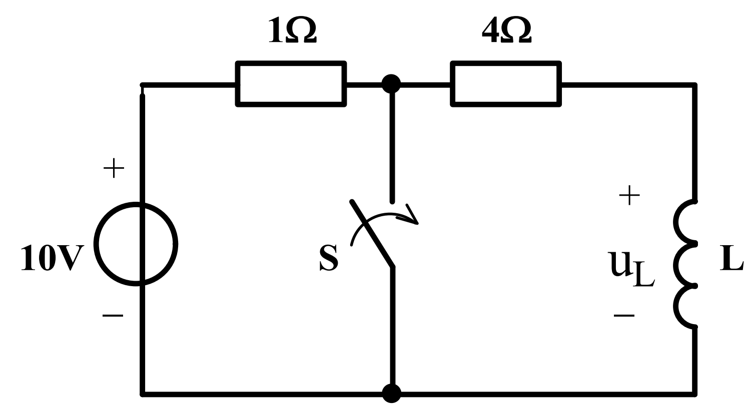
由换路定则： $$u_C(0_+)=u_C(0_-)=8V$$

画出t=0₊时刻的等效电路如右图所示，可得

$$i_C(0_+)=\frac{10-8}{10}=0.2\text{mA}$$

例2:如图所示的电路在换路前已处于稳态，在t=0时闭合开关S，试求换路后的$u_L(0_+)$、$i_L(0_+)$





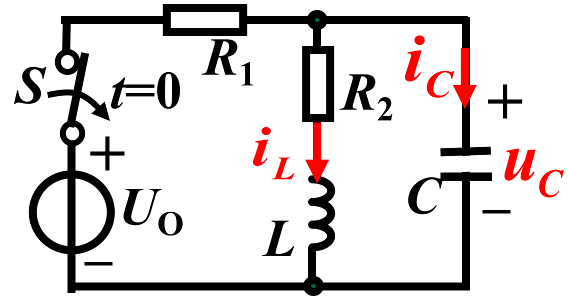
解：t=0-时，电感相当于短路，可得 $i_L(0\_)=\dfrac{10}{1+4}=2A$

由换路定则： $i_L(0_+)=i_L(0\_)=2A$

画出t=0+时刻的等效电路如右图所示，可得：

$$u_L(0_+)=-2\times4=-8V$$

例3 电路中直流电压源U_0，电路达稳态后S打开，试求 $u_C(0_+)$，$i_L(0_+)$，$i_C(0_+)$，$u_L(0_+)$ 和 $u_{R_2}(0_+)$.

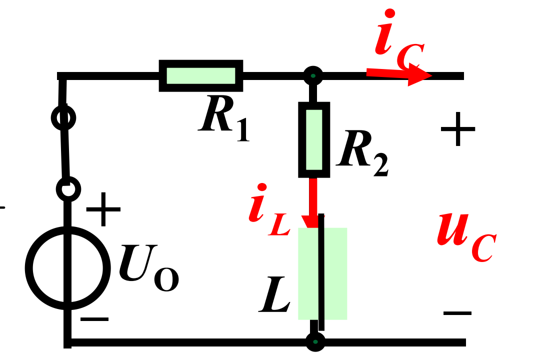


解: 1）t=0_时，电路为稳态，电压与电流恒定，即

$$\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{0\_}=0,\quad \left(\frac{di_L}{dt}\right)_{0\_}=0\quad i_C(0\_)=C\frac{du_C}{dt}=0,$$

$$u_L(0\_)=L\frac{di_L}{dt}=0$$

$$u_C(0\_)=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_O\qquad i_L(0\_)=\frac{U_O}{R_1+R_2}$$



t=0_时的电路

2）t=0$_+$时，电容电压与电感电流不会跃变，即

$$u_C(0_+)=u_C(0\_)=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_O\qquad i_L(0_+)=i_L(0\_)=\frac{U_O}{R_1+R_2}$$

