第三章 复变函数的积分

§3.1 复积分的概念

一、复积分的定义

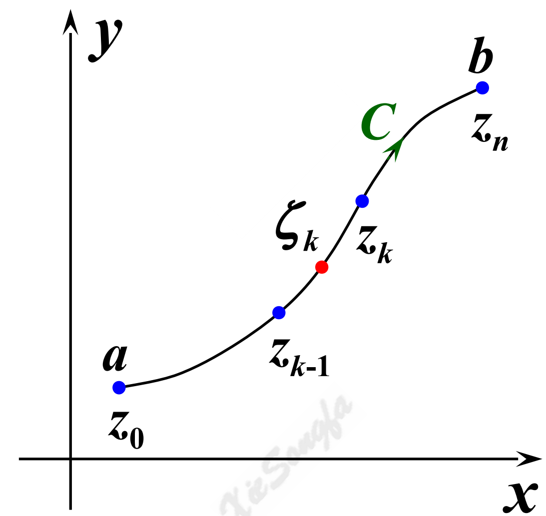
二、复积分的性质

三、复积分的计算

一、复积分的定义

定义 P54 定义 3.1

如图设 C 为简单光滑的有向曲线，其方向是从 a 到 b，函数 $f(z)$ 在 C 上有定义，



(1) 将曲线 C 任意划分：

$$z_0 = a,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n = b,$$

令 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，$\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} |\Delta z_k|$，

(2) 在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}\,z_k}$ 上任取一点 $\zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}\,z_k}$，

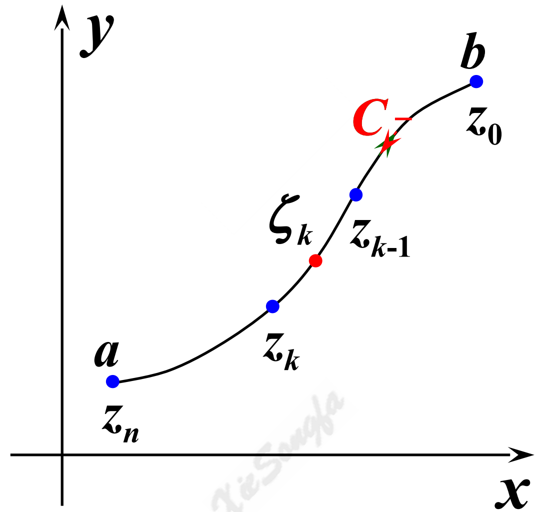
若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ 存在（不依赖 C 的刻分和 ζ_k 的选取），

则称之为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

一、复积分的定义

注 (1) $\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z$ 表示沿曲线 C 的负方向积分;

(2) $\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$ 表示沿闭曲线 Γ (的逆时针方向)积分;



二、复积分的性质 P58

(1) $\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]\mathrm{d}z=\alpha\int_C f(z)\mathrm{d}z+\beta\int_C g(z)\mathrm{d}z.$

(2) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=-\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z.$

(3) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z,$

其中，$C=C_1+C_2.$

(4) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C |f(z)||\mathrm{d}z|=\int_C |f(z)|\mathrm{d}s\le ML,$

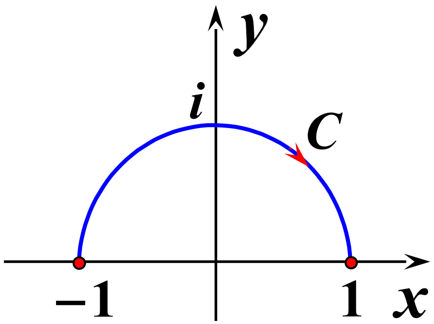
其中，$M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|,$

第一类曲线积分

L 为曲线 C 的弧长

。

例 估计 $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z}dz$ 的模的一个上界，其中 C 如图所示。



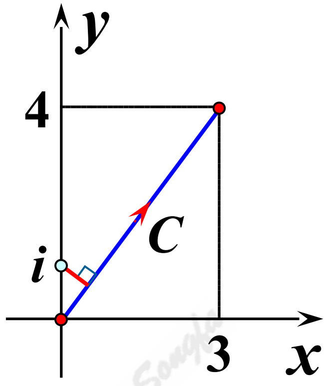
解 $\displaystyle\left|\int_C \frac{e^z}{z}dz\right| \le \int_C \left|\frac{e^z}{z}\right||dz|$

$$= \int_C \frac{|e^z|}{|z|}ds = \int_C |e^x|ds$$

$$= \int_C e^x ds \le e\pi.$$

例 估计 $\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$ 的模的一个上界，其中 C 如图所示。

P58 例 3.4



解 曲线 $C: z=3t+i4t,\ t:0\to 1$,

$$|z-i|=|3t+i(4t-1)|$$

$$=\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}$$

$$=\sqrt{25t^2-8t+1}$$

$$=\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}\ \geq \frac{3}{5}.$$

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \leq \int_C \frac{1}{|z-i|}\mathrm{d}s \leq \frac{5}{3}\cdot 5=\frac{25}{3}.$$

