

§3.4 解析函数的高阶导数

- 一、高阶导数定理
- 二、柯西不等式
- 三、刘维尔定理

一、高阶导数定理

分析 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析 \bar{D} 在 $D+C$ 上连续,

则由 柯西积分公式 有 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, (z \in D).$

$$\text{又 } \frac{d}{dz} [(\zeta - z)^{-1}] = (\zeta - z)^{-2}, \quad \frac{d^2}{dz^2} [(\zeta - z)^{-1}] = 2(\zeta - z)^{-3},$$

$$\dots\dots \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{\zeta - z} \right) = n! (\zeta - z)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}},$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, (z \in D).$$

(?)

§3.4 解析函数的高阶导数

一、高阶导数定理

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, \bar{D} 在 $D+C$

P71
定理
3.9

上连续, 的各阶导数均在 D 上解且析,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (z \in D).$$

证明 (略)  (进入证明?)

意义 解析函数的导数仍解析。

应用 ● 反过来计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$

● 推出一些理论结果。

§3.4 解析函数的高阶导数

例 计算 $\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$. P73 例 3.12 部分

$$\begin{aligned} \text{解 } \oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} \cos'' z \Big|_{z=i} \\ &= -\pi i \cos i = -\frac{\pi i}{2} (e + e^{-1}). \end{aligned}$$

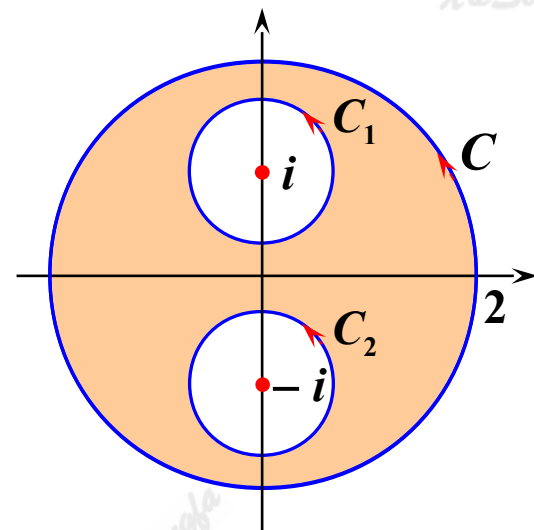
例 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{100}} dz$.

$$\text{解 } \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{100}} dz = \frac{2\pi i}{99!} (e^z)^{99} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{99!}.$$

§3.4 解析函数的高阶导数

例 计算 $I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

解 (1) 令 $f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)^2} = \frac{e^z}{(z-i)^2(z+i)^2}$.



如图，作 C_1, C_2 两个小圆，

则 $I = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz$ (复合闭路定理)

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z+i)^2} \cdot \frac{dz}{(z-i)^2} + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z-i)^2} \cdot \frac{dz}{(z+i)^2}$$

记为 $I_1 + I_2$.

§3.4 解析函数的高阶导数

例 计算 $I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

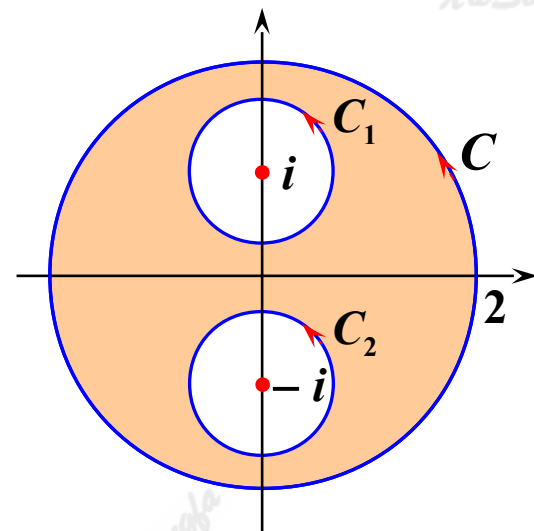
解 (2) $I_1 = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z+i)^2} \cdot \frac{dz}{(z-i)^2}$

