复变函数与积分变换试题

2004.1.4

系别__________班级__________学号_________________姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得分	评卷人

一、填空（每题 3 分，共 24 分）

1．$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10}$ 的实部是______，虚部是________，辐角主值是______.

2．满足 $|z+2|+|z-2|\le 5$ 的点集所形成的平面图形为_______________，该图形是否为区域___.

3．$f(z)$ 在 z_0 处可展成 Taylor 级数与 $f(z)$ 在 z_0 处解析是否等价？____.

4．$(1+i)^{1-i}$ 的值为____；

主值为____.

5．积分 $\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}dz$ 的值为________，$\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz=$ ________.

6．函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-i}e^{\frac{1}{z-3}}$ 在 $z=0$ 处 Taylor 展开式的收敛半径是________.

7．设 $\mathscr{F}\ [f_1(t)]=F_1(\omega)$, $\mathscr{F}\ [f_2(t)]=F_2(\omega)$，则 $\mathscr{F}\ [f_1(t)*f_2(t)]=$________________，

其中 $f_1(t)*f_2(t)$ 定义为________________ .

8．函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的有限孤立奇点 $z_0=$___，z_0 是何种类型的奇点？ ________.

得分	评卷人

二、（6 分）设 $f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2i$，问 $f(z)$ 在何处可导？何处解析？并在可导处求出导数值.

得分	评卷人

三、（8 分）设 $v=e^{px}\sin y$, 求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$.

得分	评卷人

四、（10 分）将函数 $f(z)=\dfrac{2-3z}{2z^2-3z+1}$ 在有限孤立奇点处展开为 Laurent 级数.

得分	评卷人

五、计算下列各题（每小题6分，共24分）

1．$f(z)=\oint_{|\xi|=\sqrt{3}}\frac{3\xi^{2}+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$，求 $f'(1+i)$.

2．求出 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ 在所有孤立奇点处的留数

3．$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2}}{(x^{2}+a^{2})^{2}}dx \quad (a>0)$

4．$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^{2}x}dx$

得分	评卷人

六、（6分）求上半单位圆域 $\{z:|z|<1, \operatorname{Im}z>0\}$ 在映射 $w=z^{2}$ 下的象.

得分	评卷人

七、（8分）求一映射，将半带形域 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, y>0$ 映射为单位圆域.

得分	评卷人

八、（6分）设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在闭圆 $|z|\le 1$ 上连续，且 $f(0)=1$，证明:

$$\oint_{|z|=1}[2\pm(z+\frac{1}{z})]f(z)\frac{dz}{z}=(2\pm f'(0))2\pi i\,.$$

得分	评卷人

九、（8 分）用 Laplace 变换求解常微分方程:

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = -1, \\ y''(0) = y'(0) = 1, \ \ y(0) = 2. \end{cases}$$

复变函数与积分变换试题解答 2004.1.4

系别___________班级__________学号__________姓名___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得分	评卷人

一、填空（每题 3 分，共 24 分）

1．$(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i})^{10}$ 的实部是 $-\frac{1}{2}$ ，虚部是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，辐角主值是 $\frac{2\pi}{3}$.

2．满足 $|z+2|+|z-2|\le 5$ 的点集所形成的平面图形为，以±2 为焦点，长半轴为 $\frac{5}{2}$ 的椭圆，该图形是否为区域 否 .

3． $f(z)$ 在 z_0 处可展成 Taylor 级数与 $f(z)$ 在 z_0 处解析是否等价？ 是 .

4．$(1+i)^{1-i}$ 的值为 $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}[\cos(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})],\ k=0,\pm 1,\cdots$；

主值为 $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})]$.

5．积分 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$ 的值为 $2\pi i$ ， $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz=$ 0 .

6．函数 $f(z)=\frac{1}{z-i}e^{\frac{1}{z-3}}$ 在 $z=0$ 处 Taylor 展开式的收敛半径是 1 .

7．设 $\mathcal{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$, $\mathcal{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$, 则 $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\mathcal{F}[f_1(t)]\cdot\mathcal{F}[f_2(t)]$

其中 $f_1(t)*f_2(t)$ 定义为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$.

8．函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的有限弧立奇点 $z_0=$ <u>0</u>，z_0 是何种类型的奇点？<u>可去</u>.

