§5.2 留数

一、留数的概念

二、留数的计算方法

三、留数定理

四、函数在无穷远点的留数

一、留数的概念

定义 设 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 将 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域

P113 定义 5.4

内展开成洛朗级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

(两边积分)

称 a_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数, 记作:

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

其中, C 是 z_0 的去心邻域内绕 z_0 的一条简单闭曲线

注 有时直接称 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数。

(留数的产生)

二、留数的计算方法

1. 可去奇点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0.$

2. 本性奇点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则 "只好" 将 $f(z)$ 在 z_0 的
邻域内展开成洛朗级数。

注 (1) 在具体展开的时候，并不需要写出 "完整" 的洛朗级
只需将其中负一次幂的系数 c_{-1} 求出来就可以了。

(2) 对于不是本性奇点的情况，该方法有时也是很有效的
而且在使用该方法时，并不需要知道奇点的类型。

二、留数的计算方法

3. 极点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，

P116 法则Ⅲ

则 $$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

理由 $$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}\cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots,$$

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \cdots,$$

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!a_{-1} + (z-z_0)\varphi(z),$$

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

二、留数的计算方法

3. 极点

方法 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，

P116 法则Ⅲ

则 $$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

特别 (1) 若 z_0 为 $f(z)$ 的简单极点,

P115 法则 I

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

P115 法则Ⅱ

(2) 若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq 0$, $P(z_0)\neq 0$,

且 $P(z),Q(z)$ 在 z_0 点解析，则 $$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

二、留数的计算方法

3. 极点

特别 (2) 若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$， $Q(z_0)=0,\ Q'(z_0)\neq 0,\ P(z_0)\neq 0,$

且 $P(z),Q(z)$ 在 z_0 点解析， $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$

- 事实上，此时 z_0 为 $f(z)$ 的简单极点，有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

例 求下列函数在奇点处的留数。

$$(1)\ f_1(z)=\frac{1-\cos z}{z^2},\quad (2)\ f_2(z)=\frac{1}{z(z-1)}.$$

解 (1) $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的可去奇点，

$$\mathrm{Res}[f_1(z),0]=0.$$

(2) $z=0$ 和 $z=1$ 均为 $f_2(z)$ 的一阶极点，

$$\mathrm{Res}[f_2(z),0]=\lim_{z\to 0}[z f_1(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1}=-1,$$

$$\mathrm{Res}[f_2(z),1]=\lim_{z\to 1}[(z-1)f_2(z)]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z}=1.$$

例 求下列函数在奇点处的留数。

(1) $f_1(z)=\dfrac{\cos z}{4z^3}$， (2) $f_2(z)=\dfrac{\sin z}{4z^3}$.

解 (1) $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的三阶极点，

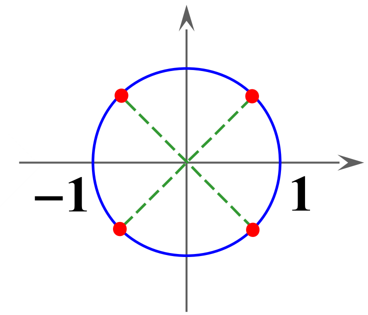
$$\text{Res}[f_1(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\cdot\frac{\cos z}{4z^3}\right)''=-\frac{\cos z}{8}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{8}.$$

(2) $z=0$ 为 $f_2(z)$ 的二阶极点，

$$\text{Res}[f_2(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{\sin z}{4z^3}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{4z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z-\sin z}{4z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z}{8}=0.$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$ 在奇点处的留数。



解 函数$f(z)$ 有四个简单极点，

$$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i},\quad z_2=e^{-\frac{\pi}{4}i},\quad z_3=e^{\frac{3\pi}{4}i},\quad z_4=e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\frac{z^2}{(z^4+1)'}\bigg|_{z=z_1}=\frac{1}{4z}\bigg|_{z=z_1}=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\text{同理 }\operatorname{Res}[f(z),z_2]=\frac{1}{4z}\bigg|_{z=z_2}=\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{4}i},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_3]=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i},\quad \operatorname{Res}[f(z),z_4]=\frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

例 求函数 $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z}$ 在奇点处的留数。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开，

