第二章 解析函数

§2.1 解析函数的概念

§2.2 解析函数和调和函数的关系

§2.3 初等函数

§2.1 解析函数的概念

一、导数与微分

二、解析函数

三、柯西-黎曼方程

一、导数与微分

1. 复变函数的导数

定义 设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的某邻域内有定义，$z_0+\Delta z$ 是 z_0 的邻域内的任意一点，$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$，如果

P30 定义2.1

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在有限的极限值 A，则称 $f(z)$ 在 z_0 处可导，且称 A 为 $f(z)$ 在 z_0 处的导数，记作 $f'(z_0)$.

- 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点都可导，则称 $f(z)$ 在 D 内可导，此时即得 $f(z)$ 的导(函)数 $f'(z)$.

一、导数与微分

2. 复变函数的微分

定义 设函数 $w=f(z)$ 在 z 点的某邻域内有定义，$z+\Delta z$ 是 z 的邻域内的任意一点，如果存在 A，使得

P30 补

$$\Delta w = f(z+\Delta z)-f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|),$$

则称 $f(z)$ 在 z 处可微，$A\Delta z$ 为微分，记作 $\mathrm{d}w = A\Delta z$.

特别地，有 $\mathrm{d}z=\Delta z$. (考虑函数 $w=f(z)=z$ 即可)

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}w = A\,\mathrm{d}z.}$$

- 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微，则称 $f(z)$ 在 D 内可微。
- 导数反映的是“变化率”；而微分更能体现“逼近”的思想。

一、导数与微分

3. 可导与可微以及连续之间的关系

(1) 可导 $\rightleftharpoons$ 可微

如果可导 $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z) \Rightarrow \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w-f'(z)\Delta z}{\Delta z}=0$

$\Rightarrow \Delta w-f'(z)\Delta z=o(|\Delta z|) \Rightarrow$ 可微;

如果可微 $\Rightarrow \Delta w=A\Delta z+o(|\Delta z|) \Rightarrow \dfrac{\Delta w}{\Delta z}=A+\dfrac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=A=f'(z) \Rightarrow$ 可导。

由此可得 $\mathrm{d}w=f'(z)\mathrm{d}z$ 即 $f'(z)=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

一、导数与微分

3. 可导与可微以及连续之间的关系

(1) 可导 $\rightleftarrows$ 可微

(2) 可导 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ 连续

如果可导 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow \Delta w = A\Delta z + o(|\Delta z|)$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0 \Rightarrow \text{连续。}$$

- 由此可见，上述结论与一元实函数是一样的。
- 对二元实函数：偏导数存在 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 可微 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 偏导数连续。

例 求下列函数的的导数。

$$(1)\ f(z)=z^2; \qquad (2)\ f(z)=\frac{1}{z}.$$

解 (1) 由 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z,$$

得 $f'(z)=(z^2)'=2z.$

同理可得 $(z^n)'=nz^{n-1}$，(n 为正整数)

$(C)'=0$，(C 为复常数)

。

例 求下列函数的的导数。

$$(1)\ f(z)=z^2; \qquad (2)\ f(z)=\frac{1}{z}.$$

解 (2) 由 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{z(z+\Delta z)}=-\frac{1}{z^2}.$$

得 $f'(z)=\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}.$

一、导数与微分

4. 求导法则 P32

(1) 四则运算法则

$$[f(z)\pm g(z)]' = f'(z)\pm g'(z);$$

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z);$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2},\quad (g(z)\neq 0).$$

一、导数与微分

4. 求导法则

(1) 四则运算法则

(2) 复合函数的求导法则

$$[f(g(z))]' = f'(g(z))g'(z).$$

(3) 反函数的求导法则

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}\bigg|_{z=\varphi(w)} = \frac{1}{f'[\varphi(w)]}.$$

其中，$z=\varphi(w)$ 与 $w=f(z)$ 是两个互为反函数的单值函数，且 $f'(z)\neq 0$.

