2011～2012 学年第一学期
《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A 卷)

院(系)________**专业班级**_________**学号**______________**姓名**_________

考试日期: 2011 年 11 月 28 日　　　　**考试时间:** 晚上 7:00~9:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得　分	
评卷人	

一、填空题 (每题 3 分，共 24 分)

1．设 $z=(-1)^{\frac{1}{3}}$，则 z 的模为__，z 的辐角主值 $\theta\,(\theta\in(-\pi,\pi])$ 分别为_______.

2． $\ln(\frac{1+i}{\sqrt{2}})$ 的值为____， $\cos(2i)$ 的值为_______.

3. 函数 $f(z)=x^2+2y^3i$ 在 $z_1=3-i$ 处是否可导? __________，在 $z_2=2+3i$ 处是否可导? ________.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{2^n n}$ 是否收敛? _____，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n i^n}{n}$ 是否收敛? _____.

5. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(9-z^2)}$ 在 $z=1+i$ 点展成泰勒级数的收敛半径为____.

6. $z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$ 的____ 阶极点.

7. 在映射 $f(z)=z^2+z$ 下， $z_0=-\dfrac{1}{2}+2i$ 处的旋转角为_________，$f(z)$在复平面上除去 $z=$_________的点外处处保角.

8．已知$F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$为 $f(t)$ 的傅氏变换，则 $f(t)=$_________.

得　分	
评卷人	

二、计算题 (每题 5 分，共 20 分)

1． $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z}{\cos z}\,\mathrm{d}z$

2． $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\sin \pi z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$

3． $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+3\sin^2\theta}\,d\theta$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2 + a^2} \mathrm{d} x \; (a>0, b>0)$

得　分	
评卷人	

三、(8 分) 验证 $v(x, y) = 4xy + y^2 - x^2$ 是调和函数，并求满足条件 $f(1) = 2 - i$ 的解析函数 $f(z) = u + iv$.

得 分	
评卷人	

四、(12 分)将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)(z-3)}$ 在 $z_0=0$ 点展开为洛朗(Laurent)级数.

得　分	
评卷人	

五、(8 分)求上半平面在映射 $w=\dfrac{2i}{z+i}$ 下的像.

得　分	
评卷人	

六、(10 分)求将半带形域 $D=\{z:\ 0<\operatorname{Im}z<\dfrac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}z<0\}$ 映射到单位圆内部的保形映射.

得　分	
评卷人	

七、(12 分)利用 Laplace 变换求解微分方程组:

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=-e^{2t}, \quad x(0)=1 \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=3e^{-t}, \quad y(0)=1 \end{cases}$$

得　分	
评卷人	

八、(6分)已知函数 $f(\xi)$ 在 $|\xi| \le R$ 上解析，设|z|<R，证明:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R}\left(\frac{f^2(\xi)}{(\xi-z)^2}-\frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2-\xi\bar{z}}\right)\mathrm{d}\xi=2f(z)f'(z)$$