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}=z^2\cdot\left(1-\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}-\frac{1}{6!\,z^6}+\cdots\right)$$

$$=z^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!\,z^2}-\frac{1}{6!\,z^4}+\cdots,$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{Res}[f(z),0]=0.$$

例 求函数 $f(z)=(1+z)e^{\frac{1}{z}}$ 在奇点处的留数。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开，

$$f(z)=(1+z)e^{\frac{1}{z}}=(1+z)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(1+\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z}+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{3}{2}.$$

例 求函数 $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z-1}$ 在奇点处的留数。

解 $z=1$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开，

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z-1}=(z-1+1)^2\cos\frac{1}{z-1}$$

$$=[(z-1)^2+2(z-1)+1]\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(-2\cdot\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z-1}+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}[f(z),1]=-1.$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}$ 在奇点处的留数。

解 (1) $z=1$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}=e.$

(2) $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，（证明是本性奇点？）

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot(1+z+z^2+\cdots)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$

$$=\cdots-\frac{1}{z}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right),$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{Res}[f(z),0]=-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)=-e.$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 点的留数。

解 方法一 利用洛朗展式求留数

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域展开得，

$$f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\left[z-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3!\,z^3}-\frac{1}{5!\,z}+\frac{1}{7!}z-\cdots,$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{5!}.$$

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 点的留数。

解 方法二 利用极点的留数计算法则求解

由于 $z=0$ 是 $f(z)$ 三阶极点因此有

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}[z^3 f(z)]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{(z^2-12)\sin z+6z\cos z+6z}{z^5}$$

(罗比达法则) $$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{z^2\cos z+4z\sin z-2\cos z}{5!}=-\frac{1}{5!}.$$

(好麻烦!)

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 点的留数。

解 方法二 利用极点的留数计算法则求解

- 若“不幸”将 $z=0$ 判断成了 $f(z)$ 的六阶极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}^5 z}[z^6 f(z)]$$

$$=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}^5 z}(z-\sin z)=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 1}(-\cos z)=-\frac{1}{5!}.$$

巧合？

(非也!)

注 (1) 此类函数求留数，可考虑利用洛朗展式。

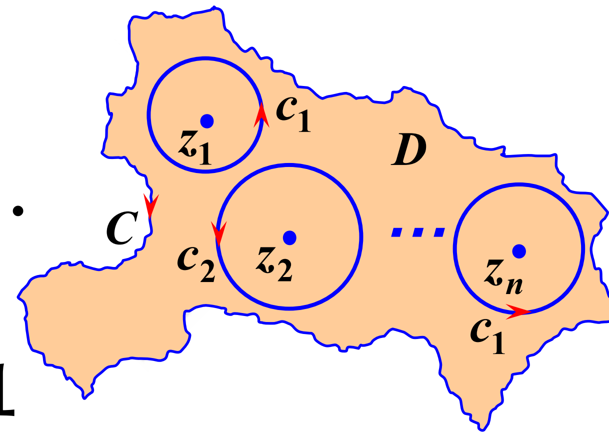
(2) 若此类函数求闭路积分，则可考虑利用高阶导公式，而不一定非得使用下面即将介绍的留数定理。

三、留数定理

定理 设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 处处解析，在边界 C 上连续则

P114 定理 5.7

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$



证明 如图，将孤立奇点用含于 D 内且互不重叠的圆圈包围起来根据复合闭路定理有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{c_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

注意 只需计算积分曲线 C 所围成的有限区域内奇点的留数。

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

P117 例 5.21

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|<2$ 内有两个奇点：

可去奇点 $z=0$，一阶极点 $z=1$，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=0.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\sin^2 z}{z^2}=\sin^2 1.$$

$$I=2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right)=2\pi i\sin^2 1.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z}{z(z-1)^2}\,dz$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有两个奇点:

一阶极点 $z=0$，二阶极点 $z=1$，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2 f(z)]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0.$$

$$I=2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right)=2\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z}{\cos \pi z}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 被积函数 $f(z)$ 的奇点为 $=k-\dfrac{1}{2}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,

但在 $|z|<1$ 内只有两个简单级点 $z_0=-\dfrac{1}{2}$, $z_1=\dfrac{1}{2}$,

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{e^z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{e^z}{-\pi \sin \pi z}\right|_{z=z_0}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{e^z}{-\pi \sin \pi z}\right|_{z=z_1}=-\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}},$$

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}}\right)=-4i\,\operatorname{sh}\frac{1}{2}.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^{\cos z}}{\sqrt{2}-2\sin z}dz$，其中 C 为 $|z|=\pi$.

