

---

# Matlab 在复变函数中应用

## 数学实验（一）

华中科技大学《复变函数与积分变换》课程组

二〇〇九年八月

## MATLAB 在复变函数中的应用

复变函数的运算是实变函数运算的一种延伸，但由于其自身的一些特殊的性质而显得不同，特别是当它引进了“留数”的概念，且在引入了 Taylor 级数展开 Laplace 变换和 Fourier 变换之后而使其显得更为重要了。

使用 MATLAB 来进行复变函数的各种运算；介绍留数的概念及 MAT-LAB 的实现；介绍在复变函数中有重要应用的 Taylor 展开（Laurent 展开 Laplace 变换和 Fourier 变换）。

## 1 复数和复矩阵的生成

在 MATLAB 中，复数单位为  $i = j = \text{sqrt}(-1)$ ，其值在工作空间中都显示为  $0 + 1.0000i$ 。

### 1.1 复数的生成

复数可由  $z = a + b * i$  语句生成，也可简写成  $z = a + bi$ 。

另一种生成复数的语句是  $z = r * \exp(i * \text{theta})$ ，也可简写成  $z = r * \exp(\text{theta} i)$ ，

其中  $\text{theta}$  为复数辐角的弧度值， $r$  为复数的模。

### 1.2 创建复矩阵

创建复矩阵的方法有两种。

(1) 如同一般的矩阵一样以前面介绍的几种方式输入矩阵

例如： $A = [3 + 5 * i, -2 + 3i, 9 * \exp(i * 6), 23 * \exp(33i)]$

(2) 可将实、虚矩阵分开创建，再写成和的形式

例如：

$re = \text{rand}(3, 2);$

$im = \text{rand}(3, 2);$

$com = re + i * im$

```
com =
[0.6602 + 0.3093i    0.3412 + 0.3704i
 0.3420 + 0.8385i    0.5341 + 0.7027i
 0.2897 + 0.5681i    0.7271 + 0.5466i]
```

注意 实、虚矩阵应大小相同。

## 2 复数的运算

### 1. 复数的实部和虚部

复数的实部和虚部的提取可由函数 `real` 和 `imag` 实现。

调用形式

`real(x)`      返回复数  $x$  的实部

`imag(x)`      返回复数  $x$  的虚部

### 2. 共轭复数

复数的共轭可由函数 `conj` 实现。

调用形式

`conj(x)`      返回复数  $x$  的共轭复数

### 3. 复数的模和辐角

复数的模和辐角的求解由功能函数 `abs` 和 `angle` 实现。

调用形式

`abs(x)`      复数  $x$  的模

$angle(x)$  复数  $x$  的辐角

例：求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角

$$(1) \frac{1}{3+2i} \quad (2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} \quad (3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i} \quad (4) i^8 - 4i^{21} + i$$

由 MATLAB 输入如下：

$$a = [1/(3+2i), 1/i - 3i/(1-i), (3+4i)*(2-5i)/2i, i^8 - 4*i^{21} + i]$$

$a =$

$$0.2308 - 0.1538i \quad 1.5000 - 2.5000i \quad -3.5000 - 13.0000i \quad 1.0000 - 3.0000i$$

$real(a)$  %实部

$ans =$

$$0.2308 \quad 1.5000 \quad -3.5000 \quad 1.0000$$

$imag(a)$  %虚部

$ans =$

$$-0.1538 \quad -2.5000 \quad -13.0000 \quad -3.0000$$

$conj(a)$  %共轭复数

$ans =$

$$0.2308 + 0.1538i \quad 1.5000 + 2.5000i \quad -3.5000 + 13.0000i \quad 1.0000 + 3.0000i$$

$abs(a)$  %模

$ans =$

$$0.2774 \quad 2.9155 \quad 13.4629 \quad 3.1623$$

<i>angle(a)</i>	%辐角
-----------------	-----

```
ans =  
-0.5880 -1.0304 -1.8228 -1.2490
```

#### 4. 复数的乘除法

复数的乘除法运算由 “/” 和 “\*” 实现。

例 复数的乘除法演示。

$$x = 4 * \exp(pi / 3i)$$
$$x = 2.0000 - 3.4641i$$
$$y = 3 * \exp(pi / 5 i)$$
$$y = 2.4271 - 1.7634i$$
$$y1 = 3 * \exp(pi / 5 * i)$$
$$y1 = 2.4271 + 1.7634i$$
 $x/y$ 
$$ans = 1.2181 - 0.5423i$$
 $x/y1$

