



# 黎曼

(1826~1866)

## 简介

黎曼(B. Riemann)，德国人，是世界数学史上最具独创精神的数学家之一。黎曼的著作不多，但却异常深刻，极富于对概念的创造与想象。黎曼在其短暂的一生中为数学的众多领域作了许多奠基性、创造性的工作，为世界数学建立了丰功伟绩。

## 生平

1826年9月17日，黎曼生于德国北部汉诺威的布雷塞伦茨村，父亲是一个乡村的穷苦牧师。他6岁开始上学，14岁进入大学预科学习，19岁按其父亲的意愿进入哥廷根大学攻读哲学和神学，以便将来继承父志也当一名牧师。当时的哥廷根大学是世界数学的中心之一，一些著名的数学家如高斯、韦伯、斯特尔都在校执教。黎曼被这里的数学教学和数学研究的气氛所感染，决定放弃神学，专攻数学。

1847年，黎曼转到柏林大学学习，成为雅可比、狄利克雷、施泰纳、艾森斯坦的学生。1849年回到哥廷根大学攻读博士学位，成为高斯晚年的学生。

1851年，黎曼获得数学博士学位；1854年被聘为哥廷根大学的编外讲师；1857年晋升为副教授；1859年接替去世的狄利克雷被聘为教授。

因长年的贫困和劳累，黎曼在1862年婚后不到一个月就开始患胸膜炎和肺结核，其后四年的大部分时间在意大利治病疗养。1866年7月20日病逝于意大利，终年39岁。

## 复变函数论的奠基人

19世纪数学最独特的创造是复变函数理论的创立。1850年以前，柯西、雅可比、高斯、阿贝尔、维尔斯特拉斯已对单值解析函数的理论进行了系统的研究，而对于多值函数仅有柯西和皮瑟有些孤立的结论。

1851年，黎曼在高斯的指导下完成题为《单复变函数的一般理论的基础》的博士论文，后来又在《数学杂志》上发表了四篇重要文章，对其博士论文中思想

的做了进一步的阐述，一方面总结前人关于单值解析函数的成果，并用新的工具予以处理，同时创立多值解析函数的理论基础。

柯西、黎曼和维尔斯特拉斯是公认的复变函数论的主要奠基人，而且后来证明在处理复变函数理论的方法上，黎曼的方法是本质的。柯西和黎曼的思想被融合起来，维尔斯特拉斯的思想可以从柯西—黎曼的观点推导出来。

在黎曼对多值函数的处理中，最关键的是他引入了被后人称“黎曼面”的概念。借助黎曼面，能够给多值函数以几何直观，且在黎曼面上表示的多值函数是单值的。他在黎曼面上引入支点、横剖线、定义连通性，开展对函数性质的研究获得一系列成果。

经黎曼处理的复函数，单值函数是多值函数的特例，他把单值函数的一些已知结论推广到多值函数中，尤其他按连通性对函数分类的方法，极大地推动了拓扑学的初期发展。他研究了阿贝尔函数和阿贝尔积分及阿贝尔积分的反演，得到著名的黎曼—罗赫定理，首创的双有理变换构成 19 世纪后期发展起来的代数几何的主要内容。

黎曼为完善其博士论文，在结束时给出其函数论在保形映射的几个应用，将高斯在 1825 年关于平面到平面的保形映射的结论推广到任意黎曼面上，并在文章的结尾给出著名的黎曼映射定理。

## 黎曼几何的创始人

黎曼对数学最重要的贡献还在于几何方面，他开创的高维抽象几何的研究，处理几何问题的方法和手段是几何史上一场深刻的革命。他建立了一种全新的后来以其名字命名的几何体系，对现代几何乃至数学和科学各分支的发展都产生了巨大的影响。

1854 年，黎曼为了取得哥廷根大学编外讲师的资格，对全体教员作了一次演讲，该演讲在其逝世后的两年(1868 年)以《关于作为几何学基础的假设》为题出版。演讲中，他对所有已知的几何，包括刚刚诞生的非欧几何之一的双曲几何作了纵贯古今的概要，并提出一种新的几何体系，后人称为黎曼几何。

为竞争巴黎科学院的奖金，黎曼在 1861 年写了一篇关于热传导的文章，这篇文章后来被称为他的“巴黎之作”。文中对他 1854 年的文章作了技术性的加工，进一步阐明其几何思想。该文 1876 年在收集在他的《文集》中。

