第五章 留数及其应用

§5.1 孤立奇点

一、引言

二、零点

三、孤立奇点

四、孤立奇点的分类

五、如何进行孤立奇点的分类

六、如何判断极点的阶数

一、引言

- 本章重点解决闭路积分问题。如图，考虑积分 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$.

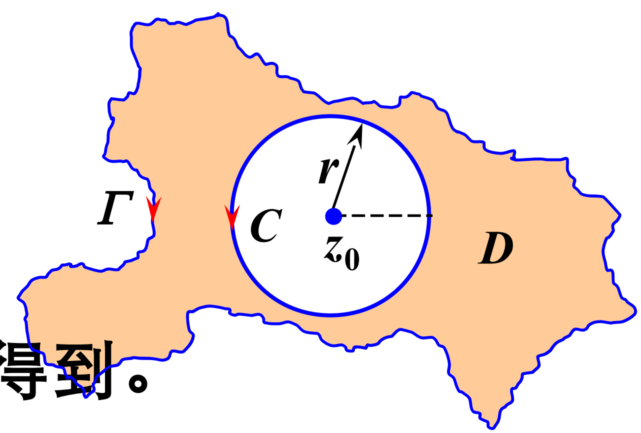
(1) 若 $f(z)$ 在 Γ 上连续，在 D 上解析，则 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0$.

(2) 若 $f(z)$ 在 D 上有唯一的奇点 z_0，则 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=\oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

此时，将函数 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内进行洛朗展开，

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2\cdots,$$

由 $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1,\\ 0, & n\neq 1,\end{cases}$



则积分 $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ “不难？”得到。

二、零点

- 所谓函数 $f(z)$ 的零点就是方程 $f(z)=0$ 的根。

定义 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，

P107 定义5.2

(1) 若 $f(z_0)=0$, 则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的零点；

(2) 若 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 处解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$,

则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

结论 对于不恒为零的解析函数，其零点是孤立的。

P108

即在零点的一个小邻域内，函数无其它零点。

(进入证明?)

二、零点

- 充要条件（如何判断零点的阶数？）

定理 设函数$f(z)$ 在z_0处解析，则下列条件是等价的：

P108 定理 5.4

(1) z_0 为$f(z)$ 的 m 阶零点。

(2) $f^{(k)}(z_0)=0,\ k=0,1,2,\cdots,m-1;\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

(3) $f(z)$ 在$|z-z_0|<\delta$ 内的泰勒展开式为

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,$$

其中，$a_m\neq 0.$

(进入证明?)

二、零点

- 充要条件（如何判断零点的阶数？）

定理 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则下列条件是等价的：

(1) z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

(2) $f^{(k)}(z_0)=0,\ k=0,1,2,\cdots,m-1;\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

(3) $f(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内的泰勒展开式为

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

$$=(z-z_0)^m\underline{[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots]}$$

收敛且解析

$$=(z-z_0)^m\varphi(z).$$

例 $f(z)=z^3-1.$

$$f(z)=(z-1)(z^2+z+1),$$

故 $z=1$ 为 $f(z)$ 的一阶零点。

例 $f(z)=\dfrac{(2z+3)^3}{1+e^z}.$

$$f(z)=\left[z-\left(-\frac{3}{2}\right)\right]^3\frac{8}{1+e^z}.$$

故 $z=-\dfrac{3}{2}$ 为 $f(z)$ 的三阶零点。

例 $f(z)=z-\sin z$.

方法一 $f(0)=0,\quad f'(0)=1-\cos z\big|_{z=0}=0,$

$f''(0)=\sin z\big|_{z=0}=0,\quad f'''(0)=\cos z\big|_{z=0}=1\neq 0,$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶零点。

方法二 $f(z)=z-(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots)$

$=z^3(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+\cdots)$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶零点。

例 $f(z)=1-\cos z$.

$$f(z)=1-(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots)=z^2(1-\frac{1}{4!}z^2+\cdots)$$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶零点。

例 $f(z)=e^z-z-1$.

$$f(z)=(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots)-z-1$$

$$=z^2(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2\cdots)$$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶零点。

三、孤立奇点

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的奇点且存在 $\delta>0$，使得 $f(z)$ 在去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析称 z_0 为 $f(z)$ 孤立奇点。

P103 定义 5.1

例 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$， $z=0$ 为孤立奇点。

例 $f(z)=\ln z$， 原点及负实轴上的点均为奇点，但不是孤立奇点。

三、孤立奇点

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的奇点，且存在 $\delta > 0$，使得 $f(z)$ 在去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 孤立奇点。

例 $f(z) = \dfrac{1}{\sin \dfrac{1}{z}}$， P103 例 5.3

(1) 令 $\sin \dfrac{1}{z} = 0$， $\Rightarrow \dfrac{1}{z} = k\pi$， $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，

