练 习 一

1．求下列各复数的实部、虚部、模与幅角。

（1） $\dfrac{1-2i}{3-4i}-\dfrac{2-i}{5i}$；

解：$\dfrac{1-2i}{3-4i}-\dfrac{2-i}{5i}$

$=\dfrac{16}{25}+\dfrac{8}{25}i$

$\operatorname{Re}z=\dfrac{16}{25}\quad \operatorname{Im}z=\dfrac{8}{25}\quad |z|=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$

$Argz=\arctan\dfrac{1}{2}+2k\pi\quad k\in z$

（2） $(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})^3$

解：$(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})^3$

$=(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^3=[e^{i\frac{\pi}{3}}]^3=-1$

$\operatorname{Re}z=-1\quad \operatorname{Im}z=0\quad |z|=1$

$Argz=\pi+2k\pi\quad k\in z$

2．将下列复数写成三角表示式。

1）$1-\sqrt{3}i$

解：$1-\sqrt{3}i$

$=2(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3})$

（2） $\dfrac{2i}{1+i}$

解：$\dfrac{2i}{1+i}$

$=1+i=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$

3．利用复数的三角表示计算下列各式。

（1）$\dfrac{-2+3i}{3+2i}$

解：$\dfrac{-2+3i}{3+2i}$

$=i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

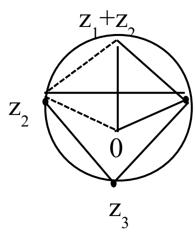
（2）$\sqrt[4]{-2+2i}$

解：$\sqrt[4]{-2+2i}=[2\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4})]^{\frac{1}{4}}$

$=2^{\frac{3}{8}}[\cos\dfrac{3\pi/4+2k\pi}{4}]+i\sin\dfrac{3\pi/4+2k\pi}{4}]=2^{\frac{3}{8}}[\cos\dfrac{3+8k}{16}\pi+i\sin\dfrac{3+8k}{16}\pi]$

$k=0,1,2,3$

4．.设z_1,z_2,z_3三点适合条件：$z_1+z_2+z_3=0$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, z_1,z_2,z_3是内接于单位圆$|z|=1$的一个正三角形的顶点。



证：因$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$,所以z_1,z_2,z_3都在圆周$|z|=|z_1|=1$,又因$z_1+z_2+z_3=0$

则 $z_1+z_2=-z_3$, $|z_1+z_2|=|-z_3|=1$， 所以 z_1+z_2也在圆周 $|z|=1$上， 又 $|z_1+z_2-z_1|=|z_2|=1$,所以以 0， z_1,z_1+z_2 为顶点的三角形是正三角形，所以向量 z_1与z_1+z_2之间的张角是$\dfrac{\pi}{3}$，同理z_2与z_1+z_2之间的张角也是$\dfrac{\pi}{3}$，于是z_1与z_2之间的张角是$\dfrac{2\pi}{3}$，同理z_1与z_3，z_2与z_3之间的张角都是$\dfrac{2\pi}{3}$，所以z_1,z_2,z_3是一个正三角形的三个顶点。

5．解方程$z^3+1=0$

解 : $z^3=-1 \Rightarrow z=\cos\frac{2k\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{3} \qquad k=0,1,2$

$z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$z_3=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

6．试证：当$|\alpha|=1,|\beta|<1$时，则$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|=1$。

证： $\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{\overline{\alpha}\cdot\alpha-\overline{\alpha}\beta}\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{|\overline{\alpha}|\,|\alpha-\beta|}\right|=\frac{1}{|\overline{\alpha}|}=1$

7．设$z+z^{-1}=2\cos\theta(z\neq 0,\theta$ 是 Z的辐角），求证$z^n+z^{-n}=2\cos n\theta.$

证： $z+z^{-1}=2\cos\theta \Rightarrow z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$

则 $z=\cos\theta\pm i\sin\theta$

当$z=\cos\theta+i\sin\theta$时 $z^{-1}=\cos\theta-i\sin\theta$

$z^n+z^{-n}=(\cos n\theta+i\sin\theta)+[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]=2\cos n\theta$

故 $z^n+z^{-n}=2\cos n\theta$

当$z=\cos\theta-i\sin\theta$时，同理可证。

*8 .思考题：

（1）复数为什么不能比较大小?

答：复数域不是有序域，复数的几何意义是平面上的点。

（2）是否任意复数都有辐角?

答：否，$z=0$是模为零，辐角无定义的复数。