考试安排

一、考试时间：

考试地点：

二、答疑时间：

答疑地点：

主要内容

- 复数的几种表示及运算；区域，曲线；初等复变函数。
- Cauchy – Riemann 方程：（1）判断可导与解析，求导数；

  （2）构造解析函数。
- Cauchy 积分公式， Cauchy 积分定理，高阶导数公式。
- Laurent 展式。
- 留数：（1）计算闭路积分；（2）计算定积分。
- 保形映射：（1）求象区域；（2）构造保形映射。
- Fourier 变换的概念，δ 函数□□□□
- 利用 Laplace 变换求解常微分方程（组）。

一、构造解析函数

问题 已知实部 u，求虚部 v（或者已知虚部 v，求实部 u）使 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 解析，且满足指定的条件。

注意 必须首先检验 u 或 v 是否为调和函数。

方法
- 偏积分法
- 全微分法（略）

一、构造解析函数

方法 ● 偏积分法(仅考虑已知实部 u 的情形)

(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的两个偏导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & (A) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}. & (B) \end{cases}$$

(2) 将 (A) 式的两边对变量 y 进行(偏)积分得：

$$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y = \tilde{v}(x,y) + \varphi(x), \quad (C)$$

其中，$\tilde{v}(x,y)$ 已知，而 $\varphi(x)$ 待定

(3) 将 (C) 式代入 (B) 式，求解即可得到 $\varphi(x)$. 函数

二、将函数展开为洛朗级数

1. 直接展开法 （略）

2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。

- 两个重要的已知展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3\cdots,\qquad |z|<1.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,\qquad |z|<+\infty.$$

二、将函数展开为洛朗级数

注意 无论是直接展开法还是间接展开法，在求展开式之前，都需要根据函数的奇点位置，将复平面（或者题目指定的展开区域）分为若干个解析环。

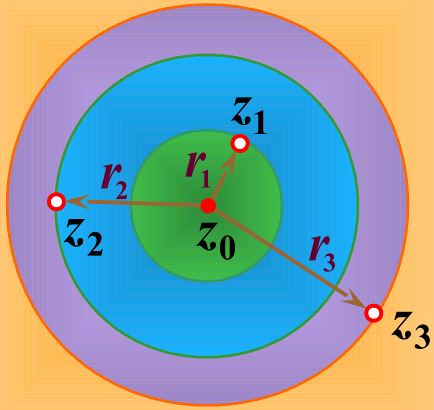
比如 设函数的奇点为z_1, z_2, z_3，展开点为z_0，则复平面被分为四个解析环：

$$0 \le |z - z_0| < r_1;$$

$$r_1 < |z - z_0| < r_2;$$

$$r_2 < |z - z_0| < r_3;$$

$$r_3 < |z - z_0| < +\infty.$$



三、利用留数计算闭路积分

1. 计算留数

法则 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

特别，若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$Q(z_0)=0,\ Q'(z_0)\neq 0,\ P(z_0)\neq 0,$

则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$

法则 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]=0.$

- 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则在 z_0 的邻域内展开为洛朗级数。

三、利用留数计算闭路积分

2. 计算闭路积分

定理 设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，在边界 C 上连续， 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

注意 只需计算积分曲线 C 所围成的有限区域内奇点的留数。

三、利用留数计算闭路积分

2. 计算闭路积分

定理 设 $f(z)$ 在扩充平面上除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$ 外处处解析，则

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Res}[f(z), z_k] + \text{Res}[f(z), \infty] = 0.$$

其中，$\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}[f(\frac{1}{z}) \cdot \frac{1}{z^2}, 0].$

四、计算定积分

1. $I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$

要求 $R(u,v)$ 是 u,v 的有理函数。

方法 (1) 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$， 则 $\mathrm{d}z=i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=iz\,\mathrm{d}\theta$

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},\quad \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz},$$

(2) $$I=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

其中，z_k 是 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的孤立奇点。

四、计算定积分

2. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

要求 (1) $P(x)$，$Q(x)$ 为多项式，

(2) □□ $Q(x)$ □□□□□□ $P(x)$ □□□□□高二次，

(3) □□ $Q(x)$ 无实零点。

方法 设 $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，

则 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{k}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$.

其中，z_k 是$R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

四、计算定积分

3. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{iax}\mathrm{d}x \quad (a>0)$

要求 (1) $P(x)$，$Q(x)$ 为多项式，

(2) □□ $Q(x)$ □□□□□□ $P(x)$ □□□□□高一次，

(3) □□ $Q(x)$ 无实零点。

方法 设 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，

$$\text{则 } I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{iax}\mathrm{d}x=2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z)\,\mathrm{e}^{iaz},z_k].$$

其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

四、计算定积分

3. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{iax}\mathrm{d}x\quad(a>0)$

要求 (1) $P(x)$，$Q(x)$ 为多项式，

(2) □□ $Q(x)$ □□□□□□ $P(x)$ □□□□□高一次，

(3) □□ $Q(x)$ 无实零点。

特别 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax\,\mathrm{d}x=\mathrm{Re}(I);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}(I).$$

五、构造保形映射

步骤 (1) <u>预处理</u>

（一般）

目标：使边界至多由两段圆弧（或直线段）构成。

工具：几种简单的分式映射、幂函数等。

(2) <u>将区域映射为角形域或者带形域</u>

方法：将边界的一个交点 z_1 映射为 ∞；

[另一个（交）点 映射为 0 。

工具：$w = k\dfrac{z - z_2}{z - z_1}$.

