2011—2012 年《复变与积分》试卷答案（A 卷）

一、填空

1. 1　$-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\pi$

2. $\frac{\pi}{4}i$　$\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}$

3. 是　否

4. 是（收敛）　否（发散）

5. $\sqrt{2}$

6. 3

7. $\frac{\pi}{2}$　$-\frac{1}{2}$

8. $\cos w_0 t$

二、计算题

1. $\oint_{|z|=2}\frac{z}{\cos z}dz$

解：$\frac{z}{\cos z}$ 在 $|z|=2$ 内有两个简单极点 $z_1=\frac{\pi}{2}$，$z_2=-\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{Re}s\left[\frac{z}{\cos z},\frac{\pi}{2}\right]=\left.\frac{z}{-\sin z}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}$$ （2′）

$$\operatorname{Re}s\left[\frac{z}{\cos z},-\frac{\pi}{2}\right]=\left.\frac{z}{-\sin z}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}$$ （2′）

故 $\oint_{|z|=2}\frac{z}{\cos z}dz=2\pi i\left\{\operatorname{Re}s\left[\frac{z}{\cos z},\frac{\pi}{2}\right]+\operatorname{Re}s\left[\frac{z}{\cos z},-\frac{\pi}{2}\right]\right\}$

$$=2\pi i(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=-2\pi^2 i \qquad (1')$$

2. $\oint_{|z|=3}\frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2}dz$

解：$\frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|=3$ 内有 2 个奇点，$z_1=0,\quad z_2=1$，

由于 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin \pi z}{\pi z}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{\pi}{(z-1)^2}=\pi$

故 $z_1=0$ 为 $\frac{\sin xz}{z(z-1)^2}$ 的可去奇点，$\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2},0\right]=0$

$z_2=1$ 是 $\sin \pi z$ 的 1 阶零点，是 $z(z-1)^2$ 的 2 阶零点，故 1 是 $\frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2}$ 简单极点。

$$\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2},1\right]=\lim\limits_{z\to 1}\frac{\sin \pi z}{z(z-1)}=\lim\frac{1}{z}\cdot\lim\limits_{z\to 1}\frac{\sin \pi z-0}{z-1}=(\sin \pi z)'\big|_{z=1}=\pi\cos \pi z\big|_{z=1}=-\pi$$

故 $\oint_{|z|=3}\frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2}dz=2\pi i\left\{\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2},0\right]+\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\sin \pi z}{z(z-1)^2},1\right]\right\}$

$$=-2\pi^2 i$$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+3\sin^2\theta}d\theta$

解：$\frac{1}{1+3\sin^2\theta}=\frac{1}{1+\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)}=\frac{2}{5-3\cos 2\theta}$ 令 $\alpha=2\theta$，则 $2d\theta=d\alpha$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+3\sin^2\theta} = \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{5-3\cos\alpha} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{5-3\cos\alpha}$$ （1′）

令 $z = e^{i\alpha}$，则 $\int_0^{\pi} \frac{dz}{5-3\cos\alpha} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5-3\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}} \cdot \frac{dz}{iz}$

$$= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{5z-\frac{3}{2}(z^2+1)} = \frac{1}{-i}\oint_{|z|=1} \frac{2dz}{3z^2-10z+3}$$ （1′）

$$= i\oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(3z-1)(z-3)} = i\cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{2}{(3z-1)(z-3)}, \frac{1}{3}\right]$$ （2′）

$$= -2\pi \lim_{z\to\frac{1}{3}} \frac{2}{3\cdot(z-\frac{1}{3})(z-3)} \cdot (z-\frac{1}{3}) = -2\pi \cdot \frac{2}{3\cdot\frac{-8}{3}} = \frac{\pi}{2}$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+3\sin^2\theta} = \frac{\pi}{4}$ （1′）

4. $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin bx}{x^2+a^2}dx (a>0, b>0)$

解：$\frac{x\sin bx}{x^2+a^2}$ 是 x 的偶函数，故 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin bx}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin bx}{x^2+a^2}dx$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2}dx$$ （2′）

$\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}$ 在上半平面只有 $z = ai$ 一个简单极点，

$$\operatorname{Res}\left[\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2}, ai\right] = \left.\frac{ze^{ibz}}{2z}\right|_{z=ai} = \frac{e^{-ab}}{2}$$ （2′）

故$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ibx}}{x^2+a^2}dx = 2\pi i\operatorname{Re}s\left[\frac{ze^{ibz}}{z^2+a^2},ai\right] = 2\pi i\cdot\frac{e^{-ab}}{2} = \pi e^{-ab}2$

