

§8.3 傅立叶变换的性质

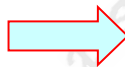
一、基本性质

二、卷积与卷积定理

* 三、利用 Matlab 实现 Fourier 变换

一、基本性质

- 在下面给出的基本性质中，所涉及到的函数的 Fourier 变换均存在，且 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$.
- 对于涉及到的一些运算（如求导、积分、极限及求和等）的次序交换问题，均不另作说明。



直接进入基本性质汇总？

1. 线性性质

性质 设 a, b 为常数，则

$$\mathcal{F}[af(t) + bg(t)] = aF(\omega) + bG(\omega).$$

证明（略）

一、基本性质

2. 位移性质

性质 设 t_0, ω_0 为实常数, 则

$$(1) \mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega); \quad (\text{时移性质})$$

$$(2) \mathcal{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)] = e^{j\omega_0 t} f(t). \quad (\text{频移性质})$$

证明 (1) $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\text{令 } x=t-t_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} \cdot e^{-j\omega t_0} dx \\ & = e^{-j\omega t_0} F(\omega); \end{aligned}$$

(2) 同理, 可得到频移性质。

一、基本性质

2. 位移性质

性质 设 t_0, ω_0 为实常数, 则

$$(1) \mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega); \quad (\text{时移性质})$$

$$(2) \mathcal{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)] = e^{j\omega_0 t} f(t). \quad (\text{频移性质})$$

- **时移性质**表明：当一个信号沿时间轴移动后, 各频率成份的大小不发生改变, 但相位发生变化；
- **频移性质**则被用来进行频谱搬移, 这一技术在通信系统中得到了广泛应用。

一、基本性质

3. 相似性质

性质 设 a 为非零常数, 则 $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

证明 (1) 当 $a > 0$ 时,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

$$\underline{\underline{\text{令 } x=at}} \quad \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a}x} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right);$$

(2) 当 $a < 0$ 时,

$$\text{同理可得 } \mathcal{F}[f(at)] = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

一、基本性质

3. 相似性质

性质 设 a 为非零常数, 则 $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

- **相似性质**表明, 若信号被压缩 ($a > 1$), 则其频谱被扩展;
若信号被扩展 ($a < 1$), 则其频谱被压缩。

- 事实上, 在对矩形脉冲函数的频谱分析中 (§8.1) 已知,
脉冲越窄, 则其频谱 (主瓣) 越宽;
脉冲越宽, 则其频谱 (主瓣) 越窄。

相似性质正好体现了**脉冲宽度与频带宽度之间的反比关系**。

一、基本性质

3. 相似性质

性质 设 a 为非零常数, 则 $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

- 在电信通讯中,

为了迅速地传递信号, 希望信号的脉冲宽度要小;

为了有效地利用信道, 希望信号的频带宽度要窄。

- 相似性质表明这两者是矛盾的, 因为同时压缩脉冲宽度和频带宽度是不可能的。

一、基本性质

4. 微分性质

性质 若 $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega)$.

证明 由 $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, 有 $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t)e^{-j\omega t} = 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= f(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= j\omega F(\omega).\end{aligned}$$

一、基本性质

4. 微分性质

性质 若 $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega)$.

一般地, 若 $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f^{(k)}(t) = 0$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$,

则 $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega)$.

记忆 由 $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$,

$$\Rightarrow f'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega;$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (j\omega)^n F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

一、基本性质

4. 微分性质

- 同理，可得到像函数的导数公式

$$\mathcal{F}^{-1}[F'(\omega)] = -jt f(t);$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)] = (-jt)^n f(t).$$

- 上式可用来求 $t^n f(t)$ 的 Fourier 变换 .

记忆 由 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$,

$$\Rightarrow F'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jt) f(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$$\Rightarrow F^{(n)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jt)^n f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

一、基本性质

5. 积分性质

性质 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t f(t) dt = 0$, 则 $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^t f(t) dt] = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$.

证明 令 $g(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt$, 则 $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} g(t) = 0$,

由微分性质有 $\mathcal{F}[g'(t)] = j\omega G(\omega)$,

又 $g'(t) = f(t)$, 有 $\mathcal{F}[f(t)] = j\omega \mathcal{F}[g(t)]$,

即得 $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^t f(t) dt] = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$.

