Vol. 23 No. 4 Dec. 2006

文章编号:1000-4939(2006)04-0604-05

单向纤维增强复合材料中剪切波 多重散射问题的复变函数法

房学谦 胡 超 黄文虎

(哈尔滨工业大学 哈尔滨 150001)

摘要:基于弹性波的多体散射理论和复变函数方法,利用波函数展开法和保角映射方法,研究了任意形纤维增强复合材料中剪切波的传播。根据相应的边界条件确定弹性波模式系数。给出了复合材料中基体区和纤维核区的波场。作为算例,分析了相同入射频率,不同纤维核的尺寸和形状的情况下,弹性波的传播特性。通过分析发现,低频长波区,弹性波以近似正弦函数的形式传播,纤维核的尺寸和形状对波场影响不明显;随着频率的增加,影响变得明显,大于一定的频率,纤维核的形状可明显地辨别出。最后对结果进行了分析讨论。

关键词:弹性波多重散射;纤维增强复合材料;非圆纤维核;复变函数方法

中图分类号: 0347. 4 + 1; V214. 8 文献标识码: A

1 引言

复合材料在航空航天和土木工程中广泛采用, 因此,复合材料结构中的弹性波传播与振动问题一 直受到关注[12]。目前,国内外有很多专家和学者 从事复合材料结构振动和弹性波传播问题的研究。

Datta 等(1991) 采用有限元与本征函数展开法,研究了圆柱纤维核复合材料的波导问题,并刻画了材料界层的性质^[3]。Nacir 等(1994) 采用均一化方法,对规则周期纤维核复合材料中的弹性波传播问题进行了研究。R.B. Yang 和 A. K. Mal (1996) 等对纤维增强复合材料结构中弹性波的多重散射问题进行了研究,通过采用均匀化和统计平均化技术,给出了与频率相关的相速度和相干波衰减的计算方法^[4]。Cai 和 Williams (1999) 等基于散射体求和法,对单向复合材料中大尺寸体的散射进行了研究,并给出了问题的解析解^[5-6]。S. K. Kanaun 等(2004) 应用有效介质法,分析了剪切波在圆柱形纤

维复合材料中的传播问题,给出了问题的数值解[7-8]。S. Biwa 和 S. Yamamoto等(2004)利用本征函数展开法,分析了复合材料中圆柱形纤维核对剪切波的散射问题,并对材料中的波场进行了求解[9]。

可以看到,直到目前人们研究的主要是圆柱形纤维核的散射问题,实际结构中非圆柱形纤维核更为常见,汪越胜和王铎曾利用波函数展开法和奇异积分方程技术研究了SH型反平面剪切波作用下埋藏单个椭圆柱与周围介质部分脱胶时的动力特性^[10]。复变函数方法是分析求解任意形夹杂问题的有效方法,刘殿魁等曾采用复变函数方法对任意形孔洞的散射问题进行了研究,并给出了问题的一般解和数值结果^[11]。

单向周期性复合材料是最基本、最常见的复合材料。本文将基于弹性波理论和复变函数方法,对单向复合材料中多个椭圆形纤维核的波散射问题进行分析研究,给出复合材料中波场的一般表达式,并对各种影响因素进行分析讨论。

^{*} 基金项目:国家自然科学基金资助(10572045) 来稿日期:2005-07-11 修回日期:2006-03-14 第一作者简介:房学谦、男、1975 年生、哈尔滨工业大学航天学院博士生;研究方向:结构中的弹性波与振动、E-mail:fangxueqian @163、com

2 波动方程及其求解

如图 1 所示,平面剪切波沿 x 正方向入射到复合材料中。基体为各向同性,其密度为 μ_1 ,剪切模量为 μ_2 。忽略体力时的稳态波动方程为

 $\nabla^2 W + k^2 W = 0$, k = /c, (=1,2) (1) 式中: 为入射波的频率; c 和 k 为各介质区的传播波速和波数, $c = \sqrt{1/c}$ 。

为了采用复变函数方法,现引入复变量 $_{m}$ = x_{m} + i y_{m} 及其共轭变量 $_{m}$ = x_{m} - i y_{m} 来替代实变量 x 和 y ,则有下列变换关系

$$\frac{\partial}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial y_m} = i(\frac{\partial}{\partial m} - \frac{\partial}{\partial m})$$
 (2)

