

# 带有两个共线裂纹载流薄板温度场的复变函数解<sup>\*</sup>

田振国 马世麟 白象忠

(燕山大学建筑工程与力学学院 秦皇岛 066004)

**摘要:**采用复变函数方法对带有两个共线穿透裂纹的导电薄板,在瞬间电流作用下的温度场进行了计算。针对带有两个共线裂纹或夹杂的载流薄板形成了边值问题,给出封闭形式的解,得到了电流在裂纹尖端的奇异特征。在形成了点热源的基础上,导出裂纹尖端附近区域的温度场表达式,为计算裂纹尖端附近应力场打下了基础。

**关键词:**载流薄板;裂纹;点热源;温度梯度;温度场

**中图分类号:**O346.23 **文献标识码:**A

## 1 引 言

电热止裂是近年来兴起的一个新的研究课题,它是利用导电体裂纹尖端电流密度集中和电热效应原理,通过在特定方向向含裂纹载流薄板通入瞬间电流的方法,达到钝化裂尖、遏制裂纹开裂的目的。由于这种方法在工程实际问题中的适用性与有效性,因而受到人们的重视。目前的工作成果主要表现在从 Maxwell 电磁场方程出发,利用积分变换等数学工具,研究导电体含裂纹薄板在通入瞬间电流时的电流和温度分布<sup>[1]</sup>。研究结果表明:对含有多个共线裂纹的无限大导电薄板在通入瞬间电流时,由于裂纹的存在,在裂纹尖端附近导致电流集中及绕流端附近区域产生极高的温度,这一温度足以使该区域的金属熔化,并形成焊口,使裂尖超钝化,从而有效地阻止了裂纹的扩展。

本文给出了瞬间电流绕无限大薄板内两个共线穿透裂纹的复变函数解答。当强度均匀的瞬间电流通入无限大薄板时,由于裂纹的存在,将出现局部的电流和温度流动扰动。首先求解在裂纹尖端附近形

成的点热源,进而确定带有裂纹的载流薄板的温度场,为进一步确定应力场打下了基础。本文求解方法简便,计算简单,实用性强,便于工程应用。

## 2 基本方程式的建立

在  $xoy$  平面域内,裂纹沿直线分布且在  $ox$  轴上,表示为: $L = L_1 + L_2$ ,且  $L_j = a_j b_j (j = 1, 2)$ 。裂纹的正向是由  $a_j$  到  $b_j$ ,  $a_j, b_j$  为裂尖。当在无限远处通入  $y$  方向电流的瞬间,求解共线裂纹尖端附近的温度场时的过程主要分两个阶段:首先,通过载流薄板内的电流密度的分布,解得裂纹尖端处的热源功率。然后,根据所求得的热源功率求得板内的温度场分布。

对于多连通域内的边值问题,采用通常的方法是很难求解的,而运用复变函数的形式会使求解的过程简化。

### 2.1 电流强度与电流密度

对于本文所研究的问题,在具有共线穿透裂纹的无限大平板上加载定常电流,现求解板中电流密度的分布。

\* 基金项目:河北省自然科学基金(599255)和国家自然科学基金(19772046)资助项目

来稿日期:2002-04-15 修回日期:2002-10-08

第一作者简介:田振国,男,1975年生,硕士,教师,燕山大学建筑工程与力学学院;研究方向:电磁热效应裂纹止裂。

载流薄板内的电流强度  $I$  与电流密度  $J$  有如下关系<sup>[2]</sup>:

$$J_x = \frac{\partial I}{\partial x}, J_y = \frac{\partial I}{\partial y} \quad (1)$$

式中:  $J_x, J_y$  分别为  $x, y$  方向的电流密度, 同时引入解析函数:  $\phi(z) = I + iV$ , 这里,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $V$  为  $I$  的共轭函数, 且满足 C-R(柯西-黎曼)条件。考虑到式(1)有:

$$J_x - iJ_y = \phi'(z) = \frac{\partial I}{\partial x} - i \frac{\partial I}{\partial y} \quad (2)$$

式中:  $\phi(z) = \int \phi'(z) dz$ , 考虑到式(2)很显然可以得到:

$$|J| = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = |\phi'(z)| \quad (3)$$