解 被积函数$f(z)$ 在$|<\pi$ 内有两个奇点：

简单级点$z_1=\dfrac{\pi}{4}$, $z_2=\dfrac{3\pi}{4}$,

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\left.\frac{e^{\cos z}}{(\sqrt{2}-2\sin z)'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{e^{\cos z}}{-2\cos z}\right|_{z=z_1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{e^{\cos z}}{-2\cos z}\right|_{z=z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$I=2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=-2\sqrt{2}\pi i\,\mathrm{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 计算 $I=\oint_C \sin\frac{z}{z-1}\,dz$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 令 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$，$z=1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内展开为洛朗级数：

$$f(z)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin 1\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots\right)$$

$$+\cos 1\cdot\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots\right),$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{Res}[f(z),1]=\cos 1,\qquad\Rightarrow\quad I=2\pi i\cos 1.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{1}{z^{101}(1-z^2)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=0.5$.

解 令 $f(z)=\dfrac{1}{z^{101}(1-z^2)}$， $z=0$ 为 $f(z)$ 的 101 阶极点。

将 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内展开为洛朗级数:

$$f(z)=\frac{1}{z^{101}}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \frac{1}{z^{101}}+\frac{1}{z^{99}}+\cdots+\frac{1}{z}+z+z^2+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Res}[f(z),0]=1,$$

$$\Rightarrow \quad I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=2\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 方法一 利用极点的留数计算法则求解

$z=0$ 为被积函数 $f(z)$ 的二阶极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{e^z-1}{z^3}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{ze^z-e^z+1}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

方法二 利用高阶导数公式求解

$$I=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(e^z-1)''=\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \frac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 方法三 利用洛朗展式求解

将被积函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域展开，

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots,$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

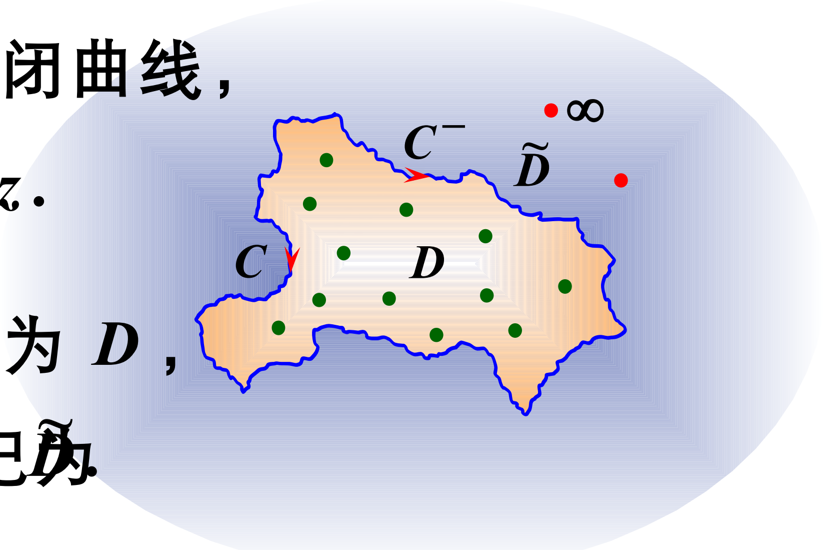
$$\Rightarrow\quad I=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

四、函数在无穷远点的留数

- 一般说来，闭路积分只与该闭路所包围的区域内的奇点有关，但为什么又要引入无穷远点的留数呢？

设想

- 如图，设 C 是一条简单闭曲线，则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = -\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z.$



- 将曲线 C 围成的区域记为 D，而曲线 C^- 围成的区域记为 $\tilde{D}$.
- 如果区域 D 内的奇点很多，且区域 $\tilde{D}$ 内的奇点很少，甚至只有无穷远点 ∞ 为奇点，则计算等式右边的积分显然比计算等式左边的积分要“省心”的多。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态 P109

