复变函数与积分变换试题(二)

一、填空题

(1) 复数 $\dfrac{-2i}{1+i}$ 的模为____，辐角主值为________。

(2) 函数 $f(z)=y^2-i\,x^2$ 在何处可导?______________；

何处解析?____________。

(3) $\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3}+i\,)^2$ 的值为______________。

(4) 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-(1+i)z+i}$ 在 $z=0$ 处展开成泰勒级数的

收敛半径为____。

(5) $z=0$ 为函数 $f(z)=\exp\left(\frac{1-\cos z}{z^2}\right)$ 的何种类型的奇点?

__________。

(6) 积分 $\oint_{|z|=1}\frac{1-\sin z}{z(z-2)}\,\mathrm{d}z$ 的值为_____。

(7) 映射 $f(z)=z^2+2z$ 在 $z=i$ 处的旋转角为_______。

伸缩率为______。

(8) 函数 $f(t)=1+2\cos 2t$ 的 Fourier 变换为

______________________________。

二、计算题

1. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z(z-1)^2}\,dz$

2. $\displaystyle\oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}\,dz$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos\theta-\sqrt{5}}$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+1}\,dx$

三、已知 $u(x,y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 a 及二元函数(x,y)

使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(1)=0$.

四、将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗 (Laurent) 级数。

五、求区域 $D=\{z:-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Im}z<\dfrac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}z<0\}$ 在映射 $w=\dfrac{e^z}{e^z+i}$ 下的像区域。

六、求把区域 $D=\{z:|z-1|>1,\ \operatorname{Re}z>0\}$ 映射到单位圆内部的保形映射。

七、利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x''(t)-y''(t)-y(t)=t\,e^{t}, & x(0)=y(0)=0, \\ x'(t)-y'(t)-x(t)=-\sin t, & x'(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

八、设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 上解析，且满足 $|f(z)-2|<2$,

证明：$$\oint_{|z|=1}\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}\,\mathrm{d}z=0.$$

复变函数与积分变换试题（二）解答

一、填空题

(1) 复数 $\dfrac{-2i}{1+i}$ 的模为 $\sqrt{2}$，辐角主值为 $-\dfrac{3\pi}{4}$。

(2) 函数 $f(z)=y^2-i\,x^2$ 在何处可导？在直线 $x=y$ 上；

何处解析？处处不解析。

(3) $\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3}+i\,)^2$ 的值为 $\ln 4+i(\pi/3+2k\pi)$。

(4) 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-(1+i)z+i}$ 在 $z=0$ 处展开成泰勒级数的收敛半径为 1。

(5) $z=0$ 为函数 $f(z)=\exp\left(\dfrac{1-\cos z}{z^2}\right)$ 的何种类型的奇点？

__可去奇点__。

(6) 积分 $\oint_{|z|=1}\dfrac{1-\sin z}{z(z-2)}\,\mathrm{d}z$ 的值为 $\underline{-\pi i}$。

(7) 映射 $f(z)=z^2+2z$ 在 $z=i$ 处的旋转角为 $\underline{\dfrac{\pi}{4}}$。

伸缩率为 $\underline{2\sqrt{2}}$。

(8) 函数 $f(t)=1+2\cos 2t$ 的 Fourier 变换为

$\underline{2\pi[\delta(\omega)+\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]}$。

二、1. $\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z-1}{z(z-1)^2}dz$

解 令 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z(z-1)^2}$,

(1) $z_1=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点, $\mathrm{Res}[f(z),0]=0$;

(2) $z_2=1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点,

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}[(z-1)^2f(z)]'$$

$$=\lim_{z\to1}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'=\lim_{z\to1}\frac{ze^z-e^z+1}{z^2}=1.$$

(3) 原式 $=2\pi i\big(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),0]\big)=2\pi i.$

