◆ 频谱分析实验

一、实验概述

二、生成用于实验的离散时间信号

三、对实验信号进行频谱分析

*四、试对二维信号进行频谱分析

一、实验概述

实验目的 (1) 能利用快速 Fourier 变换 (FFT) 对有限离散序列进行离散 Fourier 正变换与逆变换。

(2) 重点掌握有限离散时间序列的频谱分析方法。

实验内容 (1) 设计并生成用于实验的若干有限离散时间信号。

(2) 对实验信号进行频谱分析。

- 计算实验信号的 DFT 与 IDFT 。
- 对实验信号进行频谱分析。

*(3) 试对二维信号进行频谱分析。

一、实验概述

实验要求 (1) 编程实现有关实验内容。

- 编程语言不限；程序规范，通用性强。

(2) 完成实验报告，包括：

- 基本原理与方法；
- 实验方案与设计；
- 实验结果与分析；
- 源程序（必要的注释）。
- 方法说明、程序说明及使用说明。（可选）

一、实验概述

- 本实验在 Matlab 中所涉及到的部分函数：

fopen	创建或打开文件；
fprintf	将数据以指定的格式写入文件；
fscanf	从文件中读出数据；
fclose	关闭文件；
save	将数据以固定的格式写入文件（.mat）；
load	从文件（.mat）中装载数据；
fft, fft2	一维或二维离散信号的快速 Fourier 正变换；
ifft, ifft2	一维或二维离散信号的快速 Fourier 逆变换。

二、生成用于实验的离散时间信号

1. 实验信号的生成

步骤 (1) 具体设计一些含有已知频率成份的连续实验信号。

(2) 根据抽样定理分别选取适当的采样间隔。

(3) 用所选取的采样间隔分别对连续实验信号进行抽样并以文件的形式保存。

(4) 从文件中读取信号数据，并显示其曲线。

注 对于实际的采样信号，将其在计算机上保存时，除了信号数据外，一般还含有一个文件头，用于保存该信号的某些信息，如采样间隔、信号的长度等等。

二、生成用于实验的离散时间信号

2. 实验信号的设计举例

例一 (1) 由频率分别为 $7Hz$ $18Hz$ $29Hz$ $40Hz$ 以及 的

信号合成，具体如下：

$$x_1(t) = 4\sin(14\pi t) + 3\sin(36\pi t) + 2\sin(58\pi t) + \sin(80\pi t),$$

其中，$0 \le t < 5$，（单位以秒计）。

(2) 采样间隔为 $\Delta_1 = 0.01\,s = 10\,ms$，即信号长度为 500，

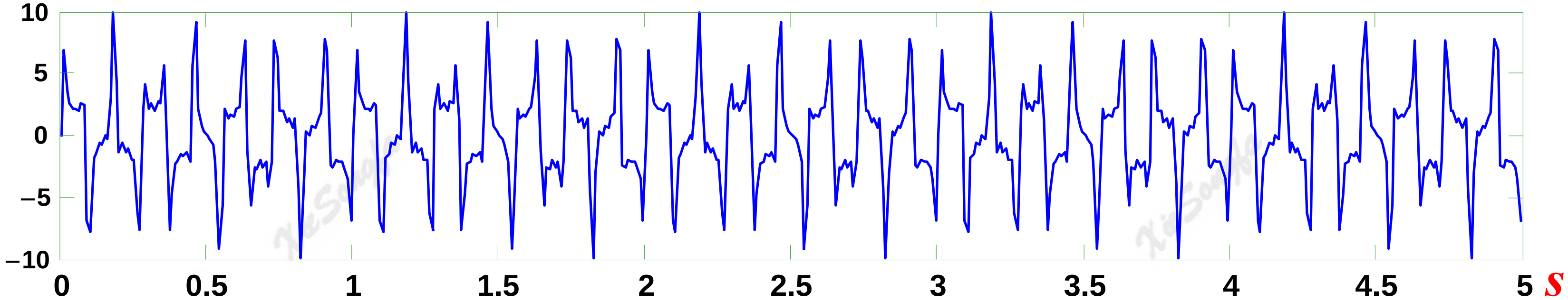
得到的离散时间信号为 $x_1(n\Delta_1)$，$n = 0, 1, 2, \cdots, 499$，

它所对应的离散序列记为 $x_1(n)$.

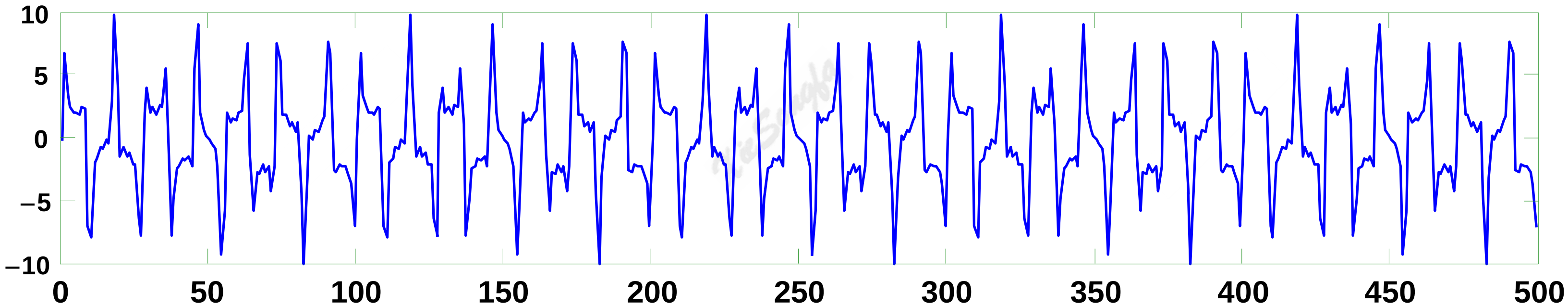
二、生成用于实验的离散时间信号

2. 实验信号的设计举例

例一 (3) 图形显示如下：



离散时间信号 $x_1(n\Delta_1)$



离散序列 $\tilde{x}_1(n)$

二、生成用于实验的离散时间信号

2. 实验信号的设计举例

例二 (1) 由截止频率为 $60Hz$ 的抽样信号构成，

$$x_2(t)=\frac{\sin(120\pi t)}{\pi t},$$

其中，$-2 \le t < 2$，(单位以秒计) 。

(2) 采样间隔为 $\Delta_2 = 0.005\,s = 5\,ms$，即信号长度为800，

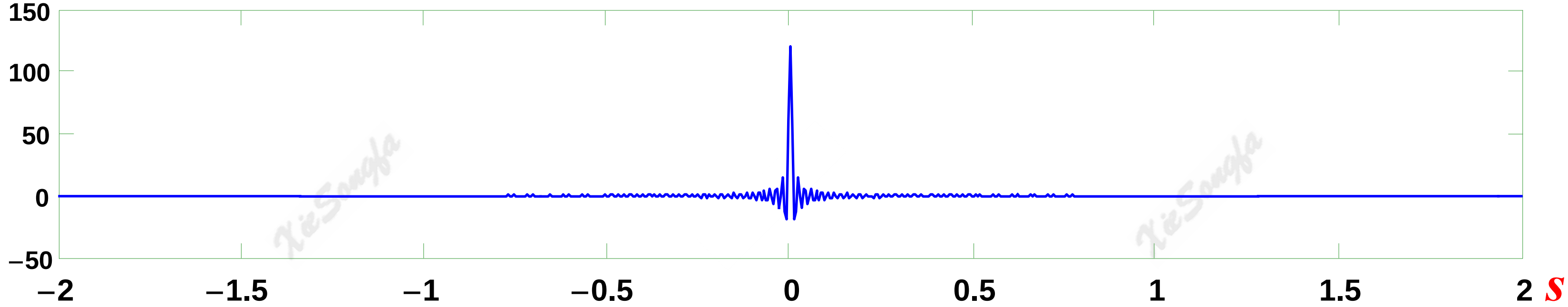
得到的离散时间信号为 $x_2(n\Delta_2)$，$n = 0, 1, 2, \cdots, 799$，

它所对应的离散序列记为 $x_2(n)$.

