# §3.2 柯西积分定理

一、柯西基本定理

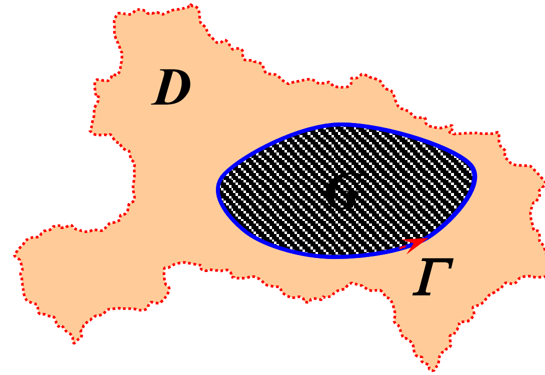
二、闭路变形原理

三、复合闭路定理

四、路径无关性

五、原函数

# 一、柯西基本定理




**定理** P60 定理 3.2 设函数 $f(z)$ 在单连通域 $D$ 内解析，$\Gamma$ 为 $D$ 内的任意一条简单闭曲线，则有 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

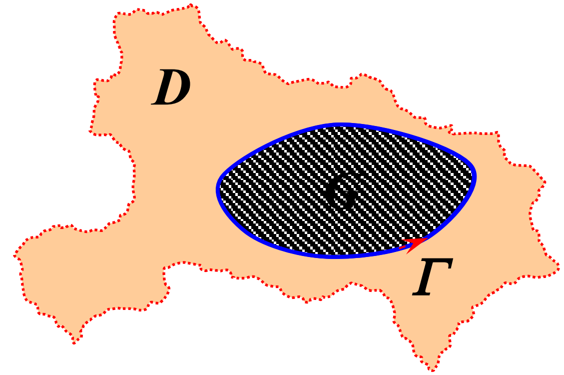
证明 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \oint_\Gamma (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\oint_\Gamma (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$

$$\overset{\text{Green 公式}}{\underset{(?)}{=\!=\!=}} -\iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{C-R 方程}}{=\!=\!=} 0.$$

- 上述定理又称为<u>柯西－古萨 (Cauchy-Goursat) 基本定理</u>。

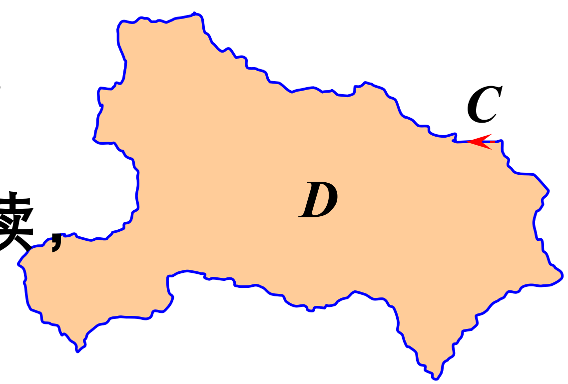
# 一、柯西基本定理




**定理** 设函数 $f(z)$ 在单连通域 $D$ 内解析，$\Gamma$ 为 $D$ 内的任意一条简单闭曲线，则有 $\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z=0.$

**注** (1) 定理中的曲线 $G$ 可以不是简单闭曲线。

(2) 定理中的条件还可以进一步减弱。




**定理** 设单连通域 $D$ 的边界为 $C$，函数 $f(z)$ 在 $D$ 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则有 $\boxed{\oint_{C} f(z)\,\mathrm{d}z=0.}$

P60 [注]