二、2. $\oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}\,dz$

解 令 $f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}$, 则 $z=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点,

$$f(z)=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z}+\cdots,$$

$$\text{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}=\frac{1}{3},$$

原式 $=2\pi i\,\text{Res}[f(z),0]=\dfrac{2\pi i}{3}.$

二、3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\cos\theta-\sqrt{5}}$

解 (1) 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$， 则 $\cos\theta=\dfrac{z^2+1}{2z}$， $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$，

$$\text{原式}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2\left(\dfrac{z^2+1}{2z}\right)-\sqrt{5}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{i(z^2-\sqrt{5}z+1)}.$$

(2) 令 $f(z)=\dfrac{1}{i(z^2-\sqrt{5}z+1)}$， 则 $f(z)$ 有两个一阶极点：

$z_1=(\sqrt{5}-1)/2$， $z_2=(\sqrt{5}+1)/2$. (z_2不在 $|z|=1$ 内)

(3) $\displaystyle\text{原式}=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),z_1]=2\pi i\left.\frac{1}{i(2z-\sqrt{5})}\right|_{z=z_1}=-2\pi.$

二、4. $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

解 (1) 令 $f(z)=\frac{ze^{2iz}}{(z^2+1)}$，

则 $f(z)$ 在上半平面有一个一级极 $=i$，
点

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\left.\frac{ze^{2iz}}{2z}\right|_{z=i}=\frac{1}{2e^2}.$$

(2) 原式$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),i]\right)=\frac{\pi}{2e^2}.$

三、已知 $u(x, y)=4xy^3+ax^3y$, 求常数 a 及二元函数(x, y)

使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足 $f(1)=0$.

条件

解 (1) 首先 $u(x,y)$ 必须为调和函数，即 $u_{xx}+u_{yy}=0$,

$$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=6axy+24xy=0,$$

$$\Rightarrow a=-4,$$

故 $u(x, y)=4xy^3-4x^3y$.

三、已知 $u(x, y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 a 及二元函数(x, y)

使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足 $f(1)=0$. 条件

解 (1) $u(x, y)=4xy^3-4x^3y$.

(2) 方法一 偏微分法

由 $u_x=4y^3-12x^2y=v_y$ 得

$$v=\int(4y^3-12x^2y)dy=y^4-6x^2y^2+\varphi(x),$$

由 $u_y=12xy^2-4x^3=-v_x=12xy^2-\varphi'(x)$ 得

$$\varphi'(x)=4x^3,\quad \Rightarrow\quad \varphi(x)=x^4+c,$$

即得 $v(x,y)=x^4+y^4-6x^2y^2+c$,

$$f(z)=4xy^3-4x^3y+i(x^4+y^4-6x^2y^2+c).$$

三、已知 $u(x,y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 a 及二元函数 (x,y) 使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(1)=0$.

解 (1) $u(x,y)=4xy^3-4x^3y$.

(2) 方法二 全微分法

由 $v_y=u_x=4y^3-12x^2y$，$v_x=-u_y=4x^3-12xy^2$，

得 $dv=(4x^3-12xy^2)dx+(4y^3-12x^2y)dy$

$$=dx^4-6y^2dx^2+dy^4-6x^2dy^2$$

$$=d(x^4+y^4-6x^2y^2),$$

即得 $v(x,y)=x^4+y^4-6x^2y^2+c$,

$$f(z)=4xy^3-4x^3y+i(x^4+y^4-6x^2y^2+c).$$

三、已知 $u(x, y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 a 及二元函数(x, y)

使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(1)=0$.

解 (1) $u(x, y)=4xy^3-4x^3y$.

