§9.3 Laplace 逆变换

一、反演积分公式—— Laplace 逆变换公式

二、求 Laplace 逆变换的方法

一、反演积分公式 —— Laplace 逆变换公式

1. 公式推导

推导 (1) 由 Laplace 变换与 Fourier 变换的关系可知，

> 函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=F(\beta+j\omega)$
>
> 就是函数 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换，

即 $F(s)=F(\beta+j\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t.$

(2) 根据 Fourier 逆变换，在 $f(t)$ 的连续点 t 处，有

$$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

一、反演积分公式 —— Laplace 逆变换公式

1. 公式推导

推导 (2) 根据 Fourier 逆变换在 $f(t)$ 的连续点 t 处，有

$$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

(3) 将上式两边同乘 $\mathrm{e}^{\beta t}$，并由 $\beta+j\omega$，有

$$f(t)u(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s.$$

即得 $\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\ (t>0).}$

一、反演积分公式 —— Laplace 逆变换公式

2. 反演积分公式

- 根据上面的推导，得到如下的 Laplace 变换对：

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt; \qquad (A)$$

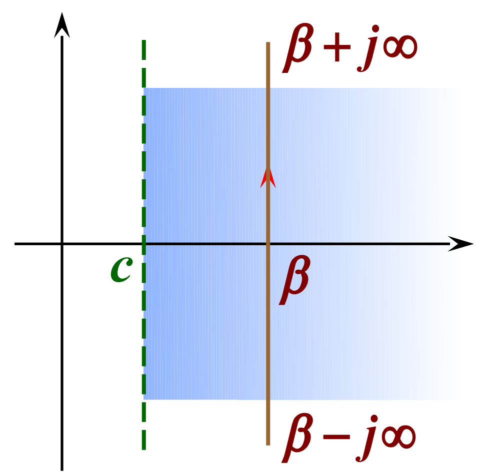
$$\Updownarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}\,ds,\ (t>0). \qquad (B)$$

P228（9.16）式

定义 称 (B) 式为反演积分公式。

注 反演积分公式中的积分路径是 s 平面上的一条直线 $\mathrm{Re}\,s=\beta$，该直线处于 $F(s)$ 的存在域中。



二、求 Laplace 逆变换的方法

1. 留数法

- 利用留数计算反演积分。

定理 设函数$F(s)$ 除在半平面 $\operatorname{Re} s \le c$ 内有有限个孤立奇点 $s_1, s_2, \cdots s_n$ 外是解析的，且当 $s \to \infty$ 时 $F(s) \to 0$，则

P228 定理 9.2

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}\,s$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[\,F(s)\,\mathrm{e}^{st},\ s_k\,],\ \ (t>0).$$

证明（略） （进入证明？）

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法 常用

- 利用 Laplace 变换的性质，并根据一些已知函数的 Laplace 变换来求逆变换。

- 大多数情况下，象函数(s) 常常为（真）分式形式：

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)},$$ 其中，$P(s)$ 和 $Q(s)$ 是实系数多项式。

由于真分式总能进行部分分式分解，因此，利用查表法很容易得到象原函数。 （真分式的部分分式分解）

- 此外，还可以利用卷积定理来求象原函数。

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法

- 几个常用的 Laplace 逆变换的性质

$$\mathscr{L}^{-1}[aF(s)+bG(s)]=af(t)+bg(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s-a)]=\mathrm{e}^{at}f(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F'(s)]=-tf(t).\qquad \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}F(s)]=\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法

- 几个常用函数的 Laplace 逆变换

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}]=1.$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{m!}{s^{m+1}}]=t^m.$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+b^2}]=\cos bt.$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{b}{s^2+b^2}]=\sin bt.$$

$$\mathcal{L}^{-1}[1]=\delta(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}]=\mathrm{e}^{at}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}]=\mathrm{e}^{at}\,t^m.$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}]=\mathrm{e}^{at}\cos bt.$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{b}{(s-a)^2+b^2}]=\mathrm{e}^{at}\sin bt.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法一 利用查表法求解

(1) $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}=\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{3}{s-2}$. （单根）

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-a}]=e^{at}$，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

$$=2\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+1}]+3\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}]$$

$$=2e^{-t}+3e^{2t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法二 利用留数法求解

(1) $s_1=-1,\ s_2=2$ 为$F(s)$ 的一阶极点，

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-1]=\frac{5s-1}{s-2}e^{st}\Big|_{s=-1}=2e^{-t},$$

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st},2]=\frac{5s-1}{s+1}e^{st}\Big|_{s=2}=3e^{2t}.$$