一、基本性质

6. 帕塞瓦尔 (Parseval) 等式:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

证明 由 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$, 有 $\overline{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$,

$$\text{右边} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot \overline{F(\omega)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \text{左边}.$$

一、基本性质 (汇总)

线性性质 $\mathcal{F}[af(t) + bg(t)] = aF(\omega) + bG(\omega).$

位移性质 $\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega);$ (时移性质)

$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega - \omega_0)] = e^{j\omega_0 t} f(t).$ (频移性质)

相似性质 $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$

一、基本性质 (汇总)

微分性质 $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega);$

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)] = (-jt)^n f(t).$$

积分性质 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(t) dt\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega).$

Parseval 等式 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$

 (直接进入 Parseval 等式举例?)

§8.3 傅里叶变换的性质

例 设 $f(t) = u(t) \cdot 2 \cos \omega_0 t$, $\mathcal{F}[f(t)]$.

解 已知 $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$,

又 $f(t) = u(t) \cdot (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$,

根据线性性质和频移性质有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0) \\ &= \frac{2j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \end{aligned}$$

§8.3 傅里叶变换的性质

例 已知抽样信号 $f(t) = \frac{\sin 2t}{\pi t}$ 的频谱为 $F(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2, \\ 0, & |\omega| > 2. \end{cases}$

求信号 $g(t) = f(2t)$ 的频谱 $G(\omega)$. P199 例 8.11 修改

解 根据相似性质有

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[f(2t)]$$

$$= \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} 1/2, & |\omega| \leq 4, \\ 0, & |\omega| > 4. \end{cases}$$

§8.3 傅里叶变换的性质

例 设 $f(t) = t^2 \cos t$, $\mathcal{F}[f(t)]$.

解 令 $g(t) = \cos t$, $f(t) = t^2 g(t)$,

又已知 $G(\omega) = \mathcal{F}[\cos t] = \pi \delta(\omega - 1) + \pi \delta(\omega + 1)$,

根据微分性质 $\mathcal{F}^{-1}[G''(\omega)] = (-jt)^2 g(t)$, 有

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[t^2 g(t)] = -G''(\omega)$$

$$= -\pi \delta''(\omega - 1) - \pi \delta''(\omega + 1).$$

例 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega$ 的值。 P201 例 8.12

解 设矩形脉冲函数 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$

已知 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$,

由 **Parserval 等式** 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 \sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = 2\pi \int_{-1}^1 1^2 dt = 4\pi.$$

由于被积函数为偶函数 故有 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2}$.

二、卷积与卷积定理

1. 卷积的概念与运算性质

定义 设函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,

P201
定义
8.2

广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ 对任何实数 t 都收敛

它在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义了一个自变量为 t 的函数,

函数为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积, 记为 $f_1(t) * f_2(t)$, 即为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

二、卷积与卷积定理

1. 卷积的概念与运算性质

性质 (1) 交换律

P202

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

(2) 结合律

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t).$$

(3) 分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t).$$

§8.3 傅里叶变换的性质

例 设 $f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, $g(t) = e^{-\beta t} u(t)$, 其中, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

P202
例
8.13

且 $\alpha \neq \beta$, 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

解 $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau,$

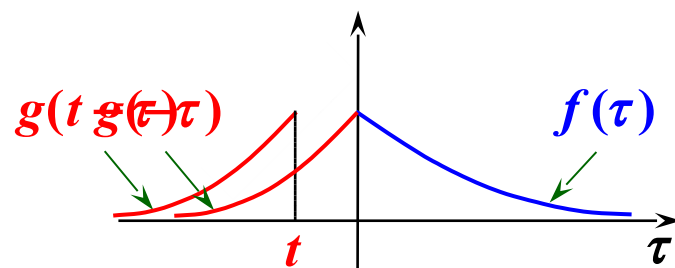
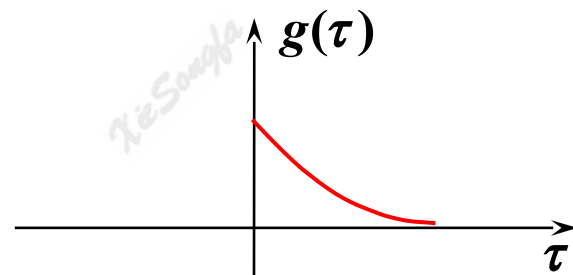
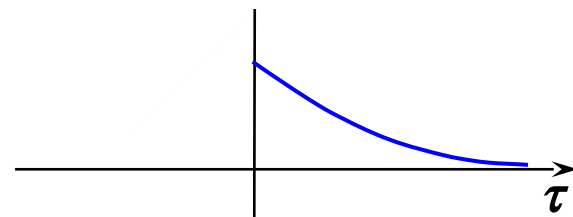
(1) 当 $t \leq 0$ 时 $f(t) * g(t) = 0$.

