

第三章回顾

➤ 支路法

$n-1$ 个节点KCL方程, $b-(n-1)$ 个回路KVL方程

➤ 节点法

1个参考点, $n-1$ 个节点电位方程 (KCL方程)

➤ 回路法

$b-(n-1)$ 个回路方程(回路数=网孔数) (KVL方程)

电路分析的三类方法

- 等效变换法（第2章）
- 电路方程法（一般分析方法）（第3章）
- 电路定理法（第4章）

三类方法的异同点

- 三类方法都是基于KVL、KCL和VCR
- 电路方程法（一般分析方法）是最普遍最重要的方法——适合于计算机大规模计算
- 等效变换法和电路定理法是两种取巧的办法

第四章 电路定理

1 替代定理

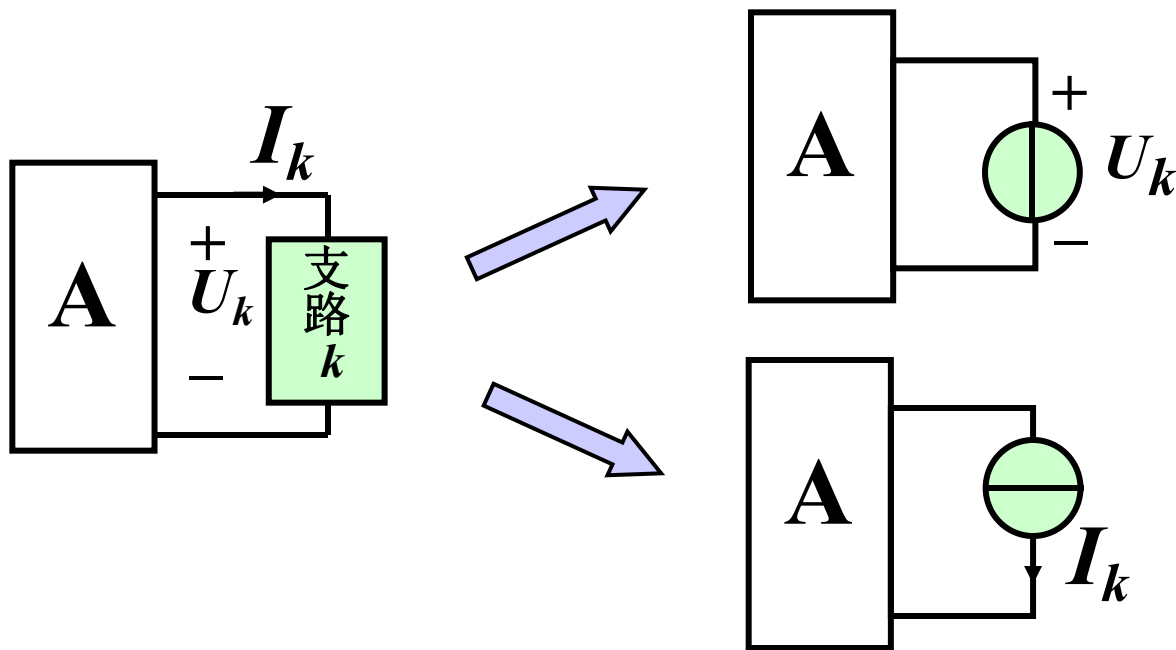
2 叠加定理

3 戴维南-诺顿定理

4 最大功率传输定理

§ 4.1 替代定理

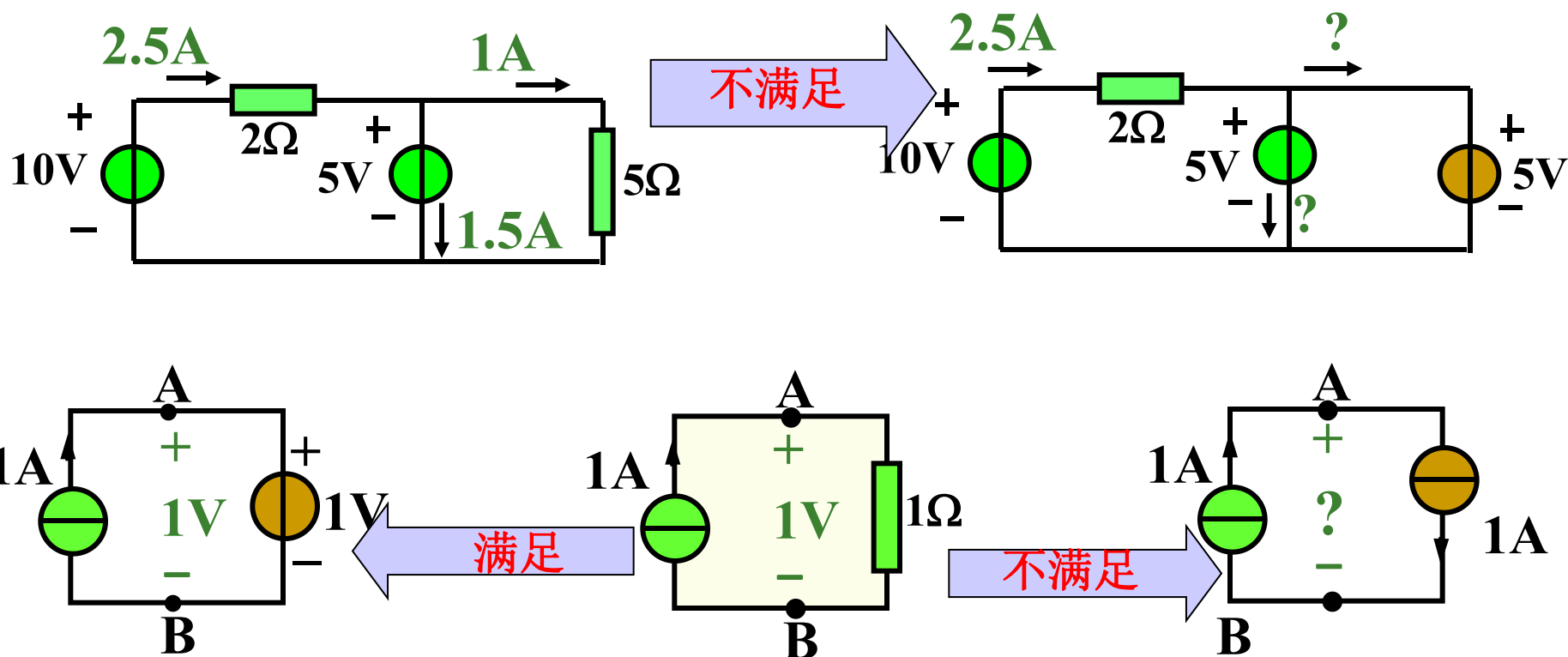
任意一个线性电阻电路，其中第 k 条支路（不含受控源）的电压已知为 U_k （电流为 I_k ），那么就可以用一个电压等于 U_k 的理想电压源（电流等于 I_k 的理想电流源）来替代该支路，替代前后电路中各支路电压和电流均保持不变。



注意:

替代定理的应用必须满足的条件:

1) 原电路和替代后的电路必须有唯一解。

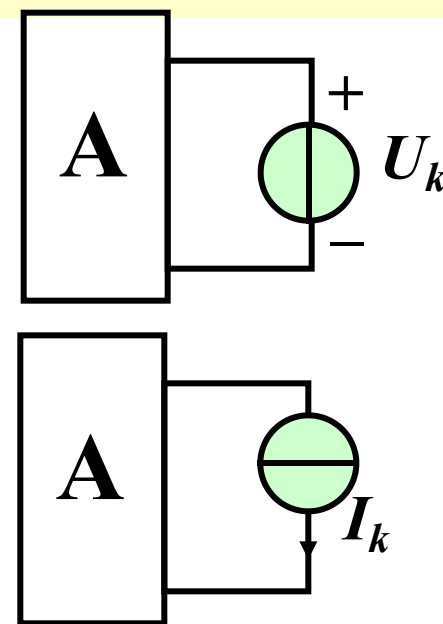
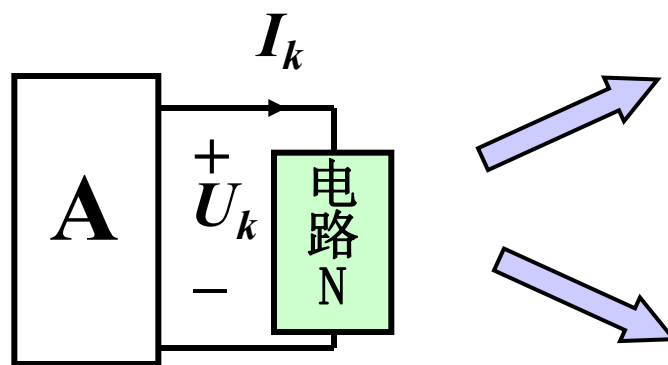


2) 无论是电压源还是电流源替代都要保证有相同的参考方向

3) 被替代的支路和电路其它部分应无耦合关系

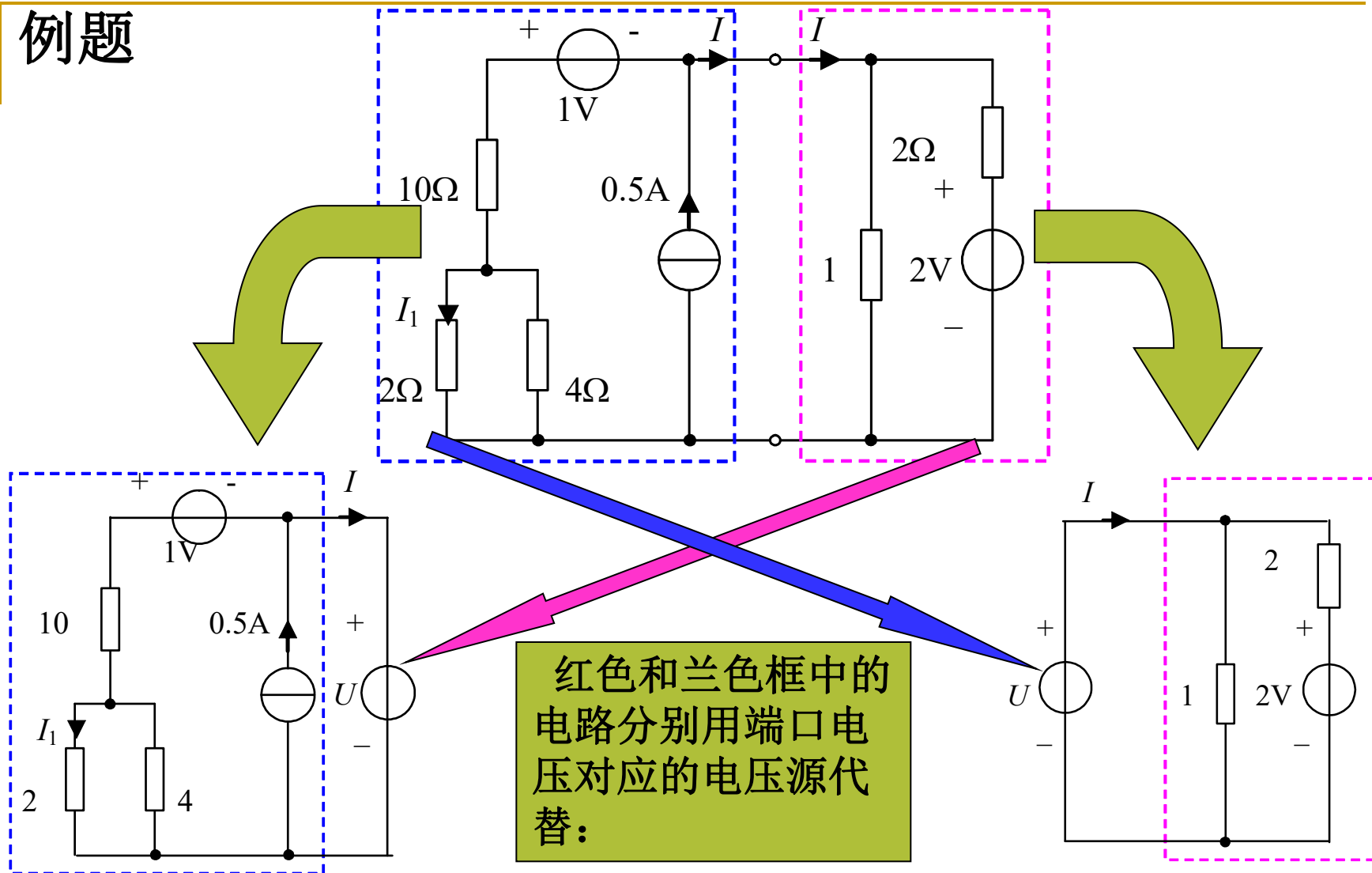
(控制量支路如被替代后控制量不存在, 则不能替代)

