第八章　一阶电路的暂态分析

8.1　一阶电路的零输入响应

8.2　一阶电路的零状态响应

8.3　一阶电路的全响应（三要素法）

8.4　RC电路对矩形脉冲的响应

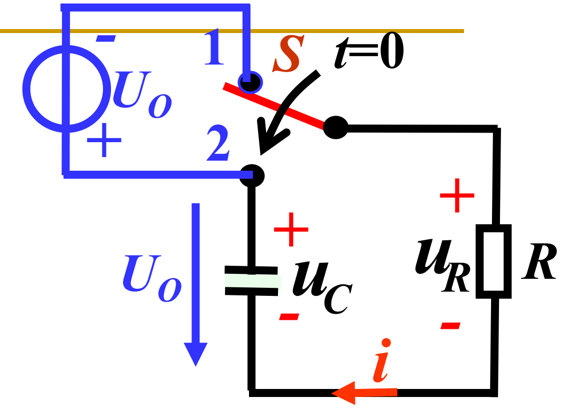
8.1 一阶电路的零输入响应

电路状态
- 零状态：换路前电路中的储能元件均未贮存能量，称为零状态；
- 零输入 电路中无电源激励（即输入信号为零）时，为零输入。

电路的响应
- 零输入响应：电路在无外部激励的条件下，仅由内部已储能元件中所储能量而引起的响应。 此时，将 $u_C(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ 视为内部激励信号。
- 零状态响应：在零状态（未储能）的条件下，由激励信号产生的响应。
- 全响应：储能元件自身储能与外部激励共同作用引起的响应。

在线性电路中： 全响应＝零输入响应 ＋ 零状态响应

*RC*电路的零输入响应（放电）



u_C与i 非关联方向

*RC*电路的零输入响应, 是指无电源激励, 输入信号为零。在此条件下， 由电容（储能）元件的初始值 $U_C(0_+)=U_o$ 所产生的电路的响应.

这时电容元件可视作电压源， 其电压 $u_C(0_+)$ 可称为内部激励.

据KVL得：$u_R - u_C = 0$　而 $u_R = R\cdot i$　将 $i = -C\dfrac{du_C}{dt}$ 代入可得

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$ 一阶齐次微分方程,　令其通解为：$u_C(t) = Ae^{pt}$

代入上式得　$(RCp+1)Ae^{pt} = 0$　其特征方程为　$RCp+1=0$

特征根为　$p = -\dfrac{1}{RC}$　$\boxed{令\tau = RC}$　据初始条件　$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_O$

求得通解的积分常数：$A = u_C(0_+) = U_O$　则满足初始值的微分方程的解为：

$$\boxed{u_C(t) = u_c(0+)e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{i(t) = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{u_c(0+)}{R}e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{u_R(t) = R\cdot i = u_c(0+)e^{-t/\tau}}$$

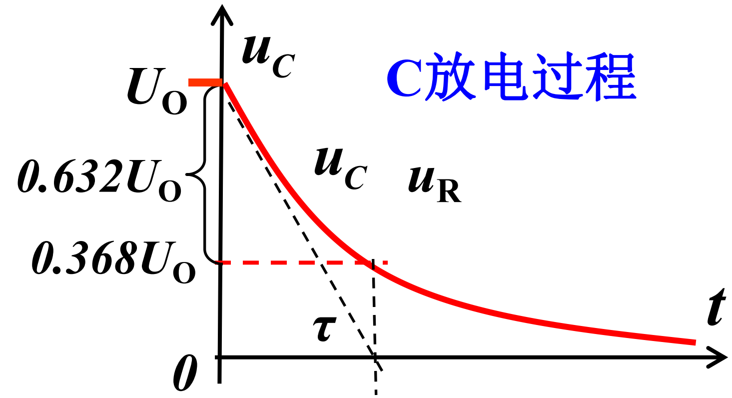
$$u_C(t)=u_c(0+)e^{-t/\tau}$$

$$i(t)=-C\frac{du_C}{dt}=\frac{u_c(0+)}{R}e^{-t/\tau}$$

$$u_R(t)=R\cdot i=u_c(0+)e^{-t/\tau}=u_C(t)$$

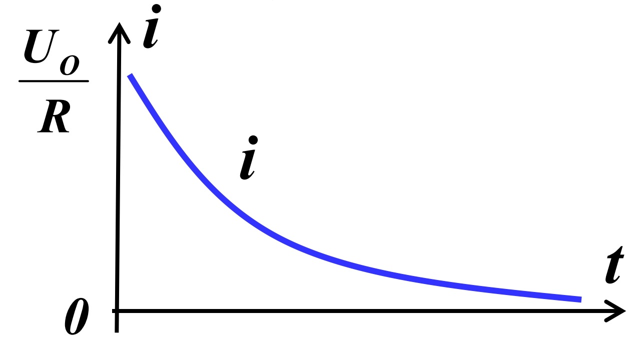
$\tau=RC$ (s)

C放电过程的表达式:



时间常数τ--表征u_C衰减的快慢程度

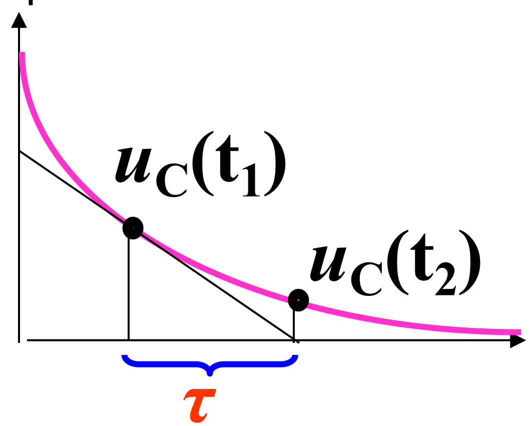
指数曲线上任意点的次切距的长度都等于 τ.



其物理意义: 决定电路暂态变化过程的快慢。

注意：R 越大，放电电流越小，放电时间越长。

C 越大，储存的电能越多，放电时间越长。



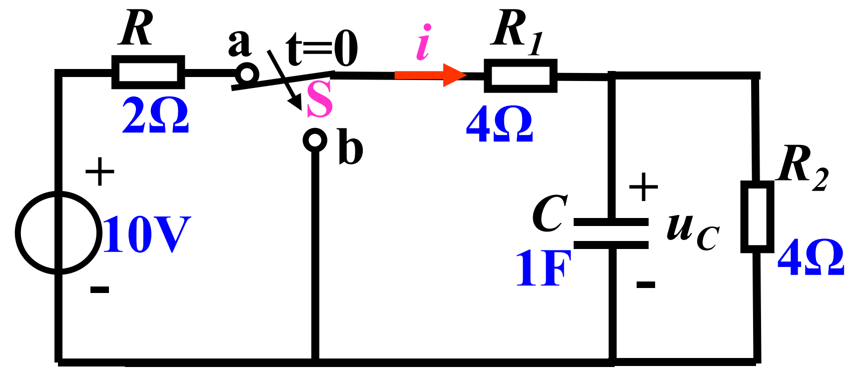
当 $t=1\tau$ 时，$u_C=U_o e^{-1}=U_o/2.718=0.368\,U_o$

当 $t=3\tau$ 时，$u_C=U_o e^{-3}=U_o/2.718^3=0.05\,U_o$

当 $t=5\tau$ 时，$u_C=U_o e^{-5}=U_o/2.718^5=0.0067\,U_o$

理论上当$t=\infty$时，电路才能达到稳态。工程上当$t=4-5\tau$时，相当于稳态。

例： S合在a端时处稳态，求换路后i(t).



解： t=0_时（C相当于开路）据换路定则得初始值

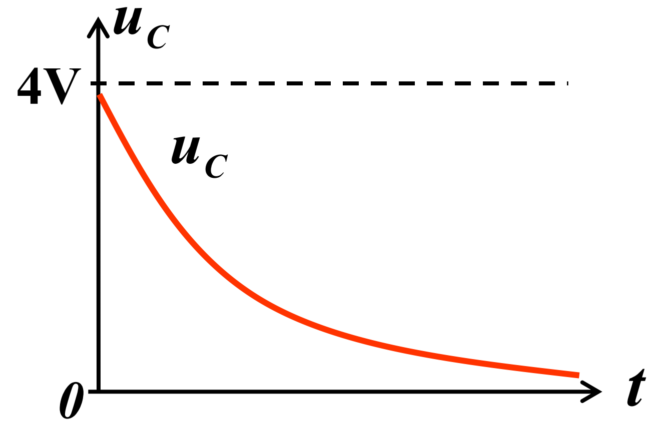
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{R_2}{R+R_1+R_2}U_1$$

$$= \frac{4}{2+4+4}\times 10 = 4\text{V}$$

换路后的时间常数： $$R' = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = 2\Omega$$

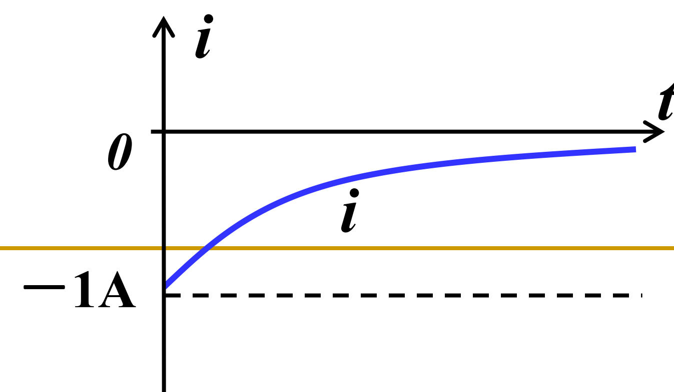
$$\tau = R'C = 2s$$

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-t/\tau} = 4e^{-0.5t}\text{V}$$

