§6.4 几个初等函数构成的映射

一、幂函数

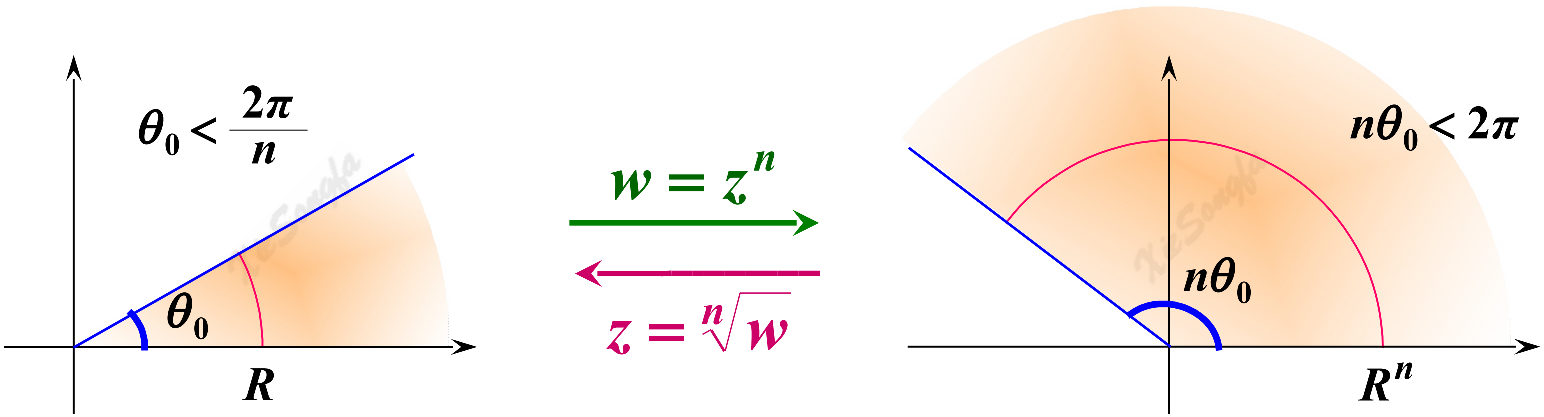
二、指数函数

三、综合举例

一、幂函数 $w=z^n$，($n\geq 2$ 整数)

1. 映射特点

令 $z=re^{i\theta}$，则有 $w=r^n e^{in\theta}$，即 $|w|=r^n$，$\arg w=n\theta$.



特点 幂函数 $w=z^n$ 扩大顶点在原点的角形域(或扇形域)。

- 类似地，根式函数$w=\sqrt[n]{z}$ 作为幂函数的逆映射，其映射特点是缩小顶点在原点的角形域(或扇形域)。

一、幂函数 $w = z^n$，($n \geq 2$ 整数)

2. 保形性

- 解析性 (1) 在 z 平面上处处可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = nz^{n-1}$；

  (2) 当 $z \neq 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \neq 0$.

- 单值性 在 z 平面上不是双方单值的比如：

  对于 $w = z^4$，取 $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}$ $z_2 = \mathrm{e}^{\pi i}$，则 $z_1^4 = z_2^4$.

结论 幂函数 $w = z^n$ 在 z 平面上除原点外是第一类保角映射。

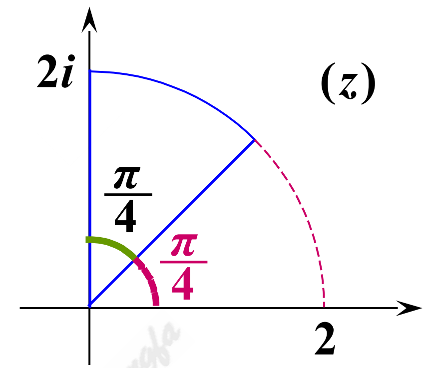
- 在角形域 $0 < \theta < \theta_0$ 上，如果 $\theta_0 < \dfrac{2\pi}{n}$，则幂函数 $= z^n$ 是共形映射。

例 已知区域 $D=\{z: \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}, 0<|z|<2\}$，求区域 D 在映射 $w=(ze^{-\frac{\pi}{4}i})^4$ 下的象区域 G。

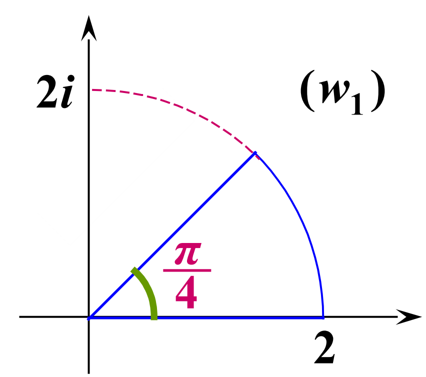
解 令 $w_1 = ze^{-\frac{\pi}{4}i}$， w则w_1^4.

