第六章 共形映射

§6.1 共形映射的概念

- 本章将从几何的角度来研究复变函数，特别是要弄清楚解析函数的几何映射特征。

- 具体地说，z 平面上的曲线或者区域经映射 $f(z)$ 在 w 平面上的象到底发生了什么变化?

- 本小节将首先给出两个指标(即伸缩率与旋转角)来定量地刻画这种变化，然后指出导数的几何意义，最后提出共形映射的概念。

§6.1 共形映射的概念

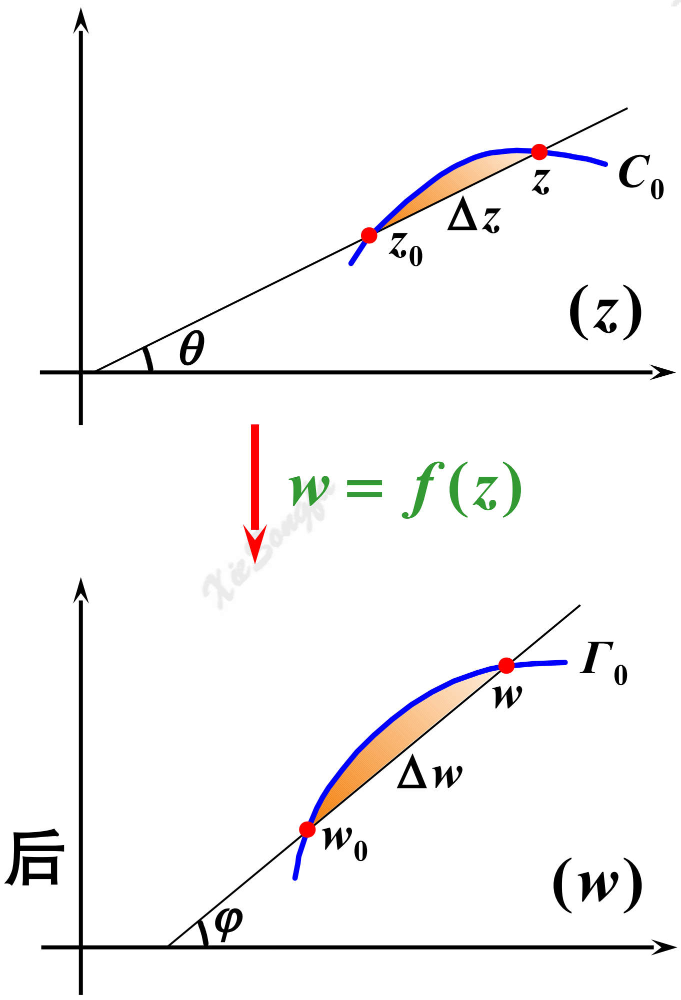
一、伸缩率与旋转角

二、导数的几何意义

三、共形映射

一、伸缩率与旋转角

- 如图，过 z_0 点的曲线 C_0 经 $w = f(z)$ 映射后，变成了过 w_0 点的曲线 Γ_0.
  可以看出，曲线被伸缩和旋转。



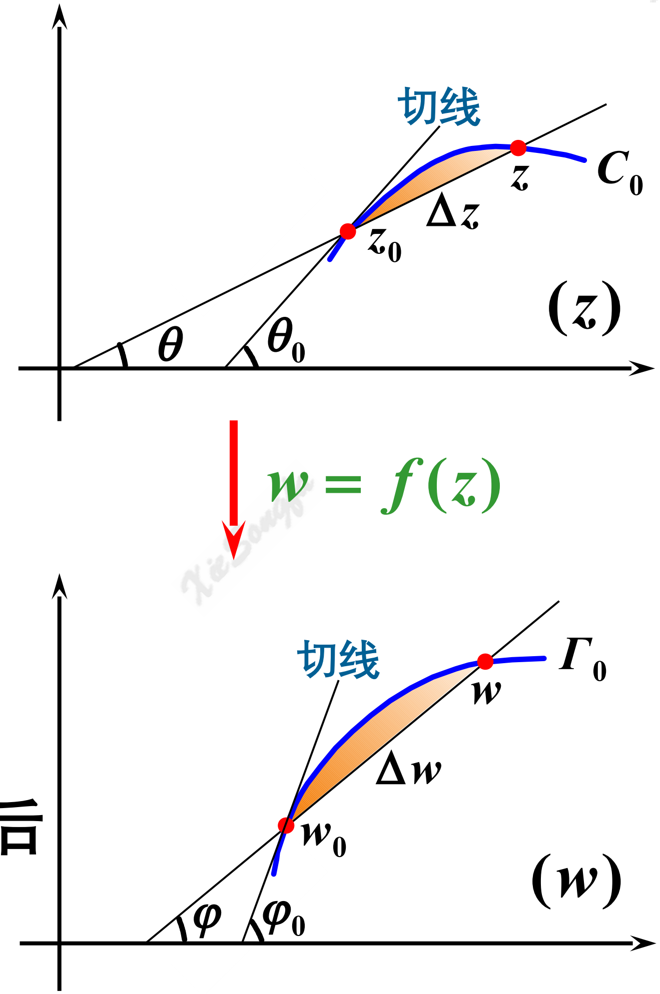
1. 伸缩率

定义 称 $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ C_0}} \dfrac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = \lim\limits_{\substack{\Delta