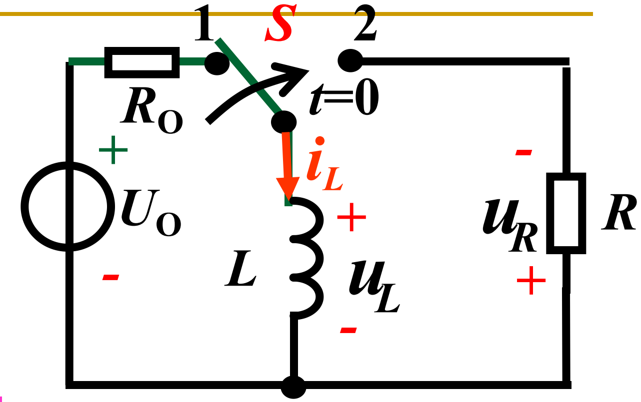


i与u非关联方向

$$i(t) = -\frac{u_C(t)}{R_1} = -\frac{4e^{-0.5t}}{4} = -e^{-0.5t}\text{A}$$

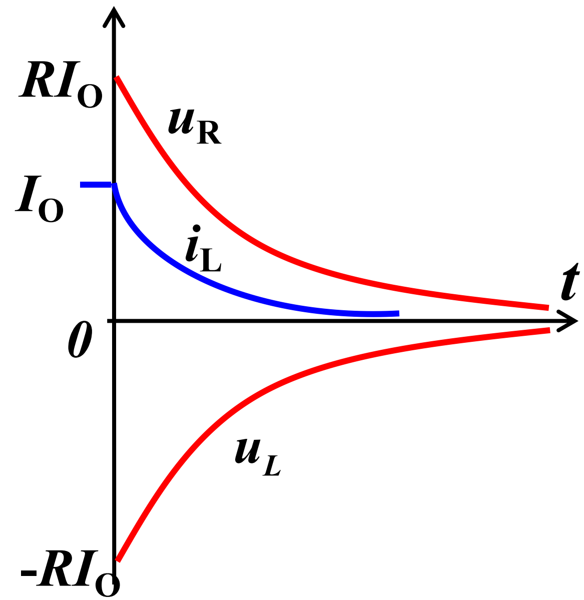


RL电路的零输入响应



RL电路的零输入响应, 是指无电源激励, 输入信号为零。在此条件下, 由电感（储能）元件的初始值$i_L(0_+)=I_o$ 所产生的电路的响应.

这时电感元件可视作电流源，其电流$i_L(0_+)$可称为内部激励.



据KVL得： $u_L + R \cdot i_L = 0$ 将 $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$

代入可得一阶线性微分方程： $\dfrac{L}{R}\dfrac{di_L}{dt} + i_L = 0$

令 $i_L(t) = Ae^{pt}$ 其特征方程为 $Lp + R = 0$

特征根为 $p = -\dfrac{R}{L}$ 则 $i_L(t) = Ae^{-Rt/L}$

据 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_O$ 得 $A = i_L(0_+) = I_O$

$$\boxed{\tau = L/R}$$

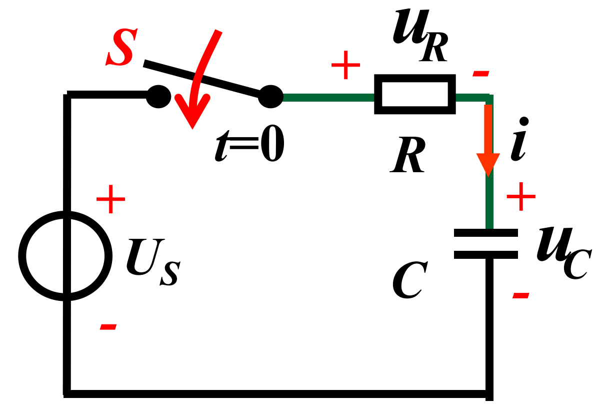
$$\boxed{i_L(t) = i_L(0_+)e^{-t/\tau} = I_O e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{u_R(t) = R \cdot i_L = RI_O e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -RI_O e^{-t/\tau}}$$

8.2 一阶电路的零状态响应

*RC*电路的零状态响应(充电)



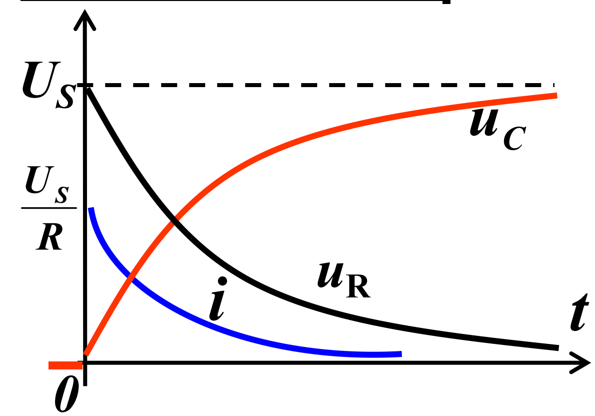
*RC*电路的零状态响应,是指换路前电容元件未储能, $u_C(0_+)=0$. 在此条件下,由电源激励所产生的电路的响应.

据KVL得: $u_R+u_C=U_S$ 将 $u_R=R\cdot i$ $i=C\dfrac{du_C}{dt}$

代入可得一阶线性非齐次方程: $RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=U_S$

方程的解由两个分量组成 $u_C=u_C'+u_C''$

非齐次方程的特解 相应齐次方程的通解



其特解为: $u_C'=U_S$ 齐次方程 $RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=0$ 的通解: $u_C=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

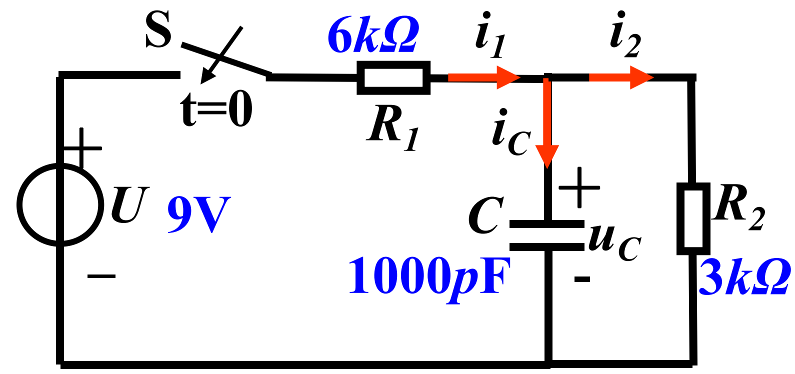
$\boxed{\tau=RC}$ 即 $u_C=U_S+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ 据 $u_C(0_+)=0$ 得 $A=-U_S$ 从而得

$$\boxed{u_C(t)=U_S-U_Se^{-t/\tau}=U_c(\infty)(1-e^{-t/\tau})}$$

$$\boxed{i(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U_S}{R}e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{u_R(t)=R\cdot i=U_Se^{-t/\tau}}$$

例： 换路前电容未充电，t=0时S闭合，求t≥0时得电压u_C。



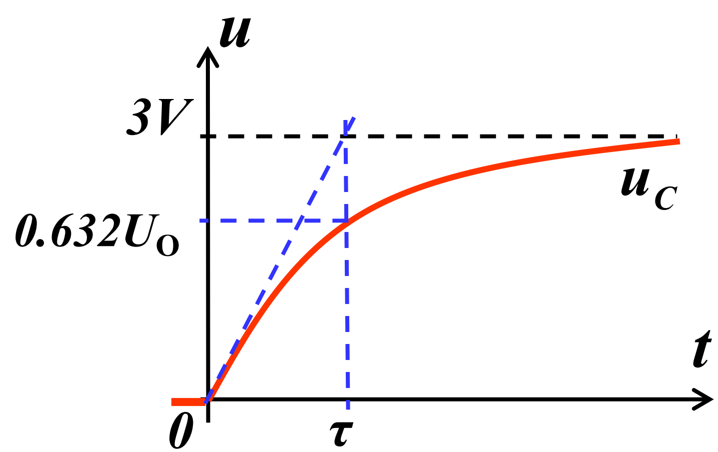
解： 先求 $U_c(\infty)$

$$U_c(\infty)=\frac{R_2\times U}{R_1+R_2}=\frac{3\times10^3}{(6+3)\times10^3}\times9=3V$$

求时间常数 τ

$$\tau=\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}=\frac{3\times6}{3+6}\times10^3\times1000\times10^{-12}$$

$$=2\times10^{-6}s$$

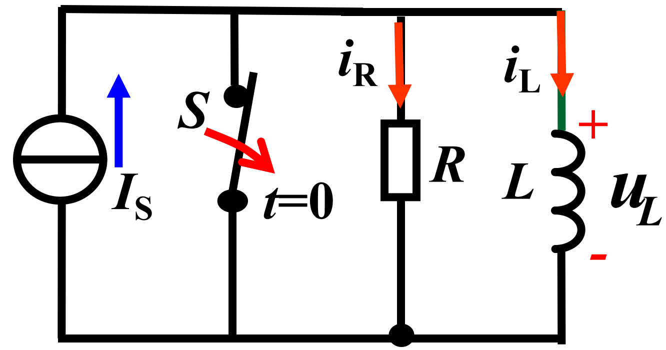


则其解为：

$$u_C(t)=U_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=3(1-e^{-\frac{t}{2\times10^{-6}}})=3(1-e^{-5\times10^5t})\text{V}$$

RL电路的零状态响应

RL电路的零状态响应,是指换路前电感元件未储能, $i_L(0_+)=0$. 在此条件下,由电源激励所产生的电路的响应(储能).

