§4.4 洛朗级数

一、含有负幂次项的“幂级数”

二、洛朗 (Laurent) 定理

三、将函数展开为洛朗级数的方法

一、含有负幂次项的“幂级数”

1. 问题分析

引例 根据前面的讨论已知，函数 $\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z=0$ 点的幂级数展开式为

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots,\quad (|z|<1).$$

- 事实上，该函数在整个复平面上仅有 $z=1$ 一个奇点，但正是这样一个奇点，使得函数只能在 $|z|<1$ 内展开为 z 的幂级数，而在 $|z|>1$ 如此广大的**解析区域**内不能展开为 z 的幂级数。一粒老鼠屎，坏了一锅汤！

- 有没有其它办法呢？

一、含有负幂次项的"幂级数"

1. 问题分析

设想 由 $|z|>1$ 有 $\dfrac{1}{|z|}<1$，从而可得

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots.$$

- 这样一来，在整个复平面上就有

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots,\quad (|z|<1);$$

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots,\quad (|z|>1).$$

一、含有负幂次项的“幂级数”

1. 问题分析

启示 如果不限制一定要展开为只含正幂次项的幂级数的话

即如果引入负幂次项，那么就有可能将一个函数在整个

复平面上展开（除了奇点所在的圆周上）。

- 下面将讨论下列形式的级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots.$$

- 在引入了负幂次项以后，“幂级数”的收敛特性如何呢？

一、含有负幂次项的“幂级数”

2. 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 的收敛特性

分析 将其分为两部分:正幂次项部分与负幂次项部分。

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots; \qquad (A)$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n = a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + \cdots. \qquad (B)$$

根据上一节的讨论可知:

(1) 对于 (*A*) 式，其收敛域的形式为 $z_0| < R_2$;

(2) 对于 (*B*) 式，其收敛域的形式为 $z_0| > R_1$;

一、含有负幂次项的“幂级数”

2. 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 的收敛特性

结论 (1) 如果级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 收敛，

则其收敛域“一定”为环域：$R_1 < |z-z_0| < R_2$.

特别地 ① 如果只含正幂次项（或者加上有限个负幂次项），则其收敛域为：$0 \le |z-z_0| < R$ 或 $0 < |z-z_0| < R$.

② 如果只含负幂次项（或者加上有限个正幂次项），则其收敛域为：$R < |z-z_0| < +\infty$.

- 上述两类收敛域被看作是一种特殊的环域。

一、含有负幂次项的“幂级数”

2. 级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$的收敛特性

结论 (1) 如果级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$收敛，

则其收敛域“一定”为环域：$R_1<|z-z_0|<R_2$.

(2) 级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$在收敛域内其和函数是解析的，

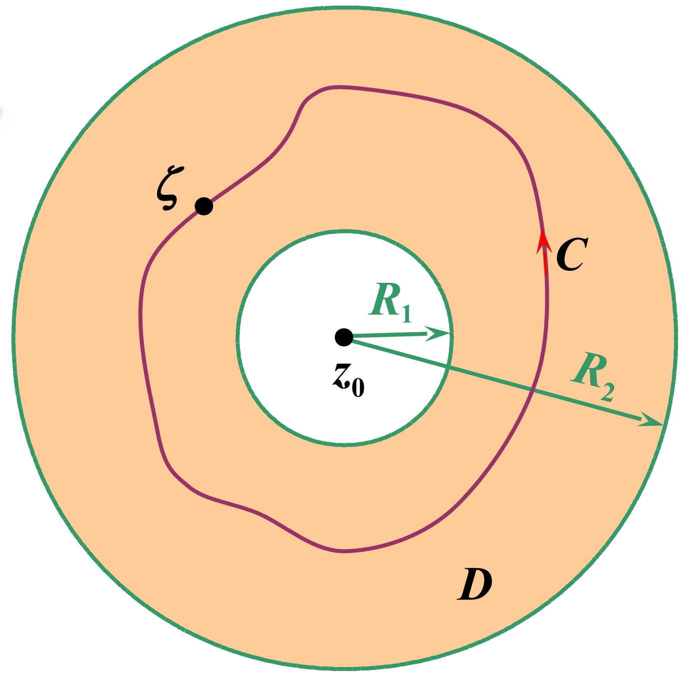
而且具有与幂级数同样的运算性质和分析性质。

- 因此，下面将讨论如何将一个函数在其解析环域内展开为上述形式的级数。

二、洛朗 (Laurent) 定理

定理 设函数 $f(z)$ 在圆环域 $D: R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则 $f(z)$ 一定能在此圆环域中展开为

