第八章 Fourier 变换

§8.1 Fourier 变换的概念

Fourier 变换是积分变换中常见的一种变换，它既能够简化运算（如求解微分方程、化卷积为乘积等等），又具有非常特殊的物理意义。

因此，Fourier 变换不仅在数学的许多分支中具有重要的地位，而且在各种工程技术中都有着广泛的应用。

Fourier 变换是在周期函数的 Fourier 级数的基础上发展起来的。在微积分课程中已经学习了 Fourier 级数的有关内容，因此本节将先简单地回顾一下 Fourier 级数展开。

§8.1 Fourier 变换的概念

一、周期函数的 Fourier 级数

二、非周期函数的 Fourier 变换

一、周期函数的 Fourier 级数

1. 简谐波的基本概念 补

简谐波 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$

$$= a \cdot \cos\omega_0 t + b \cdot \sin\omega_0 t$$

其中，A 称为振幅，ω_0 称为角频率，

θ 称为相位，($\theta = 0$ 称为零相位)。

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为基本周期；(单位：秒)

$F = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ 为频率。(单位：赫兹 Hz)

一、周期函数的 Fourier 级数

2. 正交函数系 补

函数系

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = 1 \\ \varphi_1(t) = \cos\omega_0 t \\ \varphi_2(t) = \cos 2\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \varphi_n(t) = \cos n\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_1(t) = \sin\omega_0 t \\ \psi_2(t) = \sin 2\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \psi_n(t) = \sin n\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{cases}$$

$$\{1, \cos\omega_0 t,\ \sin\omega_0 t,\ \cos 2\omega_0 t,\ \sin 2\omega_0 t,\ \cdots\ \cdots\}$$

一、周期函数的 Fourier 级数

2. 正交函数系

特点 (1) 周期性 $\varphi_k(t+T)=\varphi_k(t)$, $k=0,1,2,\cdots\cdots$

$\psi_k(t+T)=\psi_k(t)$, $k=1,2,\cdots\cdots$

其中，$T=2\pi/\omega_0$.

(2) 正交性 $\int_{-T/2}^{T/2}\varphi_m(t)\cdot\psi_n(t)\,\mathrm{d}t=0$,

$$\int_{-T/2}^{T/2}\varphi_k(t)\cdot\varphi_l(t)\,\mathrm{d}t=0, \qquad (k\neq l)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\psi_k(t)\cdot\psi_l(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

- 由$\{\varphi_k(t)\}$, $\{\psi_k(t)\}$ 组合叠加可以生成周期为 T 的复杂波。

一、周期函数的 Fourier 级数

2. 正交函数系

问题 对于任何一个周期为 T 的（复杂）函数 能否：

，

$$f_T(t) \overset{?}{=} A_0\varphi_0(t)+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n(t)+b_n\psi_n(t)$$

$$= A_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t$$

$$= A_0+\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n).$$

（Fourier 级数的历史回顾）

一、周期函数的 Fourier 级数

3. Fourier 级数的三角形式

定理 (Dirichlet 定理) 设 $f_T(t)$ 是以 T 为周期的实值函数且在区间 $[-T/2, T/2]$ 上满足如下条件 (称为 Dirichlet 条件) :

P184 定理 8.1

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 只有有限个极值点．

则在 $f_T(t)$ 的连续点处有

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \qquad \text{(A)}$$

在 $f_T(t)$ 的间断处，上式左端为 $\frac{1}{2}[f_T(t+0) + f_T(t-0)]$.

一、周期函数的 Fourier 级数

3. Fourier 级数的三角形式

定理 （Dirichlet 定理）

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t), \qquad \text{(A)}$$

其中，$a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots$$

$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$，称之为基频。

定义 称 (A) 式为 Fourier 级数的三角形式。

一、周期函数的 Fourier 级数

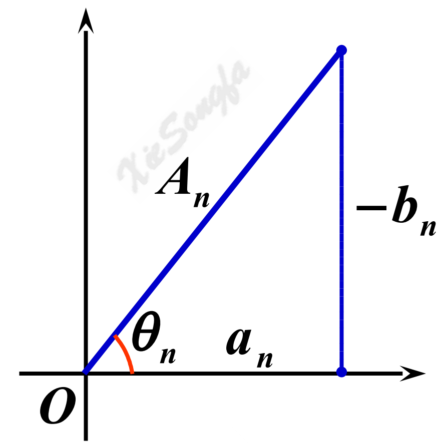
4. Fourier 级数的物理含义

改写 P185

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),\qquad \text{(A)}$$

令 $A_0=\dfrac{a_0}{2}$，$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，

$$\cos\theta_n=\frac{a_n}{A_n},\quad \sin\theta_n=\frac{-b_n}{A_n},$$



则 (A) 式变为

$$f_T(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$$

一、周期函数的 Fourier 级数

4. Fourier 级数的物理含义

$$f_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

表明 周期信号可以分解为一系列固定频率的简谐波之和，

这些简谐波的（角）频率分别为一个基频 ω_0 的倍数。

意义 认为 “一个周期为 T 的周期信号 $f_T(t)$ 并不包含所有的频率成份，其频率是以基频 ω_0 为间隔离散取值的。”

- 这是周期信号的一个非常重要的特点。

一、周期函数的 Fourier 级数

4. Fourier 级数的物理含义

$$f_T(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$$

振幅 A_n 反映了频率为 $n\omega_0$ 的简谐波在信号 $f_T(t)$ 中所占有的份额；

相位 θ_n 反映了在信号 $f_T(t)$ 中频率为 $n\omega_0$ 的简谐波沿时间轴移动的大小。

- 这两个指标完全定量地刻画了信号的频率特性。

一、周期函数的 Fourier 级数

5. Fourier 级数的指数形式

推导 P184

已知 $f_T(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),\qquad \text{(A)}$

