§8.2 单位冲激函数

一、为什么要引入单位冲激函数

二、单位冲激函数的概念及性质

三、单位冲激函数的 Fourier 变换

四、周期函数的 Fourier 变换

一、为什么要引入单位冲激函数

理由 (1) 在数学、物理学以及工程技术中，一些常用的重要函数，如常数函数、线性函数、符号函数以及单位阶跃函数等等，都不能进行 Fourier 变换。

(2) 周期函数的 Fourier 级数与非周期函数的 Fourier 变换都是用来对信号进行频谱分析的，它们之间能否统一起来。

(3) 在工程实际问题中，有许多瞬时物理量不能用通常的函数形式来描述，如冲击力、脉冲电压、质点的质量等等。

一、为什么要引入单位冲激函数

引例

P192 例8.5

- 长度为 a，质量为 m 的均匀细杆放在 x 轴的 $[0, a]$ 区间上，则它的线密度函数为

$$P_a(x)=\begin{cases} m/a, & 0\le x\le a, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

- 质量为 m 的质点放置在坐标原点，则可认为它相当于细杆取 $a\to 0$ 的结果。相应地，质点的密度函数为

$$P(x)=\lim_{a\to 0}P_a(x)=\begin{cases} \infty, & x=0, \\ 0, & x\neq 0. \end{cases}$$

- 显然，该密度函数并没有反映出质点的任何质量信息

还必须在此基础上附加一个条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)\,\mathrm{d}\,x=m.$

二、单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念

定义 单位冲激函数 $\delta(t)$ 满足：

P193

(1) 当 $t \neq 0$ 时 $\delta(t) = 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

- 单位冲激函数 $\delta(t)$ 又称为 Dirac- 函数或者 δ 函数。
- 显然，借助单位冲激函数，前面引例中质点的密度函数

就可表示为 $P(x) = m\delta(x)$.

二、单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念

注 (1) 单位冲激函数 $\delta(t)$ 并不是经典意义下的函数，而是一个广义函数（或者奇异函数），它不能用通常意义下的“值的对应关系”来理解和使用，而总是通过它的性质来使用它。

(2) 单位冲激函数有多种定义方式，前面给出的定义方式是由 Dirac（狄拉克）给出的。

单位冲激函数其它定义方式

二、单位冲激函数的概念及性质

2. 单位冲激函数的性质

性质 (1) 筛选性质

P193 性质 8.1

设函数 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数，

且在 $t=0$ 处连续，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$.

一般地，若 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 点连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t_0).$$

P194 性质 8.2

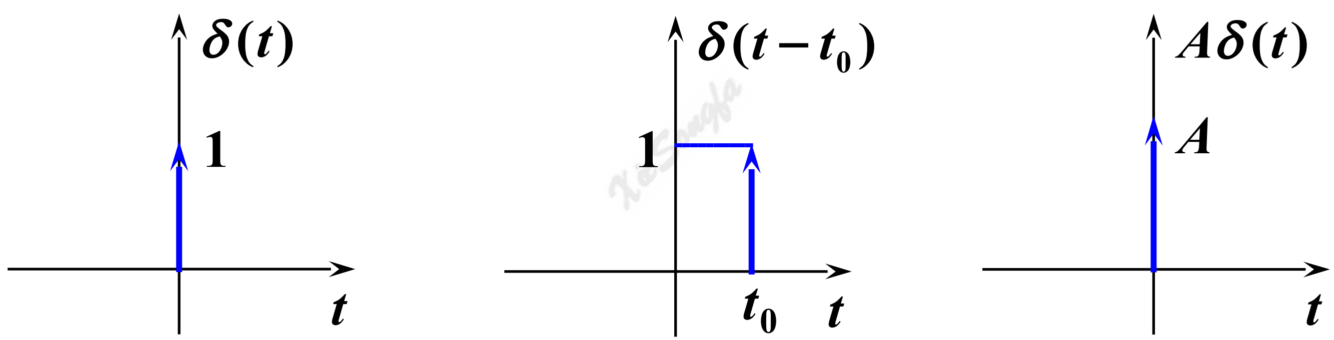
(2) 对称性质

δ 函数为偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$.

二、单位冲激函数的概念及性质

3. 单位冲激函数的图形表示

- δ 函数的图形表示方式非常特别，通常采用一个从原点出发长度为 1 的有向线段来表示，其中有向线段的长度代表δ 函数的积分值称为冲激强度。
- 同样有，函数 $A\delta(t)$ 的冲激强度为 A。