(2) 当 $t > 0$ 时,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-\alpha \tau} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau$$

$$= \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta}.$$



● 从上面的例子可以看出 P204

(1) 在计算一些分段函数的卷积时，如何确定积分限是解题的关键。如果采用图形方式则比较容易确定积分限。

(2) 卷积由反褶、平移、相乘、积分四个部分组成即首先将函数 $g(\tau)$ 反褶并平移到 t ，得到 $- \tau) = g(-(\tau - t))$ ，再与函数 $f(t)$ 相乘后求积分得到卷积 $f(t) * g(t)$ 。

因此，卷积又称为褶积或卷乘。

● 另外，利用卷积满足交换律这一性质，适当地选择两个函数的卷积次序，还可以使积分限的确定更直观一些。

§8.3 傅里叶变换的性质

例 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积, 其中,

P203 例 8.14 修改

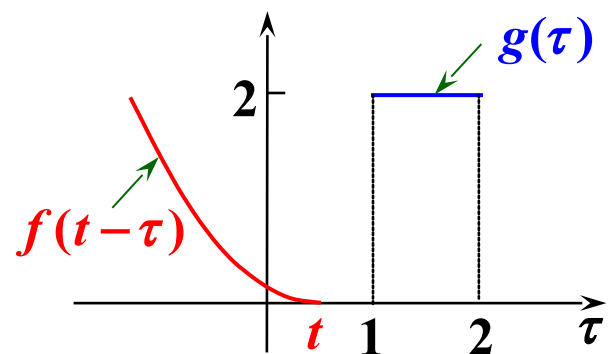
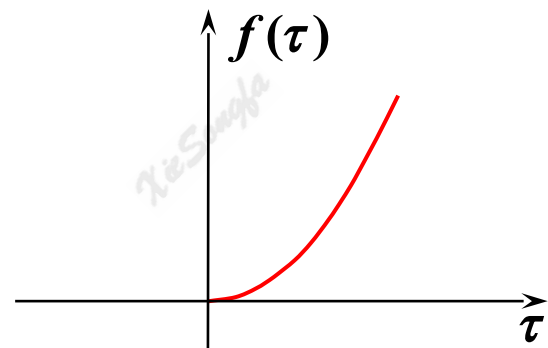
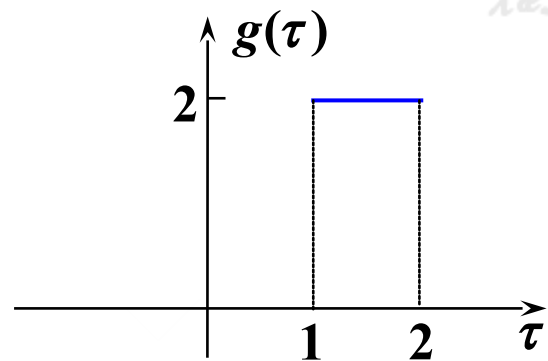
$$f(t) = t^2 u(t), \quad g(t) = \begin{cases} 2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

解 由卷积的定义及性质有

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

(1) 当 $t \leq 1$ 时,

$$f(t) * g(t) = 0.$$



§8.3 傅里叶变换的性质

例 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积, 其中,

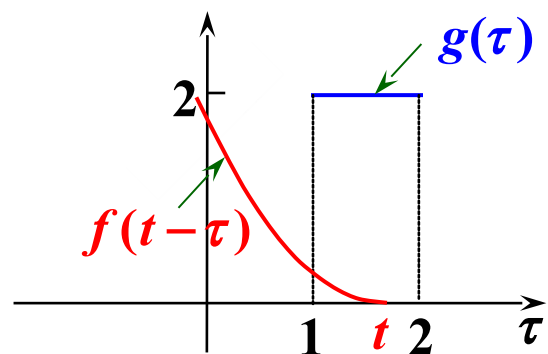
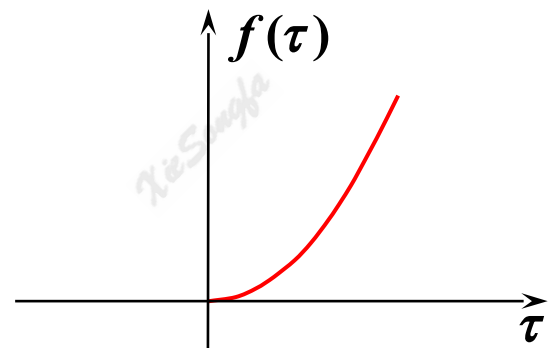
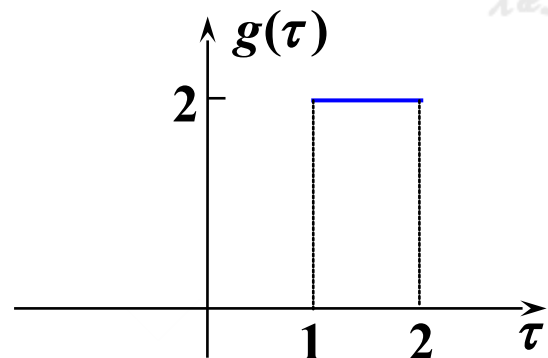
$$f(t) = t^2 u(t), \quad g(t) = \begin{cases} 2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