换路前LC已储能，换路瞬间，电容相当于恒压源，电感相当于恒流源。

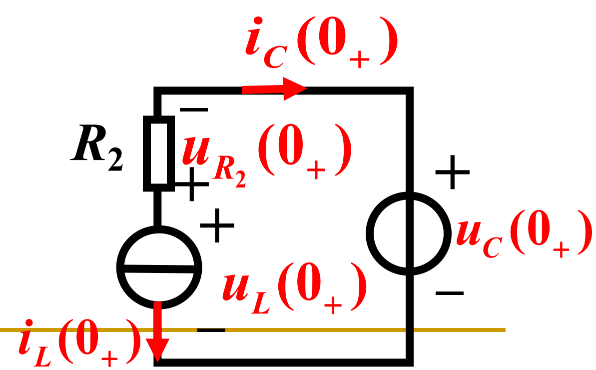
据左图得

$$i_C(0_+)=-i_L(0_+)=-\frac{U_O}{R_1+R_2}$$

据VCR得 $$u_{R_2}(0_+)=R_2 i_C(0_+)=\frac{-U_O R_2}{R_1+R_2}$$

据KVL得 $$u_L(0_+)=u_{R_2}(0_+)+u_C(0_+)$$

代入得 $$u_L(0_+)=0$$

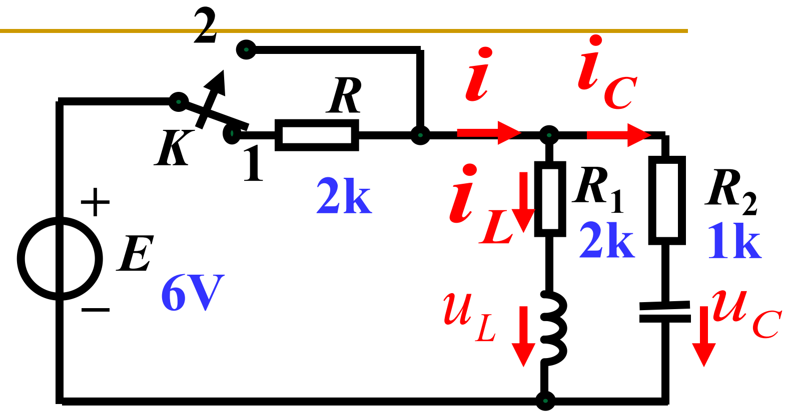


t=0$_+$时的电路

例4 已知：K 在“1”处停留已久，在t=0时合向“2”

