



华中科技大学

复变函数与积分变换



复变函数 与积分变换

华中科技大学数学与统计学院

http://www.icourses.cn/coursestatic/course_2561.html

一、教学及考核方式

课堂教学： 40 学时

答疑： 每周一次

作业： 每周交作业一次

考试方式： 闭卷

考试成绩： 作业占 20%， 考试占 80%

主要参考书 (略)

二、教学内容

复变函数与积分变换课程是工科各专业必修的重要基础理论课，是工程数学的主要课程之一。复变函数与积分变换在科学研究、工程技术等各行各业中有着广泛的应用。

本课程由复变函数与积分变换两个部分组成。

复变函数的内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、留数及其应用、共形映射以及解析函数在平面场的应用。

积分变换的内容包括：傅里叶变换和拉普拉斯变换。

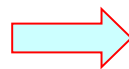
其中，带“*”号的内容本课堂不需要掌握。

第一章 复数与复变函数

复数的产生最早可以追溯到十六世纪中期。但直到十七世纪末期，经过了卡尔丹、笛卡尔、欧拉以及高斯等许多人的长期努力，复数的地位才被确立下来。

复变函数理论产生于十八世纪，在十九世纪得到了全面发展。^面为复变函数理论的创建做了早期工作的是欧拉、达贝尔、朗普拉斯等。为这门学科的发展作了大量奠基工作则是柯西、黎曼和维尔斯特拉斯等的。

复变函数理论中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域的推广和发展。



(虚数史话)

第一章 复数与复变函数

§1.1 复数

§1.2 复数的几种表示

§1.3 平面点集的一般概念

§1.4 无穷大与复球面

§1.5 复变函数

§1.1 复数

- 一、复数及其运算
- 二、共轭复数

一、复数及其运算

1. 复数的基本概念 P1

定义 (1) 设 x 和 y 是任意两个实数，将形如

$$z = x + iy \quad (\text{或者 } z = x + yi)$$

的数称为复数。其中 i 称为虚数单位，即 $i = \sqrt{-1}$ 。

(2) x 和 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，并分别表示为：

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(3) 当 $x = 0$ 时， $z = 0 + iy = iy$ 称为纯虚数；

当 $y = 0$ 时， $z = x + i0 = x$ 就是实数。

因此，实数可以看作是复数的特殊情形。

一、复数及其运算

1. 复数的基本概念

相等 设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，
如果 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ ，则称 z_1 与 z_2 **相等**。

特别地， $z = x + iy = 0$ 当且仅当 $x = y = 0$ 。

注 复数与实数不同，两个复数（虚部不为零）不能比较大小
它们之间只有相等与不相等的关系。

一、复数及其运算

2. 复数的四则运算 P2

设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数,

(1) 复数的加减法

加法 $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2);$

减法 $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2).$

(2) 复数的乘除法

乘法 $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$

除法 如果存在复数 z , 使得 $z_1 = z_2 \cdot z$, 则 $z = \frac{z_1}{z_2}.$

一、复数及其运算

2. 复数的四则运算

(3) 运算法则

交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

结合律 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

分配律 $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$

二、共轭复数

1. 共轭复数的定义 P2

定义 设 $z = x + iy$ 是一个复数，
称 $z = x - iy$ 为 z 的共轭复数，
记作 \bar{z} 。

注 共轭复数有许多用途。

比如

$$\begin{aligned}
 z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\
 &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.
 \end{aligned}$$

二、共轭复数

2. 共轭复数的性质 P3

性质 (1) $\overline{\overline{z}} = z$;

$$(2) \overline{z_1 \circ z_2} = \overline{z_1} \circ \overline{z_2},$$

其中, “ \circ ” 可以是 $-$, \times , \div ;

$$(3) z \cdot \overline{z} = [\operatorname{Re} z]^2 + [\operatorname{Im} z]^2 = x^2 + y^2;$$

$$(4) \frac{z + \overline{z}}{2} = \operatorname{Re} z = x,$$

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \operatorname{Im} z = y.$$

例 已知 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

解 (1)
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3 + 4i)(-3 - 4i)}$$
$$= \frac{-35 - 5i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

(2)
$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

例 证明 $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

P4 例 1.1

证明

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 &= z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \overline{\overline{z_2}} \\ &= z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} \\ &= 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2). \end{aligned}$$



轻松一下吧

附：历史知识 —— 虚数史话

- 1545 年，卡尔丹第一个认真地讨论了虚数，他在《大术》中求解这样的问题：

两数的和是 10，积是 40，求这两数

卡尔丹发现只要把 10 分成 $\sqrt{-15}$ 和 $5 + \sqrt{-15}$ 即可。

- 卡尔丹称它们为“虚构的量”或“诡辩的量”。他还把它们与负数统称为“虚伪数”；把正数称为“证实数”
- 卡尔丹的这种处理，遭到了当时的代数学权威韦达和他的学生哈里奥特的责难。

附：历史知识 —— 虚数史话

- 整个十七世纪，很少有人理睬这种 “虚构的量”
- 仅有极少数的数学家对其存在问题争论不休。
- 1632 年，笛卡尔在《几何学》中首先把这种 “虚构的量” 改称为 “虚数”，与 “实数” 相对应。同时，还给出了如今的 “复数” 的名称。

附：历史知识 —— 虚数史话

- 到了十八世纪，虚数才开始被关注起来
- 1722 年，法国数学家德摩佛给出德摩佛定理：

$$(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta,$$

其中 n 是大于零的整数。

- 1748 年，欧拉给出了著名的公式：

$$e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x,$$

并证明了德摩佛定理对 n 是实数时也成立。

- 1777 年，欧拉在递交给彼德堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 i 来表示 $\sqrt{-1}$ 。

附：历史知识 —— 虚数史话

- 十八世纪末，高斯的出现使得复数的地位被确立下来。
- 1797 年，当时年仅 20 岁的高斯在他的博士论文中证明了代数基本定理。即 任何多项式在复数域里必有根而且 n 次多项式恰好有 n 个根。
- 高斯在证明中巧妙地给出了复数的几何表示，使得人们直观地理解了复数的真实意义。
- 十九世纪中叶以后，复变函数论开始形成，并逐渐发展成为一个庞大的数学分支。

附：人物介绍——高斯



高 斯

Johann Carl Friedrich Gauss

(1777 ~ 1855)

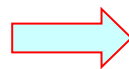
德国数学家、物理学家、天文学家

- 许多数学学科的开创者和奠基人。
- 几乎对数学的所有领域都做出了重大贡献
- 享有数学王子的美誉。

附：人物介绍 —— 高斯

- 高斯去世后，哥廷根大学对高斯的文稿进行了整理，历时 67 年，出版了《高斯全集》，共 12 卷。
- 在哥廷根大学的广场上，矗立着一座用白色大理石砌成的纪念碑，它的底座砌成 正十七边形，纪念碑上是高斯的青铜雕像。

18 岁



(返回)