(高阶导数公式) $\frac{2\pi i}{1!} \cdot \left[\frac{e^z}{(z+i)^2} \right]' \Big|_{z=i}$

$$= \frac{\pi}{2} (1-i) e^i.$$

同样可求得 $I_2 = -\frac{\pi}{2} (1+i) e^{-i}.$

(3) $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} [(1-i)e^i - (1+i)e^{-i}] = \sqrt{2}\pi i \sin(1 - \frac{\pi}{4}).$



二、柯西不等式

定理 设函数 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内解析, $|f(z)| < M$, 则

且

P73
定理
3.10

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (\text{柯西不等式})$$

证明 $\forall R_1: 0 < R_1 < R$, 函数 $f(z)$ 在 $|z - z_0| \leq R_1$ 上解

$$\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=R_1} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} ds \leq \frac{n!M}{R_1^n},$$

令 $R_1 \rightarrow R$, 即 $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad (n = 1, 2, \dots).$
得

三、刘维尔定理

定理 设函数 $f(z)$ 在全平面上解析且有界, $f(z)$ 为一

P74 定理 3.11。

证明 设 z_0 为平面上任意一点,

$\forall R > 0$, 函数 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 上解析, 且 $|f(z)| < M$,

根据柯西不等式有 $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$,

令 $R \rightarrow +\infty$, 即 $f'(z_0) = 0$,

得
由 z_0 的任意性, 知在全平面上有 $f'(z) \equiv 0$,

则 $f(z)$ 为一常数。

§3.4 解析函数的高阶导数

例 (代数基本定理) 设函数 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$,
其中, $a_n \neq 0$, n 为正整数. 证明方程 $f(z) = 0$ 在全平面上至少有一个根。

证 (反证法) 假设 $f(z) = 0$ 在全平面上无根, $f(z) \neq 0 (\forall z)$,
即
则函数 $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在全平面上解析,

$$\text{又 } \lim_{z \rightarrow +\infty} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = 0,$$

故 $\varphi(z)$ 在全平面上有界. 根据刘维尔定理有

$$\varphi(z) = C (\text{常数}), \Rightarrow f(z) = C_1 (\text{常数}), \text{与题设矛盾}$$

§3.4 解析函数的高阶导数

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析, 且 $|f(z) - z| \leq \frac{1}{|2 - z|}$,
证明 $|f'(0)| \leq 2$.

证 (1) 任取正数 $r < 2$, (注意 $f(z)$ 在 $|z| = 2$ 上的性态不知道)

则函数 $f(z)$ 在 $|z| \leq r$ 内解析, 高阶导数公式有

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2} dz,$$

$$\Rightarrow |f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z) - z + z}{z^2} dz \right|,$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z) - z| + |z|}{|z|^2} ds,$$

§3.4 解析函数的高阶导数

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析, 且 $|f(z) - z| \leq \frac{1}{|2 - z|}$,
证明 $|f'(0)| \leq 2$.

证 (1) $|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z) - z| + |z|}{|z|^2} ds,$

(2) 由 $|f(z) - z| \leq \frac{1}{|2 - z|}$, 有

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{1}{|z|^2 \cdot |2 - z|} ds + \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{1}{|z|} ds$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{1}{|z|^2 \cdot (2 - |z|)} ds + \frac{1}{2\pi r} \cdot 2\pi r,$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi r^2 (2 - r)} \cdot 2\pi r + 1,$$

§3.4 解析函数的高阶导数

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析, 且 $|f(z) - z| \leq \frac{1}{|2 - z|}$,
证明 $|f'(0)| \leq 2$.

证 (1) $|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z) - z| + |z|}{|z|^2} ds,$

(2) $|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi r^2(2-r)} \cdot 2\pi r + 1 = \frac{1}{r(2-r)} + 1,$

(3) 令 $r = 1$ 得 $|f'(0)| \leq 2$.

