复变函数与积分变换试题

2005.11

系别____________ 班级___________ 学号____________________ 姓名____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得分	评卷人

一、填空（每题 3 分，共 24 分）

1．复数 $\boldsymbol{z}=\dfrac{\left(\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}-\mathbf{1}\right)^{2}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{i}}$ 的模为__________，辐角为____________.

2．曲线 $z=\left(2+i\right)t$ 在映射 $w=z^{2}$ 下的象曲线为____________.

3．$i^{i}=$____________.

4．$z=0$ 为函数 $f\left(z\right)=\dfrac{1-\cos z}{z^{8}}$ 的_____级极点；在该点处的留数为_____.

5．函数 $f\left(z\right)=z\operatorname{Im}z-\operatorname{Re}z$ 仅在 $z=$____________处可导.

6．设 $f\left(z\right)=\oint\limits_{|\xi|=2}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\xi}{\xi-z}d\xi$,其中 $|z|\neq 2$，则 $f'\left(1\right)=$_______.

7. 在映射 $w=z^{2}-iz$ 下，$z=i$ 处的旋转角为_______，伸缩率为______.

8．已知 $f_{1}\left(t\right)=e^{t}u\left(t\right), f_{2}\left(t\right)=tu\left(t\right)$,则它们的卷积 $f_{1}\left(t\right)*f_{2}\left(t\right)=$____________.

得分	评卷人

二、（10 分）验证 $v(x,y)=2x^2-2y^2+x$ 是一调和函数，并构造解析函数 $f(z)=u+iv$ 满足条件 $f(i)=-2i$.

得分	评卷人

三、计算下列各题（每小题 5 分，共 25 分）：

1. $\oint_{|z|=4}\dfrac{1}{\cos z}dz$

2. $\oint_{|z|=\pi}\dfrac{z}{z+1}e^{\frac{2}{z+1}}dz$

3. $\int_0^{\pi}\dfrac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$

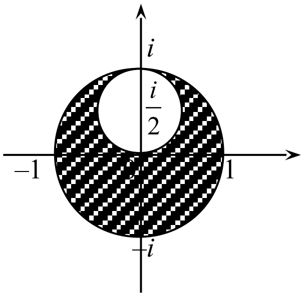
5. 用留数计算 $I(b)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos bx}{x^2+a^2}dx\quad(a>0,b>0)$，由此求出 $F(\omega)=\dfrac{1}{\omega^2+a^2}$ 的傅里叶(Fourier)逆变换.

得分	评卷人

四、（12 分）把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ 在复平面上展开为 $z-i$ 的洛朗级数.

得分	评卷人

五、（6 分）试求 Z 平面上如图所示区域在映射 $w=-\pi i\dfrac{z+i}{z-i}$ 下的象区域.



得分	评卷人

六、（8 分）求一保形映射，把区域$\begin{cases} 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{3\pi}{2} \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$映射为区域$|w| < 1$.

得分	评卷人

七、（8 分）用拉普拉斯(Laplace)变换求解微分方程$y''' + y' = e^{2t}$满足初始条件$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$的解.

得分	评卷人

八、证明题：（7 分）

1．设函数$f(z)$在区域$|z - z_0| < R$ $(R > r > 0)$内除二阶极点z_0外处处解析，证明：

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -4\pi i$$.（4 分）

2．求积分$\oint_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z} dz$，从而证明：$\int_0^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta = \pi$.（3 分）

复变函数与积分变换评分细则

一、填空

1．$2\sqrt{2}$，$-5\pi/12$　　　2．$v=\frac{4}{3}u$　　　3．$e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$　　　4．6，0

5．（0，-1）　　　6．0　　　7. $\frac{\pi}{2}$，　1　　　8．$t-1+e^{-t}$

二、$v_{xx}=4,\ v_{yy}=-4,\ v_{xx}+v_{yy}=0$，故$v(x,y)$为调和函数。　　（2分）

$$v_y=-4y=u_x,\quad u=-4xy+c(y),\quad -v_x=-(4x+1)=u_y,\ -(4x+1)=-4x+c'(y)$$

$$c'(y)=-1,\ c(y)=-y+c \qquad \therefore u(x,y)=-4xy-y+c$$ （8分）

由于$f(i)=-2i$，得$c=1$（9分），$f(z)=(-4xy-y+1)+i(2x^2-2y^2+x)$　　（10分）

三、1．$\cos z=0\Rightarrow z=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z$， 在$|z|=4$内，有$z=\pm\frac{\pi}{2}$（2分）

$$原式=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{\cos z},\frac{\pi}{2}]+\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{\cos z},-\frac{\pi}{2}]\}\ \underline{\underline{(4分)}}\ 2\pi i\{-1+1\}=0$$ （5分）