(2) $f(t)=\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-1]+\mathrm{Res}[F(s)e^{st},2]$

$$=2e^{-t}+3e^{2t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

P229 例 9.17

解 方法一 利用查表法求解

$$(1)\ F(s)=\frac{1}{(s-2)(s-1)^2}$$

$$=\frac{1}{s-2}+\frac{-1}{s-1}+\frac{-1}{(s-1)^2}.\quad（重根）$$

$$(2)\ 由\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=\mathrm{e}^{at},\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right]=t\,\mathrm{e}^{at},\ 有$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}-t\,\mathrm{e}^{t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法二 利用留数法求解

(1) $s_1=2,\ s_2=1$ 分别为$F(s)$ 的一阶与二阶极点，

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},2]=\frac{1}{(s-1)^2}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=2}=\mathrm{e}^{2t},$$

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},1]=\left(\frac{\mathrm{e}^{st}}{s-2}\right)'\Big|_{s=1}=-\mathrm{e}^{t}-t\,\mathrm{e}^{t}.$$

(2) $f(t)=\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},2]+\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},1]$

$$=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}-t\,\mathrm{e}^{t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2-2s+5)(s-3)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法一 利用查表法求解

(1) $F(s)=\dfrac{(s+1)^2}{[(s-1)^2+4](s-3)}$

$$=\frac{2}{s-3}+\frac{-1\cdot(s-1)+2\cdot 1}{(s-1)^2+2^2},$$ （复根）

$$=\frac{A}{s-3}+\frac{B(s-1)+2\cdot C}{(s-1)^2+2^2},$$

$\Rightarrow (s+1)^2=A[(s-1)^2+2^2]+[B(s-1)+2C](s-3),$

令 $s=3$，得 $A=2$；

令 $s=1+2i$，得 $(1+2i)^2=(2iB+2C)(2i-2),$

$\Rightarrow B=-1,\ C=1,$

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2-2s+5)(s-3)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法一 利用查表法求解

(1) $$F(s)=\frac{(s+1)^2}{[(s-1)^2+4](s-3)}=2\cdot\frac{1}{s-3}-\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}+\frac{2}{(s-1)^2+2^2},$$

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-a}]=\mathrm{e}^{at}$,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}]=\mathrm{e}^{t}\cos 2t,$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{2}{(s-1)^2+2^2}]=\mathrm{e}^{t}\sin 2t,$$

得 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=2\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{t}\cos 2t-\mathrm{e}^{t}\sin 2t$.

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2-2s+5)(s-3)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法二 利用留数法求解（略讲）

(1) $s_1=3$，$s_{2,3}=1\pm 2i$ 为$F(s)$ 的一阶极点，

$$\operatorname{Res}[F(s)e^{st},3]=2e^{3t},$$

$$\operatorname{Res}[F(s)e^{st},1\pm 2i]=-\frac{1\pm i}{2}e^{(1\pm 2i)t}.$$

(2) $$f(t)=2e^{3t}-\frac{1+i}{2}e^{(1+2i)t}-\frac{1-i}{2}e^{(1-2i)t}$$

$$=2e^{3t}-e^{t}\cos 2t-e^{t}\sin 2t.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法一 利用查表法求解

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t)=1-e^t+te^t.$$

方法二 利用留数法求解

$s_1=0,\ s_2=1$ 分别为 $F(s)$ 的一阶与二阶极点，

$$f(t)=\mathrm{Res}[F(s)e^{st},0]+\mathrm{Res}[F(s)e^{st},1]$$

$$=\left.\frac{e^{st}}{(s-1)^2}\right|_{s=0}+\left.\left(\frac{e^{st}}{s}\right)'\right|_{s=1}=1-e^t+te^t.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法三 利用卷积定理求解

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]*\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$=t\,\mathrm{e}^t*1=\int_0^t \tau\,\mathrm{e}^\tau\cdot 1\,\mathrm{d}\tau=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

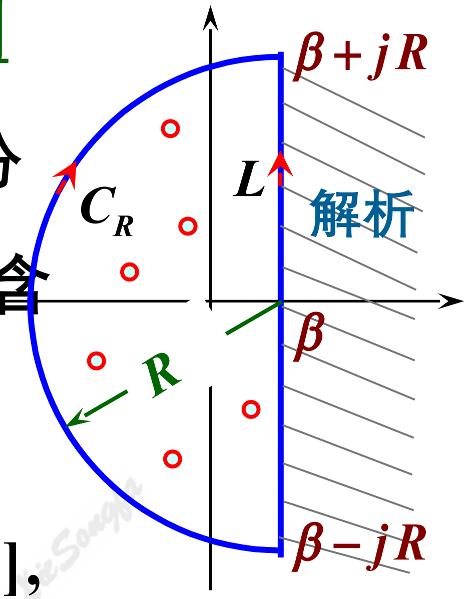
方法四 利用积分性质求解 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}G(s)\right]=\displaystyle\int_0^t g(t)\,\mathrm{d}t.$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right]=\int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^t t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