$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin bx}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\pi e^{-ab}$ （1′）

三、∵ $v_x = 4y-2x \quad v_{xx} - -2 \quad v_y = 4x+2y \quad v_{yy} = 2$

故由$v_{xx}+v_{yy}=0$ 知$v(x,y)$是调和函数。 （1′）

由于$u+iu$是解析函数，由$C-R$方程知：$u_x = v_y = 4x+2y$

$u_y = -v_x = 2x-4y$ （2′）

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)}(4x+2y)dx+(2x-4y)dy+c\\ &= \int_{(0,0)}^{(x,0)}(4x+2y)dx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(2x-4y)dx+c\\ &= 2x^2+2xy-2y^2+c\end{aligned}$$ （4′）

由$f(1)=2-i$知$2\times1+c=2\Rightarrow c=0$

故$f(z)=2x^2+2xy-2y^2+i(4xy+y^2-x^2)=(2-i)z^2$ （1′）

四、解：$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)(z-3)}$在$z=0,1,3$处不解析，以$z_0=0$为圆心的圆环域分别为：

（1）$0<|z|<1$ （2）$1<|z|<3$ （3）$3<|z|<+\infty$ （1′）

1）在$0<|z|<1$内

（ ）
$$f(z)=\frac{-1}{2z^2}(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-3})=\frac{1}{2z^2}(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{3-z})=\frac{1}{2z^2}(\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{3^{n+1}})z^{n-2}$$

2）在$1<|z|<3$内

（ ）
$$f(z)=\frac{-1}{2z^2}(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3-z})=\frac{-1}{2z^2}(\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{z}{3}})=\frac{-1}{2z^2}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n})$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\times z^{n+3}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{2\times 3^{n+1}}$$

3）在$3<|z|<+\infty$内

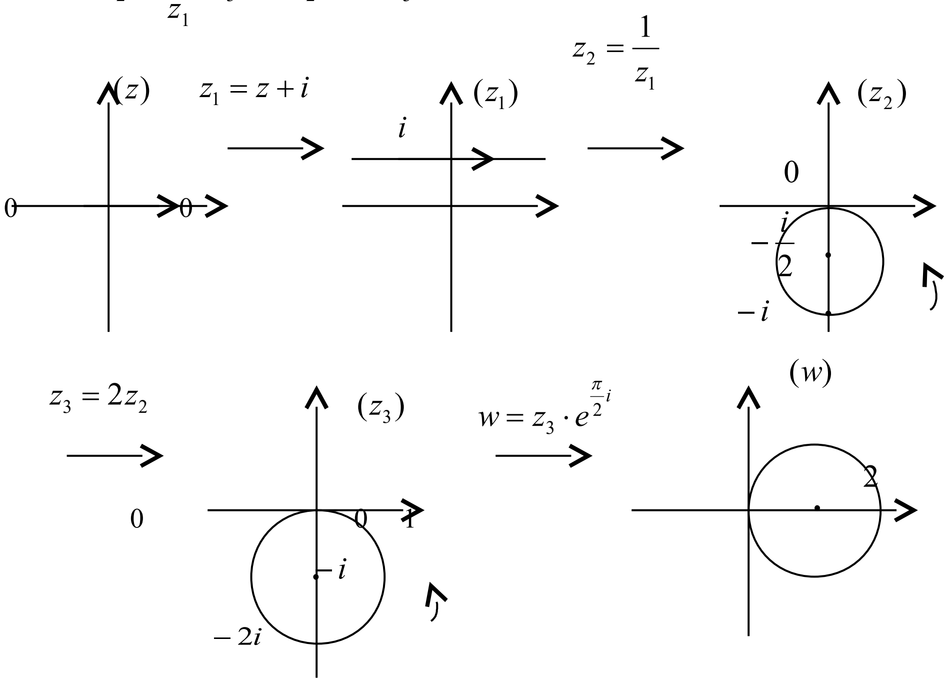
（ ）
$$f(z)=\frac{-1}{2z^2}(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-3})=\frac{-1}{2z^2}(\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{3}{z}})=\frac{-1}{2z^2}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}})$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\times z^{n+3}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2\times z^{n+3}}$$

五、解：法一，在实轴上取三点 $z_1=0,z_2=-1,z_3=\infty$，则对应的三个象点为 $w_1=2,w_2=1+i,w_3=0$，由此得到象曲线为$|w-1|=1$，进一步，由边界对应原理可知上半平面被映到圆内部。