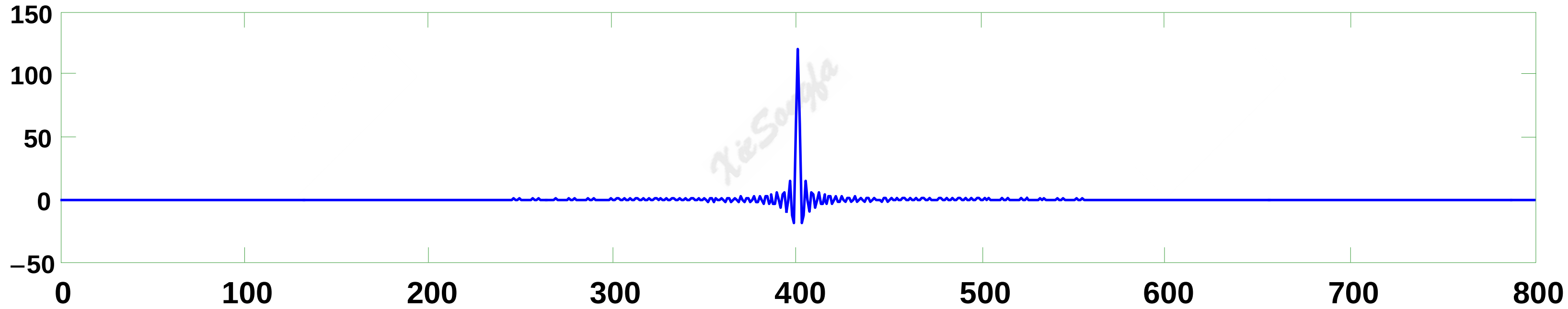
二、生成用于实验的离散时间信号

2. 实验信号的设计举例

例二 (3) 图形显示如下：



离散时间信号 $x_2(n\Delta_2)$



离散序列 $\tilde{x}_2(n)$

三、对实验信号进行频谱分析

1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

实验内容

(1) 利用快速 Fourier 变换(FFT)计算离散序列 $\{x(n)\}_{n=0\sim N}$ 的 DFT：$\{X(k)\}_{k=0\sim N}$ 。

(2) 画出离散序列的振幅谱 $|X(k)|$ ，并观察其特点。

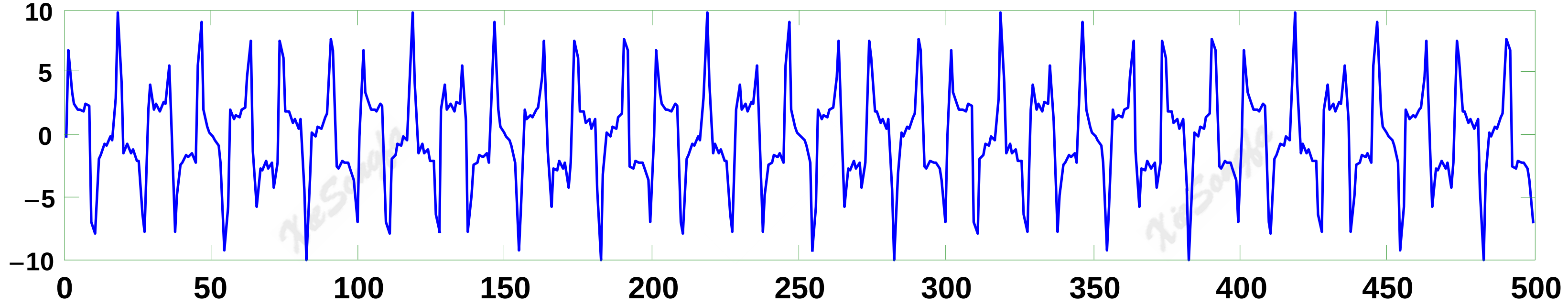
(3) 画出离散序列的功率谱 $\dfrac{|X(k)|^2}{N}$ 。

(4) 计算 $\{X(k)\}_{k=0\sim N}$ 的 IDFT，并与 $\{x(n)\}_{n=0\sim N}$ 进行比较；或者将 $\{X(k)\}$ 作适当的修改后，再计算其 IDFT。