根据 Euler 公式 $e^{jn\omega_0 t}=\cos n\omega_0 t+j\sin n\omega_0 t,\ (j=\sqrt{-1})$

可得 $\cos n\omega_0 t=\dfrac{e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}}{2},\quad \sin n\omega_0 t=\dfrac{-je^{jn\omega_0 t}+je^{-jn\omega_0 t}}{2}$

代入 (A) 式并整理得

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_0 t}\Big).$$

一、周期函数的 Fourier 级数

5. Fourier 级数的指数形式

推导 $$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\right).$$

令 $c_0=\dfrac{a_0}{2}$， $c_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}$， $c_{-n}=\dfrac{a_n+jb_n}{2}$， 则有

$$\boxed{f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,\mathrm{e}^{jn\omega_0 t},}\qquad\text{(B)}$$

其中，$c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\,\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$， $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

定义 称 (B) 式为 Fourier 级数的指数形式。

一、周期函数的 Fourier 级数

5. Fourier 级数的指数形式

注意 (1) 分解式是惟一的。

(2) 计算系数 c_n 时，其中的积分可以在任意一个长度为 T 的区间上进行。

(3) 采用周期延拓技术，可以将结论应用到仅仅定义在某个有限区间上的函数。

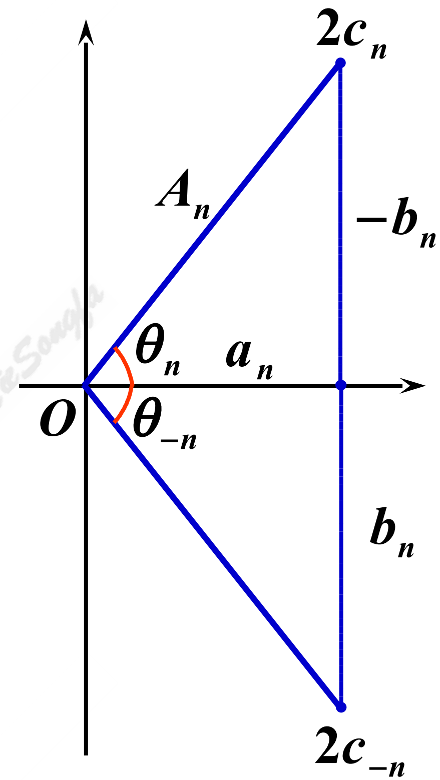
一、周期函数的 Fourier 级数

6. 离散频谱与频谱图

分析 P186 由 $c_0=\dfrac{a_0}{2}$, $c_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}$, $c_{-n}=\dfrac{a_n+jb_n}{2}$,

得 $c_0=A_0$, $|c_n|=|c_{-n}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\dfrac{A_n}{2}$,

$$\arg c_n=-\arg c_{-n}=\theta_n,\quad (n>0).$$



即 c_n 的模与辐角正好是振幅和相位。

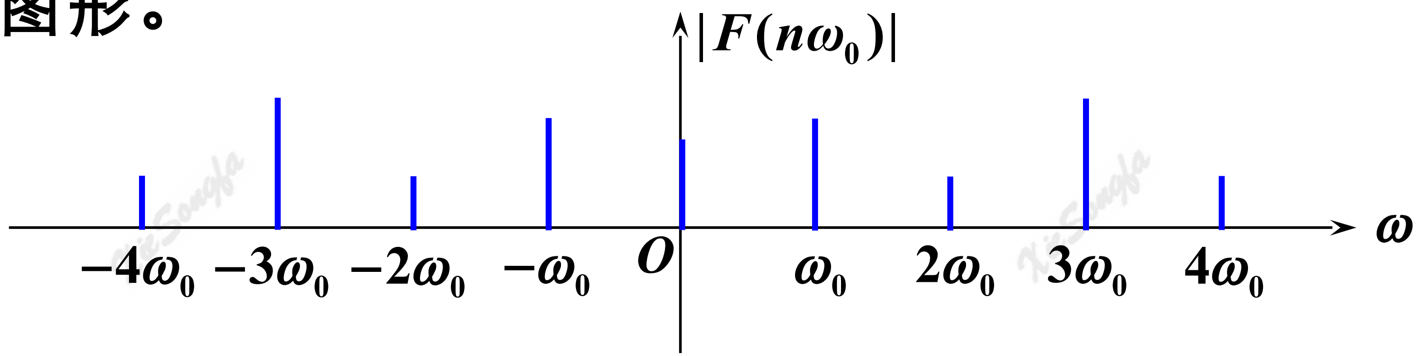
定义 称 $|c_n|$ 为振幅谱称 $\arg c_n$ 为相位谱;

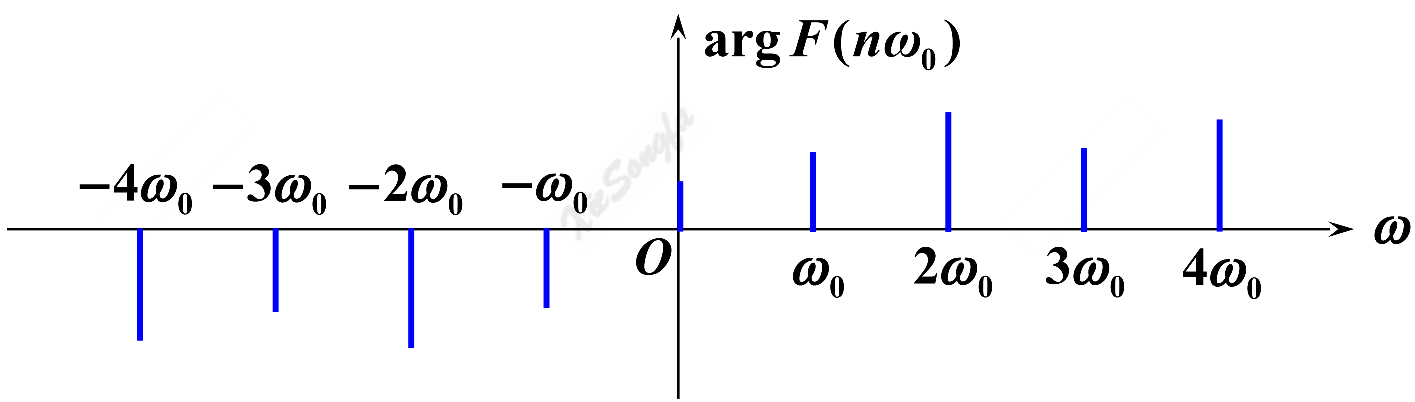
称 c_n 为频谱, 记为 $F(n\omega_0)=c_n$.

