§6.2 共形映射的基本问题

一、问题一

二、问题二（基本问题）

一、问题一

对于给定的区域 D 和定义在区域 D 上的函数 $w = f(z)$, 求象集合 $f(D)$.

1. 保域性定理

定理 设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析，且不恒为常数，则其象集合 $G = f(D)$ 仍然为区域。

P141 定理 6.2

证明 （略）

意义 保域性定理将解析函数的象集合的求解问题变成了求象区域的问题。

一、问题一

2. 边界对应原理

定理 设区域 D 的边界为简单闭曲线 C，函数 $f(z)$ 在闭

P141 定理 6.3

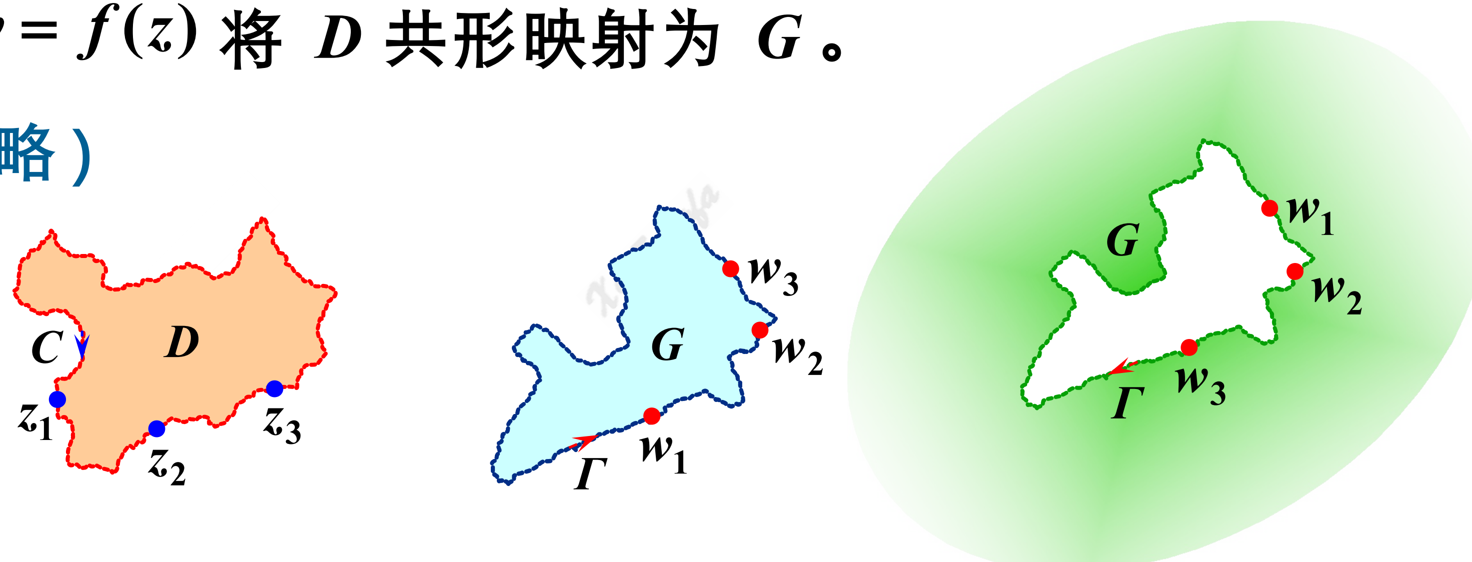
$\overline{D}=D+C$ 上**解析**，且将曲线 C **双方单值**地映射为

闭曲线 Γ. 当 z 沿 C 的正向绕行时，相应的 w 的绕行

方向定为 Γ 的正向，并令 G 是以 Γ 为边界的区域，则

$w=f(z)$ 将 D 共形映射为 G。

证明（略）



一、问题一

2. 边界对应原理

定理 设区域 D 的边界为简单闭曲线 C，函数 $f(z)$ 在闭

$\overline{D}=D+C$ 上解析，且将曲线 C 双方单值地映射为

闭曲线 Γ. 当 z 沿 C 的正向绕行时，相应的 w 的绕行

方向定为 Γ 的正向，并令 G 是以 Γ 为边界的区域，则

$w=f(z)$ 将 D 共形映射为 G。

意义 边界对应原理进一步将解析函数的象区域的求解问题

变成了求象曲线的问题。

一、问题一

3. 求象区域的一般方法 补

设函数 $w=f(z)$ 在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上解析，且为一一

(1) 令 $z=x+iy,\ w=u+iv$，则有

$$(\mathrm{A})\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y); \end{cases} \Rightarrow \quad (\mathrm{B})\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v). \end{cases}$$

(2) 求边界曲线 C 的象曲线 Γ.