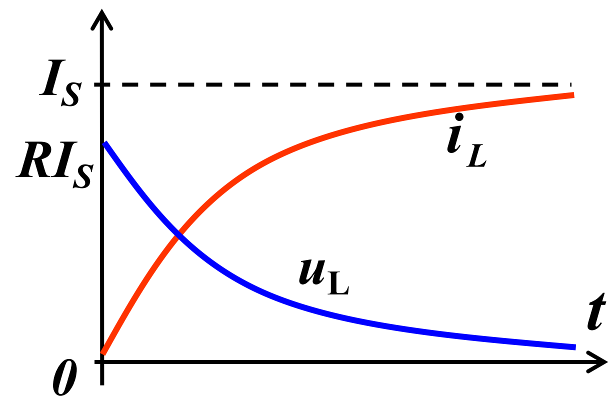


据KCL得: $I_S = i_R + i_L = \dfrac{u_L}{R} + i_L$

将 $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$ 代入得线性非齐次微分方程:

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_S$$

其通解为: $i_L(t) = i_L' + Ae^{-\frac{R}{L}t}$



其特解 $i_L' = I_S$ 即 $i_L(t) = I_S + Ae^{-\frac{R}{L}t}$ 据 $i_L(0_+) = 0$ 得 $A = -I_S$

令 $\boxed{\tau = \dfrac{L}{R}}$ 则其通解为:

$$\boxed{i_L(t) = I_S - I_S e^{-t/\tau} = I_L(\infty)(1 - e^{-t/\tau})}$$

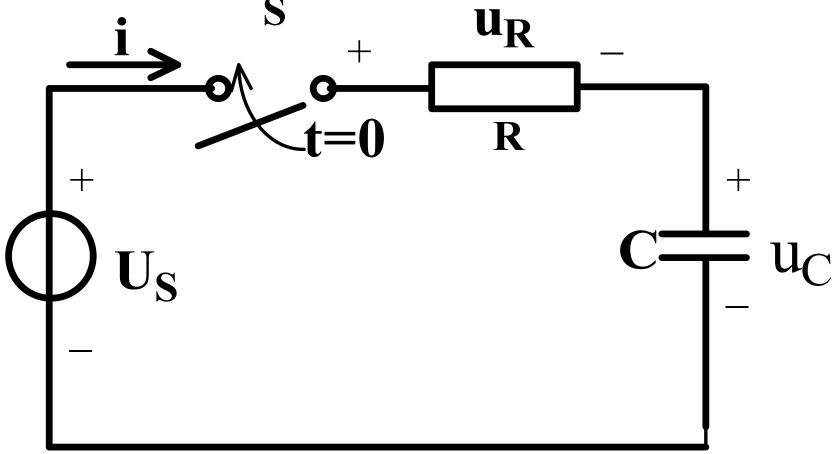
$$\begin{aligned} u_L(t) &= RI_S - Ri_L \\ &= RI_S - R(I_S - I_S e^{-t/\tau}) \\ &= RI_S e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

8.3 一阶电路的全响应与三要素法

RC电路的全响应

由电容元件的初始储能和外接激励共同作用所产生的电路响应，称为RC电路的**全响应**。

在图示电路中，电容元件已具有初始储能$u_c(0_-)=U_0<U_s$ 当开关S在t=0时刻合向电路，根据KVL，列出t≥0的电路方程



$$u_R + u_C = U_S$$

将电容元件的伏安特性关系 $i = C\dfrac{du_C}{dt}$ 和欧姆定律 $u_R = Ri$ 代入上式有

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

将初始条件 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$ 代入到解

$$u_C=u_C^{'}+u_C^{''}=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+U_S$$

中, 可得 $A=U_0-U_S$

因此:
$$\boxed{u_C=(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}+U_S}$$

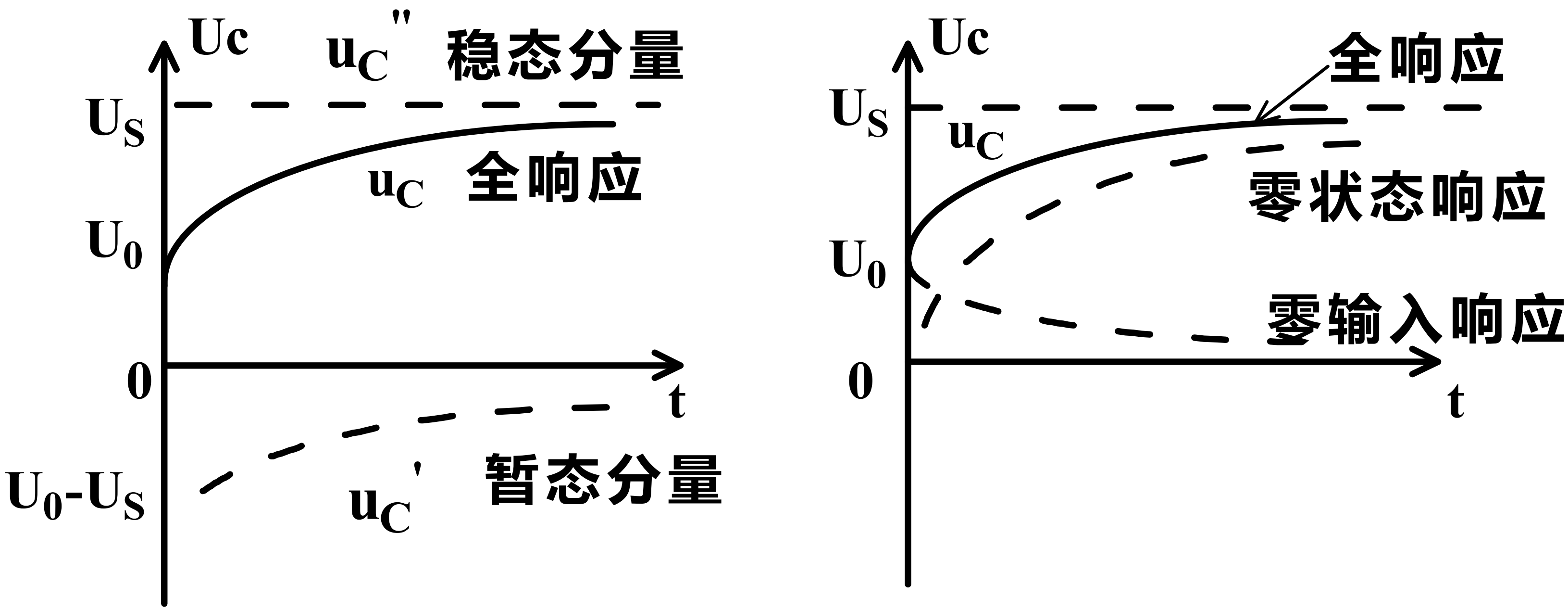
对于上式，等式右边第一项是暂态分量，它随着过渡过程的结束而趋于零，第二项是稳态分量，它等于电路中施加的独立电源电压。因而从普遍意义上讲，我们有

全响应 ＝ 暂态分量 ＋ 稳态分量

上式还可以写成:
$$\boxed{u_C=U_0e^{-\frac{t}{\tau}}+U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

上式中我们又看到，等式右边第一项是当外接独立电源为零时，电容具有初始储能时的零输入响应，而第二项是当电容没有初始储能而外接独立电源时的零状态响应，二者根据叠加定理就构成了

全响应 ＝ 零输入响应 ＋ 零状态响应



一阶线性电路暂态分析三要素法

通过对一阶线性电路的全响应分析知道，全响应可看成是暂态分量和稳态分量的叠加。

只要我们确定了所求变量的初始值、过渡过程结束后的稳态值、时间常数这三个量值，就可以直接写出在直流电源作用下一阶电路全响应的表达式，这种方法称为一阶电路的三要素法。

设一阶线性电路中所求变量为 $f(t)$, 变量的初始值为$f(0_+)$，变量在过渡过程结束后的稳态值为 $f(\infty)$ ，时间常数为 τ ，则我们可直接写出全响应的表达式为

$$f(t)=f^{'}(t)+f^{''}(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中，$f^{'}(t)$ 和 $f^{''}(t)$ 分别表示全响应中对应齐次方程的解和对应非齐次方程的特解。

与经典法相比较，三要素法省略了求解微分方程的过程，简便易行，所以在电路的过渡过程分析中得到了广泛的应用。但在使用一阶电路的三要素法对电路进行暂态分析时应当注意：三要素法仅适用于直流电源作用下一阶线性电路暂态过程的分析，对二阶以及二阶以上的电路并不适用。