*ans* =

0.1394-1.3260I

由此例可见,  $(\cdots)/5i$  相当于  $(\cdots)/(5*i)$ , 和  $(\cdots)/5*i$  不相等。

## 5. 复数的平方根

复灵敏的平方根运算由函数 *sprt* 实现。

调用形式

*sprt*(*x*)      返回复数 *x* 的平方根值

## 6. 复数的幂运算

复数的幂运算的形式为  $x^n$ , 结果返回复数 *x* 的 *n* 次幂。

例 求下列各式的值

$(-1)^{(1/6)}$

*ans* =

0.8660+0.5000 *i*

## 7. 复数的指数和对数运算

复数的指数和对数运算分别由函数 *exp* 和 *log* 实现。

调用形式

*exp*(*x*)    返回复数 *x* 的以 *e* 为底的指数值

*log*(*x*)    返回复数 *x* 的以 *e* 为底的对数值

例 求下列式的值 (参见参考资料【4】P.68.2-15)。

$\log(-i)$

$ans =$

$0 - 1.5708i$

$\log(-3 + 4i)$

$ans =$

$1.6094 + 2.2143i$

## 8. 复数的三角函数运算

复数的三角函数运算函数参见下面的复数三角函数

复数三角函数表

函数名	函数功能	函数名	函数功能
$\sin(x)$	返回复数 $x$ 的正弦函数值	$a \sin(x)$	返回复数 $x$ 的反正弦值
$\cos(x)$	返回复数 $x$ 的余弦函数值	$a \cos(x)$	返回复数 $x$ 的反余弦值
$\tan(x)$	返回复数 $x$ 的正切函数值	$a \tan(x)$	返回复数 $x$ 的反正切值
$\cot(x)$	返回复数 $x$ 的余切函数值	$a \cot(x)$	返回复数 $x$ 的反余切值
$\sec(x)$	返回复数 $x$ 的正割函数值	$a \sec(x)$	返回复数 $x$ 的反正割值
$\csc(x)$	返回复数 $x$ 的余割函数值	$a \csc(x)$	返回复数 $x$ 的反余割值
$\sinh(x)$	返回复数 $x$ 的双曲正弦值	$\cosh(x)$	返回复数 $x$ 的双曲余切值
$\cosh(x)$	返回复数 $x$ 的双曲余弦值	$\sec h(x)$	返回复数 $x$ 的双曲正割值
$\tanh(x)$	返回复数 $x$ 的双曲正切值	$\csc h(x)$	返回复数 $x$ 的双曲余割值

## 9. 复数方程求根



复数方程求根或实方程的复数根求解也由函数 solve 实现。见下面的例子。

例 求方程  $x^3 + 8 = 0$  所有的根（参见参考资料【4】P.32.1–16）。

```
solve('x^3+8=0')
```

```
ans =
```

```
[-2]
```

```
[1-i*3^(1/2)]
```

```
[1+i*3^(1/2)]
```

### 3 留数

留数定义：

设  $a$  是  $f(z)$  的孤立奇点， $C$  是  $a$  的充分小邻域内一条把  $a$  点包含在其内部的

闭路，积分  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$  称为  $f(z)$  在  $a$  点的留数或残数，记作  $\text{Res}[f(z), a]$ 。在

MATLAB 中，可由函数 residue 实现。

residue 留数函数（部分分式展开）

$[R, P, K] = \text{residue}(B, A)$  函数返回留数，极点和 2 个多项式比值

$B(s)/A(s)$  的部分分式展开的直接项。

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{R(1)}{s - P(1)} + \frac{R(2)}{s - P(2)} + \cdots + \frac{R(n)}{s - P(n)} + K(s)$$

如果没有重根，则向量  $B$  和  $A$  为分子、分母以  $s$  降幂排列的多项式系数，留数返回为向量  $R$ 、极点在向量  $P$  的位置，直接项返回到向量  $K$ 。极点的数目  $n = \text{length}(A) - 1 = \text{length}(R) = \text{length}(P)$ 。如果  $\text{length}(B) < \text{length}(A)$ ，则直接项系数为空；否则  $\text{length}(K) = \text{length}(B) - \text{length}(A) + 1$ 。如果存在  $M$  重极点即有  $P(j) = \cdots = P(j + m - 1)$  则展开项包括以下形式

$$\frac{R(j)}{s - P(j)} + \frac{R(j+1)}{(s - P(j))^2} + \cdots + \frac{R(j+m-1)}{(s - P(j))^m}$$

