练 习 十 一

利用留数求下列定积分。

1．$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}\qquad(a>1)$

解：令 $z=e^{i\theta}$，则 $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$

$$\therefore 原式=\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\oint_{|z|=1}\frac{-2i}{2az+z^2+1}dz$$

$a>1$ 时被积函数的二个极点中只有 $z=-a+\sqrt{a^2-1}$ 在圆周 $|z|=1$ 内

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),-a+\sqrt{a^2+1}]=\lim_{z\to-a+\sqrt{a^2+1}}\frac{-2i}{z+a+\sqrt{a^2-1}}=\frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\therefore 原式=2\pi i\cdot\frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

2．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a+\cos^2\theta}\qquad(a>0)$

解：$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d\theta}{2a^2+\cos 2\theta+1}$

$$\underline{\underline{令t=2\theta}}\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2a^2+\cos t+1}$$

令 $z=e^{it}$，则 $\cos t=\frac{z^2+1}{2z},\qquad dt=\frac{1}{iz}dz$

$$I=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{2a^2+\frac{z^2+1}{2z}+1}\cdot\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{-2idz}{[z^2+(4a^2+2)z+1]}$$

分母 $=0\Rightarrow z=-1-2a^2\pm2a\sqrt{a^2+1}$

$$\therefore I=-i\cdot2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),-1-2a+2a\sqrt{a^2+1}]=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+1}}$$

3．$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$

解：这里$P(z)=z^2$，$Q(z)=z^4+z^2+1, Q(x)$在实轴上无零点，积分存在。

$$Q(z)=(z^2+1)^2-z^2=(z^2+z+1)(z^2-z+1)$$

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$有四个简单极点：$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$，上半平面只包含$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$$\mathrm{Re}\,s\left[R(z),\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right]=\lim_{z\to\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}\frac{z^2}{(z^2-z+1)(z-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})}=-\frac{i+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{Re}\,s\left[R(z),\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right]=\lim_{z\to\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}\frac{z^2}{(z^2+z+1)(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2})}=-\frac{i-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

故 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx=2\pi i\left\{-\frac{i+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}-\frac{i-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

4．$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^3}dx$

解：原式$=\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^3}dx$

而$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$在上半平面只有一个极点，$z=i$，为3阶极点。

所以$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^3}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),i]=\pi i\cdot\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2[\frac{1}{(z+i)^3}]}{dz^2}$

$$=\frac{1}{2}\pi i\cdot\frac{1^2}{2^5\cdot i^5}=\frac{3\pi}{16}$$

5．$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$

解：原式$=\mathrm{Re}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+9}dx$

而 $\dfrac{1}{z^2+9}$在上半平面只有简单极点：$z=3i$

所以$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+9}dx = 2\pi i\cdot \mathrm{Re}\,s[\frac{e^{iz}}{z^2+9},3i] = 2\pi i\cdot \lim_{z\to 3i}(z-3i)\cdot \left.\frac{e^{iz}}{z^2+9}\right|_{z\to 3i} = \frac{\pi e^{-3}}{3}$

即$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx = \frac{\pi}{3}e^{-3}$

6．$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}dx \qquad (\beta>0, b>0)$

解：原式$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\beta x}}{(x^2+b^2)^2}dx$

令$f(z)=\frac{z\cdot e^{i\beta z}}{(z^2+b^2)^2}$ 而$f(z)$有两个二级极点，其中$z=bi$在上半平面。

所以 $\mathrm{Re}\,s[f(z),bi] = \lim_{z\to bi}\left(\frac{ze^{i\beta z}}{(z^2+b^2)^2}(z-bi)^2\right)' = \frac{\beta e^{-b\beta}}{4b}$

$\therefore \int_0^{\infty}\frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^{2)}}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}[2\pi i\,\mathrm{Re}\,s(f(z)\cdot bi)] = \frac{1}{2}\mathrm{Im}[2\pi i\frac{\beta e^{-b\beta}}{4b}]$

$$=\frac{\beta\pi e^{-\beta b}}{4b}$$

*7．思考题

1．利用留数计算定积分要注意哪些问题?

答：由于留数是与求封闭曲线 C 上的复积分联系在一起的，而定积分的积分区间是实轴上的某一有限或无限线段。因此，首先要解决的是将实定积分的积分区间拓展为闭曲线，这可以用代换（如$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$型）或添加辅助曲线并辅以极限概念（如$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$型）来完成。其次，定积分的被积函数必须与某个解析函数有关，这一点不难办到，因为被积函数通常为初等函数，而初等函数一般都可以推广到复数域中。