z \to 0 \\ C_0}} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$

为曲线 C_0 经 $w = f(z)$ 映射后在 z_0 点的伸缩率。

一、伸缩率与旋转角

- 如图，过 z_0 点的曲线 C_0 经 $w=f(z)$ 映射后，变成了过 w_0 点的曲线 Γ_0. 可以看出，曲线被伸缩和旋转。



2. 旋转角

定义 称 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ C_0}}(\varphi-\theta)=\varphi_0-\theta_0$

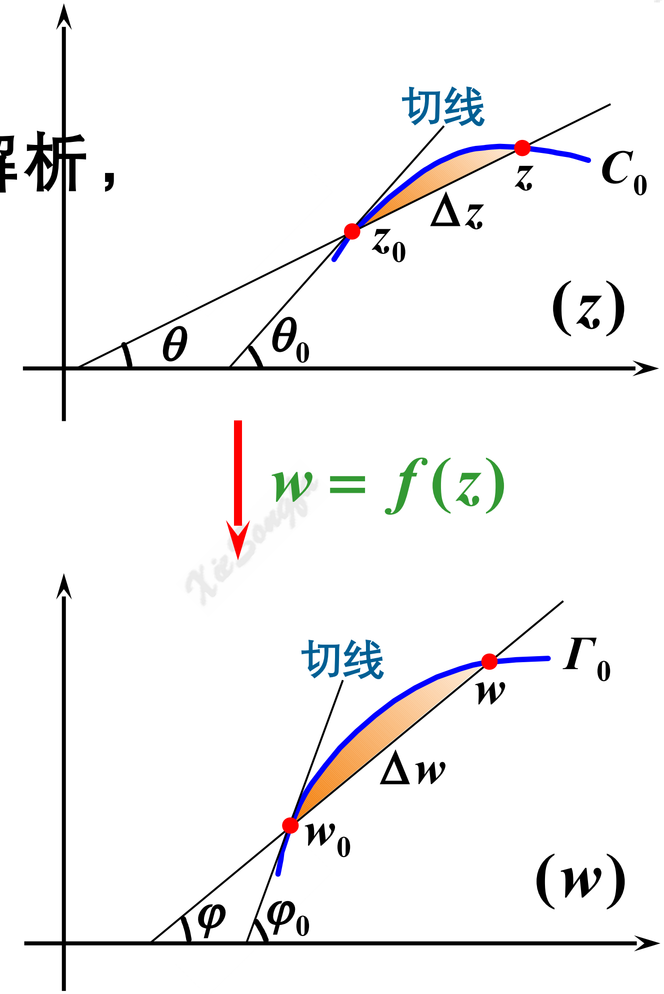
为曲线 C_0 经 $w=f(z)$ 映射后在 z_0 点的旋转角。

- 这两个指标定量地刻画了曲线经映射后的局部变化特征。

二、导数的几何意义

- 设函数$w=f(z)$ 在区域 D 内解析，

$z_0\in D$，且 $f'(z_0)\neq 0$.



