练 习 四

1．由下列条件求解析函数 $f(z)=u+iv$：

（1）$u=2(x-1)y, f(2)=-i$

解：由 $f(z)$ 解析可知：$u_x=v_y \quad u_y=-v_x$ 而 $u_x=2y \quad u_y=2(x-1)$

则 $v_x=-u_y=-2(x-1), v_y=u_x=2y$

所以 $v(x,y)=\int v_y dy=\int 2y dy=y^2+\varphi(x)$

$$-2(x-1)=v_x=\varphi'(x) \quad \therefore \varphi(x)=\int -2(x-1)dx=-(x-1)^2+c$$

由 $f(2)=-i$ 可知 $c=0$

$\therefore f(z)=2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x-1)$

（2）$v=arctg\dfrac{y}{x}, x>0.$

解：因 $v_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2} \quad v_y=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 由 $f(z)$ 解析

可知：$u_x=v_y=\dfrac{x}{x^2+y^2} \quad u_y=-v_x=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$u(x,y)=\int u_x dx=\int \frac{x}{x^2+y^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(y)$$

$$u_y=\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=\frac{y}{x^2+y^2} \quad \therefore u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c$$

即 $f(z)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c+iarctg\dfrac{y}{x}$

2．设 $v=e^{px}\sin y$，求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$。

解：要使 $v(x,y)$ 为调和函数，有：$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0$，即：$p^2e^{px}\sin y-e^{px}\sin y=0$

$\therefore p=\pm1$ 时，v 为调和函数，要使 $f(z)$ 解析，则 $u_x=v_y,u_y=-v_x$

$$u(x,y)=\int u_x dx=\int v_y dy=\int e^{px}\cos y dx=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+\varphi(y)$$

$$u_y=\frac{1}{p}e^{px}\sin y+\varphi'(y)=-pe^{px}\sin y$$

$$\therefore \varphi'(y)=(\frac{1}{p}-p)e^{px}\sin y \qquad \therefore \varphi(y)=(p-\frac{1}{p})e^{px}\cos y+c$$

即：$u(x,y)=pe^{px}\cos y+c \quad \therefore f(z)=\begin{cases}e^{x}(\cos y+i\sin y)+c=e^{z}+c & p=1\\ e^{-x}(\cos y+i\sin y)+c=-e^{-z}+c & p=-1\end{cases}$

3．如果 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，试证 $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

证：因 $f(z)$ 解析，有：$\Delta u=0,\Delta v=0,u_x=v_y,u_y=-v_x$

所以，u,v 均为调和函数，且 $-u$ 亦为调和函数

$$\begin{cases}v_x=-u_y=\dfrac{\partial(-u)}{\partial y}\\ v_y=u_x=\dfrac{\partial(-u)}{\partial x}\end{cases}$$

故 $-u$ 是 v 的共轭调和函数

4．如果 $f(z)=u+iv$ 是一解函数，试证：$\overline{i\overline{f(z)}}$ 也是解析函数。

证：因 $f(z)$ 解析，则 $u_x=v_y,u_y=-v_x$ 且 u,v 均可微，从而 $-u$ 也可微。

而 $\overline{i\overline{f(z)}}=v-iu=v+i(-u)$

可知：$v_x=-u_y=\dfrac{\partial(-u)}{\partial y}$

$$v_y = -u_x = \frac{\partial(-u)}{\partial x}$$

即满足$C-R$条件 $\therefore \overline{if(z)}$也是解析函数。

5．试解方程：

（1） $e^z = 1+\sqrt{3}i$

解：$e^z = 1+\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)} = e^{\ln 2+i(2k\pi+\frac{\pi}{3})} \quad k \in z$

$\therefore z = \ln 2 + i(2k\pi+\frac{\pi}{3}) \quad k \in z$

（2） $\sin z + \cos z = 0$

解：由题设可知：$e^{i2z} = -i$

$\therefore z = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in z$

6．求下列各式的值：

（1） $Ln(-3+4i)$

解：$Ln(-3+4i)$

$= \ln 5 + i\arg(-3+4i)$

$= \ln 5 + i(2k\pi+\pi-aratg\frac{4}{3})$

（2） 3^{3-i}

解：$Ln3^{3-i}$

$= 3^3 \cdot 3^{-i}$

$= 27\cdot e^{-iLn3} = 27\cdot e^{-i(\ln 3+i2k\pi)} = 27e^{-i\ln 3+2k\pi}$

$= 27e^{2k\pi}[\cos(\ln 3) - i\sin(\ln 3)]$

（3） e^{2+i}

解：$e^{2+i} = e^2\cdot e^{i\cdot 1}$

$= e^2(\cos 1 + i\sin 1)$

*7.思考题

（1）为什么复变指数函数是周期函数，而实变指数函数没有周期?

