练 习 十 八

1．求下列函数的拉氏变换。

（1） $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos t, & t\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

解：$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3e^{-st}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\cos te^{-st}dt$

$$=\frac{3}{-s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{+\infty}\cos(\frac{\pi}{2}+\tau)e^{-s(\tau+\frac{\pi}{2})}d\tau$$

$$=\frac{3}{s}(1-e^{-\frac{\pi}{2}s})+e^{-\frac{1}{2}\pi s}\int_0^{+\infty}(-\sin\tau)\cdot e^{-st}d\tau=\frac{3}{s}(1-e^{-\frac{\pi}{2}s})+e^{-\frac{1}{2}\pi s}\ \mathscr{L}[-\sin t]$$

$$=\frac{3}{s}(1-e^{-\frac{\pi}{2}s})-\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{1}{2}\pi s}$$

（2） $f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$

解：$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}[e^{2t}+5\delta(t)]e^{-st}dt$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(s-2)t}dt+5\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt$$

$$=-\frac{e^{-(s-2)t}}{s-2}\Big|_0^{+\infty}+5e^{-st}\Big|_{t=0}=\frac{1}{s-2}+5$$

$$=\frac{5s-9}{s-2}\quad(\mathrm{Re}\,s>2)$$

（3） $f(t)=(t-1)^2e^t$

解：$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\sin t\cos t\cdot e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin 2t\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{2}\ \mathscr{L}[\sin 2t]=\frac{1}{2}\times\frac{2}{s^2=2^2}$$

$$=\frac{1}{s^2+4}$$

（4） $f(t)=(t-1)^2e^2$

解：$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[t^2e^t]-2\mathscr{L}[te^t]+\mathscr{L}[e^t]$

$$=(\frac{1}{s-1})''+2\times(\frac{1}{s-1})'+\frac{1}{s-1}$$

$$=(\frac{2}{(s-1)^3}-\frac{2}{(s-1)^2})+\frac{1}{s-1}$$

$$=\frac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}$$

2．利用拉氏变换的性质，计算$\mathscr{L}[f(t)]$。

（1） $f(t)=te^{-3t}\sin t$

解：$\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$

$$\mathscr{L}[e^{-3t}\sin t]=\frac{1}{(s+3)^2+1}$$

$$\mathscr{L}[f(t)]=-(\frac{1}{(s+3)^2+1})'=\frac{2(s+3)}{[(s+3)^2+1]^2}$$

（2） $f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt$

解法（1）： $f'(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt+te^{-3t}\sin 2t$

$$\therefore \mathscr{L}[f'(t)]=s\,\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt]+\quad\mathscr{L}[te^{-3t}\sin 2t]$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]+\mathscr{L}[te^{-3t}\sin 2t]$$

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{2}{s^2}\,\frac{1}{(s+3)^2+4}+\frac{4(s+3)}{((s+3)+4)^2 s}=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$$

法2：$\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\dfrac{2}{(s+3)^2+4}$

$$\mathscr{L}[\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt]=\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

$$\therefore \mathscr{L}[t\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt]=-[\frac{2}{s[4+(s+3)^2]}]'=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$$

（3） $\int_0^t \dfrac{e^{-3t}\sin 2tdt}{t}dt$

$$\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t] = \frac{2}{4+(s+3)^2}$$

$$\mathscr{L}[\frac{1}{t}e^{-3t}\sin 2t] = \int_s^{\infty}\frac{2}{4+(s+3)^2}ds = -arctg\frac{s+3}{2}+\frac{\pi}{2}$$

$$\mathscr{L}[\int_0^t \frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}dt] = \frac{1}{s}(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{s+3}{2})$$

3．求积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$的值。

$$\mathscr{L}[e^{-t}-e^{-2t}] = \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$\therefore$原式$= -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$

$$\mathscr{L}[\frac{1}{t}(e^{-t}-e^{-2t})] = \int_s^{\infty}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})ds = \int_s^{\infty}\frac{1}{s^2+3s+2}ds$$

$$= \ln\frac{s+1}{s+2}\Big|_s^{\infty} = -\ln\frac{s+1}{s+2}$$