## 2.2 具有多条共线裂纹的导电板内的电流强度

若在无穷远处, 电流密度是有限的, 则式(2)的函数在域内是正则的。此时, 边界条件可以写成:

$$\begin{aligned} [\phi(s) - \overline{\phi(s)}]^+ + [\phi(s) - \overline{\phi(s)}]^- &= 2f(s), \\ [\phi(s) + \overline{\phi(s)}]^+ - [\phi(s) + \overline{\phi(s)}]^- &= 2g(s), \end{aligned} \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (4)$$

其中:  $f(s) = -i[(\frac{\partial I}{\partial y})^+ + (\frac{\partial I}{\partial y})^-]$ ,  $g(s) = -i[(\frac{\partial I}{\partial y})^+ - (\frac{\partial I}{\partial y})^-](s-l)$ ,  $l$  为裂纹长度,  $[\ ]^{\pm}$  分别表示  $[\ ]$  内函数在裂纹上下边界的值, 且  $f(s), g(s)$  满足迪里赫里条件<sup>[3]</sup>。下面的计算将要利用迪里赫里问题的解<sup>[4]</sup>, 即:

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \frac{p_n(z)}{(z)} + (\nabla I) \quad (5)$$

其中:  $\phi_0(z) = \frac{1}{2i} \int_{-l}^l \frac{f(s)}{s-z} ds + \frac{1}{2i} \int_{-l}^l \frac{g(s)}{s-z} ds$ ,

$$p_n(z) = c_0 z^2 + c_1 z + c_2,$$

$$\phi(z) = \prod_{j=1}^2 (z - a_j)^{\frac{1}{2}} (z - b_j)^{\frac{1}{2}}$$

式中  $c_0, c_1, c_2$  均是纯虚数,  $(\nabla I)$  为无穷远处的电流强度梯度。

## 2.3 带有两个共线裂纹的导电板内电流密度的基本方程

现在来研究绕两个在  $x$  轴上且关于  $y$  轴对称的绝缘、绝热裂纹的电流流动产生的热效应的问题。在无穷远处通入与  $x$  轴成  $\alpha$  角的密度为  $J$  的均匀电流, 由裂纹绝热的边界条件可知  $f(s) = g(s) = 0$ , 则式(5)可以写成:

$$\phi(z) = \frac{p_n(z)}{(z)} + (\nabla I) \cos \alpha \quad (6)$$

式中:  $p_n(z) = c_0 z^2 + c_1 z + c_2$ ,  $(z) = [(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)]^{\frac{1}{2}}$

由式(4)可得:

$$\phi'(z) - \overline{\phi'(z)} = -2i(\nabla I) \sin \alpha \quad (7)$$

由于  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{p_n(z)}{(z)} = c_0$ , 同时考虑式(6)及式(7)可得:  $c_0 = i(\nabla I) \sin \alpha$ 。通入电流场为无源场, 由连续性条件, 绕任意闭围线  $c^+$  积分为零, 则  $c_j (j=1, 2)$  可由下式确定:

$$\operatorname{Re} \left[ \int_{c^+} \frac{p_n(s_1)}{(s_1)} ds_1 \right] = 0 \quad (8)$$

由此有:  $c_1 = 0, c_2 = -c_0 \frac{E(k)}{K(k)} b^2, k^2 = 1 - (\frac{a}{b})^2$  其中:  $K(k), E(k)$  为相应于第一类和第二类完全椭圆积分, 可由  $k$  值定。并取  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , 有:

$$\phi(z) = - \frac{J_y}{i \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \left[ z^2 - b^2 \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (9)$$

式中,  $J_y$  为无限远处  $y$  方向的电流密度。由式(3)及式(9)容易得到:

$$|J| = \frac{J_y \sqrt{(x^2 - y^2 - b^2 \frac{E(k)}{K(k)})^2 + 4x^2 y^2}}{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2]^{\frac{1}{4}} [(x^2 - y^2 - b^2)^2 + 4x^2 y^2]^{\frac{1}{4}}} \quad (10)$$

从式(9)中可以看出, 在裂纹处仅有  $x$  方向的电流, 而  $y$  方向的电流为零, 在裂纹尖端电流密度奇异, 无穷远处为有限值。

## 2.4 热源功率的计算

在已知裂纹尖端附近的电流密度  $J_x, J_y$  的情况下裂纹尖端附近的热源功率为<sup>[11]</sup>:

$$Q = \int_{-h}^h \frac{1}{2} (J_x^2 + J_y^2) dz = \frac{2h}{\sigma} |J|^2 \quad (11)$$