一、周期函数的 Fourier 级数

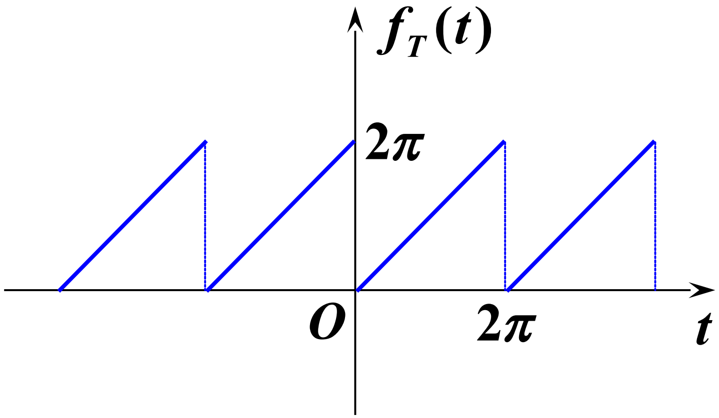
6. 离散频谱与频谱图

频谱图 将振幅 $|c_n|$ 、相位 $\arg c_n$ 与频率 ω 的关系画成图形。





例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$. 求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式.



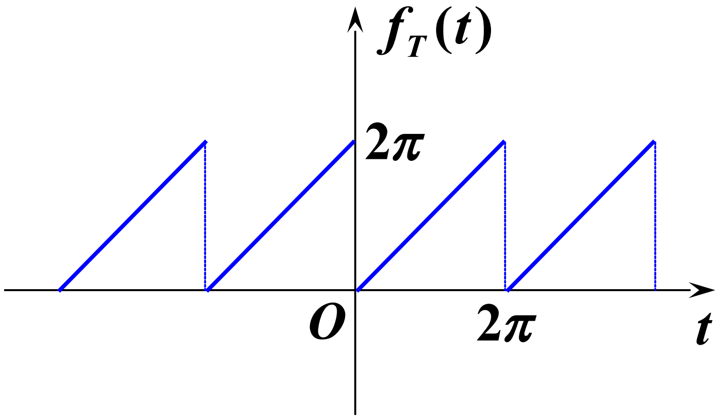
解 基频 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=1.$

(1) 当 $n=0$ 时，

$$c_0=F(0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f_T(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t=\pi.$$

例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$. 求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式.



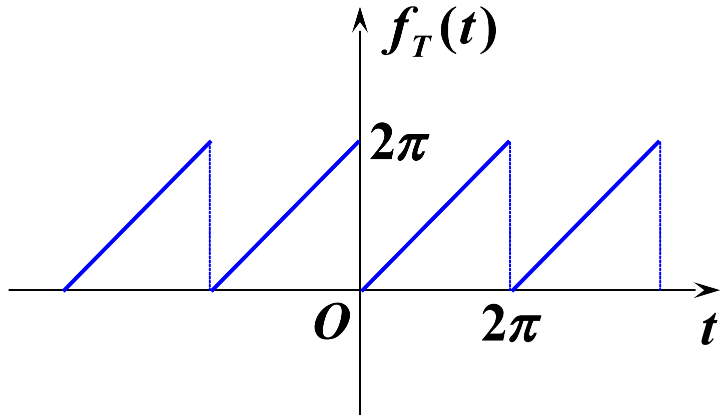
解 (2) 当 $n\neq 0$ 时，

$$c_n=F(n\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_0^T f_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t\,e^{-jnt}dt=\frac{1}{-2n\pi j}\int_0^{2\pi}t\,de^{-jnt}$$

$$=\frac{1}{-2n\pi j}t\,e^{-jnt}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi j}\int_0^{2\pi}e^{-jnt}dt=\frac{j}{n}.$$

例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$. 求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式.

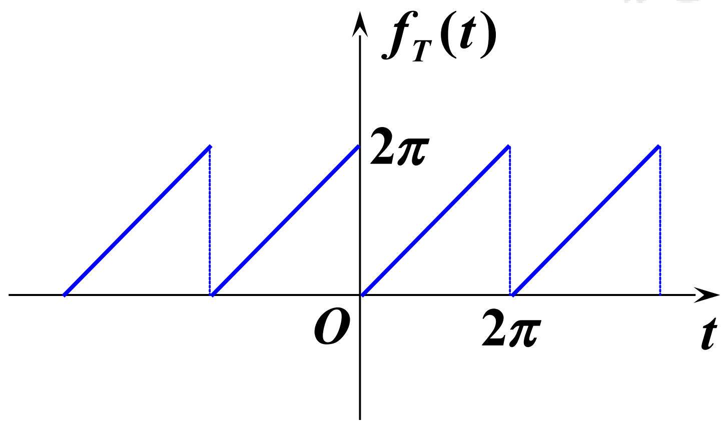


解 (3) $f_T(t)$ 的 Fourier 级数为 $f_T(t)=\pi+\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{j}{n}\mathrm{e}^{jnt}$.