P94 定理4.7



$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

其中，$a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$

C 为在圆环域内绕 z_0 的任何一条简单闭曲线。

证明（略） (进入证明？)

二、洛朗 (Laurent) 定理

注 (1) 洛朗级数中的正幂次项和负幂次项分别称为洛朗级数的解析部分和主要部分。

(2) 一个在某圆环域内解析的函数展开为含有正负幂次项的级数是唯一的。

(3) 系数 $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \overset{?}{=} \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

(4) 若函数 $f(z)$ 在圆环 $0 \le |z - z_0| < R$ 内解析，则 $f(z)$ 在此圆环内的洛朗展开式就是泰勒展开式。

二、洛朗 (Laurent) 定理

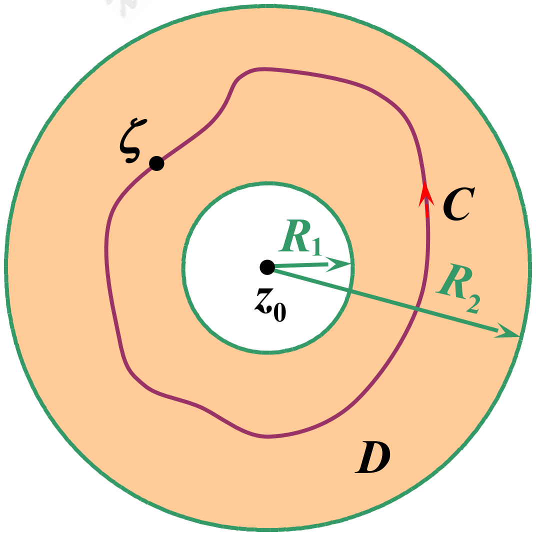
注 (5) 展开式中的系数 a_n 可以用下面得方法直接给出。

$$f(z)=\cdots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+a_n(z-z_0)^n+a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}=\cdots+\frac{a_{n-1}}{(z-z_0)^2}+\boxed{\frac{a_n}{z-z_0}}+a_{n+1}+\cdots,$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=0+2\pi i a_n+0,$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

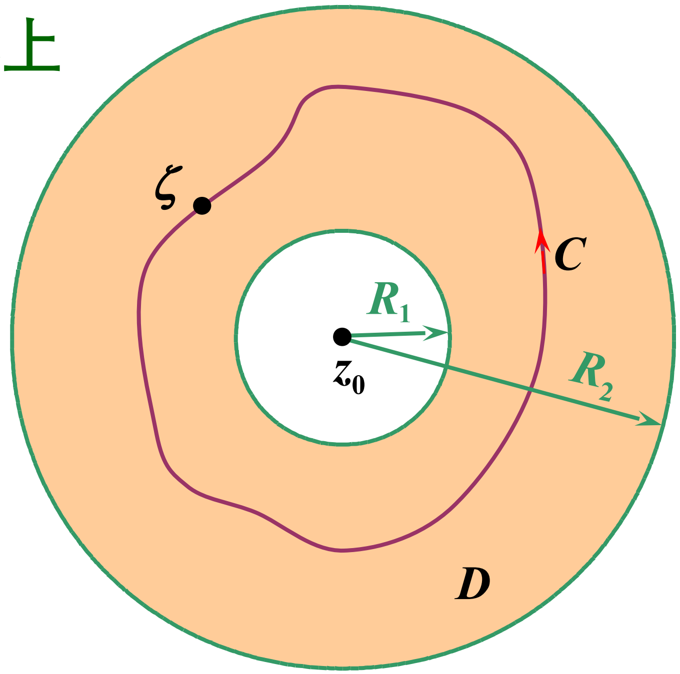


三、将函数展开为洛朗级数的方法

1. 直接展开法

- 根据洛朗定理，在指定的解析环上直接计算展开系数：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta .$$



