# 练　习　十　二

1．一个解析函数所构成的映射在什么条件下具有伸缩和旋转角的不变性？映射 $w=z^2$ 在z平面上处处都具有这个性质吗？

解：当解析函数 $f(z)$，满足 $f'(z)\neq 0$ 时，具有伸缩和旋转不变性

$w=z^2$, 则 $w'=2z$, 当$z\neq 0$时, 有$w\neq 0$，因而只有当 $z\neq 0$ 时，映射

$w=z^2$ 具有伸缩和旋转不变性。

2．求 $f(z)=z^3$ 在下列各点处的导数值，并根据导数的几何意义解释这些结果。

（1） $z_1=i$；　　　　（2） $z_2=1-i$；　　　　（3） $z_3=0$

解： $f'(z)=3z^2$

（1）当 $z_1=i$ 时, $|f'(z_1)|=3$， $\arg f'(z_1)=\pi$ 映射 $f(z)=z^3$ 在 $z=i$ 处具有保解性且伸缩率不变，伸缩率为3，旋转角为π。

（2） $z_2=1-i$ 时, $|f(z_2)|=6$， $\arg f'(z_2)=-\dfrac{\pi}{2}$ 映射 $f(z)=z^3$ 在 $z=1-i$ 处具有保角性且伸缩率不变，伸缩率为6，旋转角为$-\dfrac{\pi}{2}$。

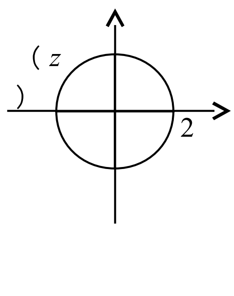
（3） $z_3=0$ 时, $|f'(z_3)|=0, \arg f'(z_3)=0$ 且映射 $f(z)=z$ 在 $z=0$ 处不具有保角性。

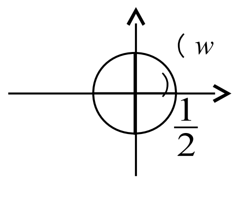
3．在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下，求下列曲线的像。

（1） $x^2+y^2=4$

解： $w=\dfrac{1}{z}\Rightarrow z=\dfrac{1}{w}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}\Rightarrow x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$， $y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

$x^2+y^2=4\Rightarrow u^2+v^2=(\dfrac{1}{2})^2$

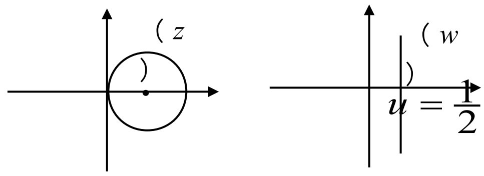


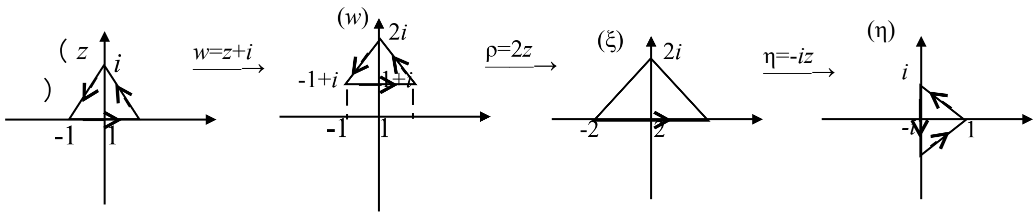
（2）$(x-1)^2+y^2=1$

解：$x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$，$y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

$$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow u=\frac{1}{2}$$




4．一个以 $z_1=i, z_2=-1, z_3=1$ 为顶点的三角形内部在映射 $w=z+i, \xi=2z, \eta=-iz$ 下分别变为怎样的区域。




*5．思考题

（1）为什么在论述导数的几何意义时，要假定 $f'(z_0)\neq 0$ 。

答：若在 $z_0$ 处 $f'(x0)=0$，则 $\arg f'(z_0)$ 不确定。

（2）若 $z_1$ 与 $z_2$ 关于一圆周对称，在 $w=\dfrac{1}{z}$ 的映射下，它们的象在 $w$ 平面上是否也关于某一圆周对称？若 $z_1$ 与 $z_2$ 关于某直线对称，在 $w=\dfrac{1}{z}$ 的映射下，它们的象在 $w$ 平面上能否关于某圆周对称？

答：它们的象在 $w$ 平面上关于某一圆周（将直线看作圆周）对称，可能关于某一圆周对称。