练 习 六

1．计算下列积分

（1）$\oint_{|z|=2}\dfrac{2z^2-z+1}{z-1}dz$

解：$z=1$为奇点：

$$\oint_{|z|=2}\frac{2z^2-z+1}{z-1}dz=2\pi i(2z^2-z+1)\Big|_{z=1}=4\pi i$$

（2）$\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^{100}}dz$

解：$\dfrac{2\pi i}{99!}e^z\Big|_{z=0}=\dfrac{2\pi i}{99!}$

（3）$\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz$

解：$\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz=2\pi i(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=2\pi i\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}$=0

（4）$\oint_{c=c_1+c_2}\dfrac{\cos z}{z^3}dz$，其中$C_1:|z|=2;\quad C_2:|z|=3$为负向。

解：$\oint_{c=c_1+c_2}\dfrac{\cos z}{z^3}dz=\oint_{c_1}\dfrac{\cos}{z^3}dz+\oint_{c_2}\dfrac{\cos z}{z^3}dz$

$=(\dfrac{\cos z}{2!}-\dfrac{\cos z}{2!})\cdot(\cos z)''|z=0=0$

或 $\oint_{c_1}=\oint_{\bar{c}_2}\Rightarrow\oint_{c_1}-\oint_{\bar{c}_2}=\oint_{c_1}+\oint_{c_2}=0$

2．若$f(z)$是区域G内的非常数解析函数，且$f(z)$在G内无零点，则$f(z)$不能在G内取到它的最小模。

证：设$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$， 因$f(z)$为非常数解析函数，且$\forall z\in G\quad f(z)\neq 0$

则$g(z)$为非常数解析函数 所以$g(z)$在G内不能取得最大模

即 $f(z)$ 不能在 G 内取得最小模

3.设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，且在 $|z|=1$ 上有 $|f(z)-z|<|z|$, 试证 $\left|f'(\frac{1}{2})\right|<8$。

证：因 $|f(z)|-|z|\le|f(z)-z|\le|z|$ （在 $|z|=1$ 上） 所以 $|f(z)|\le 2,\quad (|z|=1)$

$$\therefore \left|f'(\frac{1}{2})\right|\le\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)-z+z}{(z-\frac{1}{2})^2}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)-z+|z|}{(z-\frac{1}{2})^2}|dz|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z=1|}\frac{2|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|}ds\le\frac{1}{\pi}\oint_{|z=1|}\frac{1}{\frac{1}{4}}ds=8$$

$$(\left|z-\frac{1}{2}\right|^2=x^2+y^2-x+\frac{1}{4}=1-x+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{4},(x,y)\text{在}|z|=1\text{上}$$

4．设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条简单闭曲线，它的内部全含于 D，如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有点处成立，试证在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立。

证：设 $F(z)=f(z)-g(z)$，因 $f(z),g(z)$ 均在 D 内解析，所以 $F(z)$ 在 D 内解析。

在 C 上，$F(z)=0,(z\in c)$，$\forall z_0\in c$ 有：$F(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c\dfrac{F(z)}{z-z_0}dz=0$

所以 $f(z_0)=g(z_0)$

由 z_0 的任意性可知：在 C 内 $f(z)=g(z)$

*5．思考题

（1）复合闭路定理在积分计算中有什么用处？要注意什么问题？

答：由复合闭路定理，可以把沿区域外边界线的回路积分转化为沿区域内边界线的积分，从而便于计算。特别地，如果积分回路的内域中含有被积函数的有限个奇点，我们就可以挖去包含这些点的足够小的圆域（包括边界），函数在剩下的复连域解析，由复合闭路定理就可以将大回路的积分换成分别沿这些小圆周的回路积分。

利用复合闭路定理是计算沿闭曲线积分的最主要方法。

使用复合闭路定理时，要注意曲线的方向，边界曲线C由$C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$所围，

$\oint_C f(z)dz=0$，即 $\oint_{C_0+C_1^-+\cdots C_n^-} f(z)dz=0$，这时$C_0$取逆时针方向，而$C_1^-,C_2^-,\cdots,C_n^-$取顺时针方向，而公式

$$\oint_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1+C_2+\cdots C_n} f(z)dz$$

中$C_0,C_1,\cdots,C_n$都取逆时针方向。

（2）柯西积分公式成立的条件是什么？柯西积分公式说明了什么问题?

答：柯西积分公式是建立在柯西积分定理基础上的，以柯西定理成立为前提条件，因此柯西定理的条件也是柯西积分公式成立的条件。即函数$f(z)$在以C为边界的闭区域$\overline{G}$上解析，当然也可以放宽到$f(z)$在G内解析，在C上连续。

柯西积分公式反映了解析函数值之间很强的内在联系，$f(z)$在区域内点α的值$f(\alpha)$，可以用$f(z)$在边界C上的值通过积分来表达。这就是说，函数$f(z)$在区域中任一点的值，完全由它在区域边界C上的值所确定，这是实变量的可微函数所不具有的。

（3）解析函数的高阶导数公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同?

答：高阶导数公式说明，函数$f(z)$只要在闭区域$\overline{G}$中处处可微，它就一定处处无限次可微，并且它的各阶导数均为闭区域$\overline{G}$上的解析函数。这一点与实变量函数有本质的区别。我们知道，对于实函数$y=f(x)$而言，即使它在某一区间上一次可导，导数$f'(x)$不一定仍然可导，甚至可能是不连续的。