1、三要素法解的一般形式

$$u_C(t)=u_C(\infty)+\left[u_C(0_+)-u_C(\infty)\right]e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{\tau = RC}$$

终值

稳态分量

初始值

暂态分量

时间常数

$$i_L(t)=i_L(\infty)+\left[i_L(0_+)-i_L(\infty)\right]e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

2、三要素法求解步骤：（条件：直流、一阶）

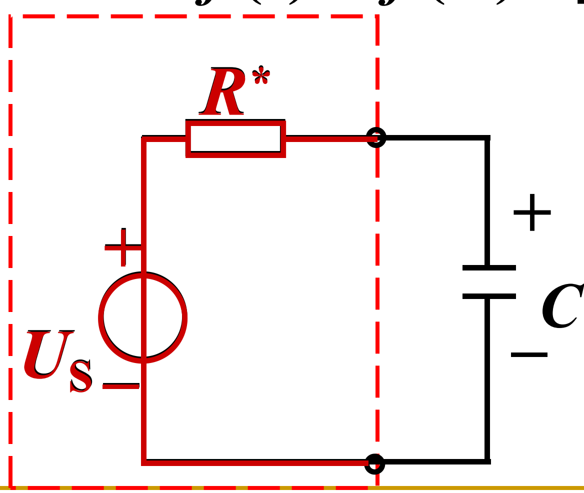
步骤：

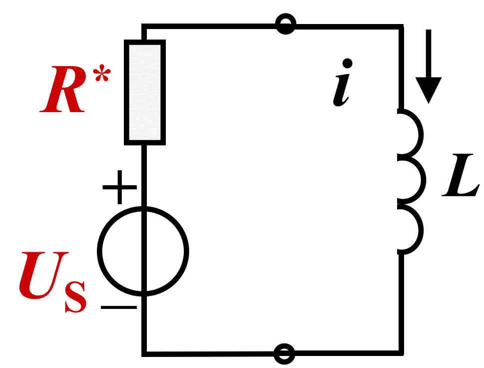
- $t=0_-$时，由$t=0_-$电路，计算$f(0_-)$，$f(0_+)=f(0-)$
- $t=\infty$ 电路，计算终值$f(\infty)$
- $\tau=R^*C$ 或 $\tau=L/R^*$

  R^*为戴维南等效电源的内阻（换路后的电阻）

$$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

N_A



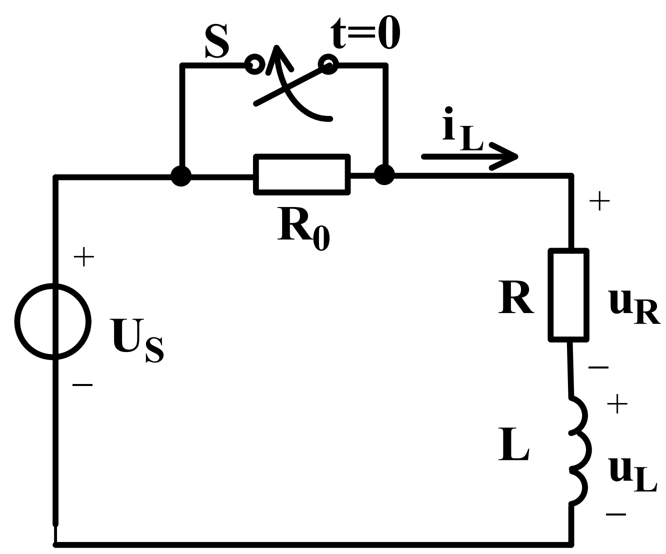


$\tau=R^*C$ $\tau=L/R^*$

RL电路的全响应

在图示电路中，开关S闭合前电感中已有电流流过，因而电感有初始储能，且 $i_L(0_-)=\dfrac{U_S}{R_0+R}=I_0$，在 $t=0$ 时刻，开关S合向电路，接入激励 U_S，因此换路后RL电路的响应为全响应。

（应用三要素法求解）



初始值 $$i_L(0_+)=i(0_-)=\frac{U_S}{R_0+R}=I_0$$

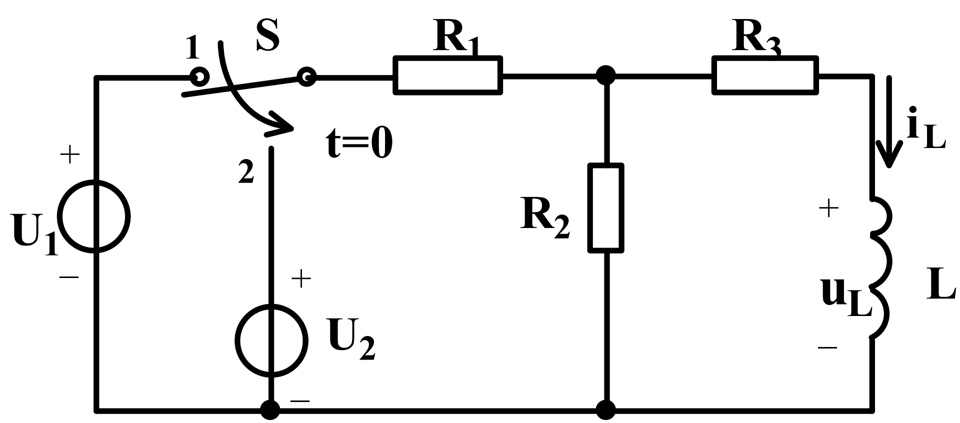
稳态值 $$i_L(\infty)=\frac{U_S}{R}$$

时间常数 $$\tau=\frac{L}{R}$$

则 $$i_L=i_L(\infty)+\left[i_L(0_+)-i_L(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{U_S}{R}+(I_0-\frac{U_S}{R})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

例1： 电路如图所示，开关在位置1时，电路已处于稳态。在t=0时开关由位置1合向位置2，试求t≥0时电感中的电流 i_L 和电感二端的电压 u_L 。

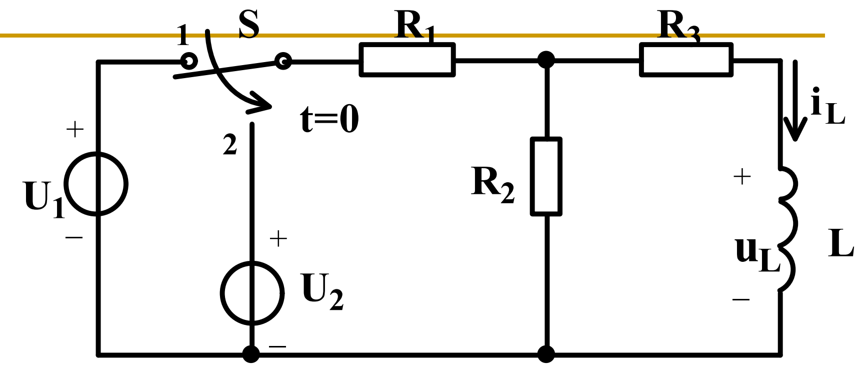
已知 $U_1 = 20\,V \quad U_2 = 35\,V \quad R_1 = 5\,\Omega \quad R_2 = 10\,\Omega \quad R_3 = 10\,\Omega \quad L = 40\,mH$



解： 利用三要素法

$$i_L(0_-) = \frac{U_1}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \times \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{20}{5 + \dfrac{10\times 10}{10+10}} \times \frac{10}{10+10} = 1\,A$$

根据换路定则，初始值



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\ A$$

稳态值

$$i_L(\infty) = \frac{U_2}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \times \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{35}{5 + \frac{10\times 10}{10+10}} \times \frac{10}{10+10} = 1.75\ A$$

换路后，从电感二端看进去的等效电阻为

难点和易错点！

$$R_0 = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 10 + \frac{5\times 10}{5+10} = \frac{40}{3}\ \Omega$$

所以，时间常数 $\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{40\times 10^{-3}}{\frac{40}{3}} = 3\times 10^{-3}\ s$

于是有

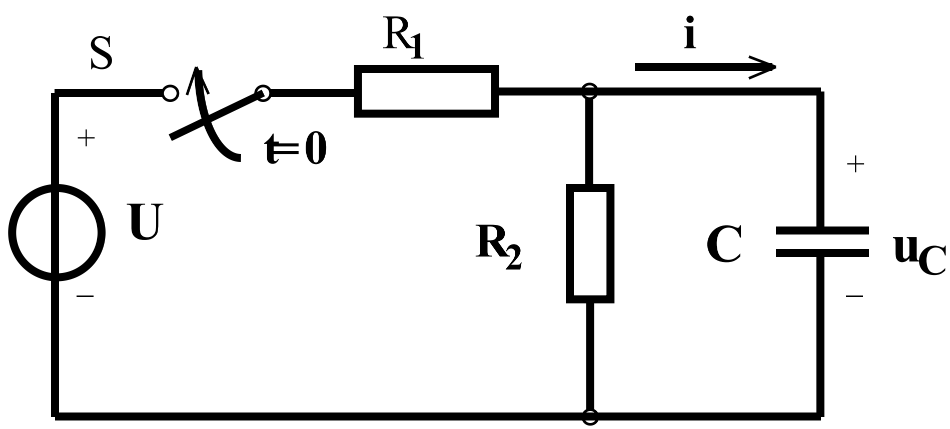
$$i_L = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 1.75 + (1-1.75)e^{-\frac{10^3}{3}t} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}e^{-\frac{10^3}{3}t}\ A$$

$$u_L = L\frac{d\,i_L}{d\,t} = 10e^{-\frac{10^3}{3}t}\ V$$

例2：在图示电路中，$U=9\,V$，$R_1=6\,k\Omega$，$R_2=3\,k\Omega$，$C=1000\,pF$，$u_C(0_-)=0$，试求t≥0时的电压u_c。