定义 如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则称点 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

P109 定义 5.3

手段 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则点 $z=\infty$ 对应于 $\xi=0$，

相应地，$f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)\xlongequal{\text{记为}}\varphi(\xi)$，

因此，函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的性态可由函数 $\varphi(\xi)$ 在原点 $\xi=0$ 的性态来刻画。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

例 设 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$，问 $z=\infty$ 是否为 $f(z)$ 的孤立奇点？

P112 例 5.13

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{\xi}}\overset{\text{记为}}{=\!=}\varphi(\xi)$,

可知 $\xi=0$，$\xi_k=\dfrac{1}{k\pi}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 均为 $\varphi(\xi)$ 的奇点，

由于 $\xi=0$ 不是 $\varphi(\xi)$ 的孤立奇点，

因此 $z=\infty$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

例 设 $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

P111 例 5.10

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1}{\xi}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\xi^2}}$

$$=\frac{\xi^2}{\xi(1+\xi^2)}\ \underline{\underline{\text{记为}}}\ \varphi(\xi),$$

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的可去奇点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

例 设 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1+z}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1+\dfrac{1}{\xi^2}}{1+\dfrac{1}{\xi}}$

$$=\frac{1+\xi^2}{\xi(1+\xi)} \xlongequal{\text{记为}} \varphi(\xi),$$

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的一阶极点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的一阶极点。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

例 设 $f(z)=e^z$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

P112 例 5.12

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=e^{\frac{1}{\xi}} \xlongequal{\text{记为}} \varphi(\xi)$，

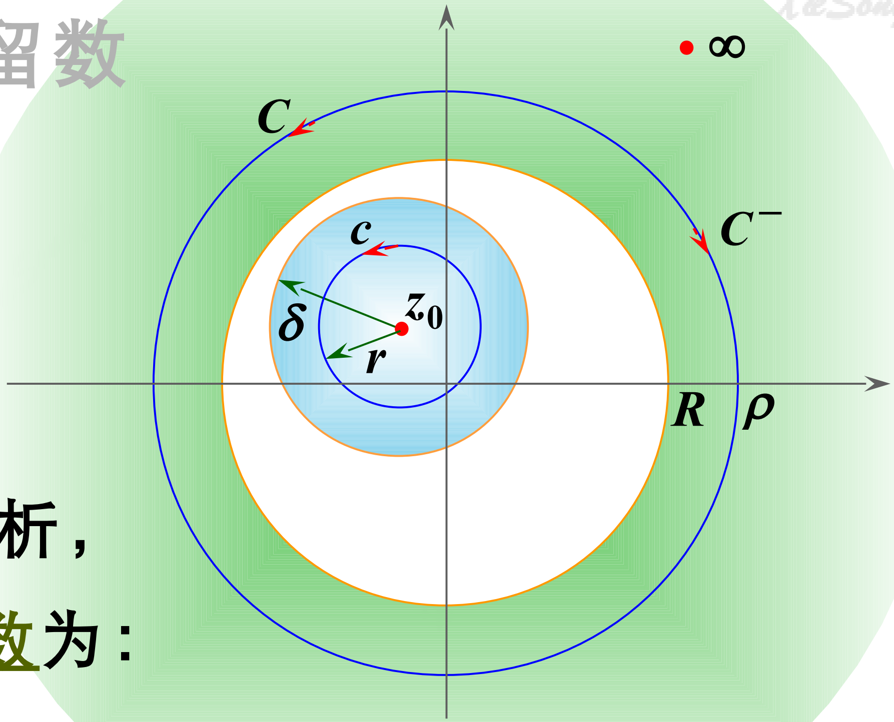
由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的本性奇点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

2. 函数在无穷远点的留数



定义 设函数 $f(z)$ 在圆环域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数为：

P118 定义 5.5

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z,$$ 其中，C 为 $|z|=\rho>R$.