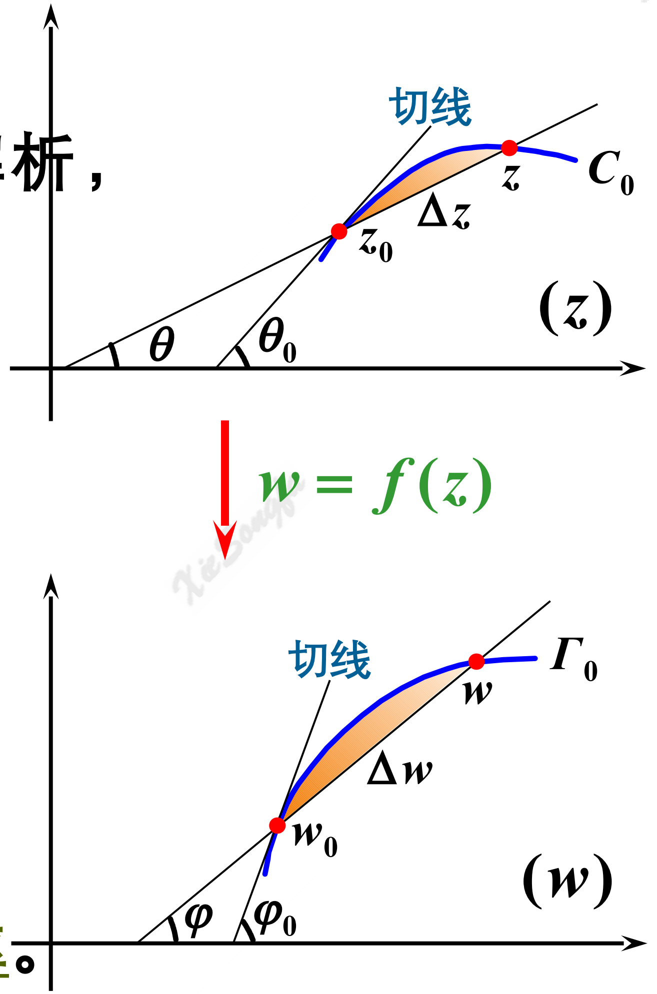
分析 $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ C_0}}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$,

由 $\Delta w=|w|e^{i\varphi}$, $\Delta z=|\Delta z|e^{i\theta}$, 有

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ C_0}}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}e^{i(\varphi-\theta)},$$

$$=\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ C_0}}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}\cdot e^{i(\varphi_0-\theta_0)},$$

二、导数的几何意义



- 设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析，

$z_0 \in D$，且 $f'(z_0) \neq 0$.

分析 $$f'(z_0) = \underbrace{\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ C_0}} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}} \cdot e^{\underline{i(\varphi_0 - \theta_0)}},$$

$$= |f'(z_0)| \cdot e^{i \arg f'(z_0)}.$$

1. 导数的几何意义

$|f'(z_0)|$ —— 在z_0 点的伸缩率。

$\arg f'(z_0)$ —— 在z_0 点的旋转角。

二、导数的几何意义

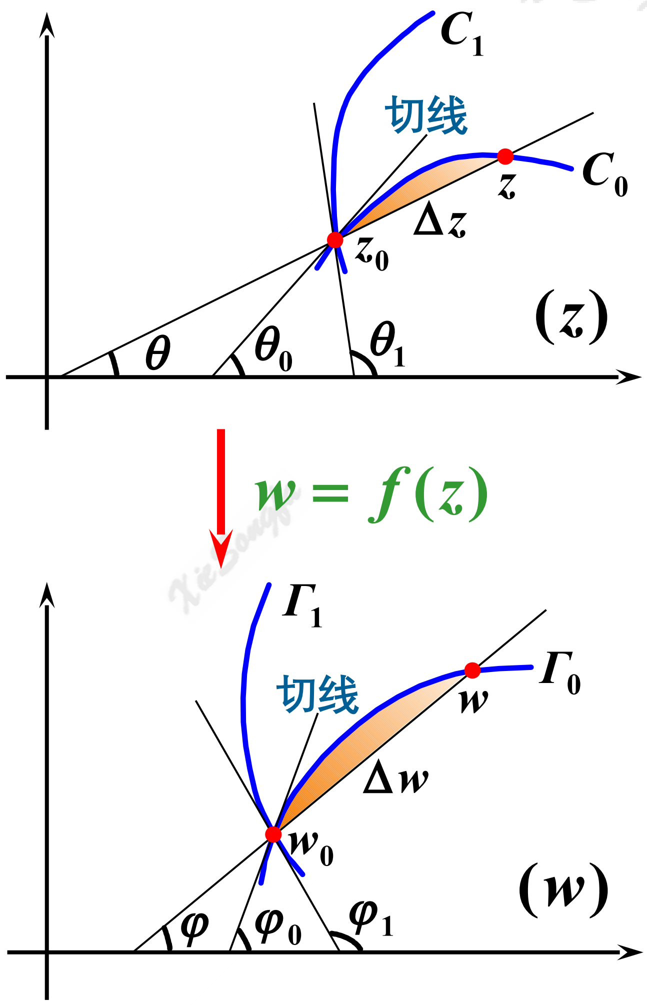
2. 伸缩率不变性

任何一条经过 z_0 点的曲线的伸缩率均为 $|f'(z_0)|$.