求：i、i_L、i_C、u_C、u_L 的初始值，

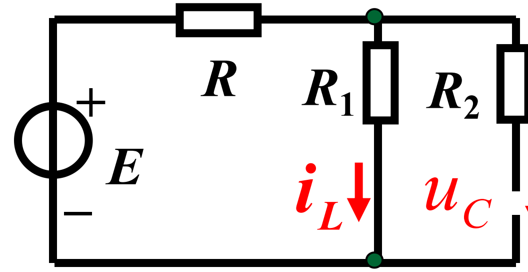
即 t=(0$^+$)时刻的值。



解：

(1) t=0_时 $i_L(0\_)=\dfrac{E}{R+R_1}=\dfrac{6\times10^{-3}}{2+2}=1.5\text{ mA}$

$$u_C(0\_)=i_L(0\_)\times R_1=1.5\times2=3\text{ V}$$



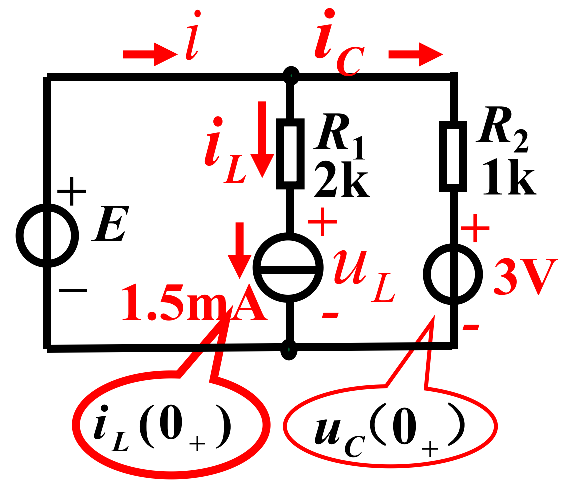
换路前t=0_时的等效电路

(2) t=0$_+$ 时 $i_L(0^+)=i_L(0^-)=1.5\text{ mA}$

$$i_C(0_+)=\frac{E-u_C(0_+)}{R_2}=\frac{6-3}{1\times10^3}=3\text{ mA}$$

$$i(0_+)=i_L(0_+)+i_C(0_+)=4.5\text{ mA}$$

$$u_L(0_+)=E-i_L(0_+)\times R_1=3\text{ V}$$



t=0$_+$ 时的等效电路

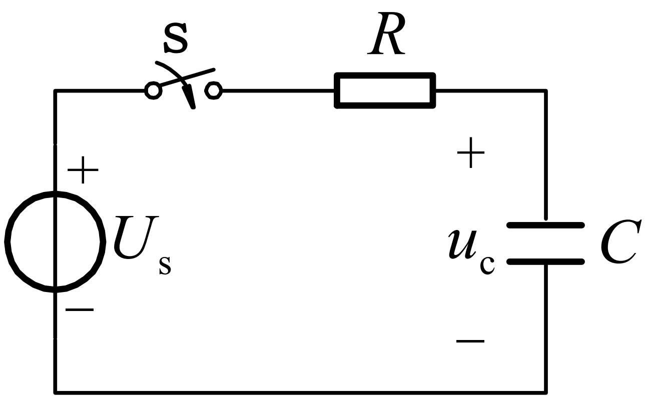
计算结果

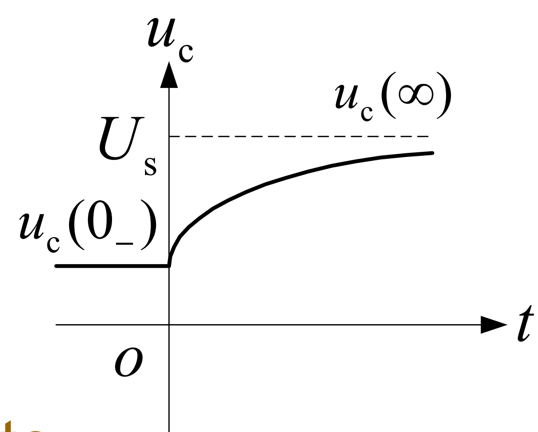
电量	i	i_L	i_C	u_C	u_L
$t=0\_$	1.5 mA	1.5 mA	0	3 V	0
$t=0_+$	4.5 mA	1.5 mA	3 mA	3 V	3 V

7.6 动态电路的暂态分析（了解）

- 动态电路 Dynamic circuits
- 微分方程 Differential equation
- 初始条件 Initial conditions
- 动态电路分析 Analysis of dynamic circuits

1. 动态电路：包含储能元件的电路



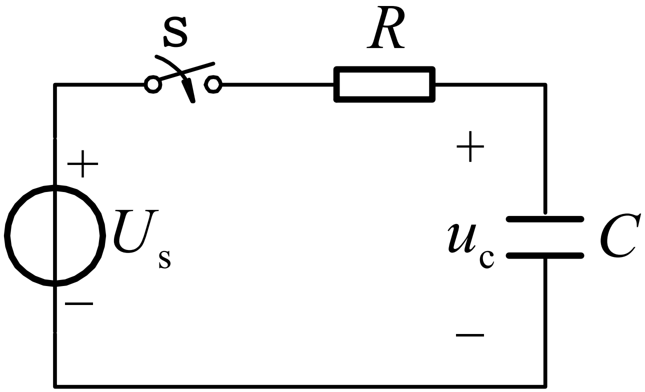


Transient state

Steady state A

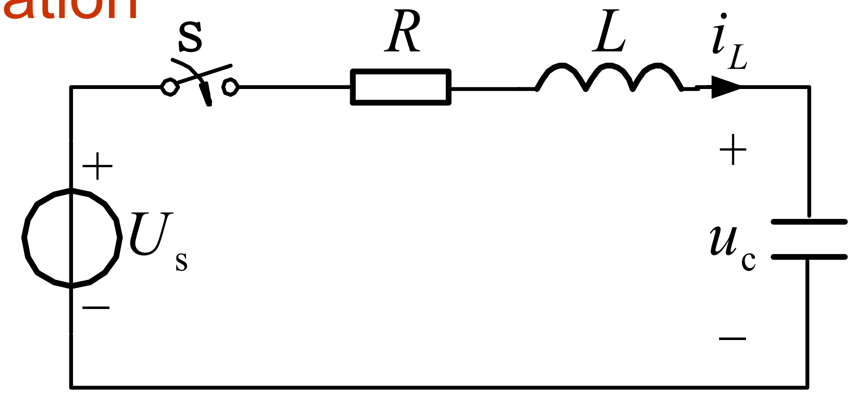
Steady state B

2. 微分方程 Differential equation



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_s \qquad t>0$$

- 不同的变量，相同的齐次微分方程！
- 微分方程的阶数＝电路的阶数！
- 电路的阶数＝独立动态元件个数



$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)+u_C=U_s \qquad t>0$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_s$$

$$Ri_L+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\left[u_C(0_+)+\frac{1}{C}\int_{0_+}^{t}i_L\mathrm{d}t\right]=U_s \quad t>0$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=0$$

7.6 动态电路的暂态分析概述

n阶线性时不变动态电路的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots a_{n-1} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_n y(t) = f(t)$$

关于激励的函数

3. 初始条件 Initial conditions

电路的原始储能		电路的初始储能		待求量的初始值
original state	→	initial state	→	initial value
$u_C(0_-)$		$u_C(0_+)$		$y(0_+)$
$i_L(0_-)$		$i_L(0_+)$		$y'(0_+)$
				$\cdots$

作业

7-10　7-25　7-37