例 试证 $\lim\limits_{r\to 0}\oint_{|z|=r}\dfrac{z^3}{1+z^2}\mathrm{d}z=0.$

P59 例 3.5

证 不妨设 $r<1$,

$$|1+z^2|\geq|1-|z|^2|$$

$$0\leq\left|\oint_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}\mathrm{d}z\right|\leq\oint_{|z|=r}\frac{|z|^3}{|1+z^2|}\mathrm{d}s$$

$$\leq\oint_{|z|=r}\frac{|z|^3}{|1-|z|^2|}\mathrm{d}s=\frac{2\pi r^4}{1-r^2}\to 0,\ (r\to 0).$$

三、复积分的计算

方法一 **化为第二类曲线积分** P55 定理 3.1

(推导 ?)

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u+iv)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)$$

$$= \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

- 进一步可化为定积分或者二重积分。

附 **格林 (Green) 公式**

设 D 为单连域，边界 C 分段光滑，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 $\overline{D} = D + C$ 上的偏导数连续，则

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

三、复积分的计算

方法二 直接化为定积分 P56

设曲线 $C: z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$，$t: a \to b$，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t,$$

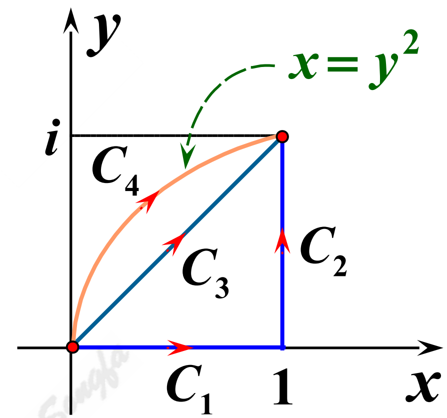
其中，$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.

附 其它方法（后面的章节介绍）

- 利用原函数计算，即 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$.
- 利用柯西积分公式、高阶导公式计算
- 利用留数计算。

例 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为（如图）：P57 例 3.3 修改

(1) $C=C_1+C_2$；(2) $C=C_3$；(3) $C=C_4$.



解 (1) 曲线 C_1 的方程为$=x$，$x:0\to 1$，

曲线 C_2 的方程为$=1+iy$，$y:0\to 1$，

$$I=\int_{C_1} z\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} z\,\mathrm{d}z,$$

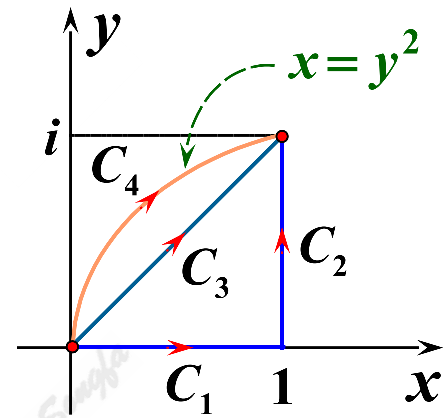
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 (1+iy)\,\mathrm{d}(1+iy)$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 i(1+iy)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\left(iy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 \;=i.$$

例 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为（如图）P57 例 3.3 修改

(1) $C=C_1+C_2$；(2) $C=C_3$；(3) $C=C_4$.



解 (2) 曲线 C_3 的方程为 $= t+it$，$t:0\to 1$，

$$I=\int_{C_3} z\,\mathrm{d}z$$

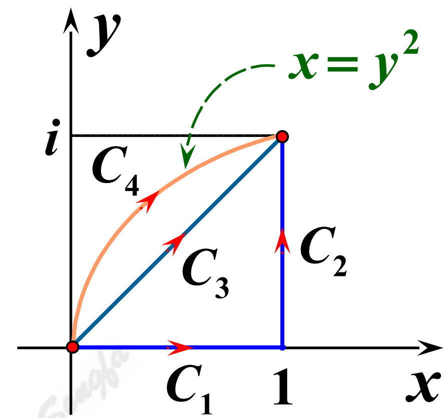
$$=\int_0^1 (t+it)\,\mathrm{d}(t+it)$$

$$=(1+i)(1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2i\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1=i.$$

例 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为（如图）： P57 例 3.3 修改

(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$； (3) $C=C_4$.



解 (3) 曲线 C_4 的方程为 $z=t^2+it$，$t:0\to 1$,

$$I=\int_{C_4} z\,\mathrm{d}z$$

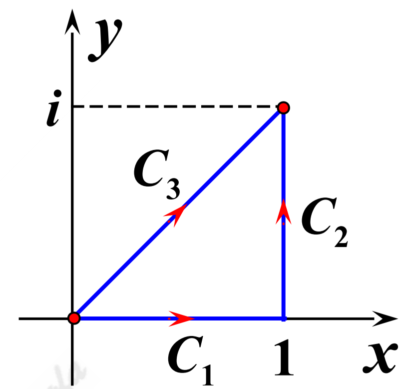
$$=\int_0^1 (t^2+it)\,\mathrm{d}(t^2+it)$$

$$=\frac{1}{2}(t^2+it)^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(1+i)^2=i.$$

例 计算 $I=\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$，其中 C 为 (1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$.