$[B, A] = \text{residue}(R, P, K)$  有 3 个输入变量和 2 个输出变量，函数转换部分因

式展开还为系数为  $B$  和  $A$  的多项式比的形式。

注意：数值上讲，分式多项式的部分因式展开实际上代表了一类病态问题。如果分母多项式  $A(s)$  是一个近似有重根的多项式，则在数值上的一点微小变化，包括舍入误差都可能造成极点和留数结果上的巨大变化。因此使用状态空间和零点一极点表述的方法是可取的。

例 求如下函数的奇点处的留数。

$$\frac{z+1}{z^2-2z}$$

在 MATLAB 实现如下

$$[r, p, k] = \text{residue}([1, 1], [1, -2, 0])$$

$r =$

1.5000

-0.5000

$p =$

2

0

$k =$

[ ]

所以可得  $\text{Res}[f(z), 2] = 1.5$ ;  $\text{Res}[f(z), 0] = -0.5$ 。

例 计算下面的积分

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz$$

其中  $C$  为正向圆周  $|z|=2$ 。（参见参考资料【4】 P.158.例 2）

解：先求被积函数的留数

$$[r, p, k] = \text{residue}([1, 0], [1, 0, 0, 0, -1])$$

$r =$

0.2500

```

0.2500
-0.2500-0.0000 i
-0.250+0.0000 i
p =
-1.0000
1.0000
0.0000+1.0000 i
0.0000-1.0000 i
k = 0
[]

```

可见在圆周  $|z|=2$  内有四个极点，所以积分值等于

$$2 * \pi i * (0.25 + 0.25 - 0.25 - 0.25) = 0。$$

## 4 Taylor 级数展开

Taylor 级数开展在复变函数中有很重要的地位，如分析复变函数的解析性等。

函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  点的 Taylor 级数开展为

$$f(x) = x_0 + f(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)(x - x_0)^2 / 2! + f''(x_0)(x - x_0)^3 / 3! + \dots$$

在 MATLAB 中可由函数 `taylor` 来实现。

*taylor* 泰勒级数展开

*taylor(f)* 返回  $f$  函数的五次幂多项式近似。此功能函数可有 3 个附加参数

$taylor(f, n)$  返回  $n-1$  次幂多项式。

$taylor(f, a)$  返回  $a$  点附近的幂多项式近似。

$taylor(r, x)$  使用独立变量代替函数  $findsym(f)$ 。

例 求下列函数在指定点的泰勒开展式（参见参考资料【4】P.143.12）。

$$(1) \ 1/z^2 z, \ 0 = -1 \quad (2) \ tgz, \ z0 = \pi/4;$$

MATLAB 实现为：

$taylor(1/x^2, -1)$

$$3 + 2 * x + 3 * (x + 1)^2 + 4 * (x + 1)^3 + 5 * (x + 1)^4 + 6 * (x + 1)^5$$

$taylor(\tan(x), \pi/4)$

$ans =$

$$1 + 2 * x - 1/2 * \pi + 2 * (x - 1/4 * \pi)^2 + 8/3 * (x - 1/4 * \pi)^3 + 10/3 *$$

$$(x - 1/4 * \pi)^4 + 64/15 * (x - 1/4 * \pi)^5$$

例 再看下面的展开式

$taylor(\sin(x)/x, 10)$

$ans =$

$$1 - 1/6 * x^2 + 1/120 * x^4 - 1/5040 * x^6 + 1/362880 * x^8$$

展开式说明  $x = 0$  是此函数的伪奇点！

这里的 *taylor* 展开式运算实质上是符号运算，因此在 MATLAB 中执行此命令前

应先定义符号变量 *syms x, z...*，否则 MATLAB 将给出出错信息！

## 5 Laplace 变换及其逆变换

### 1. Laplace 变换

$L = \text{laplace}(F)$  返回以默认独立变量  $t$  对符号函数  $F$  的 Laplace 变换。函数

返回默认为  $s$  的函数。如果  $F = F(s)$ ，则 Laplace 函数返回  $t$

的函数  $L = L(t)$ 。其中定义  $L$  为对  $t$  的积分

$$L(s) = \text{int}(F(t) * \exp(-s * t), 0, \text{inf})。$$

$L = \text{laplace}(F, t)$  以  $t$  代替  $s$  的 Laplace 变换。 $\text{laplace}(F, t)$  等价于