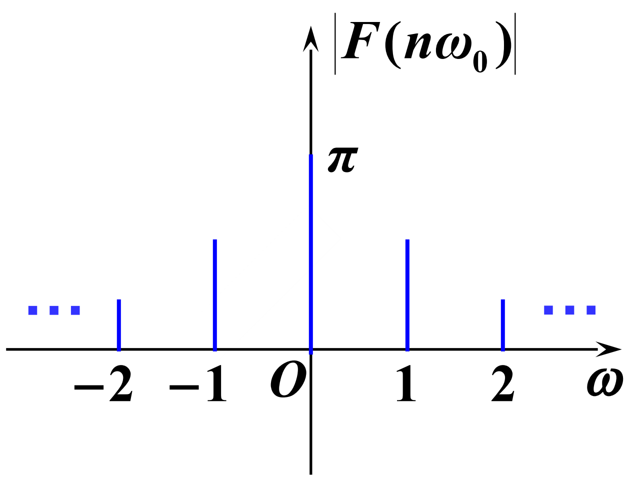
(4) 振幅谱为 $|F(n\omega_0)|=\begin{cases}\pi, & n=0,\\ 1/|n|, & n\neq 0.\end{cases}$

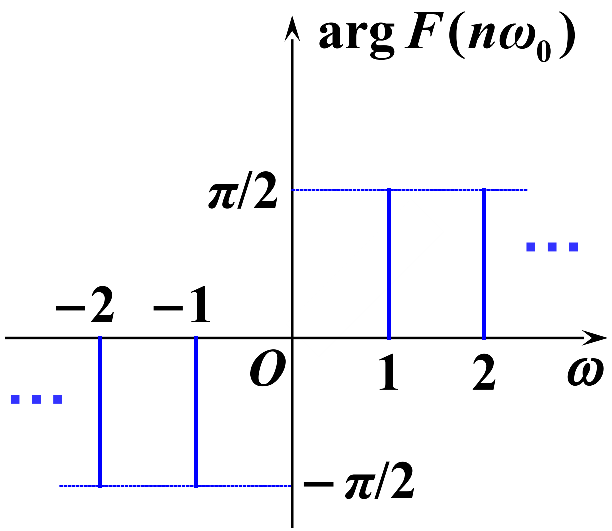
相位谱为 $\arg F(n\omega_0)=\begin{cases}0, & n=0,\\ \pi/2, & n>0,\\ -\pi/2, & n<0.\end{cases}$

例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$. 求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式.



解 (5) 频谱图如下图所示。





二、非周期函数的傅立叶变换

借助 Fourier 级数展开，使得人们能够完全了解一个信号的频率特性，从而认清了一个信号的本质，这种对信号的分析手段也称为频谱分析（或者谐波分析）。

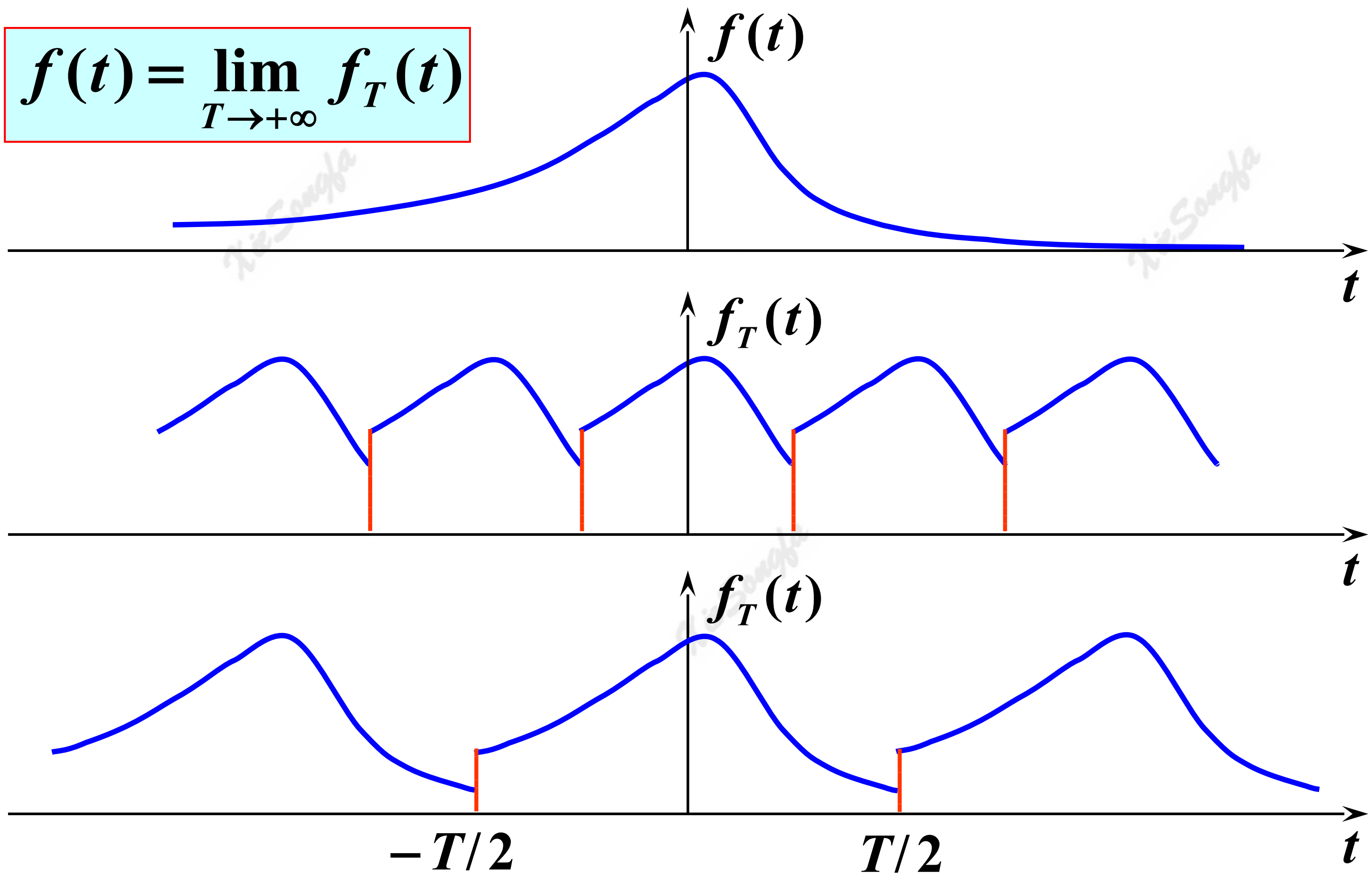
但是，Fourier 级数要求被展开的函数必须是周期函数，而在工程实际问题中，大量遇到的是非周期函数那么，对一个非周期函数是否也能进行频谱分析呢？

