§1.5 复变函数

一、基本概念

二、图形表示

三、极限

四、连续

一、基本概念

定义 设 D 是复平面上的一个点集，对于 D 中任意的一点 z 按照一定法则，有确定的复数 w 与它对应，则称在 D 上定义一个复变函数，记作 $w = f(z)$.

- 单值函数 对每个 $z \in D$，有唯一的 w 与它对应。

  比如 $w = f(z) = z^2$.

- 多值函数 对每个 $z \in D$，有多个 w 与它对应。

  比如 $w = \sqrt[3]{z}$，$w = \mathrm{Arg}\, z$.

一般情形下，所讨论的“函数”都是指单值函数。

- 在以后的讨论中，D 常常是一个平面区域，称之为定义域。

一、基本概念

分析 设 $z=x+iy$, $w=u+iv$, 则 $w=f(z)$ 可以写成

$$w=u+iv=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y),$$

其中，$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 为实值二元函数。

分开上式的实部与虚部得到 $\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y). \end{cases}$

- 一个复变函数对应于两个二元实变函数。

例 将复变函数 $w=z^2+1$ 化为一对实变函数。

P21 例 1.13

解 记 $z=x+iy$，$w=u+iv$,

代入 $w=z^2+1$ 得

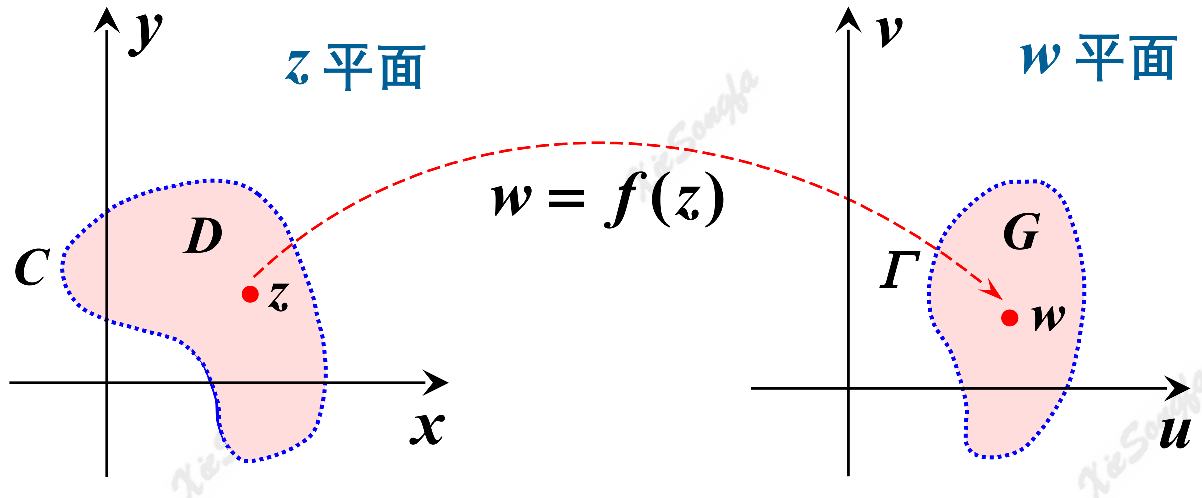
$$u+iv=(x+iy)^2+1=(x^2-y^2+1)+i(2xy),$$

分开实部与虚部即得

$$u=x^2-y^2+1,$$

$$v=2xy.$$

二、图形表示



映射 复变函数 $w = f(z)$ 在几何上被看作是把 z 平面上的一个点集 S 变到 w 平面上的一个点集 S^* 的映射（或者变换）。其中，点集 S^* 称为像，点集 S 称为原像。

- 函数、映射以及变换可视为同一个概念。

（分析）（几何） （代数）

二、图形表示

反函数与逆映射

设函数 $w=f(z)$ 的定义域为 z 平面上的点集 D，值域为 w 平面上的点集 G，则 G 中的每个点 w 必将对应着 D 中的一个（或几个）点。按照函数的定义，在 G 上就确定了一个函数 $z=\tilde{f}(w)$，它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数，也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射。

