练　习　十

1．求下列函数在指定点处的留数。

（1）$\dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$，$z=\pm 1$

解：$\operatorname{Re}s[f(z),1]=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(z-1)}{(z-1)(z+1)^2}=\dfrac{1}{4}$　　　（$z=1$ 是简单极点）

$$\operatorname{Re}s[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}[(z+1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)(z+1)^2}]$$

$$=-\frac{1}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1}=-\frac{1}{4}$$

（2）$\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$，$z=0$

解：令 $\varphi(z)=1-e^{2z}$ 则 $\varphi(0)=0, \varphi'(z)=-2e^{2z}, \varphi'(0)=-2\neq 0$

$\therefore z=0$ 为三阶极点

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{-1}{z^4}[\frac{2z}{1!}+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\cdots+\frac{(2z)^n}{n!}\cdots],$$

$$\therefore \operatorname{Re}s[f(z),0]=-\frac{4}{3}$$

2．求下列函数在孤立奇点处的留数。

（1）$\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$

解：$z=-1$ 是 $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$ 的三级极点

$$\operatorname{Re}s[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}[(z+1)^3\cdot\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}]$$

$$=-2\sin 2z\big|_{z=-1}=2\sin 2$$

（2）$\dfrac{1}{z\sin z}$

解：$z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$ 的二级极点，$z=k\pi(k\neq 0$ 为整数）是 $f(z)$ 的简单极点

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2\cdot\frac{1}{2\sin z}]=0$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),k\pi]=\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{z\sin z}=\frac{1}{k\pi}\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{\sin z}=\frac{1}{k\pi}\cdot\frac{1}{\cos k\pi}=(-1)^k\frac{1}{k\pi}$$

（3） $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$

解： $\mathrm{Re}\,s[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=-e$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}+\cdots=e-1$$

$$\begin{bmatrix} e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{1\,!z}+\dfrac{1}{2\,!z^2}+\cdots+\dfrac{1}{n\,!z^n}+\cdots \\ \dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots \qquad |z|<1 \end{bmatrix}$$

（4） $e^{z+\frac{1}{z}}$

解： $e^{z+\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(z+\dfrac{1}{z})^n=1+(z+\dfrac{1}{z})+\dfrac{1}{2!}(z+\dfrac{1}{z})^2+\cdots$

而$\dfrac{1}{z}$的系数为 $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)!}\begin{bmatrix}2k+1\\k\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}\,\dfrac{1}{(k+1)!}$

3．判定$z=\infty$是下列函数的什么奇点，并求出在∞的留数。

（1） $z+\dfrac{1}{z}$

解： $z+\dfrac{1}{z}$在无穷远点的领域 $0<|z|<+\infty$ 内解析，所以$z=\infty$是它的弧立奇点且为一级极点

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=-1$$

（2） $\sin z-\cos z$

解： $\sin z-\cos z$在全平面解析，$\therefore z=\infty$是该函数的孤立奇点

$$\sin z-\cos z=[z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots]$$

$$-[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots]$$

$\therefore \mathrm{Re}\,s[f(z,\infty)]=0$ $\qquad z=\infty$是本性奇点

4．利用留数计算下列复积分

（1）$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$

解：在$|z|=\frac{3}{2}$的内部仅含奇点$z=1$，且为一阶极点

而$\operatorname{Re}s[f(z),1]=\lim\limits_{z\to1}\frac{e^z}{(z+3)^2}=\frac{e}{16}$

所以$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz=2\pi\, i\cdot\frac{e}{16}=\frac{1}{8}\pi\, ie$

（2）$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$　$(n\text{为整数},|a|\neq1,|b|\neq1,|a|<|b|)$

解：①当$|a|<|b|<1$时，$z=a, z=b$均为$|z|=1$内的n阶极点

$$\operatorname{Re}s[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{(z-b)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(n-1)!(a-b)^{2n-1}}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),b]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to b}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{(z-a)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(n-1)!(b-a)^{2n-1}}$$

原式= 0

②$|a|<1<|b|$时，原式$=\frac{2\pi(2n-2)!\,i(-1)^{n-1}}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$

③当$1<|a|<|b|$时，积分为 0。

（3）$\oint_{|z|=3} \frac{z^{15}}{(z^3+1)^2(z^4+2)^3} dz$

解：$z=\pm i$，$z=\sqrt[4]{2}[\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}]$，$(k=0,1,2,3)$

$$\operatorname{Re}s[f(z),\infty]=-\operatorname{Re}s[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]=-\operatorname{Re}s[\frac{1}{z(1+z^2)^3(1+2z^4)^3},0]$$

$$=-\lim_{z\to0}\frac{1}{(1+z^2)^3(1+2z^4)^3}=-1$$

$\therefore$ 原式= $2\pi i$

*5．思考题

（1）留数的各种求法的理论根据是什么?

答：留数的各种求法的理论根据是留数定理。它把求沿封闭曲线 C 的积分，转化为求被积函数在 C 内各孤立奇点的留数。而一般地求函数在孤立奇点 z_0 处的留数只需求出 z_0 的圆环域中罗朗级数的系数 C_{-1} 就可以了。对于孤立奇点的不同类型，C_{-1} 的求法不同，有不同的计算规则。

（2）有限可去奇点的留数为 0，当 ∞ 为函数 $f(z)$ 的可去奇点时，留数是否一定为 0?

答：否。如 $f(z)=1/z, \infty$ 点为可去奇点，但 $\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=-1$；而 $f(z)=1/z^2$，$\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=0$。可见当 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点时，留数不一定为零，这与有限可去奇点留数必为零不同。