式中  $2h$  为板厚,  $\sigma$  为电导率。最后求得热源功率为:

$$Q = \frac{2h}{\sigma} (J_y)^2 \times \frac{[(x^2 - y^2 - \frac{E(k)}{K(k)} b^2)^2 + 4x^2 y^2]}{\sqrt{[(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2] [(x^2 - y^2 - b^2)^2 + 4x^2 y^2]}} \quad (12)$$

## 3 载流板内温度场的确定

带有裂纹的载流薄板内的温度场是由两个因素

决定的,其一,是域内无裂纹时具有等效热源所产生的温度场  $T_0(x, y)$ ,其二,是存在裂纹时对裂纹周围温度场的扰动值  $T^*(x, y)$ 。所以,多连通域内的温度场为:

$$T(x, y) = T_0(x, y) + T^*(x, y)$$

如图 1 所示,板内的两个裂纹具有绝缘,绝热的性质,且认为以上所求得的热源功率只有四个裂纹尖端对域内温度场有作用,而忽略域内其他各点的电流热效应。这样,问题就化为带有点热源的多连通域问题。

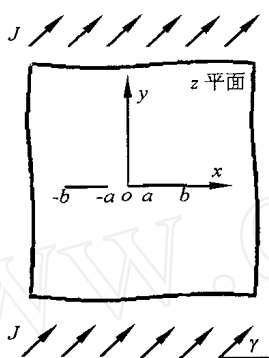


图 1 具有共线裂纹的导电薄板

### 3.1 求 $T_0(x, y)$ 的表达式

若在  $x$  点放置点热源,参照文献[5]可以得到:

$$T_0(x, y) = 2\text{Re } F_0(x, z), F_0(x, z) = m_0 \text{Ln}(x - z) \quad (14)$$

其中,  $m_0 = -\frac{Q}{4}$ 。考虑到板中有四个点热源,由文献[6],利用迭加原理可得:

$$F_0(x, y) = -\frac{1}{4} [Q_1 \text{Ln}(-b - z) + Q_2 \text{Ln}(-a - z) + Q_3 \text{Ln}(a - z) + Q_4 \text{Ln}(b - z)]$$

$$T_0(x, y) = -\frac{1}{4} \{ Q_1 \text{Ln}[(b+x)^2 + y^2] + Q_2 \text{Ln}[(a+x)^2 + y^2] + Q_3 \text{Ln}[(a-x)^2 + y^2] + Q_4 \text{Ln}[(b-x)^2 + y^2] \} \quad (15)$$

式中  $\gamma$  为材料的热传导系数,  $Q_i (i=1, 2, 3, 4)$  为第  $i$  个裂纹尖端处的热源功率。

### 3.2 求 $T^*(x, y)$ 的表达式

绝热裂纹的边界条件为:  $[\partial T / \partial n] = 0$ , 同时考虑到式(13)得:

$$[\partial T^* / \partial n] = - [\partial T_0 / \partial n] \quad (16)$$

则  $T^*(x, y)$  可以写成下面的形式:

$$T^*(x, y) = 2\text{Re } F^*(z) \quad (17)$$

式中:

$$F^*(z) = \frac{c}{2} + \frac{1}{2i} \int_{s_0}^z \frac{(s)}{s-z} ds \quad (s \in l) \quad (18)$$

$c$  为实常数,  $n$  为裂纹边界的法线方向,  $(s)$  为定义在边界上的实函数,在边界处有:

$$[\frac{\partial T^*}{\partial n}]^\pm = \pm i e^{i\theta_0} (s_0) - \frac{e^{i\theta_0}}{i} (s) K(s, s_0) ds$$

其中  $\pm$  角标分别表示上下边界的对应值,  $K(s, s_0)$

$$= \frac{1}{2} [\frac{(s)}{s-s_0} - \frac{1}{s-s_0}], \quad (s) = \frac{ds}{ds} = -e^{-2i\theta_0}, \theta_0 \text{ 为}$$

边界  $\pm s_0$  点处法线与  $ox$  轴的夹角,根据本文条件

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ 计算得到: } [\frac{\partial T^*}{\partial n}]^\pm = \mp (s_0),$$

由式(15)有:

$$[\frac{\partial T_0}{\partial n_0}]^\pm = [\frac{\partial T_0}{\partial y}]^\pm = -\frac{1}{2} [\frac{yQ_1}{(b+x)^2 + y^2} + \frac{yQ_2}{(a+x)^2 + y^2} + \frac{yQ_3}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{yQ_4}{(b-x)^2 + y^2}] \quad (19)$$