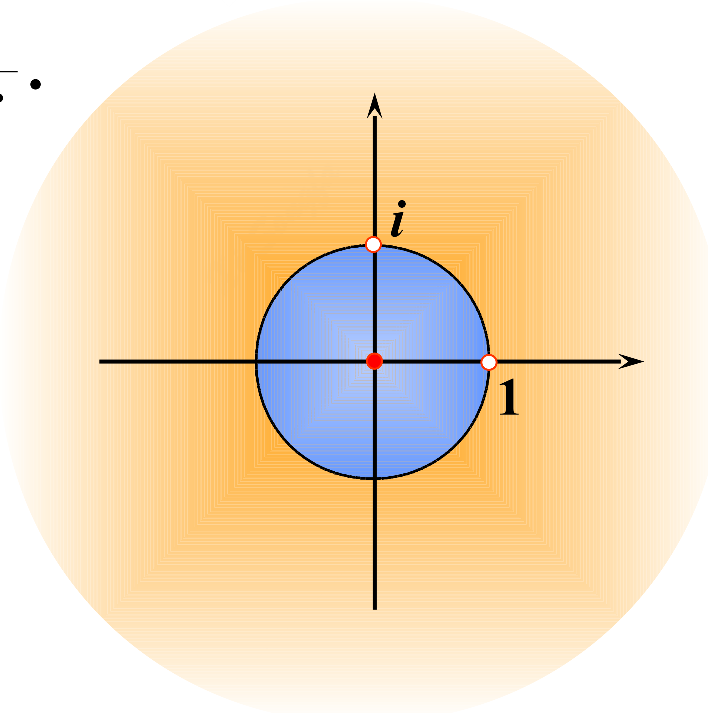
(2) $f(z)=4xy^3-4x^3y+i(x^4+y^4-6x^2y^2+c)$.

(3) 由 $f(1)=0$, $\Rightarrow c=-1$,

$$f(z)=4xy^3-4x^3y+i(x^4+y^4-6x^2y^2-1).$$

四、将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗 (Laurent) 级数。

解 $f(z)=\dfrac{1-i}{(z-1)(z-i)}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-i}.$



(1) 在 $z=0$ 处展开

① 当 $|z|<1$ 时，

$$f(z)=-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{i}}$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}z^n+\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{i^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{i^{n+1}}-1\right]z^n.$$

四、将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗 (Laurent) 级数。

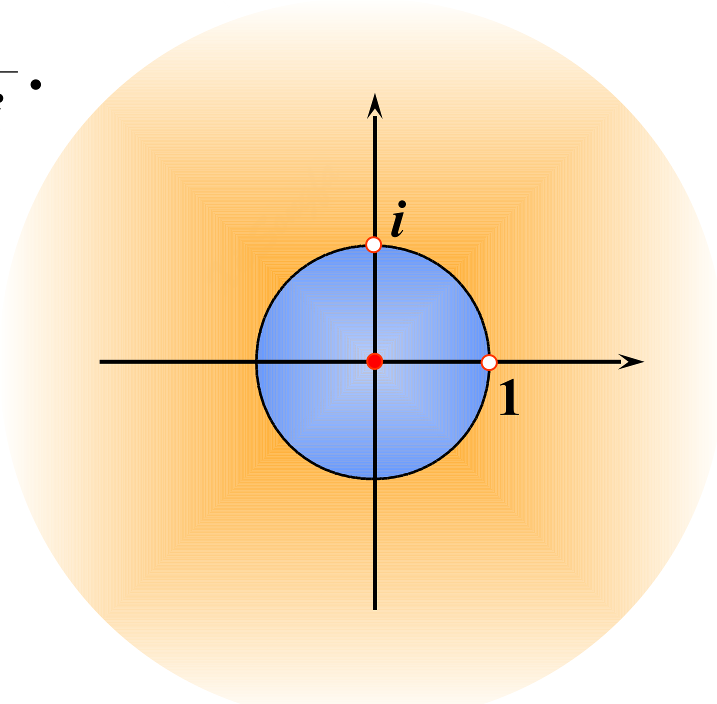
解 $$f(z)=\frac{1-i}{(z-1)(z-i)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-i}.$$

