答解
容内
得不
过超
订装
线

2009～2010 学年第一学期

《复变函数与积分变换》课程考试试卷（A 卷）

（闭卷）

院(系)__________ **专业班级**__________ **学号**_________ **姓名**________

考试日期:2009.11.23　　　　**考试时间:** 19：00～21：30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得　分	
评卷人	

一、填空题（每空 2 分，共 24 分）

（将答案填在题中横线上，不填解题过程）

1. 设 $z=(1+i)^{100}$，则 $\operatorname{Im} z=$______________。

2. 满足 $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<2$ 的点集是____，它

是否为区域？（填“是”或“否”）_____。

3. $3^{3-i}=$____________________________。

4. 若 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f^{(n)}(z)$ 在 z_0 解析，对吗？_________________

5. 若 $f(z)$ 在 z_0 处可展开为幂级数，则 $f(z)$ 在 z_0 处一定解析，对吗？____________

6. 映射 $w=iz^2$ 将角形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ 映射为________________。

7. $z=0$ 是 $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的__________阶极点，$\operatorname{Res}\left[\dfrac{1-e^{2z}}{z^4},0\right]=$________________。

8. 在映射 $f(z)=2z^2+4z$ 下，曲线 C 在 $z=i$ 处的旋转角是_____________，$f(z)$ 在复平面除去 $z=$_____________外是处处保角的。

9. 函数 $f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\dfrac{a}{2})+\delta(t-\dfrac{a}{2})]$ 的傅氏变换为_________

_________________________。

二、（6 分）设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$，$z=x+iy$，问常数 a,b,c,d 为何值时，$f(z)$ 在复平面上处处解析？并求此时的导数。

三、（10 分）求 $u=x^2+2xy-y^2$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$，使 $v(0,0)=1$，并以此构造解析函数。

四、（12 分）将 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在其有限孤立奇点处展开为 Laurent 级数。

五、计算下列各题（每题 4 分，共 20 分）

1. $\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z(z+1)(z-3)}$

2. $\oint_{|z|=1} z^2\sin\dfrac{1}{z}dz$

3. $I=\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^{2}\theta}$

4. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{4}+10x^{2}+9}dx$ 的值。

5. $f(z)=\oint_{|\xi|=2}\frac{\xi^{3}}{\xi^{2}-z^{2}}d\xi \qquad (|z|<2)$ ，求 $f'(1+i)$

六、（6 分）求区域$0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$，在映射$w = \frac{z}{z-1}$下的像。

七、（8 分）求一共形映射，将$|z| < 2$与$|z-1| > 1$所构成的区域映射为单位圆内部。

八、（10 分）利用 Laplace 变换解常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$$

九、（4 分）设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析，在闭圆 $|z| \leq 1$ 上连续，证明:

$$\oint_{|z|=1} (\frac{1}{2} + z + \frac{1}{z^2}) f(z) \frac{dz}{z} = \pi i [f(0) + f''(0)]$$

解答
内容
不得
超过
装订
线

2009～2010学年第一学期

《复变函数与积分变换》课程考试试卷（A卷）

（闭卷）

院(系)__________ **专业班级**__________ **学号**_________ **姓名**________

考试日期:2009.11.23　　　　**考试时间:**19：00～21：30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得　分	
评卷人	

一、填空题（每空2分，共24分）

（将答案填在题中横线上，不填解题过程）

1. 设$z=(1+i)^{100}$，则$\mathrm{Im}\,z=$ 0 。

2. 满足$\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<2$的点集是 以$(-\dfrac{5}{3},0)$为圆心，$\dfrac{4}{3}$为半径的圆外 ，它是否为区域？（填“是”或“否”） 是 。

3. $3^{3-i}=$ $\underline{\quad 27e^{2k\pi}(\cos\ln 3-i\sin\ln 3)\quad}$。

4. 若 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f^{(n)}(z)$ 在 z_0 解析，对吗？$\underline{\quad 对 \quad}$

5. 若 $f(z)$ 在 z_0 处可展开为幂级数，则 $f(z)$ 在 z_0 处一定解析，对吗？$\underline{\quad 对 \quad}$

6. 映射 $w=iz^2$ 将角形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ 映射为 $\underline{\quad \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi \quad}$。

7. $z=0$ 是 $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的 $\underline{\quad 3 \quad}$ 阶极点，$\mathrm{Re}\,s\left[\dfrac{1-e^{2z}}{z^4},0\right]=$ $\underline{\quad -\dfrac{4}{3} \quad}$。