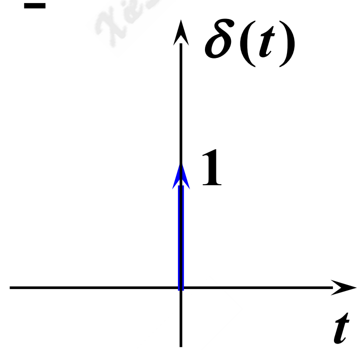


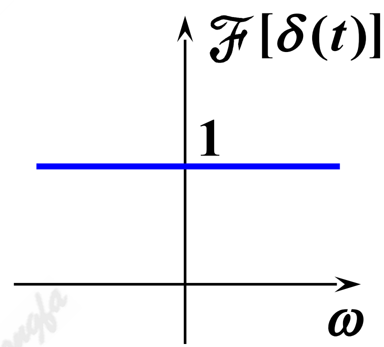
三、单位冲激函数的 Fourier 变换

- 利用筛选性质，可得出 δ 函数的 Fourier 变换 P194

$$\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{t=0}=1.$$

即 $\delta(t)$ 与 1 构成 Fourier 变换对 $\delta(t)\longleftrightarrow 1.$





- 由此可见，单位冲激函数包含所有频率成份，且它们具有相等的幅度，称此为均匀频谱或白色频谱。

三、单位冲激函数的 Fourier 变换

- 按照 Fourier 逆变换公式有

$$\mathscr{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\delta(t).$$

- 重要公式 $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega=2\pi\,\delta(t).}$

注 在 δ 函数的 Fourier 变换中，其广义积分是根据 δ 函数的性质直接给出的，而不是通过通常的积分方式得出来的，称这种方式的 Fourier 变换是一种广义的 Fourier 变换。

例 分别求函数 $f_1(t)=1$ 与 $f_2(t)=t$ 的 Fourier 变换。

P195 例 8.7 修改

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-j\omega t}\,dt$

$$=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega).$$

(2) 将等式 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}\,dt=2\pi\delta(\omega)$ 的两边对 求导，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-jt)e^{-j\omega t}\,dt=2\pi\delta'(\omega),$$

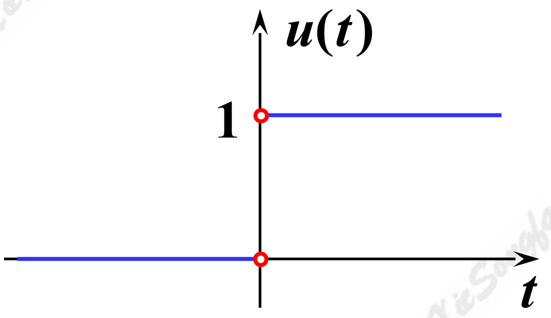
$$\Rightarrow\ \int_{-\infty}^{+\infty}t\,e^{-j\omega t}\,dt=2\pi j\,\delta'(\omega),$$

即得 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]=2\pi j\,\delta'(\omega).$

例 求函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 的 Fourier 变换 $U(\omega)$。

P195 例 8.8 修改

解 已知 $\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]=\dfrac{2}{j\omega}$,



$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega),$$

又 $u(t)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{sgn} t+1)$,

得 $U(\omega)=\dfrac{1}{2}\left(\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]+\mathscr{F}[1]\right)=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega).$

注 称 $u(t)$ 为单位阶跃函数，也称为 Heaviside 函数，它是工程技术中最常用的函数之一。

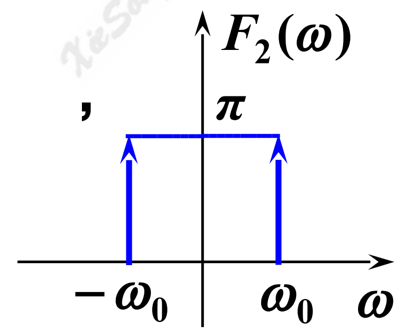
例 分别求函数 $f_2(t)=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$ 与 $f_2(t)=\cos\omega_0 t$ 的 Fourier 变换。

P195 例 8.7 部分　　P196 例 8.9

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)t}\,\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega_0-\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

(2) 由 $\cos\omega_0 t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$,



有 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$

$$=\frac{1}{2}(\mathscr{F}[\mathrm{e}^{j\omega_0 t}]+\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}])$$

$$=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0).$$

四、周期函数的 Fourier 变换

定理 设 $f(z)$ 以 T 为周期，在 $[0,T]$ 上满足 Dirichlet 条件，则 $f(z)$ 的 Fourier 变换为

P196 定理 8.3

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0).$$

其中，$\omega_0=2\pi/T$，$F(n\omega_0)$ 是 $f(z)$ 的离散频谱。

证明 由 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$ 有

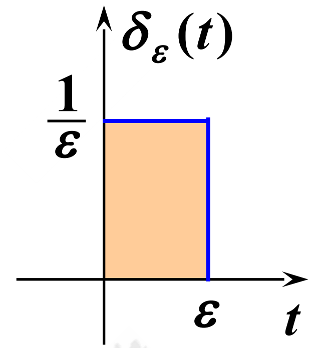
$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{-jn\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0).$$

休息一下 ……

附：单位冲激函数的其它定义方式

方式一 令 $\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}1/\varepsilon, & 0\le t\le\varepsilon,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$



则 $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)$.

方式二 (20 世纪 50 年代， Schwarz)

单位冲激函数 $\delta(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\varphi(0)$,

其中, $\varphi(t)\in C^\infty$ 称为检验函数。