4) 任意二端网络的替代



A中受控源的控制量在电路N时, 如被替代后控制量不存在则不能替代。

例题



$$I = 0.5 - \frac{1+U}{10+2//4} = -\frac{3}{34}U + \frac{7}{17}$$

$$I = \frac{U}{1} + \frac{U-2}{2} = \frac{3}{2}U - 1$$

$$I = 0.5 - \frac{1+U}{10+2//4} = -\frac{3}{34}U + \frac{7}{17} \quad I = \frac{U}{1} + \frac{U-2}{2} = \frac{3}{2}U - 1$$

$$-\frac{3}{34}U + \frac{7}{17} = I = \frac{3}{2}U - 1$$

$$\therefore U = \frac{8}{9}V$$

$$I_1 = \left(1 + \frac{8}{9}\right) \times \frac{1}{10+2//4} \times \frac{4}{2+4} = \frac{1}{9}A$$

§ 4.2 叠加定理

线性电路的两个性质：

(1) 比例性或齐次性：

当全部激励源同时增大到 (K 为任意常数) 倍, 其电路中任何处的响应 (电压或电流) 亦增大到 K 倍。

(2) 可加性或叠加性：

当同时施加两个激励于电路时, 所引起的响应是单独施加这两个激励于电路时, 所分别引起的响应之和。

叠加定理:

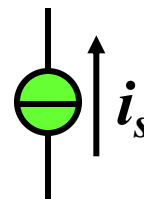
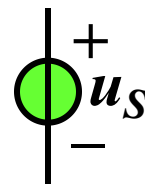
在多个电源同时作用的线性电路中，任一支路电压或电流都是电路中各个独立电源单独作用时，在该处产生的电压或电流的叠加。

单独作用：一个电源作用，其余电源不作用（值为零）

电源不作用
(值为零)

电压源 ($u_s=0$) 短路

电流源 ($i_s=0$) 开路



叠加定理的另一种表达:

电路中的任意一条支路的电压或者电流都是电路中所有激励的线性组合。

即:

$$u_b = \sum_{m=1}^g k_m u_{Sm} + \sum_{n=1}^h k_n i_{Sn}$$

$$i_b = \sum_{m=1}^g k'_m u_{Sm} + \sum_{n=1}^h k'_n i_{Sn}$$

证明叠加定理：求 u_1 、 i_2 的表达式

1. 两个电源同时作用时

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = u_s$$

$$R_1 (i_2 - i_s) + R_2 i_2 = u_s$$

$$\therefore i_2 = \frac{1}{R_1 + R_2} u_s + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s$$

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

2. 电流源单独作用时， $u_s=0$ 短路

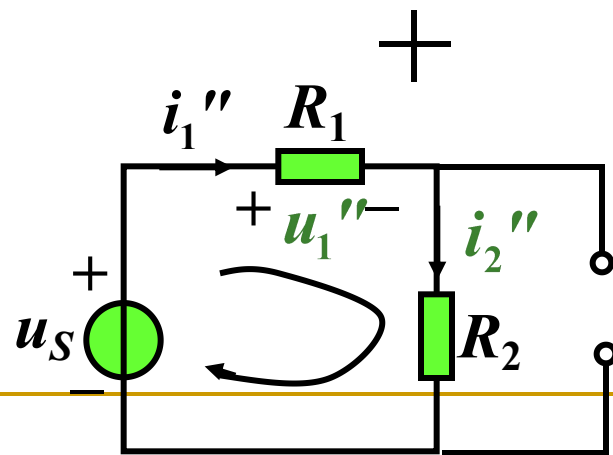
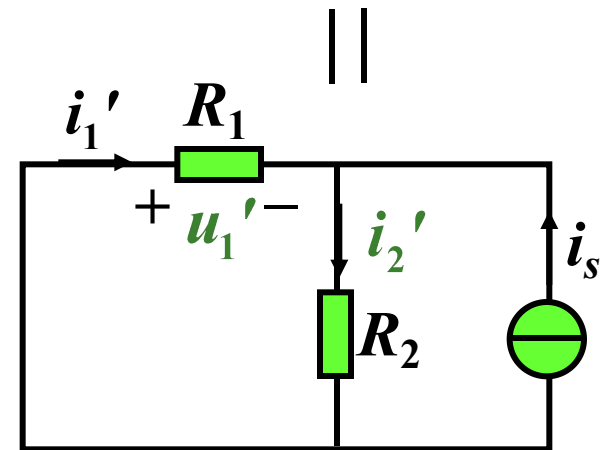
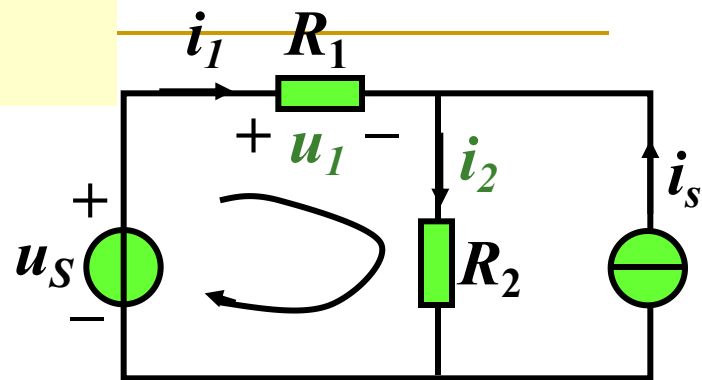
$$i_2' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s$$

$$u_1' = -i_2' R_2 = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

3. 电压源单独作用时， $i_s=0$ 开路

$$i_2'' = \frac{1}{R_1 + R_2} u_s$$

$$u_1'' = R_1 i_2'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$$



例1：用叠加定理求电流 i ，及 R 上的功率 P

解 (1) 12V电压源单独作用：

$$i' = \frac{12}{4 + 4 // 4} \times \frac{1}{2} = 1A$$

(2) 6V电压源单独作用：

$$i'' = -\frac{6}{4 + 4 // 4} = -1A$$

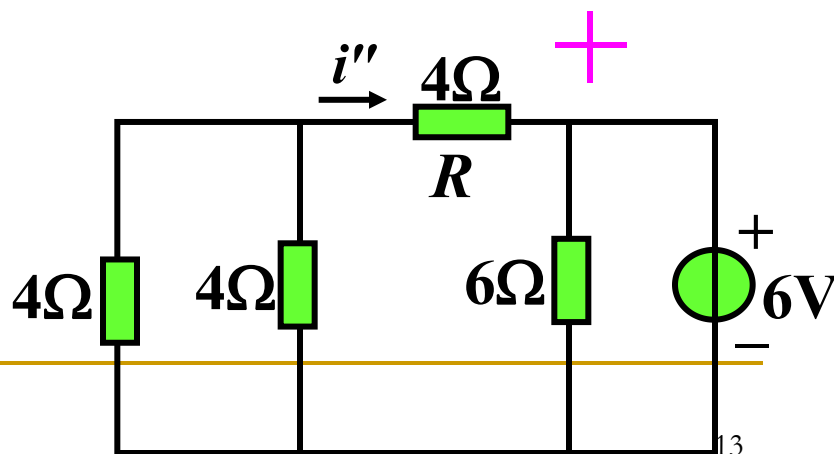
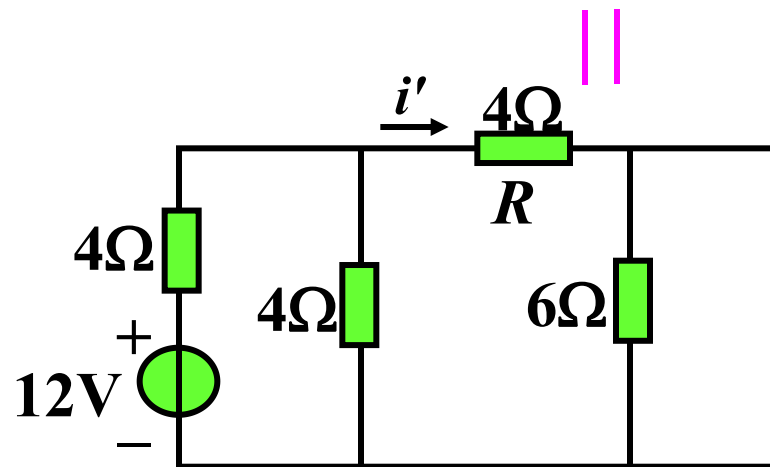
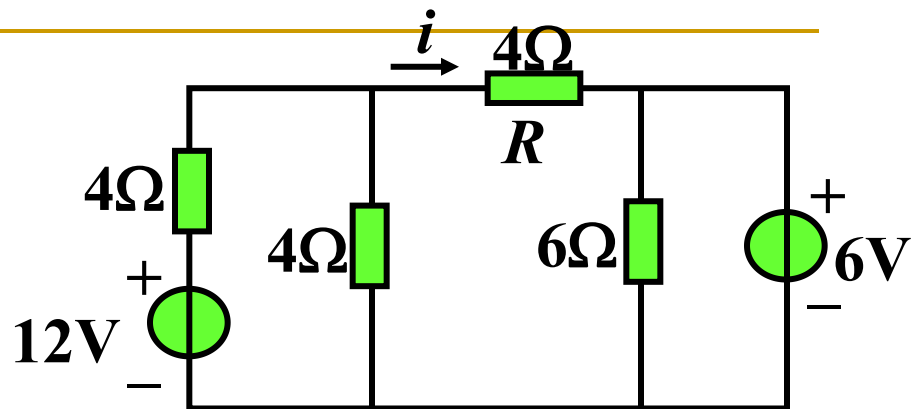
$$\therefore i = i' + i'' = 0A$$

$$p = i^2 R = 0W$$

如果将功率叠加

~~$$p = i'^2 R + i''^2 R = 8W$$~~

结论：不能用叠加定理求功率



应用叠加定理时注意以下几点：

1. 叠加定理只适用于线性电路求电压和电流；
不能用叠加定理求功率（功率为电源的二次函数）；
不适用于非线性电路
2. 应用时电路的结构参数必须前后一致
3. 不作用的电压源短路；不作用的电流源开路
4. 含受控源（线性）电路亦可用叠加，受控源应始终保留
5. 叠加时注意参考方向下求代数和。