# 二、闭路变形原理

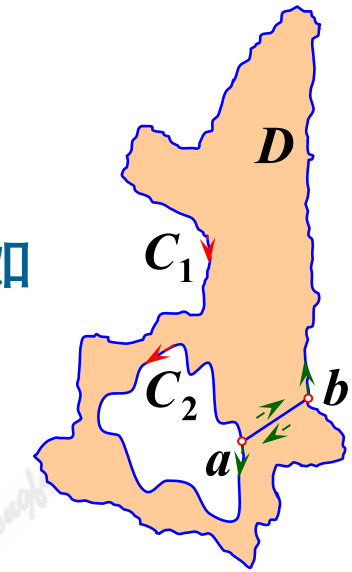
## 将柯西积分定理推广到二连域

**定理** 设二连域 $D$ 的边界为 $C = C_1 + C_2^-$ （如图）

P61 定理 3.4

函数 $f(z)$ 在 $D$ 内解析，在 $C$ □□□则

$$\boxed{\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0} \quad \text{或} \quad \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$




**证明** 如图，作线段 $\overline{ab}$，则二连域 $D$ 变为单连域，从而有

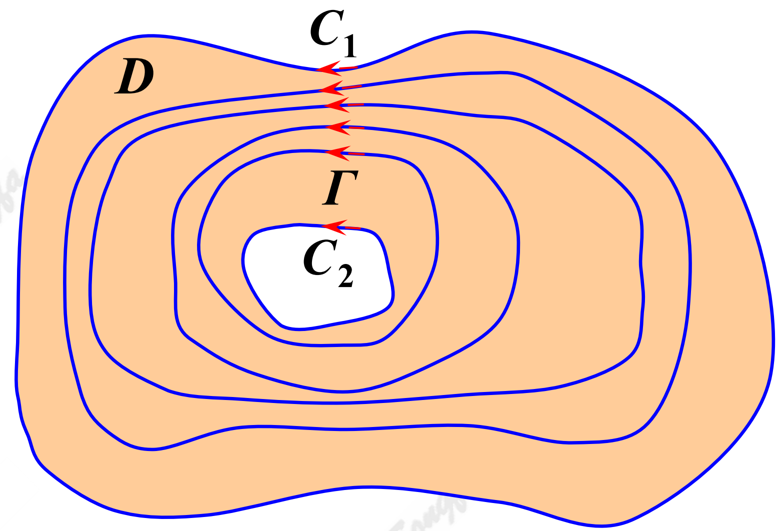
$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

由 $\int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, $\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$,

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{或} \quad \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

## 二、闭路变形原理

- 闭路变形原理 P62




如图，设 $f(z)$ 在 $D$ 内解析，在边界 $C = C_1 + C_2^-$ □□□

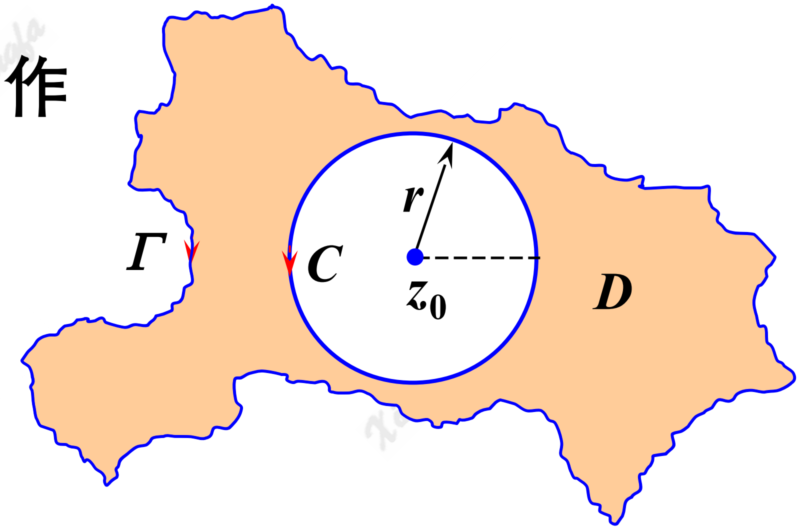
$\Gamma$ 为 $D$ 内的一条“闭曲线”