黎曼主要研究几何空间的局部性质，他采用的是微分几何的途径，这同在欧几里得几何中或者在高斯、波尔约和罗巴切夫斯基的非欧几何中把空间作为一个整体进行考虑是对立的。黎曼摆脱高斯等前人把几何对象局限在三维欧几里得

空间的曲线和曲面的束缚，从维度出发，建立了更一般的抽象几何空间。

黎曼引入流形和微分流形的概念，把维空间称为一个流形，维流形中的一个点可以用个可变参数的一组特定值来表示，而所有这些点的全体构成流形本身，这个可变参数称为流形的坐标，而且是可微分的，当坐标连续变化时，对应的点就遍历这个流形。

黎曼仿照传统的微分几何定义流形上两点之间的距离、流形上的曲线、曲线之间的夹角。并以这些概念为基础，展开对维流形几何性质的研究。在维流形上他也定义类似于高斯在研究一般曲面时刻画曲面弯曲程度的曲率。他证明在维流形上维数等于 3 时，欧几里得空间的情形与高斯等人得到的结果是一致的，因而黎曼几何是传统微分几何的推广。

黎曼发展了高斯关于一张曲面本身就是一个空间的几何思想，开展对维流形内蕴性质的研究。黎曼的研究导致另一种非欧几何——椭圆几何学的诞生。

在黎曼看来，有三种不同的几何学。它们的差别在于：过给定一点，作出与某定直线平行的直线的条数。如果只能作一条平行线，即为熟知的欧几里得几何学；如果一条都不能作，则为椭圆几何学；如果存在一组平行线，就得到第三种几何学，即罗巴切夫斯基几何学。黎曼因此继罗巴切夫斯基以后发展了空间的理论，使得一千多年来关于欧几里得平行公理的讨论宣告结束。他断言，客观空间是一种特殊的流形，预见具有某种特定性质的流形的存在性。这些逐渐被后人一一予以证实。

由于黎曼考虑的对象是任意维数的几何空间，对复杂的客观空间有更深层的实用价值。所以在高维几何中，由于多变量微分的复杂性，黎曼采取了一些不同于前人的手段使表述更简洁，并最终导致张量、外微分及联络等现代几何工具的诞生。爱因斯坦就是成功地以黎曼几何为工具，才将广义相对论几何化。现在黎曼几何已成为现代理论物理必备的数学基础。

## 微积分理论的创造性贡献

黎曼除对几何和复变函数方面的开拓性工作以外，还以其对微积分理论的杰出贡献载入史册。

18 世纪末到 19 世纪初，数学界开始关心数学最庞大的分支——微积分在概念和证明中表现出的不严密性。波尔查诺、柯西、阿贝尔、狄利克莱进而到维尔斯特拉斯，都以全力的投入到分析的严密化工作中。黎曼由于在柏林大学从师狄利克莱研究数学，且对柯西和阿贝尔的工作有深入的了解，因而对微积分理论有其独到的见解。

在关于函数的连续与可积性的关系上，柯西曾证明连续函数必定是可积的，黎曼指出了可积函数不一定是连续的。在关于函数的连续与可微性的关系上，柯西和他那个时代的几乎所有的数学家都相信，而且在后来 50 年中许多教科书都“证明”连续函数一定是可微的。黎曼给出了一个连续而不可微的著名反例，最终讲清连续与可微的关系。黎曼还建立了如现在微积分教科书所讲的黎曼积分的概念，给出了这种积分存在的必要充分条件。

黎曼用自己独特的方法研究傅立叶级数，推广了保证傅里叶展开式成立的狄利克雷条件，即关于三角级数收敛的黎曼条件，得出关于三角级数收敛、可积的一系列定理。他还证明：可以把条件收敛的级数的项适当重排，使新级数收敛于任何指定的和或者发散。

## 解析数论跨世纪的成果

19 世纪数论中的一个重要发展是由狄利克雷开创的解析方法，而黎曼开创了用复数解析函数研究数论问题的先例，取得跨世纪的成果。

1859 年，黎曼发表了《在给定大小之下的素数个数》的论文。这是一篇不到十页的内容极其深奥的论文，他将素数的分布的问题归结为函数的问题，现在称为黎曼函数。黎曼证明了该函数的一些重要性质，并简要地断言了其它的性质而未予证明。

