

2011~2012 学年第一学期
《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A 卷)

院(系)_____专业班级_____学号_____姓名_____

考试日期: 2011 年 11 月 28 日

考试时间: 晚上 7:00~9:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得 分	
评卷人	

一、填空题 (每题 3 分, 共 24 分)

1. 设 $z = (-1)^{\frac{1}{3}}$, 则 z 的模为____, z 的辐角主值 θ ($\theta \in (-\pi, \pi]$) 分别为_____.

2. $\ln(\frac{1+i}{\sqrt{2}})$ 的值为____, $\cos(2i)$ 的值为_____.

3. 函数 $f(z) = x^2 + 2y^3i$ 在 $z_1 = 3-i$ 处是否可导? _____, 在 $z_2 = 2+3i$ 处是否可导? _____.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n}$ 是否收敛? _____, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n i^n}{n}$ 是否收敛? _____.

5. 函数 $f(z) = \frac{1}{z(9-z^2)}$ 在 $z = 1+i$ 点展成泰勒级数的收敛半径为_____.

6. $z = 0$ 为函数 $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$ 的_____阶极点.

7. 在映射 $f(z) = z^2 + z$ 下, $z_0 = -\frac{1}{2} + 2i$ 处的旋转角为_____, $f(z)$ 在复平面上除去 $z =$ _____的点外处处保角.

8. 已知 $F(\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ 为 $f(t)$ 的傅氏变换, 则 $f(t) =$ _____.

得 分	
评卷人	

二、计算题 (每题 5 分,
共 20 分)

$$1. \oint_{|z|=2} \frac{z}{\cos z} dz$$

$$2. \oint_{|z|=3} \frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2} dz$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\sin^2 \theta} d\theta$$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2 + a^2} dx \ (a>0, b>0)$

得 分	
评卷人	

三、(8分) 验证 $v(x, y) = 4xy + y^2 - x^2$ 是调和函数，并求满足条件 $f(1) = 2 - i$ 的解析函数 $f(z) = u + iv$.

得 分	
评卷人	

四、(12 分)将函数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z-3)}$ 在 $z_0=0$ 点展开为洛朗(Laurent)级数.

得 分	
评卷人	

五、(8 分)求上半平面在映射 $w = \frac{2i}{z+i}$ 下的像.

得 分	
评卷人	

六、(10 分)求将半带形域 $D = \{z: 0 < \text{Im } z < \frac{\pi}{2}, \text{Re } z < 0\}$ 映射到单位圆内部的保形映射.

得 分	
评卷人	

七、(12 分)利用 Laplace 变换求解微分方程组:

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = -e^{2t}, & x(0) = 1 \\ y'(t) + 3x(t) - 2y(t) = 3e^{-t}, & y(0) = 1 \end{cases}$$

得 分	
评卷人	

八、(6分)已知函数 $f(\xi)$ 在 $|\xi| \leq R$ 上解析, 设 $|z| < R$, 证明:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \left(\frac{f^2(\xi)}{(\xi - z)^2} - \frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2 - \xi\bar{z}} \right) d\xi = 2f(z)f'(z)$$