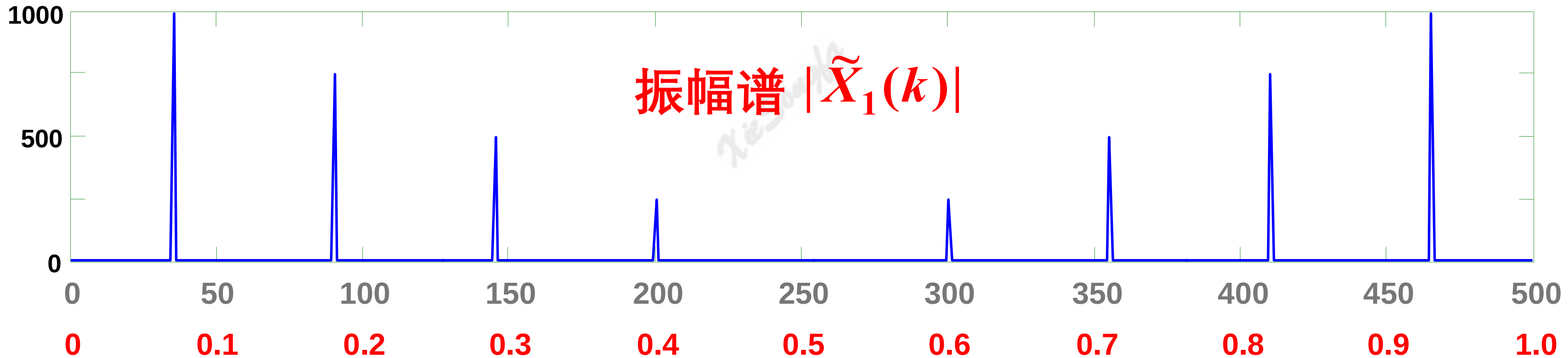
三、对实验信号进行频谱分析

1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

实验结果（一）计算离散序列 $\{\tilde{x}_1(n)\}$ 的 DFT



离散序列 $\tilde{x}_1(n)$

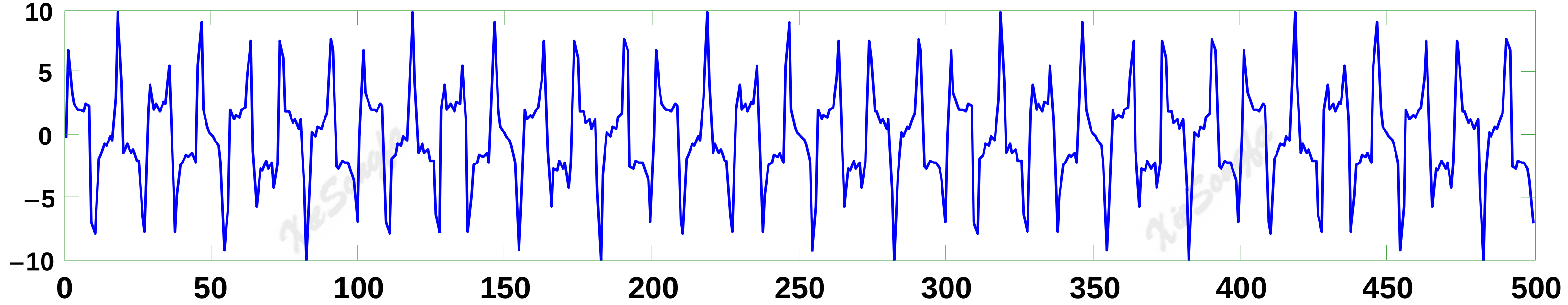


振幅谱 $|\tilde{X}_1(k)|$

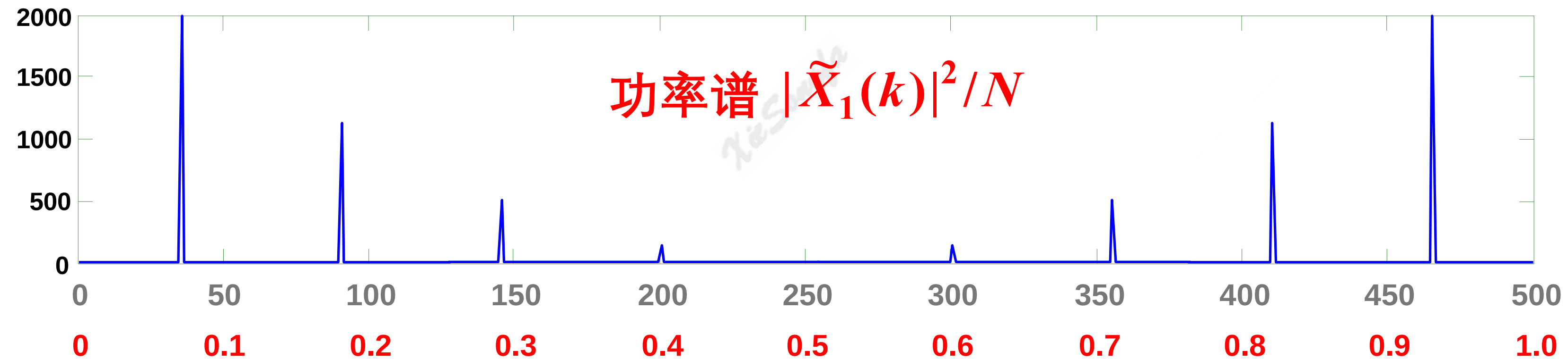
三、对实验信号进行频谱分析

1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

实验结果（一）计算离散序列 $\{\tilde{x}_1(n)\}$ 的 DFT



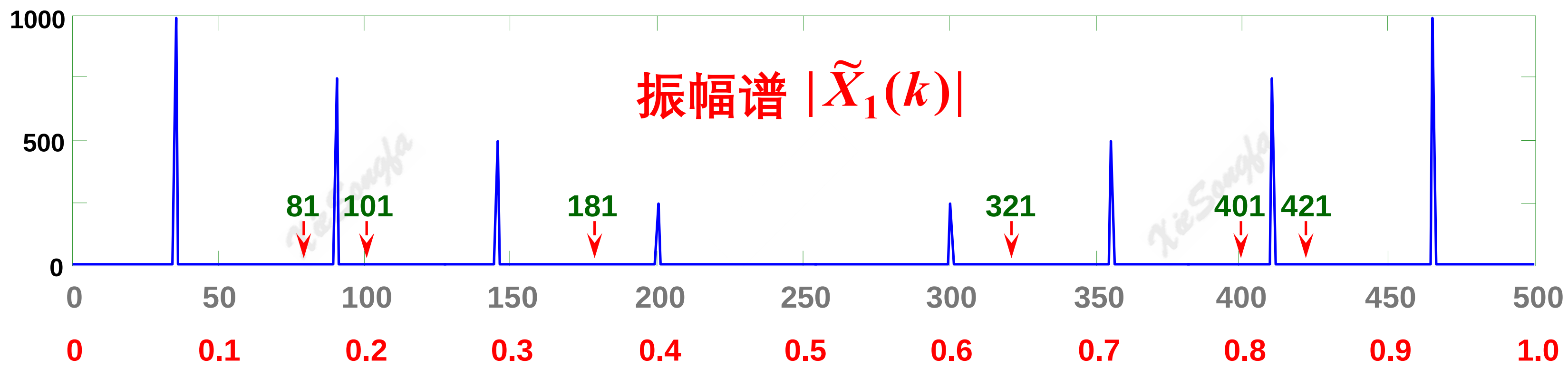
离散序列 $\tilde{x}_1(n)$



三、对实验信号进行频谱分析

1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

实验结果（二）将 $\{\tilde{X}_1(k)\}$ 修改后，再计算它的 IDFT



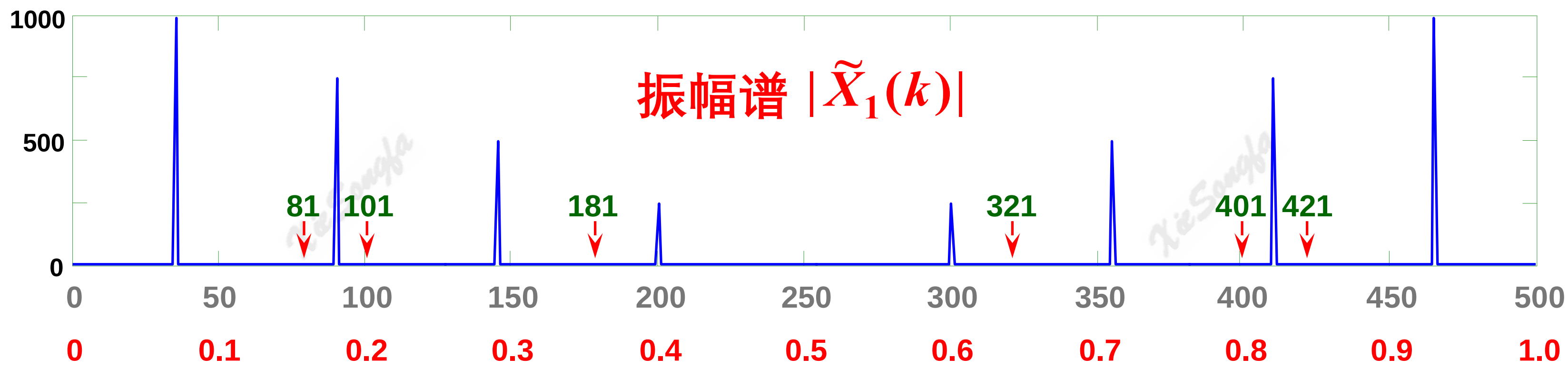
具体 (1) 令 $\tilde{X}_1(80:101)=0$，$\tilde{X}_1(181:321)=0$，$\tilde{X}_1(401:421)=0$.

- 对 $\tilde{X}_1$ 进行修改时，要注意保持它的共轭对称性，其目的是保证 $\tilde{X}_1$ 的 IDFT 仍为实信号。

三、对实验信号进行频谱分析

1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

实验结果（二）将 $\{\tilde{X}_1(k)\}$ 修改后，再计算它的 IDFT



具体 (1) 令 $\tilde{X}_1(80:101)=0$，$\tilde{X}_1(181:321)=0$，$\tilde{X}_1(401:421)=0$.

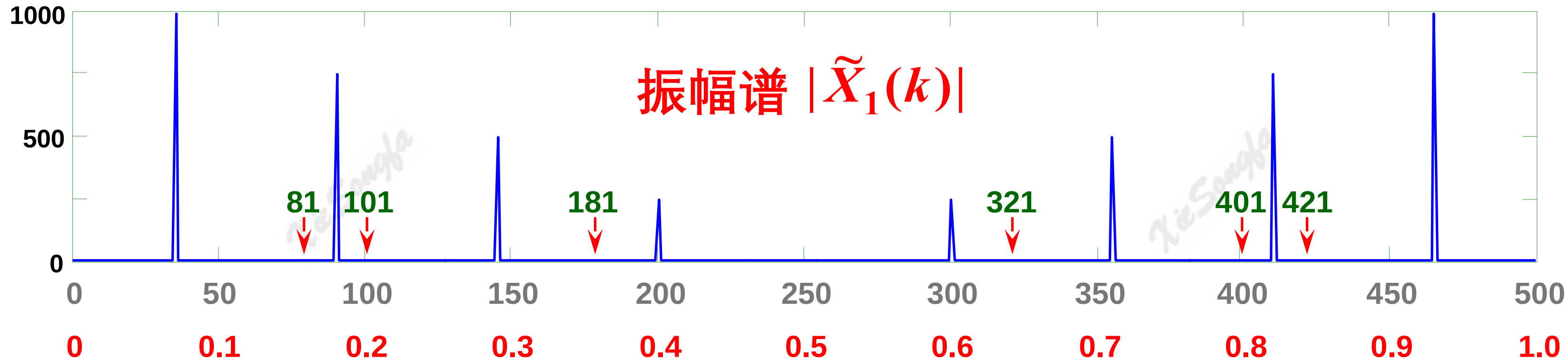
(2) 对修改后的 $\tilde{X}_1$，计算其 IDFT 并取实部，得到 .

- 取实部是为了消除逆变换中仍然存在的虚部残留。

三、对实验信号进行频谱分析

1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

实验结果（二）将 $\{\tilde{X}_1(k)\}$ 修改后，再计算它的 IDFT



具体 (1) 令 $\tilde{X}_1(80:101)=0$，$\tilde{X}_1(181:321)=0$，$\tilde{X}_1(401:421)=0$.