如图，所求的象区域 G 为：

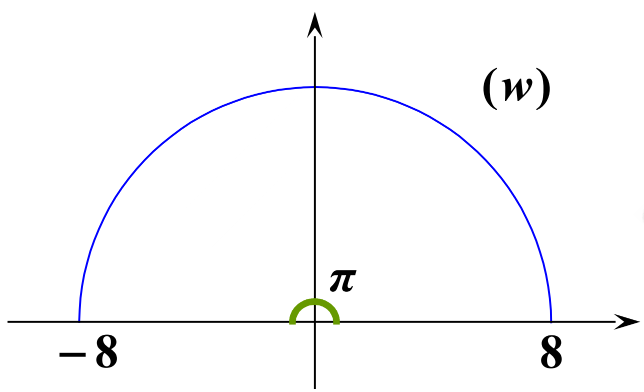
$$G=\{z: |z|<8, \operatorname{Im} z>0\}.$$



$w_1 = ze^{-\frac{\pi}{4}i}$

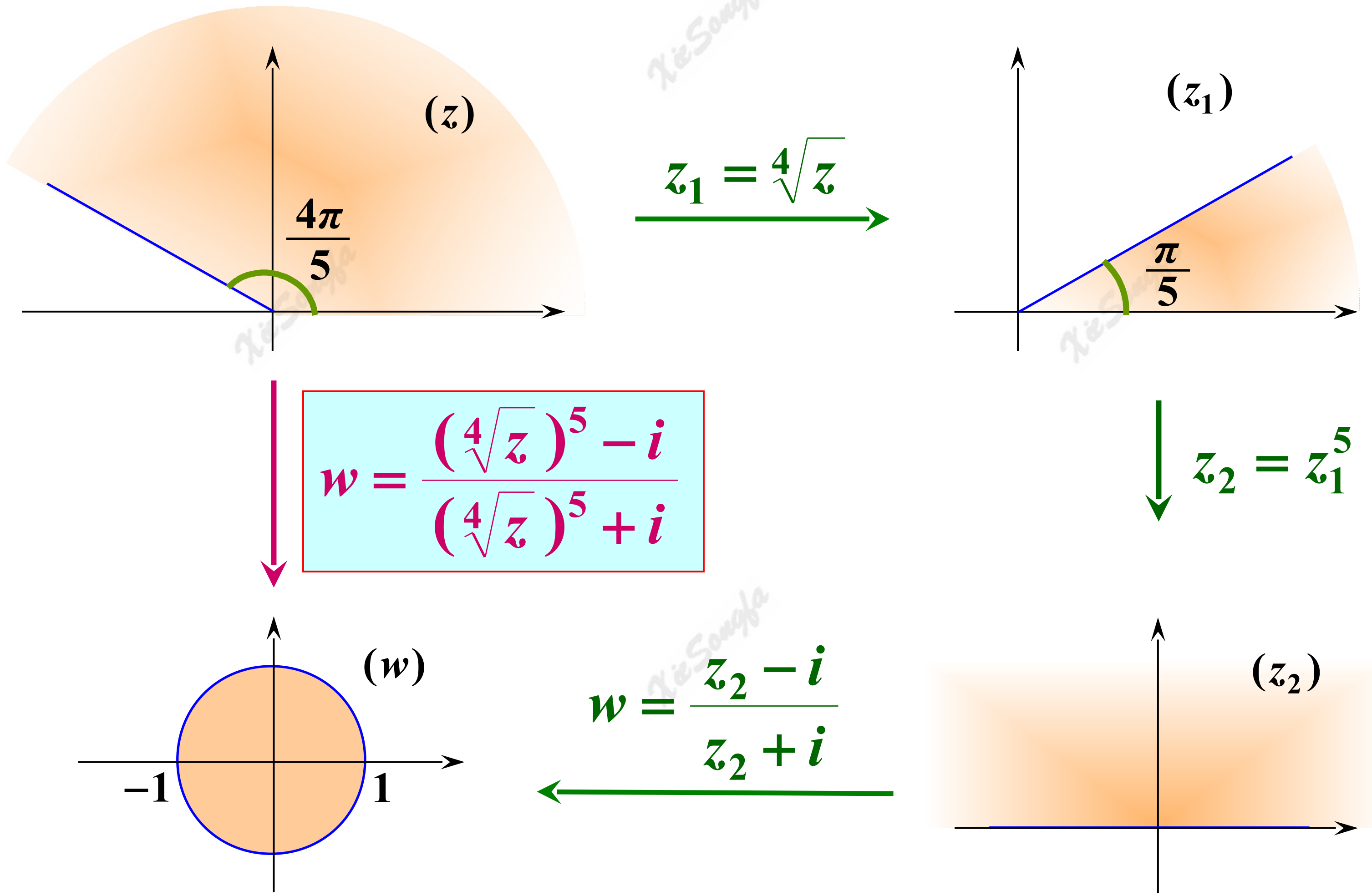


$w = w_1^4$



例 设区域 $D=\{z: 0<\arg z<\frac{4\pi}{5}\}$，求一共形映射将 D 映射成单位圆域。 P158 例 6.14