- 有点繁！有点烦！

三、将函数展开为洛朗级数的方法

2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。

- 两个重要的已知展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3\cdots,\qquad |z|<1.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,\quad |z|<+\infty.$$

三、将函数展开为洛朗级数的方法

注意 无论是直接展开法还是间接展开法，在求展开式之前，都需要根据函数的奇点位置，将复平面（或者题目指定的展开区域）分为若干个解析环。

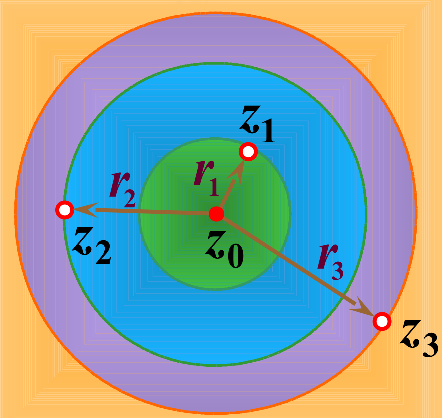
比如 设函数的奇点为 z_1, z_2, z_3，展开点为 z_0，则复平面被分为四个解析环：

$$0 \le |z - z_0| < r_1;$$

$$r_1 < |z - z_0| < r_2;$$

$$r_2 < |z - z_0| < r_3;$$

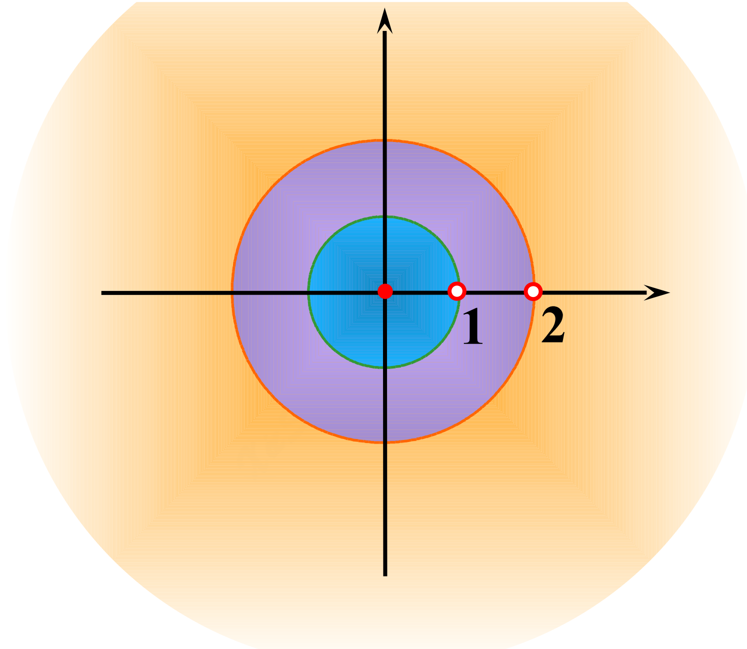
$$r_3 < |z - z_0| < +\infty.$$