这样,波动方程(1) 转化为以复变量 "和""为变量的方程

$$4\frac{\partial^2 W}{\partial_m \partial_m} + k^2 W = 0 \tag{3}$$

由入射波引起的散射场 $W^{(s)}$ 亦满足波动方程(3) 。

对于第 m 个纤维核,为满足纤维核的非圆边界条件,可采用保角变换方法,映射函数取为

$$m = (m) = c_{m-m} +$$
全纯函数 (4)

其中: $_{m} = r_{m}e^{i_{m}}; r_{m} = / (_{m}) / ; e^{i_{m}} = \frac{(_{m})}{/ (_{m}) / }$ 。

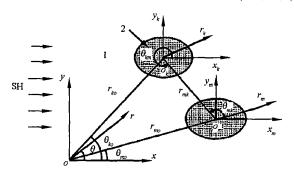


图 1 复合材料中波场入射示意图

基体内的第 m 个纤维核的位移散射场为

$$W_{m}^{(s)} = \sum_{n=-}^{\infty} B_{n}^{m} H_{n}(k_{1} / m /) e^{in_{m}}, (m = 1, 2, 3, ...)$$

式中: B_n^m 是由第m 个纤维核的边界条件决定的弹性 波模式系数; $H_n(\cdot)$ 为n 阶第一类 Hankel 函数。

复合材料基体区内的总位移场可描述为

$$W_1 = W^{(i)} + \sum_{m=1}^{N} W_{1m}^{(s)}$$
 (6)

不失一般性,入射波的振幅取为单位 1。略去时间因子后,基体区的入射场在整体坐标系中为

$$W^{(i)} = \exp(i k_1 x)$$

 $= \exp(i k_1 r \cos x)$
 $= \exp(i k_1 r \cos x) \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(k_1 / m / x) e^{i n / m}$,
 $(m = 1, 2, ...N)$ (7)
其中: $J_n(x)$ 为 n 阶第一类 Bessel 函数; r_{mo} 和 m_{o} 的

复合材料第 m 个纤维核周围的激发场[9]

$$W_{m}^{(e)} = W_{k}^{(i)} + \sum_{k=1}^{N} W_{k}^{(s)}$$

$$= \sum_{n=-}^{N} A_{n}^{m} J_{n}(k_{1} / m /) \exp(i n / m)$$
(8)

式中 A" 为假想入射波模式展开系数。

含义如图 1 所示。

同理,第m个纤维核内的折射场可描述为

$$W_{2m}^{(r)} = \sum_{m} C_n^m J_n(k_2 / m /) e^{in_m}$$
 (9)

3 边界条件及模式系数的确定

对于反平面剪切波而言,在 m 平面上,当 $m=e^{i_m}$ 时,边界条件的表达式为

$$W_{1m}^{(e)+(s)} / _{m} = (_{m}) = W_{2m}^{(r)} / _{m} = (_{m})$$

$$\mu_{1} (_{m} \frac{\partial W_{1m}^{(e)+(s)}}{\partial _{m}} + - \frac{\partial W_{1m}^{(e)+(s)}}{\partial _{m}}) / _{m} = (_{m})$$

$$= \mu_{2} (_{m} \frac{\partial W_{2m}^{(r)}}{\partial _{m}} + - \frac{\partial W_{2m}^{(r)}}{\partial _{m}}) / _{m} = (_{m})$$

$$(10)$$

式中:1表示基体区:2表示纤维核区。

将式(5)、式(8) 和式(9) 代入式(10) 和式(11) 中,可得关系式

$$B_n^m = T_n A_n^m \tag{12}$$

$$C_n^m = S_n A_n^m \tag{13}$$

其中

$$T_{n} = [\mu_{1} k_{1} J_{n}(k_{1} / (m) /) J_{n}(k_{2} / (m) /); - \mu_{2} k_{2} J_{n}(k_{1} / (m) /) J_{n}(k_{2} / (m) /)] / [\mu_{2} k_{2} H_{n}(k_{1} / (m) /) J_{n}(k_{2} / (m) /) - \mu_{1} k_{1} H_{n}(k_{1} / (m) /) J_{n}(k_{2} / (m) /)],$$

$$S_{n} = \frac{J_{n}(k_{1} / (m) /) + T_{n} H_{n}(k_{1} / (m) /)}{J_{n}(k_{2} / (m) /)}$$