解



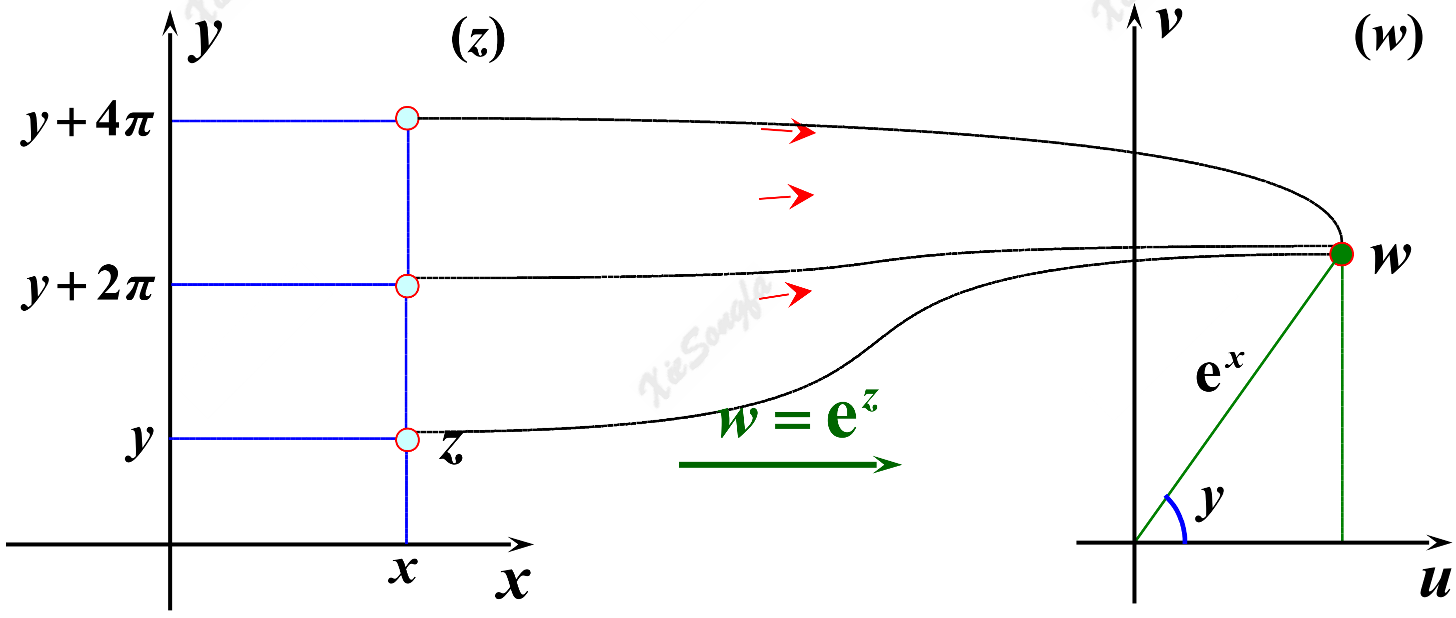
二、指数函数 $\boxed{w=\mathrm{e}^z}$

回顾 令 $z=x+iy$，有 $w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y)=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{iy}$，

