§2.2 解析函数与调和函数的关系

一、调和函数

二、共轭调和函数

三、构造解析函数

一、调和函数

引例 考察三维空间中某无旋无源力场（或流速场）的势函数.

设该力场为$\vec{F}=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$.

(1) 无旋场 沿闭路做功为零（即做功与路径无关）。又称为保守场或者梯度场或者有势场。

存在势函数$\varphi(x,y,z)$，使得

$$P=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad R=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

即 $\vec{F}=\{P,Q,R\}=\{\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}.$

一、调和函数

引例 考察三维空间中某无旋无源力场（或流速场）的势函数.

设该力场为 $\vec{F}=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$.

(1) 无旋场 $\vec{F}=\{P,Q,R\}=\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y},\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\}$.

(2) 无源场 散度为零，即 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

- 无旋无源力场的势函数 φ 满足 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$.

特别地，对于平面力场 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$.

一、调和函数

定义 若二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内有连续二阶偏导数且满足拉普拉斯(Laplace)方程:

P36 定义2.3

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数。

注 泊松(Poission)方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=f(x,y).$$

(算子与 Δ 算子)

一、调和函数

定理 若函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析，

P36 定理 2.3

则 $u(x,y)$, $v(u,y)$ 在区域 D 内都是调和函数。

证明 由 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 解析，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad &\underset{(?)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \quad &\underset{(?)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\end{aligned}\right\} \underset{(?)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$

二、共轭调和函数

定义 设函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 均为区域 D 内的调和函数，且满足 $C-R$ 方程：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，

P37 定义 2.4

则称 v 是 u 的共轭调和函数。

定理 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是：在区域 D 内，v 是 u 的共轭调和函数。

P37 定理 2.4

注意 v 是 u 的共轭调和函数 $\not\Rightarrow$ u 是 v 的共轭调和函数。

三、构造解析函数

问题 已知实部 u，求虚部 v (或者已知虚部 v，求实部 u)

使 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 解析，且满足指定的条件。

依据 构造解析函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 的依据：

(1) u 和 v 本身必须都是调和函数;

(2) u 和 v 之间必须满足 $C-R$ 方程。

注意 必须首先检验 u 或 v 是否为调和函数。

方法
- 偏积分法
- 全微分法

三、构造解析函数

方法 • 偏积分法（不妨仅考虑已知实部 u 的情形）

(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的两个偏导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}, & (A) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}. & (B) \end{cases}$$

(2) 将 (A) 式的两边对变量 y 进行（偏）积分得：

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\tilde{v}(x,y)+\varphi(x), \quad (C)$$

其中，$\tilde{v}(x,y)$ 已知，而 $\varphi(x)$ 待定。

(3) 将 (C) 式代入 (B) 式，求解即可得到函数 $\varphi(x)$.

三、构造解析函数

方法 • 全微分法(不妨仅考虑已知实部 u 的情形) P39

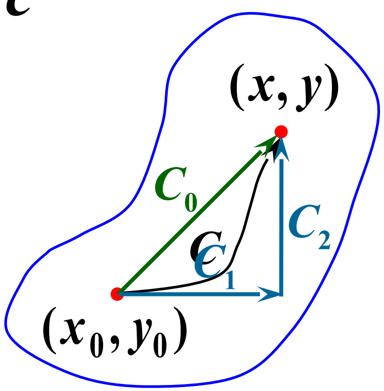
(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的全微分：

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

(2) 利用第二类曲线积分（与路径无关）得到原函数：

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_C-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+c.$$



其中，$C=C_0 \quad C_1+C_2$.

或

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$. P38 例 2.6 修改

解 (1) 验证 $u(x,y)$ 为调和函数

由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x$,

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

故 $u(x,y)$ 是调和函数。

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (2) 求虚部$v(x,y)$

方法一： 偏积分法

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

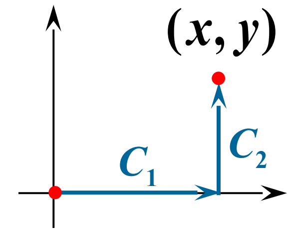
$$\Rightarrow\ v=\int(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3+\varphi(x),$$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+\varphi'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy$, $\Rightarrow\ \varphi'(x)=0$,

$$\Rightarrow\ \varphi(x)=c,\ \Rightarrow\ v(x,y)=3x^2y-y^3+c.$$

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$



方法二： 全微分法

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy,$

$$\Rightarrow\ \mathrm{d}v=v'_x\mathrm{d}x+v'_y\mathrm{d}y=6xy\,\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y,$$

$$\Rightarrow\ v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}6xy\,\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+c$$

$$=3x^2y-y^3+c.$$

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (3) 求确定常数 c

$$f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+c),$$

根据条件 $f(i)=-i$，将 $x=0,\ y=1$ 代入得

$$i(-1+c)=-i, \Rightarrow c=0,$$

即得 $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3).=z^3.$

例 验证 $u=x^2-y^2+xy$ 为调和函数，并求以 (x,y) 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-1+i$.