() 表示对 Bessel 或 Hankel 函数的相应变量求导。 将式(7) 和(12) 代入式(8) 中,可得

$$\sum_{n=-}^{\infty} A_{n}^{m} J_{n}(k_{1} / m /) \exp(i n_{m})$$

$$= \exp(i k_{1} r_{mo} \cos m_{o}) \sum_{n=-}^{\infty} i^{n} J_{n}(k_{1} / m /) \exp(i n_{m}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-}^{\infty} T_{n} A_{n}^{k} H_{n}(k_{1} / k /) \exp(i n_{k})$$
(14)

(5)

式(14) 即为关于未知模式系数 $A_n^m (m = 1,2, ..., N; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,)$ 的代数方程组。

将式(14) 两端乘以 exp(- is m), 然后在[-]]上积分,可得到如下表达式

$$A_{s}^{m}J_{s}(k_{1}/m/) = \exp(ik_{1}r_{mo}\cos m_{0})i^{s}J_{s}(k_{1}/m/) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}T_{n}A_{n}^{k}L_{kmns}/r_{m}=1$$
 (15)

其中s的取值为s=0, ± 1 , ± 2 , ...。

$$L_{kmns} = \begin{cases} \frac{1}{2} & H_n(k_1 / k/) \exp(in k) \\ & \exp(-is m) d_m, (k m) \end{cases}$$

$$H_n(k_1 / m/) = (16)$$

式中 " 为 Kronecker Delta 函数。

对于式(16) 中 k m 的情况,利用 Hankel 函数的加法定理,可得如下表达式

$$L_{kmns} = \frac{1}{2}$$
 { $\sum_{u=-}^{\infty} H_{u-n}(k_1 r_{mk}) J_u(k_1 r_m)$ exp[i(n - u) $_{mk}$]exp(iu $_m$)} ×exp(- is $_m$)d $_m = H_{s-n}(k_1 r_{mk}) J_s(k_1 r_m)$ exp[i(n - s) $_{mk}$] (17) 式中: r_{mk} 为第 $_m$ 个和第 $_k$ 个散射体的局部坐标系原点 $_m$ 和 $_n$ $_n$ 间的距离; $_m$ 为局部坐标系原点 $_n$ 和 $_n$ $_n$ 间的连线与坐标轴 $_n$ $_n$ $_n$ 间的夹角,如图 1 所示。因此,式(16) 可表示为

$$L_{kmns} = \begin{cases} H_{s-n}(k_1 r_{mk}) J_s(k_1 / m /) \\ \exp[i(n-s) m_k], & (k m) \\ H_n(k_1 / m /) m_s, & (k = m) \end{cases}$$
(18)

将式(18) 代入式(16) 中,整理后可得如下形式 $iiX_i = i$ (19)

式中符号 $_{ij}$ 是一个系数矩阵,其阶数与纤维核数目和 $_{n}$ 的取值有关。通过求解线性方程组 $_{(19)}$,便可获得模式系数 $_{n}$ $_{ij}$ 。

4 数值算例

在复合材料研究中,可利用弹性波在传播方向上波形等动态特性的变化,例如幅值的衰减、波速的增加和减少等,对材料中的物理参数或几何参数进行定性和定量估计。本文分析的材料为单向周期性复合材料,如图 2 所示,材料中的纤维核横向呈周期分布。选择基本块,尺寸可设为 $L \times H$,以保证其在横向周期分布,基本块内包含 N 个纤维核。在 N 和方向上重复这些基本块便构成复合材料结构。这种情况下,整个复合材料中的波场就是在 N 轴方向上周期为 N 的周期波。这样,基本块中任一纤维核的激

发场就与其余块中相对应纤维核的激发场相同。

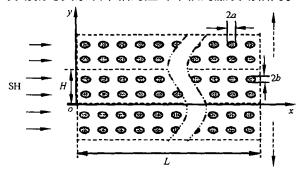


图 2 周期复合材料的基本块

当方程(14) 应用到整个复合材料中时,并考虑 到周期性,整个复合材料中的方程可简化为

$$\sum_{n=-}^{\infty} A_{n}^{m} J_{n}(k_{1} / m /) \exp(in_{m})$$

$$= \exp(ik_{1} r_{mo} \cos_{mo}) \sum_{n=-}^{\infty} i^{n} J_{n}(k_{1} / m /) \cdot \exp(in_{m}) + \sum_{p=-}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \ n=-}}^{\infty} T_{n} A_{n}^{k} \cdot H_{n}(k_{1} / k_{p} /) \exp(in_{kp}) + \sum_{p=-}^{\infty} \sum_{n=-}^{\infty} T_{n} A_{n}^{m} H_{n}(k_{1} / m_{p} /) \exp(in_{mp})$$
(20)