即 $\begin{cases}|w|=\mathrm{e}^x, \\ \operatorname{Arg} w=y+2k\pi,\end{cases}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

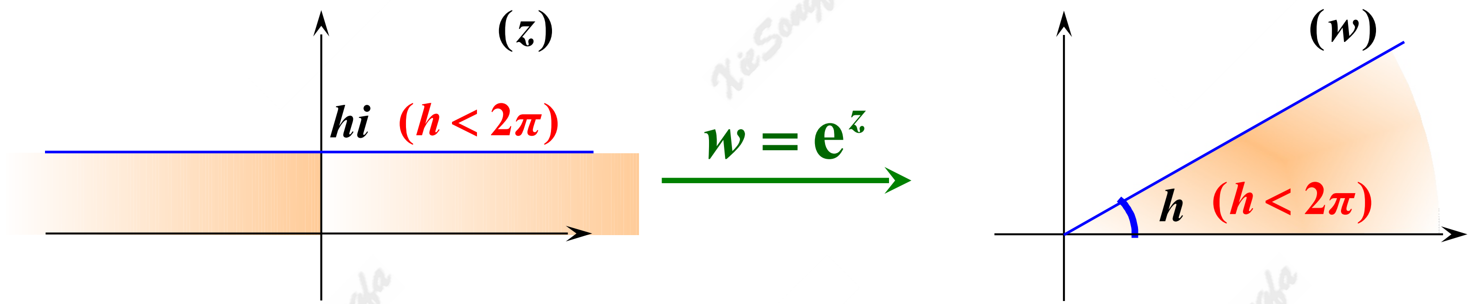
—— 由 z 的实部得到 w 的模；

—— 由 z 的虚部得到 w 的辐角。



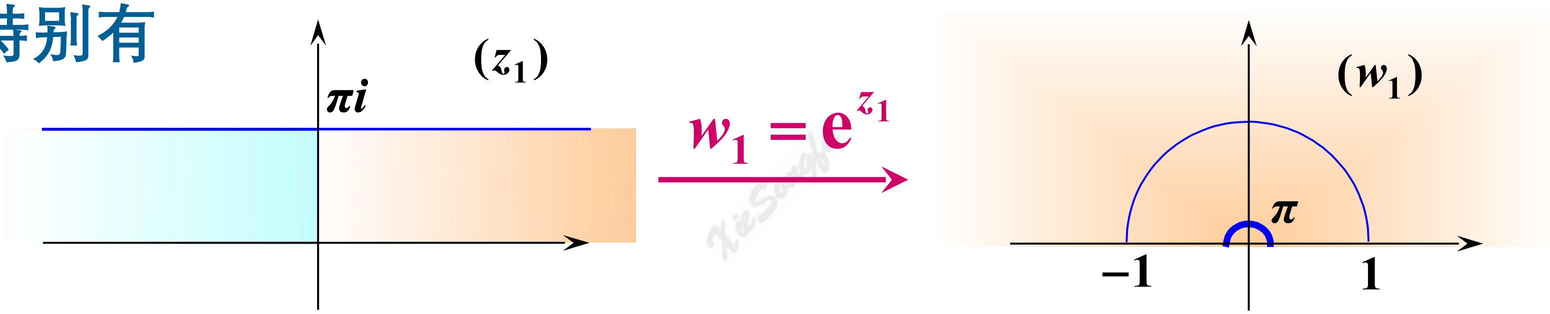
二、指数函数 $\boxed{w = e^z}$

1. 映射特点



$\downarrow z_1 = \dfrac{\pi}{h} z$　　　　$w_1 = w^{\frac{\pi}{h}} \downarrow$ (?) 单值性？

