

# 用计算复变函数法求解含圆孔板的应力场

王志良<sup>1</sup>, 杨影丹<sup>2</sup>, 张立翔<sup>1</sup>

(1. 昆明理工大学 建筑工程学院, 云南 昆明 650224; 2. 云南省水利厅水电局, 云南 昆明 650051)

**摘要:** 采用保角映射技术将含有圆孔的外域变换为圆的内域, 通过在边界配点来确定其边界条件, 并应用弹性力学的复变函数理论及最小二乘法求解板内的应力场. 为了比较本文方法的计算精度和计算效率, 用 Matlab 语言编程并计算了含圆孔的有限板和无限板内的应力分布, 结果表明用计算复变函数法求含孔板的应力场问题计算精度高, 计算量小, 具有应用的价值.

**关键词:** 保角映射; 应力集中; 复变函数; 最小二乘法; 圆孔板

**中图分类号:** TH123.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2007)02-0073-05

## Calculation of Stress Field in Plate with a Round Hole Using Computational Complex Function Method

WANG Zhi-liang<sup>1</sup>, YANG Ying-dan<sup>2</sup>, ZHANG Li-xiang<sup>1</sup>

(1. Faculty of Civil and Architectural Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650224, China;

2. Hydropower Bureau, Yunnan Provincial Water Conservancy Department, Kunming 650051, China)

**Abstract:** A plate with a round hole is transformed into a round domain by using conformal-mapping method. The boundary is settled by setting finite points. The complex function theory of elasticity mechanics and the least square method are applied to calculate the stress field in the plate. A computing code on the Matlab language is written to calculate and compare the stress distributions both in a finite and in an infinite plate with a round hole in order to test the precision and efficiency of this computing method. It is shown through the comparisons of the results that the computational complex function method is precise, efficient and applicable.

**Key words:** conformal-mapping method; stress concentration; complex function; least square method; hollow plate

## 0 引言

在平面弹性问题中, 由孔口所引起的应力集中问题, 为许多研究者所关注并取得了丰硕的成果. 萨文<sup>[1]</sup>用复变函数的保角映射法分别求得了含有一圆孔、椭圆孔的无限平面的精确的理论解. 王林江、林佳铿<sup>[2]</sup>通过在边界上进行复 Fourier 级数展开, 对复变函数的保角映射法进行改进, 求得了含有多个椭圆孔的无限平面内的应力场. 但以上的研究均限于计算无限平面内含孔板的应力场. 在实际工程中, 无限平面内的应力集中问题是比较少见的. 在绝大多数情况下, 孔的尺寸是不能忽略的. 现在虽然用有限元法能计算有限板的含孔问题, 但因其原始数据准备工作量较大, 对于应力变化剧烈的含孔板计算精度低等因素, 仍然在工程中不能得到广泛应用<sup>[3]</sup>. 本文采用弹性力学的复变函数理论、保角映射技术及边界配点的最小二乘法相结合的计算复变函数方法分别计算含有一圆孔的有限板、无限板的应力场, 并编制了相应的 matlab 程序.

收稿日期: 2006-05-22 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (项目编号: 50579025).

第一作者简介: 王志良 (1982~), 男, 硕士研究生. 主要研究方向: 结构理论及其在工程中的应用.

E-mail: wzhl19820205@yahoo.com.cn

## 1 分析方法

根据弹性力学中的复变函数方法,对于各向同性的平面问题,其面内的应力分量可用两个复函数  $\varphi_1(z)$ 、 $\psi_1(z)$  表示为<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} \sigma_y + \sigma_x = 4\operatorname{Re} \varphi_1(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1'(z) + \psi_1'(z)] \end{cases} \quad (1)$$

即:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{1}{2} \left[ 2\varphi_1''(z) - \bar{z}\varphi_1'''(z) - \varphi_1''(\bar{z}) + 2\overline{\varphi_1''(z)} - \overline{z\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1'(z)} \right] \\ \sigma_y = \frac{1}{2} \left[ 2\varphi_1''(z) + \bar{z}\varphi_1'''(z) + \varphi_1''(\bar{z}) + 2\overline{\varphi_1''(z)} + \overline{z\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1'(z)} \right] \\ \tau_{xy} = \frac{1}{2i} \left[ \bar{z}\varphi_1'(z) + \varphi_1'(z) - \overline{z\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1'(z)} \right] \end{cases} \quad (2)$$

