2013～2014 学年第一学期

《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A卷) (闭卷)

院(系)__________ 专业班级____________ 学号______________ 姓名____________

考试日期: 2013 年 11 月 25 日　　　　**考试时间**: 晚上 7:00 ~ 9:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得　分	
评卷人	

一、填空题(每题 3 分，共 24 分).

(1) 设 $z=\dfrac{(1+\sqrt{2}+i)(\cos\sqrt{3}-i)}{(1+\sqrt{2}-i)(\cos\sqrt{3}+i)}$，则 $|\bar{z}|=$____.

(2) 复数 $(1-i)^i$ 的值为________________.

(3) 设 $f(z)=x^2+iy^2$，则 $f'(1+i)=$____.

(4) 设 $f(z)$ 在 $3\le|z|\le 8$ 上解析，且 $\oint_{|z|=3} f(z)\mathrm{d}z=3$，

则 $\oint_{|z|=8} f(z)\mathrm{d}z=$____.

(5) 函数 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{\cos(\pi z)}$ 在 $z_0=0$ 点的泰勒(Taylor)展开式的收敛半径是____.

(6) 设 $f(z)=\mathrm{e}^{\sin z}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$____.

(7) 在映射 $w=1-z^2$ 下，$z_0=1+i$ 处的伸缩率为____，旋转角为____.

(8) 函数 $f(t)=2\cos^2 t$ 的傅氏变换 $F(\omega)$ 为____________.

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

二、(10分)设 $u(x,y)=y^3+y+ax^2y$，求 a 及函数 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足 $f(1)=2i$.

得　分	
评卷人	

三、(12分)将函数 $f(z)=z^2-1+\dfrac{1}{z^2-1}$ 在 $z_0=1$ 点展开为洛朗(Laurent)级数.

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四、计算下列积分(共20分).

(其中第1、2小题各5分，第3小题10分)

1. $\oint_{|z|=1}\dfrac{2z+1}{\cos(\pi z)}\,dz$.

2. $\oint_{|z|=1} \frac{(1+z)^2}{z} e^{\frac{1-2z}{z}} dz$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos(2x)}{x^2+4x+5} dx$.

得　分	
评卷人	

五、(10分) 已知区域 $D=\{z:|z|<1,\ |z-(1+i)|>1\}$，求一共形映射 $w=f(z)$ 将 D 映射到单位圆内部.

得　分	
评卷人	

六、(6分) 求区域 $D=\{z:|z|<1,\ |z-(1+i)|>1,\ \mathrm{Im}z>0\}$ 在映射 $w=\mathrm{e}^{\pi\frac{1+z}{1-z}}$ 下的像.

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

七、(12 分) 利用 Laplace 变换求解常微分方程：

$$x''(t)+4x'(t)+5x(t)=2\mathrm{e}^{-t}-5,\quad x(0)=x'(0)=0.$$

得 分	
评卷人	

八、(6 分) 设在 $|z|\le 1$ 上 $f(z)$ 解析，$f'(z)\neq 0$，$f(0)=0$，且函数 $f(z)$ 无其它零点，证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2 f'(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z f'(z)}{f(z^2)}\mathrm{d}z.$$