《复变函数与积分变换》解答 2007.11.26

一、填空题 (每空 2 分，共 22 分)

1. $\sqrt{2}$，$-\frac{3\pi}{4}$　2. 在直线 $y=x$ 上，处处不解析　3. $\ln 4+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$

4. 1　5. 可去奇点　6. $-\pi i$　7. $2\sqrt{2}$，$-\frac{\pi}{4}$　8. $2\pi\left[\delta(\omega)+\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)\right]$

二、计算题 (每题 5 分，共 20 分)

(1) 解：① $Z_1=0$ 为可去奇点

Res [f(z),0]=0.

② $Z_2=1$ 为二级极点，

$$\text{Res}\,[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{ze^z-e^z+1}{z^2}=1,$$

原式$=2\pi i$

（2） 解：$Z_1=0$ 为本性奇点，

$$e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}=z^2(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3})(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\ldots)$$

$$=(z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^2}+\cdots)\ (\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots)$$

$$\text{Re}\,s[f(z),0]=\frac{1}{3}$$

原式 $=\frac{2}{3}\pi i$

(3) 解：令 $z=e^{i\theta}$，$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$，$d\theta=\frac{dz}{iz}$，

$$\text{原式}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2(\frac{z^2+1}{2z})-\sqrt{5}}.\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-\sqrt{5}z+1}$$

奇点　$z_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，一阶极点

$$z_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ (\text{不在}|z|=1\text{内})$$

$$\text{原式}=2\pi i.\frac{1}{i}\operatorname{Res}[f(z),z_1]=2\pi\frac{1}{z_1-z_2}=-2\pi$$

(4) 解： ① 令$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+1}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+1}dx$

令$f(z)=\frac{ze^{2iz}}{z^2+1}$

在上半平面奇点 $z=i$ ，一阶极点，

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=\left.\frac{ze^{2iz}}{2z}\right|_{z=i}=\frac{1}{2e^2}$$

② $I_1=I_m(2\pi i\frac{1}{2e^2})=\frac{\pi}{e^2}$

$I=\frac{\pi}{2e^2}$

三、解：（1）首先$u(x,y)$必须为调和函数，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6axy+24xy=0\Rightarrow a=-4\ ,$$

故$u(x,y)=4xy^3-4x^3y$.

(2)
$$\frac{\partial u}{\partial x}=4y^3-12x^2y=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$v=\int(4y^3-12x^2y)dy=y^4-6x^2y^2+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=12xy^2-4x^3=-\frac{\partial v}{\partial x}=12xy^2-\varphi'(x)$$

$$\varphi'(x)=4x^3\Rightarrow\varphi(x)=x^4+C$$

即
$$v=x^4+y^4-6x^2y^2+C$$

$$f(z)=4xy^3-4x^3y+(x^4+y^4-6x^2y^2+C)i\,.$$

(3)由 $f(1)=0\Rightarrow C=-1$

$f(z)=4xy^3-4x^3y+(x^4+y^4-6x^2y^2-1)i$

四、解：$f(z)=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-i}$

（1）在 $z=0$ 展开

① 在 $|z|<1$ 内

$$f(z)=-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{i}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}z^n+\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{i^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{i^{n+1}}-1\right)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-i)^{n+1}-1\right]z^n$$

② 在 $|z|>1$ 内

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\dfrac{i}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{z^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-i^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-i^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}$$

（2）在 $z=1$ 展开

① 在 $0<|z-1|<\sqrt{2}$ 内

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)+(1-i)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-i}\left(\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-1}{1-i}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^n}(z-1)^n$$

$$=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}(z-1)^n$$

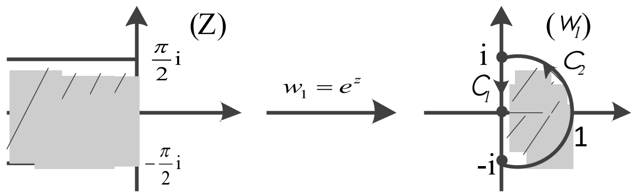
② 在 $|z-1|>\sqrt{2}$ 内

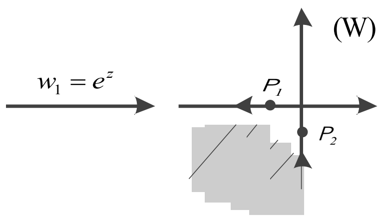
$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1-i}{z-1}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(i-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(i-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

$$=-\sum_{n=1}^{+\infty}(i-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}=-\sum_{n=2}^{+\infty}(i-1)^{n-1}\frac{1}{(z-1)^n}$$

