§4.3 泰勒级数

一、泰勒 (Taylor) 定理

二、将函数展开为泰勒级数的方法

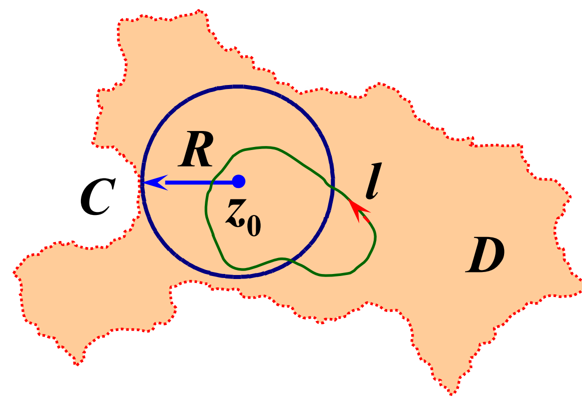
一、泰勒 (Taylor) 定理

定理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析为 D 的边界 $z_0 \in D$,

P88 定理 4.6

$R = \min\limits_{z \in C} |z - z_0|$, 则当 $|z - z_0| < R$ 时，有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$



其中，$a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

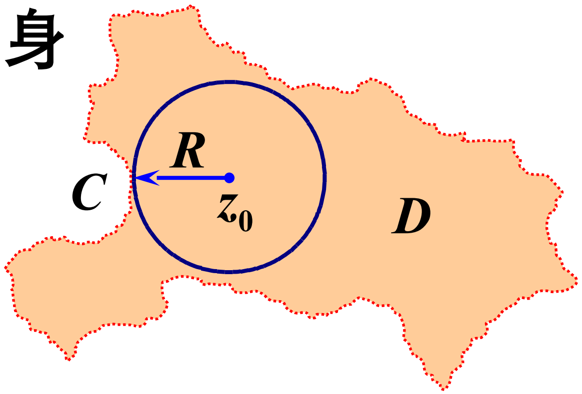
(l 为 D 内包围 点的的任意一条闭曲线。)

证明 (略) (进入证明?)

一、泰勒 (Taylor) 定理

注 (1) 为什么只能在圆域 $|z-z_0|<R$ 上展开为幂级数，而不是在整个解析区域 D 上展开？

回答 这是由于受到幂级数本身的收敛性质的限制：



- 幂级数的收敛域必须是圆域。
- 幂级数一旦收敛，其和函数一定解析。

一、泰勒（Taylor）定理

注 (2) 对于一个给定的函数，能不能在不具体展开为幂级数的情况下，就知道其收敛域？ 可以知道。

结论 函数 $f(z)$ 在 z_0 点展开为泰勒级数，其收敛半径等于从 z_0 点到 $f(z)$ 的最近一个奇点 $\tilde{z}$ 的距离。

理由 (1) 幂级数在收敛圆内解析，因此奇点 $\tilde{z}$ 不可能在收敛圆内；

(2) 奇点 $\tilde{z}$ □不可能在收敛圆外，不然收敛半径还可以扩大，故奇点 $\tilde{z}$ 只能在收敛圆周上。

一、泰勒 (Taylor) 定理

注 (3) 对于一个给定的函数，用任何方法展开为幂级数，其结果都是一样的，即具有唯一性。

比如 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z=0$ 点展开为幂级数。

方法一 利用已知的结果 (§4.2):

$$\boxed{\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots,\quad (|z|<1).}$$

方法二 利用泰勒定理 : $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=1.$

方法三 利用长除法。 (长除法)

一、泰勒(Taylor)定理

注 (4) 展开式中的系数 a_n 还可以用下列方法直接给出。

方法一 $f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+$

$$\boxed{a_n(z-z_0)^n}+a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots,$$

$$\Rightarrow\ f^{(n)}(z)=0+n!a_n+(z-z_0)\,p(z),$$

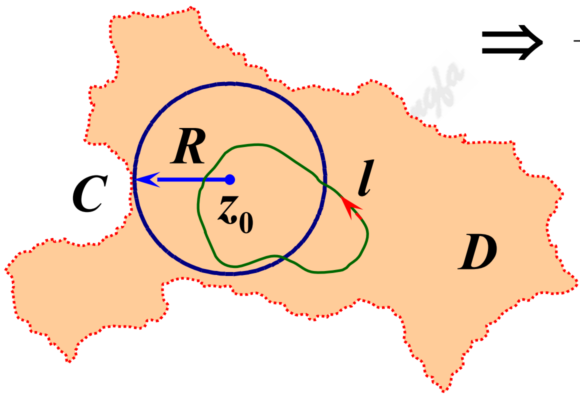
$$\Rightarrow\ f^{(n)}(z_0)=n!a_n,$$

$$\Rightarrow\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

一、泰勒 (Taylor) 定理

注 (4) 展开式中的系数 a_n 还可以用下列方法直接给出。

方法二 $f(z)=a_0+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$



$$\Rightarrow \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{a_0}{(z-z_0)^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(z-z_0)^2}+$$

$$\boxed{\frac{a_n}{z-z_0}}+a_{n+1}+\cdots,$$

$$\Rightarrow \oint_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=0+2\pi i\,a_n+0,$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