双方单值与一一映射

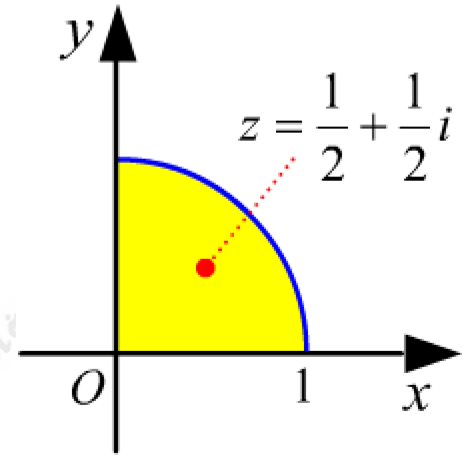
若映射 $w=f(z)$ 与它的逆映射 $z=\tilde{f}(w)$ 都是单值的，则称映射 $w=f(z)$ 是双方单值的或者一一映射。

例 已知函数 $w=z^2$，求下列点集的像。

P22

(1) 点 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$； (2) 区域 $D=\{z:\operatorname{Im} z>0, \operatorname{Re} z>0, |z|<1\}$.

解 (1) 点 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 对应的像(点)为 $w=\frac{1}{2}i$.



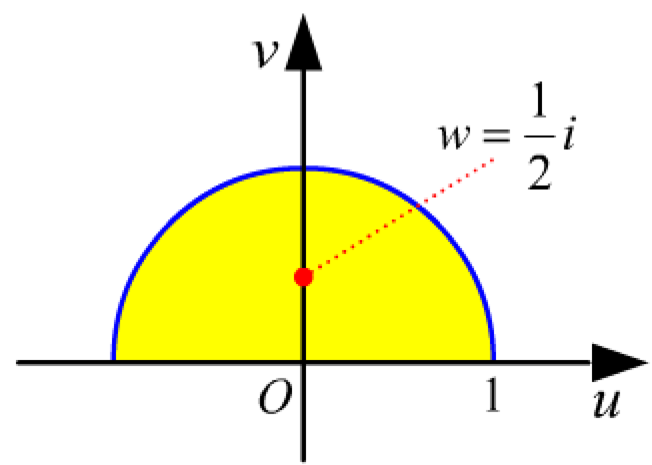
(2) 区域 D 可改写为：

$$D=\{z:0<|z|<1,\ 0<\arg z<\pi/2\},$$

令 $z=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $w=z^2=r^2\,\mathrm{e}^{i2\theta}$，

可得区域 D 的像(区域)G 满足 $0<|w|<1,\ 0<\arg w<\pi$，

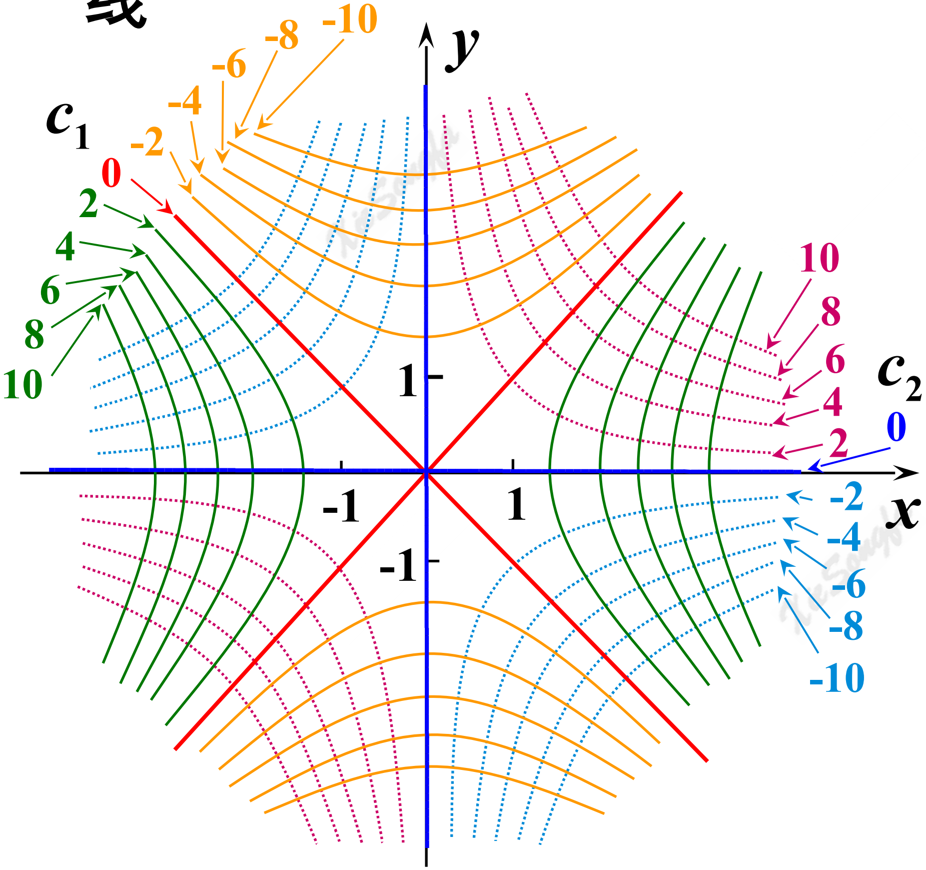
即 $G=\{w:\operatorname{Im} w>0, |w|<1\}$.