例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

P97 例 4.13

解 (1) 将复平面分为若干个解析环



函数 $f(z)$ 有两个奇点：

$z=1,\ z=2,$

以展开点 $z=0$ 为中心，

将复平面分为三个解析环：

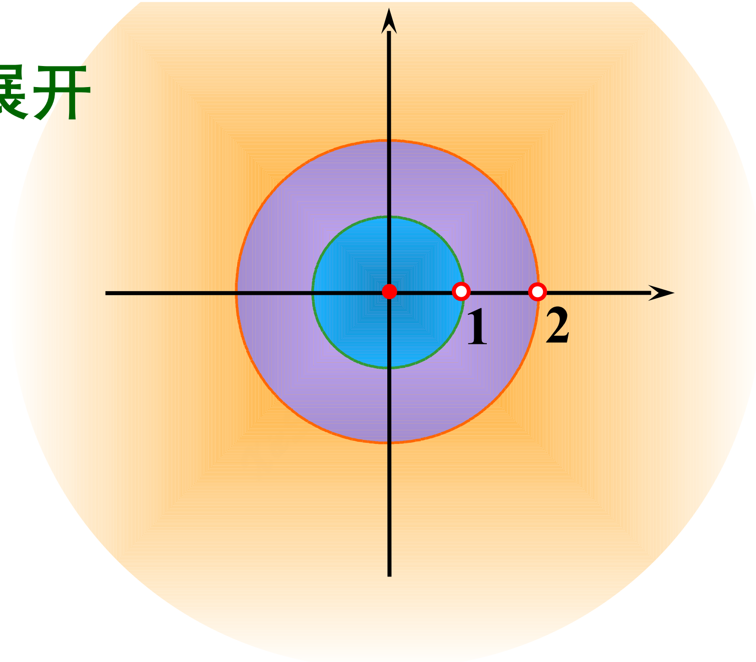
① $0\le|z|<1$； ② $1<|z|<2$； ③ $2<|z|<+\infty$.

(2) 将函数进行部分分式分解

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

解 (3) 将函数在每个解析环内分别展开



① 当 $0\le|z|<1$ 时，

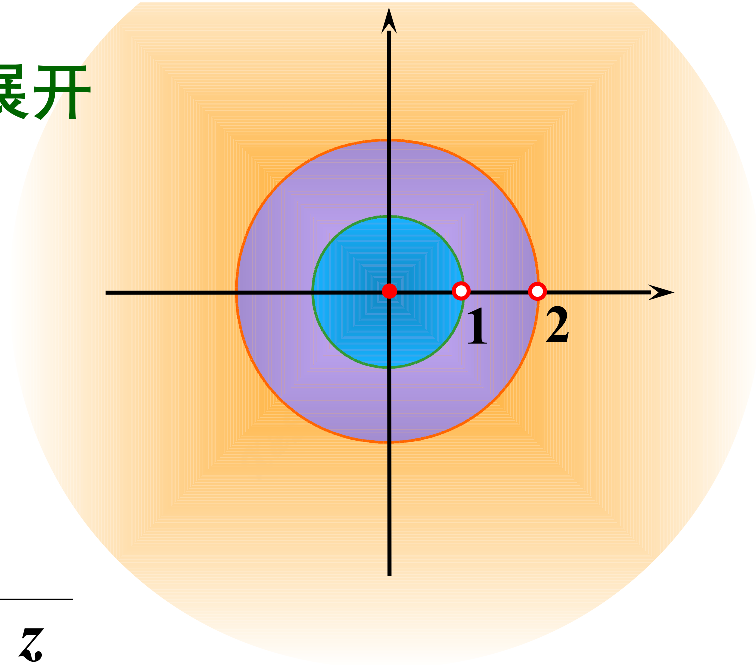
$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

$$=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{2^{n+1}}\Big)z^n.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