(1) 在 $z=0$ 处展开

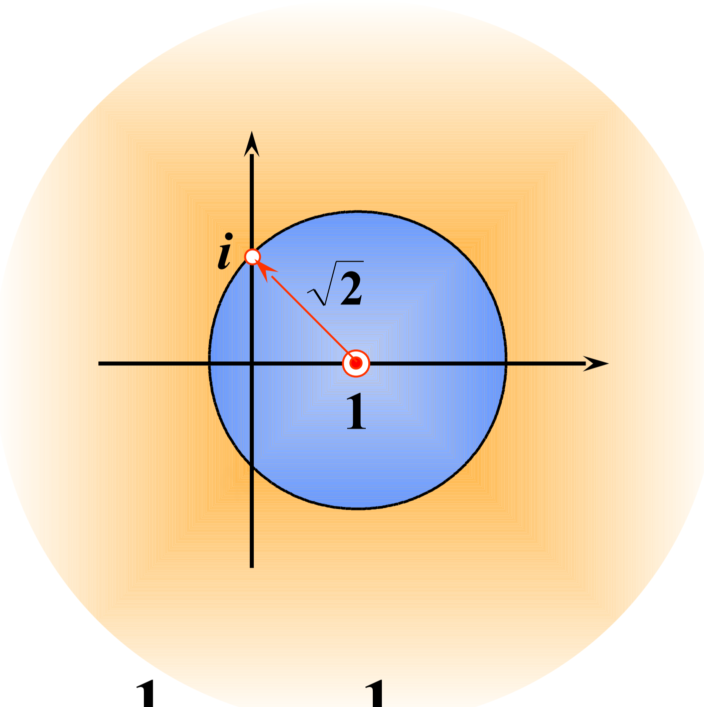
② 当 $|z|>1$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{i}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-i^n)\frac{1}{z^{n+1}}.$$



四、将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗 (Laurent) 级数。



解 $f(z)=\dfrac{1-i}{(z-1)(z-i)}$.

(2) 在 $z=1$ 处展开

① 当$0<|z-1|<\sqrt{2}$时，

$$f(z)=\frac{1-i}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)+(1-i)}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{i-1}}$$

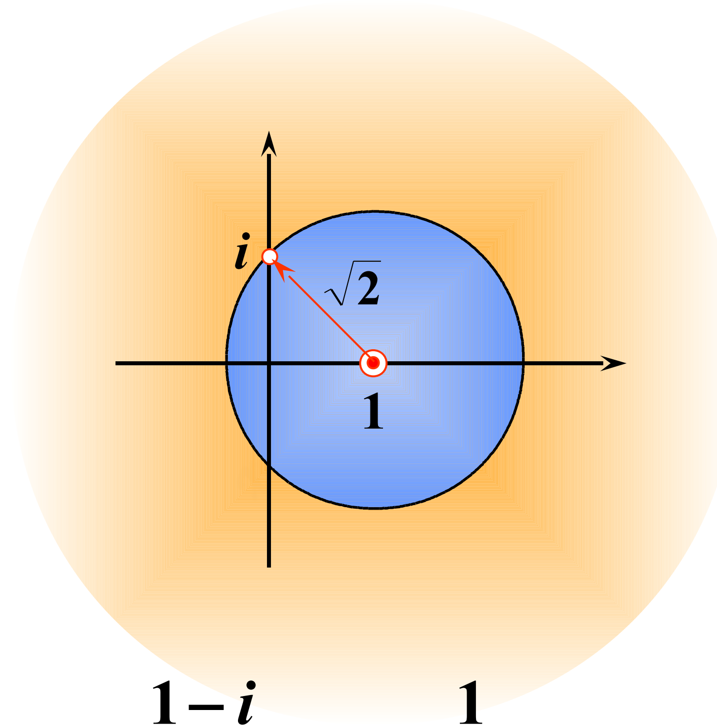
$$=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{(i-1)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{(i-1)^n}.$$

四、将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗 (Laurent) 级数。

解 $f(z)=\dfrac{1-i}{(z-1)(z-i)}$.

