# 2010～2011学年第一学期
# 《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A卷)

院(系)________专业班级_________学号______________姓名_________

**考试日期:** 2010年11月29日　　　　**考试时间:** 晚上7:00~9:30

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

一、填空题(每题3分，共24分)

1．复数 $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^4}{(1+i)^2}$ 的模为__8__，辐角主值为____．　$\dfrac{5}{6}\pi$

2．满足 $|z-3|\le \mathrm{Re}(z+1)$ 的点集所形成的平面图形为 $y^2\le 8(x-1)$（抛物线及其内部），该图形是否为区域_否_.

3．$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ 的值为 $e^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$，主值为 $e^{\frac{\pi}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$．

4．函数 $f(z)=x^2+2ixy$ 在何处可导? _实轴　$y=0$__，

何处解析?_处处不解析______．

5．设 $f(z)=\oint\limits_{|\xi|=2}\dfrac{3\xi^2-2\xi+1}{\xi-z}d\xi$，则 $f(1)=$ $4\pi i$，$f'(1+i)=$ $8\pi i-12\pi$

6．函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8}$ 在 $z=i$ 点展成泰勒级数的收敛半径为__$\sqrt{5}$

7．$z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^6}$ 的__**5**__阶极点；在该点处的留数为 $-\dfrac{4}{15}$.

8．函数 $f(t)=\sin^2 t$ 的Fourier变换为 $\dfrac{\pi}{2}\left[2\delta(\omega)-\delta(\omega-2)-\delta(\omega+2)\right]$．

| 得 分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

二、计算题 (每题 5 分，共 20 分)

1．$\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z-1}{z^2(z-1)}\,dz$

解：方法一 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z-1}{z^2(z-1)}\,dz$

$$=\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z-1}{z-1}}{z^2}dz+\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z-1}{z^2}}{z-1}dz \qquad (2')$$

$$=2\pi i\left[\left(\frac{e^z-1}{z-1}\right)'\Big|_{z=0}+\frac{e^z-1}{z^2}\Big|_{z=1}\right] \qquad (2')$$

$$=2\pi i(e-2) \qquad (1')$$

方法二　函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2(z-1)}$ 在 $|z|=2$ 内有两个孤立奇点：$z=0$ 与 $z=1$

$z=0$ 为简单极点

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z(z-1)}=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}\lim_{z\to0}\frac{1}{z-1}=-1 \qquad (2')$$

$z=1$ 为简单极点

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}\frac{e^z-1}{z^2}=e-1 \qquad (2')$$

由留数定理知：

$$\oint_{|z|=2} f(z)dz=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\}=2\pi i(e-2) \qquad (1')$$

2．$\oint\limits_{|z|=2} z^2(\sin\dfrac{1}{z})^3\,dz$

解：在 $|z|=2$ 内，$f(z)=z^2(\sin\dfrac{1}{z})^3$ 只有 $z=0$ 一个孤立奇点，

$(\sin\dfrac{1}{z})^3=(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3!z^3}+\dfrac{1}{5!z^5}-\cdots)^3$，故 $z=0$ 为 $\boldsymbol{f(z)}$ 本性奇点　　(1′)

$$z^2(\sin\frac{1}{z})^3=z^2(\frac{1}{z^3}+\cdots)^3=\frac{1}{z}+\cdots \qquad (2')$$

$z^2(\sin\frac{1}{z})^3$在$z=0$处 Laurent 展式中$C_{-1}=1$ (1′)

由留数定理知：$\oint_{|z|=2}f(z)dz=2\pi iC_{-1}=2\pi i$ (1′)

3．$\int_0^{\pi}\frac{\cos4\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$

解：被积函数$\frac{\cos4\theta}{5-4\cos\theta}$是关于$\theta$的偶函数

故$\int_0^{\pi}\frac{\cos4\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos4\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ (1′)

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{4i\theta}}{5-4\cos\theta}d\theta$$

令$z=e^{i\theta}$，则当$\theta$从$-\pi$到$\pi$时，$z$绕单位圆$z$向运行一周， (1′)

