2007～2008 学年第一学期
《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A 卷)

院(系)_________专业班级__________学号_______________姓名__________

考试日期: 2007 年 11 月 26 日　　　　**考试时间:** 晚上 7:00~9:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得　分	
评卷人	

一、填空题 (每空 2 分，共 22 分)

1．复数 $\dfrac{-2i}{1+i}$ 的模为_____，辐角主值为_____.

2．函数 $f(z)=y^2-i\,x^2$ 在何处可导? ____________，何处解析? __________.

3．$\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3}+i\,)^2$ 的值为______________.

4．函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-(1+i)z+i}$ 在 $z=0$ 点展开成泰勒(Taylor)级数的收敛半径为_____.

5．$z=0$ 为函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1-\cos z}{z^2}}$ 的何种类型的奇点? ______.

6．积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1-\sin z}{z(z-2)}\mathrm{d}z$ 的值为______.

7．映射 $f(z)=z^2+2z$ 在 $z=-i$ 处的伸缩率为________，旋转角为_______.

8．函数 $f(t)=1+2\cos 2t$ 的 Fourier 变换为__________.

得　分	
评卷人	

二、计算题 (每题 5 分，共 20 分)

1． $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{e^{z}-1}{z(z-1)^2}\,dz$

2． $\oint\limits_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} \sin\dfrac{1}{z}\,dz$

3． $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos\theta-\sqrt{5}}$

4． $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

得　分	
评卷人	

三、(10 分)已知 $u(x,y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 a 以及二元函数 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为

解析函数且满足条件 $f(1)=0$.

得　分	
评卷人	

四、(12 分)将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗(Laurent)级数.

得　分	
评卷人	

五、(8 分)求区域$D=\{z:\ -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im}z<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}z<0\}$

在映射 $w=\frac{\mathrm{e}^{z}-i}{\mathrm{e}^{z}+i}$ 下的像.

得　分	
评卷人	

六、(10 分)求把区域$D=\{z:\ |z-1|>1,\ \operatorname{Re}z>0\}$

映射到单位圆内部的保形映射.

得 分	
评卷人	

七、(12 分)利用 Laplace 变换求解微分方程组:

$$\begin{cases} x''(t)-y''(t)-y(t)=t\,\mathrm{e}^t, & x(0)=y(0)=0, \\ x'(t)-y'(t)-x(t)=-\sin t, & x'(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

得 分	
评卷人	

八、(6分)设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且满足 $|f(z)-2|<2$，证明:

$$\oint_{|z|=1} \frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}\,\mathrm{d}z=0\,.$$