则 $\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z.$

- 在区域内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值称此为闭路变形原理。

例 计算 $I=\oint_{\Gamma}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$，其中，$\Gamma$ 为包含 $z_0$ 的一条闭曲线。

重要




解 如图以 $z_0$ 为圆心 $r$ 为半径作圆，

则函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ 在

$\overline{D}=D+\Gamma+C^{-}$ 上解析，

因此有 $I=\oint_{\Gamma}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$

$$=\oint_{C}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & \text{当 } n=1 \text{ 时，}\\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时。}\end{cases}$$

# 三、复合闭路定理

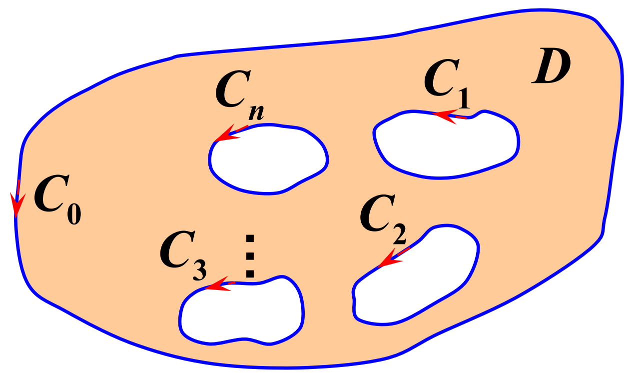
● 将柯西积分定理推广到多连域

**定理** 设多连域 $D$的边界为$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$ (如图)

P62 推论

函数$f(z)$ 在 $D$内解析，在 $C$ 上连续，则

$$\boxed{\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0}$$



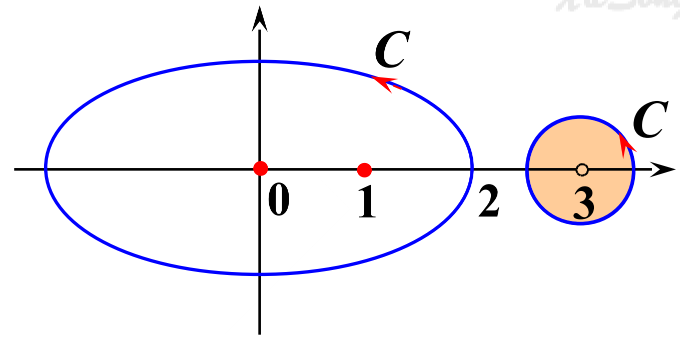

或 $\displaystyle\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z+\cdots+\oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$

**证明（略）**

**例** 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 $C$ 为

P62 例 3.7 修改

(1) $|z-3|=\dfrac{1}{2}$； (2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

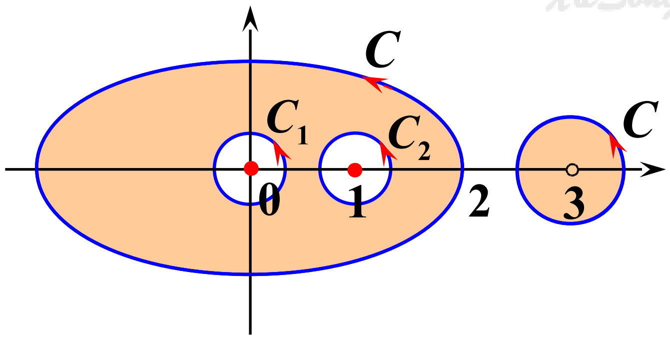



**解** 令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}$， 则 $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}$， 奇点为 $z=0,1$.

(1) 当 $C$ 为 $|z-3|=\dfrac{1}{2}$ 时， $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z=0$.

**例** 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 $C$ 为：

(1) $|z-3|=\dfrac{1}{2}$；  (2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$.




**解** 令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}$， 则 $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}$， 奇点为 $z=0,1$.