二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(1) 非周期函数可以看成是一个周期为无穷大的“周期函数”。

$$\boxed{f(t)=\lim_{T\to+\infty} f_T(t)}$$



二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(2) 当$T \to +\infty$ 时，频率特性发生了什么变化？

分析 Fourier 级数表明周期函数仅包含离散的频率成份，其频谱是以$\omega_0 = 2\pi/T$ 为间隔离散取值的。

当 T 越来越大时，取值间隔越来越小；

当 T 趋于无穷时，取值间隔趋向于零，

即频谱将连续取值。

因此，一个非周期函数将包含所有的频率成份。

结论 离散频谱变成连续频谱。

二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(3) 当$T\to+\infty$ 时，级数求和发生了什么变化？

分析

P188

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}f_T(t)=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t\Big]\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

将间隔 ω_0 记为 $\Delta\omega$，节点 $n\omega_0$ 记为 ω_n，

并由 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$ 得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underline{\Big[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega}f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega_n t}\,\mathrm{d}t\Big]\mathrm{e}^{j\omega_n t}}\,\Delta\omega \qquad \text{(C)}$$

二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(3) 当 $T\to+\infty$ 时，级数求和发生了什么变化？

分析 记 $g_T(\omega)=[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{e}^{j\omega t}$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_T(\omega_n)\Delta\omega$$

按照积分定义，在一定条件下，(C) 式可写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

结论 级数求和变成函数积分。

二、非周期函数的傅立叶变换

2. Fourier 积分公式

定理 设函数 $f(t)$ 满足

P188 定理 8.2

(1) 在$(-\infty,+\infty)$上的任一有限区间内满足 Dirichlet 条件；

(2) 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty$.

则在 $f(t)$的连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad \text{(D)}$$

在 $f(t)$的间断处，公式的左端应为$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

定义 称 (D) 式为 Fourier 积分公式。

二、非周期函数的傅立叶变换

3. Fourier 变换的定义

定义 (1) Fourier 正变换 (简称傅氏正变换)

P189 定义 8.1

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\mathscr{F}[f(t)]$$

(2) Fourier 逆变换 (简称傅氏逆变换)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

其中，$F(\omega)$ 称为象函数，$f(t)$ 称为象原函数.

$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 称为傅氏变换对，记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

注 上述变换中的广义积分为柯西主值。

二、非周期函数的傅立叶变换

4. Fourier 变换的物理意义

与 Fourier 级数的物理意义一样， Fourier 变换同样刻画一个非周期函数的频谱特性，不同的是，非周期函数的频谱是连续取值的。

$F(\omega)$ 反映的是 $f(t)$ 中各频率分量的分布密度，它一般为复值函数，故可表示为

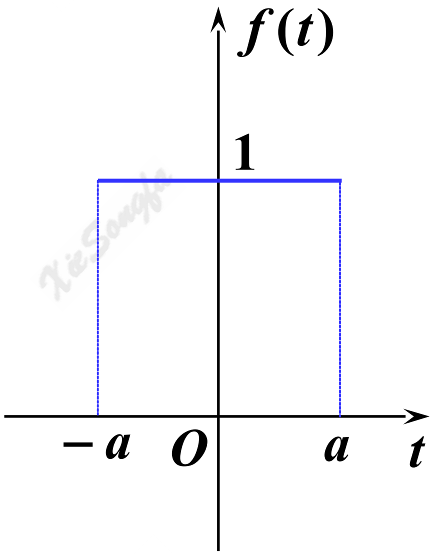
$$F(\omega)=|F(\omega)|\,e^{j\arg F(\omega)}.$$

定义 称 $F(\omega)$ 为频谱密度函数（简称为连续频谱或者频谱）；

P189

称 $|F(\omega)|$ 为振幅谱称 $\arg F(\omega)$ 为相位谱。

例 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的 Fourier 变换及 Fourier 积分表达式。 P189 例 8.2



解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

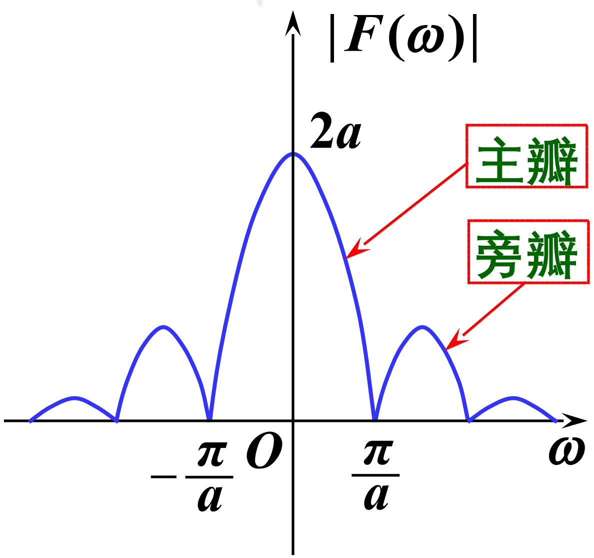
$$=\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{-j\omega}\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{-a}^{a}$$