$\Rightarrow z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ 为孤立奇点；

(2) $z = 0$ 也是奇点，但不是孤立奇点。

四、孤立奇点的分类

- 根据函数在其孤立奇点的去心邻域的洛朗级数对奇点分类

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$

P104

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$，

(1) 若 $\forall n<0$，有 $a_n=0$，（即不含负幂次项）

则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

四、孤立奇点的分类

- 根据函数在其孤立奇点的去心邻域的洛朗级数对奇点分类

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$，

(2) 若 $\exists N<0$，有 $a_N\neq 0$，

且 $\forall n<N$，有 $a_n=0$，（即含有限个负幂次项）

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 N 阶极点；

特别地，当 $N=1$ 时，称 z_0 为 $f(z)$ 的简单极点。

四、孤立奇点的分类

- 根据函数在其孤立奇点的去心邻域的洛朗级数对奇点分类

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$,

(3) 若 $\forall N<0$, $\exists n<N$, 有 $a_n\neq 0$, (即含无限个负幂次项

则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点。

四、孤立奇点的分类

- 根据函数在其孤立奇点的去心邻域的洛朗级数对奇点分类

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$，

小结
$$f(z)=\underbrace{\cdots\ \cdots}_{\text{本性奇点}}+\underbrace{\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{N\text{ 阶极点}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots}_{\text{可去奇点}},$$

(1) 可去奇点 不含负幂次项；

(2) N 阶极点 含有限多的负幂次项，且最高负幂次为 N

(3) 本性奇点 含有无穷多的负幂次项。

五、如何进行孤立奇点的分类

$$f(z)=\underbrace{\cdots\ \cdots+}_{\text{本性奇点}}\underbrace{\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{N\text{ 阶极点}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots}_{\text{可去奇点}},$$

方法 (1) 可去奇点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$（常数）；

P104~106 定理5.1~~5.3

(2) N 阶极点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$；（该条件只能判断是极点）

N 阶极点 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^N}[a_{-N}+a_{-N+1}(z-z_0)+\cdots]$；

(3) 本性奇点 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在且不为∞.

注 在求 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 时，可使用罗比达法则。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的奇点的类型。 P106 例 5.4

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点由 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1,$

可知，$z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点。

注 将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$$

$$=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots,\ (0<|z|<+\infty).$$ （不含负幂次项）

- 如果约定 $f(z)$ 在 $z=0$ 点的值为1，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 点就解析了，因此称 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点。

例 判断函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点的类型。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点考察极限 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}}=+\infty;\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}}=0,$

可知，$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在且不为∞.

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

注 将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

（含无穷多个负幂次项）

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ 的奇点的类型。

解 $z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点由 $\lim\limits_{z\to1} f(z)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{e^z}{(z-1)^2}=\infty$,

可知, $z=1$ 是 $f(z)$ 的极点。

注 将 $f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{e\cdot e^{z-1}}{(z-1)^2}=\frac{e}{(z-1)^2}\left(1+(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\frac{e}{2!}+\frac{e}{3!}(z-1)+\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

（含有限个负幂次项，且最高负幂次为 2）

- 可见, $z=1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ 的奇点的类型。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点由 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{z^3}=\infty$,

可知, $z=0$ 是 $f(z)$ 的极点。

注 将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!\,z}+\frac{1}{4!}z-\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

含有限个负幂次项
且最高负幂次为 3

- 可见, $z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶极点。

问题 是否还有其它办法来判断极点的阶数呢？

六、如何判断极点的阶数

1. 若 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^N}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点的邻域内解析，

且 $\varphi(z_0)\neq 0$，则 z_0 为 $f(z)$ 的 N 阶极点。

P106 式(5.1)

- 事实上，z_0 为 $f(z)$ 的 N 阶极点的充要条件（即定义）为

$$f(z)=\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^N}\left[a_{-N}+a_{-N+1}(z-z_0)+\cdots\right]=\frac{1}{(z-z_0)^N}\varphi(z),$$

其中，$\varphi(z)$ 在 z_0 点的邻域内解析，$\varphi(z_0)=a_{-N}\neq 0$.

六、如何判断极点的阶数

2. 若 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，且 z_0 为 $\varphi(z)$ 的 n 阶零点 $\psi(z)$ 为 的

零点，即 $f(z)=\dfrac{(z-z_0)^m\varphi_1(z)}{(z-z_0)^n\psi_1(z)}=\dfrac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^n}Q(z)$，

则 (1) 当 $m\geq n$ 时 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

(2) 当 $m<n$ 时 z_0 为 $f(z)$ 的 $(n-m)$ 阶极点。

- 特别地，若 $f(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$，

P108 定理 5.5

则 $\psi(z)$ 的 n 阶零点就是 $f(z)$ 的 n 阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点的类型。

解 由于 $f(z)=\dfrac{(z+1)(z-1)}{(z+1)(z-1)^2}$，故 $z=-1$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，

$z=1$ 是 $f(z)$ 的一阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$ 的奇点的类型。

解 由于 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)^2(z+i)^2}$，故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，

$z=\pm i$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ 的奇点的类型。

解 令 $z_k = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,

由于 z_k 是 $\cos z$ 的一阶零点，故 z_k 是 $f(z)$ 的一阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin^2 z}$ 的奇点的类型。