如果 $u_C(0_-)=4$，试求t≥0时的电压u_c。

（采用三要素法）

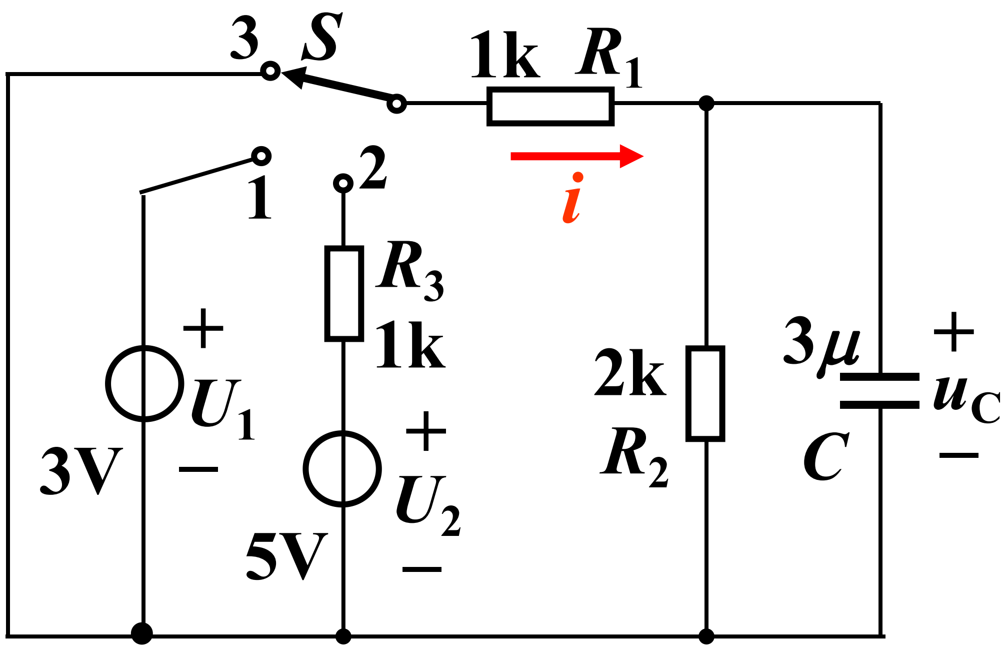


思考题 已知：开关 S 原在“3”位置，电容未充电。

当 $t=0$ 时，S 合向“1”

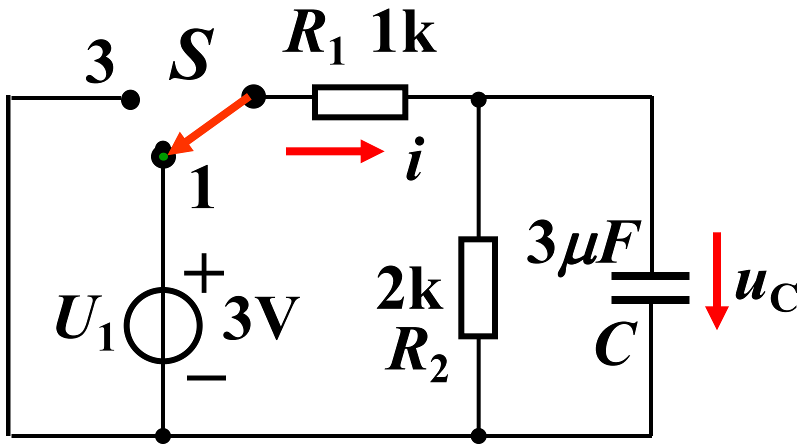
$t=20$ ms 时，S 再 从“1”合向“2”

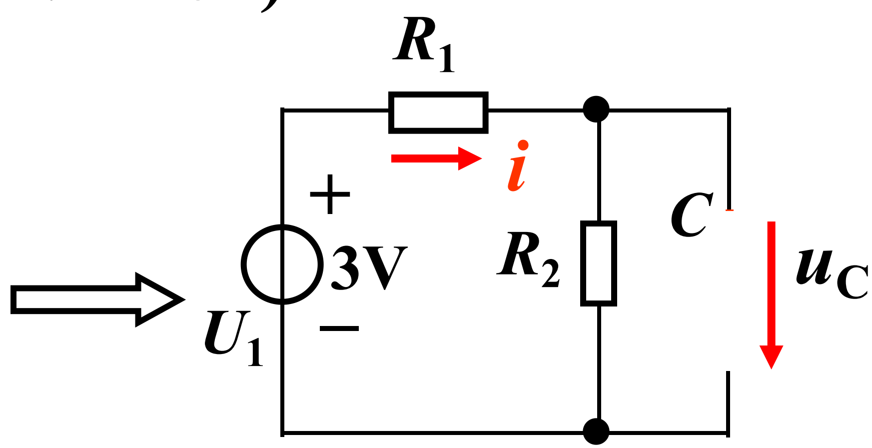
求：$u_C(t)$ 、 $i(t)$



$u_C(0-)=0$

• 解：第一阶段($t = 0\sim 20$ms，S：3→1)





$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0(\mathrm{V})$$

$$i(0_+) = \frac{U_1}{R_1} = 3\mathrm{mA}$$

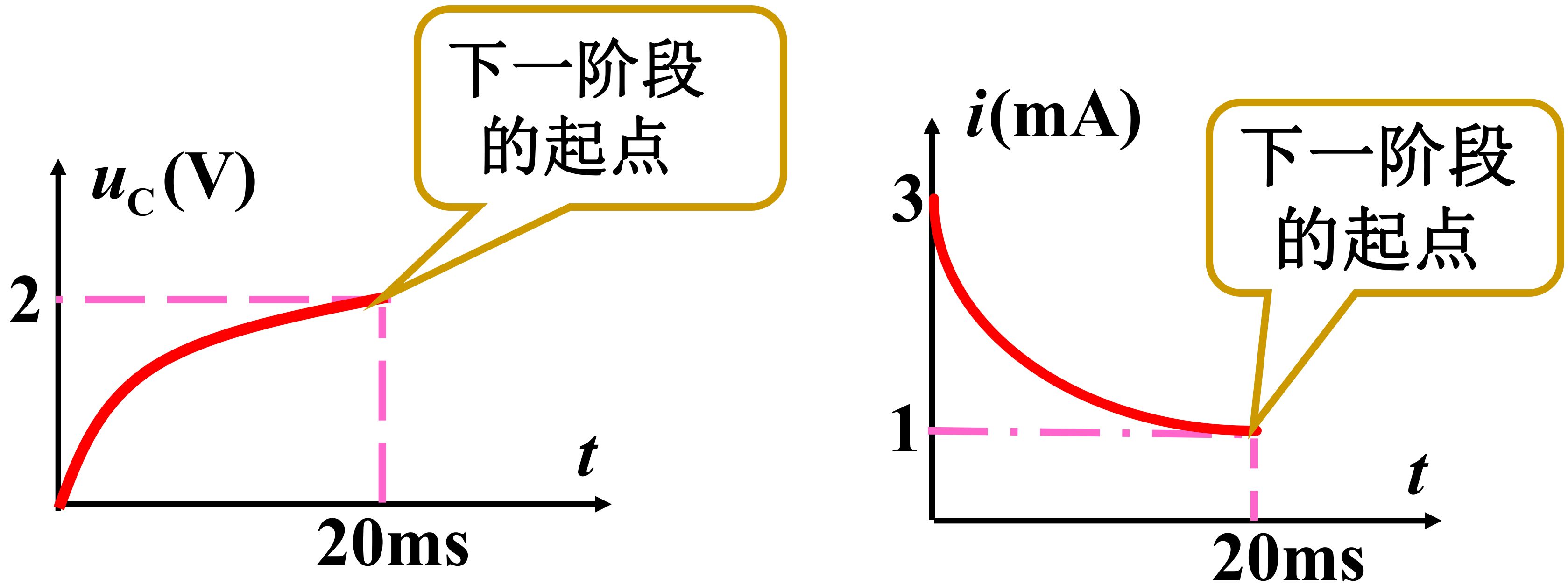
$$\tau = RC = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = 2\ \mathrm{ms}$$