解 (3) 将函数在每个解析环内分别展开



② 当 $1<|z|<2$ 时，

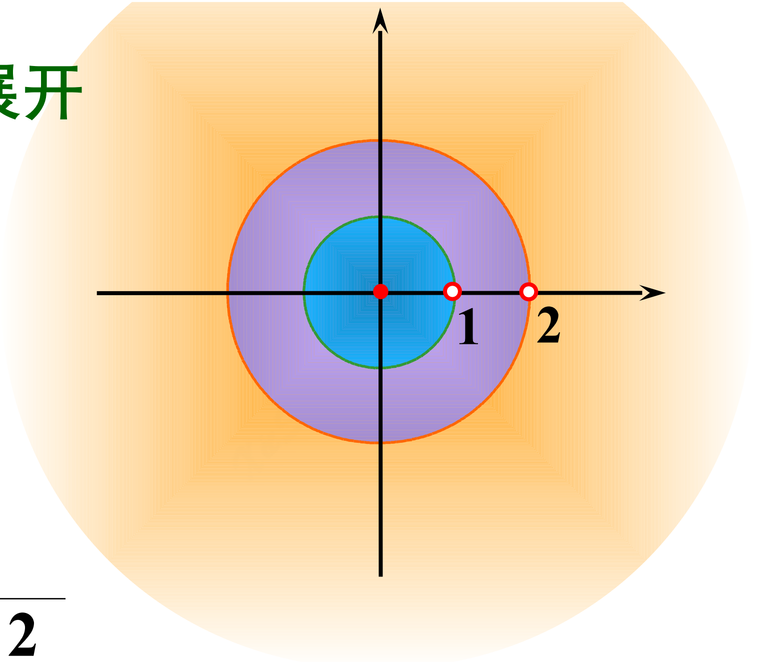
$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

解 (3) 将函数在每个解析环内分别展开



③ 当 $2<|z|<+\infty$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(2-z)}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 (1) 将复平面分为若干个解析环

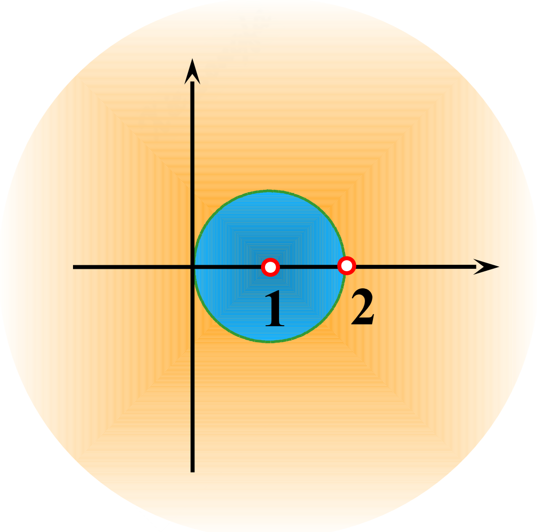
函数 $f(z)$ 有两个奇点 $z=1$，$z=2$，

以展开点 $z=1$ 为中心，

将复平面分为两个解析环：

① $0<|z-1|<1$;

② $1<|z-1|<+\infty$.



注意：不需要将函数进行部分分式分解。

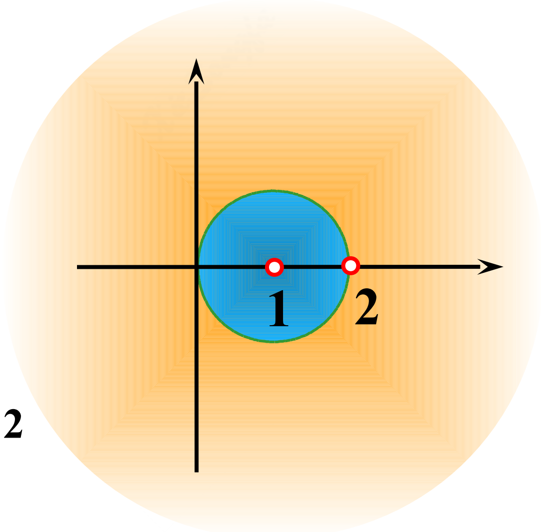
例 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(2-z)}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

$$f(z)=\frac{z-1+1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2-z}=\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)\cdot\frac{1}{1-(z-1)}.$$

① 当 $0<|z-1|<1$ 时，

$$\frac{1}{1-(z-1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n,$$



$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-2}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}+2\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}.$$