得分	评卷人

二、（6 分）设 $f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2i$，问 $f(z)$ 在何处可导？何处解析？并在可导处求出导数值.

解：$u(x,y)=x^3-y^3$，$v(x,y)=2x^2y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2,\ \frac{\partial v}{\partial x}=4xy^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=4x^2y \qquad (2\text{ 分})$$

均连续，要满足 $C-R$ 条件，必须要

$$3x^2=4x^2y,\quad 4xy^2=3y^2 \text{ 成立}$$

即仅当 $x=y=0$ 和 $x=y=\dfrac{3}{4}$ 时才成立，所以函数 $f(z)$ 处处不解析；（2 分）

$$f'(0)=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,0)}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=0,$$

$$f'(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i)=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(\frac{3}{4},\frac{3}{4})}+i\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{(\frac{3}{4},\frac{3}{4})}=\frac{27}{16}(1+i) \qquad (2\text{ 分})$$

得分	评卷人

三、（8 分）设 $v=e^{px}\sin y$，求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$.

解：因 $v_x=pe^{px}\sin y,\ v_{xx}=p^2e^{px}\sin y,\ v_y=e^{px}\cos y,\ v_{yy}=-e^{px}\sin y$，要使 $v(x,y)$ 为调和函数，则有 $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0$

即 $\quad p^2e^{px}\sin y-e^{px}\sin y=0 \qquad$（4 分）

所以 $p=\pm 1$ 时，v 为调和函数，要使 $f(z)$ 解析，则有

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

$$u(x,y)=\int u_x dx=\int e^{px}\cos y dx=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+\psi(y)$$

$$u_y=-\frac{1}{p}e^{px}\sin y+\psi'(y)=-pe^{px}\sin y$$ （2 分）

所以 $\psi'(y)=(\frac{1}{p}-p)e^{px}\sin y,\ \psi(y)=-(\frac{1}{p}-p)e^{px}\cos y+c$

即 $u(x,y)=pe^{px}\cos y+c$，故

$$f(z)=\begin{cases} e^{x}(\cos y+i\sin y)+c=e^{z}+c, & p=1 \\ -e^{-x}(\cos y-i\sin y)+c=-e^{-z}+c, & p=-1 \end{cases}$$ （2 分）

得分	评卷人

四、（10 分）将函数 $f(z)=\frac{2-3z}{2z^2-3z+1}$ 在有限孤立奇点处展开为 Laurent 级数.

解：$f(z)$ 的有限孤立奇点为 $z_0=\frac{1}{2}$ 及 $z_1=1$

$$f(z)=\frac{2-3z}{2z^2-3z+1}=\frac{1}{1-2z}+\frac{1}{1-z}$$ （2 分）

1）当 $0<\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ 时

$$f(z)=\frac{1}{-2}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2}{1-2(z-\frac{1}{2})}$$

$$=-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}+2\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z-\frac{1}{2})^n$$ （2 分）

2）当 $\frac{1}{2}<\left|z-\frac{1}{2}\right|<+\infty$

$$f(z)=-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}-\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})})}$$

$$=-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}-\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}(z-\frac{1}{2})^{-n}$$ （2 分）

3）当 $0<|z-1|<\frac{1}{2}$

$$f(z)=\frac{1}{1-2z}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1+2(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n (z-1)^n$$ （2 分）

4）当 $\frac{1}{2}<|z-1|<+\infty$

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z(z-1)(1+\frac{1}{2(z-1)})}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}(z-1)^{-n}$$ （2 分）

得分	评卷人

五、计算下列各题（每小题 6 分，共 24 分）

1． $f(z)=\oint_{|\xi|=\sqrt{3}}\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$ ，求 $f'(1+i)$.

解：因 $\varphi(\xi)=3\xi^2+7\xi+1$ 在复平面上处处解析

由柯西积分公式知，在 $|z|<\sqrt{3}$ 内，

$$f(z)=\oint_{|\xi|=\sqrt{3}}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-z}d\xi=2\pi i\varphi(z)=2\pi i(3z^2+7z+1) \quad \text{(3 分)}$$