(2) 当 $C$ 为 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 时， 令 $C_1:|z|=\dfrac{1}{3}$，$C_2:|z-1|=\dfrac{1}{3}$，

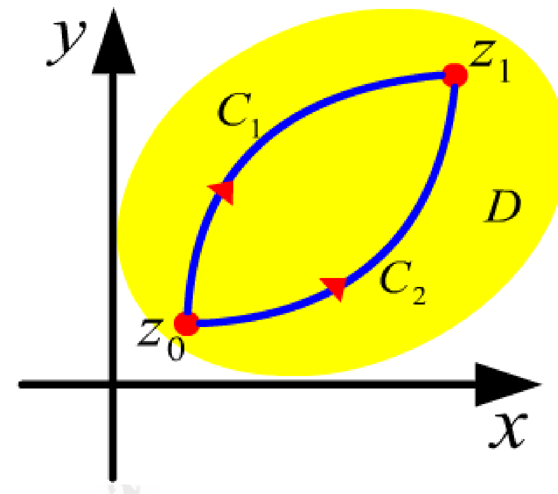
则 $I=\oint_{C_1}\dfrac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_1}\dfrac{1}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\dfrac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\dfrac{1}{z-1}\mathrm{d}z$

$=2\pi i+0+0+2\pi i=4\pi i$.

# 四、路径无关性

**定理** P60 定理 3.3 设函数 $f(z)$ 在单连通域 $D$ 内解析，$C_1, C_2$ 为 $D$ 内的任意两条从 $z_1$ 到的简单曲线，则有

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$




**证明** 由 $\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0,$

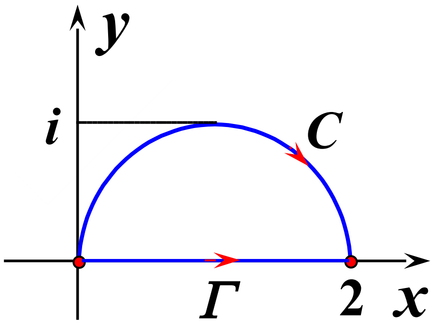
$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

- 可见，解析函数在单连域内的积分只与起点和终点有

因此，$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z \xlongequal{\text{可记为}} \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z.$

**例** 计算 $I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z$，其中 $C$ 为如图所示的一个半圆。

P61 例 3.6




**解** 设 $\Gamma$ 如图所示，由于 $\sin z$ 在复平面上处处解析，因此有

$$I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z=\int_\Gamma \sin z\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^2 \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^2=1-\cos 2.$$

**问** 是否可以直接计算？

即 $I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z=\int_0^2 \sin z\,\mathrm{d}z=-\cos z\Big|_0^2=1-\cos 2.$

# 五、原函数

## 1. 基本概念及性质

**定义** 设在单连域 $D$ 内，函数 $F(z)$ 恒满足条件 $F'(z)=f(z)$，则 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 在 $D$ 内的一个原函数。

P64 定义 3.2

**性质** 函数 $f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数。

**证明** 设 $G(z)$ 和 $H(z)$ 是 $f(z)$ 的两个原函数，则

$$[G(z)-H(z)]'=G'(z)-H'(z)=f(z)-f(z)=0,$$

$\Rightarrow G(z)-H(z)=c$，其中，$c$ 为任意常数。

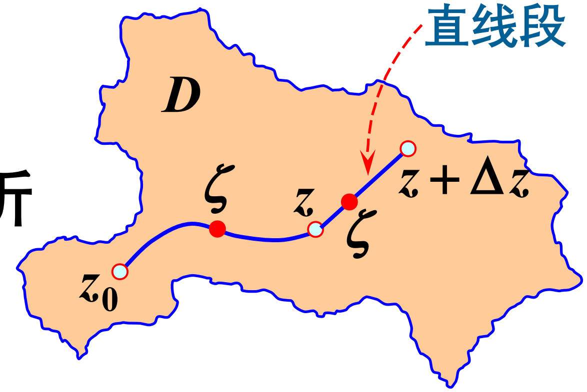
**定义** 函数 $f(z)$ 的原函数 $F(z)+c$ 称为 $f(z)$ 的不定积分，

补

记作 $\int f(z)\,\mathrm{d}z=F(z)+c$.