- 若 C 的方程为 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \xrightarrow{\text{由 (A) 式}} \begin{cases} u=u(x(t),\ y(t)), \\ v=v(x(t),\ y(t)), \end{cases}$

即得象曲线 Γ 的方程 $\begin{cases} u=\tilde{u}(t), \\ v=\tilde{v}(t). \end{cases}$ （参数式）

一、问题一

3. 求象区域的一般方法

设函数$w=f(z)$ 在闭域$\overline{D}=D+C$ 上解析，且为一一

(1) 令$z=x+iy,\ w=u+iv,$ 则有

$$(A)\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y); \end{cases} \Rightarrow (B)\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v). \end{cases}$$

(2) 求边界曲线 C 的象曲线Γ.

- 若 C 的方程为$F(x,y)=0$, (方程式)

$$\xrightarrow{\text{由 (B) 式}} F(\varphi(u,v),\psi(u,v))=0,$$

即得象曲线Γ 的方程$\widetilde{F}(u,v)=0$. (方程式)

一、问题一

3. 求象区域的一般方法

设函数 $w=f(z)$ 在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上解析，且为一一

(1) 令 $z=x+iy$, $w=u+iv$, 则有

$$(\mathrm{A})\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y); \end{cases} \Rightarrow (\mathrm{B})\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v). \end{cases}$$

(2) 求边界曲线 C 的象曲线 Γ.

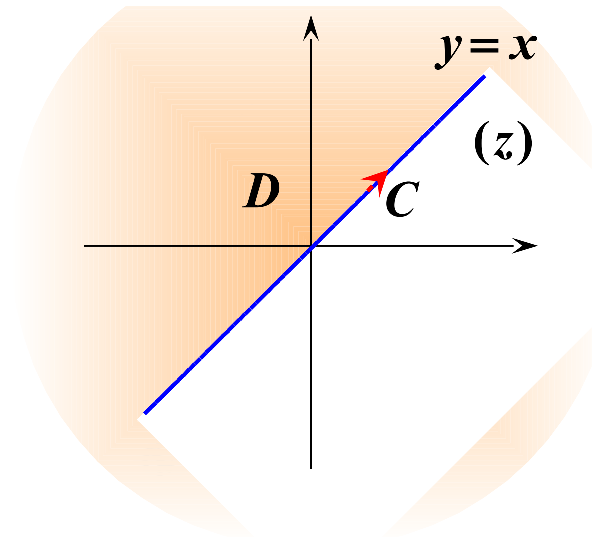
(3) 求象区域.

方法一 沿边界 C 的正向找三点，考察象点的走向。

方法二 在区域 D 的内部找一点，考察象点的位置。

注意 对于具体的函数，将还会有一些特殊的方法。

例 已知函数 $w=\dfrac{1}{z+i}$，区域 D 如图所示，求象区域 G。



解 (1) 由 $w=\dfrac{1}{z+i}$，有 $z=\dfrac{1}{w}-i$，

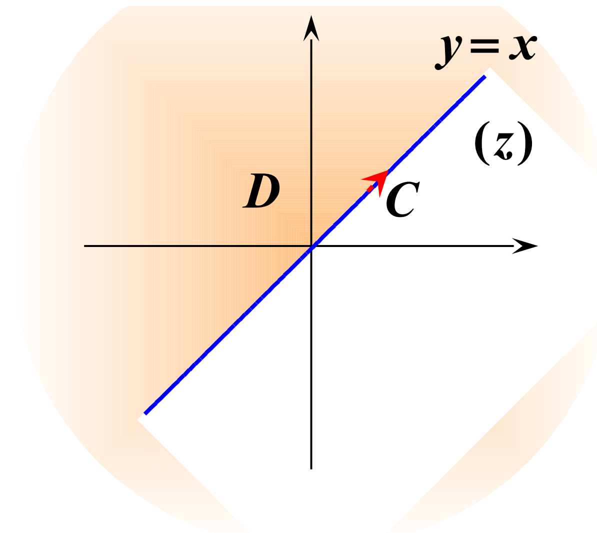
令 $z=x+iy$，$w=u+iv$，

则有 $x+iy=\dfrac{1}{u+iv}-i$

$$=\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{v}{u^2+v^2}i-i,$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=-\frac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}.$$

例 已知函数 $w=\dfrac{1}{z+i}$，区域 D 如图所示，求象区域 G。



解 (1) $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$， $y=-\dfrac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}$.