$$L(t) = \text{int}(F(x) * \exp(-t * x), 0, \text{inf})。$$

$L = \text{laplace}(F, w, z)$  以  $z$  代替  $s$  的 Laplace 变换（相对于  $w$  的积分）。

$$\text{laplace}(F, w, z) \text{ 等价于 } L(z) = \text{int}(F(w) * \exp(-z * w), 0, \text{inf})。$$

例如：

```
syms a s t w x
```

```
laplace(x^5)
```

```
ans =
```

$$120/s^6$$

$$\text{paplace}(\exp(a * s))$$

$$\text{ans} =$$

$$1/(t - a)$$

$$\text{laplace}(\sin(w * x), t)$$

$$\text{ans} =$$

$$w/(t^2 + w^2)$$

$$\text{laplace}(\cos(x * w), w, t)$$

$$\text{ans} =$$

$$t/(t^2 + x^2)$$

$$\text{laplace}(x^{\text{sym}(3/2)}, t)$$

$$\text{ans} =$$

$$3/4 * \pi^{1/2}/t^{5/2}$$

$$\text{laplace}(\text{diff}(\text{sym}('F(x)')))$$

$$\text{ans} =$$

$$\text{laplace}(F(x), x, s) * s - F(0)$$

## 2. Laplace 逆变换

$F = \text{ilaplace}(L)$  返回以默认独立变量  $s$  的数量符号  $L$  的 Laplace 变换，默认

返回  $t$  的函数。如果  $L = L(t)$ ，则  $\text{ilaplace}$  返回  $x$  的函数

$F = F(x)$ 。  $F(x)$  定义为对  $s$  的积分

$F(t) = \text{int}(L(s) * \exp(s * t), s, c - i * \text{inf}, c + i * \text{inf})$  ; 其中  $c$  为选

定实数, 使得  $L(s)$  的所有奇点都在直线  $s = c$  的左侧。

$F = \text{ilaplace}(L, y)$  以  $y$  代替默认的  $t$  的函数, 且有  $\text{ilaplace}(L, y)$  等价于

$F(y) = \text{int}(L(y) * \exp(s * y), s, c - i * \text{inf}, c + i * \text{inf})$ 。这里  $y$  是

个数量符号。

$F = \text{ilaplace}(L, y, x)$  以  $x$  代替  $t$  的函数,  $\text{ilaplace}(L, y, x)$  等价于

$F(y) = \text{int}(L(y) * \exp(x * y), y, c - i * \text{inf}, c + i * \text{inf})$ , 对  $y$  取积

分。

例如:

```
syms s t w x y
```

```
ilaplace(1/(s-1))
```

```
ans =
```

```
exp(t)
```

```
ilaplace(1/(t^2+1))
```

```
ans =
```



$$\sin(x)$$

$$\text{ilaplace}(\hat{t}(-\text{sym}(5/2)), x)$$

$$\text{ans} =$$

$$4/3 / \pi^{1/2} * x^{3/2}$$

$$\text{ilaplace}(y/(y^2 + w^2), y, x)$$

$$\text{ans} =$$

$$\cos(w * x)$$

$$\text{ilaplace}(\text{sym}('laplace(F(x), x, s)'), s, x)$$

$$\text{ans} =$$

$$F(x)$$

## 6 Fourier 变换及其逆变换

### 1. Fourier 积分变换

$F = \text{fourier}(f)$  返回以默认独立变量  $x$  对符号函数  $f$  的 Fourier 变换，默认返回  $w$  的函

数。如果  $f = f(w)$ ，则  $\text{fourier}$  函数返回  $t$  的函数  $F = F(t)$ 。定义  $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) * \exp(-i * w * x), x, -\text{inf}, \text{inf})$ ，为对  $x$  的积分。