解 由卷积的定义及性质有

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

(2) 当 $1 < t < 2$ 时,

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_1^t 2 \cdot (t-\tau)^2 d\tau \\ &= \frac{2}{3} (t-1)^3. \end{aligned}$$



§8.3 傅里叶变换的性质

例 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积, 其中,

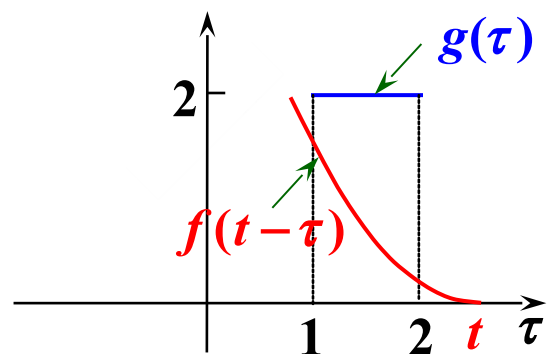
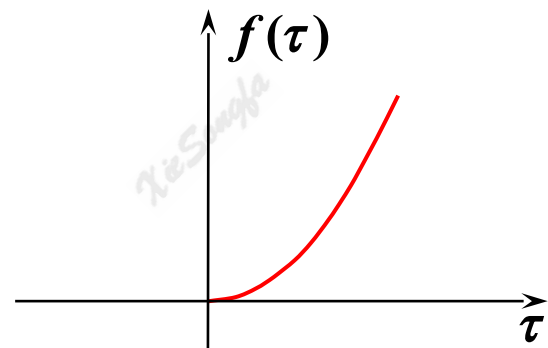
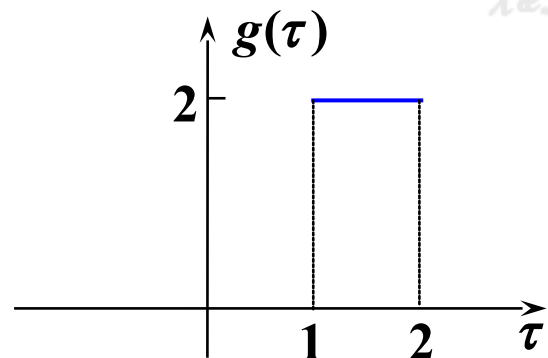
$$f(t) = t^2 u(t), \quad g(t) = \begin{cases} 2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

解 由卷积的定义及性质有

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

(3) 当 $t \geq 2$ 时,

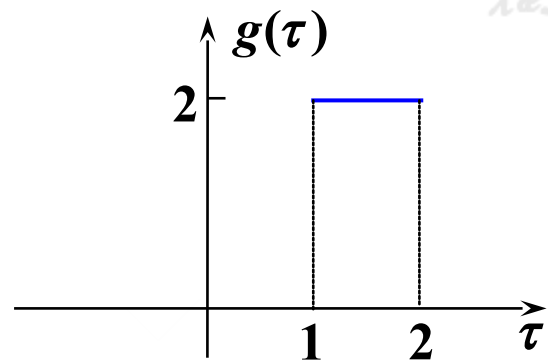
$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_1^2 2 \cdot (t-\tau)^2 d\tau \\ &= \frac{2}{3} [(t-1)^3 - (t-2)^3]. \end{aligned}$$



