§3.3 柯西积分公式

一、柯西积分公式

二、平均值公式

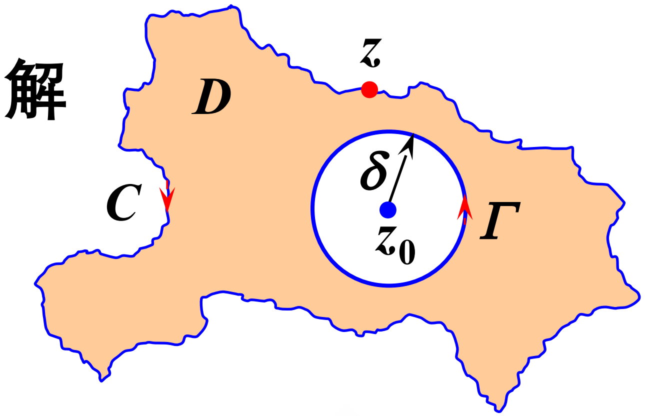
三、最大模原理

一、柯西积分公式

定理 如果函数$f(z)$ 在区域 D 内解析在边界 C 上连续，$z_0\in D$，则

P66 定理3.7

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$



证明 如图，以z_0 为圆心，δ 为半径作圆 Γ，则

（思路）

（跳过？）

$$\text{左边}=f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz,$$

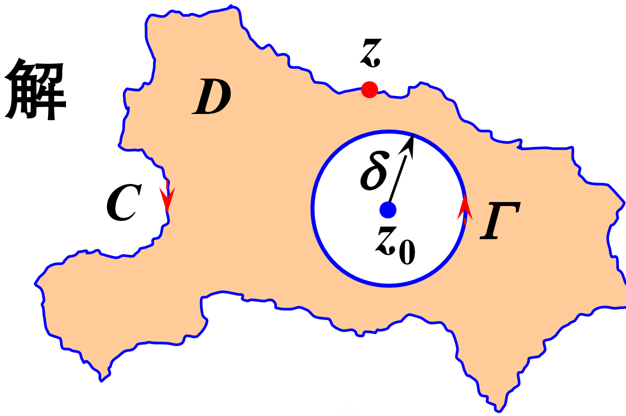
$$\text{右边}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

$$|\text{右边}-\text{左边}|\le\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,ds,$$

一、柯西积分公式

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在边界 C 上连续，$z_0 \in D$,

则
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$



证明（思路） $|右边-左边| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\oint_{\Gamma}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\mathrm{d}s,$

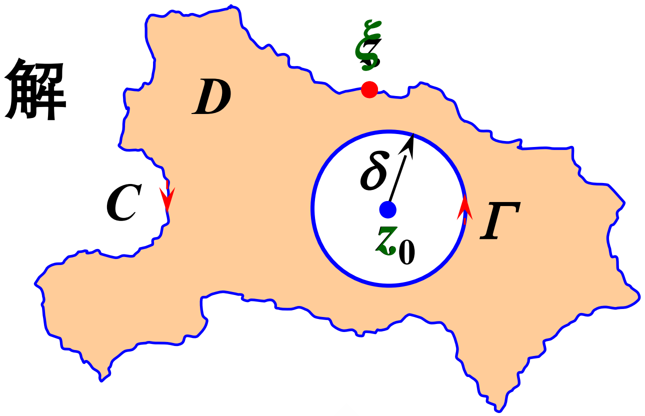
$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}\cdot 2\pi\delta=\varepsilon,$$（当 δ 充分小时）

即只要 δ 足够小，所证等式两边的差的模可以任意小，由于左边与右边均为常数，与 δ 无关，故等式成立。

一、柯西积分公式

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在边界 C 上连续，$z_0 \in D$，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z .$$



意义 将 z_0 换成 z，积分变量 z 换成 ξ，则上式变为

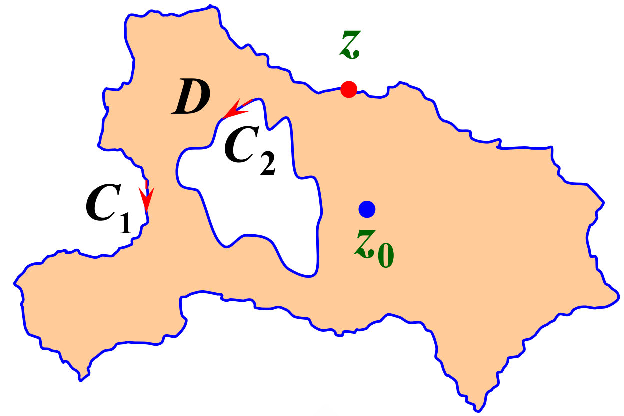
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi,\ (z \in D).$$