轻松一下 ……

附：利用留数计算反演积分的定理证明



证明 如图，作闭曲线 $C=L+C_R$，当 R 充分大时，可使 $F(s)e^{st}$ 的所有奇点包含在 C 围成的区域内由留数定理有：

$$\oint_C F(s)e^{st}\mathrm{d}s=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k],$$

$$=\int_L F(s)e^{st}\mathrm{d}s+\int_{C_R}F(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

由若尔当引理 (§5.3)，当 $t>0$ 时 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}F(s)e^{st}\mathrm{d}s=0,$

即得 $\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k].$

（返回）

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

1. $Q(s)$ 含单重一阶因子的情况

若 $Q(s)$ 含单重一阶因子 $(s-a)$，即 $Q(s)=(s-a)Q_1(s)$，

则 $F(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}=\dfrac{P(s)}{(s-a)Q_1(s)}=\dfrac{A}{s-a}+\dfrac{P_1(s)}{Q_1(s)}$，

将上式两边同乘以 $(s-a)$ 得

$$\frac{P(s)}{(s-a)Q_1(s)}(s-a)=A+\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}(s-a),$$

令 $s=a$，即得 $A=\left.\dfrac{P(s)}{Q_1(s)}\right|_{s=a}=\dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$.

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

2. $Q(s)$ 含多重一阶因子的情况

若 $Q(s)$ 含多重一阶因子 $(s-a)^m$，即 $Q(s)=(s-a)^m Q_2(s)$,

则 $F(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}=\dfrac{P(s)}{(s-a)^m Q_2(s)}$

$$=\frac{A_0}{(s-a)^m}+\frac{A_1}{(s-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{s-a}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)},$$

将上式两边同乘以 $(s-a)^m$ 得

$$\frac{P(s)}{Q_2(s)}=A_0+A_1(s-a)+\cdots+A_{m-1}(s-a)^{m-1}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}(s-a)^m,$$

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

2. $Q(s)$ 含多重一阶因子的情况

$$\frac{P(s)}{Q_2(s)}=A_0+A_1(s-a)+\cdots+A_{m-1}(s-a)^{m-1}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}(s-a)^m,$$

令 $s=a$，即得 $A_0=\left.\dfrac{P(s)}{Q_2(s)}\right|_{s=a}=\dfrac{P(a)}{Q_2(a)}$，

两边逐次求导，并令 $s=a$，即得

$$A_k=\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\left(\frac{P(s)}{Q_2(s)}\right)\bigg|_{s=a}\quad(k=1,\,2,\,\cdots,\,m-1).$$

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

- 上面讨论了$Q(s)$含单重和多重一阶因子的情况，如果在复数范围内进行分解，这两种情况已经够了。

- 但如果仅在实数范围内进行分解，这两种情况还不够。

- 由于实系数多项式的复零点总是互为共轭地成对出现的，即如果复数$z=a+jb$为$Q(s)$的零点，那么它的共轭$\bar{z}=a-jb$也必为$Q(s)$的零点因此，$Q(s)$必含有（实的）二阶因子$(s-z)(s-\bar{z})=(s-a)^2+b^2$.

- 下面需进一步讨论含实二阶因子的情况。

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

3. $Q(s)$ 含单重二阶因子的情况

若 $Q(s)$ 含单重二阶因子 $(s-a)^2+b^2$，即

$$Q(s)=[(s-a)^2+b^2]Q_3(s),$$

则 $$F(s)=\frac{P(s)}{[(s-a)^2+b^2]Q_3(s)}=\frac{C(s-a)+bD}{(s-a)^2+b^2}+\frac{P_3(s)}{Q_3(s)}$$

将上式两边同乘以 $(s-a)^2+b^2$，得

$$\frac{P(s)}{Q_3(s)}=C(s-a)+bD+\frac{P_3(s)}{Q_3(s)}[(s-a)^2+b^2],$$

令

$s=a+jb$，有 $$\frac{P(a+jb)}{Q_3(a+jb)}=jbC+bD,$$

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

3. $Q(s)$ 含单重二阶因子的情况

令

$$s=a+jb,\ 有\ \frac{P(a+jb)}{Q_3(a+jb)}=jbC+bD,$$

则 $C=\dfrac{1}{b}\mathrm{Im}[\dfrac{P(a+jb)}{Q_3(a+jb)}]$, $D=\dfrac{1}{b}\mathrm{Re}[\dfrac{P(a+jb)}{Q_3(a+jb)}]$.

求出系数 C 和 D 后，则 $\dfrac{C(s-a)+bD}{(s-a)^2+b^2}$ 的逆变换不难得到

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{C(s-a)+bD}{(s-a)^2+b^2}]=\mathrm{e}^{at}(C\cos bt+D\sin bt).$$

4. $Q(s)$ 含多重二阶因子的情况（略）

（返回）