§9.4 Laplace 变换的应用及综合举例

一、求解常微分方程(组)

二、综合举例

*三、利用 Matlab 实现 Laplace 变换

一、求解常微分方程(组)

工具 $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$

步骤 (1) 将微分方程(组)化为象函数的代数方程(组);

(2) 求解代数方程得到象函数;

(3) 求 Laplace 逆变换得到微分方程(组)的解。

微分方程(组) $\xrightarrow{\text{Laplace 正变换}}$ 象函数的代数方程(组) $\xrightarrow{\text{求解}}$ 得到象函数 $\xrightarrow{\text{Laplace 逆变换}}$ 微分方程(组)的解

例 利用 Laplace 变换求解微分方程 P219 例 9.6

$$y''(t)+\omega^2 y(t)=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=\omega.$$

解 (1) 令 $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=0,$$

代入初值即得 $s^2Y(s)-\omega+\omega^2Y(s)=0,$

$$\Rightarrow\ Y(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\sin\omega t.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程

$$x'''+3x''+3x'+x=6\mathrm{e}^{-t},\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$$

解 (1) 令$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$s^3X(s)+3s^2X(s)+3sX(s)+X(s)=\frac{6}{s+1},$$

求解此方程得$X(s)=\dfrac{3!}{(s+1)^4}$.

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=t^3\mathrm{e}^{-t}.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组 P230 例 9.19

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\mathrm{e}^t, & x(0)=1, \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2\mathrm{e}^t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解 (1) 令$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

整理得$$\begin{cases} (s+1)X(s)-Y(s)=\dfrac{s}{s-1}, \\ 3X(s)+(s-2)Y(s)=\dfrac{s+1}{s-1}. \end{cases}$$

求解得 $X(s)=\dfrac{1}{s-1}$，$Y(s)=\dfrac{1}{s-1}$.

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\mathrm{e}^t, & x(0)=1, \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2\mathrm{e}^t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解 (1) 令$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

求解得 $X(s)=\dfrac{1}{s-1}$, $Y(s)=\dfrac{1}{s-1}$.

(2) 求 Laplace 逆变换，得$(t)=y(t)=\mathrm{e}^t$.

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x' + y'' = \delta(t-1), & x(0) = y(0) = 0, \\ 2x + y''' = 2u(t-1), & y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

解 (1) 令$X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$\begin{cases} sX(s) + s^2 Y(s) = \mathrm{e}^{-s}, \\ 2X(s) + s^3 Y(s) = \dfrac{2}{s}\mathrm{e}^{-s}. \end{cases}$$

求解得 $X(s) = \dfrac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}$，$Y(s) = 0$.

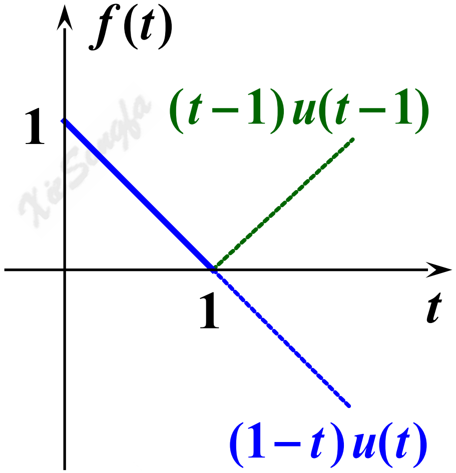
(2) 求 Laplace 逆变换，得$(t) = u(t-1)$，$y(t) = 0$.

二、综合举例

例 求函数 $f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 的 Laplace 变换。

P232 例 9.21

解 如图，函数 $f(t)$ 可写为



$$f(t)=(1-t)u(t)+(t-1)u(t-1)$$

$$=u(t)-t\,u(t)+(t-1)u(t-1),$$

由于 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$，$\mathscr{L}[t\,u(t)]=\dfrac{1}{s^2}$，

利用线性性质及延迟性质有 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s^2}e^{-s}.$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程

$$x''+4x'+3x=\mathrm{e}^{-t},\quad x(0)=x'(0)=1.$$

解 (1) 令$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换，并代入初值有

$$s^2X(s)-s-1+4[sX(s)-1]+3X(s)=\frac{1}{s+1},$$

$$\Rightarrow\ X(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{7}{4(s+1)}+\frac{1}{2(s+1)^2}-\frac{3}{4(s+3)}.$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得 $x(t)=\frac{7}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-3t}.$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程

$$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2\mathrm{e}^{t}\cos t,\quad x(0)=x'(0)=0.$$

解 (1) 令$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，对方程两边取 Laplace 变换有

$$s^2X(s)-2sX(s)+2X(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1},$$

$$\Rightarrow\quad X(s)=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}.$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathrm{e}^{t}\mathscr{L}^{-1}[\frac{2s}{(s^2+1)^2}]$$

$$=\mathrm{e}^{t}\mathscr{L}^{-1}[(\frac{-1}{s^2+1})']=t\,\mathrm{e}^{t}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=t\,\mathrm{e}^{t}\sin t.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=\mathrm{e}^{t}-2, & x(0)=x'(0)=0, \\ 2y''-x''-2y'+x=-t, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

整理得 $$\begin{cases} (s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{-s+2}{s(s-1)^2}, \\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)}. \end{cases}$$

求解得 $X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$, $Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$.