$$i(\infty) = \frac{U_1}{R_1 + R_2} = 1\ \mathrm{mA}$$

$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_1 = 2\ \mathrm{V}$$

$$u_C(t) = 2 - 2e^{-t/2}\ \mathrm{V} \qquad i(t) = 1 + 2e^{-t/2}\ \mathrm{mA}$$

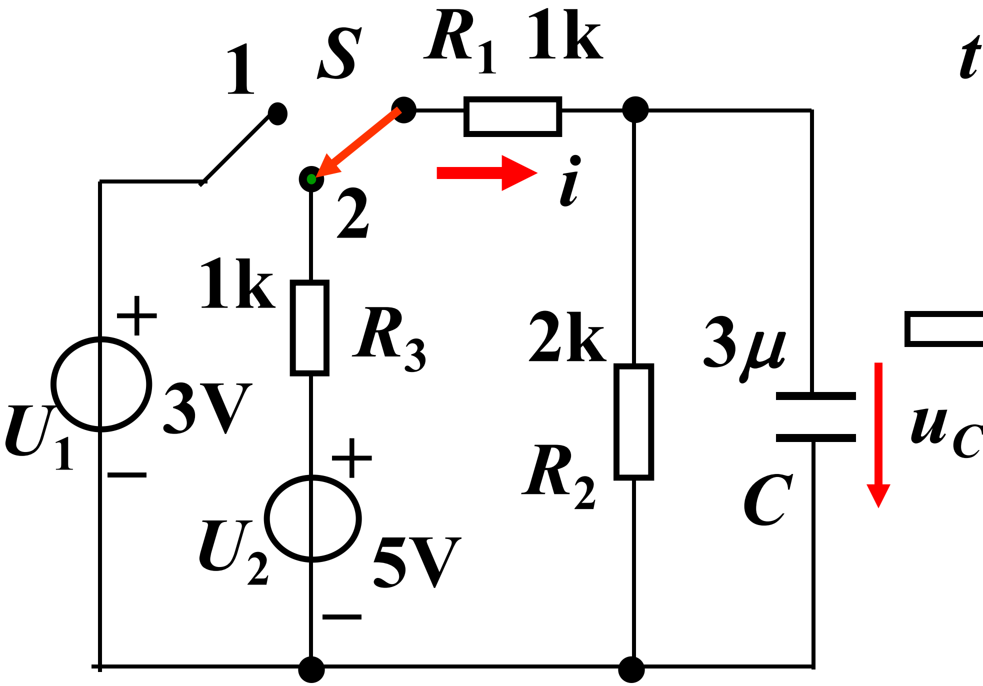
第一阶段波形图



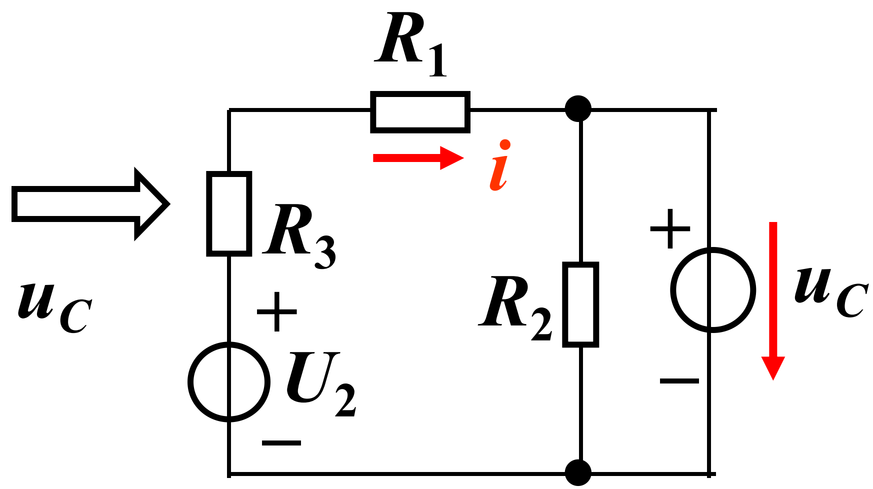
说明： $\tau = 2$ ms, $5\tau = 10$ ms

20 ms > 10 ms , t = 20 ms 时，可以认为电路已基本达到稳态。

第二阶段：20ms ~(S由1→2) 起始值 $f(20\text{ms}_+) = ?$



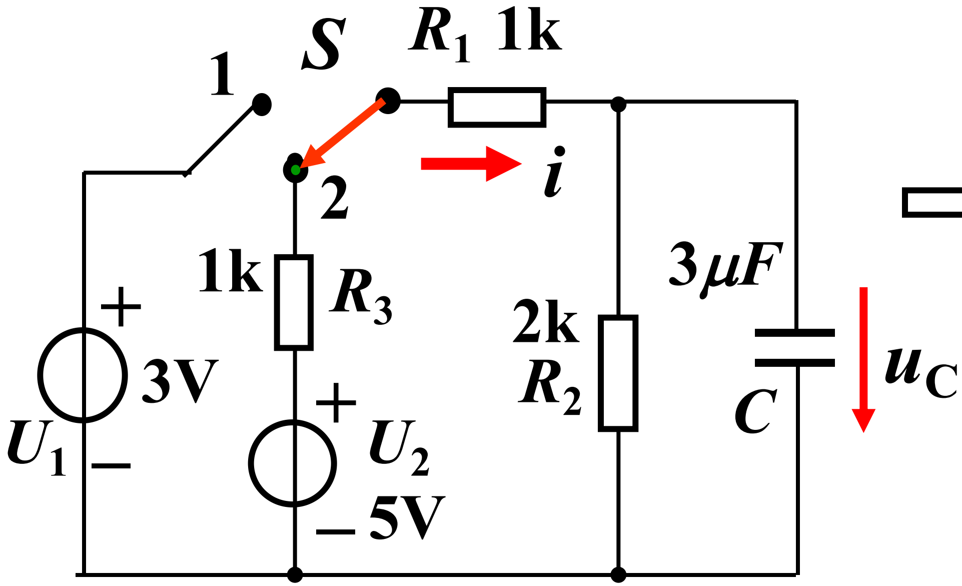
$t = 20_+\text{ms}$ 时等效电路

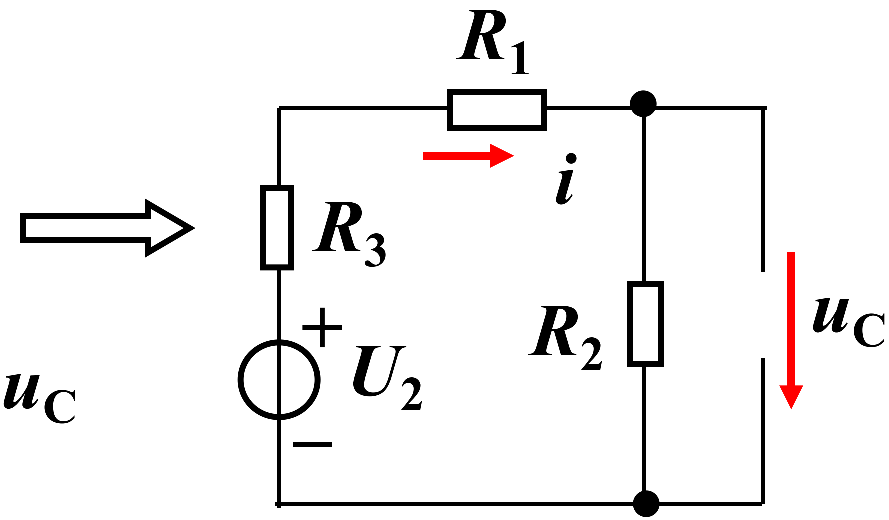


$$u_C(20\text{ms}_+) = u_C(20\text{ms}_-) = 2\text{V}$$

$$i(20\text{ms}_+) = \frac{U_2 - u_C(20\text{ms}_+)}{R_1 + R_3} = 1.5\text{mA}$$

第二阶段：(*S*:1→2) 稳态值 $f(\infty)=?$

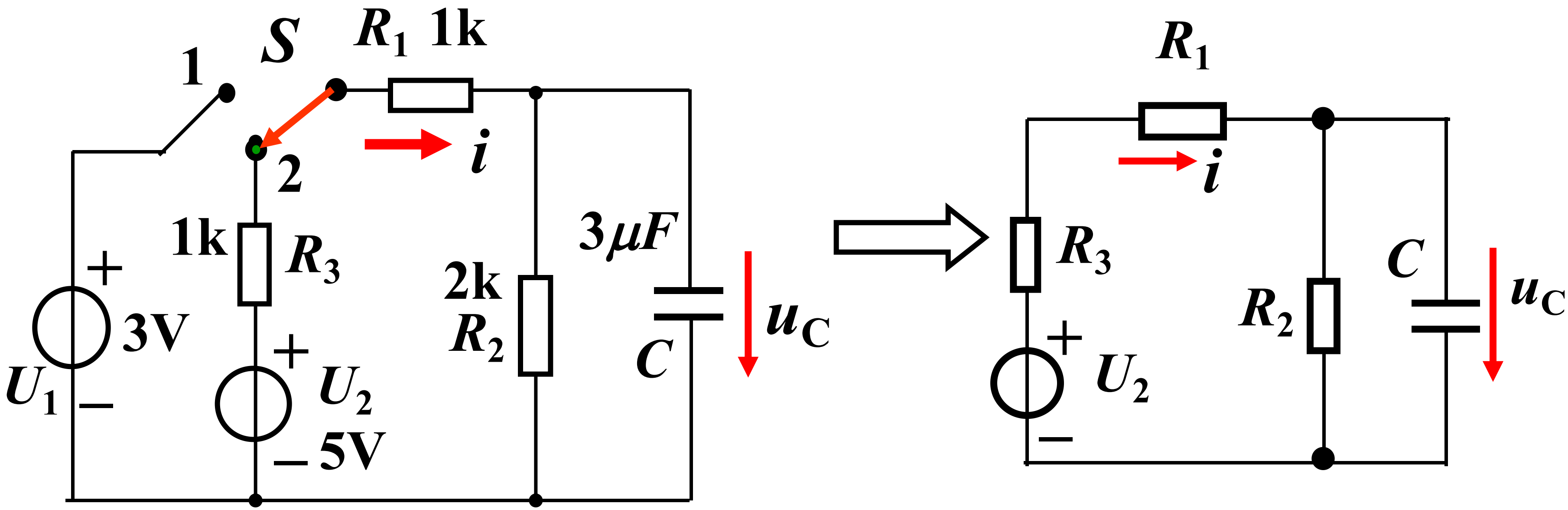




$$u_C(\infty)=\frac{R_2}{R_1+R_2+R_3}U_2=2.5\ \text{V}$$

$$i(\infty)=\frac{U_2}{R_1+R_2+R_3}=1.25\ \text{mA}$$

第二阶段：(*S*:1→2)　时间常数τ=？



$$R=(R_1+R_3)//R_2=1\ \mathrm{k\Omega} \qquad \therefore \tau = RC = 3\mathrm{ms}$$