在黎曼去世后的一百多年中，世界上许多优秀的数学家尽了最大的努力想证明他的这些断言，并在作出这些努力的过程中创立了新的内容丰富的分支。如今，除了他的一个断言外，其余都按黎曼所期望的那样得到了解决。那个未解决的问题现称为“黎曼猜想”。数论中很多问题的解决有赖于这个猜想的解决。黎曼的这一工作既是对解析数论理论的贡献，也极大地丰富了复变函数论的内容。

## 组合拓扑的开拓者

在黎曼的博士论文发表以前，已有一些组合拓扑的零散结果，其中著名的如欧拉关于闭凸多面体的顶点、棱、面数关系的欧拉定理。还有一些看起来简单又长期得不到解决的问题：如哥尼斯堡七桥问题、四色问题，这些促使了人们对组合拓扑学(当时被人们称为位置几何学或位置分析学)的研究。但拓扑研究的最大推动力来自黎曼的复变函数论的工作。

黎曼在他的博士论文中，以及在他对阿贝尔函数的研究里都强调说，要研究函数，就不可避免地需要位置分析学的一些定理。按现代拓扑学术语来说，黎曼事实上已经对闭曲面按亏格分类。值得提到的是，在其博士论文中，他说到某

些函数的全体组成(空间点的)连通闭区域的思想是最早的泛函思想。

比萨大学的数学教授贝蒂曾在意大利与黎曼相会，黎曼由于当时病魔缠身，自身已无能力继续发展其思想，把方法传授给了贝蒂。贝蒂把黎曼面的拓扑分类推广到高维图形的连通性，并在拓扑学的其他领域作出杰出的贡献。黎曼是当之无愧的组合拓扑的先期开拓者。

## 代数几何的贡献

19 世纪后半叶，人们对黎曼研究阿贝尔积分和阿贝尔函数所创造的双有理变换的方法产生极大的兴趣。当时他们把代数不变量和双有理变换的研究称为代数几何。

黎曼在 1857 年的论文中认为，所有能彼此双有理变换的方程(或曲面)属于同一类，它们有相同的亏格。黎曼把常量的个数叫做“类模数”，常量在双有理变换下是不变量。“类模数”的概念是现在“参模”的特殊情况，研究参模上的结构是现代最热门的领域之一。

著名的代数几何学家克莱布什后来到哥廷根大学担任数学教授，他进一步熟悉了黎曼的工作，并对黎曼的工作给予新的发展。虽然黎曼英年早逝，但世人公认，研究曲线的双有理变换的第一个大的步骤是由黎曼的工作引起的。

## 在数学物理、微分方程等其他领域的丰硕成果

黎曼不但对纯数学作出了划时代的贡献，他也十分关心物理及数学与物理世界的关系，他写了一些关于热、光、磁、气体理论、流体力学及声学方面的有关论文。他是对冲击波作数学处理的第一个人，他试图将引力与光统一起来，并研究人耳的数学结构。他将物理问题抽象出的常微分方程、偏微分方程进行定论研究得到一系列丰硕成果。

黎曼在 1857 年的论文《对可用高斯级数表示的函数的理论的补充》，及同年写的一个没有发表而收集在其全集中的一个片断中，他处理了超几何微分方程和讨论带代数系数的线性微分方程。这是关于微分方程奇点理论的重要文献。

黎曼在常微分方程理论中自守函数的研究上也有建树，在他的 1858~1859 年关于超几何级数的讲义和 1867 年发表的关于极小正曲面的一篇遗著中，他建立了为研究二阶线性微分方程而引进的自守函数理论，即现在通称的黎曼——许瓦兹定理。

在偏微分方程的理论和应用上，黎曼在 1858~1859 年的论文中，创造性的提出解波动方程初值问题的新方法，简化了许多物理问题的难度；他还推广了



格林定理；对关于微分方程解的存在性的狄里克莱原理作了杰出的工作。

黎曼在物理学中使用的偏微分方程的讲义，后来由韦伯以《数学物理的微分方程》编辑出版，这是一本历史名著。

不过，黎曼的创造性工作当时未能得到数学界的一致公认，一方面由于他的思想过于深邃，当时人们难以理解，如无自由移动概念非常曲率的黎曼空间就很难为人接受，直到广义相对论出现才平息了指责；另一方面也由于他的部分工作不够严谨，如在论证黎曼映射定理和黎曼—罗赫定理时，滥用了狄利克雷原理，曾经引起了很大的争议。

黎曼的工作直接影响了 19 世纪后半期的数学发展，许多杰出的数学家重新论证黎曼断言过的定理，在黎曼思想的影响下数学许多分支取得了辉煌成就。