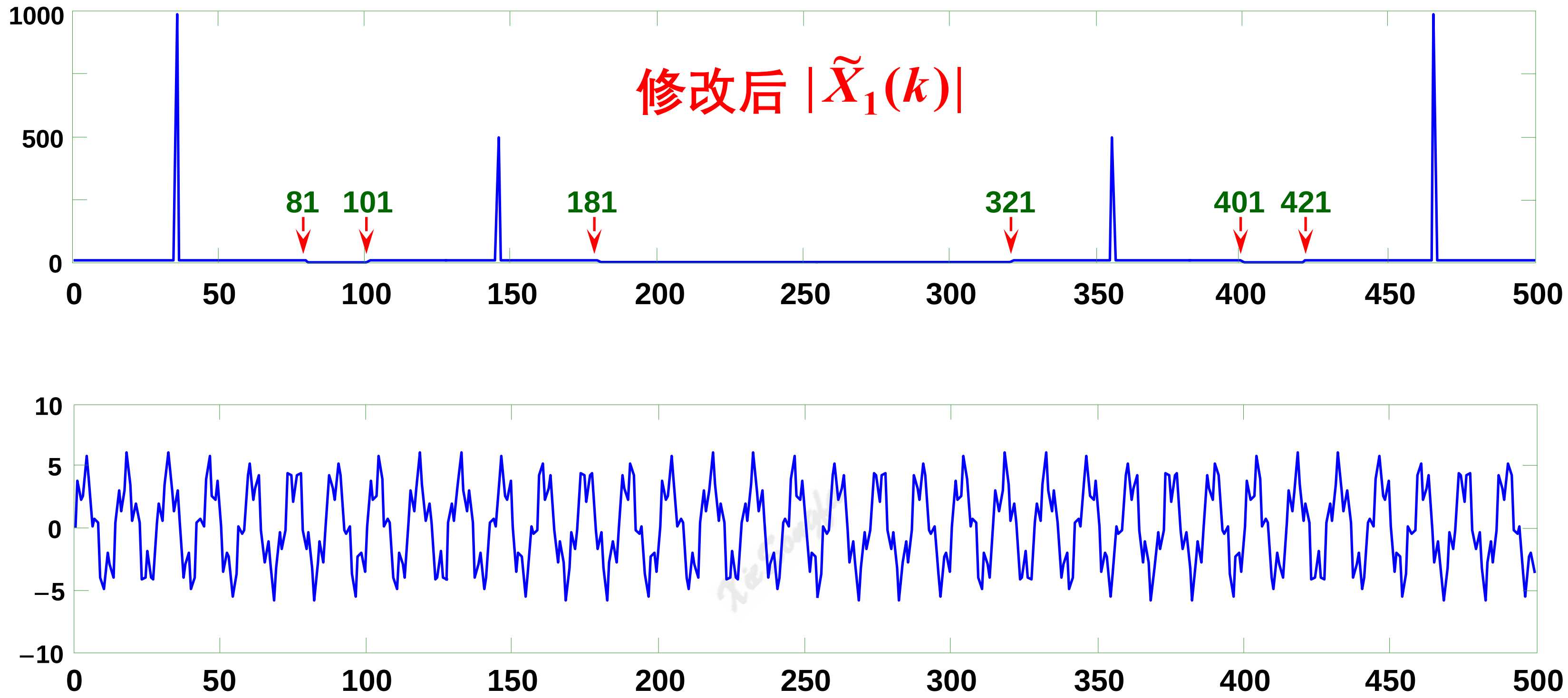
(2) 对修改后的 $\tilde{X}_1$，计算其 IDFT 并取实部，得到 $\hat{x}(n)$.

(3) 将 $\hat{x}(n)$ 与信号 $\sin(14\pi t)+2\sin(58\pi t)$ 进行

三、对实验信号进行频谱分析

1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

实验结果（二）将 $\{\tilde{X}_1(k)\}$ 修改后，再计算它的 IDFT

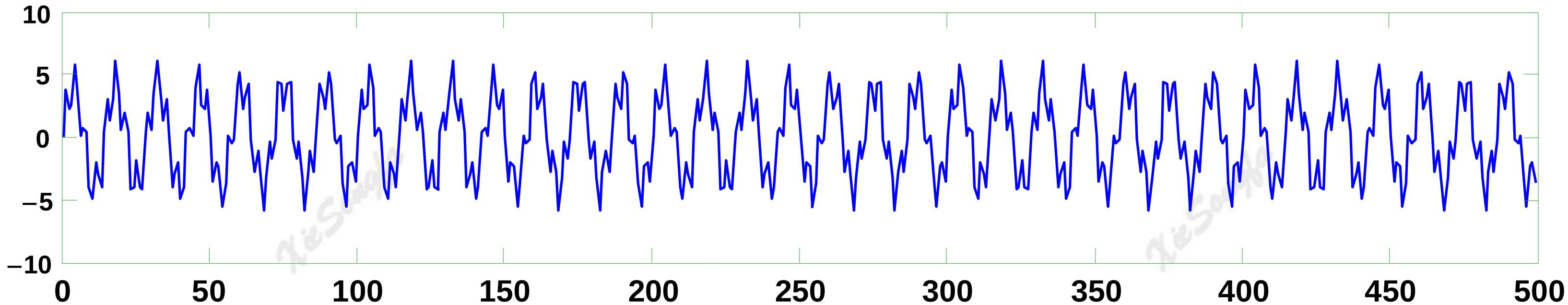


对应的离散序列 $\hat{x}(n)$

三、对实验信号进行频谱分析

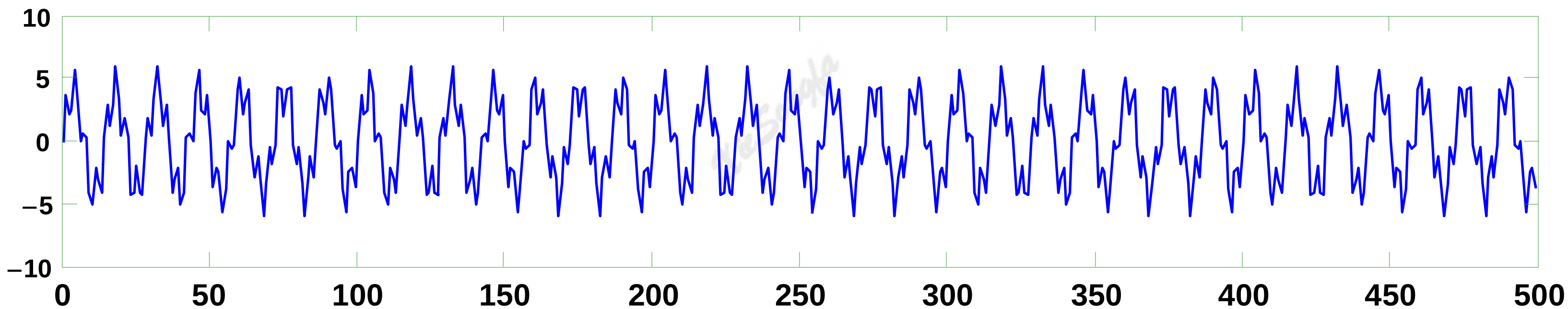
1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