# 五、原函数

## 2. 由变上限积分构成的原函数




**定理** 若 $f(z)$ 在单连域 $D$ 内处处解析

P63 定理 3.5

令 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$， $z,\, z_0\in D$，

则 $F(z)$ 在 $D$ 内解析，$F'(z)=f(z)$.

**证明** (1) $\dfrac{\Delta F}{\Delta z}=\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$

（思路）

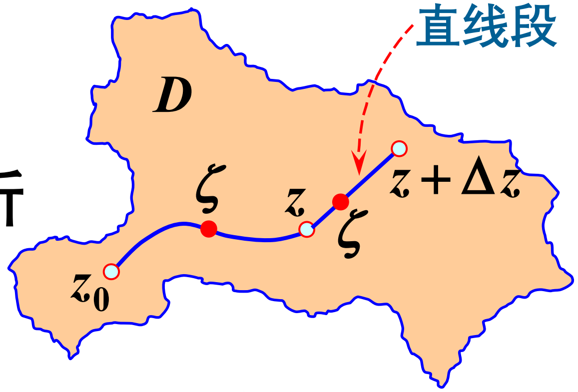
（跳过？）

$$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta,$$

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}s,$$

# 五、原函数

## 2. 由变上限积分构成的原函数




**定理** 若 $f(z)$ 在单连域 $D$ 内处处解析

令 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$， $z, z_0 \in D$，

则 $F(z)$ 在 $D$ 内解析，且 $F'(z)=f(z)$.

**证明** (2) $\left|\dfrac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| \le \dfrac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}s$,

（思路）

$$\le \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z| = \varepsilon,$$ （当$|\Delta z|$充分小时）

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| = 0,\ \text{即}\ F'(z)=f(z).$$

# 五、原函数

## 3. Newton-Leibniz 公式

**定理** 若 $f(z)$ 在单连域 $D$ 内处处解析，$G(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数，

P64 定理 3.6

则 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)$，其中 $z_1, z_0 \in D$.

**证明** 由于 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 也是 $f(z)$ 的一个原函数，

有 $F(z) = G(z) + c$， $\Rightarrow F(z_0) = G(z_0) + c$，

$$F(z_1) = G(z_1) + c,$$

$$\Rightarrow F(z_1) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z - 0 = G(z_1) - G(z_0).$$

**例** 求 $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z$.

**解** $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3$.

**例** 求 $\int_a^b \cos z \,\mathrm{d}z$.

**解** $\int_a^b \cos z \,\mathrm{d}z = \sin z \Big|_a^b = \sin b - \sin a$.

**例** 求 $\int_0^i z \cos z \,\mathrm{d}z$.

**解** $\int_0^i z\cos z \,\mathrm{d}z = \int_0^i z \,\mathrm{d}\sin z = z\sin z \Big|_0^i - \int_0^i \sin z \,\mathrm{d}z$

$$= (z\sin z + \cos z)\Big|_0^i = i\sin i + \cos i - 1.$$

**例** 求 $\int_{-i}^{i}\ln(1+z)\mathrm{d}z$. P65 例 3.9

**解**
$$\int_{-i}^{i}\ln(1+z)\mathrm{d}z = z\ln(1+z)\Big|_{-i}^{i} - \int_{-i}^{i}\frac{z}{1+z}\mathrm{d}z$$
$$= z\ln(1+z)\Big|_{-i}^{i} - \int_{-i}^{i}\frac{z+1-1}{1+z}\mathrm{d}z$$
$$= [z\ln(1+z) - z + \ln(1+z)]\Big|_{-i}^{i}$$
$$= (-2+\ln 2)i + \frac{\pi}{2}i.$$

休息一下 ……