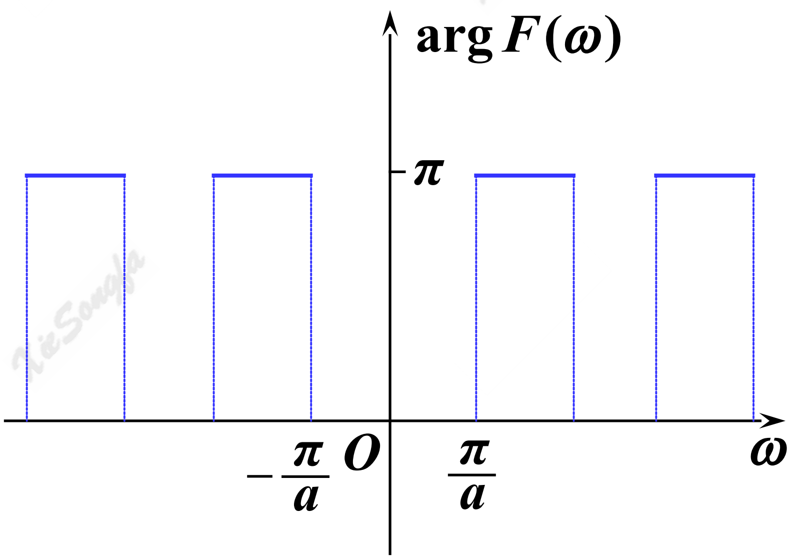
$$=\frac{1}{-j\omega}(\mathrm{e}^{-ja\omega}-\mathrm{e}^{ja\omega})$$

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{(\mathrm{e}^{-ja\omega}-\mathrm{e}^{ja\omega})}{-2j}=2a\frac{\sin a\omega}{a\omega}.$$

解 (2) 振幅谱为 $|F(\omega)| = 2a\left|\dfrac{\sin a\omega}{a\omega}\right|$

相位谱为 $\arg F(\omega) = \begin{cases} 0, & \dfrac{2n\pi}{a} \le |\omega| \le \dfrac{(2n+1)\pi}{a} \\ \pi, & \dfrac{(2n+1)\pi}{a} < |\omega| < \dfrac{(2n+2)\pi}{a} \end{cases}$





解 (3) 求 Fourier 逆变换，即可得到的 Fourier 积分表达式。

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1, & |t|<a,\\ 1/2, & |t|=a,\\ 0, & |t|>a.\end{cases}$$

注 在上式中令 $t=0$, 可得重要积分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\pi,\ (a>0).$$

注

- 在上式中令 $t=0$, 可得重要积分公式 ：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \mathrm{d}x = \pi, \ (a > 0).$$

- 一般地，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -\pi, & a < 0. \end{cases}$$

- 特别地，有

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

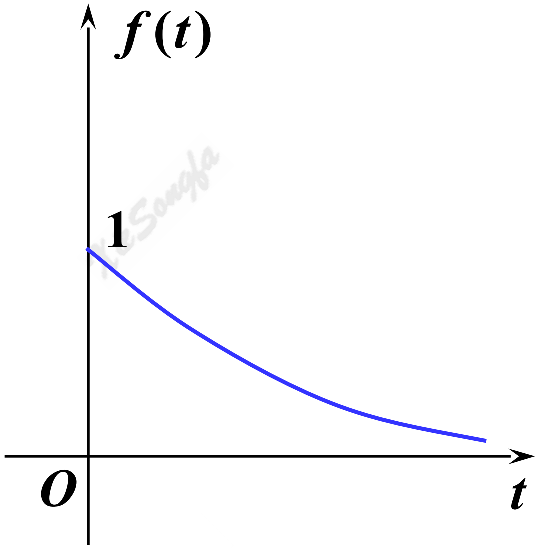
例 求单边衰减指数函数 $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t\geq 0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$ $(\alpha>0)$ 的 Fourier 变换，并画出频谱图。 P191 例 8.4

解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha+j\omega)t}dt$$

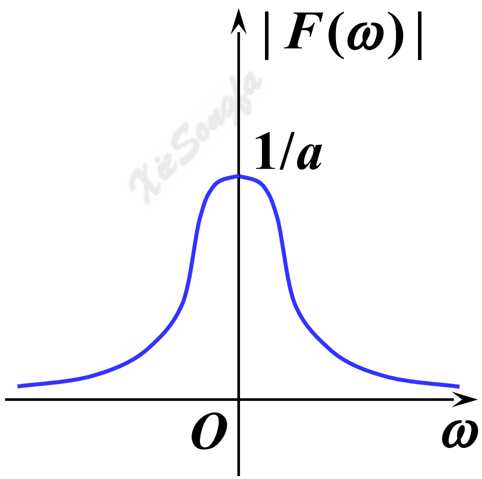
$$=\frac{1}{-(\alpha+j\omega)}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty}$$

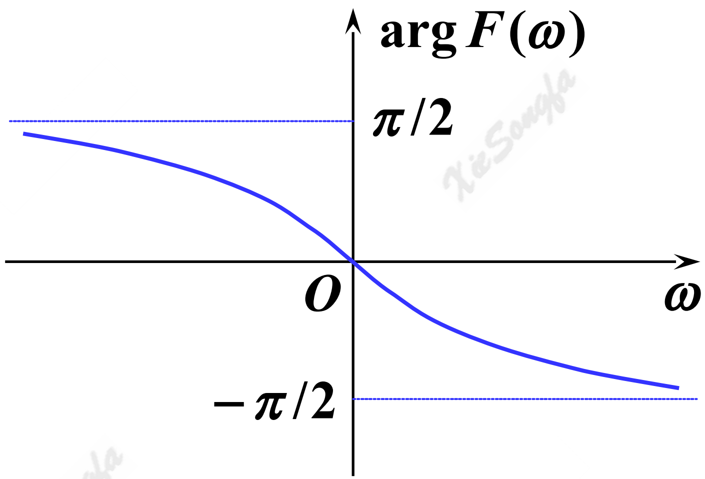
$$=\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{\alpha-j\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$



解 (2) 振幅谱为 $|F(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$;

相位谱为 $\arg F(\omega) = -\arctan(\omega/\alpha)$.