8. 在映射 $f(z)=2z^2+4z$ 下，曲线 C 在 $z=i$ 处的旋转角是 $\underline{\quad \dfrac{\pi}{4} \quad}$，$f(z)$

在复平面除去 $z=$ $\underline{\quad -1 \quad}$ 外是处处保角的。

9. 函数 $f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\dfrac{a}{2})+\delta(t-\dfrac{a}{2})]$ 的傅氏变换为 $\underline{\quad \cos a\omega+\cos\dfrac{a}{2}\omega \quad}$。

二、（6 分）设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$，$z=x+iy$，问常数 a,b,c,d 为何值时，$f(z)$ 在复平面上处处解析？并求此时的导数。

解：因 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+ay$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=ax+2by$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=dx+2y$　　（1′）

则对任意的 (x,y) 有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}，即\begin{cases}2x+ay=dx+2y\\ ax+2by=-2cx-dy\end{cases}$$　　（2′）

当 $a=d=2$，$b=c=-1$ 时 $C-R$ 方程在整个复平面处处成立且偏导连续，故 $f(z)$ 在复

平面上处处解析 （2′ ）

这时，$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=2(x+y)-2i(x-y)=2z+2iz$ （1′ ）

三、（10 分）求$u=x^2+2xy-y^2$的共轭调和函数$v(x,y)$，使$v(0,0)=1$，并以此构造解析函数。

解：因$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+2y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x-2y$， （1′ ）

由 C-R 条件，有$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ （1′ ）

故$v=\int\dfrac{\partial v}{\partial y}dy=\int(2x+2y)dy=2xy+y^2+\varphi(x)$ （2′ ）

再由$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)=2y-2x=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ （1′ ）

得$\varphi'(x)=-2x$，于是$\varphi(x)=-x^2+c$ （1′ ）

由$v(0,0)=1$，得$c=1$，故$v=2xy+y^2-x^2+1$ （2′ ）

由此构造的解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^2+2xy-y^2+i(2xy+y^2-x^2+1)$ （2′ ）

四、（12 分）将$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在其有限孤立奇点处展开为 Laurent 级数。

解：当$0<|z-i|<2$

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{2i+(z-i)}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{2i}}=\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$$ （3′ ）

当$2<|z-i|<+\infty$

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\dfrac{2i}{z-i}}=\frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{z-i}\right)^n \qquad (3')$$

当$0<|z+i|<2$

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z+i}\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z+i}\frac{1}{-2i+z+i}=\frac{1}{z+i}\frac{1}{-2i}\frac{1}{1-\dfrac{(z+i)}{2i}}=\frac{1}{z+i}\frac{1}{-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n \qquad (3')$$

当$2<|z+i|<+\infty$

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z+i}\frac{1}{-2i+z+i}=\frac{1}{z+i}\frac{1}{z+i}\frac{1}{1-\dfrac{2i}{z+i}}=\frac{1}{(z+i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z+i}\right)^n \qquad (3')$$

五、计算下列各题（每题4分，共20分）

1. $\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z(z+1)(z-3)}$

解：原式$=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s(f,0)+\mathrm{Re}\,s(f,-1)\}$ （2′）

$$=2\pi i\left[\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+1)(z-3)}+\lim_{z\to -1}\frac{1}{z(z-3)}\right]=-\frac{\pi i}{6} \qquad (2')$$

2. $\oint_{|z|=1}z^2\sin\frac{1}{z}dz$

解：原式$=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s(f,0)$ （1′）

因 $z^2\sin\frac{1}{z}=z^2(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5})=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\cdots$ （2′）

$\mathrm{Re}\,s(f(z),0)=-\frac{1}{6}$，原式$=-\frac{\pi}{3}i$ （1′）

3. $I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$

解：$I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}$

$$\xlongequal{令z=e^{i\varphi}}\int_0^{2\pi}\frac{dz}{3+\frac{z^2+1}{2z}iz}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{\frac{6z+z^2+1}{2\cancel{z}}\cdot i\cancel{z}}$$

$$=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}$$ （2′）

$\frac{1}{z^2+6z+1}$ 有两个简单极点 $z_{1,2}=-3\pm2\sqrt{2}$，$z_1=-3+2\sqrt{2}$ 在单位圆内

$$I=-2i\cdot2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{z^2+6z+1},-3+2\sqrt{2}]=4\pi\left.\frac{1}{2z+6}\right|_{z=-3+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$ （2′）

4. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^4+10x^2+9}dx$ 的值。

解：在上半平面内，$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}$ 有一阶极点 $z=i$ 和 $z=3i$。 （1′）