二、将函数展开为泰勒级数的方法

1. 直接展开法

- 利用泰勒定理，直接计算展开系数 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

例 将函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 在 $z = 0$ 点展开为幂级数

P90 例 4.6

解 $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^z \big|_{z=0} = 1,\quad \Rightarrow\quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!},$

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

二、将函数展开为泰勒级数的方法

1. 直接展开法

- 利用泰勒定理，直接计算展开系数 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
- 同理可得

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,\quad |z| < +\infty.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots,\quad |z| < +\infty.$$

二、将函数展开为泰勒级数的方法

2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。

- 两个重要的已知展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=1+z+z^2+z^3\cdots, \quad |z|<1.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots, \quad |z|<+\infty.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 在 $z=i$ 点展开为幂级数。

P92 例 4.10

解 函数 $f(z)$ 有奇点$=1$，故收敛半径 $R=|1-i|=\sqrt{2}$.

(1) $$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-i)-(z-i)}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-i}{1-i}}$$

$$=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}},\quad |z-i|<\sqrt{2}.$$

(2) $$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{(1-i)^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{(1-i)^{n+2}}(z-i)^n,\quad |z-i|<\sqrt{2}.$$

例 将函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 分别在 $z=0$ $z=1$ 点展开为幂级数。

P92 例 4.11 修改

解 (1) $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{1-(-z)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1.$

$$\int_0^z f'(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[(-1)^n\int_0^z z^n\,\mathrm{d}z\Big],$$

$$f(z)-f(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1},$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1},\quad |z|<1.$$

例 将函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 分别在 $z=1$ 点展开为幂级数。

解 (2) $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{2+(z-1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+(z-1)/2}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n,\quad |z-1|<2.$$

$$\int_1^z f'(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\int_1^z(z-1)^n\mathrm{d}z\Big],$$

$$f(z)-f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1},$$

$$f(z)=\ln 2+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1},\quad |z-1|<2.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{2z^2-3}{(z-2)(z^2+1)}$ 在 $z=0$ 点展开为幂级数。

解 $f(z)=\dfrac{A}{z-2}+\dfrac{Bz+C}{z^2+1}=\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{z+2}{z^2+1}$,

$$(1)\ \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\quad |z|<2.$$

$$(2)\ \frac{z+2}{z^2+1}=\frac{z+2}{1-(-z^2)}=(z+2)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n},\quad |z|<1.$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}2(-1)^n z^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n+1},\quad |z|<1.$$

例 将函数 $f(z)=e^z\sin z$ 在 $z=0$ 点展开为幂级数。

解 $$f(z)=e^z\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}z^n-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}z^n\qquad |z|<+\infty.$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n!}z^n$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{4}\,z^n,\qquad |z|<+\infty.$$

例 将函数 $f(z)=\sin^2 z$ 在 $z=0$ 点展开为幂级数。

解

$$\sin^2 z=\frac{1}{2}(1-\cos 2z)=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\frac{(2z)^6}{6!}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{(2z)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2z)^4}{2\cdot 4!}+\frac{(2z)^6}{2\cdot 6!}-\cdots,\quad |z|<+\infty.$$

例 将函数 $f(z)=\sin z$ 在 $z=1$ 点展开为幂级数。

解

$$\sin z=\sin[1+(z-1)]=\sin 1\cos(z-1)+\cos 1\sin(z-1)$$

$$=\sin 1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{(2n)!}+$$

$$\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |z-1|<+\infty.$$

*例 将函数 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z=0$ 点展开为幂级数

P93 例 4.12

解 $f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}\cdot\dfrac{1}{(1-z)^2}=f(z)\cdot\dfrac{1}{(1-z)^2}$,

$$\Rightarrow (1-z)^2 f'(z)-f(z)=0,$$

$$(1-z)^2 f''(z)+(2z-3)f'(z)=0,$$

$$(1-z)^2 f'''(z)+(4z-5)f''(z)+2f'(z)=0,$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\Rightarrow f(0)=e,\ f'(0)=e,\ f''(0)=3e,\ f'''(0)=13e,\ \cdots,$$

$$\Rightarrow f(z)=e+ez+\frac{3e}{2!}z^2+\frac{13e}{3!}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

泰勒级数的应用举例——计算斐波拉契数列的通项

1. 斐波拉契

Leonardo Fibonacci , 约 1170 ~ 约 1240意大利业余数学家

,　　　　　　　　　　。

2. 兔子问题

一对（超级）小兔，在它们出生的第三个月开始，每月又生一对（超级）小兔，问 n 个月后，共可得到多少对兔子?