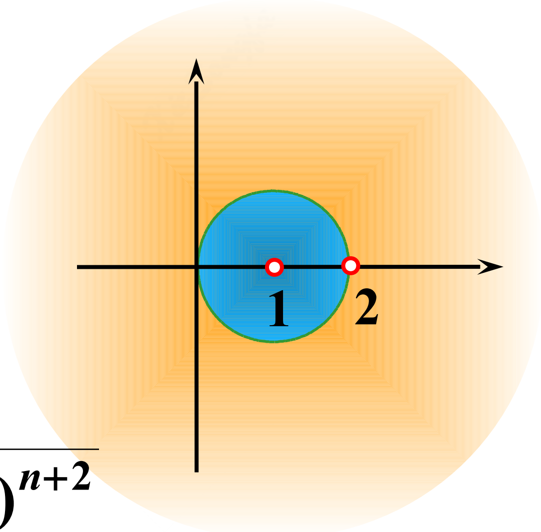
例 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(2-z)}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

$$f(z)=\frac{z-1+1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2-z}=\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)\cdot\frac{1}{1-(z-1)}.$$

② 当 $1<|z-1|<+\infty$ 时，

$$\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n},$$



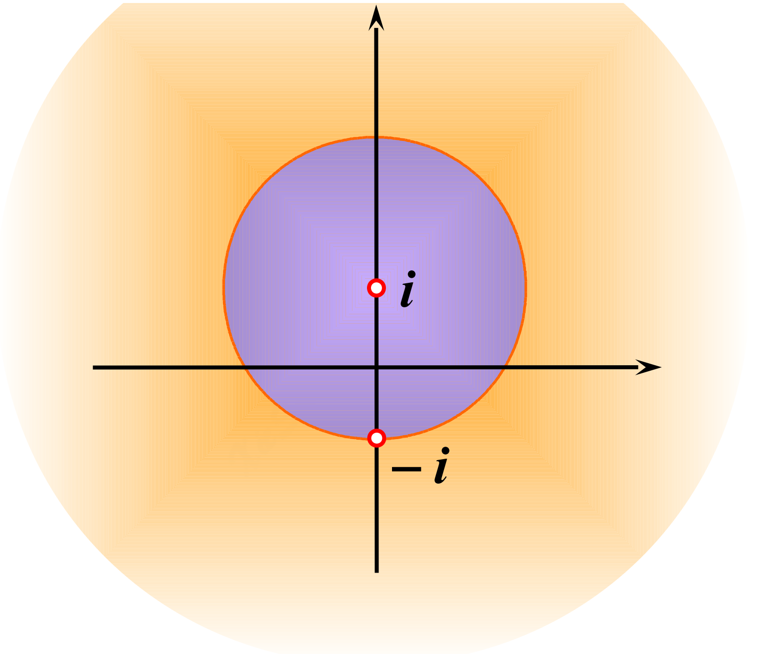
$$f(z)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}$$

$$=-\frac{1}{(z-1)^2}-2\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=i$ 处展开为洛朗级数。

P99 例 4.15

解 (1) 将复平面分为若干个解析环



函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$,

有两个奇点: $z=\pm i$,

以展开点 $z=i$ 为中心

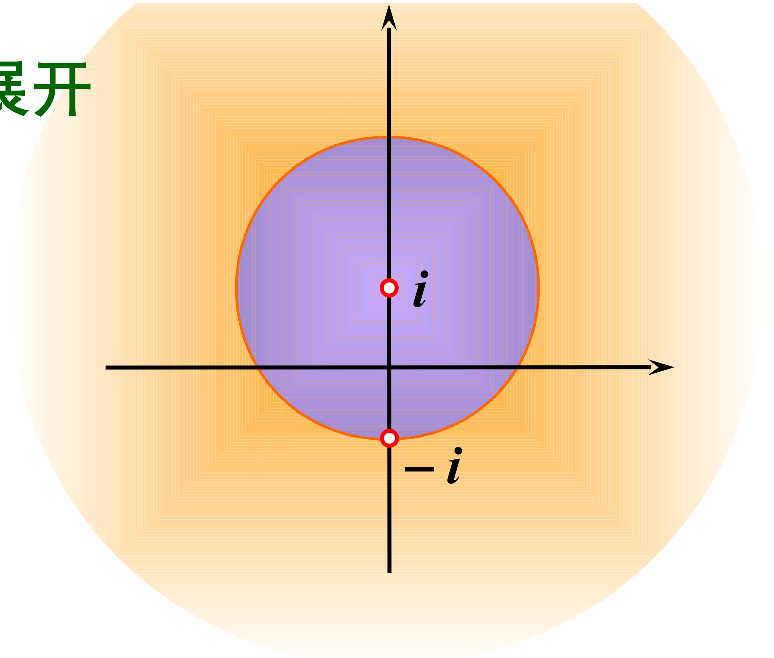
将复平面分为两个解析环:

① $0<|z-i|<2$; ② $2<|z-i|<+\infty$.