式(20) 右端第一项是基本块中第 m 个纤维核周围的入射场;第二项是全部 $p(p=0,\pm 1,\pm 2...)$ 个块中的所有 k(k=1,2,3...;k-m) 个纤维核对基本块中第 m 个纤维核的产生的散射总场,第三项是全部 $p(p=\pm 1,\pm 2...)$ 个块中与基本块中第 m 个纤维核对应的纤维核对基本块中第 m 个纤维核的产生的散射总场; A_{m}^{m} 为基本块中 m 个纤维核的模式系数;p 为在 p 轴方向上基本块的数目。

利用正交函数展开法和 Hankel 函数的加法定理,根据方程(20) 可得

$$A_{s}^{m}J_{s}(k_{1}/m/) = \exp(ik_{1} r_{mo}\cos m_{o})i^{s}J_{s}(k_{1}/m/) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} T_{n}A_{n}^{k}L_{kpmns}/r_{m} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{n}A_{n}^{m}L_{pmns}/r_{m} = 1$$
(21)

通过整理化简,求解代数方程组(21),可求得模式系数 A_{ii}^{m} 。

这样,基体内的总弹性波场为

$$u(r) = \exp(i k_1 x) + \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=-}^{\infty} T_n A_n^m \cdot \sum_{m=1}^{\infty} H_n(k_1 / m_p /) \exp(i n m_p)$$
(22)

第 m 个纤维核区内的折射场为

$$u_m^{(r)}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n A_n^m J_n(k_2 / m /) \exp(i n m)$$
 (23)

以常见的复合材料为例进行分析,材料的组成 为:金属钛(Ti 合金) 为基体,碳化硅(SiC) 为纤维 核;基体的密度为 $I = 5400 \text{kg/m}^3$,剪切模量 $\mu_{I} =$ $45 \, \text{GPa}$;纤维核的密度 $_2 = 3200 \, \text{kg/m}^3$,剪切模量 μ_2 $= 177 \, \text{GPa}_{2}$

以下分析横向周期性复合材料中基本块内的波 场。基本块的尺度为 $L \times H$,如图2所示。纤维核呈规 则分布, x 方向上有80个纤维核, y 方向上有2个纤 维核。通过改变纤维核的间距和基本块的尺寸,可得 到基本块中纤维核的不同体积比。计算时基本块的 几何尺度取 $H = 0.5 \, \text{mm}, L = 20 \, \text{mm},$ 复合材料的 纤维核体积比取为 $\phi = 0.25$, 此时两纤维核中心的 距离为 0.25mm。

作为算例,本文将研究的纤维核分别为圆形和 椭圆形两种情况。映射函数可取为 " = (") = $c_m(m + g_m/m)$, $\not\equiv c_m = (a_m + b_m)/2$, $g_m = (a_m - b_m)/2$ b_m)/($a_m + b_m$)。具体计算时,复合材料中各纤维核的 尺寸取相同值。

取不同的 a_m 和 b_m 值, 根据方程 (22) 和方程 (23),即可求得整个复合材料介质中的弹性波场。根 据编程计算,发现方程(22)和方程(23)具有收敛 性,为了满足精度要求,n和p的取值与弹性波的入 射频率 有关。当 = $1 \sim 4M \text{ Hz}$ 时, n 取 $2 \sim 3$, p取 100 ~ 200 即可满足精度要求;而在 8MHz时, n和 p 分别取 3 ~ 5 和 200 ~ 400。

图 3(a) ~ 图 3(d) 表示在不同的频率下,不同 尺寸纤维核时,基本块中波的传播特性,其中 Re/u/ 代表实际的波场。图 3(a) 是在 = 1M Hz 附近整个 基本块上的波形图:图 3(b) 是在 = 4MHz 附近 L/4 基本块上的波形图:图 3(c) 是在 = 6M Hz 附 近 L/5 基本块上的波形图;图 3(d) 是在 = 8M Hz 附近 L/10 基本块上的波形图。