答：由于实数是复数的特例，因此在把实变函数中的一些初等函数推广到复变数情形时，要使定义的各种复变初等函数当 z 取实数 x 时与相应的实变初等函数有相同的值并保持某些性质不变，但不能保持所有的性质不变。

复变指数函数并不能保持实变指数函数的所有性质。如对复数 z ，一般没有 $e^z > 0$。而复变指数函数的周期性，仅当周期是复数（ $2k\pi i$ ）时才显现出来。所谓实变指数函数 e^x 没有周期，是指其没有实的周期。

（2）实变三角函数与复变三角函数在性质上有哪些异同?

答：两者在函数的奇偶性、周期性、可导性上是类似的，而且导数的形式、加法定理、正余弦函数的平方和等公式也有相同的形式。

最大的区别是，实变三角函数中，正弦函数与余弦函数都是有界函数，但在复变三角函数中，$|\sin z| \le 1$ 与 $|\cos z| \le 1$ 不再成立。因为

$$
\begin{aligned}
|\sin z| &= \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{iz} - e^{-iz}\right| \\
&\ge \frac{1}{2}\left|\,\left|e^{iz}\right| - \left|e^{-iz}\right|\,\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|e^{-y} - e^{y}\right|
\end{aligned}
$$

当 $y \to +\infty$ 时，$e^{-y} \to 0, e^{y} \to +\infty$ 。故 $|\sin z| \to +\infty.$

（3）怎样理解实变对数函数与复变对数函数的异同？并理解复变对数函数的运算性质。

答：因为我们把对数函数定义为指数函数的反函数。所以由复变指数函数的多值性推出复变对数函数也是多值函数，$Lnz = \ln|z| + iArgz.$

Lnz 的主值即 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$，是单值函数，当 $z = x$，而 $x > 0$ 时，$\ln z$ 就与高等数学中的 $\ln x$ 值一致了。

在复变对数函数的运算性质中，注意到等式

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \text{与} \ln(z_1 / z_2) = \ln z_1 - \ln z_2,$$

要对其含义理解清楚。在实变对数函数中它们的意义是明了的，但在复变指数函数中，例如，

$$Ln(z_1z_2)=Ln|z_1z_2|+iArg(z_1z_2).$$

$$\ln z_1=\ln|z_1|+iArgz_1,\ \ln z_2=\ln|z_2|+iArgz_2,$$

而 $\ln z_1z_2=\ln|z_1|+\ln|z_2|$，

$$Arg(z_1z_2)=Argz_1+Argz_2$$

应理解为：任意给定等式两端两个多值函数一对可能取的值，左端多值函数也必有一个值使等式成立。反过来也一样。也就是理解为等式两端可能取的函数值从全体上讲是相同的（即不能只考虑某一单值支）。后一式也同样理解，但对等式

$$nLnz=Ln(z^n)\text{和}Ln\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}Lnz,$$

它两端所能取的值从全体上看还是不一致的。如对 $nLnz=Lnz^n$，取 $n=2$ 时，设 $z=re^{i\vartheta}$，得 $2Lnz=2\ln r+i(2\theta+4k\pi).k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

而从 $z^2=r^2e^{i2\theta}$，得

$$Ln(z^2)=\ln r^2+i(2\theta+2m\pi),m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

两者的实部是相同的，但虚部的可取值不完全相同。

（4）调和函数与解析函数有什么关系?

答：如果 $f(z)=u+iv$ 是区域 D 内的解析函数，则它的实部 u 和虚部 v 的二阶偏导数必连续，从而满足拉普拉斯方程，所以是调和函数。

由于解析函数的导函数仍是解析函数，所以它的实部和虚部的任意阶偏导数都是 $f(z)$ 的相应阶导数的实部和虚部，所以它们的任意阶偏导数都存在且连续。故可以推出：u 、v 的任意阶偏导数仍是调和函数。

（5）若 v 是 u 的共轭调和函数，可以说 u 是 v 的共轭调和函数吗?

答：不行，两者的地位不能颠倒。因为，若 v 是 u 的共轭调和函数，则应有

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$;而 u 是 v 的共轭调和函数，要求

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$,两者一般不能同时成立，所能推知的是$-u$是$v$的共轭调和函数。