在空心环域  $r \leq |z| \leq R$  ( $r > 0, R \leq \infty$ ) 中,解析函数  $\varphi_1(z)$ 、 $\psi_1(z)$  应展成同时含有正幂项和负幂项的罗朗级数<sup>[5]</sup>. 为此设:

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n, \quad \psi_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n \quad (3)$$

式中:常数项  $A_0$  的虚部代表刚体的转动. 若不计刚体的转动,可令

$$\operatorname{Im}(A_0) = 0 \quad (4)$$

对于板的圆孔内边界  $S$ ,引入保角变换  $z = \frac{a}{\zeta}$ , 将  $z$  平面上以  $S$  为边界的无限大区域映射到  $\zeta$  平面上的单位圆及其内部. 变换公式为:

$$z = \frac{a}{\zeta} = -\frac{a}{\zeta}, \quad (|\zeta| \leq 1) \quad (5)$$

式中,  $a$  为根据圆孔孔径而待定的常数. 将式 (5) 代入式 (3), 并进行整理简化可得:

$$\varphi_1\left(\frac{a}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^{-n}, \quad \psi_1\left(\frac{a}{\zeta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^{-n} \quad (6)$$

式中,  $\zeta = -\frac{a}{z}$ ;  $a_n$ 、 $b_n$  为待定复常数;不计刚体转动时,须令  $\operatorname{Im}(a_0) = 0$

$$\varphi_1(z) = \varphi_1\left(\frac{a}{\zeta}\right) * \zeta = \frac{\varphi_1\left(\frac{a}{\zeta}\right)}{\zeta} \quad (7)$$

将式 (6)、式 (7) 代入式 (2), 对其进行整理得:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{1}{2} \left[ 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^{-n} - \frac{na_n \zeta^{-n-1}}{\zeta} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^{-n} + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n} \zeta^{-n} - \frac{n \overline{a_n} \zeta^{-n-1}}{\zeta} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{b_n} \zeta^{-n} \right] \\ \sigma_y = \frac{1}{2} \left[ 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^{-n} + \frac{na_n \zeta^{-n-1}}{\zeta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^{-n} + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n} \zeta^{-n} + \frac{n \overline{a_n} \zeta^{-n-1}}{\zeta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{b_n} \zeta^{-n} \right] \\ \tau_{xy} = \frac{1}{2i} \left[ \frac{na_n \zeta^{-n-1}}{\zeta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^{-n} - \frac{n \overline{a_n} \zeta^{-n-1}}{\zeta} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{b_n} \zeta^{-n} \right] \end{cases} \quad (8)$$

在实际计算中,式 (8) 中的最大取有限值  $P$ , 最小取  $-Q$ , 通常  $P \geq Q$ , 具体取值根据孔与板的相对大小及所要取的精度而定. 由弹性力学的知识可知,在板的边界上应力分量  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  和外荷载分量  $X$ 、 $Y$  满足下列关系:

$$\begin{cases} l_{\sigma_x} + m_{\tau_{xy}} = \overline{X} \\ m_{\sigma_y} + l_{\tau_{xy}} = \overline{Y} \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $l$  为边界外法线方向与  $x$  轴正向夹角的余弦值;  $m$  为边界外法线方向与  $y$  轴正向夹角的余弦值。