实验结果（二）将 $\{\tilde{X}_1(k)\}$ 修改后，再计算它的 IDFT



对应的离散序列 $\hat{x}(n)$

最大绝对误差 2.59792×10^{-13}

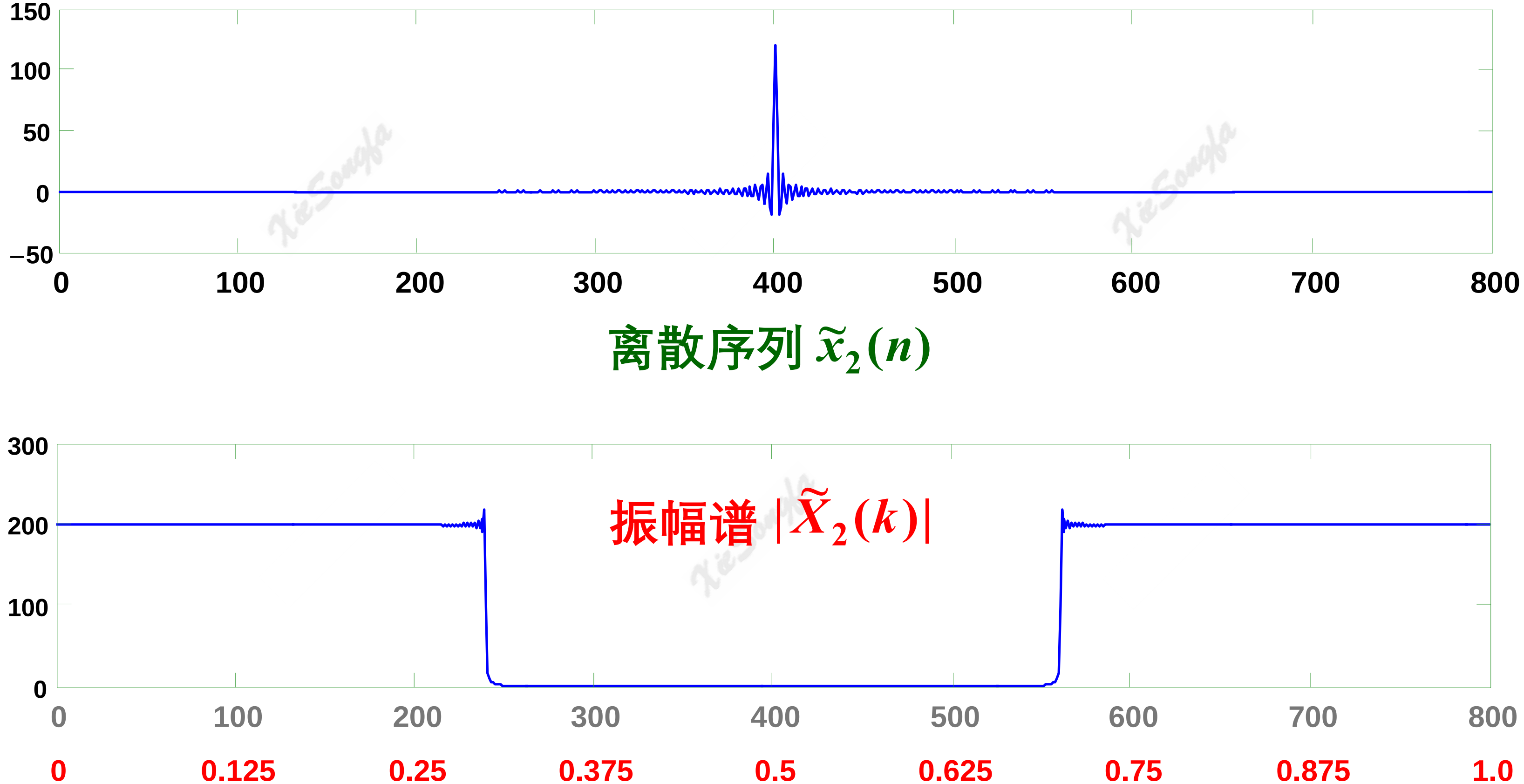


信号 $4\sin(14\pi t)+2\sin(58\pi t)$ 的离散序列

三、对实验信号进行频谱分析

1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

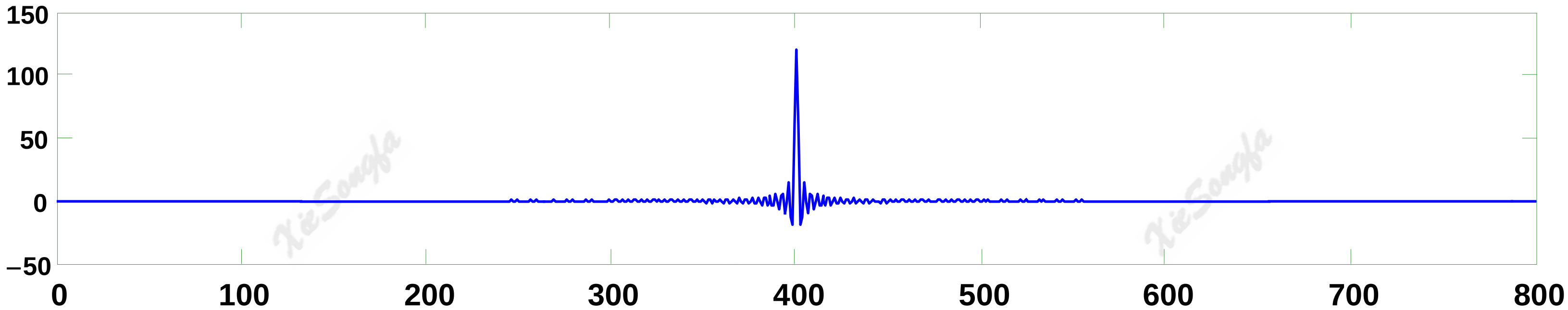
实验结果（三）计算离散序列 $\{\tilde{x}_2(n)\}$ 的 DFT



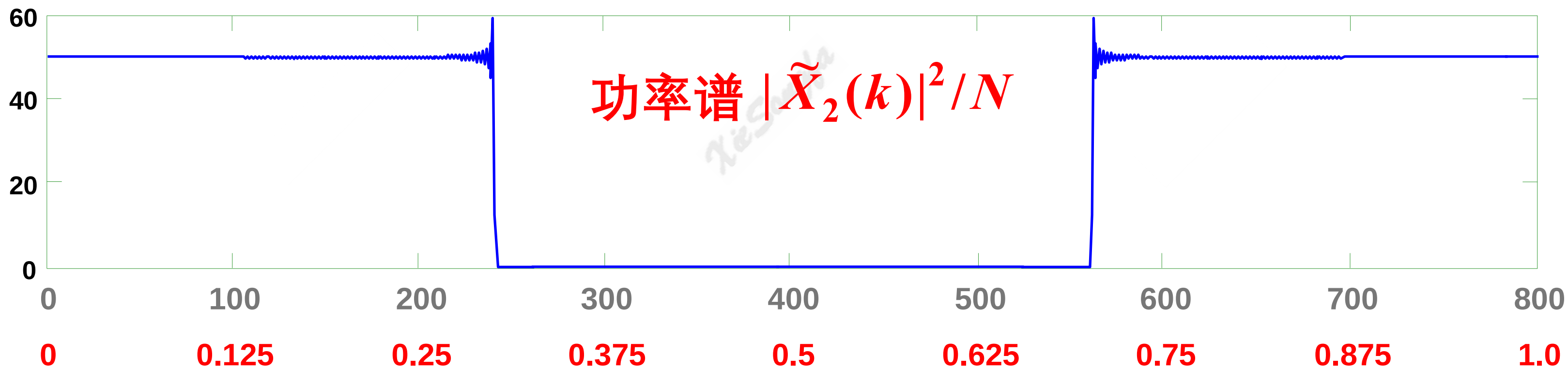
三、对实验信号进行频谱分析

1. 计算离散序列的 DFT 与 IDFT

实验结果（三）计算离散序列 $\{\tilde{x}_2(n)\}$ 的 DFT



离散序列 $\tilde{x}_2(n)$



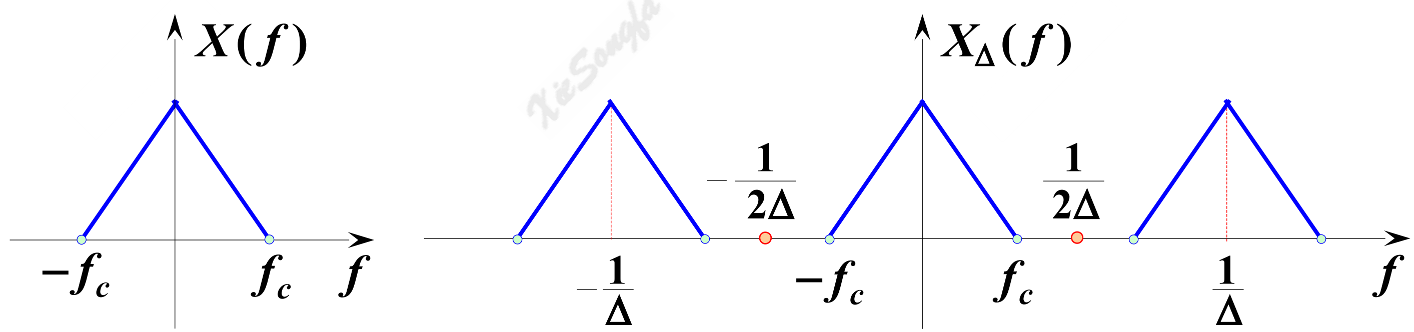
三、对实验信号进行频谱分析

2. 离散时间序列的频谱分析

分析 (1) 连续时间信号 $x(t)$ 以采样间隔 Δ 采样后，得到长为 N 的离散时间信号 $x(n\Delta)$，则它的频谱 $X_\Delta(f)$ 是一个以 $1/\Delta$ 为周期的连续周期函数。