无穷远点的留数的完整介绍

对比 函数 $f(z)$ 在"有限"孤立奇点的留数为：

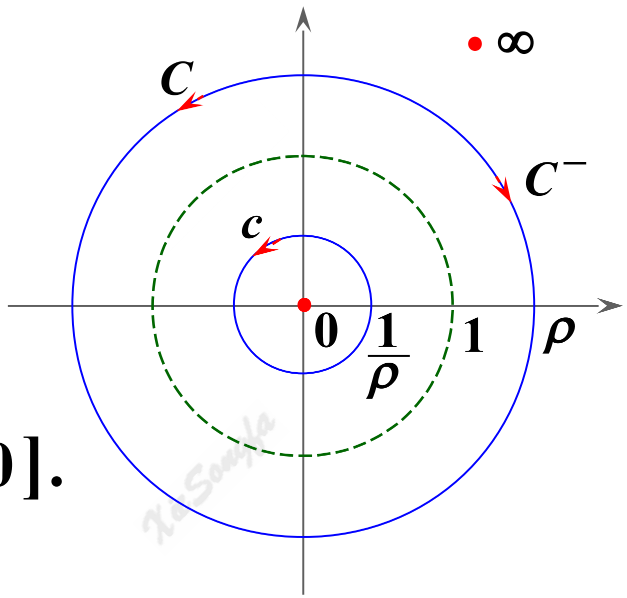
$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}f(z)\,\mathrm{d}z,$$ 其中，c 为 $|z|=r<\delta$.

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

2. 函数在无穷远点的留数

- 如何计算在无穷远点的留数？



公式 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right].$

P119 法则Ⅳ

推导 如图，已知 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z,$

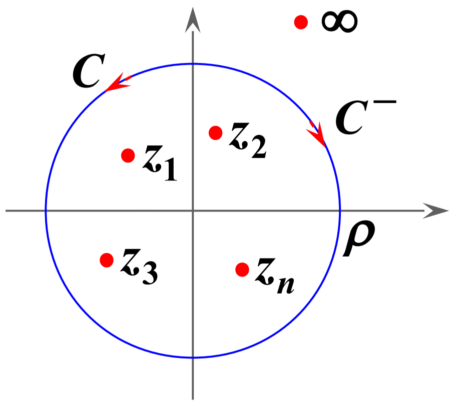
令 $z=\frac{1}{\xi}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}f\left(\frac{1}{\xi}\right)\cdot\frac{1}{\xi^2}\mathrm{d}\xi$

$$=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right].$$

四、函数在无穷远点的留数

1. 函数在无穷远点的性态

2. 函数在无穷远点的留数



- 在无穷远点的留数有何用处？

定理 设 $f(z)$ 在扩充平面上除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$ 外处处解析，则

P118 定理 5.8

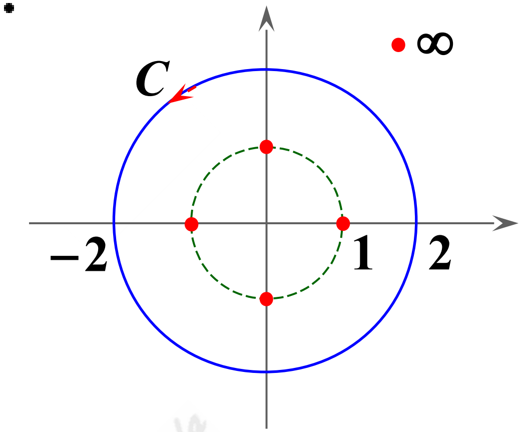
$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] + \mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0.$$

证明 如图，令 ρ 充分大，即 $\rho > \max_k |z_k|$，则

$$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]，$$ 即证。

例 计算 $I=\oint_C \frac{z^3}{z^4-1}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.



