2006—2007 学年第一学期

《复变函数与积分变换》课程考试试卷（A）

（闭卷）

院（系）____________专业班级___________学号___________姓名___________

_

考试日期：2006 年 11 月 25 日　　　　　　考试时间：19：00～21：30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得 分	
评卷人	

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1．$(1+i)^{2i}$ 的值为____________________，主值为_______________.

2．$\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$；且 $1<|z|<3$ 所表示的平面点集是区域吗？___________是单连域还是多连域？ ______________.

3．$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^{z}\cdot z^{3}\sin z}{(z-2)^{4}}dz=$________.

4．在映射 $w=iz$ 下，集合 $D=\{z:|1\le|z|\le 2,\,0\le\arg z\le\pi\}$ 的像集为：

____.

5 . _阶极点.

$z = k\pi +$ 6．$\dfrac{1}{z(4-3z)}$ 在 $z_0 = 1+i$ 处展开成 Taylor 级数的收敛半径为_______

为 7．$f(t) = \sin t + \delta(t)$ 的频谱密度函数 $F(\omega) =$____________________.

$\tan z$

8．已知 $f_1(t) = e^{-t}u(t), f_2(t) = u(t)$，其中 $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$，则 $f_1(t) * f_2(t) =$_

的 ___

__________.

得 分	
评卷人	

二、（6 分）设 a、b 是实数，函数 $f(z) = axy + (bx^2 + y^2)i$ 在复平面解析. 求出 a、b 的值，并求 $f'(z)$.

得 分	
评卷人	

三、（8 分）验证 $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$ 是调和函数，并求以 $u(x, y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使 $f(i) = -1 + 2i$.

得 分	
评卷人	

四、（6×4=24 分）计算下列各题：

1．$\oint_C \frac{e^z \sin z}{z^2} dz$，$C$ 为正向圆周 $|z-i|=2$.

2．$\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz$，$C$ 为正向圆周 $|z|=\frac{1}{2}$.

3. $\int_0^{\pi} \frac{2\cos\theta + 1}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+1)} dx$

得 分	
评卷人	

五、（10 分）将 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)}$ 在 $z_0=0$ 与 $z_1=i$ 处展成 Laurent 级数.

得 分	
评卷人	

六、（6 分）试求 z 平面的下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$ 在分式线性映射 $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ 下的象区域.

得 分	
评卷人	

七、（8 分）求一保形映射，把区域 $\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$ 映成单位圆内部 $|w| < 1$.

得 分	
评卷人	

八、（8 分）用 Laplace 变换求解常微分方程：

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

得 分	
评卷人	

九、（6 分）证明题：设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在 $|z|\le 1$ 上连续

试证：当 $|z|<1$ 时，$(1-|z|^2)f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1} f(\xi)\cdot\dfrac{(1-\bar{z}\xi)}{\xi-z}d\xi$

复变函数与积分变换试题解答　　2006.11.

系别___________班级__________学号__________姓名___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得分	评卷人

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1．$(1+i)^{2i}$ 的值为 $e^{-(\frac{\pi}{2}+4k\pi)+i\ln 2}$，主值为 $e^{-\frac{\pi}{2}+i\ln 2}$.

2．$\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{3}$；且 $1<|z|<3$ 所表示的平面点集是区域吗？ 是，单连域还是多连域？ 单连域 。

3．$\oint_{|C|=1}\frac{e^z\cdot z^3\sin z}{(z-2)^4}dz=$ 0 。

4．在映射 $w=iz$ 下，集合 $D=\{z\,|\,1\le|z|\le 2,\ 0\le\arg z\le\pi\}$ 的像集为：

$$w=\{w\,|\,1\le|w|\le 2,\ \frac{\pi}{2}\le\arg w\le\frac{3}{2}\pi\}\ .$$

5．$z=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 为 $\tan z$ 的 1 阶极点。

6．$\frac{1}{z(4-3z)}$ 在 $z_0=1+i$ 处展开成 Taylor 级数的收敛半径为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

7．$f(t)=\sin t+\delta(t)$ 的频谱密度函数 $F(\omega)=j\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]+1$ 。

8．已知 $f_1(t)=e^{-t}u(t), f_2(t)=u(t)$，其中 $u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$，则 $f_1(t)*f_2(t)=(1-e^{-t})$

$u(t)$。

得分	评卷人

二、（6 分）设 a、b 是实数，函数 $f(z)=axy+(bx^2+y^2)i$ 在复平面解析，则分别求 a、b 之值，并求 $f'(z)$.

