练 习 十 四

1．求将$|z|<1$映射为$|w|<1$的分式线性映射$w=f(z)$，并满足：

（1） $f(\frac{1}{2})=0,\ \ f(-1)=1$

解：由$f(\frac{1}{2})=0,$ 知 $f(2)=\infty$

又$f(-1)=0$

由对应点公式可得$w=\dfrac{2z-1}{z-2}$

（2） $f(\frac{1}{2})=0,\ \ \arg f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$

解：由$f(\frac{1}{2})=0,$ 知 $f(2)=\infty$

故 $w=k-\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$

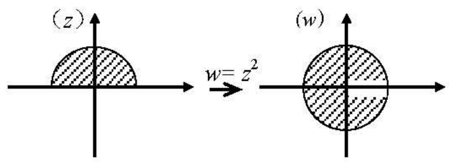
$$w'=k\frac{-\frac{3}{2}}{(z-2)^2},\ \ w'(\frac{1}{2})=-\frac{2}{3}k$$

$$\arg f'(\frac{1}{2})=\arg(-\frac{2}{3}k)=\frac{\pi}{2},\ \ \therefore k=ic\ \ (c<0)$$

$$\because |w|=1,\ \ \therefore k=-2i,\ \ w=-2i\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}=\frac{(2z-1)i}{2-z}$$

2．映射$w=z^2$将上半单位圆域：$|z|<1,\ \operatorname{Im}z>0$映射成什么区域？

解：



映射成$|w|<1$且沿内 0 到 1 的半径有割痕

3．求将下列各区域映到上半平面的保形映射。

（1） $|z+i|>\sqrt{2},\ |z-i|<\sqrt{2}$

解：先把c_1、c_2的交点－1 与 1 分别映射成ξ平面中的$\xi=0$与$\xi=\infty$，则有

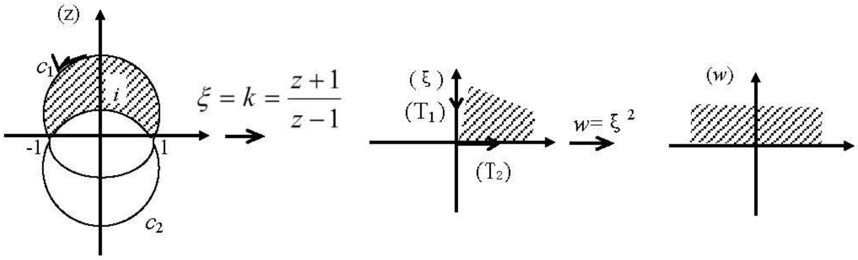
$$\xi = k(\frac{z+1}{z-1})$$

因两圆在－1 处所围的交角为$\frac{\pi}{2}$，根据保角性，圆弧 c_1、c_2 映射成交角为$\frac{\pi}{2}$的两直线。

c_2 上的点$(0, \sqrt{2}-1)$使其映射到ξ平面上的正实轴上。

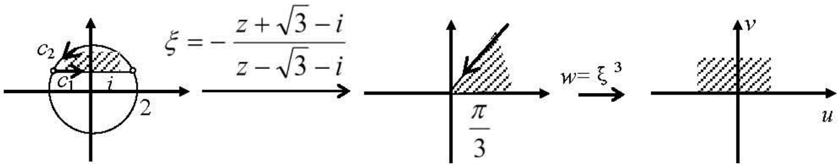
令$k = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$，则点$(0, \sqrt{2-1})$映射到$\xi$平面上的点（1, 0）最后由映射 $w = \xi^2$ 将其定义上半平面。

$$\therefore w = [k(\frac{z+1}{z-1})]^2 = -i(\frac{z+1}{z-1})^2 \qquad w = -i(\frac{z+1}{z-1})^2$$



（2）$|z|<2,\ \mathrm{Im}z>1$

解：直线 $\mathrm{Im}z=1$ 与 $|z|=2$ 的交点为 $(-\sqrt{3}, 1)$ 和 $(\sqrt{3}, 1)$ 首先将点 $A(-\sqrt{3}, 1)$ 与点 $B(\sqrt{3}, 1)$ 分别映射为原点和无穷点，故有