解 函数 $f(z)=\frac{z^3}{z^4-1}$ $|z|$在2 内

有四个一阶极点 $z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{4}i}$，$k=0,1,2,3$，

由留数定理有

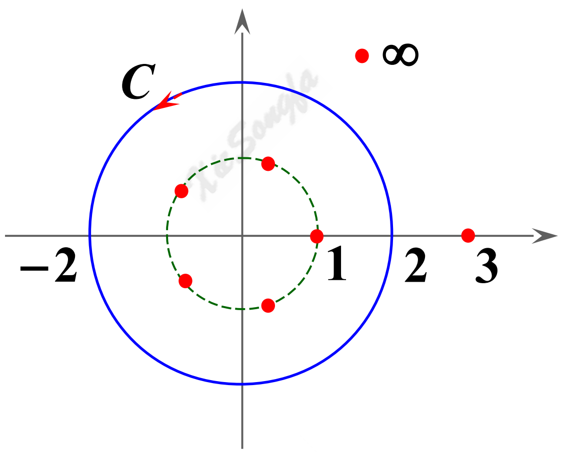
$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{1}{z(1-z^4)},0]=2\pi i.$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 (1) 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}$ $|z|=2$在 内有五个

$$z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}i},\quad k=0,1,2,3,4,$$



由留数定理有

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{4}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$=-2\pi i\big(\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\big).$$

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 (2) $\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim\limits_{z\to 3}(z-3)f(z)=\dfrac{1}{(3^5-1)^3}$，

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-2\pi i\,\mathrm{Res}\Big[f\Big(\frac{1}{z}\Big)\cdot\frac{1}{z^2},0\Big]$$

$$=-2\pi i\,\mathrm{Res}\Big[\frac{z^{14}}{(1-z^5)^3(1-3z)},0\Big]=0.$$

$$I=-2\pi i\big(\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\big)$$

$$=-\frac{2\pi i}{(3^5-1)^3}=-\frac{2\pi i}{14172488}.$$

休息一下 ……

附：关于无穷远点的奇点类型判别以及留数的定义

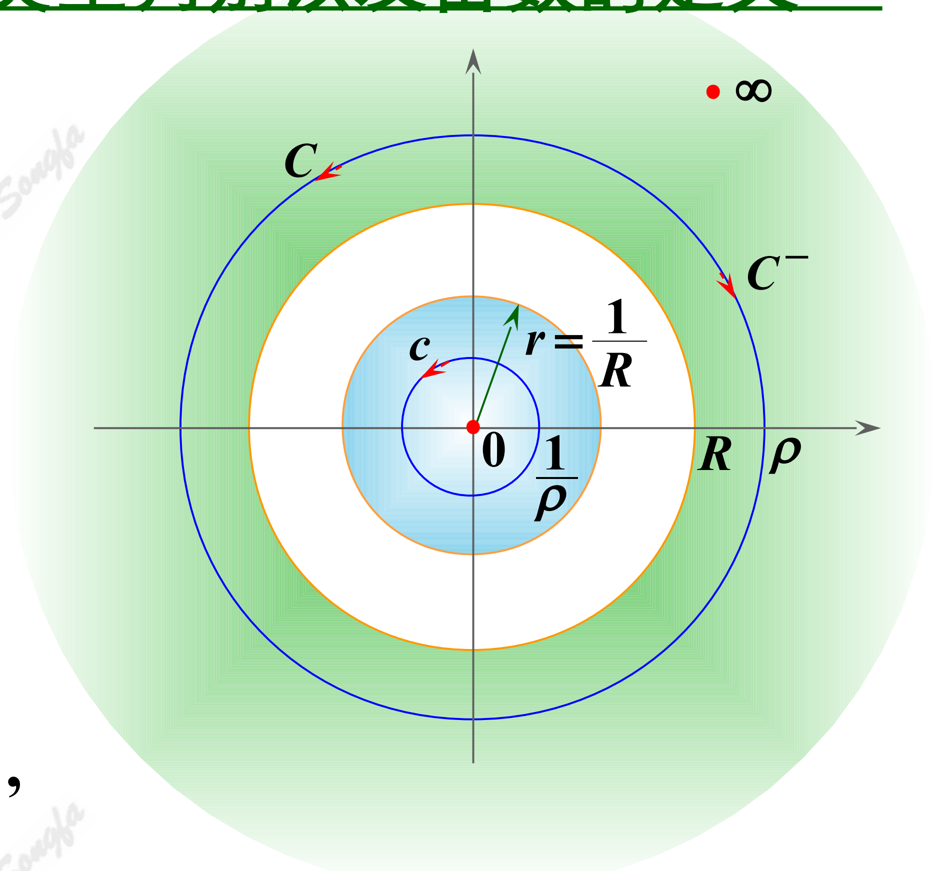
回顾 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，即 $\xi=\dfrac{1}{z}$，