注意:不需要将函数进行部分分式分解。

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=i$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开



① 当$0<|z-i|<2$时，

$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{(z-i)+2i}$$

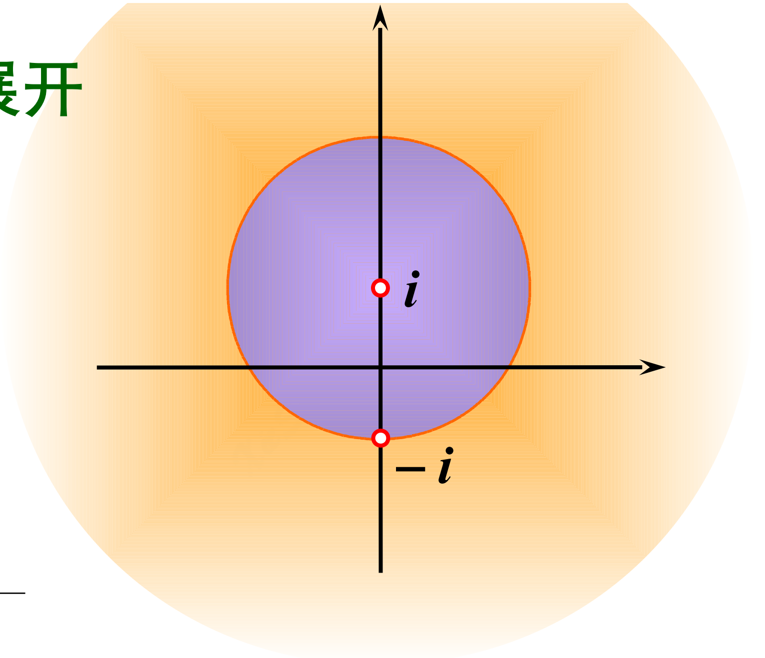
$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{\dfrac{z-i}{2i}+1}$$

$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=i$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

② 当 $2<|z-i|<+\infty$ 时，



$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{(z-i)+2i}$$

$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2i}{z-i}}$$

$$=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-i)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+2}}.$$

例 把函数 $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数。

解 $$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{4!\,z^4}+\cdots\right)$$

$$= z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!\,z}+\cdots,\quad 0<|z|<+\infty.$$

例 把函数 $\frac{1}{z^2}e^z$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数。

解 $$\frac{1}{z^2}e^z=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2+\cdots,\quad 0<|z|<+\infty.$$

