第四章 解析函数的级数表示

§4.1 复数项级数

§4.2 复变函数项级数

§4.3 泰勒 (Taylor) 级数

§4.4 洛朗 (Laurent) 级数

§4.1 复数项级数

一、复数序列

二、复数项级数

一、复数序列

1. 基本概念

定义 设 z_n 为复数，称 $\{z_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为复数序列。

极限 设 $\{z_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为一复数序列，a 为一确定的复数，

P78

如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，相应地存在自然数 N，

使得当 $n>N$ 时，总有 $|z_n-a|<\varepsilon$ □□□

则称 $\{z_n\}$ 收敛于 a，且称 a 为 $\{z_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = a, \quad \text{或} \quad z_n \to a, (n\to+\infty).$$

- 如果复数序列 $\{z_n\}$ 不收敛，则称 $\{z_n\}$ 发

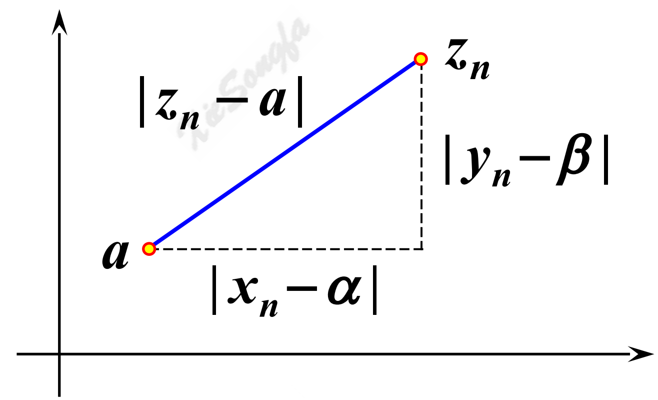
一、复数序列

2. 复数序列极限存在的充要条件

定理 设 $z_n = x_n + iy_n$, $a = \alpha + i\beta$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$ 的充要条件

P78 定理 4.1

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha,\quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \beta.$$



证明 必要性“$\Rightarrow$”

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, 则 $\forall\varepsilon>0, \exists N$,

当 $n > N$ 时, $|z_n - a| < \varepsilon$,

$$\Rightarrow |x_n-\alpha| \le |z_n - a| < \varepsilon,\quad |y_n-\beta| \le |z_n - a| < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = \alpha,\quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \beta.$$

一、复数序列

2. 复数序列极限存在的充要条件

定理 设 $z_n = x_n + i y_n,\ a = \alpha + i\beta$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$ 的充要条件

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha,\quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \beta .$$

证明 充分性“$\Leftarrow$”

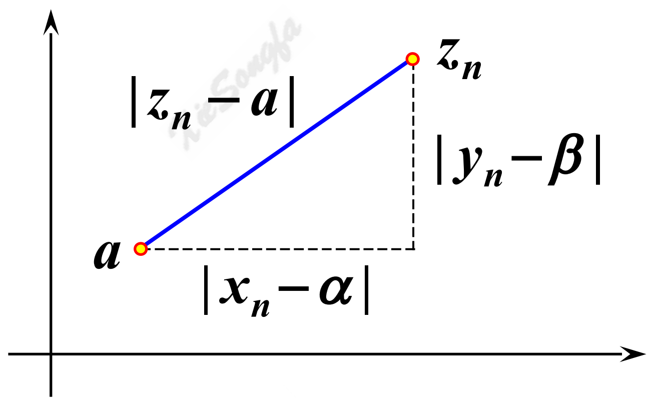
(跳过?)

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \beta$，

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon,\ |y_n - \beta| < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow |z_n - a| \le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < 2\varepsilon, \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n = a .$$



例 设 $z_n = i^n + \dfrac{i}{n}$，讨论序列 $\{z_n\}$ 的收敛性。

解 $z_n = i^n + \dfrac{i}{n} = e^{\frac{\pi}{2}in} + \dfrac{i}{n} = \cos\dfrac{n\pi}{2} + i\left(\sin\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right).$

由于 $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 或 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right\}$ 故发散，也发散。

附 试考察实序列 $\{|z_n|\}$ ——的收敛性 z_n。（其中 见上

已知 $|z_n| = \left|i^n + \dfrac{i}{n}\right|$，根据复数模的三角不等式有

$$1 - \frac{1}{n} \le |z_n| \le 1 + \frac{1}{n}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |z_n| = 1,$$

故实序列 $\{|z_n|\}$ 收敛。

注 (1) 序列$\{|z_n|\}$ 收敛 $\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ 序列$\{z_n\}$ 收敛；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|=0 \rightleftarrows \lim\limits_{n\to+\infty} z_n=0.$

例 设 $z_n=\dfrac{10000^n}{n!}i^n$，讨论序列$\{z_n\}$ 的收敛性。

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{10000^n}{n!}=0, \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z_n=0,$

即序列$\{z_n\}$ 收敛。

二、复数项级数

1. 基本概念

定义 设 $\{z_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为一复数序列，

P79

(1) 称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$ 为复数项级数，简记为 $\sum z_n$.