解：∵ $f(z)$ 是复平面上的解析函数，则 $u(x,y)=axy, v(x,y)=bx^2+y^2$ 在平面上满

足 C—R 方程，即：

$$u_x=v_y,\ u_y=-v_x$$

故 $ay=2y \quad ax=-2bx$ 对 $\forall x,y$ 成立，

$$\Rightarrow a=2, b=-1,\ f(z)=2xy+(y^2-x^2)i$$

$$f'(z)=u_x+iv_x=2y+i(-2x)=zi(x+iy)=-2iz$$

得分	评卷人

三、（8 分）验证 $u(x,y)=x^2-y^2+2xy$ 是 z 平面上的调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数，使 $f(i)=-1+2i$.

解：（1）$u_{xx}=2,\ u_{yy}=-2 \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$ 故 $u(x,y)$ 是调和函数。

（2）利用 C—R 条件，先求出 $v(x,y)$ 的两个偏导数。

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2x+2y \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y$$

则 $v(x, y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-2x)dx+(2x+2y)dy+C$

$$=\int_0^x(-2x)dx+\int_0^y(2x+2y)dy+C$$

$$=-x^2+2xy+y^2+C$$

$$f(z)=(x^2-y^2+2xy)+i(-x^2+2xy+y^2+C)$$

$$=(x+iy)^2-i(x+iy)^2+iC$$

$$=(1-i)z^2+iC$$

由 $f(i)=-1+2i \Rightarrow i-1+iC=-1+2i \Rightarrow C=1$

故 $f(z)=(1-i)z^2+i$

得分	评卷人

四、（6×4=24 分）计算下列各题：

1．$\oint_C \frac{e^z \sin z}{z^2}dz$，设 C 为正向圆周 $|z-i|=2$ 。

解：令 $f(z)=e^z\sin z$，则由高阶求导公式得：

原式 $=2\pi i\cdot f'(0)=2\pi i(e^z\sin z+e^z\cos z)|_{z=0}=2\pi i$

2．$\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$，$C$ 为正向圆周 $|z|=\frac{1}{2}$ 。

解: 在 C 内，$\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 有本性奇点 $z=0$，由留数定理：原式 $=2\pi i\{\operatorname{Re}s[\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z},0]\}$

在 $0<|z|<\dfrac{1}{2}$ 内将 $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 展为 Laurent 级数:

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots)$$

$$=\cdots\frac{1}{z}(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots)+\cdots$$

故: $\operatorname{Re}s[\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z},0]=1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots=e-1$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz=2\pi i=2\pi i(e-1)$$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{2\cos\theta+1}{5+4\cos\theta}d\theta$

解: 由于 $\dfrac{2\cos\theta+1}{5+4\cos\theta}$ 是偶函数，故 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{2\cos\theta+1}{5+4\cos\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{0}\frac{2\cos\theta+1}{5+4\cos\theta}d\theta$

原式 $=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos\theta+1}{5+4\cos\theta}d\theta$ 令 $e^{i\theta}=z,\ -\pi<\theta\le\pi$

则定积分可化为复积分

$$\oint_{|z|=1}\frac{z+z^{-1}+1}{5+2(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz}\qquad(\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2})$$

$$=-i\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z+1}{z(2z+1)(z+2)}dz$$

令 $f(z)=\dfrac{(z^2+z+1)/2}{z(z+\frac{1}{2})(z+2)}$ 则 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 内有 2 个简单极点 $z=0$ 与 $z=-\dfrac{1}{2}$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{(z^2+z+1)/2}{(z+\frac{1}{2})(z+2)}=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-\frac{1}{2}]=\lim_{z\to -\frac{1}{2}}\frac{(z^2+z+1)/2}{z(z+2)}=-\frac{1}{2}$$