轻松一下吧……

附：洛朗定理的证明

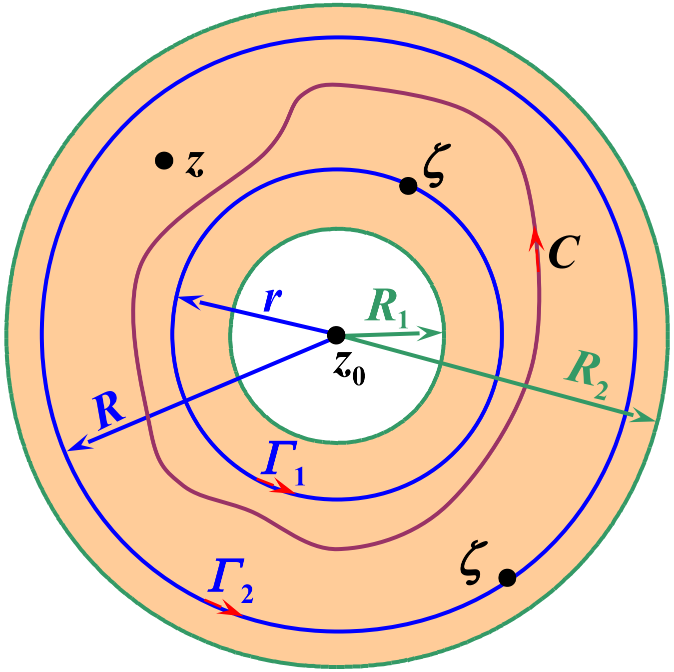
证明 如图，在圆环内作两个圆：

$\Gamma_1: |z-z_0| = r,\ \Gamma_2: |z-z_0| = R,$

其中，$R_1 < r < R < R_2$,

对 $r < |z-z_0| < R$ 内任一点 z,

由二连域的柯西积分公式有



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

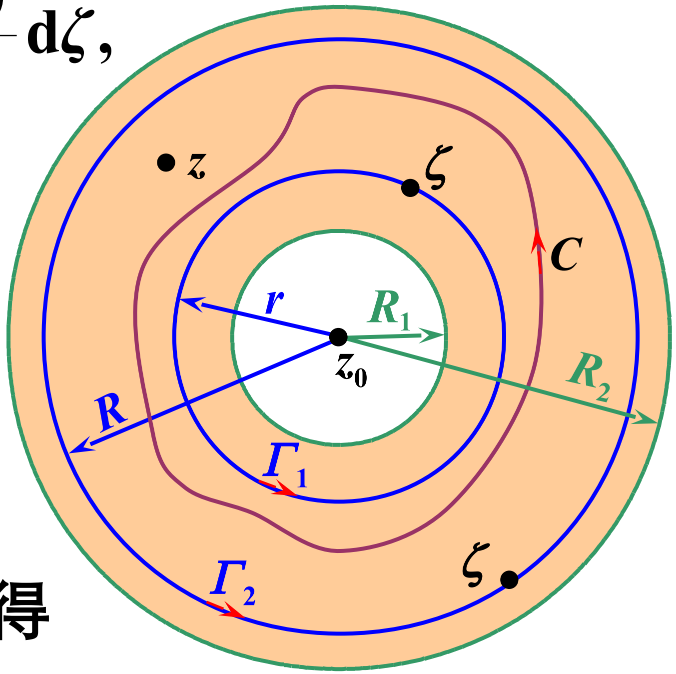
$$\overset{\text{记为}}{=\!=} I_1 + I_2.$$

附：洛朗定理的证明

证明 对第一个积分 $I_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$,

ζ 在 Γ_2 上, z 在 Γ_2 内,

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1.$$



和泰勒展开式一样，可以推得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta\right](z-z_0)^n$$

附： 洛朗定理的证明

证明 对于第二个积分 $I_2 = -\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$

由于 ζ 在 Γ_2 上，点 z 在 Γ_1 的外部，$\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1.$

因此 $$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}(z - z_0)^{-n},$$

附： 洛朗定理的证明

证明 $I_2 = -\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n} + R_N(z),$$

其中 $R_N(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\dfrac{(\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta)}{(z-z_0)^n}\right]\mathrm{d}\zeta.$

令 $q = \left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \dfrac{r}{|z-z_0|}$, 则 $0 < q < 1$

附： 洛朗定理的证明

证明 因此有 $|R_N(z)| \le \dfrac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|}\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$

$$\le \frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M_1}{r}q^n \cdot 2\pi r = \frac{M_1 q^N}{1-q}.$$

其中，M_1 是 $|f(z)|$ 在 Γ_1 上的最大值.

因为 $\lim\limits_{N\to\infty} q^N \to 0$，所以 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z) = 0$.

附： 洛朗定理的证明

证明 因此 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (4.4.5)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=0,1,2,\cdots)\ (4.4.6)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=1,2,\cdots)\ (4.4.7)$$

附：洛朗定理的证明

证明 级数 (4.4.5) 的系数由不同的式子 (4.4.6) 与 (4.4.7) 表出 .

如果在圆环域内取绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线 C

则根据闭路变形原理，这两个式子可用一个式子来表示

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

即 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

(返回)