二、解析函数

定义 P31 定义 2.2

(1) 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点以及 z_0 点的邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析；

(2) 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点解析，则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析，或者称 $f(z)$ 是 D 内的解析函数。

关系 (1) 点可导 $\overset{\not\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ 点解析；

(2) 区域可导 $\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ 区域解析。

奇点 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点。

（解析函数的由来）

二、解析函数

性质 P32

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商（除去分母为零的点）在 D 内解析。

(2) 如果函数 $\xi = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w = f(\xi)$ 在 ξ 平面上的区域 G 内解析，且对 D 内的每一点 z，函数 $g(z)$ 的值都属于 G，则复合函数 $w = f[g(\xi)]$ 在 D 内解析。

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z+3}{4z^2-1}$ 的解析区域及在该区域上的导数。

解 设 $P(z)=z+3$，$Q(z)=4z^2-1$，由函数 z^n 的解析性以及求导法则可知：

当 $Q(z)\neq 0$ 时，$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 解析，

又方程 $Q(z)=4z^2-1=0$ 的根是 $z=\pm\dfrac{1}{2}$，

因此在全平面除去点 $z=\pm\dfrac{1}{2}$ 的区域内，$f(z)$ 解析。

$$f'(z)=\frac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{[Q(z)]^2}=\frac{4z^2-1-8z(z+3)}{(4z^2-1)^2}.$$

例 讨论函数 $w=f(z)=|z|^2$ 的解析性。

解 由 $w=f(z)=|z|^2=z\overline{z}$, $(=x^2+y^2)$ 有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\overline{z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\overline{\Delta z}\right).$$

极限不存在 (见 §1.5)

当 $z=0$ 时 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=0$，即 $f'(0)=0$;

当 $z\neq 0$ 时 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 不存在。

因此，$w=f(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 点可导，处处不解析。

例 讨论函数$w=f(z)=x+i2y$的解析性。

解 $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(x+\Delta x)+i2(y+\Delta y)-(x+i2y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x+i2\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

当$\Delta x=0,\ \Delta y\to 0$时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=2,$

当$\Delta y=0,\ \Delta x\to 0$时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=1,$

因此，$w=f(z)=x+i2y$处处不可导，处处不解析。

问题 对函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，如何判别其解析性？

三、柯西－黎曼方程

1. 点可导的充要条件

P33 定理2.1

定理 函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+iy$ 处可导的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，且满足柯西–黎曼（Cauchy-Riemann）方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

（简称 $C-R$ 方程）

附 实二元函数 $u(x,y)$ 可微的含义：

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

$$o(|\Delta z|)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\boxed{o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}.$$

三、柯西 - 黎曼方程

1. 点可导的充要条件

证明 必要性“$\Rightarrow$” 若 $w=f(z)=u+iv$ 在 $z=x+iy$ 处可导，

则必可微，即 $\Delta w = f'(x)\Delta z + o(|\Delta z|)$,

记 $f'(z)=a+ib$, 由 $\Delta w=\Delta u+i\Delta v$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 有

$$\Delta u+i\Delta v=(a+bi)(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(|\Delta z|), \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(|\Delta z|), \end{cases}$$

故 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，且

$$a=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad -b=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

三、柯西-黎曼方程

1. 点可导的充要条件

证明 充分性“$\Leftarrow$” 若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则

(跳过 ?)

$$\begin{cases} \Delta u = u'_x\,\Delta x + u'_y\,\Delta y + o(|\Delta z|), \\ \Delta v = v'_y\,\Delta y + v'_x\,\Delta x + o(|\Delta z|), \end{cases}$$

又由 u 和 v 满足 $C-R$ 方程 $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, 得：

$$\begin{cases} \Delta u = u'_x\,\Delta x - v'_x\,\Delta y + o(|\Delta z|), \\ \Delta v = u'_x\,\Delta y + v'_x\,\Delta x + o(|\Delta z|), \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta w = \Delta u + i\,\Delta v = (u'_x + i\,v_x)\underbrace{(\Delta x + i\,\Delta y)}_{\Delta z} + o(|\Delta z|),$$

即 $f(z)$ 在 $z = x + i\,y$ 处可微（可导），$f'(z) = u'_x + i\,v'_x$.

三、柯西 - 黎曼方程

1. 点可导的充要条件

求导公式 若 $f(z)$ 在 $z=x+iy$ 处可导，

P34

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

（关于 C -R 条件）

三、柯西 - 黎曼方程

2. 区域解析的充要条件

定理 函数 $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是: $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在区域 D 内可微，且满足 $C-R$ 方程。

P34 定理 2.2

推论 若函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的四个偏导数 u'_x, u'_y, v'_x, v'_y 在区域 D 内存在且连续，并满足 $C-R$ 方程，则函数 $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ 在区域 D 内解析。

P34 推论

例 讨论函数$w=\overline{z}$ 的可导性与解析性。

解 由 $w=\overline{z}=x-iy$，有 $u=x, v=-y$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-1, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