例2 用叠加定理求电压 U_s

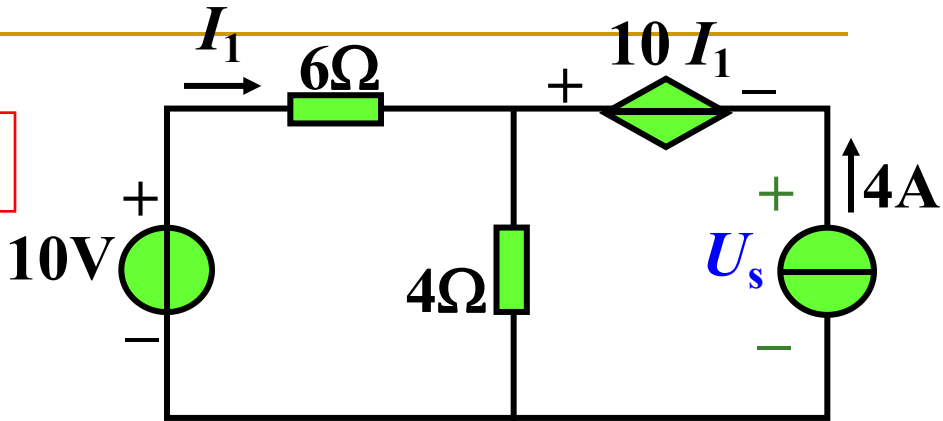
解：(1) 10V电压源单独作用：

$$U_s' = 10I_1' - U_1'$$

$$U_s' = 10I_1' - U_1'$$

$$I_1' = \frac{10}{6+4} = 1A$$

$$= 10I_1' - 4I_1' \\ = 6V$$



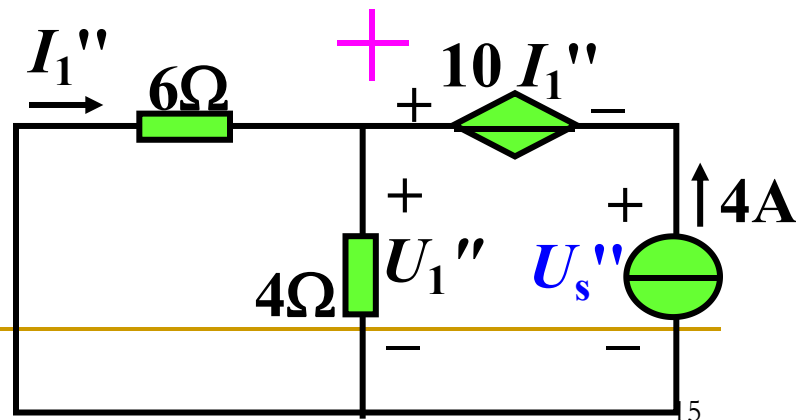
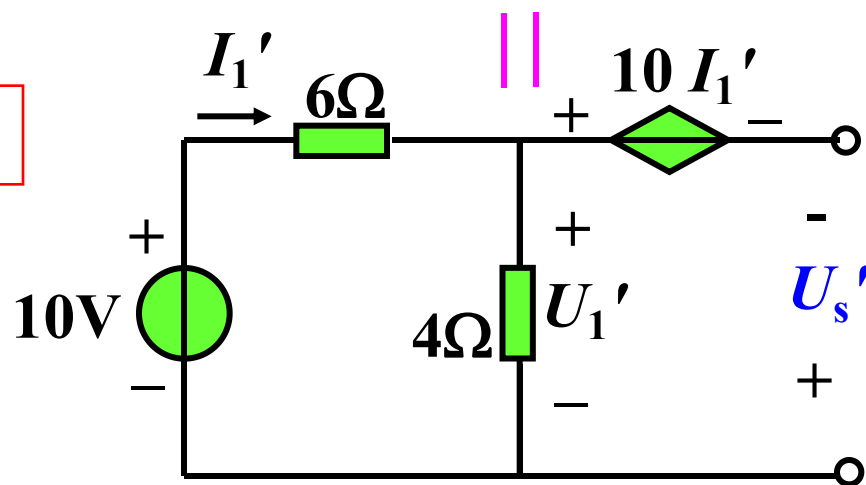
(2) 4A电流源单独作用：

$$U_s'' = -10I_1'' + U_1''$$

$$I_1'' = -\frac{4}{4+6} \times 4 = -1.6A$$

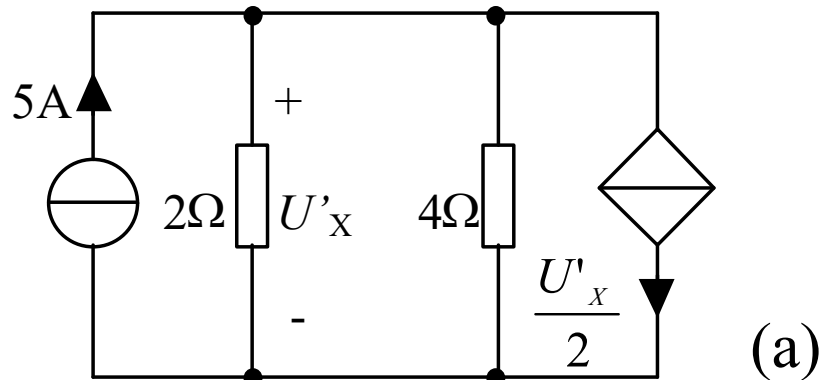
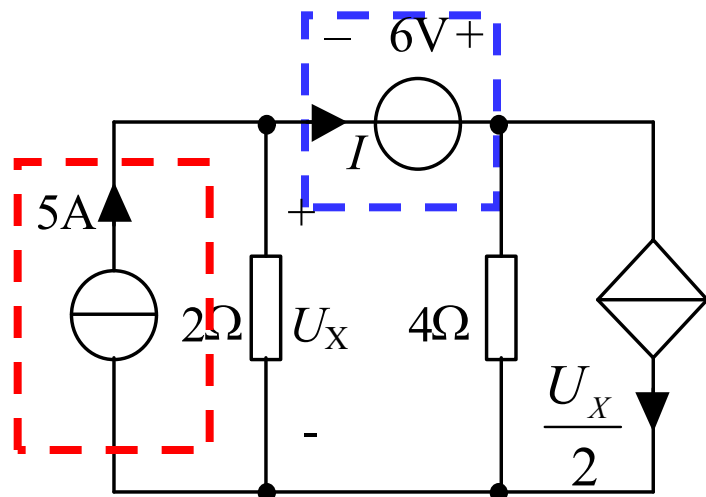
$$U_1'' = \frac{4 \times 6}{4+6} \times 4 = 9.6V$$

$$U_s'' = -10I_1'' + U_1'' \\ = 25.6V$$



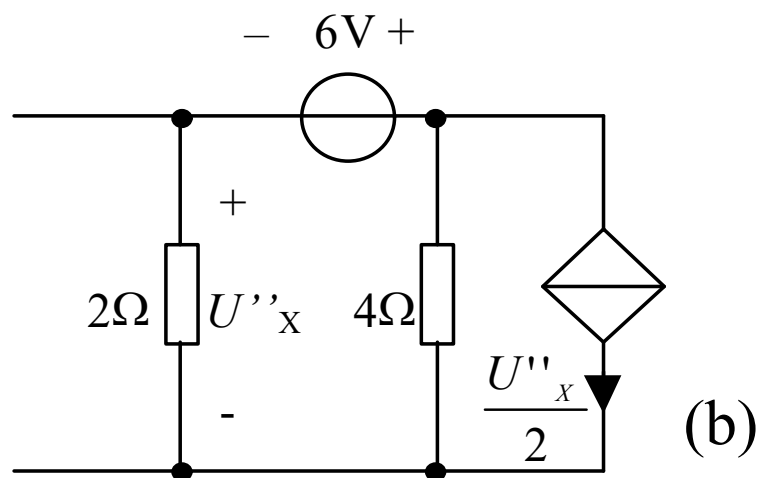
$$U_s = -U_s' + U_s'' = 19.6V$$

例3：求 U_X



$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times U'_X - 5 + \frac{1}{2} U'_X = 0$$

$$U'_X = 4V$$



$$\frac{U''_X}{2} + \frac{6 + U''_X}{4} + \frac{U''_X}{2} = 0$$

$$U''_X = -1.2V$$

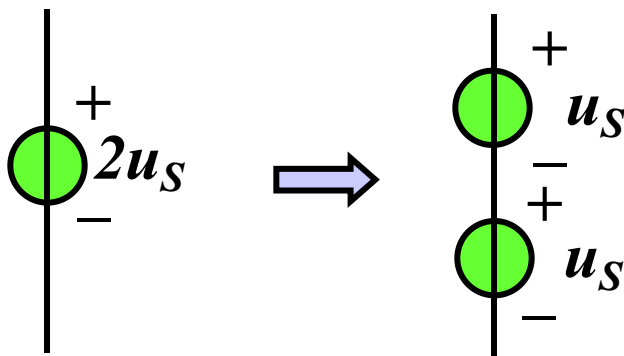
$$U_X = U'_X + U''_X = 2.8V$$

齐次性原理

当电路中只有一个激励(独立源)时，则响应(电压或电流)与激励成正比，激励增加 k 倍，则响应也增加 k 倍。

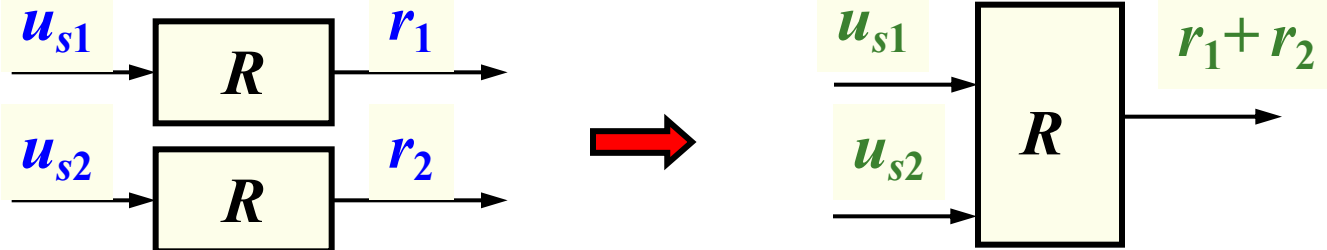


设 k 为2，则可根据叠加定理来证明

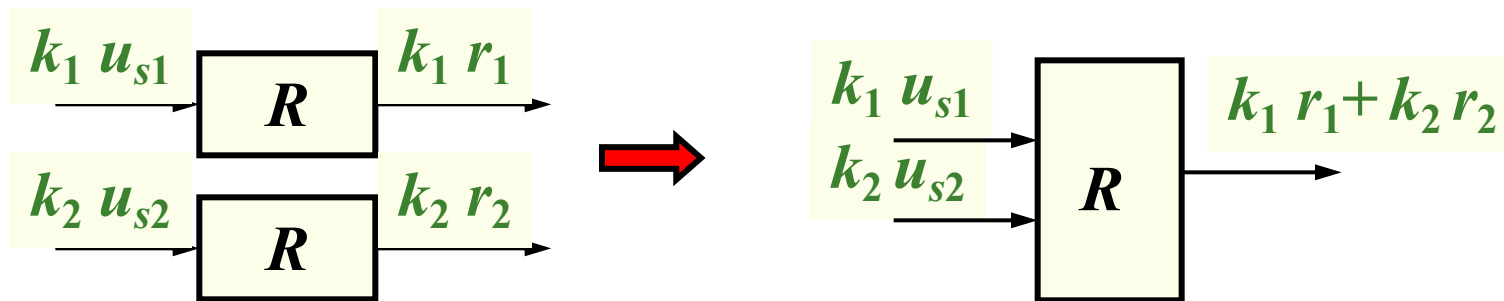


齐次性原理的应用:

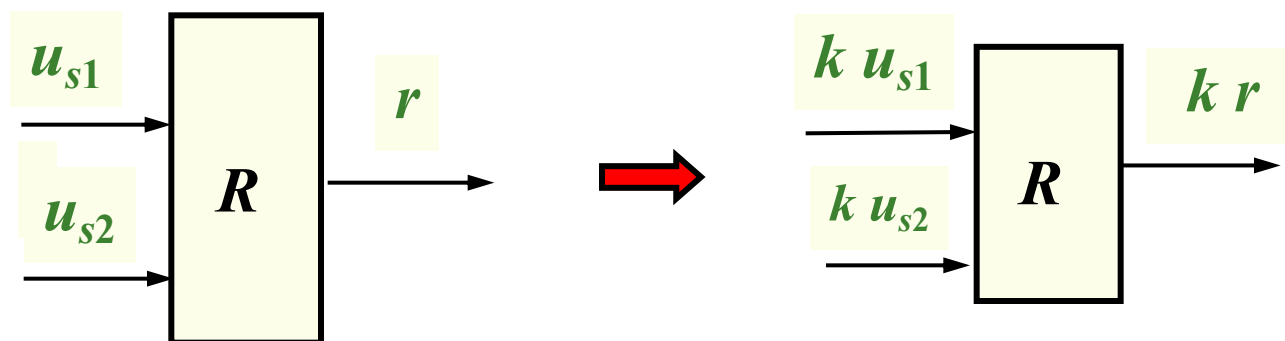
1.