$\frac{z^4}{2z^2-5z+2}$在$|z|=1$内只有$z=\frac{1}{2}$一个简单极点，令$f(z)=\frac{z^4}{2z^2-5z+2}$

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{1}{2}\right]=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^4}{2(z-\frac{1}{2})(z-2)}\cdot(z-\frac{1}{2})=\frac{1}{-3\cdot2^4}$$

$$\frac{-1}{2}\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\cdot\frac{-1}{2}\cdot\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{1}{2}\right]=-2\pi\cdot\frac{1}{-3\cdot2^4}=\frac{\pi}{24} \qquad (2')$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos4\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\frac{\pi}{24})=\frac{\pi}{48} \qquad (1')$$

4．$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin2x}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$

解：$\frac{x\sin2x}{(x^2+1)(x^2+4)}$是关于$x$的偶函数，

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\frac{\mathrm{Im}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{2ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

$f(z)=\frac{ze^{2iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$在上半平面有简单极点$z_1=i$和$z_2=2i$ (2′)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{2ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),2i]\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{ze^{2iz}}{2z}\bigg|_{z=i}+\frac{\frac{ze^{2iz}}{z^2+1}}{2z}\bigg|_{z=2i}\right\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{e^{2iz}}{2(z^2+4)}\bigg|_{z=i}+\frac{e^{2iz}}{2(z^2+1)}\bigg|_{z=2i}\right\}=\pi i(\frac{e^{-2}}{3}-\frac{e^{-4}}{3}) \text{ 原式}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{-2}}{3}-\frac{e^{-4}}{3}\right]$$

（2′）

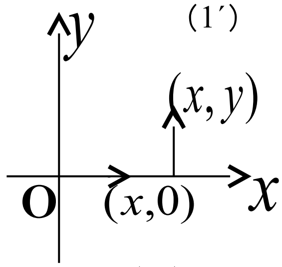
| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

三、(8 分)已知 $v(x,y)=x^2+ay^2$，求常数 $a$ 以及二元函数 $u(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(0)=1$.

解：由于解析函数实部、虚部都调和，故

$$v_{xx}+v_{yy}=2+2a=0\Rightarrow a=-1$$ （3′）

由 $C-R$ 方程知：$u_x=v_y=-2y\quad u_y=-v_x=-2x$ （1′）




$$u(x_1y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(-2y)dx+(-2x)dy+C$$

$$=\int_0^y(-2x)dy+C=-2xy+C$$

$$\therefore f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$ （3′）

$$=-2xy+C+i(x^2-y^2)$$

由 $f(0)=1\Rightarrow C=1\quad\therefore f(z)=-2xy+1+i(x^2-y^2)$ （1′）

$$=iz^2+1$$

| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

四、(12 分)将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z}$ 分别在点 $z=0$ 和 $z=2$ 展开为洛朗(Laurent)级数.

解：（1）在 $z=0$ 点展开

①当 $0<|z|<2$ 时，$\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}(\frac{-1/2}{1-\frac{z}{2}})=\frac{-1/2}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^{n-1}$$ （3′）

②当 $2<|z|<+\infty$ 时，$\left|\frac{2}{z}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+2}} \qquad (3')$$

（2）在 $z=2$ 点展开

①当 $0<|z-2|<2$ 时，$\left|\frac{z-2}{2}\right|<1$

$$\frac{1}{2(z-2)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-z)^n}{2^{n+2}}=f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z-2+2}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-2}{2})^n \qquad (3')$$