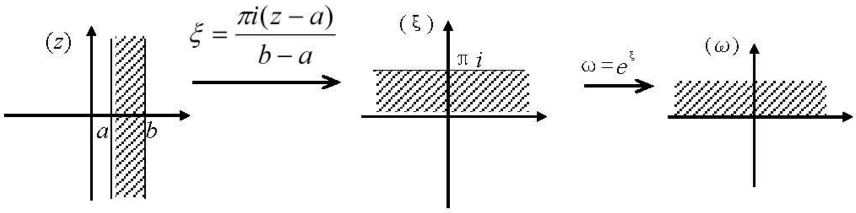
$$\xi = k\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}$$

c_1 与 c_2 的交角为$\frac{\pi}{3}$，为使点（0，1）映射正实轴上，可令 $k=-1$，则点（0，1）映射到ξ平面上（1，0）

最后由映射 $\qquad w = -[\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}]^3$

$w = \xi^3$ 将其映射成上半平面 $\qquad w = [\frac{z-\sqrt{3}-i}{z+\sqrt{3}-i}]^3$

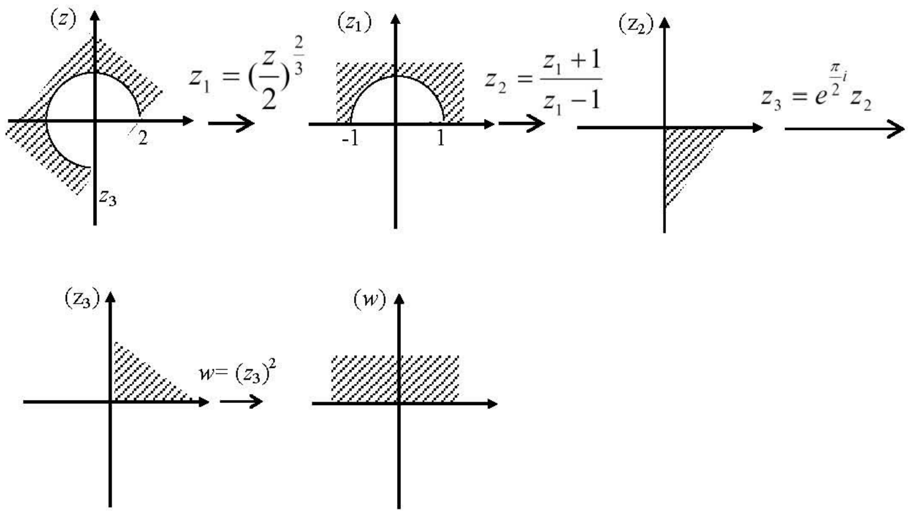
（3） $a < \mathrm{Re}\, z < b$



$$\omega = e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$$

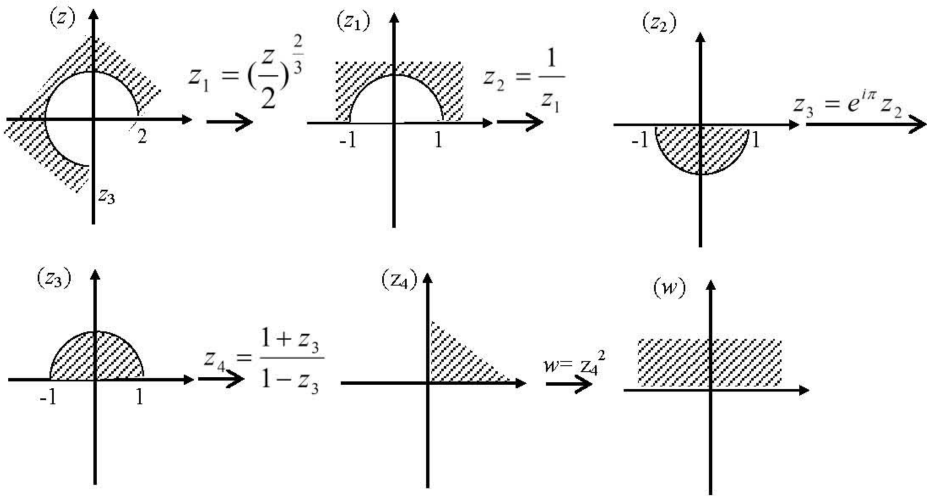
（4） $|z| > 2,\ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ s

法一：



$$w = -\left(\frac{z^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}}\right)^2$$

法二：



故 $w=(\frac{z^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}})^2$

*4．思考题

（1）幂函数所实现的映射有什么性质？它在什么地方实现保角映射？

答：它把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域，但张角变成了原来的 n 倍，即把角形域映射成角形域。它在一阶导数不为零处，即 $z\neq 0$ 处实现保角映射。

（2）正整次幂函数将角形域变为角形域和分式线性函数将角形域变为角形域各自有什么特点？

答：正整次幂函数将角形域的“角度”扩大为另一角形域，而分式线性函数是将角形域“保角”的映为另一角形域。

（2）如何将带形区域保角映射为角形区域？

答：指数函数可以将带形区域映射为角形区域。