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=\mathrm{e}^t-2, & x(0)=x'(0)=0, \\ 2y''-x''-2y'+x=-t, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，

求解得 $X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}=-\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{(s-1)^2}$，

$$Y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t)=-t+t\,\mathrm{e}^t,\quad y(t)=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x''-x-2y'=e^t, & x(0)=-3/2, \quad x'(0)=1/2, \\ x'-y''-2y=t^2, & y(0)=1, \quad y'(0)=-1/2. \end{cases}$$

解 (1) 令$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$\begin{cases} s^2X(s)+\dfrac{3}{2}s-\dfrac{1}{2}-X(s)-2sY(s)+2=\dfrac{1}{s-1}, \\ sX(s)+\dfrac{3}{2}-s^2Y(s)+s-\dfrac{1}{2}-2Y(s)=\dfrac{2}{s^3}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; X(s)=-\frac{3}{2(s-1)}+\frac{2}{s^2}, \quad Y(s)=-\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{s^3}+\frac{3}{2s},$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程组

$$\begin{cases} x''-x-2y'=\mathrm{e}^t, & x(0)=-3/2, \quad x'(0)=1/2, \\ x'-y''-2y=t^2, & y(0)=1, \quad y'(0)=-1/2. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$， $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，

$$\Rightarrow \quad X(s)=-\frac{3}{2(s-1)}+\frac{2}{s^2}, \quad Y(s)=-\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{s^3}+\frac{3}{2s},$$

(2) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t)=-\frac{3}{2}\mathrm{e}^t+2t, \quad y(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^t-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}.$$

例 利用 Laplace 变换求解积分方程 P233 例 9.24 (跳过 ?)

$$f(t)=at-\int_0^t \sin(x-t)f(x)\mathrm{d}x, \quad (a\neq 0).$$

解 (1) 由于$f(t)*\sin t=\int_0^t f(x)\sin(t-x)\mathrm{d}x$,

因此原方程为$f(t)=at+f(t)*\sin t$.

(2) 令$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, 在方程两边取 Laplace 变换得

$$F(s)=a\mathscr{L}[t]+F(s)\cdot\mathscr{L}[\sin t]=\frac{a}{s^2}+F(s)\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

$$\Rightarrow \quad F(s)=\frac{a}{s^2}+\frac{a}{s^4}.$$

(3) 求 Laplace 逆变换, 得$f(t)=at+\dfrac{at^3}{6}$.

例 设质量为 m 的物体静止在原点，在 $t=0$ 时受到 x 方向的冲击力 $F_0\delta(t)$ 的作用，其中 F_0 为常数，求物体的运动方程。

P231 例 9.20

解 设物体的运动方程为 $x=x(t)$，根据 Newton 定律有

$$mx''(t)=F_0\delta(t),\quad x(0)=x'(0)=0.$$

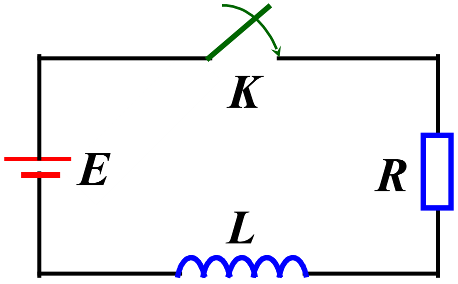
令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，在方程两边取 Laplace 变换得

$$ms^2X(s)=F_0,\quad \Rightarrow\quad X(s)=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{s^2}.$$

求 Laplace 逆变换，得物体的运动方程为 $x(t)=\dfrac{F_0}{m}t.$

例 设有如图所示的 R 和 L 串联电路，在 $t=0$ 时刻接到直流电势 E 上，求电流 $i(t)$.

P234 例 9.25



解 由 Kirchhoff 定律知 $i(t)$ 满足方程

$$Ri(t)+Li'(t)=E,\quad i(0)=0.$$

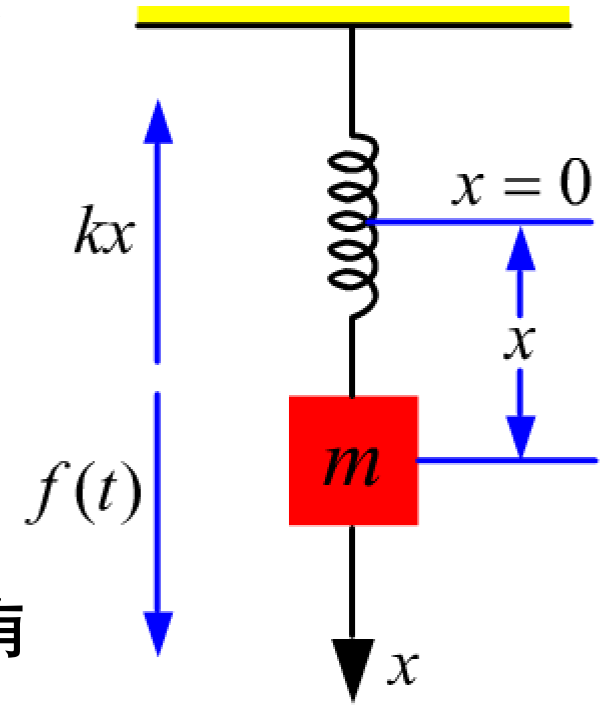
令 $I(s)=\mathscr{L}[i(t)]$，在方程两边取 Laplace 变换得

