练 习 七

1．序列 $z_n = \frac{n!}{n^n} i^n$ 是否有极限？若有，求出其极限。

解：因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n! i^n}{n^n}}{\frac{(n-1)!^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}[1+\frac{1}{n-1}^{n-1}]^{-1} = e^{-1} < 1$

故级数 $\sum z_n$ 收敛，则其通项 $z_n \to 0, (n \to \infty)$

即序列 z_n 有极限，亦即 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} i^n = 0$

2.级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}$ 是否收敛？是否绝对收敛？

解：因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n!}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛，因而绝对收敛，故原级数收敛。

3．试确定下列幂级数的收敛半径。

（1） $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^n$

解：$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\cos in}{\cos i(n+1)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^n + e^{-n}}{2}}{\frac{e^{(-(n+1))} + e^{1(n+1)}}{2}}\right|$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{e^n + e^{-n}}{e^{-(n+1)} + e^{(n+1)}}\right| = \frac{1}{e}$

（2） $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n + a^n)z^n$

解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+a^{n}}{(n+1)+a^{n+1}}\right|$

当$|a|<1$时　$R=1$

当$|a|=1$时　$R=1$

当$|a|>1$时　$R=1/|a|$

4．将下列各函数展开为z的幂级数，并指出其收敛区域。

（1）$\dfrac{1}{(1-z)^{2}}$

解：$\dfrac{1}{(1-z)^{2}}=(\dfrac{1}{1-z})'=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n})'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n-1}\cdot n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n}\,(|z|<1).$

R=1，收敛域为$|z|<1$

（2）$e^{\frac{z}{z-1}}$

解：$g(z)=e^{\frac{z}{z-1}}=e.e^{\frac{z}{z-1}}$，令$f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$，则$f'(z)=f(z)\dfrac{-1}{(z-1)^{2}}$

$$(z-1)^{2}f'(z)+f(z)=0$$

对此求导

$$(z-1)^{2}f''(z)+(zz-1)f'(z)=0$$

$$(z-1)^{2}f'''(z)+(4z-3)f''(z)+2f'(z)=0$$

$$f(0)=e^{-1},f'(0)=-e^{-1},f''(0)=-e^{-1},f'''(0)=-e^{-1}$$

$$f^{(4)}(0)=e^{-1}$$

故　$e^{\frac{z}{z-1}}=1-z-\dfrac{1}{2!}z^{2}-\dfrac{1}{3!}z^{3}+\dfrac{1}{4!}z^{4}+\cdots,|z|<1$

（3）$\int_0^z e^{z^2}dz$

解：$\int_0^z e^{z^2}dz = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z \frac{z^{2n}}{n!}dz$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}, \qquad |z| < \infty$

5．讨论级数$\sum_{n=0}^{\infty}(z^{n+1}-z^n)$的收敛性。

解：级数的部分和为$S_n = \sum_{k=0}^{\infty}(z^{n+1}-z^n) = z^{n+1}-1$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(z^{n+1}-1)$

当$|z|<1$时，$\lim_{n\to\infty} S_n = -1,$级数收敛。

当$|z|>1$时，$\lim_{n\to\infty} S_n$不存在，级数发散。

当$z=1$时，$\lim_{n\to\infty} S_n = 0,$级数收敛。

当$z=-1$时，$\lim_{n\to\infty} S_n$不存在，级数发散。

6．证明$\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}$在$|z|>1$内解析。

证：当$|z|>1$时，显然$z\neq 0$，令$w=\frac{1}{z}$，则

$\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}w^n$，此级数在$|w|<1$是收敛的。

故在$|w|<1$是解析的，此即$\left|\frac{1}{z}\right|<1$，亦即在

$|z|>1$内，$\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}$解析。

*7.思考题

（1）如何判定级数的绝对收敛性与收敛性?

答：由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\alpha_n\right|$ 的各项都为非负实数，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的绝对收敛性可依正项级数的定理判定之。又由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 可表示为 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+i\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，其中 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均为数项级数，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的收敛性可依赖于数项级数的定理判定之。

（2）判定级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件是什么？ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充要条件又是什么?

答：如同实级数一样，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0;$ 而 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Im}a_n$ 都是绝对收敛级数。

（3）为什么说函数能展为幂级数与函数为解析函数是等价的?

答：因为在收敛圆内，幂级数的和函数是解析函数。同时，在某点邻域内解析的函数在其邻域内必然可以展成幂级数。