解法二，采用分解方式并结合几何特性求解

由 $w=2(\frac{1}{z+i})e^{\frac{\pi}{2}i}$ 可得，所给映射是由下列映射

$z_1 = z + i, z_2 = \dfrac{1}{z_1}, z_3 = 2z_2, w = z_3 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$ 相继实施的结果。

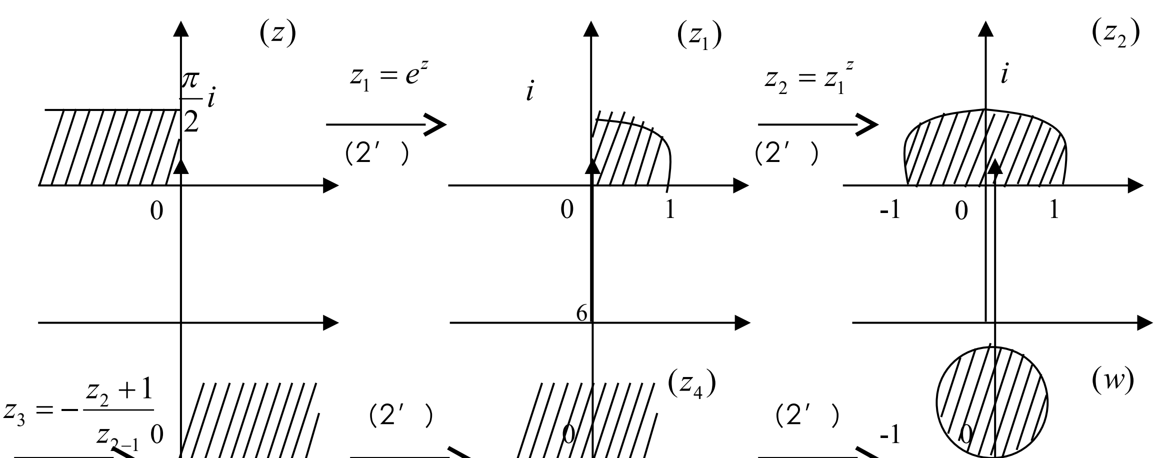


解法三：
$$w = \frac{2i}{z+i} \Rightarrow z = \frac{2i - iw}{w} \Rightarrow x + iy = \frac{2i - i(u+iv)}{u+iv}$$
$$\Rightarrow x + iy = \frac{uv + v(2-u) + i[u(2-u) = v^2]}{u^2 + v^2}$$

由 $y = 0$ 得 $u(2-u) - v^2 = 0$，即 $(u-1)^2 + v^2 = 1$

即 $w = \dfrac{2i}{z+i}$ 把实轴映为 $|w-1| = 1$，进一步把上半平面映到圆内。

六、解：



(z_3)

$z_4 = z_3{}^{z}$ $\qquad\qquad$ $w = \dfrac{z_4 - i}{z_4 + i}$

（2′）

1

七、解：令 $L[X(\mathrm{t})] = x(s)$，$L[\mathrm{y}(t)] = Y(s)$，对方程组求拉氏变换得：

$$\begin{cases} SX(s) - 1 + X(\mathrm{s}) - Y(\mathrm{s}) = -\dfrac{1}{s-2} & \text{（3′）} \\ SY(\mathrm{s}) + 3X(\mathrm{s}) - 2Y(s) - 1 = \dfrac{3}{s+1} & \text{（3′）} \end{cases}$$

联立求解得：$\begin{cases} X(S) = \dfrac{1}{\mathrm{s}+1} \\ Y(S) = \dfrac{1}{s-2} \end{cases}$ 故 $\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = e^{2t} \end{cases}$ （1′）（1′）

八、证明：$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R} \dfrac{f^2(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \dfrac{df^2(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=z} = 2f(z)f'(z)$ （3′）

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R} \frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2 - \xi\bar{\mathrm{z}}} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - \dfrac{R^2}{\mathrm{z}}} d\xi$$

由于 $|z| < R$，故 $\left|\dfrac{R^2}{\bar{z}}\right| > R$，故 $\dfrac{f(\xi)}{\xi - \dfrac{R^2}{\bar{z}}}$ 在 $|\xi| \le R$ 上解析，

由 Cauchy 积分定理知：$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R}\frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2-\xi\bar{z}}d\xi=0$　　　　　　　　　　　　（3′）

故 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R}(\frac{f^2(\xi)}{(\xi-z)^2}-\frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2-\xi\bar{z}})d\xi=2f(z)f'(z)$ 得证。