3. 斐波拉契数列

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

$$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}.$$

泰勒级数的应用举例——计算斐波拉契数列的通项

4. 计算斐波拉契数列的通项

(1) z 变换

令 $f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nz^n$,

由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, 有 $a_{n+2}z^{n+2}=a_{n+1}z^{n+2}+a_nz^{n+2}$,

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+2}z^{n+2}=z\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+1}z^{n+1}+z^2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^n,$$

$$\Rightarrow f(z)-a_1z-a_2z^2=z[f(z)-a_1z]+z^2f(z),$$

将 $a_1=a_2=1$ 代入上式并求解得 $f(z)=\dfrac{z}{1-z-z^2}$.

泰勒级数的应用举例——计算斐波拉契数列的通项

4. 计算斐波拉契数列的通项

(2) 泰勒级数展开

$$f(z)=\frac{z}{1-z-z^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\alpha z}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\beta z},$$

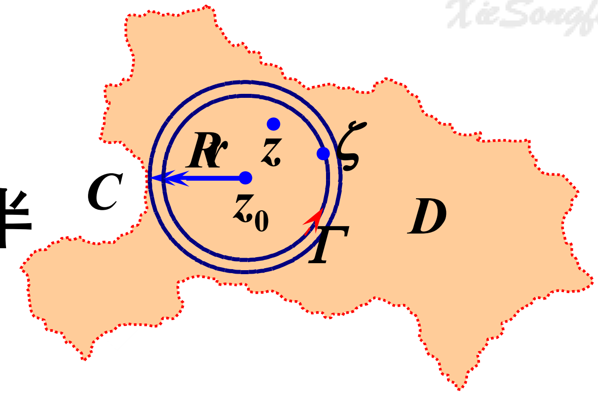
其中，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0.618$，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}z^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\boxed{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}}z^n,\quad |z|<\frac{1}{\alpha}\approx 0.618.$$

$$\Rightarrow\quad a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\cdot\sqrt{5}},\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

轻松一下吧……

附： 泰勒定理的证明



证明 如图以z_0为圆心，$r\,(r<R)$为半径作圆Γ，设z为Γ内任意一点。

由柯西积分公式有$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$

由$|z-z_0|<|\zeta-z_0|$

有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

$$\Rightarrow\ f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

附： 泰勒定理的证明

证明 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+R_N(z)$$

交换次序 $$=\sum_{n=0}^{N-1}\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta}(z-z_0)^n+R_N(z)$$

$\boxed{a_n}$

其中， $$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

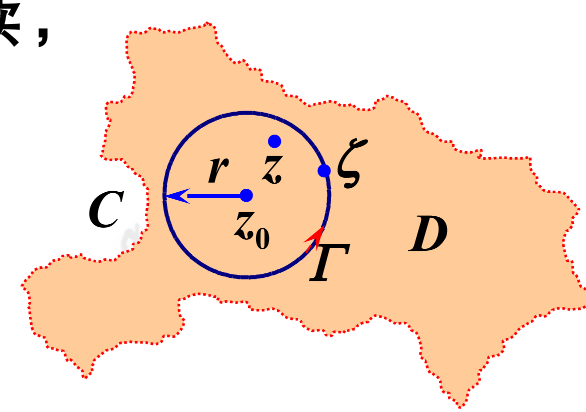
- 下面需证明 $\lim\limits_{N\to+\infty}R_N(z)=0.$

附： 泰勒定理的证明

证明 $$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

由 $f(z)$ 在 D 内解析 $\Rightarrow$ $f(z)$ 连续，

$\Rightarrow$ $f(z)$ 有界，即 $|f(z)|<M$，



又 $\dfrac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}=\dfrac{|z-z_0|}{r}=q<1$，有

$$|R_N(z)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{|z-z_0|^n}{|\zeta-z_0|^{n+1}}|f(\zeta)|\mathrm{d}s.$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{r}q^n\cdot M\cdot 2\pi r=\frac{Mq^N}{1-q}\xrightarrow{N\to+\infty}0.$$

（返回）

附： 分式函数的长除法

- 以 $\dfrac{1}{1-z}$ 为例：（分子与分母均按升幂排列）

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+z+z^2+\cdots \\ \hline
1-z & 1 \\
 & 1-z \\ \cline{2-2}
 & \quad z \\
 & \quad z-z^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad z^2 \\
 & \qquad z^2-z^3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad z^3 \\
 & \qquad\qquad \ddots
\end{array}
$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\frac{z^{n+1}}{1-z},$$

当 $|z|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty} z^{n+1}=0$,

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

（返回）