在板的内边界上设置总数为  $M$  的点, 因内边界上的点经过变换后变为在  $\bar{z}$  平面上单位圆上的点, 故只需在  $\bar{z}$  平面上选取单位圆上的  $M$  个点, 将这些点代入式 (8) 求得其在内边界上的应力表达式, 并将结果代入式 (9), 因此对于每一点均可以得到一对复系数的线性方程组, 用矩阵表示为:

$$[M_n]\{\phi\} = [D_n] \quad (10)$$

式中,  $[M_n]$  为  $2M \times 4(P+Q+1)$  阶矩阵;  $\{\phi\}$  为由  $a_n, b_n, \bar{a}_n, \bar{b}_n$  组成的  $4(P+Q+1) \times 1$  阶列阵;  $[D_n]$  为由内边界条件  $X, Y$  所组成的  $2M \times 1$  阶列阵。在板的外边界上设置总数为  $N$  的点, 在  $z$  平面上选取的点须将其通过公式:  $\bar{z} = 1/z$  映射到  $\bar{z}$  平面上单位圆的内部, 然后进行与内边界相同的计算, 列出满足外边界条件的矩阵:

$$[M_f]\{\phi\} = [D_f] \quad (11)$$

同时, 为保证复应力函数  $\phi_1(z), \phi_2(z)$  唯一确定<sup>[6]</sup>, 须考虑该弹性体的不计刚体位移及刚体转角作为附加条件, 刚体位移对于所设的解析函数  $\phi_1(z), \phi_2(z)$ , 由式 (3) 已自动满足, 因此, 只需考虑无刚体转角的情况,  $\ln(a_0) = 0$ , 即  $a_0 - \bar{a}_0 = 0$ , 列为矩阵形式为:

$$[M_f]\{\phi\} = [D_f] \quad (12)$$

将式 (10)、式 (11)、式 (12) 进行合并, 可得到:

$$[M]\{\phi\} = [D] \quad (13)$$

式中,  $[M] = [M_n; M_f]$  为  $(2(M+N)+1) \times 4(P+Q+1)$  阶矩阵;  $\{\phi\}$  为由  $a_n, b_n, \bar{a}_n, \bar{b}_n$  组成的  $4(P+Q+1) \times 1$  阶列阵;  $[D] = [D_n; D_f]$  为  $(2(M+N)+1) \times 1$  阶列阵。

在选择级数项数和边界配点时还须满足  $[M]$  为一高阵, 即  $(2(M+N)+1) > 4(P+Q+1)$ , 把矩阵  $[M]$  进行奇异值分解就得其广义逆矩阵  $[M]^{-1}$ , 就得式 (13) 的最小二乘解为:

$$\{\phi\} = [M]^{-1}[D] \quad (14)$$

确定了  $a_n, b_n$  及它们的共轭复数后, 代入式 (13), 计算边界点上的应力, 通过与边界条件的对比来判断计算结果的正确性, 并通过修改  $P, Q$  的值来使应力在边界点上达到最佳效果。将最后所求得  $a_n, b_n$  及它们的共轭复数代入式 (8), 即可求得板内任意一点的应力值。

孔边的周向应力、法向应力及剪应力可由下列应力转换公式求得:

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases} \quad (15)$$

其中,  $\theta$  为外法线方向与  $x$  轴正向的夹角。

## 2 算例

**例 1** 含有一圆孔的正方形板 (图 1), 计算时取边长  $a=2, r=0.1$ , 因  $r/a=0.05$ , 可看作是含圆孔的无限平面。计算时, 外边界配 84 个点 (每条边上平均设置 21 个点), 内边界配 120 个点 (每隔 3 设置一个点),  $P=5, Q=34$ , 边界条件的误差小于 2%。

图 2 由萨文所求得环向应力分布曲线图与根据式 (15) 计算所得在  $[0, \pi/2]$  范围内  $\sigma_{\theta}/P_x$  在圆孔边缘的应力值的对比。图 3 为当  $\theta = \pi/2$  时, 在  $y$  方向根据萨文所求得的应力曲线图与本文所求得的应力值  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  的对比。图 4 为当  $\theta = 0$  时, 在  $x$  方向根据萨文所求得的应力曲线图与本文所求得的应力值  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  的对比。由图 2、图 3、图 4 可以看出, 无论是在圆孔周围, 还是在  $\theta = \pi/2, \theta = 0$  的截面上, 本文所求得的应力与萨文所得的理论解吻合较好。

**例 2** 含有一圆孔的正方形板 (图 1), 计算时取边长  $a=2, r=1$ , 因  $r/a=0.5$ , 看作是含圆孔的有限平

面. 计算时外边界配 84 个点 (每条边上平均设置 21 个点), 内边界配 120 个点 (每隔 3 设置一个点),  $P=15, Q=34$ , 边界条件的误差小于 1.5%.