②当 $2<|z-2|<+\infty$ 时，$\left|\frac{2}{z-2}\right|<1$

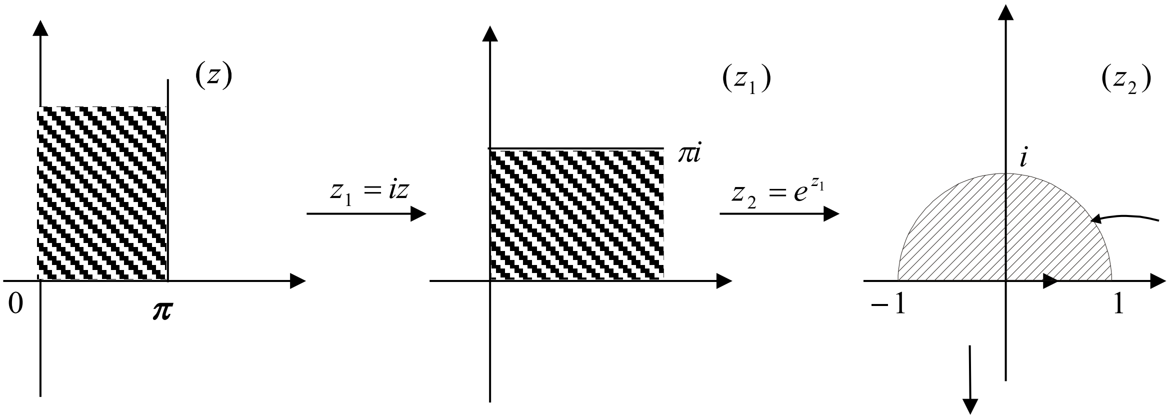
$$f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}}=\frac{1}{(z-2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{2}{z-2})^n$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{2}{z-2})^{n+2} \qquad (3')$$

| 得　分 | |
| --- | --- |
| 评卷人 | |

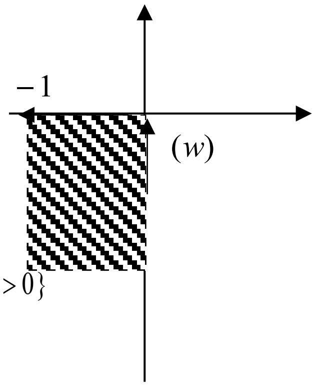
五、(8 分)求区域 $D=\{z:\ 0<\operatorname{Re}z<\pi,\operatorname{Im}z>0\}$

在映射 $w=\frac{e^{iz}+1}{e^{iz}-1}$ 下的像.