3. 旋转角不变性

任何一条经过 z_0 点的曲线的旋转角均为 $\arg f'(z_0)$. 即

$$\arg f'(z_0) = \varphi_0 - \theta_0 = \varphi_1 - \theta_1,$$



二、导数的几何意义

2. 伸缩率不变性

任何一条经过 z_0 点的曲线的伸缩率均为 $|f'(z_0)|$.

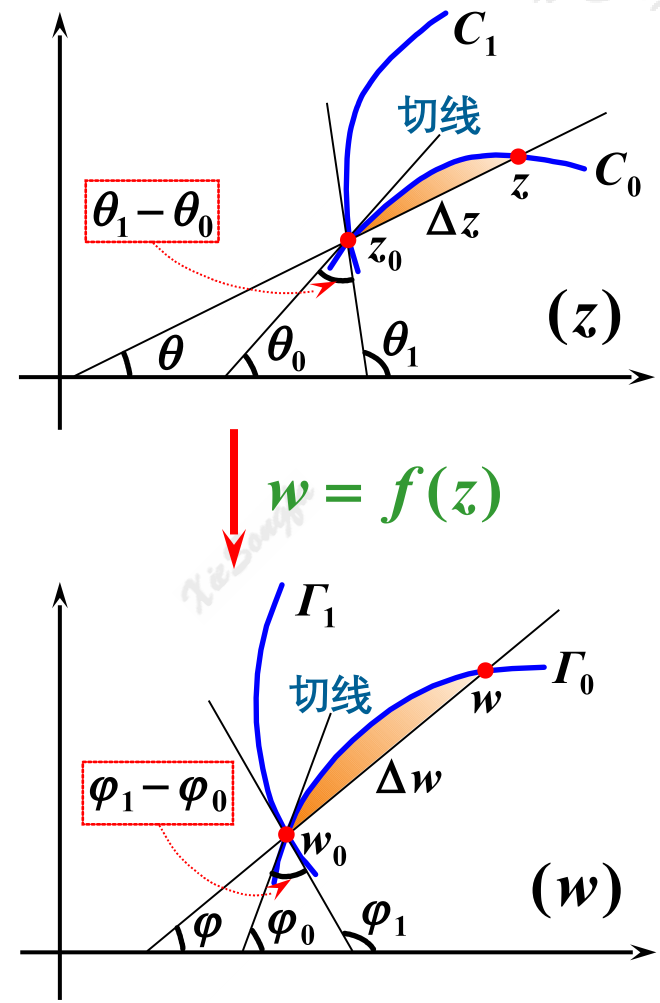
3. 旋转角不变性

任何一条经过 z_0 点的曲线的旋转角均为 $\arg f'(z_0)$. 即

4. 保角性

由 $\arg f'(z_0) = \varphi_0 - \theta_0 = \varphi_1 - \theta_1$,

$$\Rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_0 = \theta_1 - \theta_0.$$