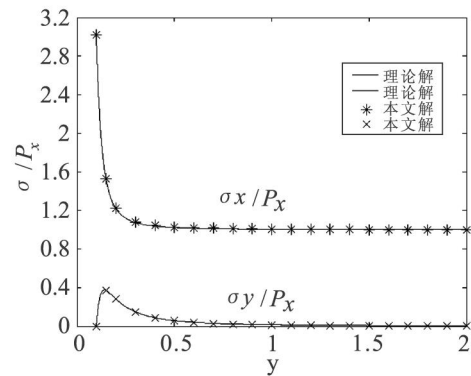


图3  $\theta=\pi/2$  时应力值  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  与理论解的对比  
Fig.3 Comparisons with theoretical solutions of  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  at  $\theta=\pi/2$ .

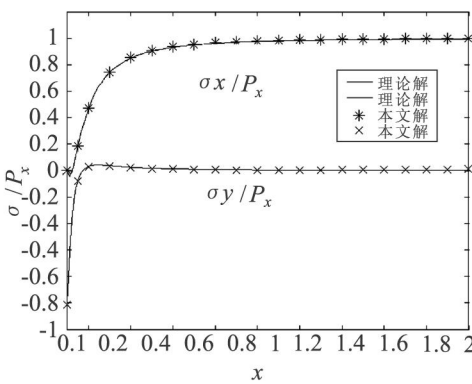


图4  $\theta=0$  时应力值  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  与理论解的对比  
Fig.4 Comparisons with theoretical solutions of  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  at  $\theta=0$ .

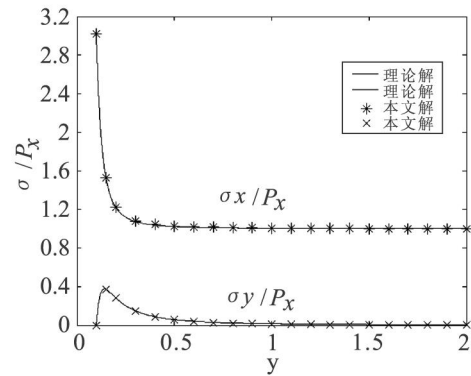


图3  $\theta=\pi/2$  时应力值  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  与理论解的对比  
Fig.3 Comparisons with theoretical solutions of  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  at  $\theta=\pi/2$ .

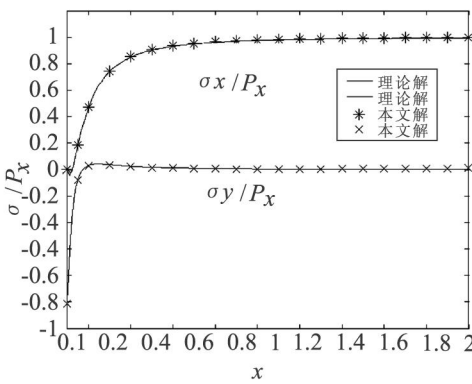


图4  $\theta=0$  时应力值  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  与理论解的对比  
Fig.4 Comparisons with theoretical solutions of  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  at  $\theta=0$ .

表 1 列出了  $[0, \pi/2]$  范围内, 圆孔上每隔  $10^\circ$   $\sigma_x/P_x$ 、 $\sigma_y/P_x$  的值, 在同一点上有限元的计算值也列在其中, 从表中可以看出, 两者相差不大. 表 2 列出了当  $\theta=\pi/2$  时, 随  $y$  的变化  $\sigma_x/P_x$ 、 $\sigma_y/P_x$  的值的变化情况, 同时也列出了用有限元法在相应点上的值进行对比.

