解答内容不得超过装订线

2008～2009 学年第一学期
《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A 卷)解答

院(系)________**专业班级**_________**学号**_____________**姓名**_________

考试日期: 2008 年 11 月 24 日　　　　　**考试时间:** 晚上 7:00~9:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得 分	
评卷人	

一、填空题 (每空 2 分，共 20 分)

1．复数 $\dfrac{-2+3i}{3+2i}$ 的主辐角为 $\underline{\boldsymbol{\pi/2}}$.

2．函数 $f(z)=x^3-3xy^2+i(y^3-3x^2y)$ 在何处可导? $\underline{\mathbf{(0,0)}}$**点**,

何处解析? **处处不解析**.

3．$\mathrm{Ln}\,(-3+4i)$ 的值为 $\underline{\mathbf{ln5}+i(\mathbf{-arctan(4/3)}+\boldsymbol{\pi}+\mathbf{2k}\boldsymbol{\pi})}$.

4．级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{i^n}{n}$ 是否收敛? **是**; 是否绝对收敛? **否**.

5．函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{z}{z-1}}$ 在 $z=0$ 点展开成泰勒(Taylor)级数的收敛半径

为 $\underline{\mathbf{1}}$.

6．区域 $D=\{z:-\pi<\mathrm{Im}\,z<0\}$ 在映射 $w=\mathrm{e}^z$ 下的像为**下半平面**.

7．映射 $f(z)=2z^3+3z^2$ 在 $z=i$ 处的旋转角为 $\underline{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}/\mathbf{4}}$.

8．函数 $f(t)=\delta(t-1)(t-2)^2\cos t$ 的 Fourier 变换为 $\underline{\mathbf{cos1}\cdot\mathbf{e}^{-j\omega}}$.

二、计算题 (每题 5 分，共 20 分)

得 分	
评卷人	

1. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+1)^3}\,\mathrm{d}z$

解： 令 $f(z)=\dfrac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+1)^3}$ ，则 $f(\dfrac{1}{z})\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{z(1+z^2)^2(1+z^4)^3}$ ，

原式 $=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(\dfrac{1}{z})\dfrac{1}{z^2},0]$ ， **(3 分)**

$=2\pi i\left.\dfrac{1}{(1+z^2)^2(1+z^4)^3}\right|_{z=0}=2\pi i$. **(5 分)**

2. $\oint\limits_{|z|=3} z\cos\dfrac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

解： $z=0$ 为 $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z}$ 的本性奇点，将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内展开得

$z\cos\dfrac{1}{z}=z(1-\dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{4!}\cdot\dfrac{1}{z^4}-\dfrac{1}{6!}\cdot\dfrac{1}{z^6}+\cdots)=z-\dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{4!}\cdot\dfrac{1}{z^3}-\cdots$ ， **(3 分)**

原式 $=2\pi i\,\mathrm{Res}[z\cos\dfrac{1}{z},0]=2\pi i(-\dfrac{1}{2!})=-\pi i$. **(5 分)**

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}\quad (a>1)$

解： 令 $z=e^{i\theta}$ ，则 $\cos\theta=\dfrac{z^2+1}{2z}$ ， $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$ ，

原式 $=\dfrac{2}{i}\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{z^2+2az+1}\mathrm{d}z=\dfrac{2}{i}\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z$ ， **(2 分)**

函数 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 只有一个一阶极点 $z_1=-a+\sqrt{a^2-1}$ ， **(3 分)**

原式$=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}[f(z),z_1]=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot \left.\frac{1}{2z+2a}\right|_{z=z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. **(5 分)**

4. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$

解： 令 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+5}$，则 $f(z)$ 在上半平面只有一个一阶极点 $z_1=\sqrt{5}\,i$，

$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+5}\,\mathrm{d}x=2\pi i\cdot \mathrm{Res}[f(z),z_1]=2\pi i\cdot \left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=\sqrt{5}\,i}=\frac{\pi e^{-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$， **(3 分)**

原式$=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{Re}\,I=\frac{\pi e^{-\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$. **(5 分)**

得 分	
评卷人	

三、(14 分)已知 $u(x,y)=x^2+ay^2+xy$，求常数 a 以及二元函数 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(i)=-1+i$.

解： (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$， $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2a$， 由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 可得 $a=-1$， **(3 分)**

即 $u(x,y)=x^2-y^2+xy$.

(2) 由 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y=\frac{\partial v}{\partial y}$， $\Rightarrow$ $v=\int(2x+y)dy=2xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$， **(7 分)**

由 $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+x=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2y-\varphi'(x)$，

$\Rightarrow$ $\varphi'(x)=-x$， $\Rightarrow$ $\varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2+C$， **(11 分)**

$\Rightarrow$ $f(z)=x^2-y^2+xy+i(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2xy+C)$，

(3) 由 $f(i)=-1+i$ 得 $C=\frac{1}{2}$， **(13 分)**

即 $f(z)=x^2-y^2+xy+i(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2xy+\frac{1}{2})$. **(14 分)**

$\boxed{=(1-\frac{i}{2})z^2+\frac{i}{2}}$

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

四、(14 分)将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 分别在 $z=0$ 点和 $z=-i$ 点展开为洛朗(Laurent)级数.