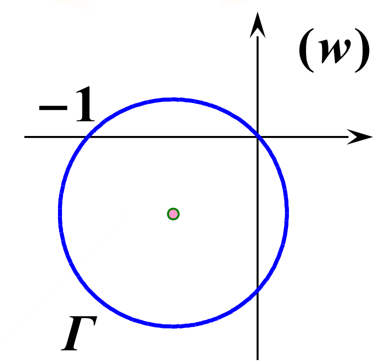
(2) 求边界曲线 C 的象曲线 Γ.

曲线 C 的方程为 $x-y=0$,

$$\xrightarrow{\text{由 (1) 式}} u^2+v^2+u+v=0,$$

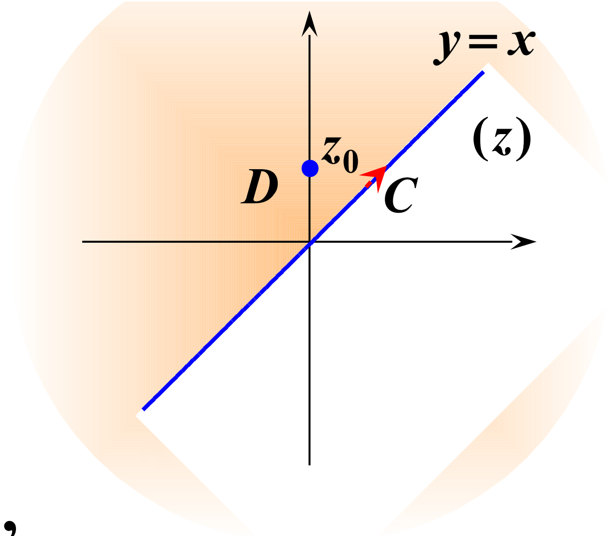
即得象曲线 Γ 的方程为

$$\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$



例 已知函数 $w=\dfrac{1}{z+i}$，区域D如图所示，求象区域G。

解 (1) $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$， $y=-\dfrac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}$.



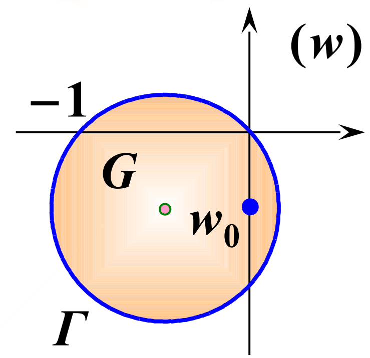
(2) 求边界曲线 C 的象曲线Γ.

(3) 求象区域.

方法一 在 D 的内部取一点 $z_0=i$,

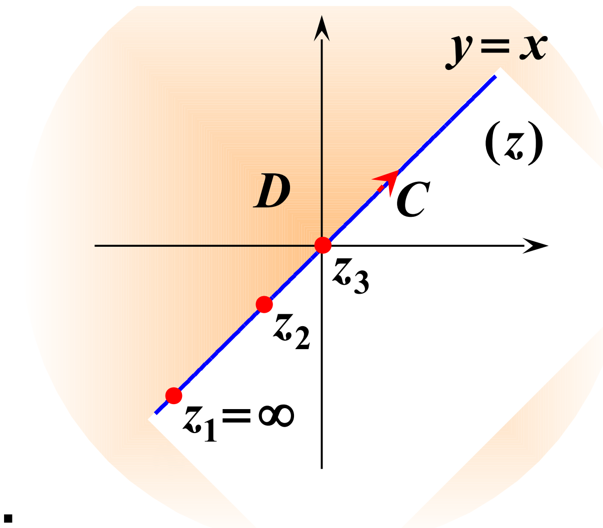
代入函数$w=\dfrac{1}{z+i}$,

得到象点$w_0=-\dfrac{1}{2}i$,



故象区域 G 在曲线 Γ 的“内部”。

例 已知函数 $w=\dfrac{1}{z+i}$，区域 D 如图所示，求象区域 G。



解 (1) $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$， $y=-\dfrac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}$.