- 解析函数在其解析区域内的值完全由边界上的值确定。
- 换句话说，解析函数可用其解析区域边界上的值以一种特定的积分形式表达出来。

一、柯西积分公式

注意 柯西积分公式中的区域 D 可以是多连域。比如对于二连域 D，其边界为 $C=C_1+C_2^-$ 则，

P67 推论2



$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

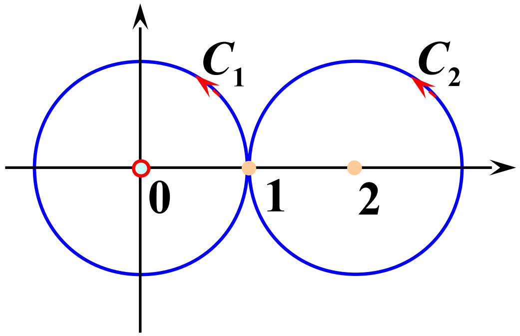
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,\ (z_0\in D).$$

应用

- 反过来计算积分 $\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=2\pi i\,f(z_0).$
- 推出一些理论结果，从而进一步认识解析函数。

例 计算 $I=\oint_C \frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$，其中 C 为：

(1) $C_1 : |z|=1$; (2) $C_2 : |z-2|=1$.



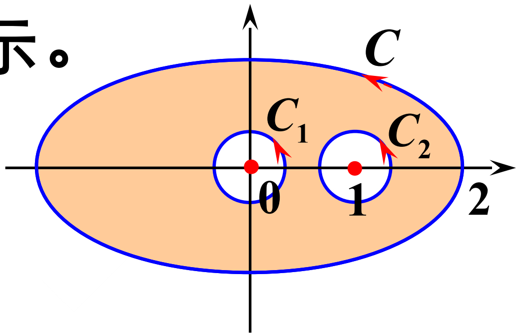
解 (1) $I=\oint_{C_1} \frac{\boxed{\cos z}}{z}\mathrm{d}z$ 在 $|z|\le 1$ 上解析

$\underline{\underline{（柯西积分公式）}}\ 2\pi i \cdot \cos z\big|_{z=0} = 2\pi i.$

(2) $I=\oint_{C_2} \frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$ （函数 $\frac{\cos z}{z}$ 在 $|z-2|\le 1$ 上解析）

$\underline{\underline{（柯西积分定理）}}\ 0.$

例 计算 $I=\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 如图所示。



解 令 $f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z}$， 则 $f(z)=\frac{2z-1}{z(z-1)}$，

令 $C_1 : |z|=\frac{1}{3}$， $C_2 : |z-1|=\frac{1}{3}$，

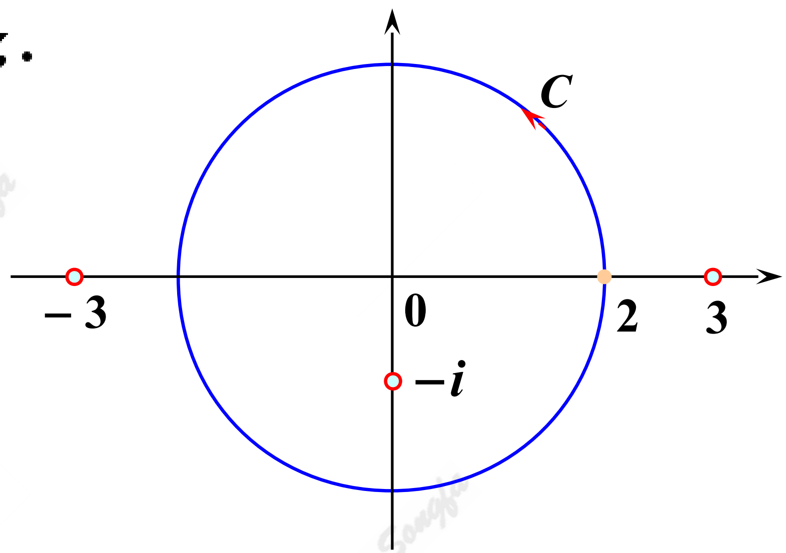
则 $I=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$ （复合闭路定理）

$$=\oint_{C_1}\frac{\boxed{\left(\frac{2z-1}{z-1}\right)}}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\boxed{\left(\frac{2z-1}{z}\right)}}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$\underline{\underline{（柯西积分公式）}}\ 2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z-1}\right|_{z=0}+2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z}\right|_{z=1}=4\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{z}{(9-z^2)(z+i)}\mathrm{d}z$.

P67 例 3.10 部分



解 $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{\boxed{\left(\dfrac{z}{9-z^2}\right)}}{z-(-i)}\mathrm{d}z$.