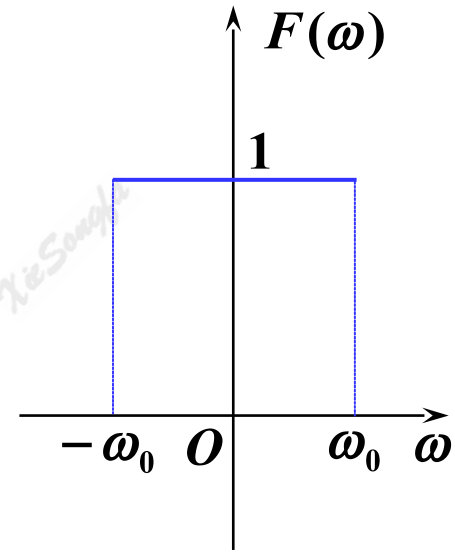




例 已知 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_0\\ 0, & |\omega|>\omega_0\end{cases}$ $(\omega_0>0)$，求 $f(t)$.

P190 例 8.3

解 $f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$



$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi jt}\mathrm{e}^{j\omega t}\Big|_{-\omega_0}^{\omega_0}=\frac{1}{\pi t}\cdot\frac{\mathrm{e}^{j\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}=\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}\right)=\frac{\omega_0}{\pi}S_a(\omega_0 t).$$

(?)

（关于抽样信号）

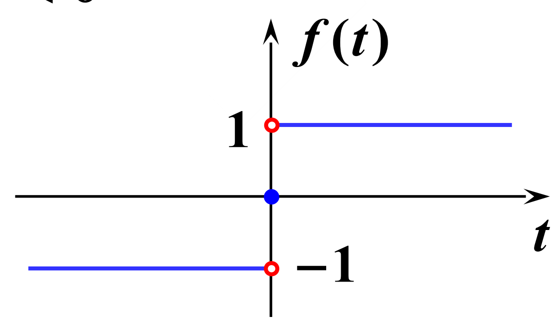
例 已知$f(t)$的频谱为 $F(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$，求 $f(t)$.

解 $$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{j\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{j\sin\omega t}{j\omega}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{j\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}\overset{\text{记为}}{=\!=\!=}\operatorname{sgn}t.$$

$$\boxed{\operatorname{sgn}t\longleftrightarrow\frac{2}{j\omega}.}$$



轻松一下……

附：历史回顾—— Fourier 级数

- 1807 年 12 月 12 日，在法国科学院举行的一次会议上，Fourier 宣读了他的一篇关于热传导的论文，宣称：

> 在有限区间上由**任意**图形定义的**任何**函数都可以表示为单纯的正弦与余弦函数之和。

经拉格朗日、拉普拉斯和勒让德三人（号称 3L）审阅后，认为其推导极不严密，被拒（锯）收。

附：历史回顾—— Fourier 级数

- 1811 年， Fourier 将修改好的论文：

《关于热传导问题的研究》

提交给法国科学院。经过评审小组（3L）审阅后，认为其新颖、实用，从而于 1812 年获得法国科学院颁发的大奖，但仍以其不严密性被《论文汇编》拒（锯）收。

附：历史回顾—— Fourier 级数

- 1822 年， Fourier 经过十年的努力，终于出版了专著：

《热的解析理论》

这部经典著作将欧拉、伯努利等人在一些特殊情形下使用的三角级数方法，发展成内容丰富的一般理论，特别是在工程应用方面显示出巨大的价值。

附：历史回顾—— Fourier 级数

- 1829 年，德国数学家 Dirichlet 终于对一类条件较“宽”的函数给出了严格的证明。时年 24 岁。
- 1830 年 5 月 16 日， Fourier 在巴黎去世。

启示：(1) 有价值的东西一定是真的；真的东西一定是美的。

(2) 坚持不懈的努力就一定会有收获。

附：人物介绍 —— 狄利克雷

狄利克雷

Dirichlet， Peter Gustav Lejeune

(1805 ~ 1859)

德国数学家

- 解析数论的创始人之一。
- 对数论、数学分析和数学物理有突出贡献。
- 对德国数学发展产生巨大影响。

附：人物介绍 —— 狄利克雷

- 1805 年 2 月 13 日生于迪伦。

  中学时曾受教于物理学家 G. S. 欧姆。

- 1822 ~ 1826 年在巴黎求学。

  回国后先后在布雷斯劳大学和柏林军事学院任教。

- 1839 年任柏林大学教授。
- 1855 年接任 C. F. 高斯在哥廷根大学的教授职位。
- 1859 年 5 月 5 日卒于格丁根。

附：人物介绍 —— 傅立叶

傅立叶

Fourier， Jean Baptiste Joseph

(1768 ～ 1830)

法国数学家、物理学家

- **傅立叶级数、傅立叶分析等理论的始创人。**
- **1822 年出版经典著作《热的解析理论》。**

"深入研究自然是数学发现最丰富的源泉。"