特别有



特点 指数函数 $w = e^z$ 将水平带形域变为角形域。

二、指数函数 $\boxed{w = \mathrm{e}^z}$

2. 保形性

- 解析性 在 z 平面上处处可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^z \neq 0.$

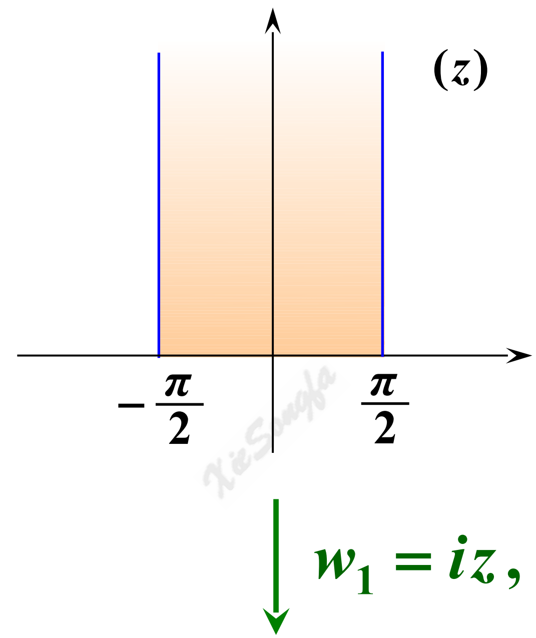
- 单值性 在 z 平面上不是双方单值的比如：

取 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_1 + i(y_1 + 2\pi)$，则 $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$.

结论 指数函数 $w = \mathrm{e}^z$ 在 z 平面上是第一类保角映射。

- 在水平带形域 $0 < y < h$ 上，如果 $h < 2\pi$，则指数函数 $w = \mathrm{e}^z$ 是共形映射。

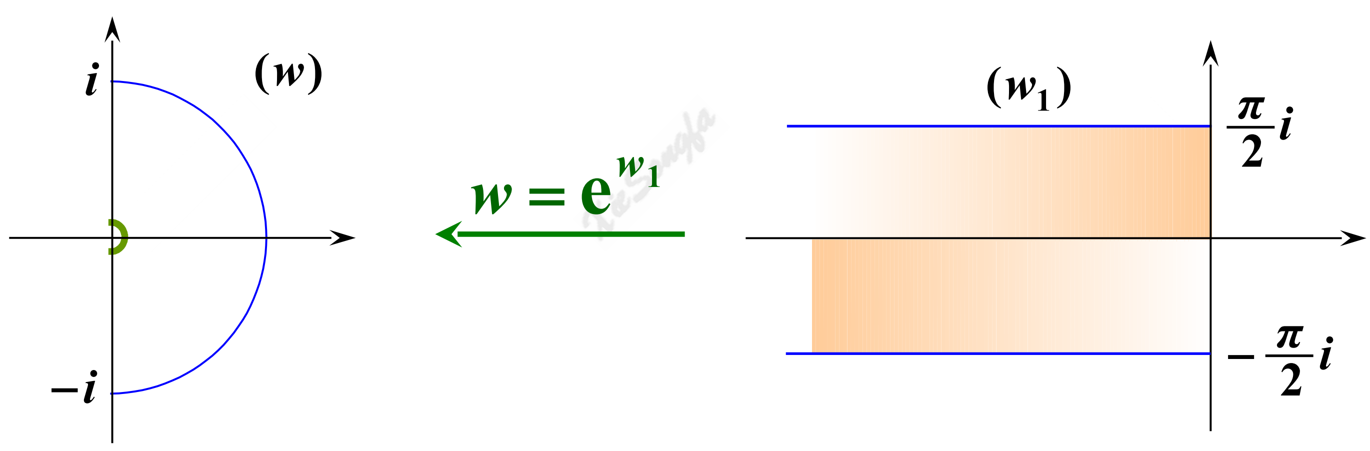
例 已知区域 $D=\{z:-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Im}z>0\}$，求区域 D 在映射 $w=e^{iz}$ 下的象区域 G。



解 令 $w_1=iz$， 则 $=e^{w_1}$.