由图 3(a) 很容易看出,在低频长波区,纤维核的 尺寸和形状对波场的影响很小,形状近似正弦函数。 由图 3(b) 可以看出,频率为 = 4MHz 时,由干纤维 核比基体硬,波形在纤维核的位置附近有较大的波 动,不再是正弦函数的形式,根据波场可辨别出纤维 核的位置和形状,圆形纤维核附近的波动较椭圆形平 缓,当纤维核的长半轴与波的入射方向垂直时对波场 的影响较纤维核长半轴与入射方向平行时大。由图 3(c) 可以看出在 = 6MHz 时,此时的波场在纤维核

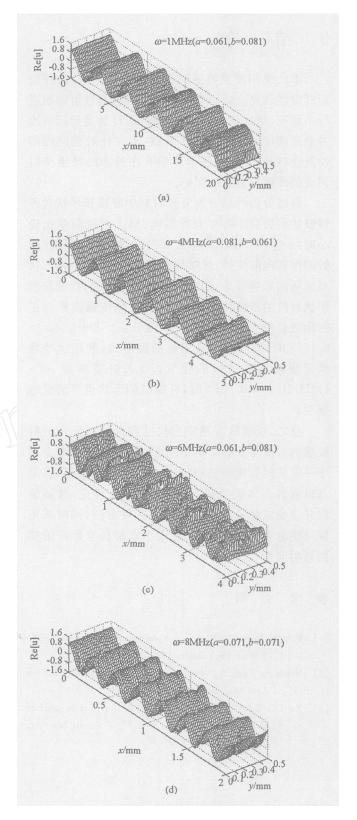


图 3 复合材料中的波场

位置附近的波动较 = 4MHz 时波动大,而且已变得 更加复杂。图 3(d) 为 = 8M Hz, a = 0.071, b = 0.071时复合材料中的波场,可以看出此时在基体区也有了 很大的波动,波场已变得极为复杂。

5 结 论

本文采用波函数展开和保角映射方法,对任意 形纤维增强复合材料中的弹性波传播与散射问题进 行了研究,给出了问题的一般解。通过满足给定的边 界条件确定了弹性波模式系数。本文针对横向周期 性复合材料,分析了基本块中有序分布的纤维核对 弹性波传播与散射的影响。

通过分析可以看到复合材料中纤维核形状对弹性波的传播特性有很大的影响。当入射波频率比较小时(\cong 1MHz, $k_1\tilde{a}\cong$ 0.157), 波场以近似正弦函数的形式向前传播,此时纤维核的位置、大小和形状对波场的影响较小; 随着入射波频率增加,纤维核的形状对波的传播特性影响增大, 波场传播波形与正弦函数有较大的偏离; 当入射频率 > 3MHz($k_1\tilde{a}$ > 0.471)时, 波形不再是正弦函数形式, 利用这些现象可辨别出纤维核的位置; 当入射波频率 > 4MHz($k_1\tilde{a}$ > 0.628)时,纤维核的形状也可清楚地辨别。

总之,长波区纤维核的尺寸和形状对复合材料波场的传播与散射影响不明显,而当入射频率 大于一定值时影响明显增加,愈大影响愈明显,这是与以前的多体散射理论相吻合的⁽¹⁵⁾。可见,波函数展开法是求解弹性波动问题的有效方法,同时采用保角映射方法,该方法就可用于求解任意形纤维核的散射问题。

参考文献

- [1] Yang Y, Norris A. Shear wave scattering from a debonded fiber[J]. J Mech Phys Solids, 1991, 39 (2):27-294.
- [2] Norris A, Yang Y. Dynamic stress on a partially bonded fiber [J]. J Appl Mech, 1991,58 (2): 404-409.
- [3] Xu P C, Datta S K. Characterization of fiber-matrix interface by guided waves: axisymmetric case [J]. J Acoust Soc Am,