则 $z=\infty$ 对应于 $\xi=0$，

$|z|>R$ 对应于 $|\xi|<r$，

相应地，$f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$

$\underline{\underline{\text{记为}}}\ \varphi(\xi)$，



因此，

函数 $f(z)$ 在无穷远点 $=\infty$ 的**性态**可由

函数 $\varphi(\xi)$ 在原点 $=0$ 的**性态**来刻画。

附：关于无穷远点的奇点类型判别以及留数的定义

- 函数$f(z)$ 在无穷远点的邻域内的洛朗展式？

由$\varphi(\xi)$ 在原点$\xi=0$ 的邻域$0<|\xi|<r$ 内的洛朗展式：

$$\varphi(\xi)=\cdots+a_{-N}\xi^{-N}+\cdots a_{-1}\xi^{-1}+a_0+a_1\xi+\cdots,$$

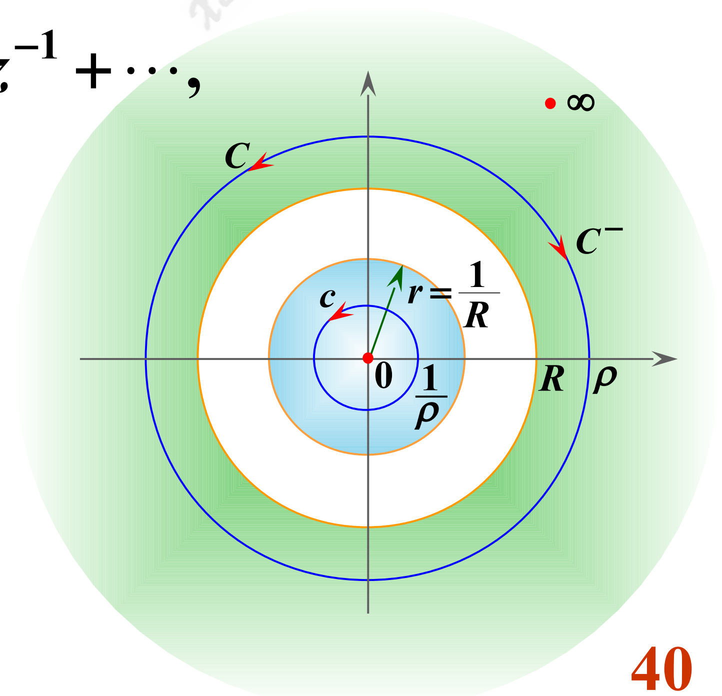
得$f(z)$ 在无穷远点$z=\infty$ 的邻域$R<|z|<+\infty$ 内的洛

$$f(z)=\cdots+b_N z^N+\cdots b_1 z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots,$$

其中，$b_{-n}=a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c\dfrac{\varphi(\xi)}{\xi^{n+1}}\mathrm{d}\xi$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}\frac{f(z)}{z^{-n+1}}\mathrm{d}z$$

$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$



附： 关于无穷远点的奇点类型判别以及留数的定义

- 函数$f(z)$ 在无穷远点的邻域内的洛朗展式？

$$\varphi(\xi)=\cdots+a_{-N}\xi^{-N}+\cdots a_{-1}\xi^{-1}+a_0+a_1\xi+\cdots,$$

$$f(z)=\cdots+b_N z^N+\cdots b_1 z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots,$$

- 无穷远点的奇点类型的划分

(1) 可去奇点：不含正幂项；

(2) N 阶极点：含有限多的正幂项，且最高幂次为 N，

此时，$f(z)=z^N\psi(z)$；

(3) 本性奇点：含有无穷多的正幂项。

附：关于无穷远点的奇点类型判别以及留数的定义

- 函数$f(z)$ 在无穷远点的邻域内的洛朗展式？

$$\varphi(\xi)=\cdots+a_{-N}\xi^{-N}+\cdots a_{-1}\xi^{-1}+a_0+a_1\xi+\cdots,$$

$$f(z)=\cdots+b_N z^N+\cdots b_1 z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots,$$

- 无穷远点的奇点类型的判别

(1) 可去奇点：$\lim\limits_{z\to+\infty} f(z)=c$（常数）；

(2) N 阶极点：$\lim\limits_{z\to+\infty} f(z)=\infty$； N，

此时，$f(z)=z^N\psi(z)$；

(3) 本性奇点：$\lim\limits_{z\to+\infty} f(z)$不存在且不为$\infty$.

