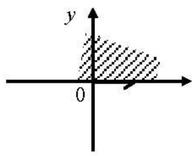
练　习　十　三

1．下列函数将下列区域映射成什么区域？

（1）$x>0,\ y>0,\ w=\dfrac{z-i}{z+i}$

解：（z）

法一：



$$w=\frac{z-i}{z+i}$$

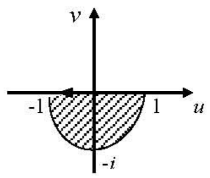
$$\longrightarrow$$

$z_1: 0 \to -1$

$z_3: \infty \to 1$

$z_2: 1 \to -i$

$z_4: i \to 0$



法二：$w=\dfrac{z-i}{z+i} \Rightarrow z=\dfrac{i(1+w)}{1-w}$

令 $z=x+iy,\ w=u+iv$

则 $x+iy=\dfrac{i(1-u^2-v^2)+2vi^2}{(1-u)^2+v^2} \Rightarrow y=\dfrac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2},\ \ x=\dfrac{-2v}{(1-u)^2+v^2}$

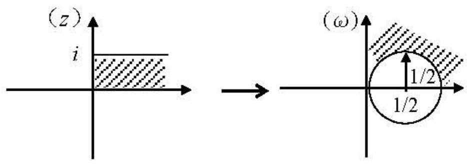
$\therefore x>0,\ y>0 \Rightarrow u^2+v^2<1,\ v<0$

（2）$\operatorname{Re}z>0,\ 0<\operatorname{Im}z<1,\ w=\dfrac{i}{z}$

解：$z=\dfrac{i}{w}=\dfrac{i}{u+iv}=\dfrac{v+iu}{u^2+v^2}$

$\Rightarrow x=\dfrac{v}{u^2+v^2},\ \ y=\dfrac{u}{u^2+v^2}$

$\operatorname{Re}z>0 \Leftrightarrow x>0 \Rightarrow v>0$



$0<\operatorname{Im}z<1 \Leftrightarrow 0<y<1 \Rightarrow u>0,\ \ u<u^2+v^2[u>0\ (u-\dfrac{1}{2})^2+v^2>(\dfrac{1}{2})^2]$

2．求将点 $-1,\infty,i$ 分别依次映射为下列各点的分式线性映射。

（1）$i,1,1+i$

解：$\dfrac{z+1}{1}:\dfrac{i+1}{1}=\dfrac{w-1}{w-1}:\dfrac{1+i-i}{1+i-1}$

化简得　$w=\dfrac{z+i+2}{z-i+2}$

（2）$\infty,i,1$

解：$\dfrac{z+1}{1}:\dfrac{i+1}{1}=\dfrac{1}{w-i}:\dfrac{1}{1-i}$

$$w-i=\frac{-(i+1)(i-1)}{z+1},\quad \therefore w=\frac{iz+2+i}{z+1}$$

（3）$0, \infty, 1$

解：$\frac{z+1}{1}:\frac{i+1}{1}=\frac{w}{i}:\frac{1}{1}$

$$w=\frac{z+1}{i+1}=\frac{(1-i)(z+1)}{2}=\frac{(1-i)z+(1-i)}{2}$$

3．求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射为单位圆内部 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

（1）$f(i)=0,\ f(-1)=1$

解：$f(i)=0,$ 有 $f(-i)=\infty,$ 故有 $w=k\frac{z-i}{z+i}$

又 $f(-1)=1,\ \therefore 1=k\frac{-1-i}{-1+i}\Rightarrow k=-i$

$$w=-i\frac{z-i}{z+i}$$

（2）$f(1)=1,\ f(i)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

解：由 $f(i)=\frac{1}{\sqrt{5}},$ 有 $f(-i)=\sqrt{5},$ 又 $\therefore f(1)=1$，由对应点公式可得

$$w=\frac{3z+(\sqrt{5}-2i)}{(\sqrt{5}-2i)z+3}$$

*4．思考题

（1）怎样判断一个圆周在经过分式线性映射后变成一个圆周还是变成一条直线？

答：观察在此圆周上是否存在一点，它经过分式线性映射后映到∞。

（2）分式线性映射有几个复参数？有几个实参数？有几种方法可以唯一地决定一个分式线性映射？

答：由 $w=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0$ 看出，它有三个独立的复参数，六个独立的实参数。有两种方法可以唯一地确定它：

1）给定三对对应点；

2）给定一个圆周映到另一个圆周，希望某一个点变到另一指定点（不在此圆周上），并且希望此点上一个方向映到象点上某一个方向。