由留数定理知：$-i\oint_{|z|=1}f(z)dz=-i\cdot 2\pi i\cdot[\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}]=0$

故原式$=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0$

4．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$

解：令 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}$ 　容易验证 $f(z)$ 满足若尔当引理

$f(z)$ 在上半平面有两个简单极点 $z_1=i$，$z_2=2i$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x^2+1)}dx=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),i]+\operatorname{Res}[f(z),2i]\}$$

$$=2\pi i[\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z+i)}\right|_{z=i}+\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)}\right|_{z=2i}]$$

$$=2\pi i(\frac{e^{-1}}{6i}+\frac{e^{-2}}{-12i})=\frac{\pi}{3}e^{-1}-\frac{\pi}{6}e^{-2}$$

原式$=\operatorname{Re}[\dfrac{\pi}{3}e^{-1}-\dfrac{\pi}{6}e^{-2}]=\dfrac{\pi}{3}e^{-1}-\dfrac{\pi}{6}e^{-2}$

得分	评卷人

五、（10 分）将 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)}$ 在 $z_0=0$ 与 $z_1=i$ 处展成 Laurent 级数。

解：$f(z)$ 在复平面有孤立奇异点 $z_0=0$ 与 $z_1=i$，

（1）$0<|z|<1$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{-1/i}{1-\frac{z}{i}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{i}{1-\frac{z}{i}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^{n-1}$$

（2）$1<|z|<+\infty$ 时

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{i}{z}}=\frac{1}{z^{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{z}}=\frac{1}{z^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i}{z})^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}}{z^{n+2}}$$

（3）$0<|z-i|<1$ 时

$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{i+z-i}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{-i}{1+\frac{z-i}{i}}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{-i}{1-i(z-i)}$$

$$=\frac{-i}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z-i)^{n}\cdot i^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-i)^{n-1}\cdot i^{n-1}$$

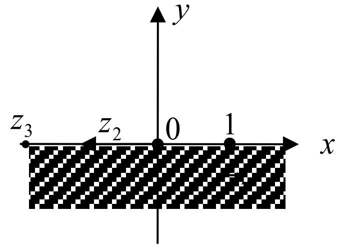
（4）$1<|z-i|<+\infty$ 时

$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}}=\frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-i}{z-i})^{n}$$

得分	评卷人

六、（6 分）试求 z 平面的下半平面 $\operatorname{Im} z<0$ 在分式线性映射 $w=\frac{z-i}{z=i}$ 下的象区域.

解：在实轴上依次取 $z=1, z=0, z=\infty$ ，



$$z_1=1 \to w_1=-i$$

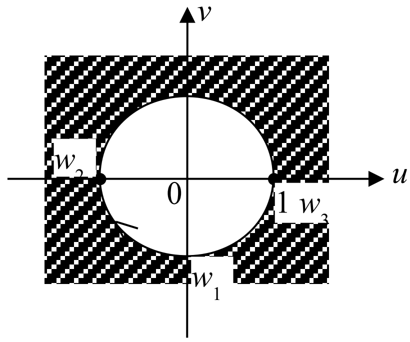
$$z_2=0 \to w_2=-1$$

$$z_3=\infty \to w_3=1$$

由分式线性映射的保圆性知：

w_1, w_2, w_3 决定了 $|w|=1$

故 实轴在 $w=\frac{z-i}{z+i}$ 下的象区线为单位圆周，再由边界对应原理知： $\operatorname{Im} z<0$ 在 $w=\frac{z-i}{z+i}$ 下的象区域为 $|w|>1$ 。