五、构造保形映射

步骤 (3) 将角形域或者带形域映射为上半平面

(一般)

工具：$w = z^n$， $w = \sqrt[n]{z}$.　(对于角形域)

$w = e^z$.　(对于带形域)

(4) 将上半平面映射为单位圆

工具：$w = \dfrac{z-i}{z+i}$.　(无附加条件)

$w = e^{i\theta_0}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$.　(由附加条件确定 θ_0，z_0)

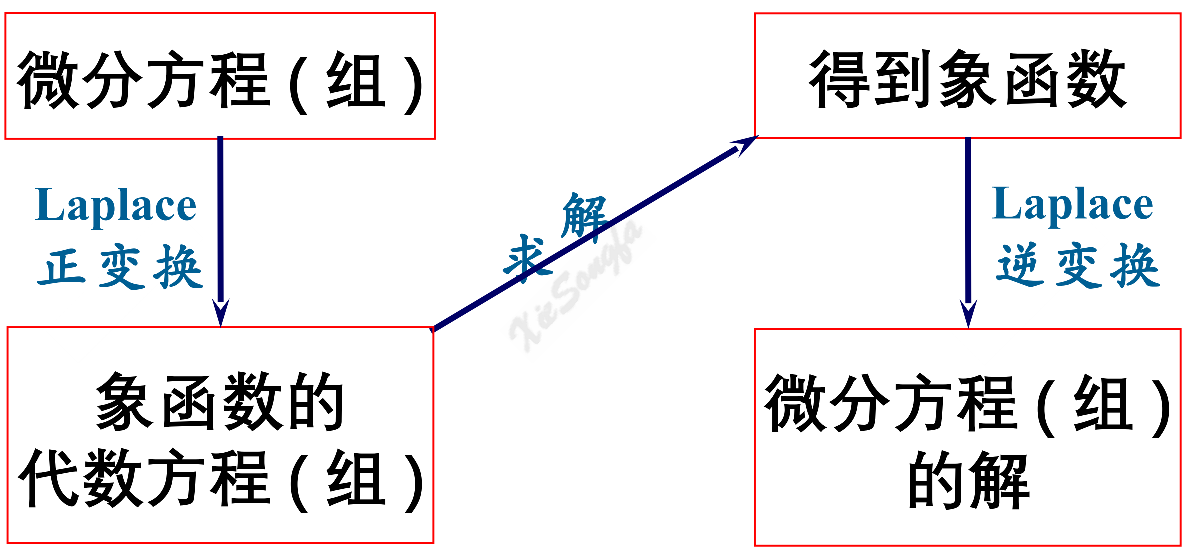
六、求解常微分方程（组）

工具 $\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).}$

步骤 (1) 将微分方程（组）化为象函数的代数方程（组）；

(2) 求解代数方程得到象函数；

(3) 求 Laplace 逆变换得到微分方程（组）的解。



六、求解常微分方程（组）

几个常用函数的 Laplace 变换

$$\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s}.$$

$$\mathscr{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

$$\mathscr{L}[\cos bt]=\frac{s}{s^2+b^2}.$$

$$\mathscr{L}[\sin bt]=\frac{b}{s^2+b^2}.$$

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=1.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{s-a}.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}t^m]=\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}\cos bt]=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}\sin bt]=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}.$$

七、其它

- 已知复数的实部与虚部，求模与（主）辐角。

- 求复数的方根 $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$，$(k = 0,1,\cdots,n-1)$.

- 对数函数 $w = \ln z = \ln|z| + i\arg z$.

  $w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$，$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

- 幂函数 $w = z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Ln}\, z}$.

- 求导公式 $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

七、其它

- **柯西积分定理** 函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在边界 C 上连续，则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$.

- **柯西积分公式** 函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在边界 C 上连续，则 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$，$(z \in D)$.

- **高阶导数公式** 函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在边界 C 上连续，则 $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$，$(z \in D)$.

七、其它

- 幂级数的收敛半径

(1) 比值法 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lambda$，则收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

(2) 根值法 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\rho$，则收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

(3) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点展开为泰勒级数，其收敛半径等于从 z_0 点到 $f(z)$ 的最近一个奇点 $\tilde{z}$ 的距离。

- 求保形映射下的象区域

(1) 分式映射、幂函数以及指数函数的映射特点

(2) 保形映射的分解与复合。

七、其它

单位冲激函数

(1) 筛选性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0).$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t_0).$$

(2) 对称性质 $\delta(t)=\delta(-t).$

(3) 重要公式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega=2\pi\delta(t).$

卷积与卷积定理

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega);$$

轻松一下吧……