练　习　十　五

1．试求 $f(t)=|\sin t|$ 的离散频谱和它的傅里叶级数的复指数形式。

解：$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$　　　$c_0=F(0)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\dfrac{2}{\pi}$

$$c_n=F(n\omega_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{(4n^2-1)}\qquad (n=0,\pm 1,\cdots)$$

$$\therefore f(t)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{jn\omega_0 t}=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{j2nt\omega_o}$$

2．求下列函数的傅氏变换。

（1）$f(t)=\begin{cases}-1, & -1<t<0\\ 1, & 0<t<1\\ 0, & \text{其它;}\end{cases}$

解：$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}-e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1}e^{-j\omega t}dt$

$$\overset{\text{令}t_1=-t}{=\!=\!=}-\int_0^1 e^{j\omega t_1}dt_1+\int_0^1 e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\int_0^1 e^{j\omega t}dt+\int_0^1 e^{-j\omega t}dt=-2j\int_0^1\sin\omega t dt=2j\left.\frac{\cos\omega t}{\omega}\right|_0^1=2j(\frac{\cos\omega-1}{\omega})$$

（2）$f(t)=\begin{cases}e^t, & t\le 0\\ 0, & t>0\end{cases}$

解：$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^t e^{i\omega t}dt=\dfrac{1}{1-j\omega}$

3．设 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$，求 $f(z)$ 的傅氏变换，并推证：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |t|<1\\ \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

解：$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{\omega}\sin\omega$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega t}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega=\begin{cases}1, & |t|>1\\ \frac{1}{2}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

$$故\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

4．根据（8.4）式，推出函数$f(z)$的傅氏积分式的三角形式：

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

证：$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}d\tau\right]d\omega$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau d\omega+j\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau d\omega\right]d\omega$

考虑到积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d$是$\omega$的奇函数，就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega=0$$

又积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$是$\omega$的偶函数，故

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$