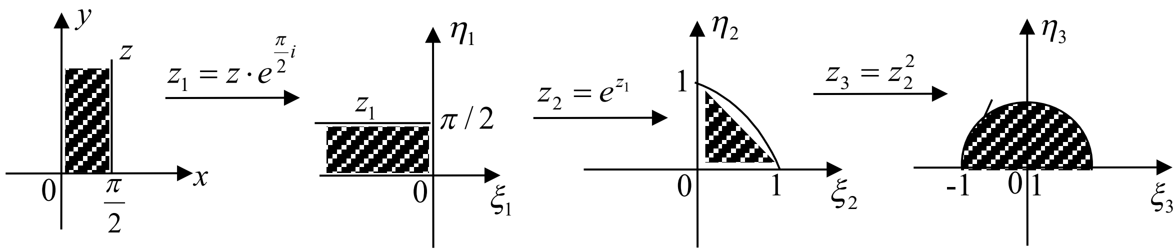


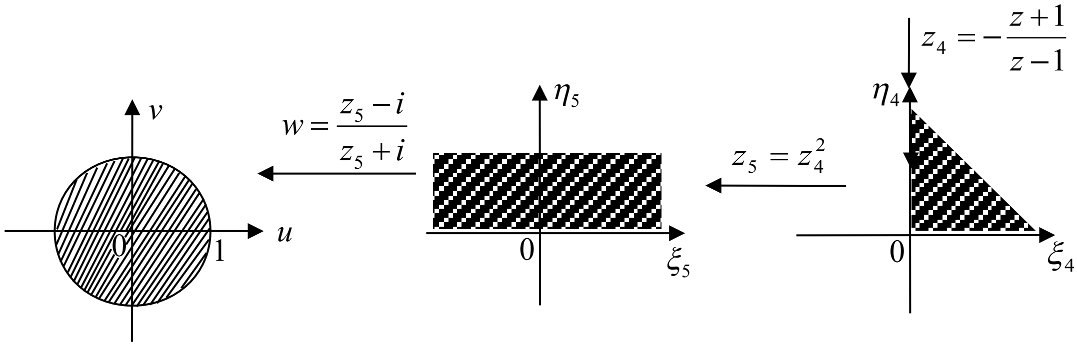
得分	评卷人

七、（8 分）求一保形映射，把区域 $\begin{cases} 0<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Im} z>0 \end{cases}$ 映成单位圆内部 $|w|<1$ 。

解： $z_1=z \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$， $z_2=e^{z_1}$， $z_3=z_2^2$， $z_4=-\frac{z_3+1}{z_3-1}$， $z_5=z_4^2$

$$w=\frac{z_5-i}{z_5+i}=\frac{(\frac{z_3+1}{z_3-1})^2-i}{(\frac{z_3+1}{z_3-1})^2+i}=\frac{(e^{2iz}+1)^2-i(e^{2iz}-1)^2}{(e^{2iz}+1)^2+i(e^{2iz}-1)^2}$$





得分	评卷人

八、（8 分）用 Laplace 变换求解常微分方程：

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

解：令 L $(y(t)) = Y(s)$，对方程两边求拉氏变换得：

$$S^2Y(S) - 1 + (-3SY(S)) + 2Y(S) = \frac{1}{S-2}$$

$$(S^2 - 3S + 2)Y(S) = \frac{1}{S-2} + 1$$

$$Y(S)=\frac{1}{(S-1)(S-2)^2}+\frac{1}{(S-1)(S-2)}=\frac{1}{(S-2)^2}$$

$\therefore y(t)=te^{2t}$

得分	评卷人

九、（6 分）证明题：设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在 $|z|\le 1$ 上连续，

试证：当 $|z|<1$ 时，$(1-|z|^2)f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1} f(\xi)\cdot\dfrac{(1-\bar{z}\xi)}{\xi-z}d\xi$

证：令 $F(\xi)=f(\xi)\cdot(1-\bar{z}\xi)$

因为 $f(\xi)$ 在 $|\xi|<1$ 内解析，在 $|\xi|$□1 上连续，所以 $F(\xi)$ 也在 $|\xi|<1$ 内解析，在 $|\xi|$□1 上连续。根据 Cauchy 积分公式有：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1} f(\xi)\cdot\frac{(1-\bar{z}\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{F(\xi)}{\xi-z}d\xi=F(z)=f(z)\cdot(1-|z|^2)$$