解： (1) 在 $z=0$ 点展开

① 当 $|z|<1$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n};\qquad \textbf{(3 分)}$$

② 当 $|z|>1$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{z^2})}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}}.\qquad \textbf{(6 分)}$$

(2) 在 $z=-i$ 点展开

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{z+i-2i},$$

① 当 $0<|z+i|<2$ 时，

$$f(z)=-\frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}}=-\frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^n}{(2i)^n}$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}};\qquad \textbf{(10 分)}$$

② 当 $|z+i|>2$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2i}{z+i}}=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2i)^n}{(z+i)^n}$$

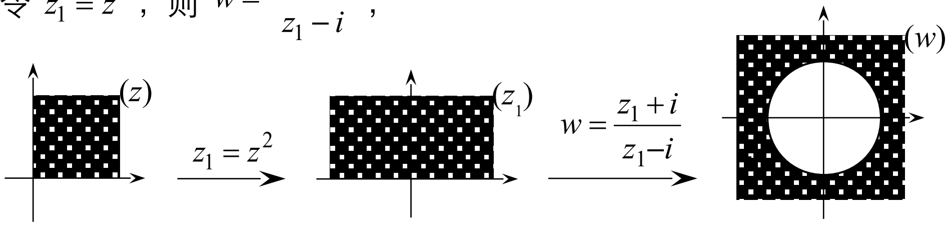
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2i)^n}{(z+i)^{n+2}}.\qquad \textbf{(14 分)}$$

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

五、(6 分)求区域 $D=\{z:\ \mathrm{Re}\,z>0,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ 在映射 $w=\dfrac{z^2+i}{z^2-i}$ 下的像.

解： 令 $z_1=z^2$，则 $w=\dfrac{z_1+i}{z_1-i}$，



(3 分) **(6 分)**

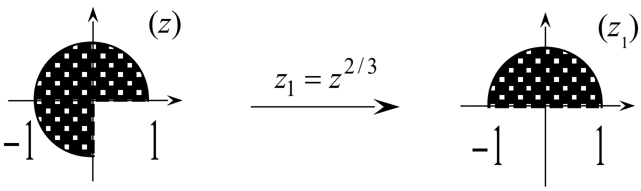
即像区域为单位圆的外部(如图)。

注： 本题也可由 $z_1=z^2$，$z_2=\dfrac{z_1-i}{z_1+i}$，$w=\dfrac{1}{z_2}$ 三步完成。

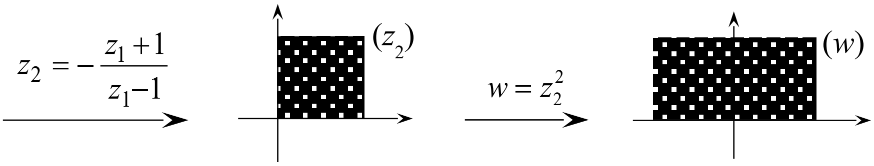
得 分	
评卷人	

六、(10 分)求把区域 $D=\{z:\ |z|<1,\ 0<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\}$ 映射到上半平面的共形映射.

解：



(3 分)



(7 分) **(9 分)**

$$w=\left(-\frac{z^{2/3}+1}{z^{2/3}-1}\right)^2$$

或 $\boxed{w=-\left(\dfrac{z^{2/3}-1}{z^{2/3}+1}\right)^2}$

(10 分)

得 分	
评卷人	

七、(10 分)利用 Laplace 变换求解微分方程:

$$x''(t)-2x'(t)-4x(t)=0\ ,\quad x(0)=0,\ x'(0)=1\ .$$

解: (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}x(t)]$，对方程的两边作 Laplace 变换得:

$$s^2X(s)-1-2sX(s)-4X(s)=0\ ,\qquad \textbf{(3 分)}$$

$$\Rightarrow\quad X(s)=\frac{1}{s^2-2s-4}=\frac{1}{[s-(1+\sqrt{5})][s-(1-\sqrt{5})]},\qquad \textbf{(5 分)}$$

(2) $$X(s)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s-(1+\sqrt{5})}-\frac{1}{s-(1-\sqrt{5})}\right),\qquad \textbf{(8 分)}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{1}[X(s)]=\frac{1}{2\sqrt{5}}(\mathrm{e}^{(1+\sqrt{5})t}-\mathrm{e}^{(1-\sqrt{5})t})=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{sh}\sqrt{5}t\qquad \textbf{(10 分)}$$

得 分	
评卷人	

八、(6分)已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 的系数满足:

$$a_0=a_1=1\ ,\quad a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\ (n\geq 2)\ ,$$

该级数在 $|z|<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 内收敛到函数 $f(z)$，证明:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=0.6}\frac{1+\xi^2f(\xi)}{(\xi-z)(1-\xi)}\,\mathrm{d}\xi=f(z)\ ,\quad (|z|<0.6)\ .$$

证明: (1) 由题意可知，$f(\xi)$ 在 $|\xi|\leq 0.6$ 上解析，　　**(1 分)**

$$\Rightarrow\quad \frac{1+\xi^2f(\xi)}{1-\xi}\ \text{在}\ |\xi|\leq 0.6\ \text{上解析},\qquad \textbf{(2 分)}$$

当 $|z|<0.6$ 时，由柯西积分公式有:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=0.6}\frac{1+\xi^2f(\xi)}{(\xi-z)(1-\xi)}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1+z^2f(z)}{1-z}\ ;\qquad \textbf{(4 分)}$$

(2) $$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n=1+z+\sum_{n=2}^{+\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})z^n$$

$$=1+z+z(f(z)-1)+z^2f(z)=1+zf(z)+z^2f(z)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+z^2 f(z)}{1-z} = f(z)$$；即证。 **(6 分)**