(2) 称 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为级数的部分和；

(3) 如果序列 $\{s_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$，则称级数收敛，

且极限值 s 称为级数的和；

(4) 如果序列 $\{s_n\}$ 不收敛，则称级数发散。

二、复数项级数

2. 复数项级数收敛的充要条件

定理 设 $z_n = x_n + i y_n$，则级数 $\sum z_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 都收敛。

P80 定理 4.2

证明 令 σ_n 和 τ_n 分别为级数 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 的部分和（序列）

则级数 $\sum z_n$ 的部分和（序列）为：$s_n = \sigma_n + i\tau_n$，

由于序列 $\{s_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{\sigma_n\}$ 和 $\{\tau_n\}$ 都收

因此级数 $\sum z_n$ 收敛的充要条件是 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 都收

二、复数项级数

3. 复数项级数收敛的必要条件

定理 设 $z_n = x_n + iy_n$，则级数 $\sum z_n$ 收敛的必要条件是

P80 定理4.3

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$$（即级数的通项要趋向于零）

证明 由于级数 $\sum z_n$ 收敛的充要条件是 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 都收

而实数项级数 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 收敛的必要条件是：

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0,\quad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0,\quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$$

因此级数 $\sum z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$

例 设$z_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{i}{2^n}$，讨论级数$\sum z_n$的收敛性。 P81 例 4.2 (1)

解 级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$收敛， 几何级数：$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a^n$，当 $0<a<1$ 时

级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散， p-级数：$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p\le1$ 时发散。

因此级数$\sum z_n$ 发散。

例 设 $z_n=\dfrac{1}{n^2}i^n$，讨论级数 $\sum z_n$ 的收敛性。 P81 例 4.2 (3)

解 $$z_n=\frac{1}{n^2}i^n=\frac{1}{n^2}e^{i\frac{\pi}{2}n}$$

$$=\frac{1}{n^2}\cos\frac{\pi n}{2}+i\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\xlongequal{\text{记为}}x_n+iy_n,$$

由于级数 $\sum|x_n|$ 和 $\sum|y_n|$ 均为收敛，[绝对收敛]

故有级数 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 均收敛，得级数 $\sum z_n$ 收敛。

- 在复数项级数中是否也能引入绝对收敛的概念呢？

二、复数项级数

4. 复数项级数的绝对收敛与条件收敛

定义 (1) 若 $\sum |z_n|$ 收敛，则称 $\sum z_n$ 绝对收敛。

P 81

(2) 若 $\sum |z_n|$ 发散，$\sum z_n$ 收敛，则称 $\sum z_n$ 条件收敛

定理 若 $\sum |z_n|$ 收敛，则 $\sum z_n$ 必收敛。 P 80 定理 4.4

证明 由 $\sum |z_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum \sqrt{x_n^2+y_n^2}$ 收敛，

又由 $|x_n| \le \sqrt{x_n^2+y_n^2}$，$|y_n| \le \sqrt{x_n^2+y_n^2}$，

根据正项级数的比较法可得 $\sum |x_n|$ 和 $\sum |y_n|$ 均收敛，

$\Rightarrow \sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 均收敛 $\Rightarrow \sum z_n$ 收敛。

例 设 $z_n=\dfrac{i^n}{n!}$，讨论级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ 的收敛性。

解 由 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|z_n|=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}=\mathrm{e}$,

可知 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛故 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ 收敛。

例 设 $z_n = \dfrac{i^n}{\sqrt{n}}$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ 的收敛性。

分析 由于 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |z_n| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,（p 级数，采用比阶法）

因此不能马上判断 $\sum z_n$ 是否收敛。

解 $z_n = \dfrac{i^n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cos\dfrac{\pi n}{2} + i \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin\dfrac{\pi n}{2} \xlongequal{\text{记为}} x_n + i y_n$,

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$ 收敛,（莱布尼兹型的交错级数）

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{7}} + \cdots$ 收敛，故级数 $\sum z_n$ 收敛。

轻松一下吧……