§8.3 傅里叶变换的性质

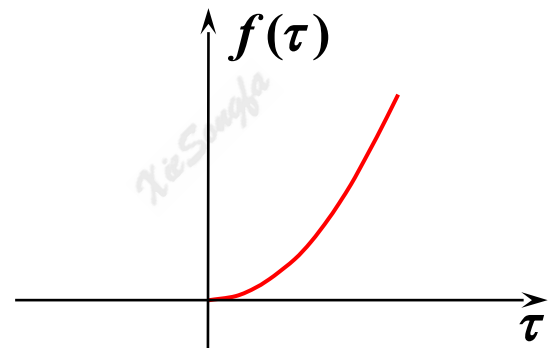
例 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积, 其中,

$$f(t) = t^2 u(t), \quad g(t) = \begin{cases} 2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$



解 由卷积的定义及性质有

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$



综合得

$$f(t) * g(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ 2(t-1)^3 / 3, & 1 < t < 2, \\ 2[(t-1)^3 - (t-2)^3] / 3, & t \geq 2. \end{cases}$$

二、卷积与卷积定理

2. 卷积定理

定理 设 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, 则有

P204
定理
8.4

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega); \quad (A)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2\pi f_1(t) \cdot f_2(t). \quad (B)$$

证明
$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) * f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} dt \right] d\tau = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega); \end{aligned}$$

同理可证 (B) 式。

二、卷积与卷积定理

*3. 卷积的物理意义 (跳过?)

背景 (1) 如何从收到的实际信号中 **分离** 出 “想要” 的某个频
内的信号。

(2) 如何从收到的实际信号中 **消除** 在传输过程中加入的
高频干扰噪声。

问题 设有某信号为 $f(t)$ ，试将该信号的 **低频成份** 完全保留，
而 **高频成份** 完全去掉，即对其进行 **理想低通滤波**。

二、卷积与卷积定理

*3. 卷积的物理意义

方法 方法一 在频率域中实现

(1) 求出信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$.

(2) 令 $H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq a, \\ 0, & |\omega| > a. \end{cases}$ (理想低通滤波器)

(3) 将 $F(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 相乘, 得到 $\tilde{F}(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega)$.

(4) 对 $\tilde{F}(\omega)$ 作 Fourier 逆变换, 得到 $\tilde{f}(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{F}(\omega)]$.

- 显然, 新的信号 $\tilde{f}(t)$ 中完全保留了原信号 $f(t)$ 中频率低于 a 的频率成份, 而去掉了频率高于 a 的频率成份。

二、卷积与卷积定理

*3. 卷积的物理意义

方法 方法二 在时间域中实现

$$(1) \text{ 令 } H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq a, \\ 0, & |\omega| > a. \end{cases} \quad (\text{理想低通滤波器})$$

$$(2) \text{ 求 } h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{\sin at}{\pi t}. \quad (\text{理想低通滤波因子})$$

$$(3) \text{ 计算卷积 } \tilde{f}(t) = f(t) * h(t).$$

● 由卷积定理，信号 $\tilde{f}(t)$ 与方法一中信号 $\tilde{f}(t)$ 是一样的，这正是卷积的意义和价值。

注 $H(\omega)$ 与 $h(t)$ 分别又称为 频率响应函数 与 冲激响应函数。

§8.3 傅里叶变换的性质

例 求函数 $h(t)$ 和 $\delta(t)$ 的卷积。

解 方法一
$$h(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h(t).$$

方法二 已知 $\delta(t)$ 的 Fourier 变换为 $D(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1$,

令 $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$, 根据 **卷积定理** 有

$$\begin{aligned} h(t) * \delta(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(\omega) \cdot D(\omega)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = h(t). \end{aligned}$$

注 (1) 一般地, 有 $h(t) * \delta(t - t_0) = h(t - t_0)$.

(2) 本例的结论被用来获取或者检测系统的 **冲激响应函数**。

§8.3 傅里叶变换的性质

例 设函数 $f(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$, $g(t) = \frac{\sin bt}{\pi t}$, 其中, $a > 0, b > 0$,

求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。 P204 例 8.15

解 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 均为抽样信号其频谱分别为

$$F(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq a, \\ 0, & |\omega| > a, \end{cases} \quad G(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq b, \\ 0, & |\omega| > b. \end{cases}$$

$$\text{令 } c = \min(a, b), \text{ 则 } F(\omega) \cdot G(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq c, \\ 0, & |\omega| > c. \end{cases}$$

根据卷积定理有

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)] = \frac{\sin ct}{\pi t}.$$