所以 $f'(z)=2\pi i(6z+7)$ （2 分）

而点 $1+i$ 在 $|z|<\sqrt{3}$ 内，故

$$f'(1+i)=2\pi i[6(1+i)+7]=2\pi(-6+13i) \quad \text{(1 分)}$$

2．求出 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ 在所有孤立奇点处的留数

解：函数 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ 有孤立奇点 0 与 ∞，而且在 $0<|z|<+\infty$ 内有如下 Laurent 展开式：

$$e^{z+\frac{1}{z}}=e^z\cdot e^{\frac{1}{z}}=(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots)$$

$$=\cdots+(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{4!}+\cdots)\frac{1}{z}+\cdots \quad \text{(3 分)}$$

故 $c_{-1}=\mathrm{Re}\,s[e^{z+\frac{1}{z}},0]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)}$ （2 分）

$$\mathrm{Re}\,s[e^{z+\frac{1}{z}},\infty]=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)} \quad \text{(1 分)}$$

3．$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx \quad (a>0)$

解：$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$，它共有两个二阶极点，且 (z^2+a^2) 在实轴上无奇点，在上半平面仅有二阶极点 ai，所以 （2 分）

$$\int_{\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),ai] \quad \text{(1 分)}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to ai}[(\frac{z}{z+ai})^2]' = 2\pi i \lim_{z \to ai}\frac{2zai}{(z+ai)^3} = \frac{\pi}{2a}$$ （3 分）

4． $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$

解：由三角函数公式

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)} \overset{t=2x}{=\!=\!=} \int_0^{\pi} \frac{dt}{3-\cos t}$$ （1 分）

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{3-\cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\cos t}$$ （2 分）

令 $z = e^{it}$ ，则 $dt = \frac{dz}{iz}, \cos t = \frac{z^2+1}{2z}$ ，于是

$$I = \frac{1}{2}\oint_{|Z|=1} \frac{1}{3-\frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = i\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2-6z+1} dz$$ （1 分）

被积函数 $f(z) = \frac{1}{z^2-6z+1}$ 在 $|z| = 1$ 内只有一阶极点

$z_0 = 3-\sqrt{8}$，由公式

$$\mathrm{Re}\,s[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{[z^2-6z+1]'} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}$$

故由留数定理

$$I = i2\pi i \frac{-1}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$ （2 分）

得分	评卷人

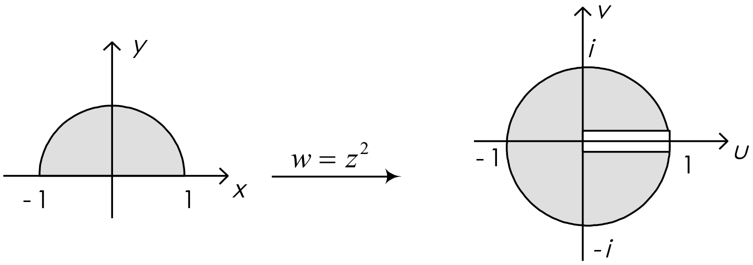
六、（6 分）求上半单位圆域 $\{z : |z| < 1, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 在映射 $w = z^2$ 下的象.

解：令 $z=re^{i\theta}$，则 $r<1,\ 0<\theta<\pi$

$$z^2=r^2e^{2i\theta}=\rho e^{i\varphi},$$

$$\rho=r^2<1,\ 0<\varphi=2\theta<2\pi \qquad （3 分）$$

故 $w=z^2$ 将上半单位圆域映射为 $|w|<1$ 且沿 0 到 1 的半径有割痕.