五、解：令 $w_1=e^z$，则 $w=\frac{w_1-i}{w_1+i}$

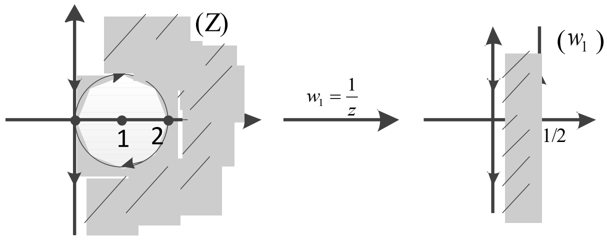


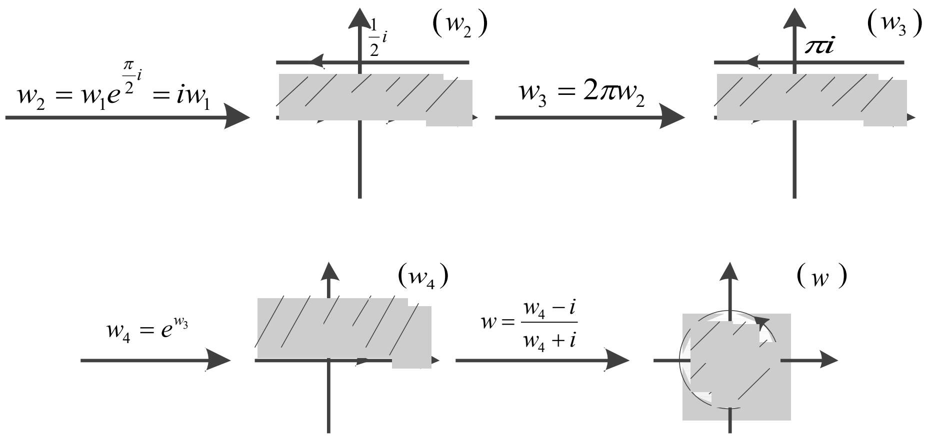


$$C_1\begin{cases} i\to 0\\ 0\to -1\\ -i\to\infty\end{cases},\qquad C_2\begin{cases} -i\to\infty\\ 1\to -i\\ i\to 0\end{cases}$$

即象区域为第三象限

六、解：





合成： $w=\dfrac{e^{\frac{2\pi i}{z}}-i}{e^{\frac{2\pi i}{z}}+i}$ 或 $w=\dfrac{e^{\pi i(\frac{z-2}{z})}-i}{e^{\pi i(\frac{z-2}{z})}+i}$

七、解：(1)方程组两边作拉氏变换并带入初始值，得：

$$\begin{cases} S^2X(s)-S^2Y(s)-Y(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2} \\ SX(s)-SY(s)-X(s)=-\dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

求解得：

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2} \\ Y(s)=\dfrac{s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\dfrac{1}{(s-1)}-\dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

(2)求 Laplace 逆变换，即得：

$$\begin{cases} x(t)=te^t \\ y(t)=e^t-\cos t \end{cases}$$

八、证明：(1)由 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，有：

$f^2(z)$，$f''(z)$，$f'(z)$ 均在 $|z|<2$ 内解析 (A)

(2)由 $|f(z)-2|<2$ 有：$|(f(z)-4)+2|<2$

故有： $f(z)\neq 0, f(z)-4\neq 0$

即得： $f(z)(f(z)-4)=f^2(z)-4f(z)\neq 0$ (B)

(3)由(A),(B)有：

$\dfrac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}$ 在 $|z|<2$ 内解析

根据柯西积分定理，即得：

$$\oint_{|z|=1}\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}dz=0$$