

复变函数法在平面磁系磁场分布研究中的应用^{*}

彭会清 余永富 熊晨曦 文 勤
(武汉理工大学)

摘 要 应用复变函数法对开放型平面磁系二维非均匀磁场的磁场分布进行数理推导,得出了相应的磁场分布函数。用推导出的磁场分布函数对开放型平面磁系进行理论计算并与实测数据进行对比,结果表明:该解析函数较好地揭示了开放型平面磁系的磁场分布规律,可准确描述整个二维平面中各点的磁场强度,有助于进一步开展磁选动力学研究。

关键词 复变函数法 开放型平面磁系 非均匀磁场 复磁位函数 磁场分布

Application of Complex Function Method in Study on Magnetic Field Distribution of Planar Magnetic System

Peng Huiqing Yu Yongfu Xiong Chenxi Wen Qin
(Wuhan University of Technology)

Abstract Complex function method was adopted in the mathematical derivation of the distribution of two dimensional nonuniform magnetic field of open planar magnetic system, which obtained the correspondent magnetic field distribution function. It was used in the theoretical calculation of the open planar magnetic system and the calculated data were then compared with the practically measured ones. The results showed that this analytic function can well disclose the distribution of the magnetic field of open planar magnetic system and accurately characterize the magnetic intensity of each point in the whole two dimensional plane, thus facilitating the further research on the kinetics of magnetic separation.

Keywords Complex function method, Complex magnetic potential function, Nonuniform magnetic field, Distribution of magnetic field

磁场分布一直是广大磁选工作者理论研究的重点和难题。以往的研究大多通过试验得出经验计算公式或用数值方法求解,给进一步进行磁选过程的动力学研究带来较大的局限性。解析解法则借助数学方法与物理概念对磁场(或其它场)分布进行研究,丰富了磁选理论的研究方法。复变函数法是解析解法的一种,它应用复变函数理论中解析函数所具有的一些重要性质,将较为复杂的磁场边界变换成形状比较简单的边界,进而间接地求解磁场边值问题^[1]。

本研究试以复变函数法对开放型平面磁系二维非均匀磁场的磁场分布进行数理推导,并将理论计算结果与实测数据进行对比验证。

1 开放型平面磁系复数平面及复磁位函数的建立

如图 1,以开放型平面磁系磁极面方向为 x 轴、磁极面垂直方向为 y 轴,使 N、S 磁极沿 x 轴方向交替排列,建立二维复数平面 t 。图中 BC 所在面为磁极面,且设为等磁位面; CD 为相邻 N、S 两极间的对称

中垂线,其所在面也为等磁位面; AB 是 N 极上的极中垂线,为磁力线。

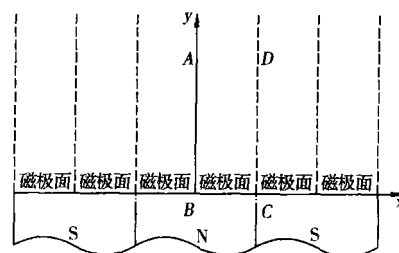


图 1 磁场分布 t 平面

由图 1 建立的描述磁场分布的复磁位函数为

$$t = x + yi \quad (1)$$

t 平面是一个复杂的场域,直接对 t 平面及其相应的复磁位函数 $t = x + yi$ 进行描述和讨论比较困

^{*} 江西省主要学科跨世纪学术和技术带头人培养计划项目(赣科发计字[2003]128号)。

彭会清(1956—),男,武汉理工大学资源与环境工程学院,副院长,教授,430070 湖北省武汉市珞狮南路 122 号。

难,因此,须通过变换使复杂的磁场边界简化,以便求解磁场分布。

2 复磁位函数和磁场复数平面的变换

2.1 变换 1

根据图形对称性原理,取图 1 中 $ABCD$ 区域作为研究单元,设 BC 段极面宽为 $l(0 < l < \frac{\pi}{2})$ 。

令

$$W = m + ni = \tan^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \quad (2)$$

根据复变函数中的欧拉公式^[2] $e^{it} = \cos t + i \sin t$, $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, 可以得到

$$W = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = - \left(\frac{e^{it} - 1}{e^{it} + 1} \right)^2 = \frac{(1 - e^{2y})^2 + 4e^{2y} \sin^2 x + 4ie^y (1 - e^{2y}) \sin x}{(1 + e^{2y} + 2e^y \cos x)^2}$$