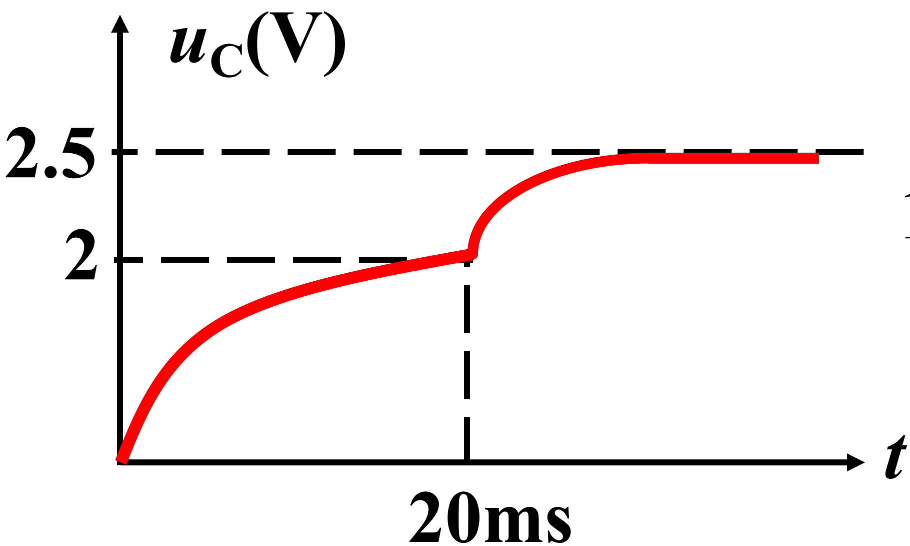
$$u_C(t-20)=2.5-0.5\,e^{-\frac{t-20}{3}}\ \mathrm{V}$$

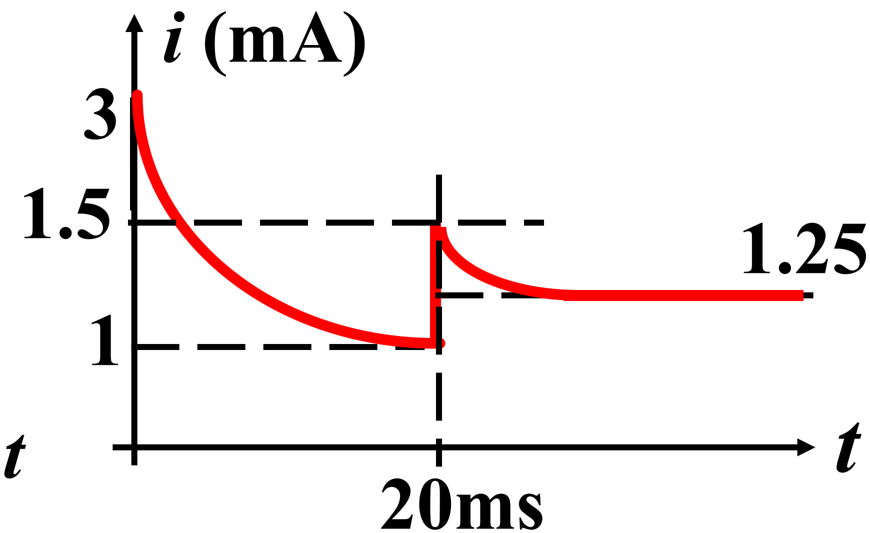
$$i(t-20)=1.25+0.25\,e^{-\frac{t-20}{3}}\ \mathrm{mA}$$

第一阶段： $u_C(t) = 2 - 2e^{-t/2}\ \text{V},\quad i(t) = 1 + 2e^{-t/2}\ \text{mA}$

第二阶段： $u_C(t-20) = 2.5 - 0.5\, e^{-\frac{t-20}{3}}\ \text{V}$

$$i(t-20) = 1.25 + 0.25\, e^{-\frac{t-20}{3}}\ \text{mA}$$

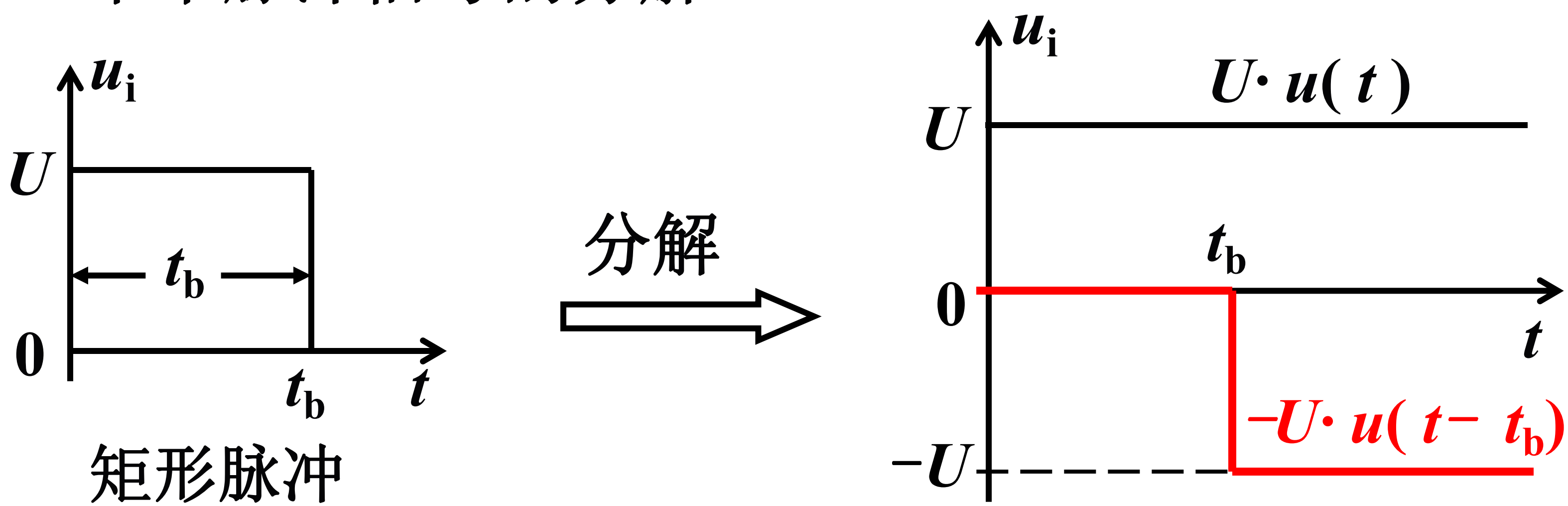




8.4 RC电路对矩形脉冲的响应

• 一、矩形脉冲分析

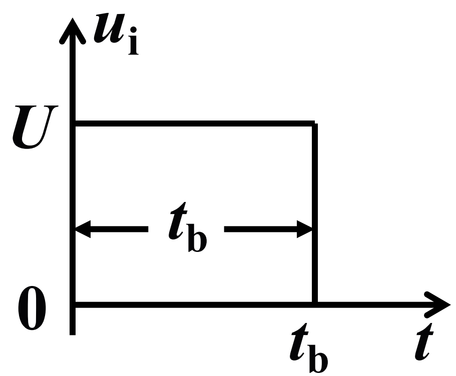
1. 单个脉冲信号的分解



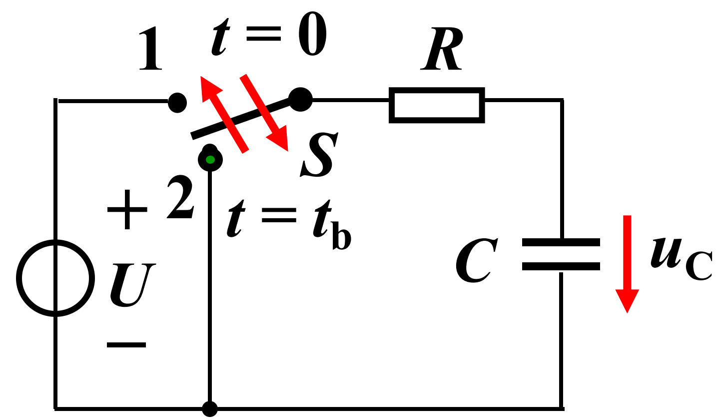
$$u_i(t) = U\cdot u(t) - U\cdot u(t-t_b) = \begin{cases} U & 0 \le t < t_b \\ 0 & t_b < t \end{cases}$$

$$= u_{i1}(t) + u_{i2}(t)$$

2. 等效电路



矩形脉冲



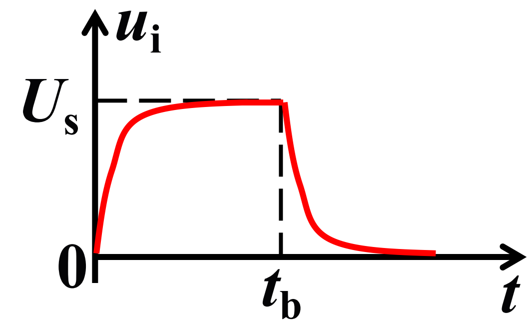
矩形脉冲的电路模型

3. 电路的激励 $u_i(t)$与响应$u_C(t)$

$$u_i(t)=U\cdot u(t)-U\cdot u(t-t_b)=\begin{cases}U & 0\le t<t_b\\ 0 & t_b<t\end{cases}$$