(2) 当 $x(t)$ 为限带信号，且 Δ 满足抽样定理的条件时，则 $X_\Delta(f)$ 是信号 $x(t)$ 的频谱 $X(f)$ 的周期延拓。

（示意图）



三、对实验信号进行频谱分析

2. 离散时间序列的频谱分析

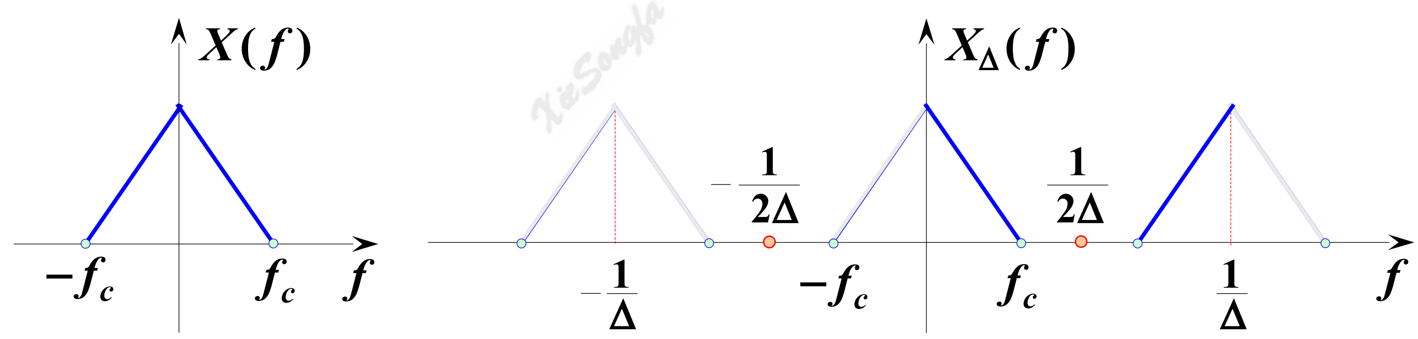
分析 (3) 对于离散序列 $\tilde{x}(n)=x(n\Delta)$，若它的 DFT 为 $\tilde{X}(k)$，

则 $\tilde{X}(k)$ 实际上是连续频谱 $X_\Delta(f)$ 在区间 $[0, 1/\Delta)$

的 N 个等分点上的"值"，即 $X_\Delta(\frac{k}{N\Delta}) = \Delta\tilde{X}(k)$.

- 因此，将标号 k 换算成真正的频率应为 $f_k = \dfrac{k}{N\Delta}$.

（示意图）



三、对实验信号进行频谱分析

2. 离散时间序列的频谱分析

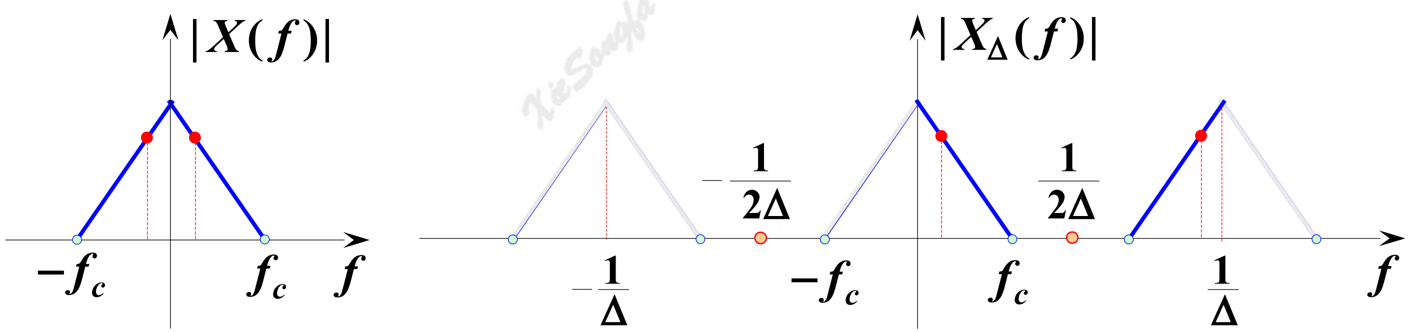
分析 (4) 若 $x(t)$ 为实信号，则有如下的<u>对称性质</u>:

$$|X(f)| = |X(-f)|; \quad |\tilde{X}(k)| = |\tilde{X}(N-k)|.$$

- 因此，只须显示 $\tilde{X}(k)$ 的前面一半即可。

(5) 如果用零将离散序列 $\tilde{x}(n)$ 扩充至长度 N_1 则 $\tilde{X}(k)$ 是 $X_\Delta(f)$ 在 $[0,1/\Delta)$ 内的 N_1 个等分点上的“值

(示意图)



三、对实验信号进行频谱分析

2. 离散时间序列的频谱分析

步骤 (1) 记 $\tilde{x}(n)=x(n\Delta)$, $n=0,1,2,\cdots,N-1$.

(2) 计算 $\tilde{x}(n)\xrightarrow{\text{DFT(FFT)}}\tilde{X}(k)$, $k=0,1,2,\cdots,N-1$.

(3) 令 $X(k)=\Delta\tilde{X}(k)$, $k=0,1,2,\cdots,\dfrac{N}{2}-1$.