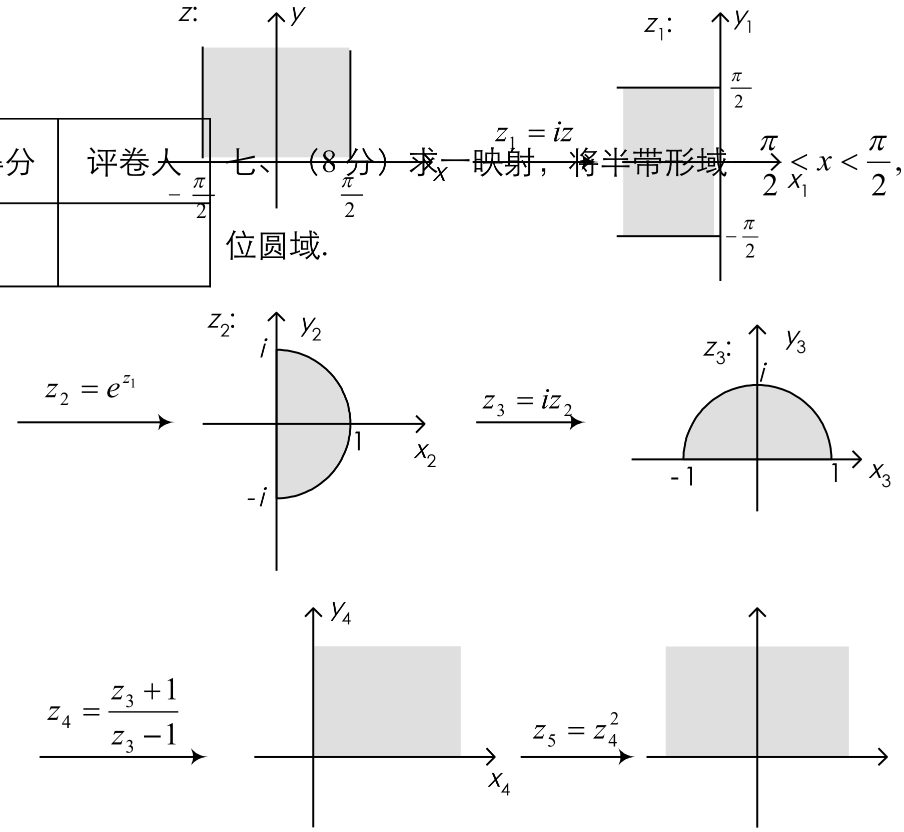


（3 分）

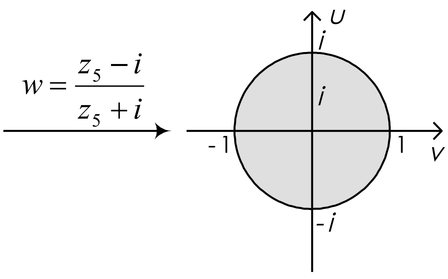
得分	评卷人

七、（8 分）求一映射，将半带形域 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ y>0$ 映射为单位圆域.

解：



（2 分）



故 $w=\dfrac{\left(\dfrac{z_3+1}{z_3-1}\right)^2-i}{\left(\dfrac{z_3+1}{z_3-1}\right)^2+i}=\dfrac{\left(\dfrac{ie^{iz}+1}{ie^{iz}-1}\right)^2-i}{\left(\dfrac{ie^{iz}+1}{ie^{iz}-1}\right)^2+i}$

（1 分）

（2 分）

（2 分）

（1 分）

得分	评卷人

八、（6分）设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在闭圆 $|z|\le 1$ 上连续，且 $f(0)=1$，证明：

$$\oint_{|z|=1}[2\pm(z+\frac{1}{z})]f(z)\frac{dz}{z}=(2\pm f'(0))2\pi i$$

证：由于 $\oint_{|z|=1}[2\pm(z+\frac{1}{z})]f(z)\frac{dz}{z}$

$$=\oint_{|z|=1}[\frac{2f(z)}{z}\pm\frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}]dz$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{2f(z)}{z}dz\pm\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}dz \qquad （2分）$$

$$=2\pi i\{2f(0)\pm[(z^2+1)f(z)]'\Big|_{z=0}\}=2\pi i(2\pm f'(0)) \qquad （4分）$$

得分	评卷人

九、（8分）用 Laplace 变换求解常微分方程：

$$\begin{cases} y'''-3y''+3y'-y=-1 \\ y''(0)=y'(0)=1,\ \ y(0)=2 \end{cases}$$

解：在方程两边取拉氏变换，并用初始条件得

$$S^3Y(S)-S^2y(0)-Sy'(0)-y''(0)-3(S^2Y(S)-Sy(0)-y'(0))$$

$$+3(SY(S)-y(0))-Y(S)=-\frac{1}{S} \qquad （4分）$$

$$(S^3-3S^2+3S-1)Y(S)=1-\frac{1}{S}+2(S^2-3S+3)+(S-3)$$

$$=\frac{1}{S}(2S^3-5S^2+4S-1)$$

$$=\frac{1}{S}(2S-1)(S-1)^2$$

即 $Y(S)=\dfrac{2S-1}{S(S-1)}=\dfrac{1}{S}+\dfrac{1}{S-1}$ （2分）

故 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(S)] = e^{t} + 1$　　（2 分）