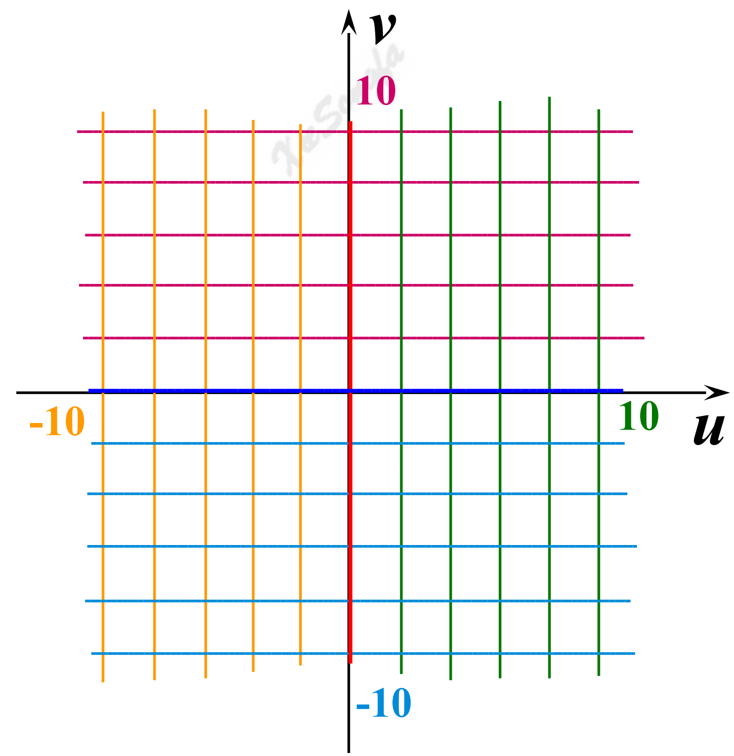


例 函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数 $u=x^2-y^2,\ v=2xy,$

因此，它把 z 平面上的两族双曲线 $x^2-y^2=c_1,\ 2xy=c_2,$

分别映射成 w 平面上的两族平行直线 $u=c_1,\ v=c_2.$





三、极限

定义 设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若存在复数 $A\neq\infty$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得