2.



3.



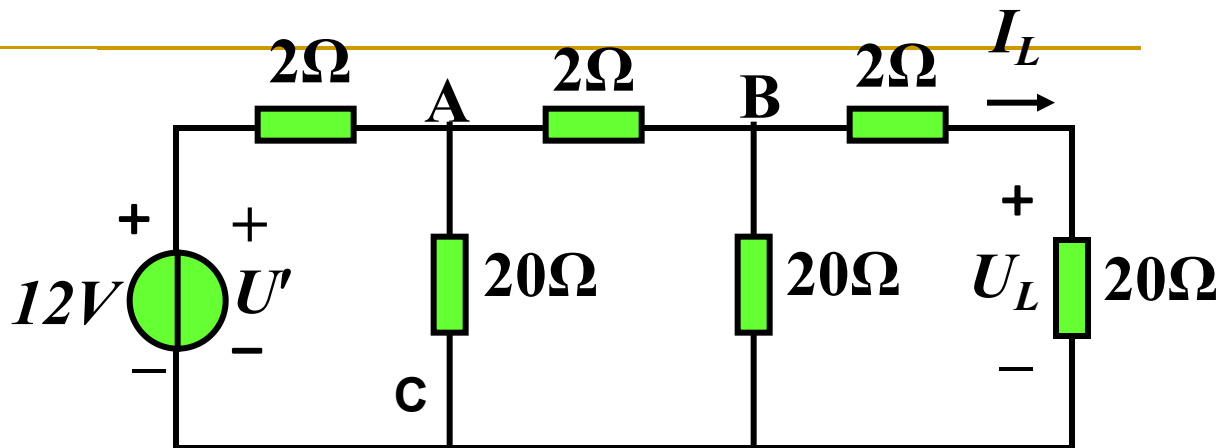
线性电路中，所有激励都增大(或减小) K 倍，则电路中响应也增大(或减小) K 倍。

例：在T形电路中求 U_L 。

法一：电路方程法

法二：电源变换

法三：用齐次性原理



解：设 $I_L = 1\text{A}$ \Rightarrow U' \Rightarrow $K = U_s / U'$ \Rightarrow $U_L = K I_L R_L$

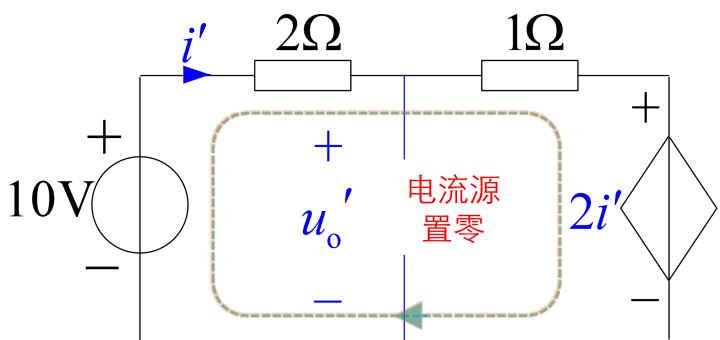
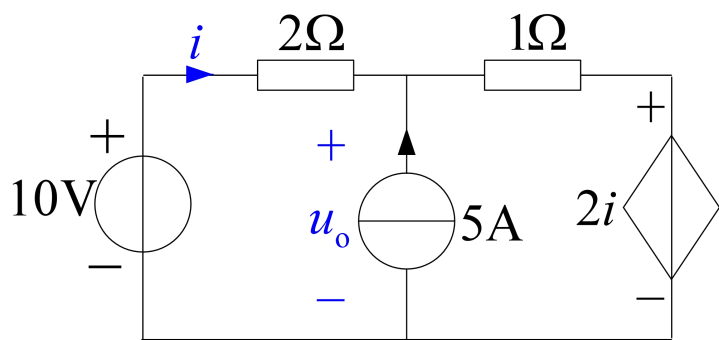
$$\text{设 } I_L = 1\text{A} \quad U_{BC} = 22\text{V} \quad U_{AC} = \left(\frac{22}{20} + 1\right) \times 2 + 22 = 26.2$$

$$U' = 2 \times \left(\frac{26.2}{20} + \frac{22}{20} + 1\right) + 26.2 = 33.02$$

$$K = \frac{12}{U'} = \frac{12}{33.02}$$

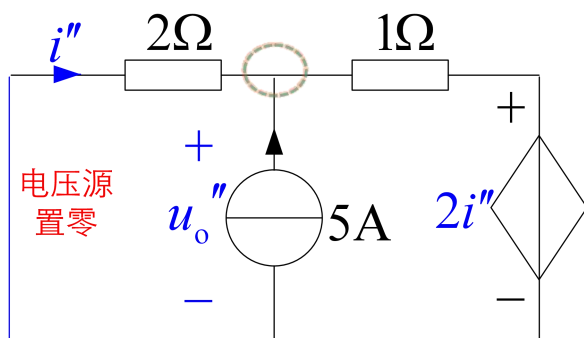
$$U_L = 20 I_L K = 20 \times \frac{12}{33.02} = 7.268\text{V}$$

【习题 1】 确定电压 u_o 和 5A 电流源提供的功率。



网孔方程: $(2 + 1)i' = 10 - 2i'$

$$u'_o = 1 \times i' + 2i'$$



结点方程:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right)u''_o = 5 + \frac{2i''}{1}$$

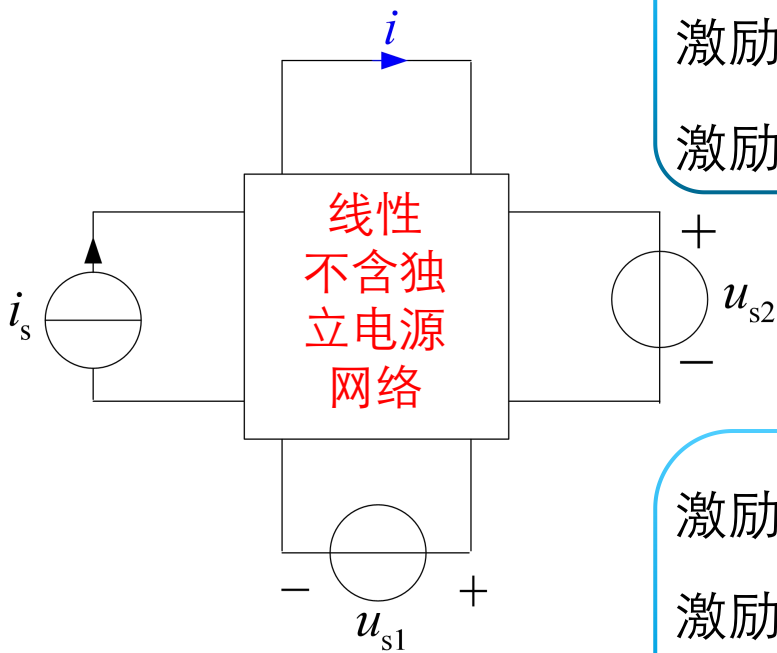
$$u''_o = -2i''$$

$$u_o = u'_o + u''_o$$

$$p_{5A} = 5u_o = 5u'_o + 5u''_o \neq 5u''_o$$

功率不符合叠加关系!

【习题 2】确定电流 i 。



已知条件

- 激励为 i_s 和 u_{s1} (u_{s2} 置零) \rightarrow 响应 $i = 2A$
- 激励为 i_s 和 u_{s2} (u_{s1} 置零) \rightarrow 响应 $i = -0.5A$
- 激励为 i_s 、 u_{s1} 和 u_{s2} \rightarrow 响应 $i = 1.2A$

确定

- 激励为 i_s \rightarrow 响应 $i = ?$ $\rightarrow i'$
- 激励为 u_{s1} \rightarrow 响应 $i = ?$ $\rightarrow i''$
- 激励为 u_{s2} \rightarrow 响应 $i = ?$ $\rightarrow i'''$
- 激励为 $0.5i_s$ 、 $2u_{s1}$ 和 $3u_{s2}$ \rightarrow 响应 $i = ?$ $\rightarrow i$

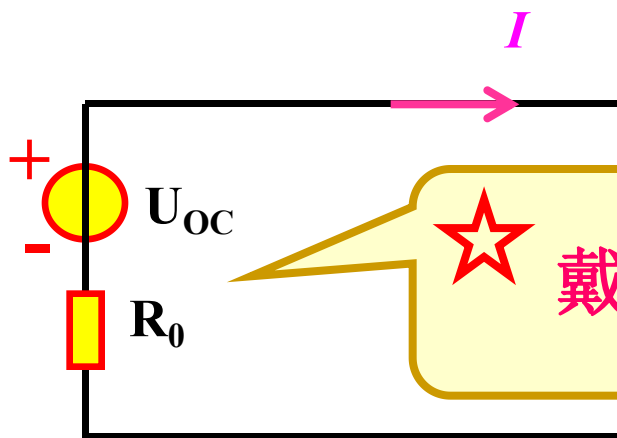
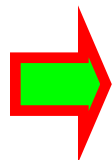
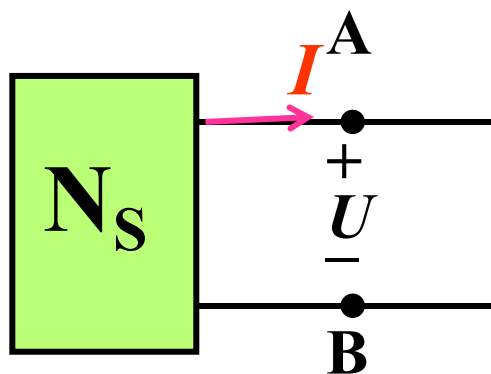
$$\begin{cases} i' + i'' = 2 \\ i' + i''' = -0.5 \\ i' + i'' + i''' = 1.2 \end{cases} \quad \text{解得 } i', i'', i''' \quad i = 0.5i' + 2i'' + 3i'''$$