（2′）　　　　（2′）　　　　（2′）

$$w=\frac{z_2+1}{z_2-1} \qquad （2′）$$

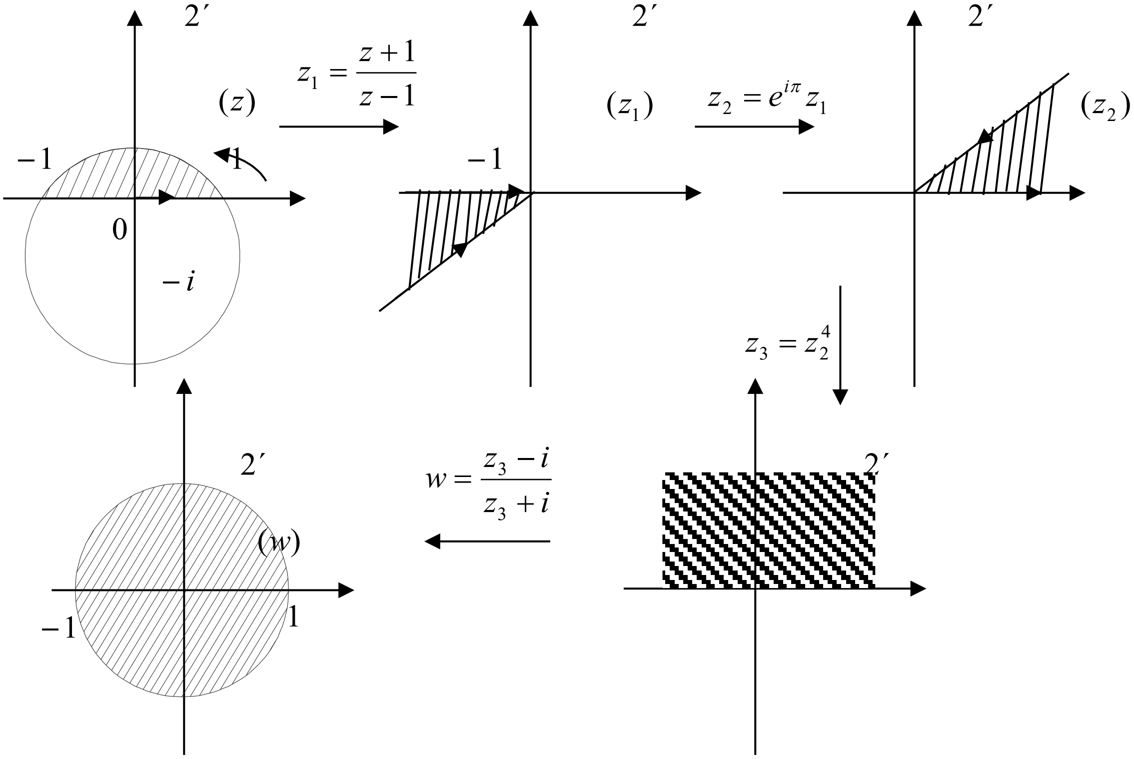



| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

六、(10 分)求将区域 $D=\{z:|z+i|<\sqrt{2},\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ 映射到单位圆内部的共形映射.

解: $z_1=\dfrac{z+1}{z-1}$, $z_2=-z_1$, $z_3=z_2^4$

$$w=\frac{z_3-i}{z_3+i}=\frac{(\frac{z+1}{z-1})^4-i}{(\frac{z+1}{z_k-1})+i}=\frac{(z+1)^4-i(z-1)^4}{(z+1)^4+i(z-1)^4}$$




| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

七、(12 分)利用 Laplace 变换求解微分方程:

$$x''(t)+4x'(t)+3x(t)=e^{-t}, x(0)=0, x'(0)=1.$$

解：（1）令 $\boldsymbol{X(s)}$ :$\mathscr{L}\,[x(t)]$，对方程两边作 Laplace 变换得：

$$S^2X(s)-1+4SX(s)+3X(s)=\frac{1}{s+1} \qquad (4')$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{1}{s^2+4s+3}\cdot\frac{s+2}{s+1}=\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} \qquad (2')$$

（2）$$x(t)=\operatorname{Re}s\left[\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}e^{st},-1\right]+\operatorname{Re}s\left[\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}e^{st},-3\right] \qquad (3')$$

$$=\lim_{s\to-1}\left(\frac{s+2}{s+3}e^{st}\right)'+\lim_{s\to-3}\frac{s+2}{(s+1)^2}e^{st} \qquad (2')$$

$$=\frac{1}{4}(e^{-t}-e^{3t})+\frac{t}{2}e^{-t} \qquad (1')$$

| 得　分 | |
|---|---|
| 评卷人 | |

八、( 6 分) 设函数 $f(z)$ 在区域 $|z|<R$ 内处处解析，

$f(z)$ 在 $|z|<r\ (r<R)$ 内仅有 $\boldsymbol{z_0}$ 一个三级零点，

证明：$\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{z^2f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=6\pi iz_0^2$.

证：设 $f(z)=(z-z_0)^3\varphi(z)$，则 $\varphi(z)$ 在 $|z|<r$ 解析，且 $\varphi(z)\neq0$　(2′)

$$f'(z)=3(z-z_0)^2\varphi(z)+(z-z_0)^3\varphi'(z)$$

$$\frac{z^2f'(z)}{f(z)}=z^2\cdot\frac{3(z-z_0)^2\varphi(z)+(z-z_0)^3\varphi'(z)}{(z-z_0)^3\varphi(z)}$$

$$=z^2\cdot\frac{3}{z-z_0}+z^2\cdot\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \qquad (2')$$

由于 $\varphi(z)$ 在 $|z|<r$ 解析，故 $\varphi'(z)$ 在 $|z|<r$ 解析，又 $\varphi(z)\neq0(|z|<r$时)

$z^2\cdot\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在 $|z|<r$ 解析，由柯西积分定理知：

$$\oint_{|z|=r}z^2\cdot\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz=0 \qquad (1')$$

又由柯西积分公式知：$\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{3z^2}{z-z_0}dz=2\pi i(3z_0^2)$

故$\oint_{|z|=r} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz = 6\pi i z_0^2$ （1′）