

第 2 周作业

A: 练习册练习二

B: 要求抄题, 用 A4 大小的纸作答, 要求书写工整, 答题纸整洁

1、计算行列式

$$(1) \quad D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$$

$$(2) \quad D = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad D = \begin{vmatrix} 1-a & a & & & \\ -1 & 1-a & a & & \\ & -1 & 1-a & a & \\ & & -1 & 1-a & a \\ & & & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

2、形如 $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}$ 的行列式称为反对称行列式. 求

奇数阶 (n 为奇数) 反对称行列式的值。

3、求下面方程的根.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 4 & 3 & x^2 \\ 1 & 8 & 6 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & -2 & x^2 \\ 1 & 8 & -7 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

C: 选做题, 用 A4 大小的纸作答, 要求书写工整, 答题纸整洁

1. 寻找各自专业领域的线性方程组。

2. 做如下的两个观察：

(1) 考虑行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac). \end{aligned}$$

我们立刻得到因式分解

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac).$$

(2) 设 $\triangle ABC$ 在平面直角坐标系中三个顶点的坐标为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

的绝对值，由此我们立刻可以得到三点共线的条件

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

可以看到，行列式在一些领域有很多有意思的应用。任意选择一个你感兴趣的领域（包括但不限于上面的两个领域），探索行列式的应用。