$F = \text{fourier}(f, v)$  以  $v$  代替默认值  $w$  的 Fourier 变换，且有  $\text{fourier}(f, v)$  等价于  $F($

$$v) = \text{int}(f(x) * \exp(-i * v * x), x, -\text{inf}, \text{inf})。$$

$\text{fourier}(f, u, v)$  以  $v$  代替  $x$  且对  $u$  积分, 且有  $\text{fourier}(f, u, v) < = > F(v) = \text{int}$

$$(f(u) * \exp(-i * v * u), u, -\text{inf}, \text{inf})。$$

例如:

*syms t v w x*

$\text{fourier}(1/t)$

*ans =*

$$i * \pi * (\text{Heaviside}(-w) - \text{Heaviside}(w))$$

$$\text{fourier}(\exp(-x^2), x, t)$$

*ans =*

$$\pi^{1/2} \exp(-1/4 * t^2)$$

$$\text{fourier}(\exp(-t) * \text{sym}('Heaviside(t)'), v)$$

*ans =*

$$1/(1 + i * v)$$

$$\text{fourier}(\text{diff}(\text{sym}('F(x)'), x), w)$$

*ans =*

$$i * w * \text{fourier}(F(x), x, w)$$

## 2·Fourier 逆变换

$f = \text{ifourier}(F)$  返回以默认独立变量  $w$  对符号函数  $F$  的 Fourier 逆变换，

默认返回  $x$  的函数 Fourier 逆变换应用于返回  $x$  的函数，即由  $F=F(w)$  推出  $f=f(x)$ 。

如果  $F=F(x)$ ，则  $\text{ifourier}$  函数返回  $t$  的函数  $f=f(t)$ 。定义

$f(x) = 1/(2 * \pi i) * \int(F(w) * \exp(i * w * x), w, -\text{inf}, \text{inf})$ ，对  $w$  的积分。

$f = \text{ifourier}(F, u)$  以  $u$  代替  $x$  的函数，且有  $\text{ifourier}(F, u)$  等价于

$f(u) = 1/(2 * \pi i) * \int(F(w) * \exp(i * w * u), w, -\text{inf}, \text{inf})$  对  $w$  积分。

$f = \text{ifourier}(F, v, u)$  以  $v$  代替  $w$  的 Fourier 逆变换，且有  $\text{ifourier}(F, v, u) <=>$

$f(u) = 1/(2 * \pi i) * \int(F(v) * \exp(i * v * u), v, -\text{inf}, \text{inf})$ ，积分针对  $v$ 。

例如：

```
syms t u w x
```

```
ifourier(w * exp(-3 * w) * sym('Heaviside(w)')
```

```
ans =
```

```
1/2/pi/(3 - i * t)^2
```

```
ifourier(1/(1 + w^2), u
```

```
ans =
```

```
1/2 * exp(-u) * Heaviside(u) = 1/2 * exp(u) * Heaviside(-u)
```

```
ifourier(v/(1+w^2),u)
```

```
ans
```

```
i/(1+w^2)*Dirac(1,u)
```

```
ifourier(sym('fourier(f(x),x,w)'),w,x)
```

```
ans=
```

```
f(x)
```

## Matlab 中复变函数命令集

定义符号变量    Syms

虚单位         $z = \text{Sqrt}(-1)$

复数表示       $z = x + y*i$

指数表示       $z = r * \exp(i*a)$

求实部         $\text{Real}(z)$

求虚部         $\text{Imag}(z)$

求共轭         $\text{Conj}(z)$

求模            $\text{Abs}(z)$

求幅角         $\text{Angle}(z)$

三角函数       $z = \sin(z)$

$z = \cos(z)$

指数函数       $z = \exp(z)$

对数函数       $z = \log(z)$

幂函数  $z=z^a$

解方程  $\text{expr}=\text{'方程式'}$  ;  
 $\text{Solve}(\text{expr})$

泰劳展开  $\text{Taylor}(\text{e},z)$

求留数  $[\text{r},\text{p},\text{k}]=\text{residue}(\text{p},\text{q})$

傅立叶变换  $\text{Fourier}(\text{e},z,w)$

逆傅立叶变换  $\text{Ifourier}(\text{e},w,z)$

拉普拉斯变换  $\text{Laplace}(\text{e},w,t)$

逆拉普拉斯变换  $\text{Ilaplace}(\text{e},t,x)$