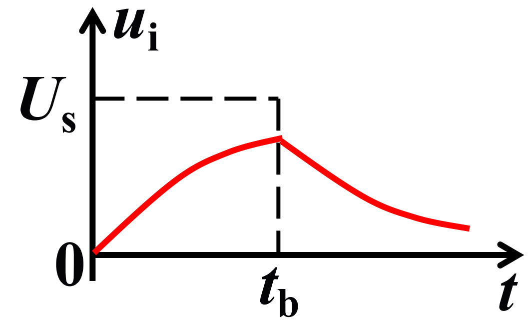
$$u_C(t)=\begin{cases}U(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) & (0\le t\le t_b)\\ U\ (1-e^{-\frac{t_b}{\tau}})\ e^{-\frac{(t-t_b)}{\tau}} & (t>t_b)\end{cases}$$

$$u_C(t)=\begin{cases} U(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) & (0\le t\le t_b) \\ U(1-e^{-\frac{t_b}{\tau}})\,e^{-\frac{(t-t_b)}{\tau}} & (t>t_b) \end{cases}$$



图(a)

- 当τ<<t_b时，C充放电快，响应波形见图(a)



图(b)

- 当τ>>t_b时，C充放电慢，响应波形见图(b)。

二、微分电路

- 微分电路：输出反映的是输入信号的变化量，即

$$u_o = k\frac{du_i}{dt}$$

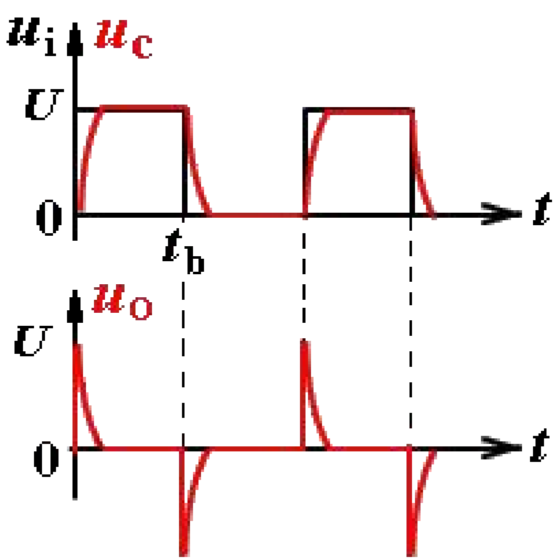
有：$u_o = u_R = iR = RC\dfrac{du_C}{dt}$

•电路模型及分析：

若：$\tau = RC << t_b$

则：$u_i = u_C + u_o \approx u_C$

$$\therefore u_o = RC\frac{du_i}{dt}$$



微分电路的输入
电压与输出电压的波形

- 特点：
  1)当u_i有变化时才有u_o；
  2) u_o的正负反映u_i变化的趋势。
- 作用：矩形脉冲变换为尖脉冲。

三、积分电路

积分电路：输出反映输入信号对时间的积分，即：

$$u_o = k\int u_i \mathrm{d}t$$

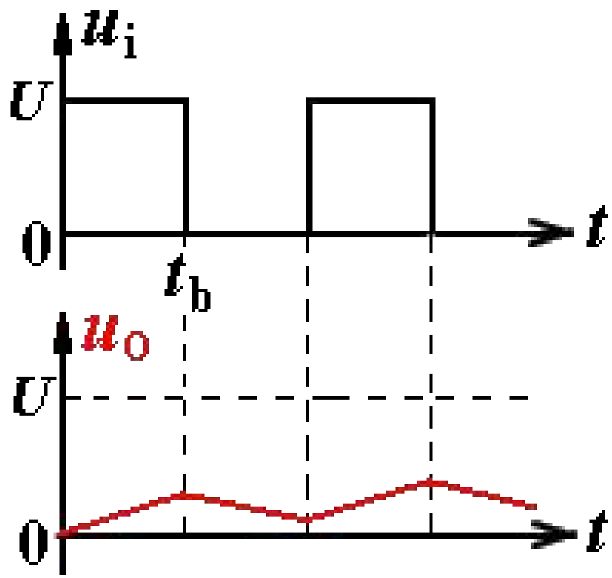
- 电路模型及分析：

有：$u_o = u_C = \dfrac{1}{C}\int i_C \mathrm{d}t = \dfrac{1}{C}\int i \mathrm{d}t$

若：$\tau = RC >> t_b$

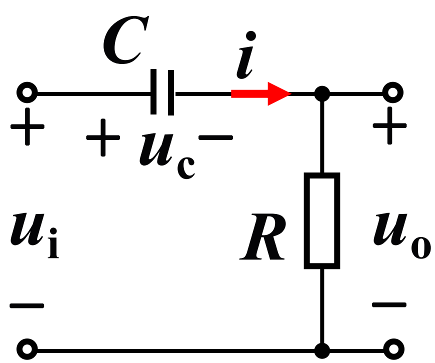
则：$u_i = u_R + u_o \approx u_R = iR$

$$\therefore u_o = \frac{1}{RC}\int u_i \mathrm{d}t$$



积分电路的输入
电压与输出电压的波形

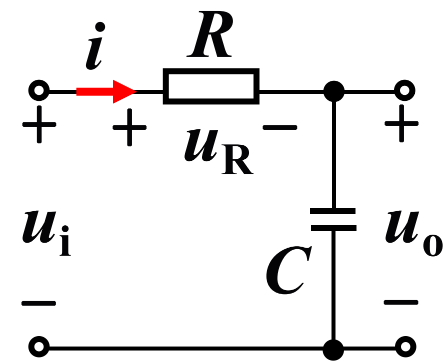
- 作用：矩形脉冲变换
为锯齿波电压。



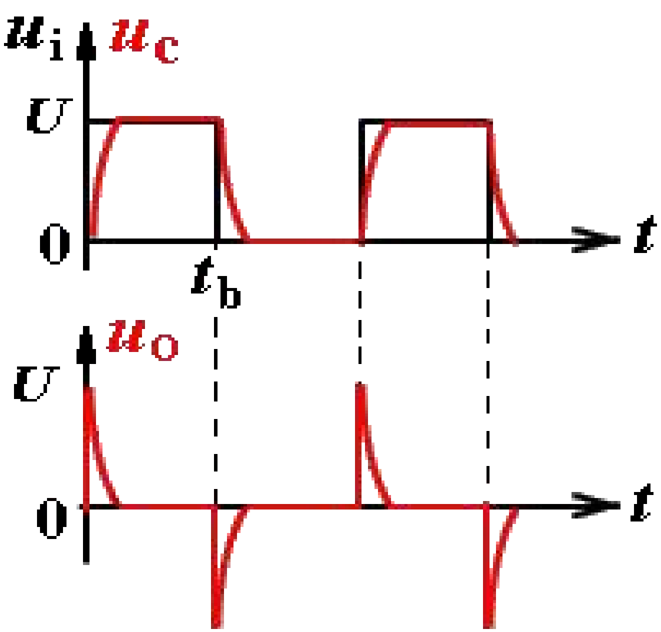
微分电路

$\tau = RC \ll t_b$

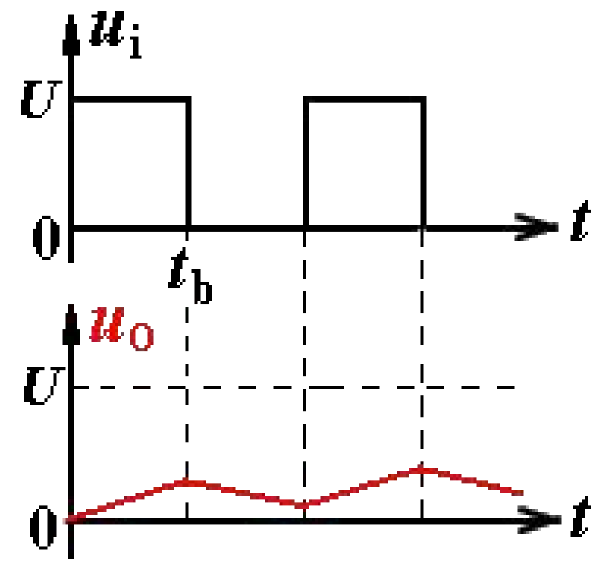
$\tau = RC \gg t_b$



积分电路



微分电路的输入
电压与输出电压的波形



积分电路的输入
电压与输出电压的波形

作业

8-2　8-14　8-26　8-30