作业

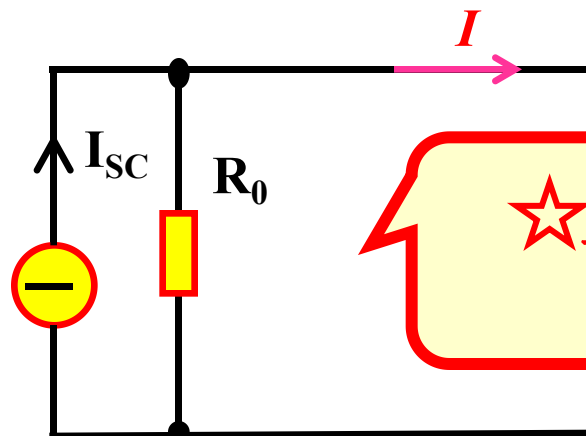
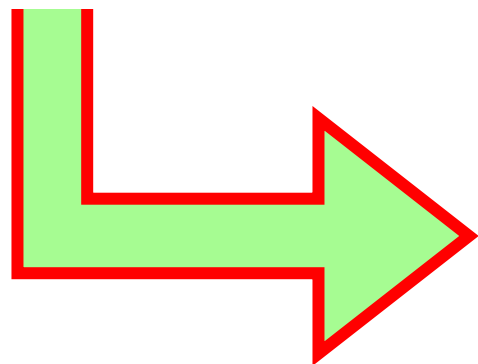
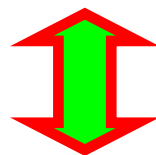
4-2 4-11 4-13 4-17

§ 4.3 戴维南和诺顿定理

- **回顾：**任何一个仅含线性电阻和受控源的二端网络，可以用一个电阻来等效，该电阻称为**输入电阻或端口等效电阻**。
- **戴维南定理：**任何一个含独立源、线性电阻和受控源的二端网络，可以用一个**电阻与电压源串联**的支路来等效。
- **诺顿定理：**任何一个含独立源、线性电阻和受控源的二端网络，可以用一个**电阻与电流源并联**的支路来等效。



★ 戴维南定理



★ 诺顿定理

戴维南定理:

任何一个有源线性一端口，对外电路来说，总可以用一个电压源和一个电阻的串联支路来等效

电压源的电压等于有源一端口 N_S 的开路电压 U_{oc}

电阻 R_0 等于一端口除源后 N_0 的输入电阻

诺顿定理:

任何一个有源线性一端口，对外电路来说，总可以用一个电流源和一个电阻的并联支路来等效

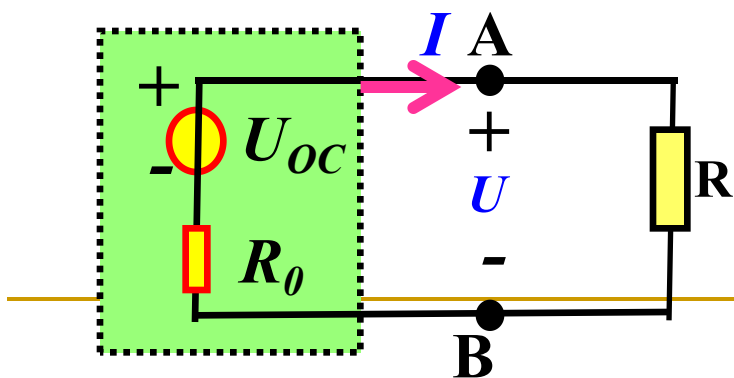
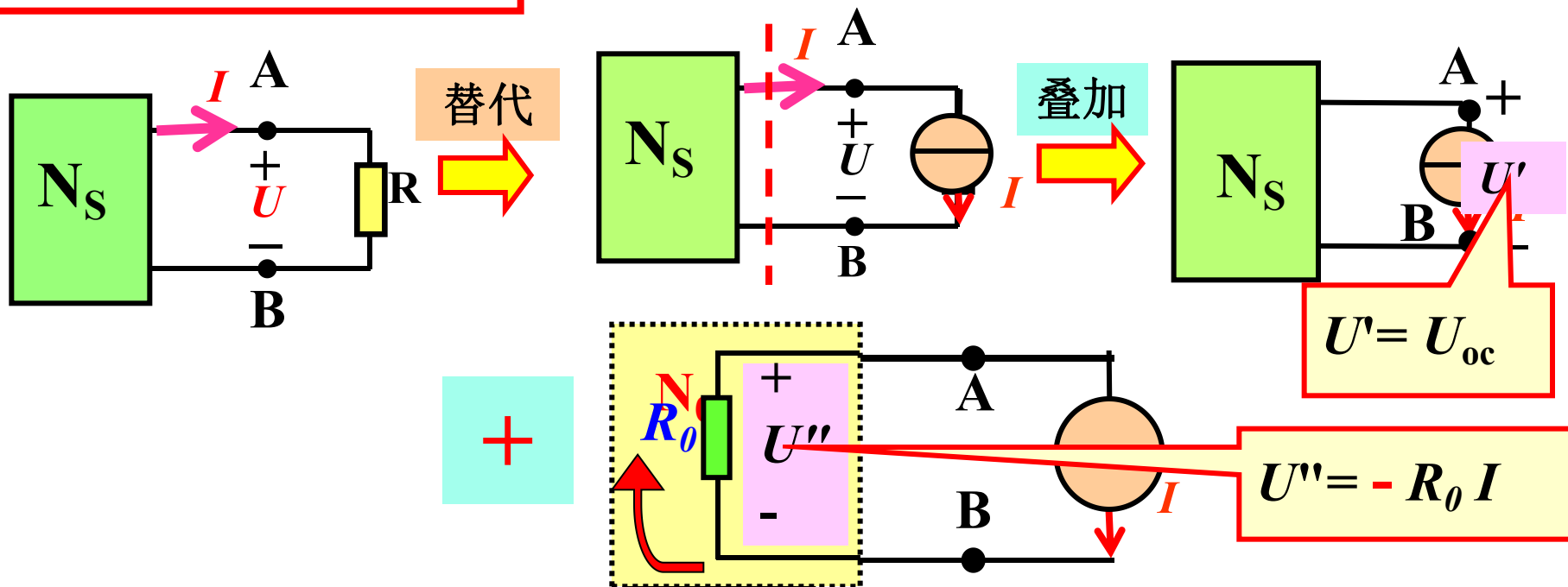
电流源的电流等于有源一端口 N_S 的短路电流 I_{sc}

电阻 R_0 等于一端口除源后 N_0 的输入电阻

戴维南定理的证明:

① 用替代定理

② 用叠加定理



$$U = U' + U'' = U_{oc} - I R_0$$

$$U = U_{oc} - I R_0$$

诺顿定理的证明略

- 替代定理+叠加定理证明
- 戴维南-诺顿等效证明

用戴维南定理解题步骤:

1、在原图中将待求支路移去，构造有源一端口 N_S

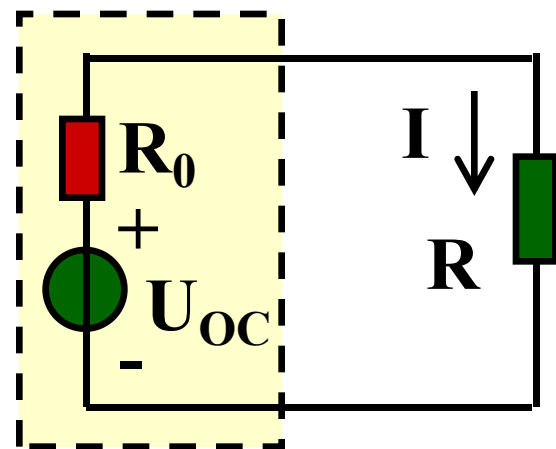
2、画出戴维南等效电路

3、在 N_S 标出 U_{oc} 方向求开路电压 U_{oc}

4、求等效电阻 R_0

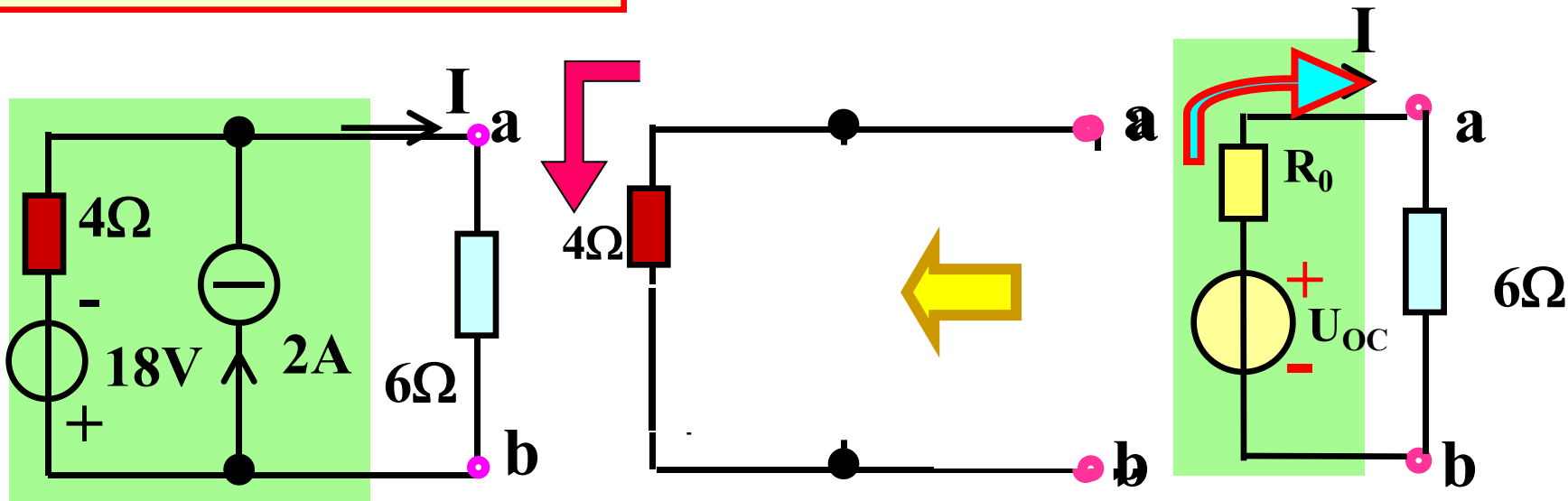
——去掉电路中的所有独立源（受控源保留）

5、将待求支路移进，求出未知量。



U_{oc} 和 R_0 的求法及步骤

用戴维南定理求电流 I



解：①将未知支路移去，构造有源一端口

②画出戴维南等效电路

③求 U_{oc} ，注明 U_{oc} 方向

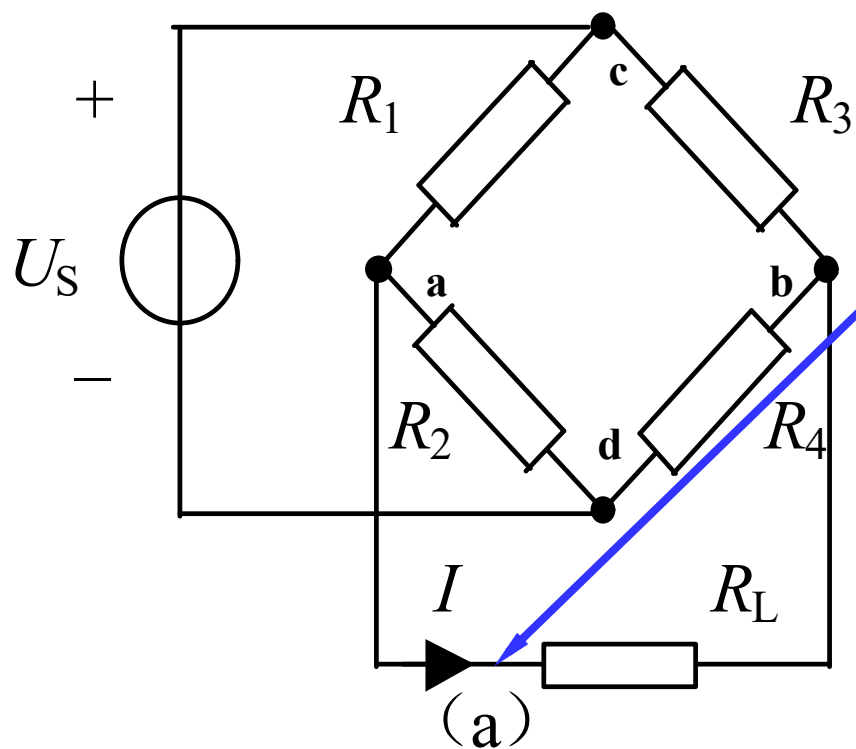
$$U_{oc} = 4 \times 2 - 18 = -10V$$

④求 R_0 ： $R_0 = 4\Omega$

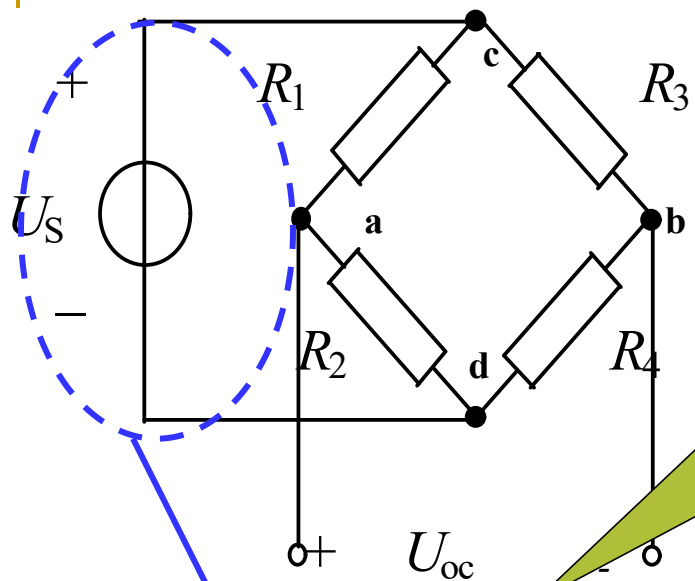
⑤将未知支路移进

$$I = \frac{-10}{6 + 4} = -1A$$

例1. 求I (戴维南定理的应用)

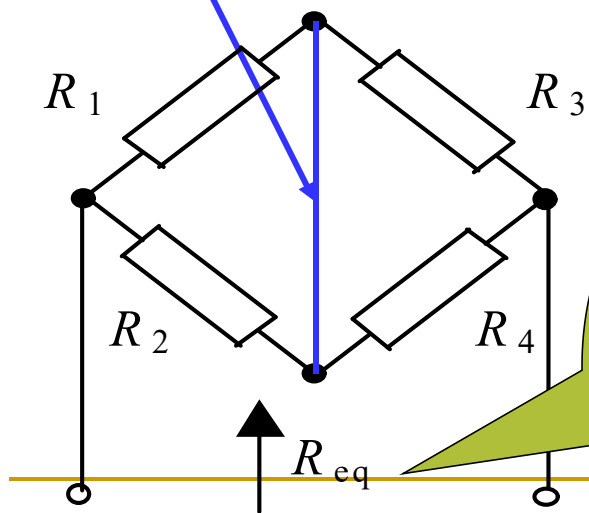


方法1：电路方程
法——“支路法”、
“回路法”或“节点
法”



开路电压

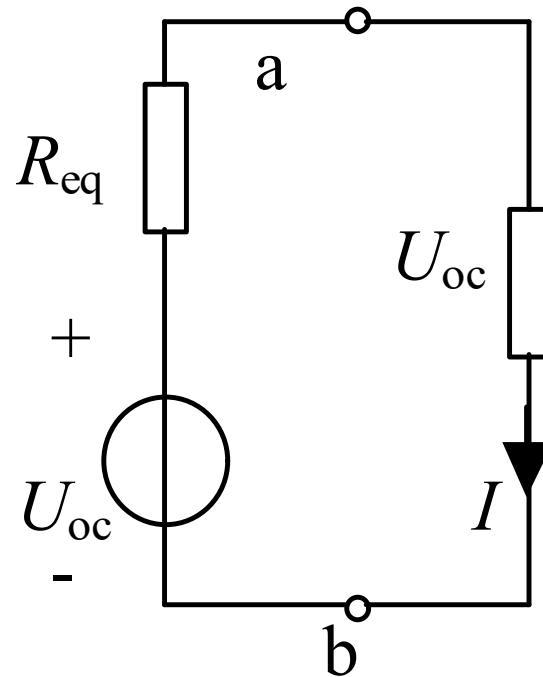
$$\begin{aligned}
 U_{oc} &= U_{ab} = U_{ac} + U_{cb} \\
 &= -\frac{U_s}{R_1 + R_2} R_1 + \frac{U_s}{R_3 + R_4} R_3 \\
 &= U_s \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}
 \end{aligned}$$



无源等效电阻

$$\begin{aligned}
 R_{eq} &= R_1 // R_2 + R_3 // R_4 \\
 &= \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}
 \end{aligned}$$

原电路等效为：



$$I = \frac{U_{oc}}{R_0 + R_L}$$

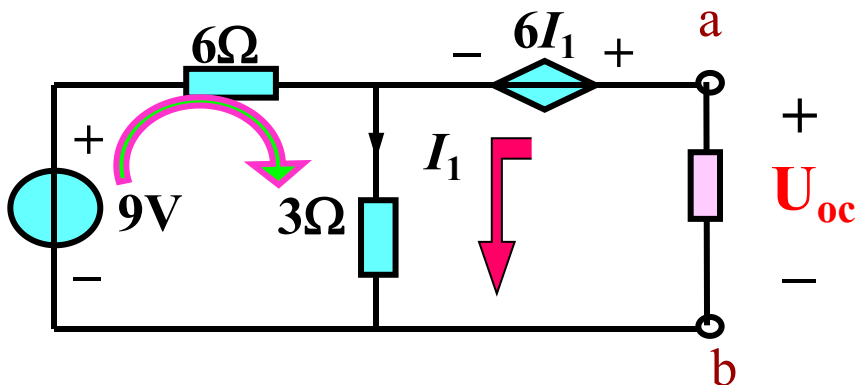
$$= \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2) R_3 R_4 + (R_3 + R_4) R_1 R_2 + (R_1 + R_2) (R_3 + R_4) R_L} U_S$$

例2：用戴维南定理求 U_R

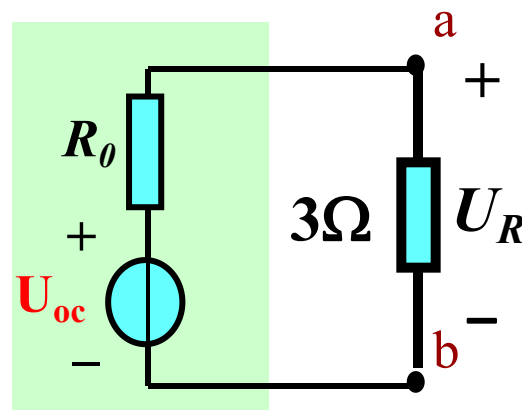
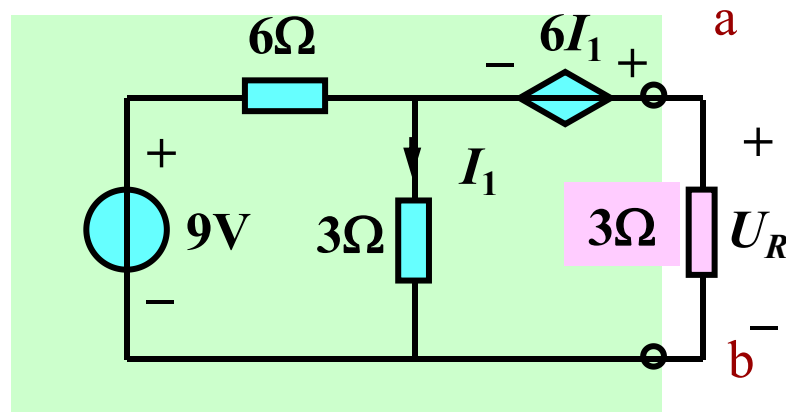
解：①将未知支路移去

②画出戴维南等效电路

③求开路电压 U_{oc}



$$U_{oc} = U_{ab} = 6I_1 + 3I_1$$



$$I_1 = \frac{9}{6+3} = 1A$$

$$U_{oc} = 9V$$

④求等效电阻 R_0

❖除源 $\Rightarrow N_0$

❖在 N_0 外加电压法

难点

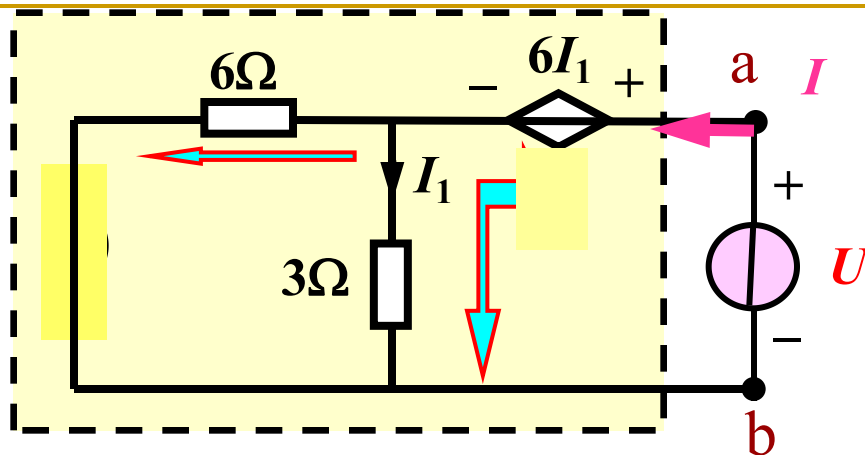
$$R_0 = \frac{U}{I}$$

$$U = 6I_1 + 3I_1 = 9I_1$$

$$I_1 = \frac{6}{6+3} I = \frac{2}{3} I$$

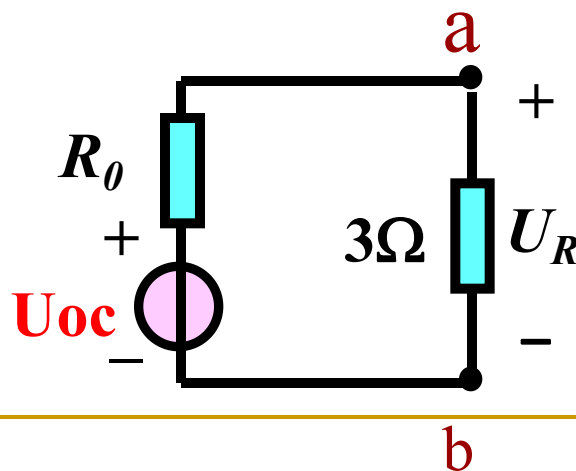
$$U = 9 \times \frac{2}{3} I = 6I$$

$$R_0 = \frac{U}{I} = \frac{6I}{I} = 6\Omega$$

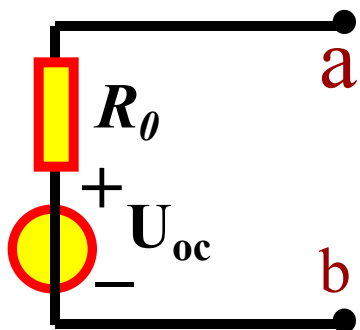


⑤未知支路移入

$$U_R = \frac{3}{6+3} \times 9 = 3V$$



用戴维南定理解题应注意的问题：



①戴维南等效的电路要画出来

②特别注意 U_{oc} 的方向

③求 R_0 时，一定要除源转为 N_0 ，当 N_0 中含受控源时，可用外加电压法，

④除源：电压源短路、电流源开路，而电阻、受控源及电路结构不变

⑤对于复杂的电路可多次使用戴维南定理

I_s

等效电阻 R_0 的求解方法：

(1) 若对应无源一端口 N_0 只含有电阻，可用串、并联、 $Y-\Delta$ 求 R_0

(2) 若 N_0 中不仅含有电阻，还有受控源，则可以外加一个电压 U ，求电流， $R_0 = U/I$

用诺顿定理解题步骤:

1、在原图中将待求支路移去，构造有源一端口 N_S

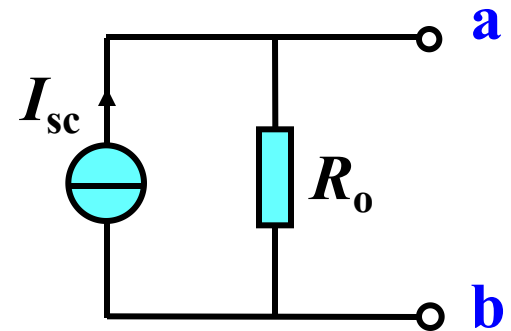
2、画出诺顿等效电路

3、在 N_S 标出 I_{sc} 方向求短路电流 I_{sc}

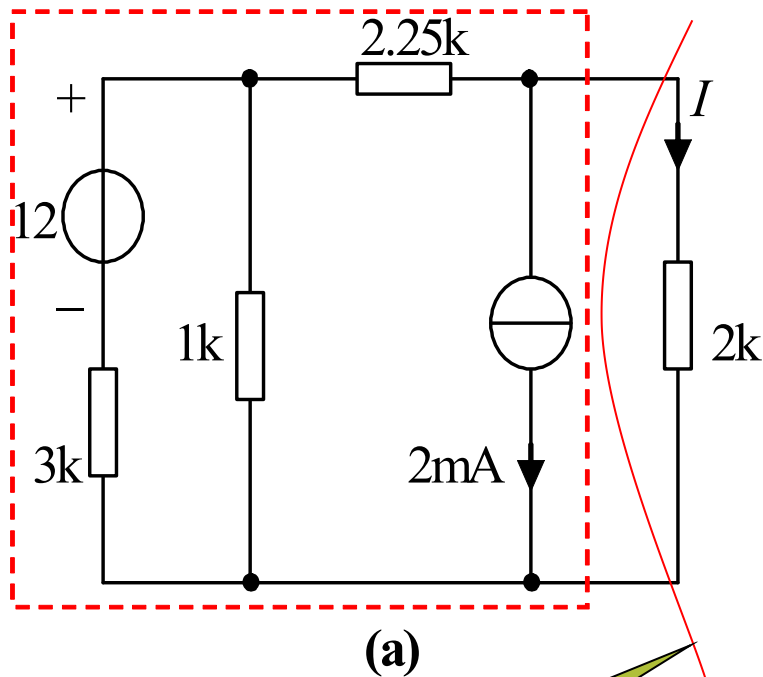
4、求等效电阻 R_0

——去掉电路中的所有独立源（受控源保留）

5、将待求支路移进，求出未知量。

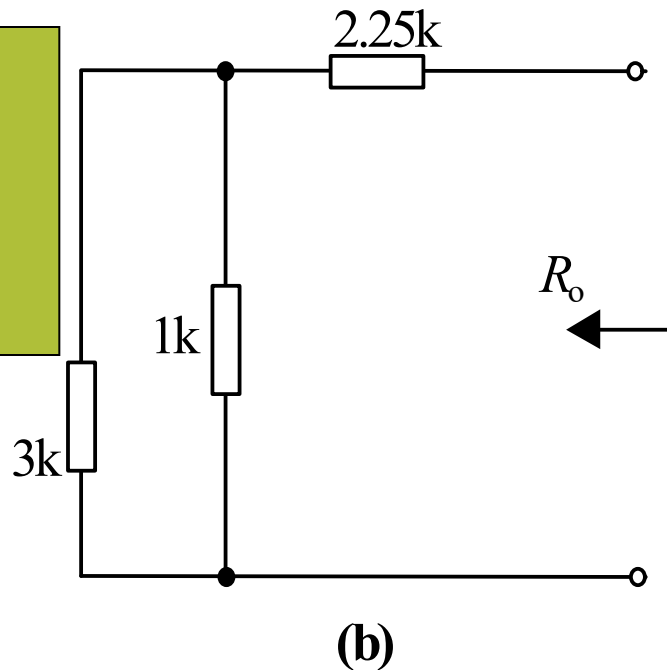


例1. 用诺顿定理求 I



1. 待求支路从原电路中划出

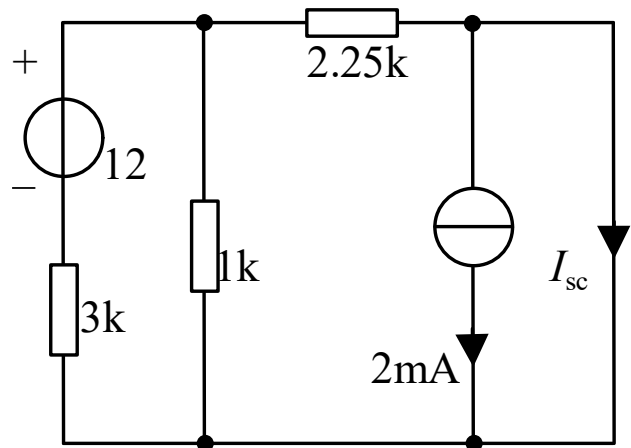
2. 独立源置零求入端等效电阻



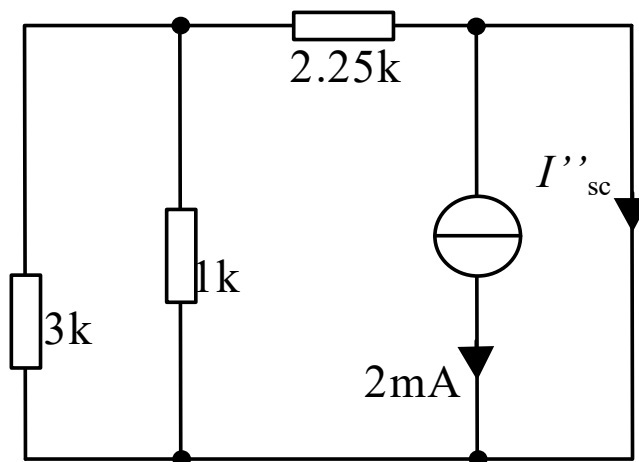
$$R_o = 2.25 + 1 // 3 = 3k\Omega$$

3. 求短路电流 I_s : 可能会遇到复杂电路, 可用网孔法或节点法来解决

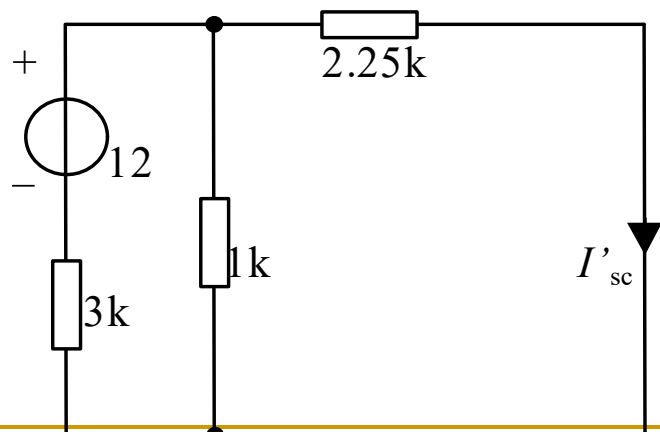
用叠加定理求 I_s



(c)



(e)



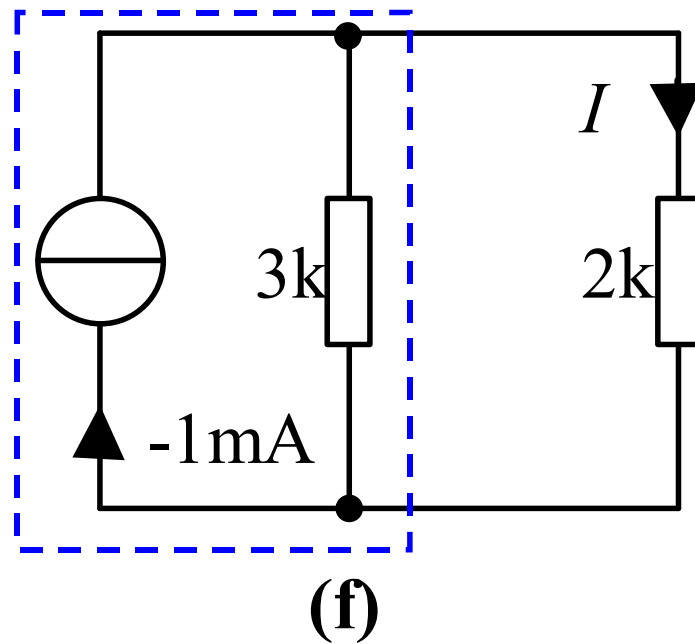
(d)

$$I''_{sc} = -2mA$$

$$I'_{sc} = \frac{12}{3 + 2.25 // 1} \times \frac{1}{1 + 2.25} = 1mA$$

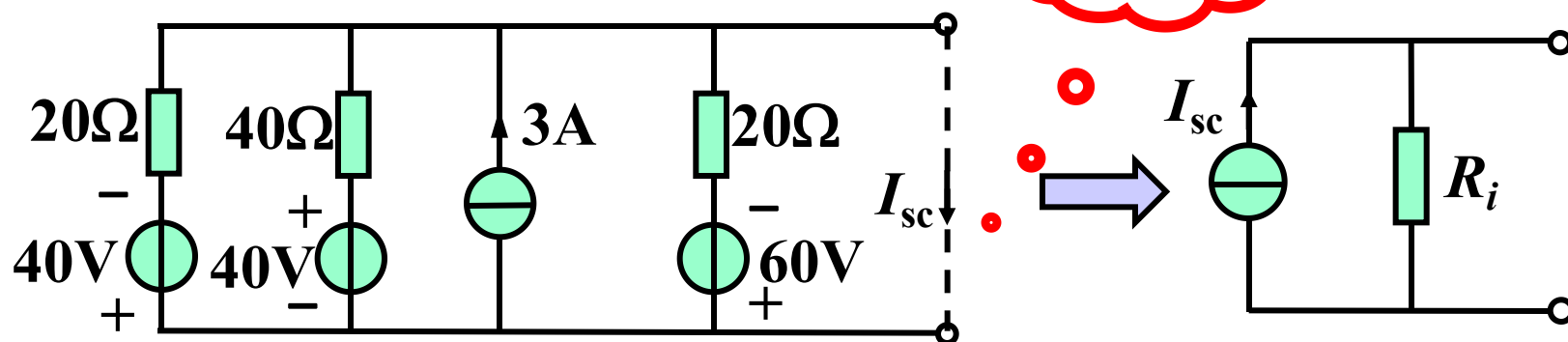
$$I_{sc} = I'_{sc} + I''_{sc} = -2 + 1 = -1mA$$