—— J. Fourier

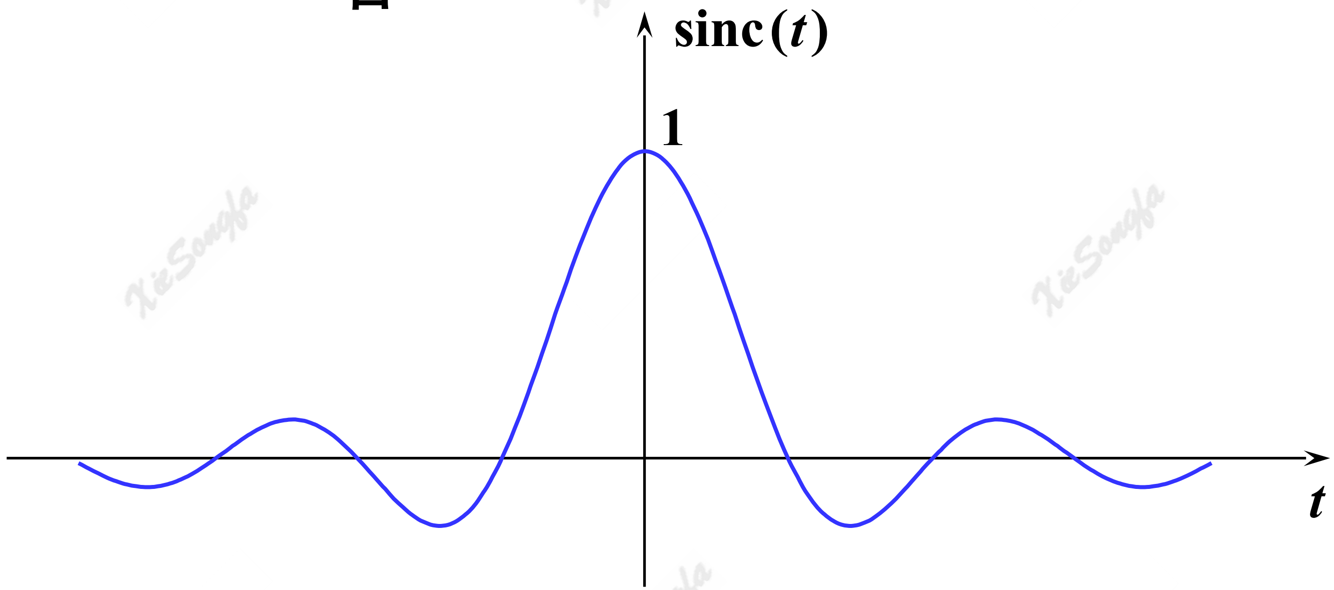
附：人物介绍 —— 傅立叶

- 1768 年 3 月 21 日生于法国中部欧塞尔一个裁缝家庭。 9 岁父母双亡， 12 岁由一主教送入军事学校读书。
- 1785 年回乡教数学。
- 1795 年任巴黎综合工科大学助教。
- 1798 年随拿破仑军队远征埃及。
- 1801 年回国后被任命为格伦诺布尔省省长。
- 1817 年当选为法国科学院院士。
- 1822 年任法国科学院终身秘书。
- 1830 年 5 月 16 日卒于巴黎。

（返回）

附： 抽样信号

- 通常将函数$\dfrac{\sin t}{t}$称为**抽样信号**，记为$S_a(t)$或者$\mathrm{sinc}(t)$.

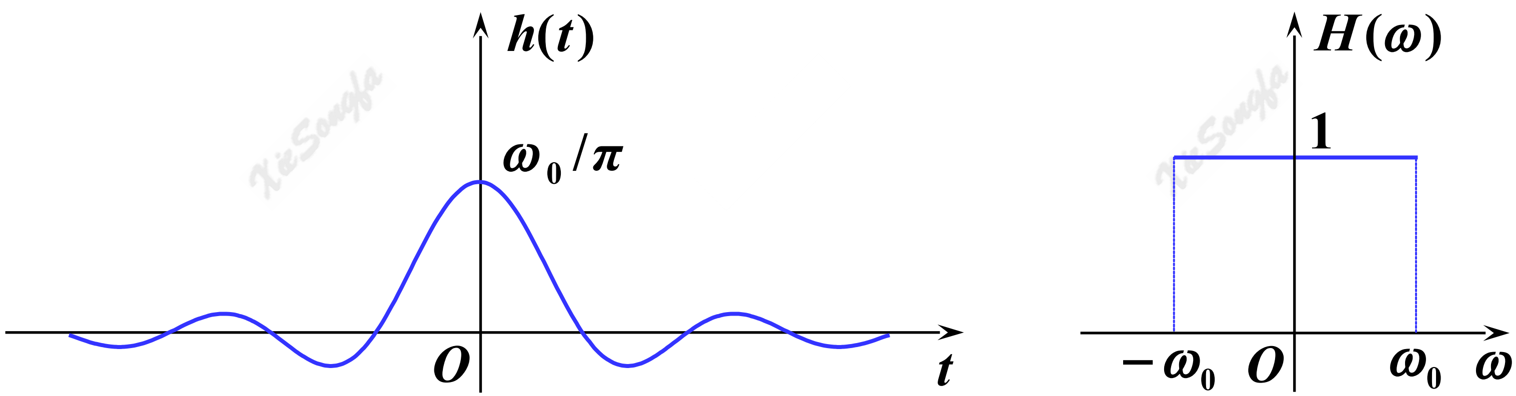


- 抽样信号在连续（时间）信号的**离散化、**离散（时间）信号的**精确恢复**以及信号的**滤波**中发挥着重要的作用。

附： 低通滤波

- 函数$h(t)=\dfrac{\omega_0}{\pi}S_a(\omega_0 t)$ 称为理想低通滤波因子；

它所对应的频谱函数$H(\omega)$ 称为理想低通滤波器。



- 当用理想低通滤波器$H(\omega)$ 与其它信号的频谱函数相乘时，

能使信号的低频成份完全通过（保留），高频成份完全压制。

（返回）