因 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$

$$=\mathrm{Re}\{2\pi\,\mathrm{Re}\,s[f(z),i]+2\pi\,\mathrm{Re}\,s[f(z),3i]\}$$ （2′）

$\mathrm{Re}\,s[f(z),i]=\dfrac{1}{16ei}$， $\mathrm{Re}\,s[f(z),3i]=-\dfrac{1}{48e^3 i}$ （1′）

$$I=\frac{\pi}{24e^3}(3e^2-1)$$

5\. $f(z)=\oint_{|\xi|=2}\dfrac{\xi^3}{\xi^2-z^2}d\xi \qquad (|z|<2)$ ，求 $f'(1+i)$

解：$\dfrac{\xi^3}{\xi^2-z^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\xi^2}{\xi-z}+\dfrac{\xi^2}{\xi+z}\right)$

有 $f(z)=\dfrac{1}{2}\oint_{|\xi|=2}\dfrac{\xi^2}{\xi-z}d\xi+\dfrac{1}{2}\oint_{|\xi|=2}\dfrac{\xi^2}{\xi+z}d\xi=\dfrac{1}{2}2\pi iz^2+\dfrac{1}{2}2\pi i(-z)^2=2\pi iz^2$， $(|z|<2)$ （2′）

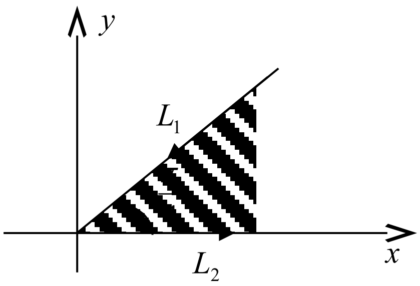
$\therefore\ f'(z)=4\pi iz$， $(|z|<2)$

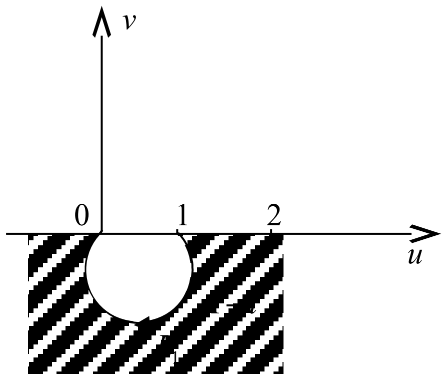
又 $|1+i|<2$， $\therefore\ f'(1+i)=4\pi i(1+i)=4\pi(i-1)$ 。 （2′）

六、（6 分）求区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$，在映射 $w=\dfrac{z}{z-1}$ 下的像。

解：（解法一）

L_1	$\to$	L_1'
∞		1
$1+i$		$1-i$
0		0
L_2	$\to$	L_2'
$\frac{1}{2}$		-1
1		∞
$\frac{3}{2}$		3
∞		1