由式(16)有:  $[\frac{\partial T^*}{\partial n_0}]^\pm = -[\frac{\partial T_0}{\partial n_0}]^\pm$ , 而在本文所讨论的问题中,裂纹在  $x$  轴上,对于式(19)中的裂纹上下边缘的纵向坐标  $y$  可以由裂纹张开宽度  $d$  代替,则有:

$$(s_0) = \pm \frac{d}{2} \{ Q_1 [\frac{1}{(b+x)^2 + d^2}] + Q_2 [\frac{1}{(a+x)^2 + d^2}] + Q_3 [\frac{1}{(a-x)^2 + d^2}] + Q_4 [\frac{1}{(b-x)^2 + d^2}] \}$$

由式(18)可得:

$$F^*(z) = \frac{c}{2} \pm \frac{d}{4^2 i} \{ Q_1 [\frac{1}{(b+x)^2 + d^2}] + Q_2 [\frac{1}{(a+x)^2 + d^2}] + Q_3 [\frac{1}{(a-x)^2 + d^2}] + Q_4 [\frac{1}{(b-x)^2 + d^2}] \} \frac{dx}{x-z} \quad (20)$$

在式(20)中,  $c$  为无热源及裂纹时的初始温度的 2 倍。

若板的初始温度为 0, 裂纹张开宽度趋近于零, 则有  $c=0$ 。此时  $T^*=0, T=T_0(x, y)$ , 既当点热源在裂纹尖端, 且两裂纹共线时, 温度的扰动值为零。由此有:

$$T(x, y) = -\frac{1}{4} \{ Q_1 \text{Ln}[(b+x)^2 + y^2] + Q_2 \text{Ln}[(a+x)^2 + y^2] + Q_3 \text{Ln}[(a-x)^2 + y^2] + Q_4 \text{Ln}[(b-x)^2 + y^2] \} \quad (21)$$

## 4 算例及实验分析

如图 1 所示,选取工业用钢 35 # (GB699-88), 加工为带有两个共线裂纹的载流薄板。其中:  $b =$

30mm,  $a = 10\text{mm}$ , 板厚  $2h = 0.5\text{mm}$ , 电导率  $= 0.63 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ , 传热系数  $= 39.4 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ , 放电电压  $U = 400\text{V}$ , 电阻  $R = 0.001 \Omega$ 。经计算得到裂纹尖端附近的温度场分布如图 2 所示; 板内裂纹线上的温度分布如图 3 所示; 两个裂纹间的距离  $a$  与温度  $T$  的关系如图 4 所示, 通过实验得到的两个共线裂纹尖端处的熔化状态如图 5 所示。

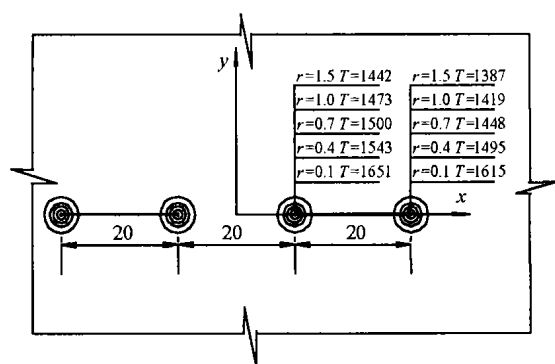
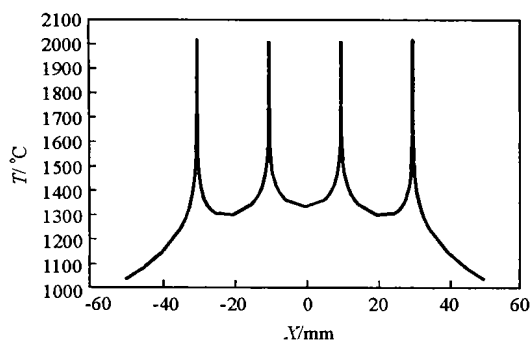
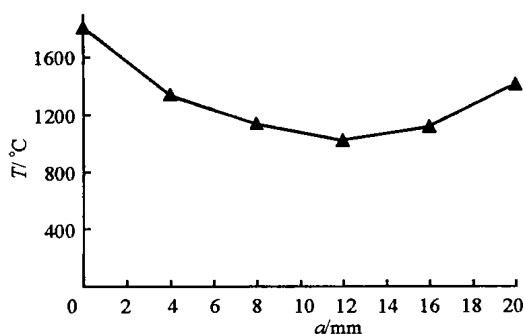
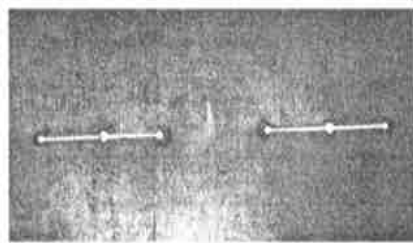
图 2 曲线  $T \sim r$  曲线图 3  $T \sim X$  曲线图 4  $T \sim a$  曲线