即 $w = f(z)$ 保持了两条曲线的交角的大小与方向不变。

三、共形映射

1. 第一类保角映射

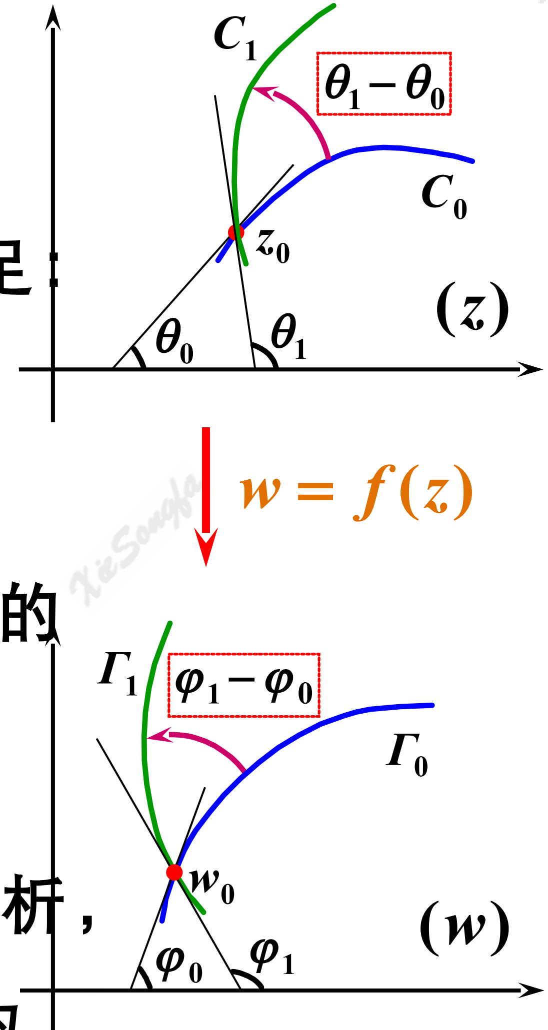
定义 若函数$w=f(z)$ 在区域 D 内满足：

P139 定义 6.1

(1) 保角性，(保大小，保方向)；

(2) 伸缩率不变性，

则称函数$w=f(z)$ 为区域 D 内的第一类保角映射。



结论 若函数$w=f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $f'(z)\neq 0$，则函数$w=f(z)$ 为区域 D 内的第一类保角映射。

P139 定理 6.1

三、共形映射

1. 第一类保角映射

2. 第二类保角映射

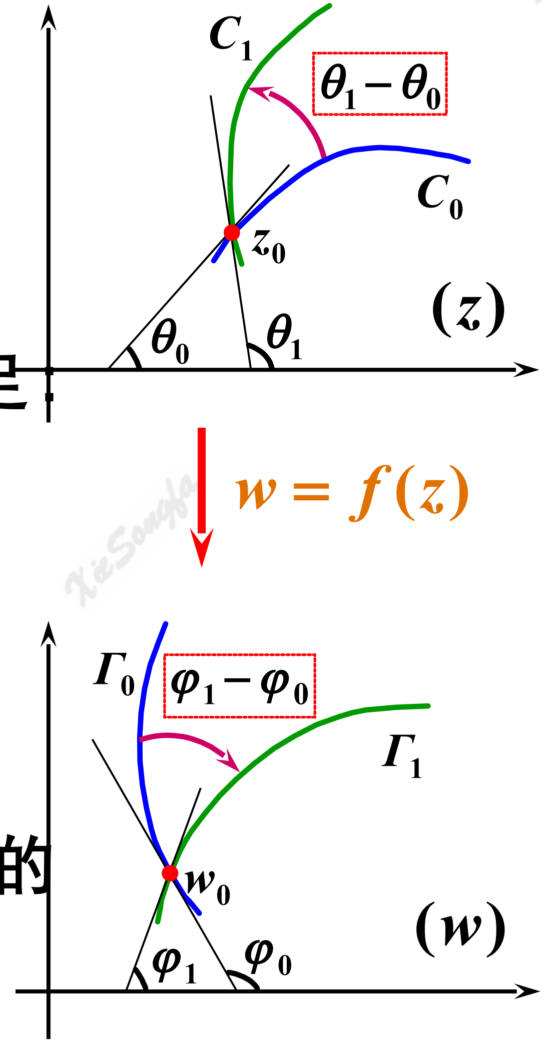
定义 若函数$w=f(z)$ 在区域 D 内满足：

P139 定义 6.1

(1) 能保持两条曲线的交角的大小不变，但方向相反；

(2) 伸缩率不变性，

则称函数$w=f(z)$ 为区域 D 内的第二类保角映射。



三、共形映射

1. 第一类保角映射

2. 第二类保角映射

3. 共形映射

定义 若函数 $w = f(z)$ 为区域 D 内的第一类保角映射，$z_1 \neq z_2$ 时，$f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 $w = f(z)$ 为区域 D 内的共形映射。 (保角映射的来历?)