(2) 在 $z=1$ 处展开

② 当 $|z-1|>\sqrt{2}$ 时，

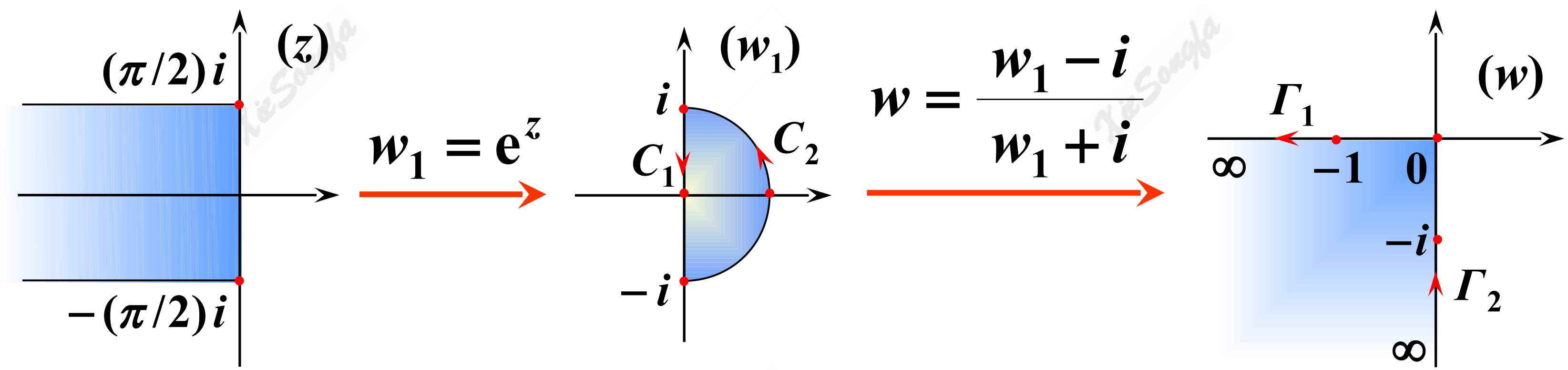


$$f(z)=\frac{1-i}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)+(1-i)}=\frac{1-i}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{i-1}{z-1}}$$

$$=\frac{1-i}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i-1)^n}{(z-1)^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}.$$

五、求区域 $D=\{z:-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,z<\frac{\pi}{2},\ \mathrm{Re}\,z<0\}$ 在映射 $w=\dfrac{e^z-i}{e^z+i}$ 下的像区域。

解 令 $w_1=e^z$，则 $w=\dfrac{w_1-i}{w_1+i}$.