P23 定义 1.1

当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，

则称 A 为函数 $w=f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记作

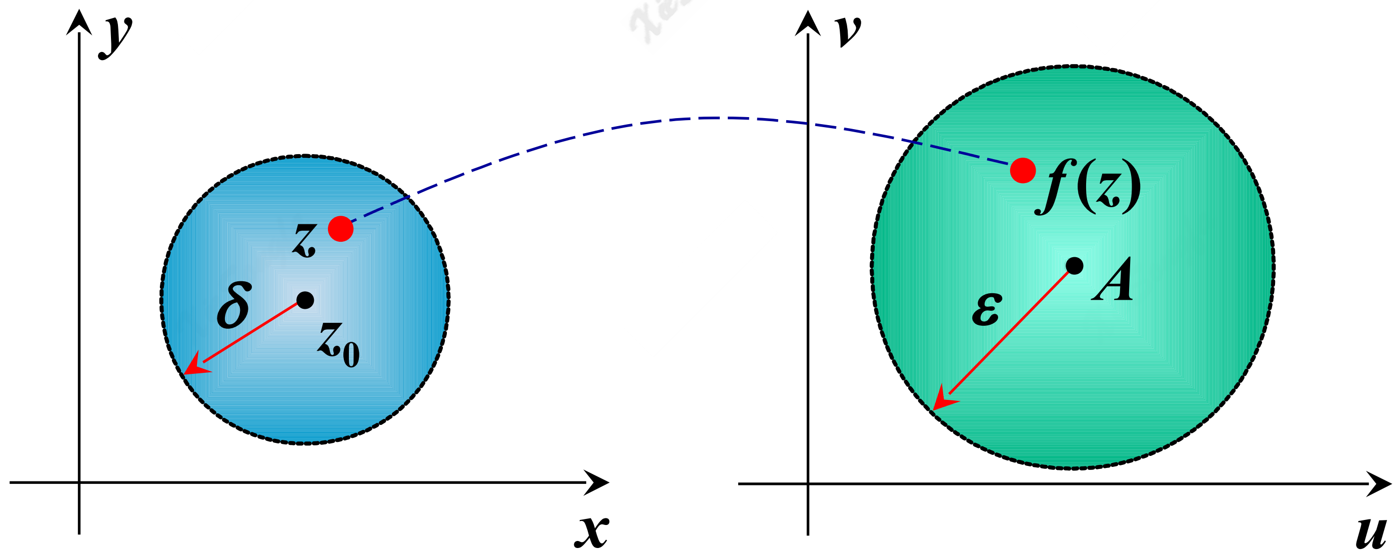
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \text{ 或 } f(z)\to A\ (z\to z_0).$$

注 (1) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点可以无定义；

(2) z 趋向于 z_0 的方式是任意的。

三、极限

几何意义



- 当变点　一旦进入$_0$　的充分小的 δ 邻域时它的像点 $f(z)$　就落在 A 的预先给定的 ε 邻域内。

三、极限

性质 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$,

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=A\cdot B$,

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$, $(B\neq 0)$.

三、极限

定理 设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, $A=u_0+i\,v_0$, $z_0=x_0+i\,y_0$,

P23 定理 1.1

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

证明 必要性"$\Rightarrow$" 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,

(跳过?)

当 $0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$|f(z)-A|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow\quad |u-u_0|<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow\quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

三、极限

定理 设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, $A=u_0+i\,v_0$, $z_0=x_0+i\,y_0$,

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

证明 充分性 “$\Leftarrow$” 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$,

则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$|u-u_0|<\varepsilon$, $|v-v_0|<\varepsilon$,

$\Rightarrow \quad |f(z)-A|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\sqrt{2}\,\varepsilon$,

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.

三、极限

- 关于含∞ 的极限作如下规定：

(1) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{z\to 0} f(\frac{1}{z})=A;$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)}=0;$

(3) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{f(\frac{1}{z})}=0.$

- 所关心的两个问题：

(1) 如何证明极限存在？ 放大技巧 $|f(z)-A|\le g(|z-z_0|)$

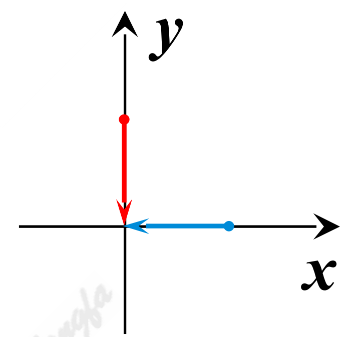
(2) 如何证明极限不存在？ 选择不同的路径进行攻击。

例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$ 在 $z\to 0$ 的极限。 P24 例 1.15