2．$$e^{\frac{2}{z+1}}=1+\frac{2}{z+1}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{z+1})^2+\cdots\cdots$$

$$原式=\oint_{|z|=\pi}e^{\frac{2}{z+1}}dz+\oint_{|z|=\pi}\frac{-1}{z+1}e^{\frac{2}{z+1}}dz \quad =2\pi i\{2-1\}=2\pi i$$

3．$$原式=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}\ \underline{\underline{t=2x}}\int_0^{\pi}\frac{dt}{3-\cos t}$$ （1分）

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{3-\cos t}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{dt}{3-\cos t}\quad（3 分）\quad =i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-6z+1}$$

$f(z)=\dfrac{1}{z^2-6z+1}$ 在 $|z|=1$ 内有一阶极点 $z_0=3-\sqrt{8}$ （4 分）

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(z^2-6z+1)'}=\frac{-1}{4\sqrt{2}}$$

故原式 $=i\cdot 2\pi i\cdot\dfrac{-1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$ （5 分）

4．$z=2i$ 为 $f(z)=\dfrac{x^2}{(x^2+4)^2}$ 在上半平面的二级极点， （1 分）

原式$=2\pi i\,\mathrm{Res}[\dfrac{z^2}{(z^2+4)^2},2i]=$（3 分）

$$=2\pi i\lim_{z\to 2i}[\frac{z^2}{(z+2i)^2}]'=2\pi i\cdot(-\frac{i}{8})=\frac{\pi}{4}\quad（5 分）$$

5．函数 $f(z)=\dfrac{e^{ibz}}{z^2+a^2}$ 在上半平面有一级极点 $z=ai$ （1 分）

$$\mathrm{Res}[f(z),ai]=\lim_{z\to ai}\frac{e^{ibz}}{z+ai}=\frac{e^{-ab}}{2ai}\quad（2 分）$$

原式 $=\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),ai]=\dfrac{\pi}{2a}e^{-ab}$ （3 分）

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2a} e^{-at} & t > 0 \\ \dfrac{\pi}{2a} & t = 0 \\ \dfrac{\pi}{2a} e^{at} & t < 0 \end{cases}$$

四、$f(z)$在复平面内有两个孤立奇点$z = \pm i$ （2 分）

$f(z)$ 在 $0 < |z - i| < 2$ 与 $2 < |z - i| < +\infty$ 内解析 （3 分）

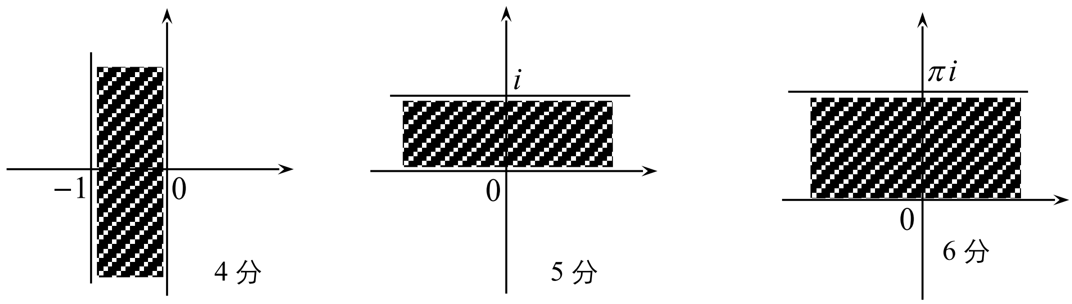
当$0 < z\,|z - i| < 2$时，$f(z) = \dfrac{1}{z - i} \cdot \dfrac{1}{z + i} = \dfrac{1}{z - i} \cdot \dfrac{1}{2i + z - i} =$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z - i} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{z - i}{2i}} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{z - i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z - i}{2i}\right)^n \overset{(7\text{分})}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1} (z - i)^{n-1}$$ （8 分）

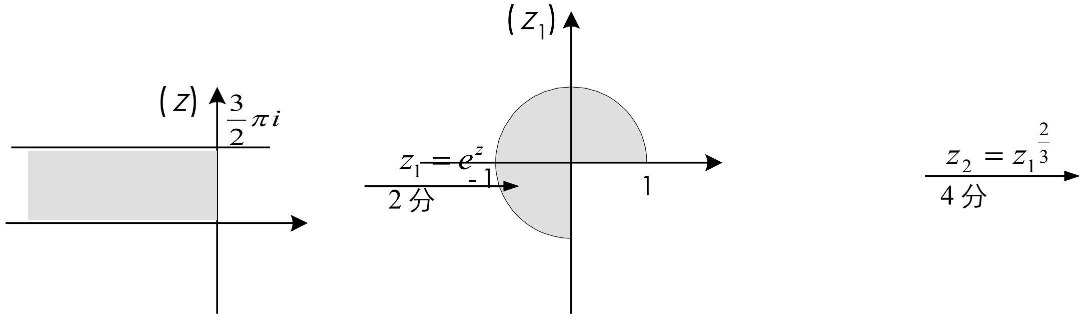
当 $2 < |z - i| < +\infty$，$f(z) = \dfrac{1}{z - i} \cdot \dfrac{1}{2i + z - i} = \dfrac{1}{(z - i)^2}\,\dfrac{1}{1 + \dfrac{2i}{z - i}} =$ （9 分）