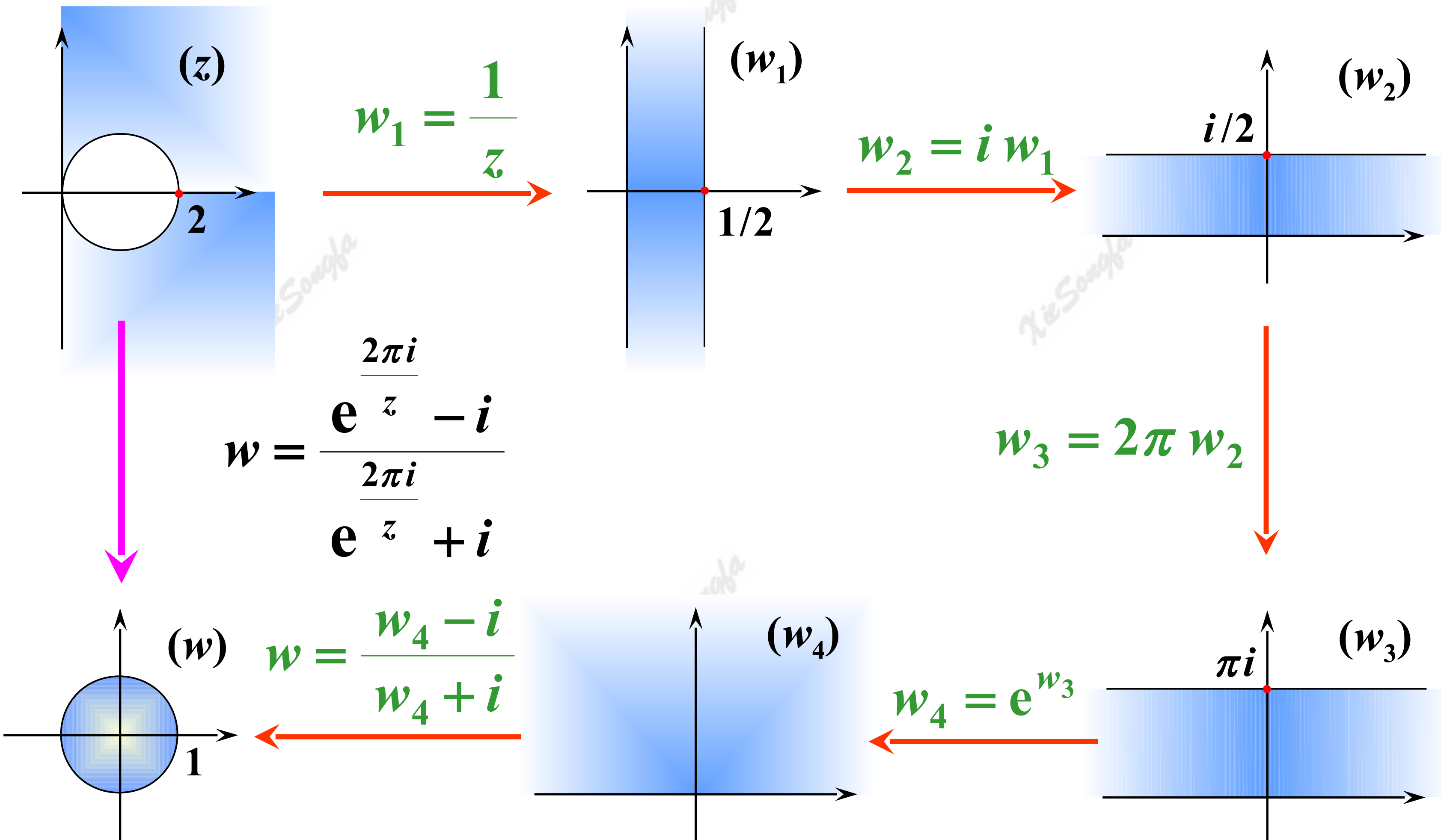


即像区域为第三象限。

$$C_1\begin{cases} i\to 0, \\ 0\to -1, \\ -i\to\infty. \end{cases}\qquad C_2\begin{cases} -i\to\infty, \\ 1\to -i, \\ i\to 0. \end{cases}$$

六、求把区域 $D=\{z:|z-1|>1,\ \operatorname{Re} z>0\}$ 映射到单位圆内部的保形映射。

解



七、利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x''(t)-y''(t)-y(t)=t\,\mathrm{e}^{t}, & x(0)=y(0)=0, \\ x'(t)-y'(t)-x(t)=-\sin t, & x'(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

解 (1) 令$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程组两边取拉氏变换，并代入初值得

$$\begin{cases} s^2X(s)-s^2Y(s)-Y(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2}, \\ sX(s)-sY(s)-X(s)=-\dfrac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

七、利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x''(t)-y''(t)-y(t)=t\,\mathrm{e}^t, & x(0)=y(0)=0, \\ x'(t)-y'(t)-x(t)=-\sin t, & x'(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

解 (2) 求解得到像函数

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2}, \\ Y(s)=-\dfrac{s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\dfrac{1}{(s-1)}-\dfrac{s}{s^2+1}. \end{cases}$$

(3) 求拉氏逆变换即得

$$\begin{cases} x(t)=t\,\mathrm{e}^t, \\ y(t)=\mathrm{e}^t-\cos t. \end{cases}$$

八、设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 上解析，且满足 $|f(z)-2|<2$，

证明：$\oint_{|z|=1}\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}\mathrm{d}z=0.$

证明 (1) 由 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，

$\Rightarrow f'(z),\ f''(z),\ f^2(z)$ 都在 $|z|<2$ 内解析；**(A)**

(2) 由 $|f(z)-2|<2$，$\Rightarrow f(z)\neq 0$，$f(z)\neq 4$，

$\Rightarrow f^2(z)-4f(z)=f(z)\cdot[f(z)-4]\neq 0$； **(B)**

(3) 由 **(A), (B)** 有 $\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}$ 在 $|z|<2$ 内解析，

由柯西积分定理得 $\oint_{|z|=1}\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}\mathrm{d}z=0.$

休息一下 ……