可知不满足 $C-R$ 方程，

所以$w=\overline{z}$ 在复平面内处处不可导， 处处不解析。

例 讨论函数$w=\overline{z}z^2$的可导性与解析性。

解 由 $w=\overline{z}z^2=|z|^2 z=(x^3+xy^2)+i(x^2y+y^3)$,

有 $u=x^3+xy^2,\ v=x^2y+y^3$,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy, \\ &\frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2xy, \end{aligned}\right\}$$

由 $C-R$ 方程, $\Rightarrow\ x=y=0$,

所以 $w=\overline{z}z^2$ 仅在$(0, 0)$点可导，处处不解析。

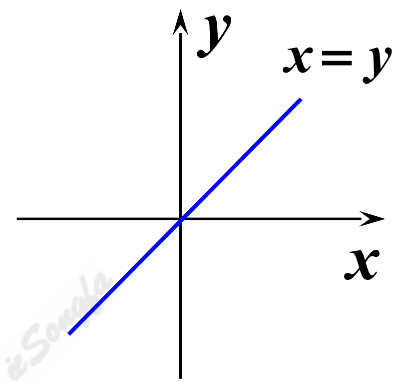
例 讨论函数 $f(z)=x^2+iy^2$ 的可导性与解析性。

解 由 $u=x^2,\ v=y^2$，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial v}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\end{aligned}\right\}$$

由 $C-R$ 方程，

$\Rightarrow\ x=y,$



所以 $f(z)=x^2+iy^2$ 仅在直线 $x=y$ 上可导，处处不解析。

例 讨论函数 $f(z)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+i\sin y)$ 的可导性与解析性.

P35 例 2.4 部分

解 由 $u=\mathrm{e}^{x}\cos y,\ v=\mathrm{e}^{x}\sin y$, 有

$$\left.\begin{aligned} &u'_x=\mathrm{e}^{x}\cos y, \quad u'_y=-\mathrm{e}^{x}\sin y,\\ &v'_y=\mathrm{e}^{x}\cos y, \quad v'_x=\mathrm{e}^{x}\sin y, \end{aligned}\right\}$$

四个偏导数连续，且满足 $C-R$ 方程，

故 $f(z)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+i\sin y)$ 在全平面上处处可导，处处解析，且 $f'(z)=u'_x+i\,v'_x=\mathrm{e}^{x}(\cos y+i\sin y)$.

注 函数 $f(z)=\mathrm{e}^{x}(\cos y+i\sin y)=\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{iy}\overset{\text{记为}}{=\!=}\mathrm{e}^{z}$,

本例结果表明：$(\mathrm{e}^{z})'=\mathrm{e}^{z}$.

例 设函数 $f(z)=(x^2+Axy+By^2)+i(Cx^2+Dxy+y^2)$，求常数 A,B,C,D 的值，使 $f(z)$ 在复平面内处处解析。

解 由 $u=x^2+Axy+By^2$, $v=Cx^2+Dxy+y^2$，有

$$u'_x=2x+Ay,\quad u'_y=Ax+2By,$$

$$v'_y=Dx+2y,\quad v'_x=2Cx+Dy,$$

由 $C-R$ 方程可得 $2x+Ay=Dx+2y$,

$$Ax+2By=-(2Cx+Dy),$$

求解得 $A=2$, $B=-1$, $C=-1$, $D=2$.

例 设函数 $f(z)=u+iv$ 在某区域 D 内解析，且满足下列条件之一，证明：$f(z)$ 在区域 D 内为常数。

(1) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；(2) $|f(z)|$ 在 D 内为常数。

证 (1) 由 $f(z)=u+iv$ 解析 $u'_x=v'_y,\ u'_y=-v'_x$,

由 $\overline{f(z)}=u-iv$ 解析 $u'_x=(-v)'_y,\ u'_y=-(-v)'_x$,

$\Rightarrow\ u'_x=u'_y=v'_x=v'_y=0,\ \Rightarrow\ u,v$ 为常数,

即得 $f(x,y)=c$ (常数) 。

证 (2) 由 $f(z)=u+iv$ 解析，$\Rightarrow u'_x=v'_y,\ u'_y=-v'_x$，

由 $|f(z)|$ 在 D 内为常数 $\Rightarrow u^2+v^2=a$(常数)，

两边分别对 x,y 求偏导得：

$$\begin{cases} u\cdot u'_x+v\cdot v'_x=0, \\ u\cdot u'_y+v\cdot v'_y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\cdot u'_x-v\cdot u'_y=0, \\ v\cdot u'_x+u\cdot u'_y=0, \end{cases} \quad (A)$$