解 方法一

$$f(z)=\frac{\bar{z}^2}{|z|^2}=\frac{x^2-y^2-i2xy}{x^2+y^2},$$

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$



当 $y=0,\ x\to 0$ 时 $u(x,y)\to 1,$

当 $x=0,\ y\to 0$ 时 $u(x,y)\to -1,$

因此极限不存在。

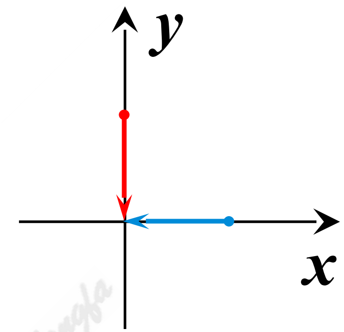
例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$ 在 $z\to 0$ 时的极限

解 方法二

$$f(z)=\frac{x-iy}{x+iy},$$

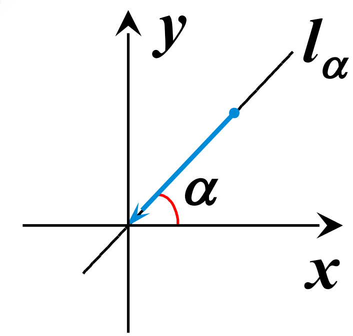
当 $y=0,\ x\to 0$ 时，$f(z)\to 1,$

当 $x=0,\ y\to 0$ 时，$f(z)\to -1,$



因此极限不存在。

方法三



沿着射线 l_α：$z=re^{i\alpha},\ r\to 0,$

$$\lim_{\substack{z\in l_\alpha \\ z\to 0}} f(z)=e^{i(-2\alpha)},$$ 与 α 有关，因此极限不存在。

四、连续

定义 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

P24 定义 1.2

若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续。

注 (1) 连续的三个要素：$f(z_0)$ 存在；$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在；相等。

(2) 连续的等价表示：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta z\to 0}\Delta w=0 \Leftrightarrow \lim_{|\Delta z|\to 0}|\Delta w|=0.$$

其中，$\Delta z=z-z_0$，$\Delta w=f(z+z_0)-f(z_0)$.

通常说：当自变量充分靠近时，函数值充分靠近。

(3) 一旦知道函数连续，反过来可以用来求函数的极限。

四、连续

性质 (1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商（分母在 z_0 不为零）在 z_0 处连续。

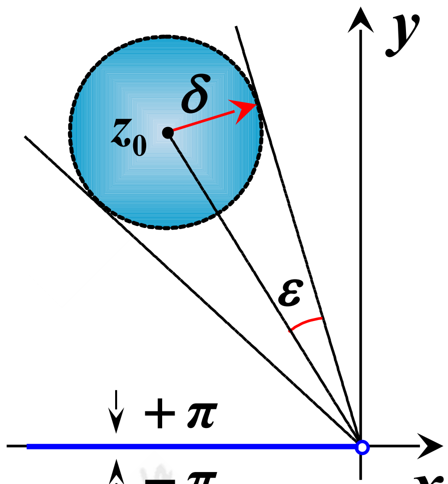
(2) 如果函数 $\xi = g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $w = f(\xi)$ 在 $\xi_0 = g(z_0)$ 连续，则函数 $w = f[g(\xi)]$ 在 z_0 处连续。

（由基本初等函数的连续性可得初等函数的连续性）

P26 (3) 如果函数 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则

- $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上必有界；
- $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上必能取到最大值与最小值；
- $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上必一致连续。

例 证明 $f(z)=\arg z$ 在复平面上除去原点和负实轴的区域上连续。P25 例 1.16



证 （略）

例 讨论函数 $w=f(z)=|z|^2$ 的连续性。

解 $w=|z|^2=z\cdot\bar{z}$,

$$|\Delta w|=|(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\cdot\bar{z}|$$

$$=|\Delta z\cdot\bar{z}+\overline{\Delta z}\cdot z+\Delta z\cdot\overline{\Delta z}|$$

$$\le 2|\Delta z|\cdot|z|+|\Delta z|^2\to 0,$$（当 $\Delta z\to 0$ 时）

故函数 $w=f(z)=|z|^2$ 处处连续。

四、连续

定理 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+i\,y_0$ 点连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续。

P25 定理 1.2

证明 （略）

例如 函数 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$ 在复平面内除原点外是处处连续的。

因为 $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外是处处连续的，而 $v(x,y)=x^2-y^2$ 是处处连续的。

轻松一下吧……