P56 例 3.1 修改



解 (1) 曲线 C_1 的方程为$=x$，$x:0\to 1$,

曲线 C_2 的方程为$=1+iy$，$y:0\to 1$,

$$I=\int_{C_1}\overline{z}\,\mathrm{d}z+\int_{C_2}\overline{z}\,\mathrm{d}z,$$

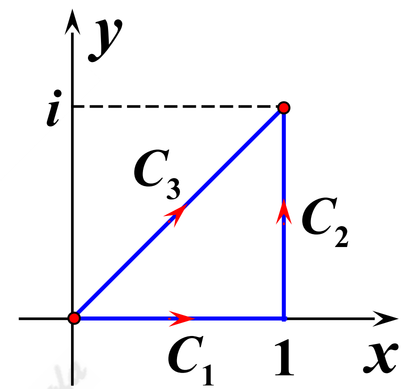
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1(1-iy)\,\mathrm{d}(1+iy)$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 i(1-iy)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+(iy+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=1+i.$$

例 计算 $I=\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z$，其中 C 为 (1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$.

P56 例 3.1 修改



解 (2) 曲线 C_3 的方程 $z=t+it$， $t:0\to 1$，为

$$I=\int_{C_3}\bar{z}\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 (t-it)\,\mathrm{d}(t+it)$$

$$=(1-i)(1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 \;=1.$$

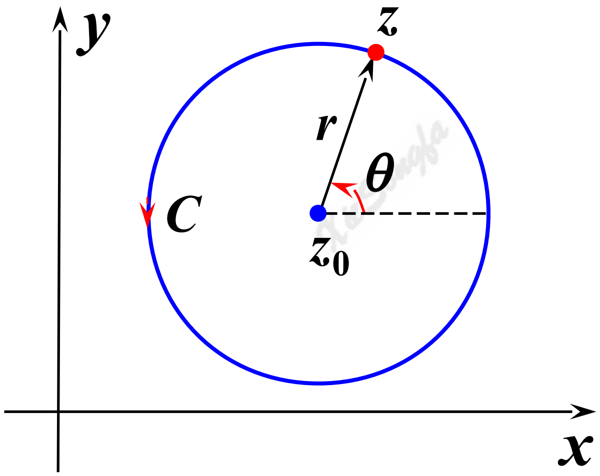
例 计算 $I=\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$，其中，$C$ 为 $|z-z_0|=r$，n 为整数。

P57 例 3.2

解 曲线 C 的参数方程为 $z= z_0+re^{i\theta}$，$\theta:0\to 2\pi$,

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}\,i}{(re^{i\theta})^n}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta,$$



当 $n=1$ 时 $I=2\pi i$;

当 $n\neq 1$ 时 $I=\dfrac{i}{i(1-n)r^{n-1}}e^{i(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0$.

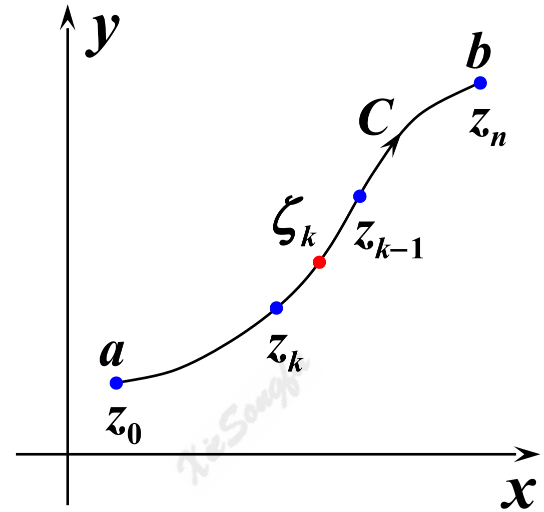
，

注 此例的结果很重要！

休息一下 ……

附：复积分化为第二类曲线积分的公式推导

(1) 如图 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$,



设函数 $f(z)=u+iv$ 在 C 上连续，则 $u(x,y),\ v(x,y)$ 也在 C 上连续；

由 $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$，有

当 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0$ 时，$\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta x_k|\to 0$，$\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta y_k|\to 0$；

记 $\zeta_k = (\xi_k, \eta_k)$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k),$$

附：复积分化为第二类曲线积分的公式推导

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k),$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k],$$

将上式两端取极限（即令 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k| \to 0$），得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

附：复积分化为第二类曲线积分的公式推导

$$\boxed{\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+i\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y.}$$

(2) 设曲线 $C: z=z(t)=x(t)+i\,y(t)$，$t:a\to b$，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b[u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

$$+i\int_a^b[v(x(t),y(t))x'(t)+u(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b[u(x(t),y(t))+i\,v(x(t),y(t))]\boxed{[x'(t)+iy'(t)]}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{z'(t)}$$

$$=\int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

即 $$\boxed{\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.}$$

(返回)