图 5 共线裂纹尖端熔化状态

## 5 结 论

- 1) 可以将电流对裂纹的绕流用复变函数的方法求解, 得到了裂纹尖端附近区域的点热源的热源功率。
- 2) 在确定裂尖热源功率的情况下, 与热流流动相似, 可以将多个裂纹的问题转化为多连通域的电与热的绕流问题, 得到了封闭形式的解答。
- 3) 在通入适当的电流  $J_y$  的情况下, 通电瞬间导电薄板的裂纹尖端处的温度值急剧升高, 可以达到使其熔化的状态, 即达到遏制裂纹扩展的目的。
- 4) 本文计算结果与实验结果相近, 证实了该计算方法可以作为指导工程应用的理论基础。

## 参 考 文 献

- 1 . . . . ., 1980, 44(5): 916 ~ 922
- 2 (G. C. Sih. 薛昌明). . . . ., 1965, 87, 2, : 157 ~ 162
- 3 . . . . ., 1972: 12 ~ 40
- 4 . . . . . 著. 赵惠元译. 数学弹性力学的几个基本问题 北京: 科学出版社, 1958: 196 ~ 407
- 5 . . . . ., 1983: 18 ~ 40
- 6 Jacob. Bear[美]著, 李竟生, 陈崇希译. 多孔介质流体动力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983: 254 ~ 256

characteristics represent a combination of viscous damping and Coulomb damping, and the latter is dominant in the controllable damping force of the damper. The phenomenon, appearing multi-enclosed domains in the  $F$  vs  $V$  hysteretic cycles when the movement of the damper is fast, manifests that rheological behaviors of ER fluid is related to the shear strain rate of fluid between electrodes. On other words, the damper is a nonlinear system, its dynamic characteristics will be influenced by the applied electric field and velocity of the damper.

Keywords: ER damper, dynamic test, equivalent damping, hysteretic characteristics.

## Temperature Field in Current-Carrying Plate with More Than One Collinear Penetrated Cracks

Tian Zhenguo Ma Shilin Bai Xiangzhong

(The College of Architectural Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao, 066004)

**Abstract:** In this paper, the temperature field in an current-carrying plate with more than one collinear penetrated cracks under the action of transient pulse current was calculated by using complex function methods. considering to the plane with more than one collinear cracks, the boundary value problem was formed and the analytical closed form solution of given. Singularity character of the current around the crack tip was obtained, and the point heat source was formed, so was that the temperature field around crack tip was deduced. It was the basis of defining the stress field around the crack tip.

Keywords: current-carrying plate, crack, point heat source, temperature gradient, temperature field.

## Analysis of flow Fields and Research on Resistance Characteristic of Inertial Stage of Marine Moisture Separator

Wang Xiaohua<sup>1</sup> Sun Haiou<sup>2</sup> He Zhongyi<sup>1</sup>

(Harbin Institute of Technology, Harbin, China, 150090)<sup>1</sup> (Harbin Engineering University, Harbin, China, 150090)<sup>2</sup>

**Abstract:** By using the second order full expansion Euler-Taylor-Galerkin (ETG) finite element method, cooperated with the technology of large eddy simulation (LES), flow fields with different Reynold numbers in the inertial stage of marine moisture separator were simulated. The Smagorinsky subgrid model constant was deduced by comparing the computational result of resistance coefficient at one of the Reynold numbers with that of the physical experiment. It is proved that the calculated constant can also be used to calculate the flow fields of the model with other Reynold numbers. As the computational results show that abundant eddy series and the time processes of such eddies were captured by using the ETG finite element method cooperated the technology LES. Based on the analysis of flow fields, the energy losing rates on each point in the model with the same Reynold numbers were calculated. The energy loses were proved to center in the regions that eddies of large scale taken into place.

Keywords: Euler-Taylor-Galerkin (ETG) finite element method, large eddy simulation, moisture separator, inertial stage, energy losing rate.