- 1991, 89 (6) :2573-2583.
- [4] Yang R B, Mal A K. Elastic waves in a composite containing inhomogeneous fibers[J]. Int J Engng Sci, 1996, 34 (1): 67-79.
- [5] Cai L W, Williams Jr J H. Full-scale simulations of elastic wave scattering in fiber-reinforced composites [J]. Ultrasonics, 1999(b), 37: 463-482.
- [6] Cai L W, Williams Jr J H. NDE via stop band formation in fiber reinforced composites having square fiber arrangements [J]. Ultrasonics, 1999 (c), 37: 483-492.
- [7] Kanaun S K, Levin V M, Sabina F J. Propagation of elastic waves in composites with random set of spherical inclusions (effective medium approach) [J]. Wave Motion, 2004, 40:69-88
- [8] Kanaun S K, Levin F V M. Effective medium method in the problem of axial elastic shear wave propagation through fiber composites[J]. Int J Solids Struct, 2003, 40: 4859-4878.
- [9] Biwa S, Yamamoto S, Kobayashi F, et al. Computational multiple scattering analysis for shear wave propagation in unidirectional composites[J]. Int J Solids Struct, 2004, 41: 435-457
- [10] 汪越胜,王铎.剪切波作用下埋藏刚性椭圆柱与周围介质部分脱胶时的动力分析[J].固体力学学报,1995,16(1):31-40.
- [11] 胡超,刘殿魁. 无限大板开孔弹性波的散射及动应力集中[J]. 力学学报增刊, 1995, 27:125-134.
- [12] Biwa S, Shibata T. Elastic and ultrasonic properties of a unidirectional composite with partially debonded fibres: numerical analysis for longitudinal shear modes[J]. Composites Science and Technology, 2000, 60: 83-93.
- [13] Henderson B K, Maslov K I, Kinra V K. Experimental investigation of acoustic band structures in tetragonal periodic particulate composite structures[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2001, 49: 2369-2383.
- [14] Biwa S, Watanabe Y, Ohno N. Analysis of wave attenuation in unidirectional viscoelastic composites by a differential scheme[J]. Compos Sci Technol, 2003, 63: 237-247.
- [15] Kinra V K, Ker E L. An experimental investigation of pass bands and stop bands in two periodic particulate composites [J]. Int J Solids Struct, 1983, 19: 393-410.
- [16] 鲍亦兴,毛昭宙.弹性波的衍射与动应力集中[M].刘殿魁,苏 先樾 译.科学出版社,1993:72-131.

sibility and efficiency of the proposed method.

Keywords: randomness, fuzziness, importance sampling, fuzzy random failure probability, simulated annealing.

Complex Function Method for Solving Multiple Scattering of Shear Waves in Unidirectional Fiber-reinforced Composites

Fang Xueqian Hu Chao Huang Wenhu

(Department of Aerospace Engineering & Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract Based on the theory of multiple scattering, wave function expansion and conformal mapping are utilized to investigate the propagation of shear waves in arbitrary fiber-reinforced composites, and the expanded mode coefficients are determined according to the corresponding boundary conditions. As an example, the wave field in the matrix and fiber of the arbitrary fiber-reinforced composites are represented, and in the case of the same incident frequency and different size and shape of the fiber, the propagation behaviors of elastic waves in unidirectional fiber-reinforced composites are analyzed. It is revealed that the elastic waves with a sufficiently long wavelength propagate as a sinusoidal plane wave, and are insensitive to the fiber size and arrangement. As the frequency increases, the influence of the size and shape of fibers on the wave field gradually appears. When the frequency gets higher than a certain level, the shape of fibers can be distinguished clearly.

Keywords: multiple scattering of elastic waves, arbitrary fiber-reinforced composites, non-circular fiber, complex function method.

Improved Method for Second-Order Moment Two-Phase Turbulence Model

Zeng Zhuoxiong^{1,2} Yuang Ning² Chen Weiguo² Zhou Lixing¹
(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)¹
(Department of Mechanical Engineering, Nanchang Institute of Aeronautical Technology, Nanchang 330034, China)²

Abstract: The pressure correction equation of particle is established where the correction of particle volumetric fraction in SIMPLEC algorithm is combined. An improved algorithm for second-order moment model in the dense two-phase flow is developed, the influence of particle volumetric fraction is taken into account. Compared the result of this algorithm with that neglecting the effect of particle concentration, it is found that whether the influence of particle volumetric fraction is considered or not, the flow parameters, such as the particle concentration profile and the mean velocity, are affected to a differed extent. The present algorithm leads to a better prediction.

Keywords: $tw\sigma phase\ flow$, second order moment model, numerical simulation.