① 若 $\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}=0$，$\Rightarrow u=v=0$，$\Rightarrow f(x,y)=0$(常数)；

② 若 $\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}\neq 0$，$\Rightarrow$ 方程组 (A) 只有零解，

$\Rightarrow u'_x=u'_y=v'_x=v'_y=0$，$\Rightarrow u,v$ 为常数，

即得 $f(x,y)=c$(常数)。

例 设函数 $f(z)=u+iv_1$ 和 $g(z)=u+iv_2$ 均在某区域 D 内解析，证明：$v_1(x,y)=v_2(x,y)+c$，其中 c 为常数。

解 令 $h(z)=f(z)-g(z)=0+i(v_1-v_2)\overset{\text{记为}}{=\!=}\tilde{u}+i\tilde{v}$，

由 $f(z)$ 和 $g(z)$ 解析，得 $h(z)$ 也解析，

由 $C-R$ 方程有 $\tilde{u}'_x=\tilde{v}'_y,\quad\Rightarrow\quad(v_1-v_2)'_y=0,$

$$\tilde{u}'_y=-\tilde{v}'_x,\quad\Rightarrow\quad(v_1-v_2)'_x=0,$$

即得 $v_1(x,y)-v_2(x,y)=c$（常数）。

意义 解析函数的实部一旦给定，则虚部只能相差一个常数。

（虚部）（实部）

- 下节还将看到对于解析函数的实部（或虚部）本身也有要求。

轻松一下 ……

附：知识广角 —— 解析函数的由来

- 解析函数的名称是康道尔西 (Condorcet) 首先使用的。他的研究报告没有公开出版，但有很多人知道他的工作。
- 在康道尔西使用该名称 20 年之后，拉格朗日 (Lagrange) 也使用了解析这个术语，他在《解析函数论》中将能展开成级数的函数说成是解析函数。
- 现在所使用的解析函数的概念，则基本上是在魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 的著作中形成的。

(返回)

附：知识广角 —— 关于 $C-R$ 条件

- 1746 年，达朗贝尔 (D’Alemert) 在研究流体力学时首先提到了如下的关系式：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

- 1755 年，欧拉 (Euler) 也提到了上述关系式。

- 1777 年，欧拉的两篇研究报告 (1793 年与 1794 年才发表) 中证明了条件的必要性，即

若函数 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，则上述关系式成立。

附：知识广角 —— 关于 $C-R$ 条件

- 1851 年，上述关系式在黎曼的第一篇重要论文（博士论文）“复变函数论的基础”中再次出现。黎曼把它当作了解析函数定义的基础，并且在它上面建立了相应的理论。
- 上述关系式在柯西的著作中也多次出现。柯西在很长时期内没能解决所研究的函数应当满足什么样的条件才能成为解析函数，直到晚年他才区分出解析函数类。
- 后来人们就以柯西和曼黎的名字来命名上述关系式，不过也有些著作把该上述关系式称为欧拉－达朗贝尔条件。

附：人物介绍 —— 柯西

柯 西

A. L. Cauchy

(1789 ～ 1857)

法国数学家

- 数学史上最多产的数学家之一。
- 复变函数论的奠基人之一。
- 数理弹性理论的奠基人之一 。

附：人物介绍 —— 柯西

- 在纯数学和应用数学方面的功力相当深厚。很多数学定理和公式都是以他的名字命名的，如柯西不等式、柯西积分公式等等。

- 在论文写作数量上，柯西仅次于欧拉。他一生中总共发表了 789 篇论文和几本书。他的全集从 1882 年开始出版到直 1974 年才出齐最后一卷，总计 28 卷。

附：人物介绍 —— 黎曼

黎 曼

B. Riemann

(1826 ～ 1866)

德国数学家

- 是世界数学史上最具独创精神的数学家之一
- 复变函数论的奠基人之一。
- 黎曼几何的创始人。

附：人物介绍 —— 黎曼

- 柯西、黎曼和维尔斯特拉斯是公认的复变函数论的主要奠基人，但在处理复变函数理论的方法上，黎曼的方法被认为是本质的。

- 在其短暂的一生中，黎曼为数学的众多领域作出了许多奠基性、创造性的工作。

- 黎曼的著作不多，但却异常深刻，极具创造与想象力。

- 复变函数中许多术语，如单值函数、多值函数、分支、单叶曲面以及单连通区域等，都是黎曼首先使用的。

(返回)