计算 $P_k=\dfrac{|X(k)|^2}{N}$, （离散功率谱）

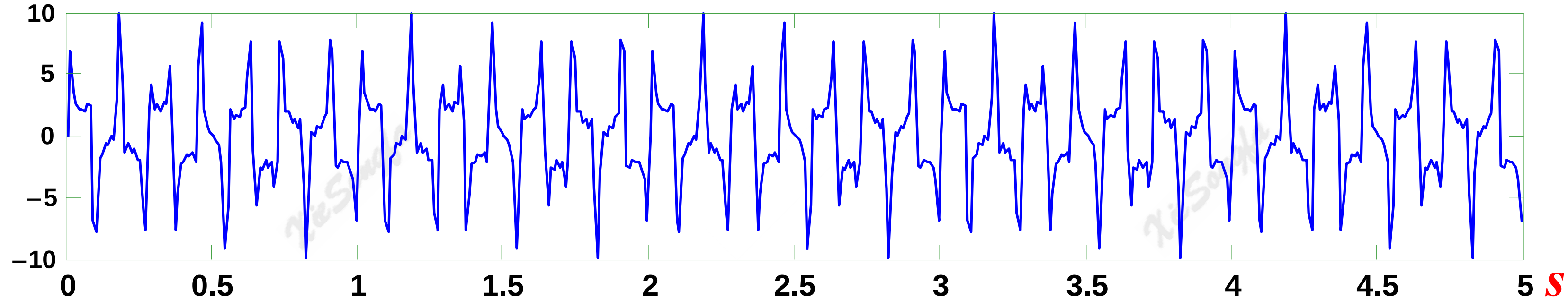
$f_k=\dfrac{k}{N\Delta}$. （频率节点）

(4) 以 f_k 为横坐标 P_k 为纵坐标作图。

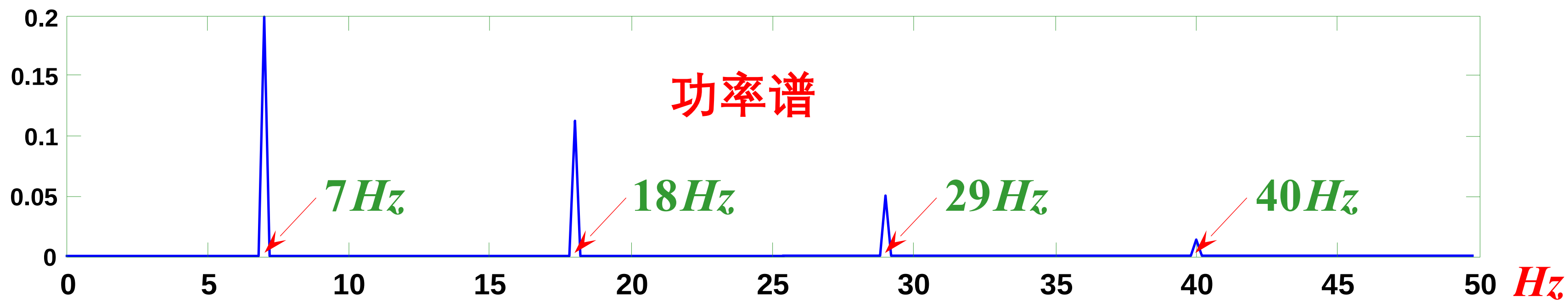
三、对实验信号进行频谱分析

2. 离散时间序列的频谱分析

实验结果（一）计算离散时间信号 $\{x_1(n\Delta_1)\}$ 的频谱



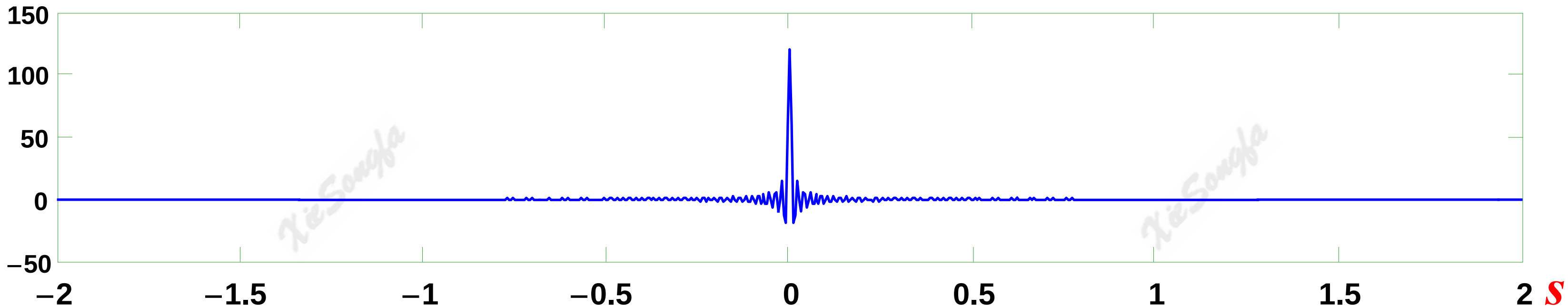
离散时间信号 $x_1(n\Delta_1)$



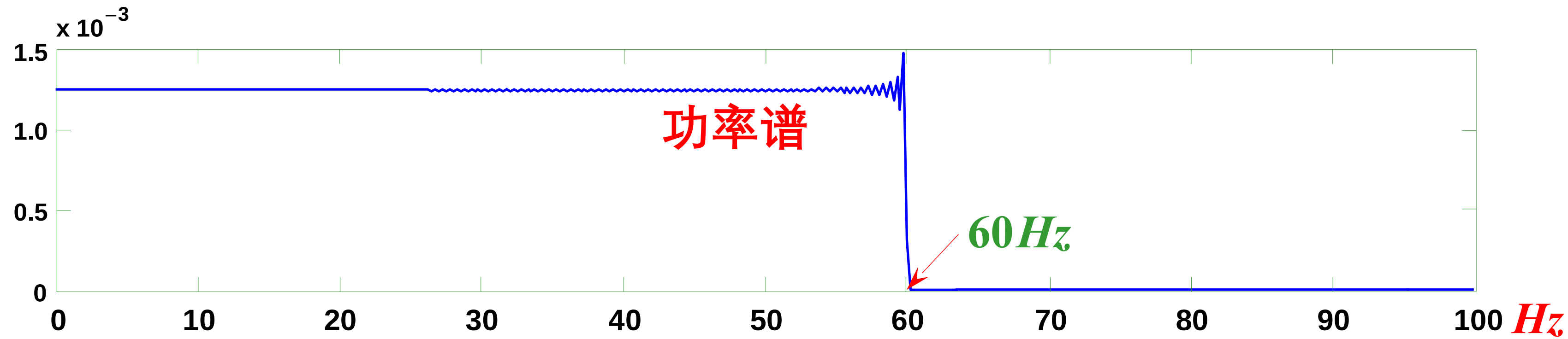
三、对实验信号进行频谱分析

2. 离散时间序列的频谱分析

实验结果（二）计算离散时间信号 $\{x_2(n\Delta_2)\}$ 的频谱



离散时间信号 $x_2(n\Delta_2)$



*四、试对二维信号进行频谱分析

1. 二维信号（图像）示例

灰度图像

彩色图像

*四、试对二维信号进行频谱分析

2. 二维离散 Fourier 变换

- 考虑二维离散信号$x(m,n)$ $m=0\sim M-1$ $n=0\sim N-1$ 。

- DFT(正变换):

$$X(k,l)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}x(m,n)W_M^{km}W_N^{ln},\quad \begin{pmatrix} k=0\sim M-1 \\ l=0\sim N-1 \end{pmatrix}.$$

- IDFT(逆变换):

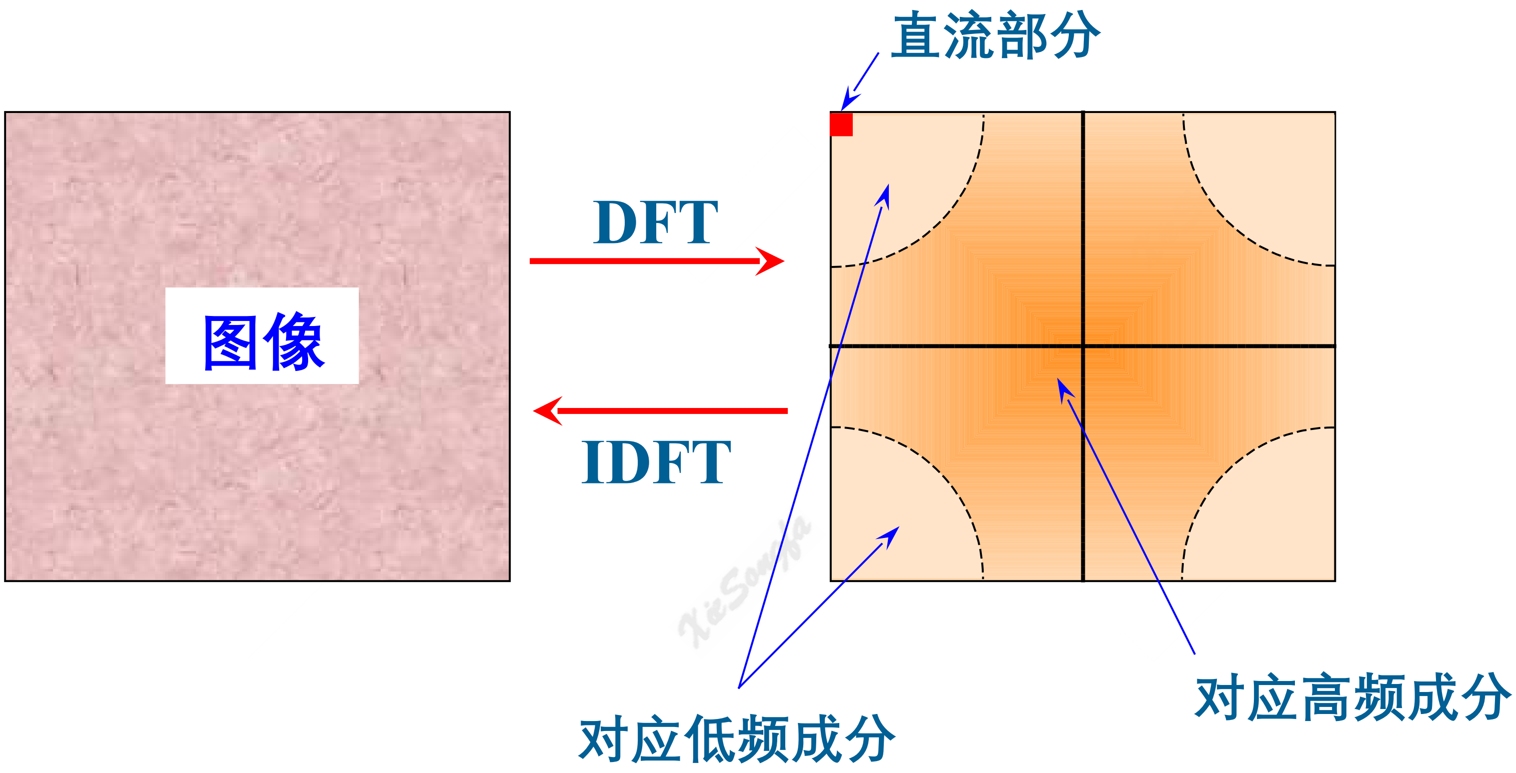
$$x(m,n)=\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}X(k,l)W_M^{km}W_N^{ln},\quad \begin{pmatrix} m=0\sim M-1 \\ n=0\sim N-1 \end{pmatrix}.$$

