练 习 三

1．用导数定义，求 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 的导数。

解：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)\operatorname{Re}(z+\Delta z)-z\operatorname{Re}z}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\operatorname{Re}\Delta z+\Delta z\operatorname{Re}z+\Delta z\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(\operatorname{Re}z+\operatorname{Re}\Delta z+z\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z})$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}(\operatorname{Re}z+\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z})=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\operatorname{Re}z+z\cdot\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y})$$

当 $z\neq 0$ 时，导数不存在，
当 $z=0$ 时，导数为 0。

2．下列函数在何处可导？何处不可导？何处解析？何处不解析？

（1） $f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}$

解：$f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{z}{|z|^2}=\dfrac{x}{x^2+iy}+i\dfrac{y}{x^2+y^2}=u(x,y)+iv(x,y)$

$$u_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad u_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\qquad v_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

当且仅当 $x=y$ 时， $f(z)$ 满足 $C-R$ 条件，故当 $x=y$ 时 $f(z)$ 可导，但在复平面不解析。

（2） $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

解：令 $f(z)=u(x,y)+iv(xy)$

则 $\begin{array}{ll} u_x=3x^2-3y^2 & v_x=-6xy \\ u_y=6xy & v_y=3x^2-3y^2 \end{array}$

因 $f(z)$ 在复平面上处处满足 $C-R$ 条件，且偏导数连续，故 $f(z)$ 可导且解析。

3．设 $my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，试确定 l,m,n 的值。

解：由 $C-R$ 条件可知： $2nxy=2lxy$ 　　所以 $n=l$

又 $3my^2+nx^2=-3x^2-ly^2$ 所以 $3m=-l,$且$n=-3$

即 $\begin{cases} m=1 \\ n=l=-3 \end{cases}$

4.设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，试证明在 D 内下列条件是彼此等价的。

（1） $f(z)$=常数； （2） $f'(z)=0$； （3） $\operatorname{Re} f(z)=$常数

（2） $\operatorname{Im} f(z)=$常数； （5） $\overline{f(z)}$解析； （6） $\left|f(z)\right|=$常数。

证:由于 $f(z)$ 在且域 D 内解析，则可得 $C-R$ 方程成立，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{且} \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

1）→2）由 $f(z)\equiv c$ 则 $f'(z)=c'=0$ 在 D 内成立，故（2）显然成立，

2）→3）由 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0 \Rightarrow u(x,y)$ 是常数

即 $\operatorname{Re} f(z)=$常数

3）→4） $u\equiv$常数$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 由 $C-R$ 条件 $\left.\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow v(x,y)$ 是常数

$\Rightarrow \operatorname{Im} f(z)=$常数

4）→5）若 $\operatorname{Im} f(z)=c, f(z)=u+ic, \overline{f(z)}=u-ic_1,$ 因 $f(z)$ 在 D 内解析

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial c}{\partial x}=0$$

即 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-c)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-c)}{\partial x}$

一阶偏导连续且满足 $C-R$ 条件 $\Rightarrow \overline{f(z)}$ 在 D 内解析

5）→6） $f(z)=u+iv, g(z)=\overline{f(z)}=u-iv$ 因 $g(z)$ 解析，则由 $C-R$ 条件

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，对 $f(z)$ 在 D 内解析，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\left.\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0\Rightarrow v\text{为常数}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0\Rightarrow v\text{为常数}\end{cases}\right\}\Rightarrow|f(z)|\text{ 为常数}$$

6）→1） $|f(z)|=$ 常数 $\Rightarrow|f(z)|^2=$ 常数，令 $u^2+v^2=c$

分别对 x,y 求偏导数得

$$\begin{cases}u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ (u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

若 $u^2+v^2=0$ 则 $u=v=0, f(z)=0$，因而得证

若 $u^2+v^2\neq 0$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0$，故 $u=$ 常数，由 $C-R$ 条件 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\Rightarrow v$ 为常数

$$\Rightarrow f(z)=\text{常数}$$

*5.思考题：

（1）复变函数 $f(z)$ 在一点 z_0 可导与在 z_0 解析有什么区别？

答：$f(z)$ 在 z_0 解析则必在 z_0 可导，反之不对。这是因为 $f(z)$ 在 z_0 解析，不但要求 $f(z)$ 在 z_0 可导，而且要求 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内可导，因此，$f(z)$ 在 z_0 解析比 $f(z)$ 在 z_0 可导的要求高得多，如 $f(z)=|z|^2$ 在 $z_0=0$ 处可导，但在 $z_0=0$ 处不解析。

（2）函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析与 $f(z)$ 在区域 D 内可导有无区别?

答：无，（两者等价）。

（3）用 $C-R$ 条件判断 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析时应注意些什么?

答：$u(x,y),v(x,y)$ 是否可微。

（4）判断复变函数的可导性或解析性一般有哪些方法。

答：一是定义。

二是充要条件。

三是可导（解析）函数的和、差、积、商与复合仍可导（解析）函数