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{z}{9-z^2}\right|_{z=-i}=\frac{\pi}{5}.$$

- 试考虑积分路径为 $|z|=4$ 的情况。

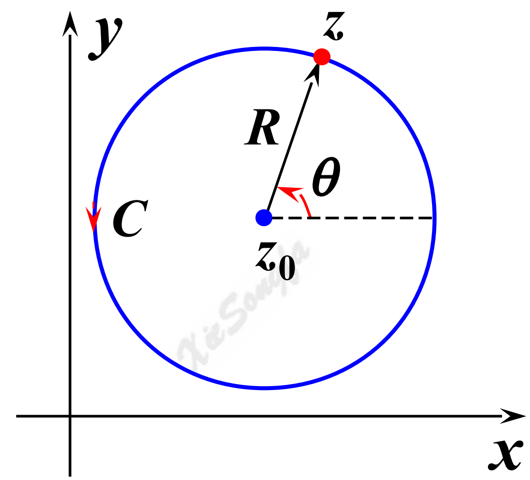
二、平均值公式

（连续函数的平均值）

定理（平均值公式）如果函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，在 $|z-z_0|\le R$ 上连续，则有

P67 推论 1

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$



证明 由柯西积分公式有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})}{R\mathrm{e}^{i\theta}}R\mathrm{e}^{i\theta}i\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

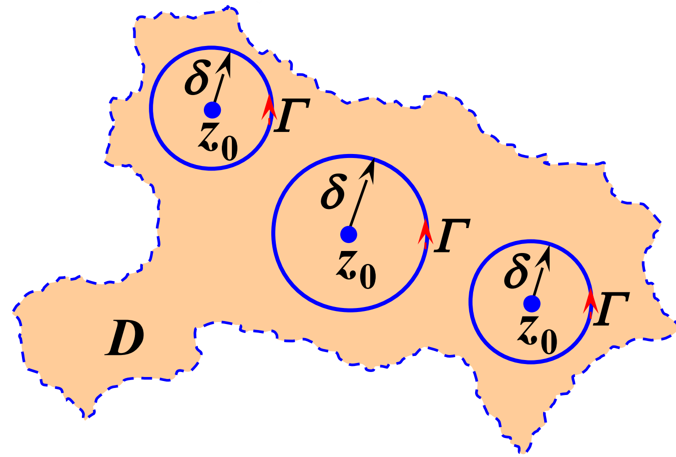
三、最大模原理

定理（最大模原理）如果函数 $f(z)$ 在 D 内解析，且不为常数，则在 D 内 $f(z)$ 没有最大值。

P68 定理3.8

证明（略）

理解 如图，函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内任意一点 z_0 的函数值是以该点为圆心的圆周上所有点的函数值的平均值，因此，$|f(z_0)|$ 不可能达到最大，除非 $f(z)$ 为常数。



三、最大模原理

推论 1 在区域 D 内解析的函数，如果其模在 D 内达到最大值，则此函数必恒为常数。

P70 推论 1

推论 2 若 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析，在 $\overline{D}$ 上连续，则 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 的边界上必能达到最大值。

P70 推论 2

例 设函数 $f(z)$ 在全平面解析，又 $\forall r>0$，$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. 证明 $M(r)$ 是 r 的单调上升函数。 P70 例 3.11

证 由最大模原理及其推论可知 $|f(z)|$ 在 $|z|\le r$ 上的最大值必在 $|z|=r$ 上取得，即

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|=\max_{|z|\le r}|f(z)|.$$

因此，当 $r_1<r_2$ 时，有

$$M(r_1)=\max_{|z|\le r_1}|f(z)|\le\max_{|z|\le r_2}|f(z)|=M(r_2).$$

即 $M(r)$ 是 r 的单调上升函数。

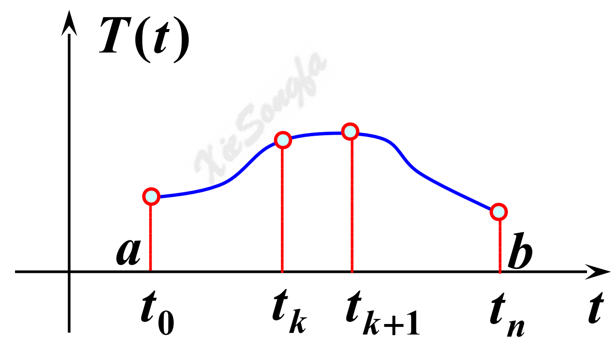
休息一下 ……

附：连续函数的平均值（以平均气温为例）

设某时间段内的温度函数为 $T = T(t),\ a \le t \le b,$

将 $[a, b]$ n 等份，等分点为 $a, t_1, t_2, \cdots, t_n = b,$

平均气温 $\tilde{T} \approx \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} T(t_k).$



记 $\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$，即 $\dfrac{1}{n} = \dfrac{\Delta t}{b-a},$

平均气温 $\tilde{T} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} T(t_k)$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n} T(t_k)\Delta t = \frac{1}{b-a}\int_a^b T(t)\,\mathrm{d}t.$$