表 1 孔边  $\sigma_x/P_x$  和  $\sigma_y/P_x$  的本文解与有限元解的比较

Tah 1 Comparisons with FEM solutions of  $\sigma_x/P_x$  and  $\sigma_y/P_x$  at hole edge

$\theta/(\circ)$		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\sigma_x/P_x$	本文解	0	- 0.108	- 0.295	- 0.266	0.229	1.281	2.8	4.487	5.85	6.379
	有限元法解	0.026	- 0.119	- 0.275	- 0.196	0.355	1.30	2.803	4.501	5.838	6.362
$\sigma_y/P_x$	本文解	- 3.965	- 3.469	- 2.229	- 0.799	0.325	0.902	0.933	0.594	0.182	0
	有限元法解	- 3.95	- 3.458	- 2.22	- 0.815	0.272	0.808	0.903	0.605	0.208	0.043

表 2 当  $\alpha = \pi/2$  时  $\sigma_x/P_x$  和  $\sigma_y/P_x$  的本文解与有限元解的比较

Tab 2 Comparisons with FEM solutions of  $\sigma_x/P_x$  and  $\sigma_y/P_x$  at  $\alpha = \pi/2$

y		1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$\sigma_x/P_x$	本文解	6.379	4.765	3.671	2.87	2.241	1.711	1.232	0.770	0.298	-0.212	-0.79
	有限元法解	6.362	4.76	3.647	2.837	2.249	1.717	1.244	0.773	0.298	-0.272	-0.802
$\sigma_y/P_x$	本文	0	0.416	0.554	0.555	0.489	0.394	0.289	0.187	0.099	0.034	0.005
	有限元法	0.043	0.419	0.555	0.551	0.486	0.387	0.289	0.184	0.092	0.028	0.003

表 3 列出了当  $\alpha = 0$  时,随  $x$  的变化  $\sigma_x/P_x$ 、 $\sigma_y/P_x$  的值的变化情况,同时也列出了用有限元法在相应点上的值进行对比.

表 3 当  $\alpha = 0$  时  $\sigma_x/P_x$  和  $\sigma_y/P_x$  的本文解与有限元解的比较

Tab 3 Comparison with FEM solutions of  $\sigma_x/P_x$  and  $\sigma_y/P_x$  at  $\alpha = 0$

x		1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$\sigma_x/P_x$	本文解	0	-0.194	-0.148	0	0.186	0.379	0.563	0.726	0.86	0.954	0.994
	有限元法解	-0.026	-0.197	-0.132	0.012	0.214	0.395	0.565	0.727	0.867	0.96	0.996
$\sigma_y/P_x$	本文解	-3.965	-2.5	-1.536	-0.84	-0.29	0.185	0.634	1.089	1.581	2.141	2.802
	有限元法解	-3.95	-2.5	-1.498	-0.813	-0.282	0.207	0.636	1.085	1.58	2.178	2.814

3 结 论

本文采用计算复变函数法,分别对含圆孔的无限板、有限板的应力场进行了计算.从理论推演和算例结果看,该方法充分发挥了解析法和数值法两者的优点,对求解含孔的应力场的问题具有简洁、方便、精确的特点,对开孔的位置、大小、荷载形式等没有限制.本文只讨论了规则区域的情形,由公式推导可知,该方法对非规则区域同样适用,因此便于在工程上推广应用.

参考文献:

[1] 萨文. 孔附近的应力集中 [M]. 卢鼎霍译. 北京:科学出版社, 1958. 76 - 79.

[2] 王林江,林佳铿. 用多复变量应力函数计算多连通体弹性平面问题 [J]. 应用数学和力学, 1994, 15 (7): 657 - 664.

[3] 王林江,林佳铿. 用计算复变函数法处理含多个椭圆孔有限大小复合材料板的应力场. 东南大学学报 [J], 1999, 29 (6): 113 - 118.

[4] 徐芝纶. 弹性力学 [M]. 3版. 北京:高等教育出版社, 1990. 118 - 130.

[5] 陆明万,罗学富. 弹性理论基础 [M]. 北京:清华大学出版社, 1990. 316 - 317.

[6] 路见可. 平面弹性复变方法 [M]. 2版. 武汉:武汉大学出版社, 2002. 266 - 277.