练 习 五

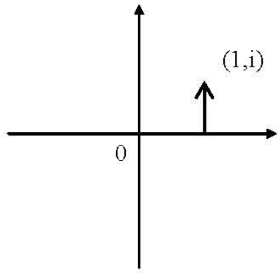
1．计算积分$\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$，积分路径：自原点沿实轴至 1，再由 1 铅直向上至 1+i。

解：$\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$

$=\int_{(0,0)}^{(1,0)}[(x-y)+ix]^2dz+\int_{(0,0)}^{(1,0)}[(x-y)+ix^2)]dz$

$=\int_0^1(x+ix^2)dx+i\int_0^1(1-y+i)dy$

$=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}i$



2．计算积分$\oint_c\dfrac{\bar{z}}{|z|}dz$的值，其中 C 为（1）$|z|=2$;（2）$|z|=4$.

解：令$z=re^{i\theta}$　则

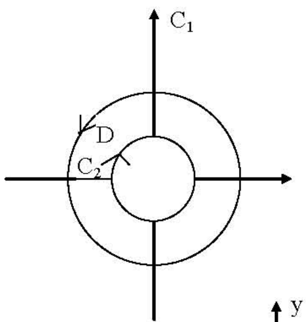
$$\oint_{|z|=r}\frac{\bar{z}}{|z|}dz=\int_0^{2\pi}\frac{re^{-i\theta}}{r}rie^{i\theta}d\theta=2\pi ri$$

当$r=2$时，为$4\pi i$
当$r=4$时，为$8\pi i$

3．求积分$\int_c\dfrac{e^z}{z}dz$的值，其中 C 为由正向圆周$|z|=2$与负向圆周$|z|=1$所组成。

解：$\int_c\dfrac{e^z}{z}dz=\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z}dz-\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}dz$

$=2\pi i-2\pi i=0$

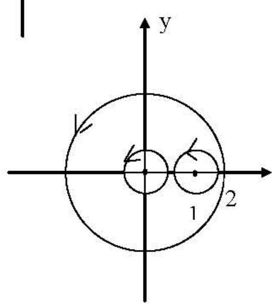


4．计算$\oint_c\dfrac{1}{z^2-z}dz$，其中 C 为圆周$|z|=2$.

解：$\oint_c\dfrac{1}{z^2-z}dz$

$=\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z(z-1)}dz=\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{(z-1)}dz-\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z}dz$

$=2\pi i-2\pi i=0$



5．计算下列积分值：

（1）$\int_0^{\pi i} \sin z dz$

解：$\int_0^{\pi i} \sin z dz = -\cos z \Big|_0^{\pi i} = 1 - \cos \pi i$

（2）$\int_1^{1+i} z e^z dz$

解：$\int_1^{1+i} z e^z dz = \int_1^{1+i} z de^z = (ze^z - e^z)\Big|_1^{1+i} = ie^{1+i}$

6．当积分路径是自 $-i$ 沿虚轴到 i，利用积分性质证明：

$\left|\int_{-i}^{i} (x^2 + iy^2) dz\right| \leq 2$

证：$\left|\int_{-i}^{i} (x^2 + iy^2) dz\right| \leq \int_{-i}^{i} \left|(x^2 + iy^2)\right| \left|dz\right| \leq \int_{-i}^{i} \left|y^2\right| ds \leq 1.2 = 2$

*7. 思考题

（1）在积分的定义中为什么要强调积分 $f(z)$“沿曲线 C 由 α 到 β 的积分”？它与“沿曲线 C 由 β 到 α 的积分”有什么区别?

答：在定积分中已有 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$，即积分是与区间的方向有关的，这里 $w = f(z)$ 在 C 上的积分也与 C 的方向有关。这从积分和式 $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ 中的因子 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ 可直接看出，若改变 C 的方向，即 $f(z)$ 是沿曲线 C 由 β 到 α 积分，则积分与原积分反号：

$$\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$$

其中 C^{-1} 表示 C 的反向曲线。

（2）复函数 $f(z)$ 的积分与实一元函数定积分是否一致?

答：若 C 是实轴上的区间 $[\alpha, \beta]$，由定义知

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

即为一个实函数的积分，如果 $f(x)$ 是实值的，则为一元实函数的定积分，因而这样定义复变函数积分是合理的，而且可以把高等数学中的一元实函数的定积分当作复积分的特例看待。

应当注意的是，一般不能把起点为 α ，终点为 β 的函数 $f(z)$ 的积分记作 $\int_\alpha^\beta f(z)dz$ ，因为这是一个线积分，要受积分路线的限制，必须记作 $\int_C f(z)dz$.

（3）应用柯西——古萨定理应注意些什么？

答：必须注意定理的条件“单连域”，被积函数虽然在 B 内处处解析，但只要 B 不是单连的，定理的结论就不成立。例如 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在圆环域：$\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ 内解析，C 为域内以原点为中心的正向圆周，但 $\oint_C \dfrac{1}{z}\cdot dz = 2\pi i$ ，就是因为不满足“单连域”这个条件。

还要注意定理不能反过来用，即不能因为有 $\oint_C f(z)dz=0$ ，而说 $f(z)$ 在 C 内处处解析，例如 $\oint_{|z|=1} \dfrac{1}{z^2}\cdot dz = 0$, 但 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在 $|z|=1$ 内并不处处解析。