2008～2009 学年第一学期
《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A 卷)

院(系)________专业班级_________学号_____________姓名_________

考试日期: 2008 年 11 月 24 日　　　　**考试时间:** 晚上 7:00~9:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得　分	
评卷人	

一、填空题 (每空 2 分，共 20 分)

1．复数 $\dfrac{-2+3i}{3+2i}$ 的主辐角为_____.

2．函数 $f(z)=x^3-3xy^2+i(y^3-3x^2y)$ 在何处可导? ______,

何处解析? _________.

3．$\mathrm{Ln}(-3+4i)$ 的值为_________________.

4．级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{i^n}{n}$ 是否收敛? ____; 是否绝对收敛? _____.

5．函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{z}{z-1}}$ 在 $z=0$ 点展开成泰勒(Taylor)级数的收敛半径

为_____.

6．区域 $D=\{z:-\pi<\mathrm{Im}\,z<0\}$ 在映射 $w=\mathrm{e}^z$ 下的像为_____.

7．映射 $f(z)=2z^3+3z^2$ 在 $z=i$ 处的旋转角为_____.

8．函数 $f(t)=\delta(t-1)(t-2)^2\cos t$ 的 Fourier 变换为_______.

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

二、计算题 (每题 5 分，共 20 分)

1. $\oint_{|z|=3} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+1)^3}\,\mathrm{d}z$

2. $\oint_{|z|=3} z\cos\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} \quad (a>1)$

解答内容不得超过装订线

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$

得　分	
评卷人	

三、(14 分)已知 $u(x,y)=x^2+ay^2+xy$，求常数 a 以及二元函数 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(i)=-1+i$.

得　分	
评卷人	

四、(14分)将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 分别在 $z=0$ 点和 $z=-i$ 点展开为洛朗(Laurent)级数.

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

五、(6 分)求区域 $D=\{z:\ \mathrm{Re}\,z>0,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ 在映射 $w=\dfrac{z^2+i}{z^2-i}$ 下的像.

得　分	
评卷人	

六、(10 分)求把区域 $D=\{z:\ |z|<1,\ 0<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\}$ 映射到上半平面的共形映射.

得　分	
评卷人	

七、(10分)利用 Laplace 变换求解微分方程:

$$x''(t)-2x'(t)-4x(t)=0\,,\quad x(0)=0,\ x'(0)=1\,.$$

得　分	
评卷人	

八、(6分)已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的系数满足:

$$a_0=a_1=1\,,\quad a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\ (n\ge 2)\,,$$

该级数在 $|z|<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 内收敛到函数 $f(z)$，证明:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=0.6}\frac{1+\xi^2 f(\xi)}{(\xi-z)(1-\xi)}\,\mathrm{d}\xi=f(z)\,,\quad (|z|<0.6)\,.$$