这样,函数 W 可以用极坐标的形式表示为

$$W = (\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} \quad (3)$$

其中,极半径

$$= \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{(1 - e^{2y})^2 + 4e^{2y} \sin^2 x}{(1 + e^{2y} + 2e^y \cos x)^2}; \quad (4)$$

极角

$$= \arctan \frac{(1 - e^{2y})^2 - 4e^{2y} \sin^2 x}{4e^y (1 - e^{2y}) \sin x},$$

且 $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (5)

于是, t 复平面中的 $ABCD$ 区域变换成了图 2 所示 W 复平面上半径为 1 的半圆 $A'B'C'D'$ 。

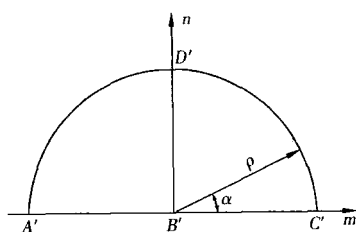


图 2 磁场分布 W 平面

2.2 变换 2

令

$$z = u + vi = C \ln W, \quad (6)$$

式中, C 为常数。

将 (3) 式代入 (6) 式, 得

$$z = u + vi = C \ln W = C \ln e^{i\theta} + C i \quad (7)$$

其中,

$$u = C \ln; \quad (8)$$

$$v = C \theta. \quad (9)$$

于是, W 复平面上的半圆变换成了图 3 所示 z 复平面上第 2 象限中的 $abcd$ 区域。

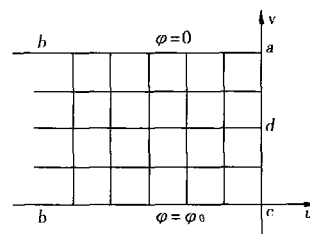


图 3 磁场分布 z 平面

W 复平面上以 1 为半径的一系列半圆线在 z 复平面上变成了一系列平行于虚轴的磁位线 $u = C \ln$; W 复平面中半圆圆心与横轴间夹角为 θ 的一系列射线在 z 复平面上变成了一系列平行于实轴的磁力线 $v = C \theta$ 。可见: z 复平面上的 $abcd$ 区域为均匀磁场, 即经过上述变换后, 已将复杂磁场的 $ABCD$ 区域转化为最简单的平行带域场 $abcd$ 。

下面来确定变换常数 C :

取图 3 中 ab 所在面为零势面, 并令 bc 所在面的表面磁位为 θ_0 , 则 $v = 0$ 时, $u = -a$ 。对应到图 1 中的 C 点, 有 $x = l, y = 0$ 。

由式 (8) 和式 (4), 有

$$\theta_0 = u = C \ln = C \ln \frac{(1 - e^{2y})^2 + 4e^{2y} \sin^2 x}{(1 + e^{2y} + 2e^y \cos x)^2}.$$

将 $x = l$ 和 $y = 0$ 代入其中, 得

$$\theta_0 = u = C \ln = C \ln \frac{\sin^2 l}{(1 + \cos l)^2}.$$

故

$$C = \frac{\theta_0}{\ln} = \frac{\theta_0}{\ln [\sin^2 l / (1 + \cos l)^2]}. \quad (10)$$

3 开放型平面磁系的磁场分布

3.1 磁场分布复磁位函数

迭代式 (2)、(6), 有

$$z = C \ln W = C \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}. \quad (11)$$

将 (10) 式代入其中, 即得到描述开放型平面磁系二维非均匀磁场的磁场分布复磁位函数为

$$z = \frac{\theta_0}{\ln [\sin^2 l / (1 + \cos l)^2]} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}. \quad (12)$$

式中, θ_0 为磁极面的表面磁位; t 为原复磁位函数, t

$$= x + yi; l \text{ 为 } BC \text{ 段极面宽, } 0 < l < \frac{\pi}{2}.$$

3.2 磁场强度^[3]

磁场强度的共轭函数为

$$H = - \frac{dz}{dt} = - C \frac{2}{\sin t}.$$

将欧拉公式 $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ 和 (10)式代入其中,有

$$H^* = \frac{-4 \mu_0}{\ln[\sin^2 l / (1 + \cos l)^2]} \cdot \frac{(e^{-iy} + e^y) \sin x + i(e^{-iy} - e^y) \cos x}{(e^{-iy} + e^y)^2 \sin^2 x + (e^{-iy} - e^y)^2 \cos^2 x} \quad (13)$$