(2) 求边界曲线 C 的象曲线Γ.

(3) 求象区域.

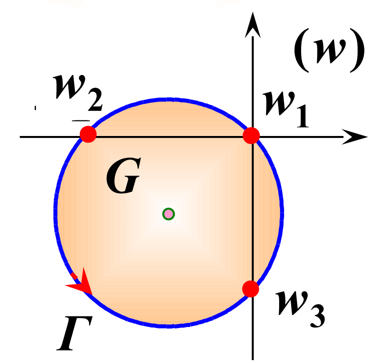
方法二 在 D 的边界上取三点：

后续讨论将会看到仅此一步就足够了

$z_1=\infty,\ \longrightarrow\ w_1=0,$

$z_2=-1-i,\ \longrightarrow\ w_2=-1,$

$z_3=0,\ \longrightarrow\ w_3=-i,$



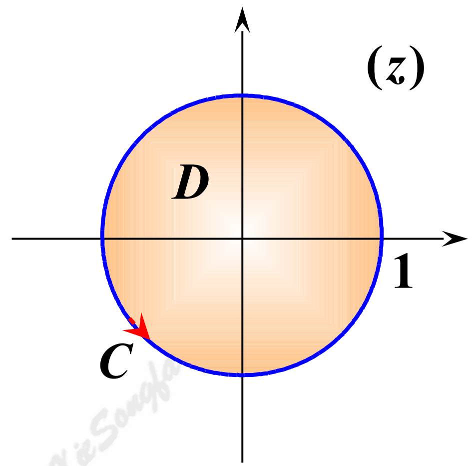
故象区域 G 在曲线 的“内部”。

例 设 $D=\{z:|z|<1\}$，求它在下列映射下的象区域 G。

(1) $w=iz$; (2) $w=\dfrac{1}{z}$.

解 设区域 D 的边界为 C，则 C 的方程为

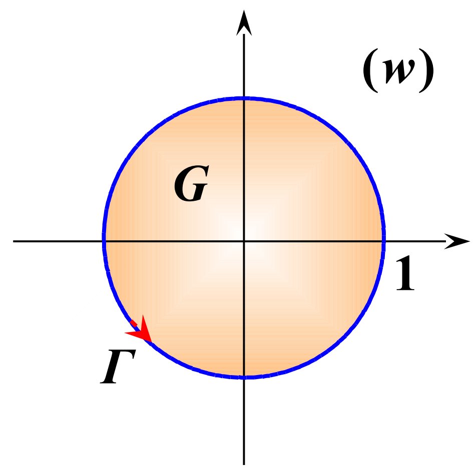
$$z=\mathrm{e}^{i\theta}，其中\theta:0\to 2\pi.$$



(1) 在 $w=iz$ 的映射下曲线 C 对应的象曲线 Γ 的方程为

$$w=i\mathrm{e}^{i\theta}=\mathrm{e}^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}=\mathrm{e}^{i\varphi},$$

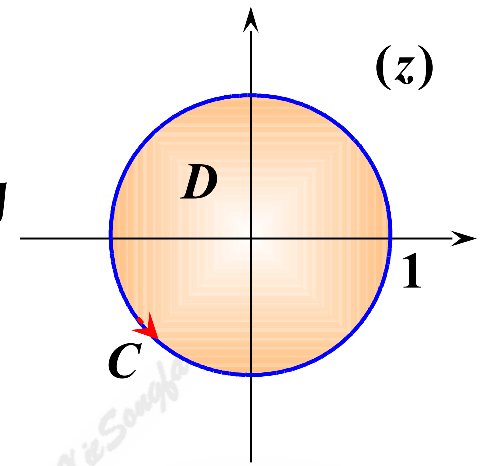
其中 $\varphi:\dfrac{\pi}{2}\to 2\pi+\dfrac{\pi}{2}$.



即得象区域 G 如图所示。

例 设 $D=\{z:|z|<1\}$，求它在下列映射下的象区域 G。

(1) $w=iz$; (2) $w=\dfrac{1}{z}$.