§3.4 解析函数的高阶导数

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析, 且满足 $|f(z) - 2| \leq |z|$,

证明
$$\frac{1}{\pi i} \oint_{|z|=1} \left(z + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \frac{dz}{z} = f'(0).$$

证 (1) 由于 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析, 根据 高阶导数定理 可得

在 $|z| < 2$ 内 $f'(z)$ 也解析

(2) 由 $|f(z) - 2| \leq |z|$ 可得

在 $|z| < 2$ 内 $f(z) \neq 0$

$\Rightarrow z + \frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $|z| < 2$ 内解析;

§3.4 解析函数的高阶导数

例 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析, 且满足 $|f(z) - 2| \leq |z|$,

证明
$$\frac{1}{\pi i} \oint_{|z|=1} \left(z + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \frac{dz}{z} = f'(0).$$

证 (3) 根据柯西积分公式有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \oint_{|z|=1} \left(z + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \frac{dz}{z} &= 2\pi i \cdot \frac{1}{\pi i} \left(z + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{2f'(0)}{f(0)}; \end{aligned}$$

(4) 由 $|f(z) - 2| \leq |z|$, $\Rightarrow |f(0) - 2| \leq 0$, $\Rightarrow f(0) = 2$;

即得
$$\frac{1}{\pi i} \oint_{|z|=1} \left(z + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \frac{dz}{z} = f'(0).$$



休息一下

§3.4 解析函数的高阶导数

附：高阶导数定理的证明

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析 \bar{D} 在 $D+C$ 上连续，的各阶导数均在 D 上解析，且

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad (z_0 \in D).$$

证明 由函数 $f(z)$ 在 $\bar{D} = D+C$ 上连续，
有 $|f(z)|$ 在 $\bar{D} = D+C$ 上有界，即 $|f(z)| \leq M$.

设边界 C 的长度为 L 。

(1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$.

附：高阶导数定理的证明

证明 (1) 先证 $n=1$ 的情形, 即证 $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$.

根据柯西积分公式有 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \oint_C f(z) \left(\frac{1}{z - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{z - z_0} \right) dz \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz,$$

附：高阶导数定理的证明

证明 (1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} dz,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

$$= \frac{\Delta z}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2} dz \quad \text{记为 } I.$$

● 下面需要证明：当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时 $I \rightarrow 0$.

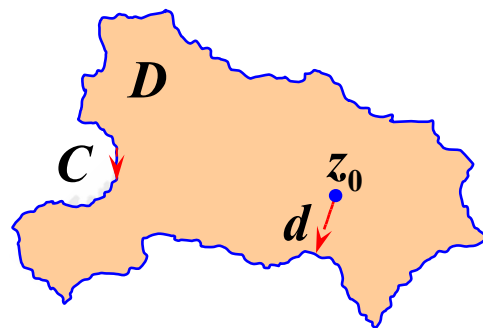
,

附：高阶导数定理的证明

证明 (1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$.

$$I = \frac{\Delta z}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2} dz.$$

如图，设 d 为 z_0 到 C 的最短距离，
即 $|z-z_0| \geq d$,



取 Δz 适当小，使其满足 $|\Delta z| < \frac{d}{2}$ ，则

$$|z-z_0-\Delta z| \geq |z-z_0| - |\Delta z| > \frac{d}{2},$$

即得 $|I| \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \cdot \frac{2}{d} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot ML \rightarrow 0, (\Delta z \rightarrow 0),$

附：高阶导数定理的证明

证明 (2) 对于 $n=2$ 的情形

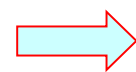
由于前面已经证明了解析函数的导数仍是解析函数，因此将 $f'(z)$ 作为新的函数，用同样的方法求极限：

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f'(z_0 + \Delta z) - f'(z_0)}{\Delta z},$$

$$\text{即可得 } f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz.$$

(3) 依此类推，则可以证明

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (z_0 \in D).$$



(返回)