P139 定义 6.2

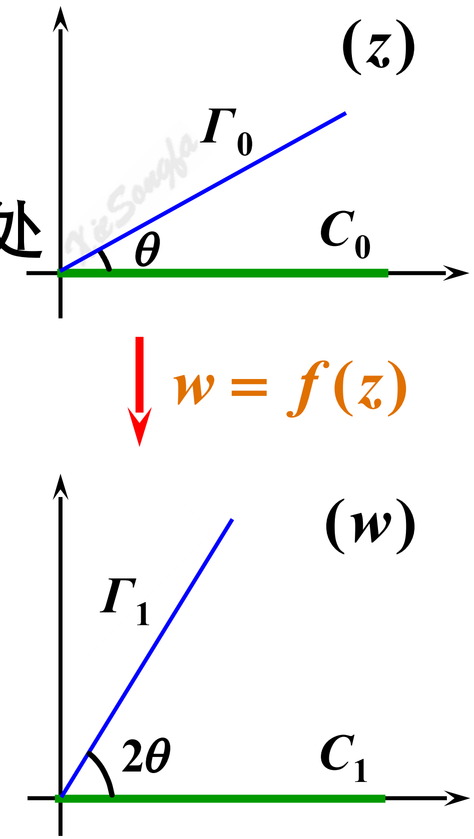
关键 要求函数还必须是一一映射(即双方单值)。

例 求函数 $w=f(z)=z^2$ 在 $z_1=i$ 和 $z_2=0$ 处的导数值，并说明其几何意义。 P138 例 6.1

解 函数 $f(z)$ 在复平面上处处解析，且 $f'(z)=2z$.

(1) 在 $z_1=i$ 点，$f'(i)=2i=2e^{\frac{\pi}{2}i}$，

因此，函数 $w=f(z)$ 在 $z=i$ 处的伸缩率不变，且具有保角性，其伸缩率为 2，旋转角为 $\frac{\pi}{2}$.



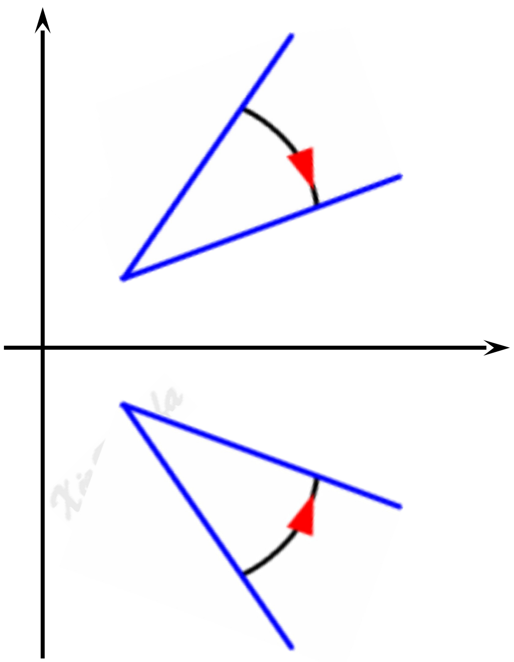
(2) 在 $z_2=0$ 点，$f'(0)=0$，

因此，函数的保角性不成立。

例 函数 $w=\bar{z}$ 是否为共形映射？ P139 例 6.2

解 (1) 由于 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\overline{\Delta z}|}{|\Delta z|}=1,$

因此，它具有**伸缩率不变性**；



(2) 显然，该函数能保持两条曲线的的交角的**大小不变**，但**方向相反**，

因此，它是第二类保角映射。

例 函数 $w=e^z$ 是否为共形映射? P140 例 6.3

解 (1) 由于 $w=e^z$ 在复平面上处处解析，且 $(e^z)'=e^z\neq 0$,

因此，它在整个复平面上是第一类共形映射。

(2) 令 $z_1=x_1+iy_1$, 则 $w_1=e^{z_1}=e^{x_1}\cdot e^{iy_1}$,

令 $z_2=x_1+i(y_1+2\pi)$, 则 $w_2=e^{z_2}=e^{x_1}\cdot e^{i(y_1+2\pi)}$

$=e^{x_1}\cdot e^{iy_1}=w_1$,

可见，它不是双方单值的因此，它不是共形映射。

(3) 如果设区域 $D=\{z:0<\operatorname{Im}z<2\pi\}$, 则它在区域 D 内是双方单值的，因此，它是区域 D 内共形映射。

休息一下 ……

附：保角映射的来历

1777 年 欧拉 (Euler) 就曾遇到过所谓的保角映射，他把这种映射称为“小范围里的相似映射”。

1779 年 拉格朗日 (Lagrange) 创建了从旋转曲面到平面上的保角映射理论。

1788 年 保角映射这一术语最早出现在俄罗斯科学院院士舒别尔特 (Шуберт) 的制图学著作中。

1822 年 高斯 (Gauss) 创建了由复变函数出发的一般的保角映射理论。

附：保角映射的来历

1851 年 黎曼 (Riemann) 首次发表了关于任意的单连域都可以映射到（单位）圆域的定理。

- 此后，许瓦兹 (Schwarz)、哈纳克 (Harnack) 以及庞加莱 (Poincare) 等人曾多次试图给出黎曼定理的严格证明。

1900 年 才由奥斯古德 (Osgood) 获得成功，给出黎曼定理的严格证明。

（返回）