（解法二）

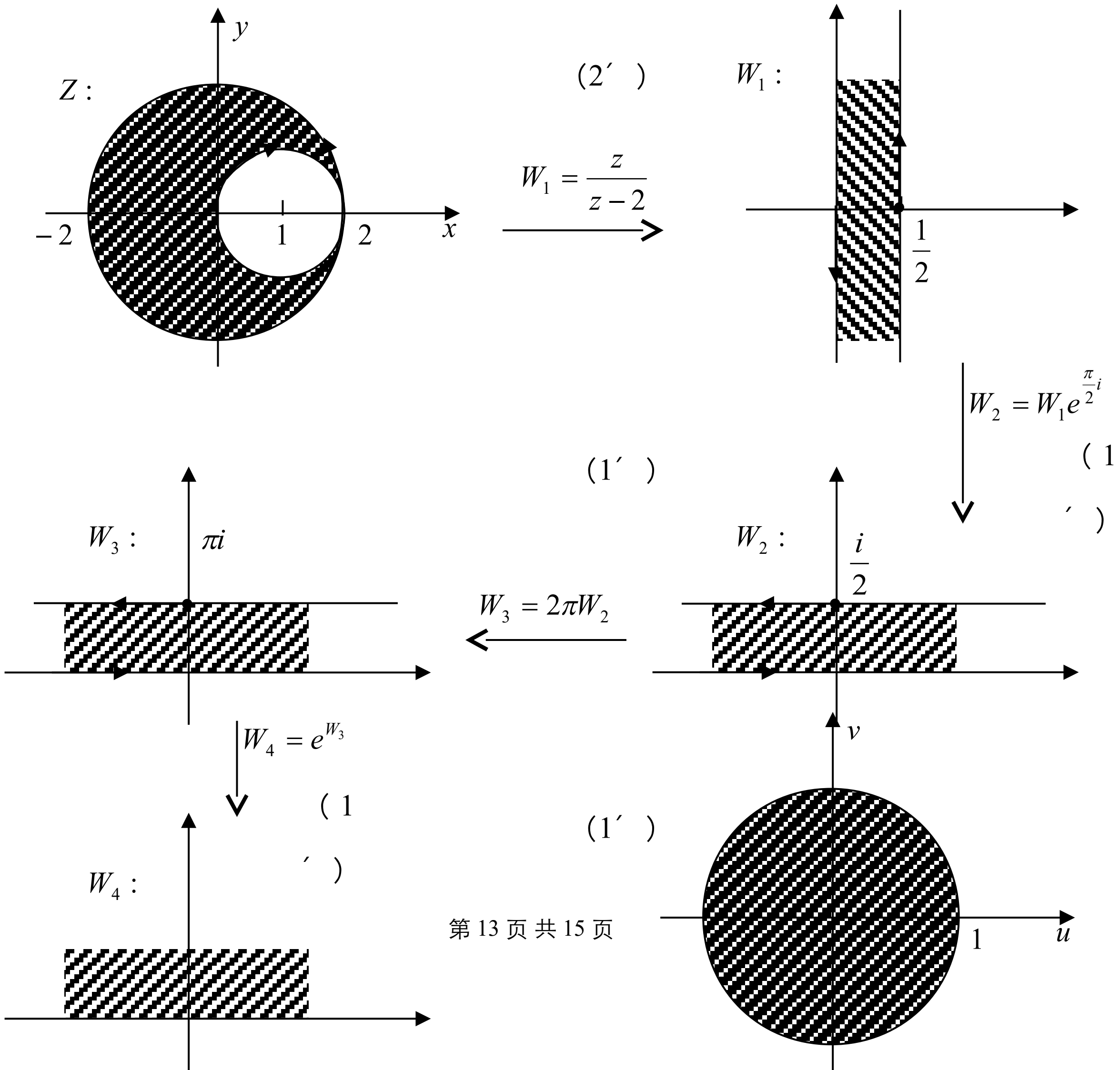
$$w=\frac{z}{z-1}\Rightarrow z=\frac{w}{w-1}\Rightarrow x+iy=\frac{u+iv}{u-1+iv}=\frac{u^2-u+v^2-iv}{(u-1)^2+v^2}$$

$$x=\frac{u^2-u+v^2}{(u-1)^2+v^2},y=\frac{-v}{(u-1)^2+v^2}$$

由 $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$，得 $\begin{cases}u^2-u+v^2>-v\\-v>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(u-\frac{1}{2})^2+(v+\frac{1}{2})^2>\frac{1}{2}\\\operatorname{Im}w<0\end{cases}$

七、（8 分）求一共形映射，将 $|z|<2$ 与 $|z-1|>1$ 所构成的区域映射为单位圆内部。

解：如图所示，区域的边界为 $C_1:|z|=2$ 与 $C_2:|z-1|=1$



$$W=\frac{W_4-i}{W_4+i}$$
$$\longrightarrow$$

故$W=\dfrac{e^{2\pi i\frac{z}{z-2}}-i}{e^{2\pi i\frac{z}{z-2}}+i}$即为所求。（2′）

八、（10 分）利用 Laplace 变换解常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} y''-2y'+y=1 \\ y(0)=0, y'(0)=-1 \end{cases}$$

解：记$L[y(t)]=Y(s)$，对方程两端取拉氏变换，

有 $$S^2Y(s)+1-2SY(s)+Y(s)=\frac{1}{s}$$ （2′）

$$Y(s)(s^2-2s+1)=\frac{1}{s}-1=\frac{1-s}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1-s}{(s-1)^2 s}=\frac{-1}{s(s-1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}$$ （4′）

再求拉氏逆变换，得

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right]=1-e^t$$ （4′）

九、（4 分）设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在闭圆 $|z|\le 1$ 上连续，证明:

$$\oint_{|z|=1}(\frac{1}{2}+z+\frac{1}{z^2})f(z)\frac{dz}{z}=\pi i[f(0)+f''(0)]$$

证：左$=\oint_{|z|=1}(\frac{1}{2}+z+\frac{1}{z^2})f(z)\frac{dz}{z}=\oint_{|z|=1}[\frac{f(z)}{2z}+f(z)+\frac{f(z)}{z^3}]dz$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{2z}dz+\oint_{|z|=1}f(z)dz+\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^3}dz$$

$$=\pi i f(0)+0+2\pi i\frac{f''(0)}{2!}=\pi i[f(0)+f''(0)]$$