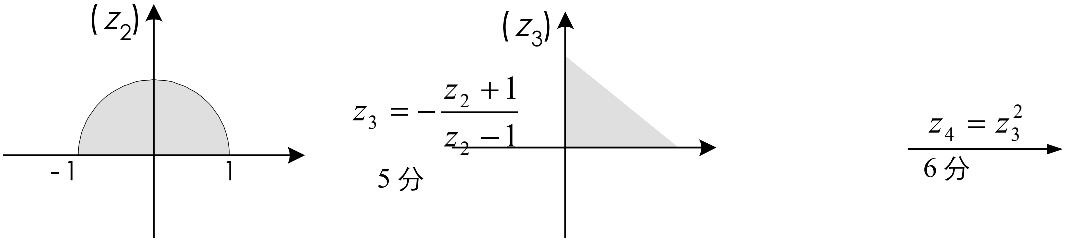
$$= \frac{1}{(z - i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2i}{z - i}\right)^n =$$ （11 分） $$= \sum_{n=0}^{\infty} (-2i)^n \left(\frac{1}{z - i}\right)^{n+2}$$ （12 分）

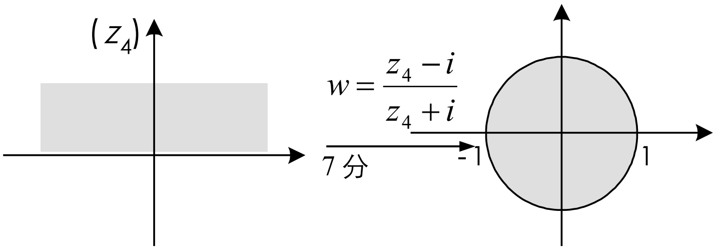
五、



六、







$$w = \frac{\left(\dfrac{(e^z)^{\frac{2}{3}}+1}{(e^z)^{\frac{2}{3}}-1}\right)^2 - i}{\left(\dfrac{(e^z)^{\frac{2}{3}}+1}{(e^z)^{\frac{2}{3}}-1}\right)^2 + i} \quad 8\text{ 分}$$

七、设 $\mathcal{L}=[y(t)]=Y(s)$ 对方程取拉氏变换

$$s^3Y(s)+sY(s)=\frac{1}{s-2} \quad （3\text{ 分}），\quad Y(s)=\frac{1}{s(s^2+1)(s-2)} \quad （4\text{ 分}）$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)(s-2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{10}}{s-2}+\frac{\frac{2}{5}s-\frac{1}{5}}{s^2+1}\right] \quad （6\text{ 分}）$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t \quad （8\text{ 分}）$$

八、1．证明：$f(z)$ 在 $|z-z_0|=r$ 内有二阶极点 z_0

因此 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^2}g(z)$，$g(z)$ 在 $|z-z_0|=r$ 内解析无零点　　　　（1 分）

$g'(z)$ 亦在 $|z-z_0|=r$ 内解析　　（2 分）

则 $\oint_{|z-z_0|=r}\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz=\oint_{|z-z_0|=r}\dfrac{g'(z)(z-z_0)-2g(z)}{(z-z_0)^3}\cdot\dfrac{(z-z_0)^2}{g(z)}dz$

$=\oint_{|z-z_0|=r}\left(\dfrac{g'(z)}{g(z)}-\dfrac{2}{z-z_0}\right)dz=\oint_{|z-z_0|=r}\left(-\dfrac{2}{z-z_0}\right)dz=$

$=-2\cdot 2\pi i=-4\pi i$　　　　（4 分）

2．$\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}dz=2\pi i\, e^z\,|_{z=0}=2\pi i$　　　　（1 分）

$\because I=\int_0^{2\pi}e^{\cos\vartheta}[\cos(\sin\vartheta)+i\sin(\sin\vartheta)]d\vartheta=$

$=\int_0^{2\pi}e^{\cos\vartheta}\cdot e^{i\sin\vartheta}d\vartheta=\int_0^{2\pi}e^{\cos\vartheta+i\sin\vartheta}d\vartheta$

令 $z=e^{i\vartheta}$，$d\vartheta=\dfrac{1}{iz}dz$　　　　$\therefore I=\oint_{|z|}e^z\cdot\dfrac{1}{iz}dz=2\pi$

而 $\int_0^{\pi}e^{\cos\vartheta}\cos(\sin\vartheta)d\vartheta=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\,I=\pi$　　（3 分）