其中，$W_N=\mathrm{e}^{-j2\pi/N}$，$W_M=\mathrm{e}^{-j2\pi/M}$.

*四、试对二维信号进行频谱分析

2. 二维离散 Fourier 变换

- 物理意义



*四、试对二维信号进行频谱分析

2. 二维离散 Fourier 变换

(1) 可分性

$$X(k,l)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{M-1}x(m,n)W_M^{km}\right]W_N^{ln},\quad \begin{pmatrix} k=0\sim M-1 \\ l=0\sim N-1 \end{pmatrix}.$$

- 因此，一个二维信号的 DFT 的计算可以依次对行和列进行一维信号的 DFT 来完成。

(2) 平移性

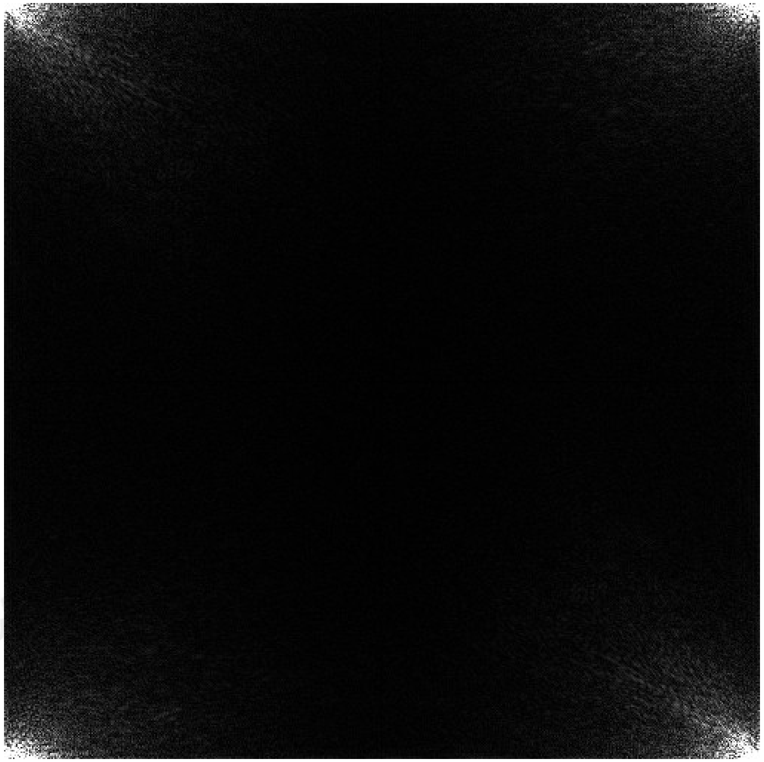
$$x(m,n)\cdot(-1)^{m+n}\xrightarrow{\text{DFT}}X(k-M/2,\,l-N/2).$$

- 称此为二维信号的中心 DFT 。

*四、试对二维信号进行频谱分析

3. 二维信号的 DFT 示例

原始图像

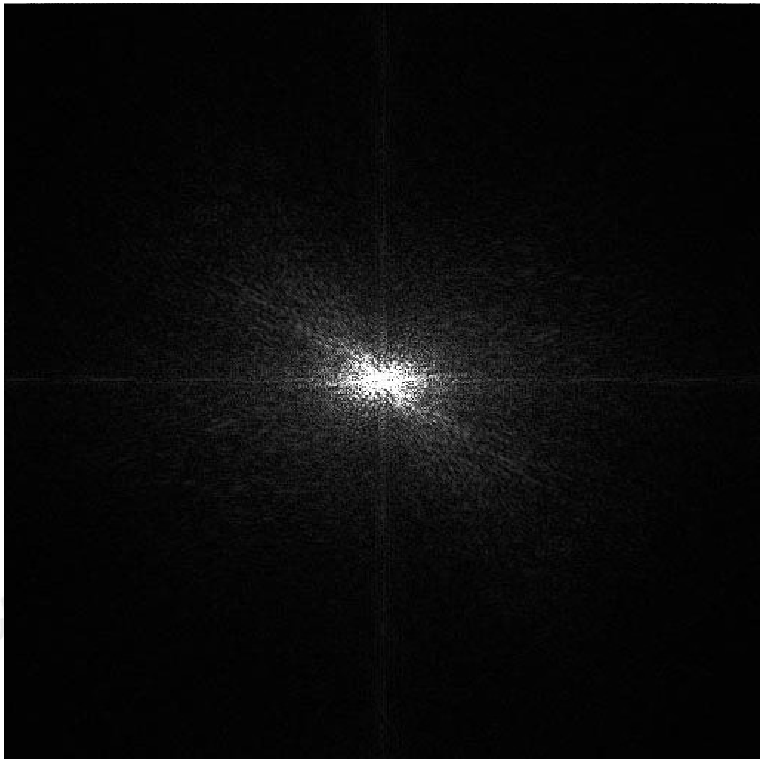


对应的频谱

*四、试对二维信号进行频谱分析

3. 二维信号的 DFT 示例

原始图像

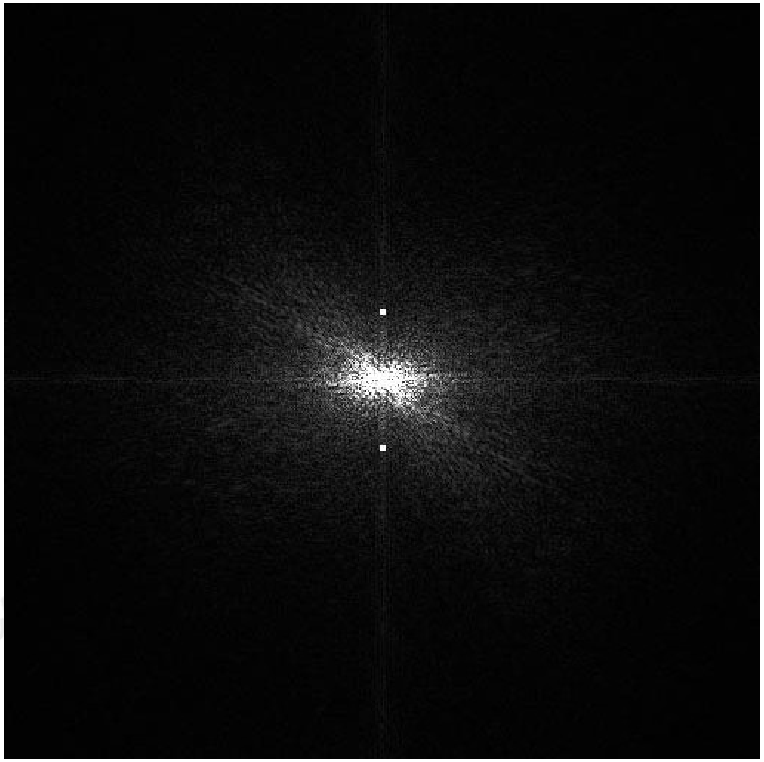


中心 DFT

*四、试对二维信号进行频谱分析

3. 二维信号的 DFT 示例

受正弦波干扰后的图像



中心 DFT