因此,磁场强度的分布函数为

$$H = \frac{4 \mu_0}{\ln[\sin^2 l / (1 + \cos l)^2]} \cdot \frac{(e^{-iy} + e^y) \sin x + i(e^{-iy} - e^y) \cos x}{(e^{-iy} + e^y)^2 \sin^2 x + (e^{-iy} - e^y)^2 \cos^2 x} \quad (14)$$

磁场强度的大小为

$$H = |H| = \frac{4 \mu_0}{\ln[\sin^2 l / (1 + \cos l)^2]} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^{-2y} + e^{2y} - 2\cos^2 x}} \quad (15)$$

磁场方向为

$$= -\arctan \left[\cot x \frac{e^{-iy} - e^y}{e^{-iy} + e^y} \right] \quad (16)$$

3.3 磁场分布图

结合式 (12)、(15)、(16),得到开放型平面磁系二维非均匀磁场的磁场分布图如图 4。

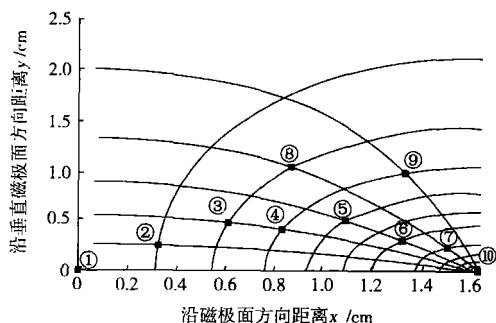


图 4 磁场分布图

将根据式 (15)计算出的图 4所示开放型平面磁系二维非均匀磁场中 ~ 点的磁场强度与用 35 mm ×30 mm ×15 mm 稀土永磁磁块构成的实际开放型平面磁系的实测磁场强度对比列于表 1,可见:计算结果与实测结果很接近,说明推导出的理论公式能够较好地反映出磁场强度的分布。

表 1 磁场强度理论计算值与实测结果对比

测 点	坐标 /cm		H / (kA/m)	
	x	y	理论计算 *	实 测
	0	0	0.313 9	0.307 8
	0.256 4	0.256 4	0.313 4	0.305 3
	0.645 4	0.476 5	0.333 9	0.336 2
	0.760 2	0.407 3	0.374 9	0.379 6
	1.029 8	0.495 1	0.430 5	0.428 6
	1.250 8	0.310 2	0.704 1	0.686 3
	1.434 4	0.234 4	1.148 9	1.136 9
	0.806 8	1.015 4	0.226 7	0.219 6
	1.266 5	0.964 0	0.270 6	0.281 9
	1.528 7	0.158 8	1.900 9	1.926 4

*计算理论 H值时取表面磁位 $\mu_0 = 0.3125 \text{ A}, l = 15 \text{ mm}$ 。

4 结 论

(1)运用复变函数法推导出了开放型平面磁系二维平面磁场的磁场分布解析式,进而获得了完整的场分布图,可全面描述整个二维平面中各点的磁场强度。

(2)用推导出的理论公式计算开放型平面磁系二维平面磁场的磁场强度,结果与实测数据很接近,说明所进行的数理推导有实际意义,有助于进一步开展磁选动力学研究。

参 考 文 献

- [1] 彭会清. 复变函数法在磁选机磁场边值问题中的应用[J]. 南方冶金学院学报, 1993, 14(3): 206-213.
- [2] 余家荣. 复变函数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 123-168.
- [3] 俞集辉. 电磁场原理[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2003: 98-125.

(收稿日期 2006-08-05)

(上接第 33 页)

质量分数达 94.67%,而石英仅有质量分数为 27.45%的颗粒发生沉淀。

参 考 文 献

- [1] Zheng Xiapeng, Peggy J Aps, Ross W Smith Adhesion of two bacteria onto dolomite andapatite: their effect on dolomite depression in anionic flotation[J]. Int J Miner Process, 2001, 62: 159-172

- [2] Namita Deo, Natarajan K A. Studies on interaction of Paenibacillus polymyxa with iron ore minerals in relation to beneficiation[J]. Int J Miner Process, 1998, 55: 41-60.
- [3] Namita Deo and Natarajan K A. Interaction of Bacillus polymyxa with some oxide minerals with reference to mineral beneficiation and environmental control[J]. Mineral Engineering, 1997, 10(12): 1339-1354.
- [4] 杨慧芬,张 强. 草分支杆菌对赤铁矿、石英絮凝能力的比较研究[J]. 北京科技大学学报, 2004, 26(1): 7-10.

(收稿日期 2006-08-05)