附： 关于无穷远点的奇点类型判别以及留数的定义

- 函数$f(z)$ 在无穷远点的邻域内的洛朗展式？

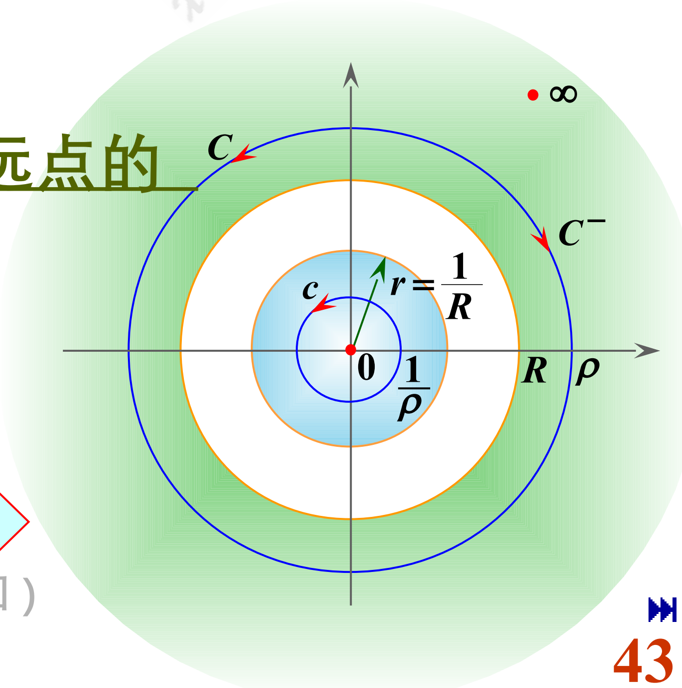
$$\varphi(\xi)=\cdots+a_{-N}\xi^{-N}+\cdots a_{-1}\xi^{-1}+a_0+a_1\xi+\cdots,$$

$$f(z)=\cdots+b_N z^{N}+\cdots b_1 z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots,$$ （两边沿 C^- 积分）

- 函数$f(z)$ 在无穷远点的留数

定义 称 $-b_{-1}$ 为函数$f(z)$ 在无穷远点的留数。由 $b_{-n}=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}\dfrac{f(z)}{z^{-n+1}}\,\mathrm{d}z$,

有 $-b_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z$.



（返回）

附：留数 (Residu) 的产生

1814 年 柯西第一个注意到了留数的概念。

1826 年 柯西在他的研究报告中首次使用了“residu”（即留数、残数、剩余）这个术语。

- 柯西在“求沿着两条有相同起点与终点且包围函数极点的路径积分之差”时得到了这个概念，这也是使用该名称的缘故。

1829 年 柯西创建了留数理论。

（返回）

附：关于极点的留数计算法则的说明

若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

$$(z-z_0)^n f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{n-m}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+a_0(z-z_0)^n+\cdots,$$

（其中 $n\ge m$ ）

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]=(n-1)!a_{-1}+(z-z_0)\varphi(z),$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)].\quad (\text{其中 } n\ge m)}$$

（返回）

附： 关于 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点

- 只需考察 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}$ 即 $\lim\limits_{\xi\to\infty}\xi e^{\xi}$ 不存在且不等于 ∞

令 $\xi = x + iy$，则

$$(1)\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y=0}}\xi e^{\xi}=\lim_{x\to+\infty}x e^{x}=+\infty,$$

$$(2)\ \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y=0}}\xi e^{\xi}=\lim_{x\to-\infty}x e^{x}=\lim_{t\to+\infty}(-t)e^{-t}$$

$$=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t}}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t}}=0.$$

故 $\lim\limits_{\xi\to\infty}\xi e^{\xi}$ 不存在且不等于 ∞

（返回）