解 设区域 D 的边界为 C，则 C 的方程为

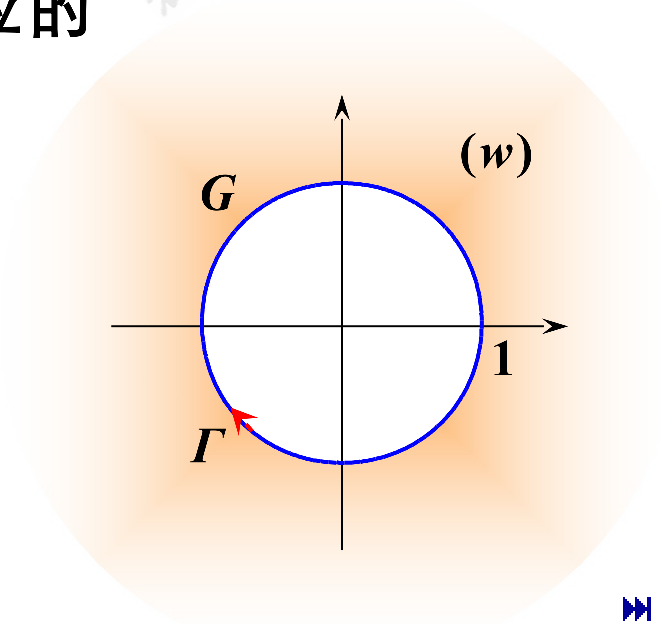
$$z=\mathrm{e}^{i\theta}，\text{其中}\ \theta:0\to 2\pi.$$

(2) 在 $w=\dfrac{1}{z}$ 的映射曲线 C 对应的象曲线 Γ 的方程为

$$w=1/\mathrm{e}^{i\theta}=\mathrm{e}^{i(-\theta)}=\mathrm{e}^{i\varphi},$$

其中 $\varphi:0\to -2\pi$.

即得象区域 G 如图所示。



二、问题二（基本问题）

对给定的区域 D 和 G，求共形映射 $f(z)$，使 $G = f(D)$.

1. 黎曼存在唯一性定理

P143 定理6.4

定理 设 D 和 G 是任意给的的两个单连域，在它们各自的i

上至少含有两个点，则一定存在解析函数 $w = f(z)$，将区

域 D 双方单值地映射为 G. 如果在区域 D 和 G 内再分

任意指定一点 z_0 和 w_0，并任给一个实数 $\theta_0\ (-\pi < \theta_0 \le \pi)$，

要求函数 $w = f(z)$ 满足 $f(z_0) = w_0$ 且 $\arg f'(z_0) = \theta_0$，则

映射 $w = f(z)$ 的函数是唯一的。

证明（略）

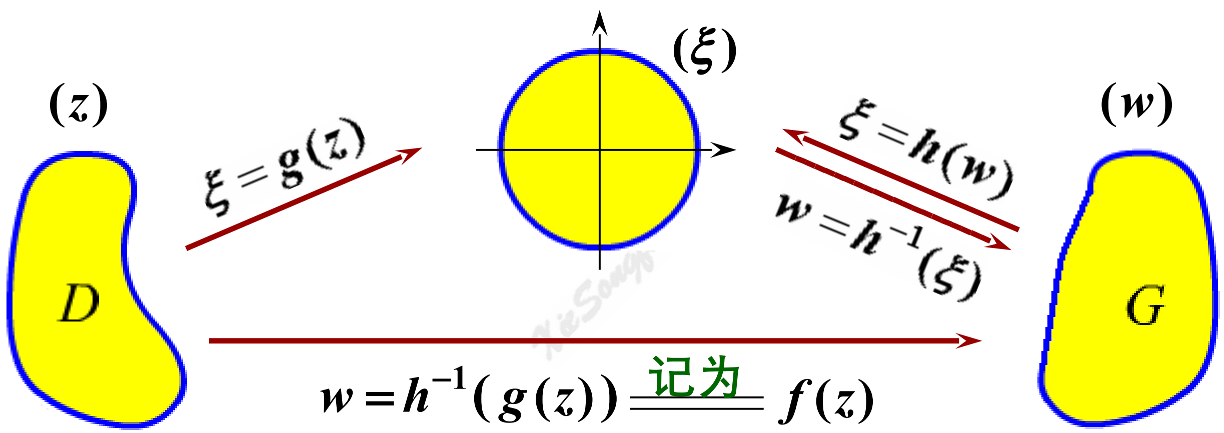
二、问题二（基本问题）

对给定的区域 D 和 G，求共形映射 $f(z)$，使 $G=f(D)$.