P40 例 2.8

解 (1) 验证 $u(x,y)$ 为调和函数

由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2,$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

故 $u(x,y)$ 是调和函数。

例 验证 $u=x^2-y^2+xy$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-1+i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$

方法一： 偏积分法

由 $$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y=\frac{\partial v}{\partial y},$$

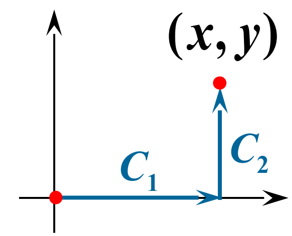
$$\Rightarrow\ v=\int(2x+y)\,\mathrm{d}y=2xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x),$$

由 $$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y-x,\ \Rightarrow\ \varphi'(x)=-x,$$

$$\Rightarrow\ \varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2+c,\ \Rightarrow\ v(x,y)=2xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+c.$$

例 验证 $u = x^2 - y^2 + xy$ 为调和函数，并求以 (x, y) 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i) = -1 + i$.

解 (2) 求虚部 $v(x, y)$



方法二： 全微分法（利用第二类曲线积分）

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - x$,

$$\Rightarrow \mathrm{d}v = v'_x \mathrm{d}x + v'_y \mathrm{d}y = (2y - x)\mathrm{d}x + (2x + y)\mathrm{d}y,$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2y - x)\mathrm{d}x + (2x + y)\mathrm{d}y + c$$

$$= \int_0^x (-x)\mathrm{d}x + \int_0^y (2x + y)\mathrm{d}y + c$$

$$= 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c.$$

例 验证 $u = x^2 - y^2 + xy$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i) = -1 + i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$

方法三： 全微分法 (利用“反微分”法)

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - x$,

$$\Rightarrow \mathrm{d}v = v'_x \mathrm{d}x + v'_y \mathrm{d}y = (2y - x)\mathrm{d}x + (2x + y)\mathrm{d}y,$$

$$= 2y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}(-x^2/2) + 2x\mathrm{d}y + \mathrm{d}(y^2/2),$$

$$= \mathrm{d}(2xy - x^2/2 + y^2/2),$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c.$$

例 验证 $u=x^2-y^2+xy$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-1+i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$

方法四：直接利用已知的解析函数与“唯一性”

由 $z^2=(x^2-y^2)+i\,2xy$, $\Rightarrow \dfrac{1}{2i}z^2=xy-i\dfrac{x^2-y^2}{2}$,

故 $u=x^2-y^2+xy$ 是解析函数 $g(z)=z^2+\dfrac{1}{2i}z^2$ 的实部，

$$\Rightarrow v(x,y)=2xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+c.$$

例 验证 $u = x^2 - y^2 + xy$ 为调和函数，并求以(x,y)为实部的解析函数$f(z)$，使得 $f(i) = -1 + i$.

解 (3) 求确定常数 c

$$f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i\left(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + c\right).$$

根据条件$f(i) = -1 + i$，将 $x = 0$，$y = 1$ 代入得

$$-1 + i\left(\frac{1}{2} + c\right) = -1 + i, \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2},$$

即得 $f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i\left(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$$= z^2 + \frac{1}{2i}z^2 + \frac{1}{2}i.$$

休息一下 ……

附：知识广角 —— ∇ 算子与Δ 算子

- 哈密顿（Hamilton）算子 $\nabla = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right\}.$

“那布拉”

例如 设 $U(x,y,z)$ 为数量场，则梯度 $grad\, U = \nabla U.$

设 $\vec{F}(x,y,z)$ 为向量场，则散度 $div\, \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$，旋度 $rot\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$

- 拉普拉斯（Laplace）算子 $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}.$

“德尔塔”

例如 拉普拉斯（Laplace）方程 $\Delta \varphi = 0.$

泊松（Poission）方程 $\Delta \varphi = f(x,y,z).$

（返回）