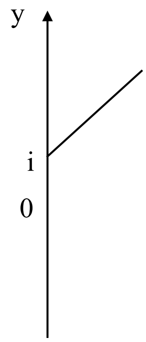
练 习 二

1．指出满足下列各式的点 Z 的轨迹是什么曲线？

（1）$\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$



解：设 $z=x+iy$　则 $\arg(z-i)=\arg[x+i(y-1)]=\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore\begin{cases}x>0\\ y-1>0\\ x=y-1\end{cases}$$ 则点 Z 的轨迹为：

（2）$|z-a|=\mathrm{Re}(z-b)$，其中 a,b 为实数常数；

解：设 $z=x+iy$　则：$|(x-a)+iy|=\mathrm{Re}(x-b+iy)$

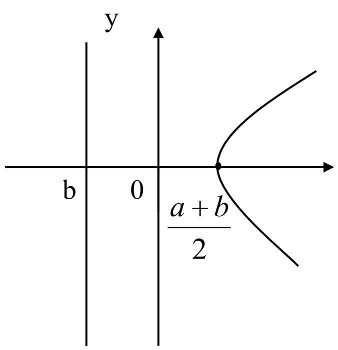
$$\therefore\begin{cases}(x-a)^2+y^2=(x-b)^2\\ x-b\geq 0\end{cases}\quad 则：\begin{cases}y^2=2(a-b)x+b^2-a^2\\ \quad=2(a-b)(x-\dfrac{a+b}{2})\\ x\geq b\end{cases}$$

若：$a=b$　则轨迹为：　$y=0$

若：$a>b$　则 $x\geq\dfrac{a+b}{2}>b$

　轨迹：$y^2=2(a-b)(x-\dfrac{a+b}{2})$

若：$a<b$　则 $x\leq\dfrac{a+b}{2}$，无意义



（3）$z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+b=0$，其中为 a 复数 b 为实常数。

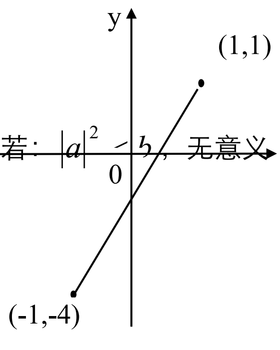
解：由题设可知：$(z+a)(\bar{z}+\bar{a})+b-|a|^2=0$

即：$|z+a|^2=|a|^2-b$

若：$|a|^2=b$，则 Z 的轨迹为一点 $-a$，

若：$|a|^2>b$，则 Z 的轨迹为圆，圆心在 $-a$，半径为 $\sqrt{|a|^2-b}$　若：$|a|^2<b$，无意义

2．用复参数方程表示曲线，连接 $1+i$ 与 $-1-4i$ 直线段。



解：$z-(1+i)=[(-1-4i)-(1+i)]t \quad 0 \le t \le 1$

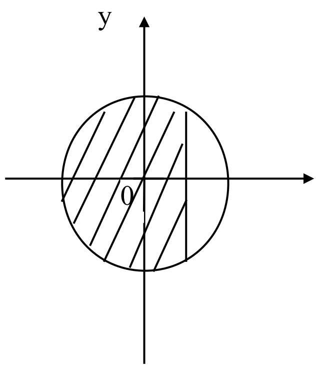
则 $z=(1+i)-(2+5i)t \quad (0 \le t \le)$

3．描出下列不等式所确定和区域与闭区域，并指明它是有界的还是无界的？是单连域还是多连域？并标出区域边界的方向。

（1）$|z|<1, \operatorname{Re} z \le \frac{1}{2}$

解：由 $|z|<1$，得 $x^2+y^2<1$

又 $\operatorname{Re} z \le \frac{1}{2}$，得 $x \le \frac{1}{2}$



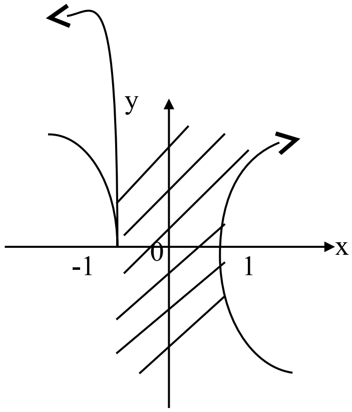
有界，单连域

（2）$\operatorname{Re} z^2 < 1$

解：令 $z=x+iy$

由 $\operatorname{Re} z^2 < 1 \Rightarrow x^2-y^2<1$

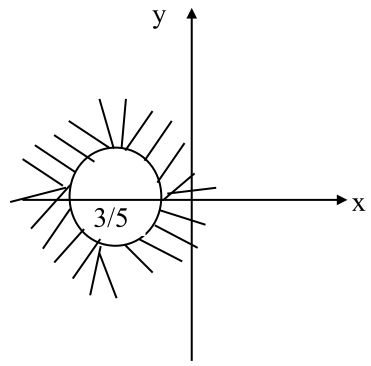
即：$y^2>x^2-1$



无界，单连域

(3) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \le 2$

解：令 $z = x + iy$ 则：$(x+\dfrac{5}{3})^2 + y^2 \ge (\dfrac{4}{3})^2$



无界，多连域

4．对于函数 $\omega = f(z) = iz, D: \operatorname{Im} z > 0$，描出当 z 在区域 D 内变化时，w 的变化范围。

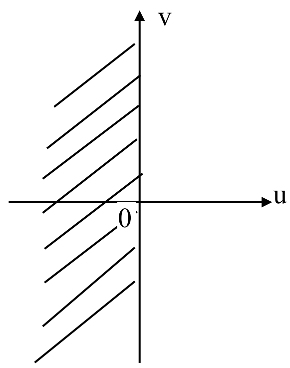
解：令 $z = x + iy$

则 $w = f(z) = iz = i(x+iy) = -y + ix$

$\because \operatorname{Im} z > 0,$ 则 $y > 0$

$\because \operatorname{Re} w = -y < 0,$

$\therefore w$ 的变化范围在第 2,3 象限,但不包括虚轴



5.试证 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ 不存在。

证：$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Re} z}{z} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+iy}$

令 $y = kx$ 则：上述极限为 $\dfrac{1}{1+ki}$ 不确定，因而极限不存在。

*6.思考题

（1）怎样理解复变函数 $w = f(z)$？

答：设 $w=u+iv,\ z=x+iy,$ 则 $w=f(z)$ 就是

$$u+iv=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

即 $\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$ 因此，一个复变函数 $f(z)$ 与两个实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 相对应，从几何意义上来说，复变函数可以看作是 z 平面上的点集 D 到 w 平面上的点集 G 上的映射。

（2）设复变函数 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限存在，此极限值与 z 趋于 z_0 所采取的方式（取的路径）有无关系?

答：没有关系，z 以任意方式趋于 z_0 时，极限值都是相同的，反过来说，若令 z 沿两条不同的曲线趋于 z_0 时极限值不相等，则说明 $f(z)$ 在 z_0 没有极限，这与高等数学中的情形是类似的，只是一元实函数中，x 只能从左、右以任何方式趋于 x_0，而这里可以从四面八方任意趋于 z_0。