电路等效为：



$$I = -1 \times \frac{3}{3+2} = -0.6\text{ mA}$$

例2：求如图所示诺顿等效电路



解：

$$i_{sc} = \left(3 - \frac{60}{20} + \frac{40}{40} - \frac{40}{20} \right) A$$

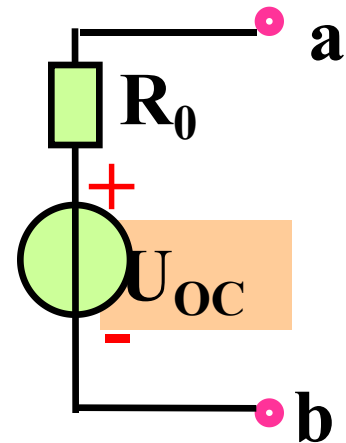
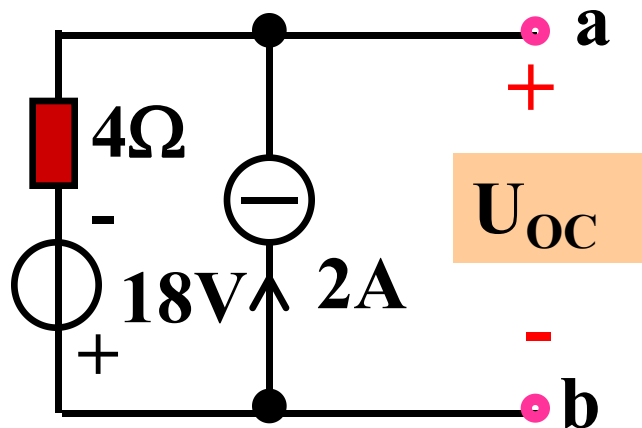
$$i_{sc} = -1 A$$

$$R_i = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{20}} = 8 \Omega$$

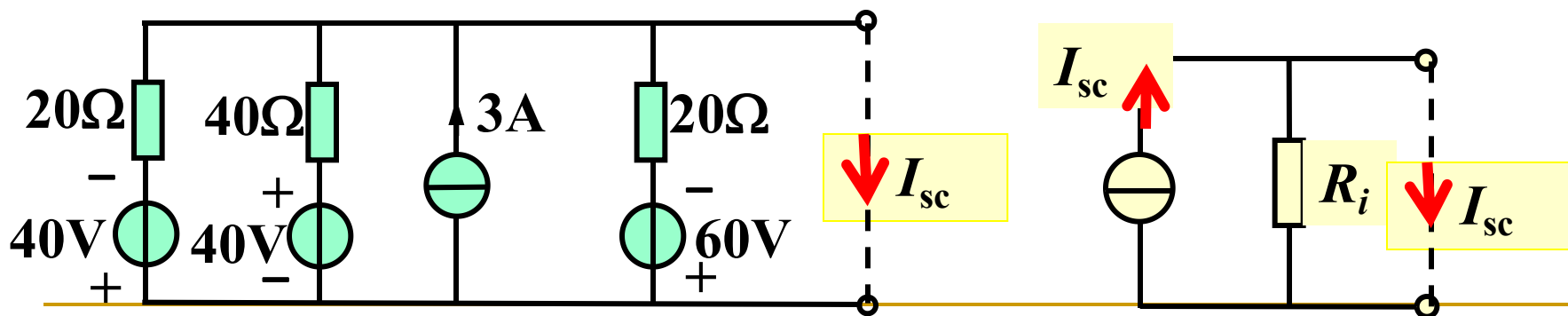
注意：用戴维南和诺顿定理求解时，**必须画出等效电路图**

注意的问题:

1、开路电压的方向与等效电源电压的方向一致



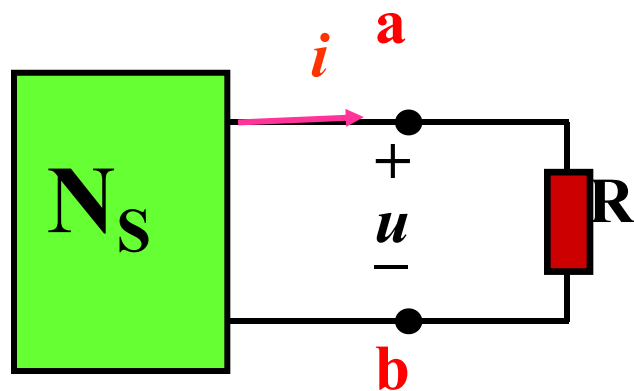
2、短路电流的方向与等效电源电流的方向一致



§ 4.4 最大功率传输定理

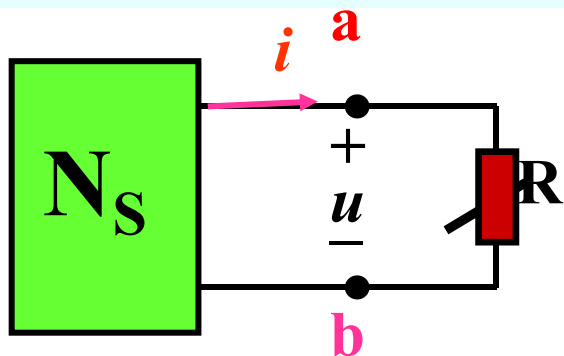
问题的提出：负载在什么条件下可以从电路中取得最大功率？

最大功率传输定理回答这一问题

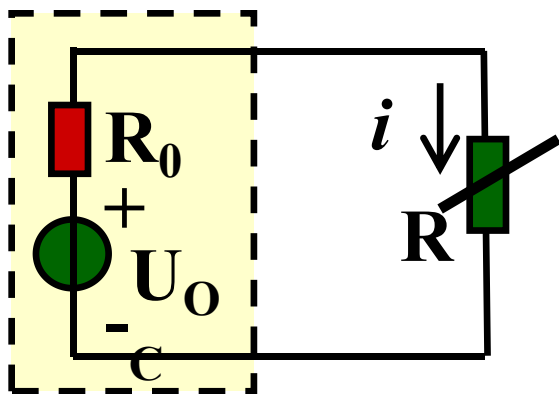


最大功率传输定理的内容:

有源一端口如图，外接可调电阻 R ，当 R 等于多少时，它可以从电路中获得最大功率？求此最大功率？



$$p = i^2 R = \frac{u_{oc}^2 R}{(R_0 + R)^2}$$



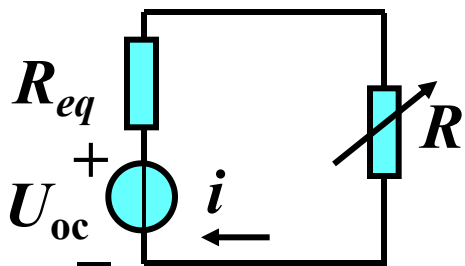
R 变化时，最大功率发生在

$$\frac{dp}{dR} = 0 \text{ 的条件下}$$

当 $R=R_0$ 时能获得最大功率，其值为

$$p_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4 R_0}$$

推导过程:



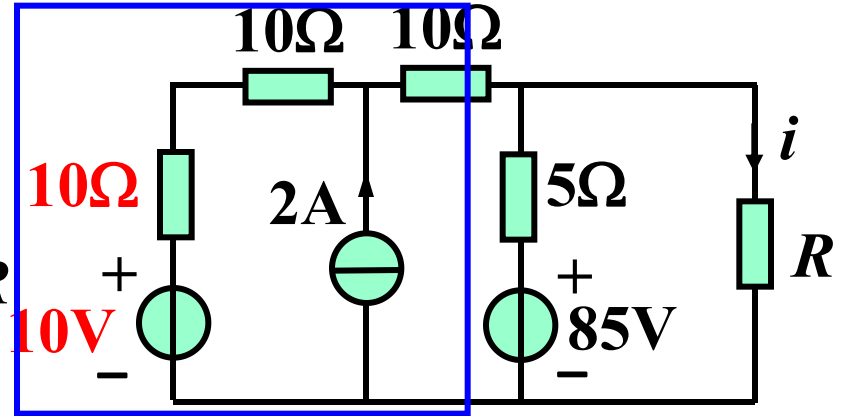
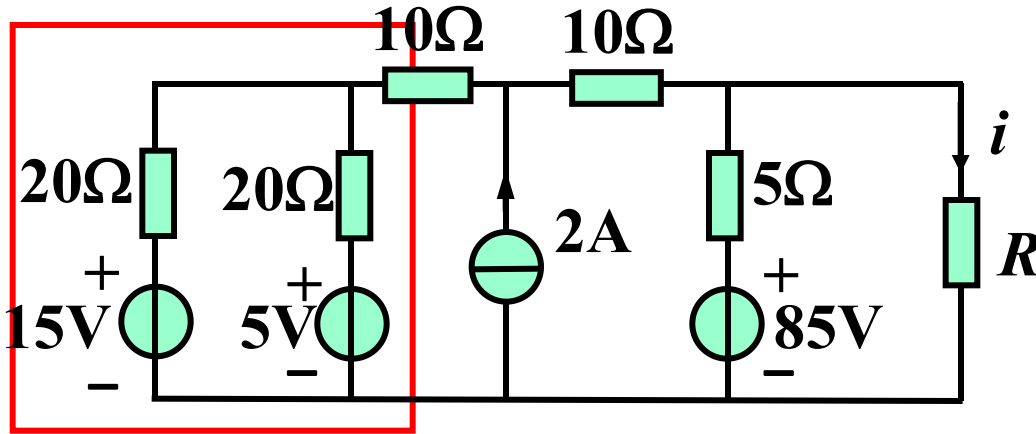
$$\text{由 } p = i^2 R = \left(\frac{u_{oc}}{R_{eq} + R} \right)^2 R \quad \boxed{\frac{dp}{dR} = 0}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dR} &= u_{oc}^2 \frac{(R_{eq} + R)^2 - 2R(R_{eq} + R)}{(R_{eq} + R)^4} \\ &= u_{oc}^2 \frac{R_{eq} - R}{(R_{eq} + R)^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{R_{eq} = R}$$

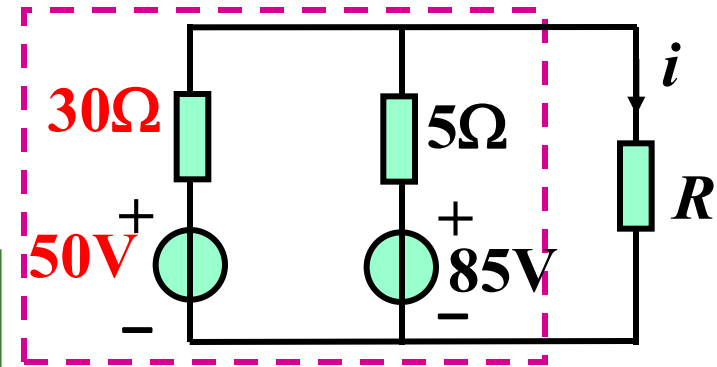
$$\boxed{p_{max} = \frac{u_{oc}^2}{(2R_{eq})^2} \times R_{eq} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}}$$

例1: R可调, 当R等于多少时, 它可从电路中获得最大功率? 求此最大功率。



$$u_{oc} = \frac{15-5}{20+20} \times 20 + 5 = 10V$$

$$R_{eq} = 10\Omega$$



$$u'_{oc} = 2 \times 20 + 10 = 50V$$

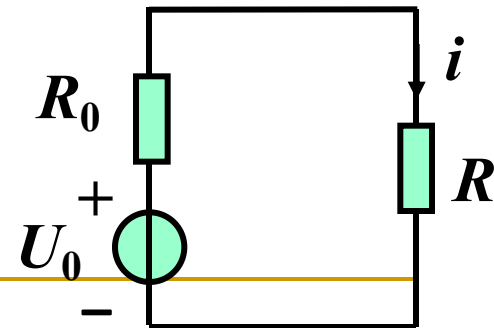
$$R'_{eq} = 30\Omega$$

$$U_0 = \frac{50-85}{35} \times 5 + 85 = 80V$$

$$R = R_0 = 4.29\Omega$$

$$R_0 = \frac{30 \times 5}{35} = 4.29\Omega$$

$$P_{\max} = \frac{u_o^2}{4R_0} = 315W$$



作业

4-20 4-21 4-28 4-29