$$RI(s)+LsI(s)=\frac{E}{s},$$

求解此方程得 $I(s)=\dfrac{E}{s(R+sL)}=\dfrac{E}{R}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+\frac{R}{L}}\right).$

求 Laplace 逆变换，得 $i(t)=\dfrac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right).$

例 质量为 m 的物体挂在弹簧系数为的弹簧一端（如图）作用在物体上的外力为 $f(t)$ 若物体自静止平衡位置 $x=0$ 处开始运动求该物体的运动规律 $x(t)$. （跳过?）



解 (1) 由 Newton 定律及 Hooke 定律有

$$m\,x''(t)=f(t)-k\,x(t).$$

即物体运动的微分方程为

$$m\,x''(t)+k\,x(t)=f(t),\quad x(0)=x'(0)=0.$$

解 (1) $m\,x''(t)+k\,x(t)=f(t)$， $x(0)=x'(0)=0$.

(2) 令$X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值得

$$m\,s^2X(s)+k\,X(s)=F(s),$$

记 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$， 有 $X(s)=\dfrac{1}{m\omega_0}\cdot\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\cdot F(s)$,

(3) 由$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right]=\sin\omega_0 t$，并利用卷积定理有

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\frac{1}{m\omega_0}\cdot[\sin\omega_0 t*f(t)].$$

当 $f(t)$ 具体给出时，即可以求的运动方程.

解 (3) 由$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right]=\sin\omega_0 t$，利用卷积定理有

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\frac{1}{m\omega_0}\cdot[\sin\omega_0 t * f(t)].$$

当 $f(t)$ 具体给出时，即可以求的运动方程 $x(t)$.

例如 设物体在 $t=0$ 时受到冲击力 $f(t)=A\delta(t)$，A 为常数。

此时 $x(t)=\dfrac{A}{m\omega_0}\cdot\sin\omega_0 t$.

- 可见，在冲击力的作用下，运动为正弦振动，振幅为 $\dfrac{A}{m\omega_0}$，角频率为 ω_0，称 ω_0 为该系统的自然频率或固有频率。

*三、利用 Matlab 实现 Laplace 变换

补

(跳过?)

- 在数学软件 Matlab 的符号演算工具箱中，提供了专用函数来进行 Laplace 变换与 Laplace 逆变换。

(1) F=laplace(f)　对函数 $f(t)$ 进行 Laplace 变换，对并返回结果 $F(s)$。

(2) f=ilaplace(F)　对函数 $F(s)$ 进行 Laplace 逆变换，对并返回结果 $f(t)$。

例 求函数 $f(t)=t\,\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t$ 的 Laplace 变换。

解 Matlab 程序

```
clear;
syms t;
f = t*exp(-3*t)*sin(2*t);
F = laplace(f) ;
```

输出 F=4/((s+3)^2+4)^2*(s+3)

即 $F(s)=\dfrac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}$.

例 求函数 $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 的 Laplace 变换。

解 Matlab 程序

```
clear;
syms t;
f = sin(t)/t;
F = laplace(f);
```

输出 F=atan(1/s)

其中， atan 为反正切函数。

即 $F(s)=\arctan\dfrac{1}{s}=\operatorname{arccot} s.$

例 求函数 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2-2s+5)(s-3)}$ 的 Laplace 逆变

解 Matlab 程序

```
clear;
syms s;
F=(s^2+2*s+1)/(s^2-2*s+5)/(s-3);
f = ilaplace(F);
```

输出 f = 2*exp(3*t)-exp(t)*cos(2*t)+exp(t)*sin(2*t)

其中， exp 为指数函数。

即 $f(t)=2\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{t}\cos 2t+\mathrm{e}^{t}\sin 2t$.

例 求函数 $F(s)=\dfrac{1}{s-1}\mathrm{e}^{-s}$ 的 Laplace 逆变换。

解 Matlab 程序

```
clear;
syms s;
F = exp(-s)/(s-1);
f = ilaplace(F);
```

输出 f = Heaviside(t-1)*exp(t-1)

其中， Heaviside 为单位阶跃函数$u(t)$.

即 $f(t)=\mathrm{e}^{t-1}u(t-1)=\begin{cases}\mathrm{e}^{t-1}, & t>1,\\ 0, & t<1.\end{cases}$

休息一下 ……