2. 基本问题的简化 P140

对给定的单连域 D，求共形映射使得 D 映射为单位圆域。

- 事实上，由此即可求得任意两个单连域之间的共形映射



$$w=h^{-1}(g(z))\ \underline{\underline{\text{记为}}}\ f(z)$$

（实习）

附：关于存在性与唯一性的补充说明。

（存在性与唯一性的补充说明）

休息一下 ……

附：关于存在性与唯一性的补充说明

1. 关于存在性 P141

- 若区域 D 为下列情形之一：(1) 扩充复平面；(2) 复平面；(3) 扩充复平面上除去一个有限点 z_0，则不存在解析函数，使 D 共形映射为单位圆域。

其中，情形 (3) 可利用映射 $\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$ 转化为情形 (2)。

证明 若存在函数 $w = f(z)$，将 D 共形映射为单位圆域 $|w| < 1$，

则 $w = f(z)$ 在整个复平面上解析且 $|f(z)| < 1$（即有界），

根据刘维尔 (liouville) 定理（见 §3.4）$f(z)$ 必恒为常数。

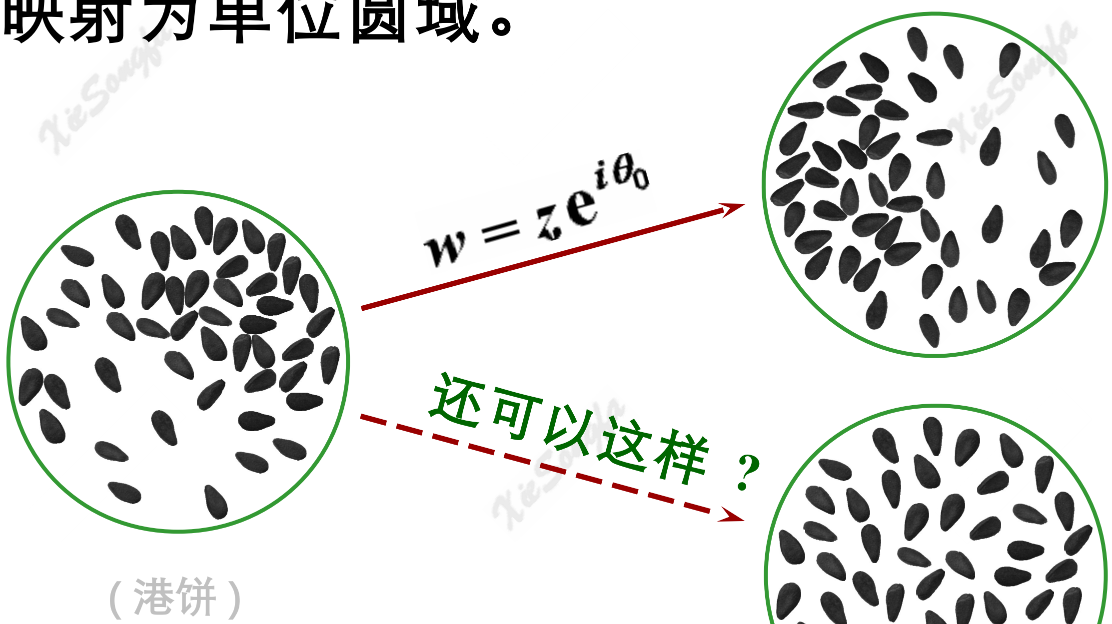
这显然不是所要求的映射。

附：关于存在性与唯一性的补充说明

2. 关于唯一性 P142

- 一般说来是不唯一的。

比如 对于任意给定的实常数 θ_0，函数 $w = z e^{i\theta_0}$ 将单位圆域仍然映射为单位圆域。



附：关于存在性与唯一性的补充说明

3. 黎曼存在唯一性定理

定理 设 D 和 G 是任意给的的两个单连域，在它们各自的

上至少含有两个点，则一定存在解析函数 $w=f(z)$，将区域 D 双方单值地映射为 G。如果在区域 D 和 G 内再分

任意指定一点 z_0 和 w_0，并任给一个实数 $\theta_0\ (-\pi<\theta\le\pi)$，要求函数 $w=f(z)$ 满足 $f(z_0)=w_0$ 且 $\arg f'(z_0)=\theta_0$，则映射 $w=f(z)$ 的函数是唯一的。