§8.3 傅里叶变换的性质

例 求 $f(t) = e^{-at}u(t)\cos bt$ ($a > 0$) 的 Fourier 变换。

P205 例 8.16

解 方法一 利用卷积定理求解

→ (跳过?)

$$\text{令 } g(t) = e^{-at}u(t), \quad h(t) = \cos bt,$$

$$\text{则 } G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{a + j\omega},$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \pi[\delta(\omega + b) + \delta(\omega - b)],$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[g(t) \cdot h(t)] = \frac{1}{2\pi} G(\omega) * H(\omega)$$

$$= \frac{\pi}{2\pi} [G(\omega) * \delta(\omega + b) + G(\omega) * \delta(\omega - b)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a + j(\omega + b)} + \frac{1}{a + j(\omega - b)} \right] = \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + b^2}.$$

§8.3 傅里叶变换的性质

例 求 $f(t) = e^{-at}u(t)\cos bt$ ($a > 0$) 的 Fourier 变换。

解 方法二 利用频移性质求解

$$\text{令 } g(t) = e^{-at}u(t), \text{ 则 } G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{a + j\omega},$$

$$\text{又 } f(t) = \frac{1}{2} [g(t)e^{-jbt} + g(t)e^{jbt}],$$

根据频移性质有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \frac{1}{2} [G(\omega + b) + G(\omega - b)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a + j(\omega + b)} + \frac{1}{a + j(\omega - b)} \right] = \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + b^2}. \end{aligned}$$

*三、利用 Matlab 实现 Fourier 变换 (跳过?)

● 在数学软件 Matlab 的符号演算工具箱中，提供了专用函数来进行 Fourier 变换与 Fourier 逆变换。

(1) $F = \text{fourier}(f)$ 对函数 $f(x)$ 进行 Fourier 变换，
对并返回结果 $F(\omega)$ 。

(2) $f = \text{ifourier}(F)$ 对函数 $F(\omega)$ 进行 Fourier 逆变换，
对并返回结果 $f(x)$ 。

§8.3 傅里叶变换的性质

例 求函数 $f(x) = \cos ax$ 的 Fourier 变换。

解 Matlab 程序

```
clear;
syms a real;
syms x;
f = cos(a*x);
F = fourier(f);
```

输出 $F = \pi * \text{Dirac}(w - a) + \pi * \text{Dirac}(w + a)$

其中，Dirac 为函数， π 代表 π 。

即 $F(\omega) = \pi[\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)]$ 。

§8.3 傅里叶变换的性质

例 求函数 $f(x) = \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin ax}{ax} \right)$ 的 Fourier 变换。

解 Matlab 程序

```
clear;
syms a real;
syms x;
f = a*sin(a*x)/(pi*a*x);
F = fourier(f);
```

输出 $F = 1/\pi * (1/2 * \pi * (\text{Heaviside}(-w+a) - \text{Heaviside}(w-a)) - 1/2 * \pi * (\text{Heaviside}(-w-a) - \text{Heaviside}(w+a)))$

其中，Heaviside 为单位阶跃函数 π 代表 π 。

§8.3 傅里叶变换的性质

例 求函数 $f(x) = \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin ax}{ax} \right)$ 的 Fourier 变换。

解 输出 $F = 1/\text{pi} * (1/2 * \text{pi} * (\text{Heaviside}(-w+a) - \text{Heaviside}(w-a)) - 1/2 * \text{pi} * (\text{Heaviside}(-w-a) - \text{Heaviside}(w+a)))$

其中，Heaviside 为单位阶跃函数 pi 代表 π 。

$$\begin{aligned} \text{即 } F(\omega) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} (u(-\omega + a) - u(\omega - a)) - \frac{\pi}{2} (u(-\omega - a) - u(\omega + a)) \right) \\ &= \frac{1}{2} (u(\omega + a) - u(\omega - a) + u(-\omega + a) - u(-\omega - a)) \\ &= \begin{cases} 1, & |\omega| \leq a, \\ 0, & |\omega| > a. \end{cases} \end{aligned}$$

§8.3 傅里叶变换的性质

例 已知函数 $f(x)$ 频谱 $F(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$, 求 $f(x)$.

解 Matlab 程序

```
clear;
syms a real;
syms w;
F=1/(a+j*w);
f = ifourier (F) ;
```

输出 $f = \exp(-a*x)*\text{Heaviside}(x)$

其中, Heaviside 为单位阶跃函数, \exp 为指数函数。

$$\text{即 } f(x) = e^{-ax}u(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



休息一下