解 令 $z_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,

由于 z_k 是 $\sin^2 z$ 的二阶零点，但不是 $\cos z$ 的零点，

故 z_k 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^{z}-(1+z)}{z^{4}}$ 的奇点的类型。

解 由于 $z=0$ 是 z^4 的四阶零点，是 $e^{z}-(1+z)$ 的二阶零点，

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

注 直接利用洛朗级数来判断奇点类型的方法最好也能够掌握

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{1}{z^{4}}\left[\left(1+z+\frac{1}{2!}z^{2}+\frac{1}{3!}z^{3}+\frac{1}{4!}z^{4}+\frac{1}{5!}z^{5}+\cdots\right)-(1+z)\right]$$

$$=\frac{1}{2!\,z^{2}}+\frac{1}{3!\,z}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}z\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

- 因此，$z=0$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z-\sin z}$ 的奇点的类型。

解 由于 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，是 e^z-1 的一阶零点，

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例 判断函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(e^{z^2}-1)}$ 的奇点的类型。

解 由于 $z=0$ 是 $z(e^{z^2}-1)$ 的三阶零点，是 $\sin z$ 的一阶零点，

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点。

- 什么情况下会出现本性奇点呢？

例 判断下列函数的奇点的类型。

(1) $f(z)=\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$, $z=1$ 为本性奇点。

(2) $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$, $z=1$ 为本性奇点。

(3) $f(z)=\sin(e^{\frac{1}{z}})$, $z=0$ 为本性奇点。

(4) $f(z)=\cos\left(\dfrac{e^z-1}{z}\right)$, $z=0$ 为可去奇点。

(5) $f(z)=e^{\frac{\sin z}{z}}$, $z=0$ 为可去奇点。

- 上述函数都有一个共同点 $f(z)=g\left(\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)$.

小结 考虑下面两类函数：

(1) $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 比较分子分母的零点的阶数

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$ 可去奇点，

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ N 阶极点。

(2) $f(z)=g\left(\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)$ 函数 $g(z)$ 连续

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=g(c)$ 可去奇点，

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=g(\infty)$ 本性奇点？

休息一下 ……

附：不恒为零的解析函数的零点是孤立的

设 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 处解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$

由 $\varphi(z)$ 在 z_0 处解析，有 $\varphi(z)$ 在 z_0 处连续，

令 $\varepsilon=\dfrac{|\varphi(z_0)|}{2}$，则必存在 $\delta>0$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

有 $|\varphi(z)-\varphi(z_0)|<\varepsilon=\dfrac{|\varphi(z_0)|}{2}$，$\Rightarrow\ |\varphi(z)|\geq\dfrac{|\varphi(z_0)|}{2}\neq 0$，

又当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，$(z-z_0)^m\neq 0$，

故 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ 在 z_0 的去心邻域内不为零

即得不恒为零的解析函数的零点是孤立的。

（返回）

附：关于函数零点的充要条件的证明 P107 修改

定理 设函数$f(z)$在z_0处解析，则下列条件是等价的：

(1) z_0 为$f(z)$ 的 m 阶零点。

(2) $f^{(k)}(z_0)=0$，$k=0,1,2,\cdots,m-1$；$f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

(3) $f(z)$ 在$|z-z_0|<\delta$ 内的泰勒展开式为

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,$$

其中，$a_m\neq 0$.

附：关于函数零点的充要条件的证明

证明（采用循环证明的方法完成其等价性的证明）

(1)⇒(2)：若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，由定义有

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),\ \varphi(z)\text{在 } z_0 \text{ 处解析且 } \varphi(z_0)\neq 0,$$

$$\Rightarrow\ f^{(k)}(z)=(z-z_0)^{m-k}\tilde{\varphi}(z),\quad k=0,1,2,\cdots,m-1,$$

$$\Rightarrow\ f^{(k)}(z_0)=0,\quad k=0,1,2,\cdots,m-1,$$

而 $f^{(m)}(z)=m!\varphi(z)+(z-z_0)\tilde{\tilde{\varphi}}(z),$

$$\Rightarrow\ f^{(m)}(z_0)=m!\varphi(z_0)\neq 0.$$

附： 关于函数零点的充要条件的证明

证明（采用循环证明的方法完成其等价性的证明）

(2) ⇒ (3)：若 $f^{(k)}(z_0)=0,\ k=0,1,\cdots,m-1,\ \ f^{(m)}(z_0)\neq 0,$

将 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内泰勒展开，得

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

$$=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,$$

其中，$a_m=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0.$

附： 关于函数零点的充要条件的证明

证明（采用循环证明的方法完成其等价性的证明）

(3)⇒(1)：若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内的泰勒展开式为

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,\quad (a_m\neq 0),$$

$$=(z-z_0)^m\underline{[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots]},$$

收敛且解析

即得 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$,

其中，$\varphi(z)$ 在 z_0 处解析且 $\varphi(z_0)=a_m\neq 0$,

根据零点的定义可知，z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

（返回）