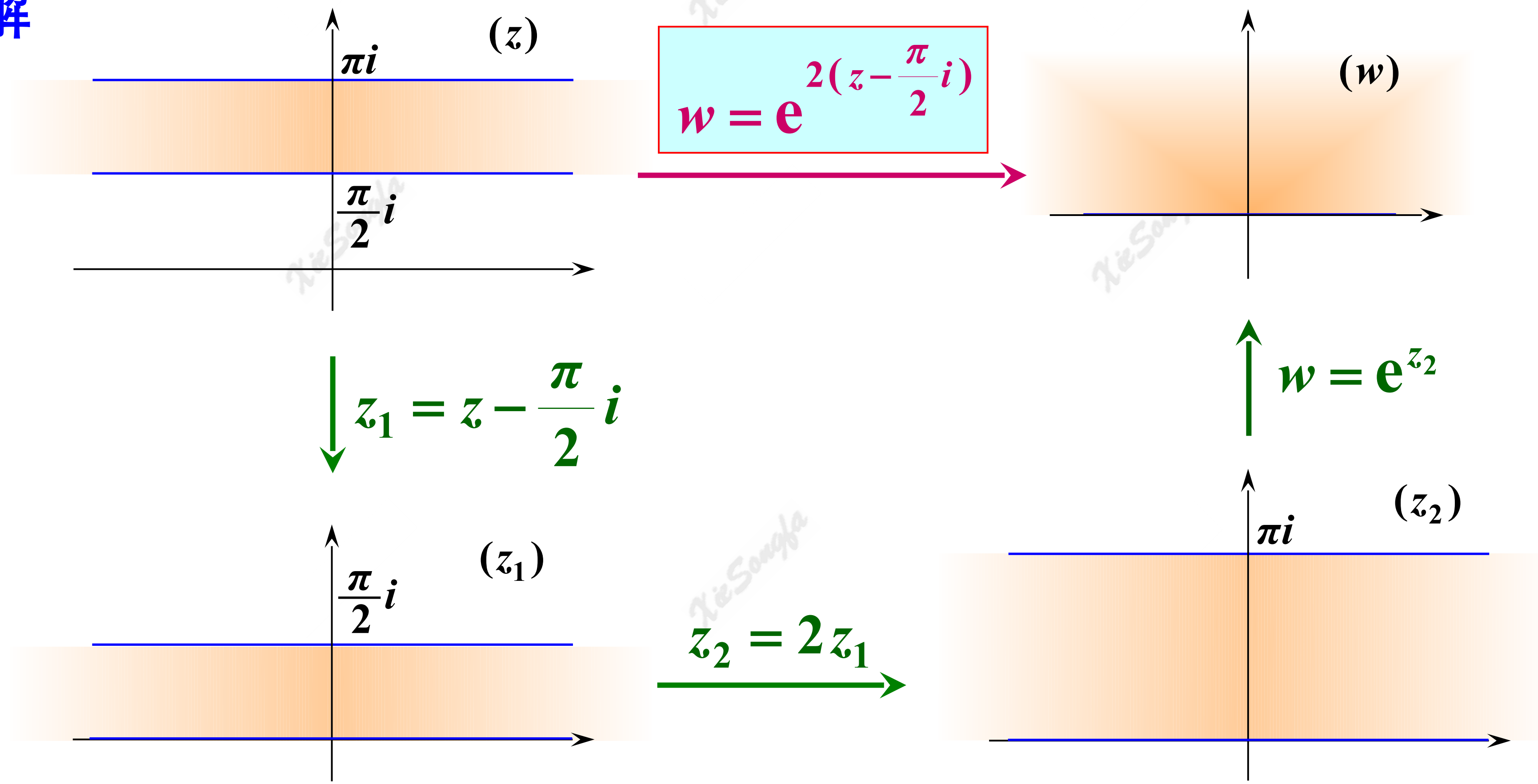
如图，所求的象区域 G 为：

$G=\{z:|z|<1,\ \operatorname{Re}z>0\}$.



例 设区域 $D=\{z:\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$，求一共形映射将 D 映射成上半平面。 P159 例 6.15

解



三、综合举例

主要步骤（一般）

(1) 预处理

目标 使区域的边界至多由两段圆弧（或直线段）构成。

工具 几种简单的分式映射、幂函数、指数函数等。

(2) 将区域映射为角形域（或者带形域）

方法 将区域边界的一个交点 z_1 映射为 ∞，

[另一个（交）点 z_2 映射为 0]。

工具 $w = k\dfrac{1}{z - z_1}$， 或者 $w = k\dfrac{z - z_2}{z - z_1}$.

三、综合举例

主要步骤(一般)

(3) 将角形域 (或者带形域) 映射为上半平面

工具 $w=z^n$, $w=\sqrt[n]{z}$. (对于角形域)

$w=\mathrm{e}^z$. (对于带形域)

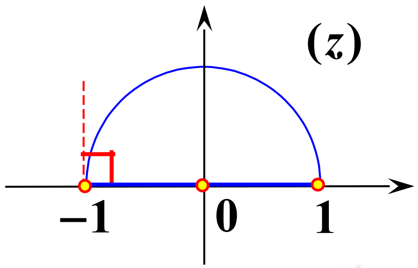
(4) 将上半平面映射为单位圆域

工具 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$. (无附加条件)

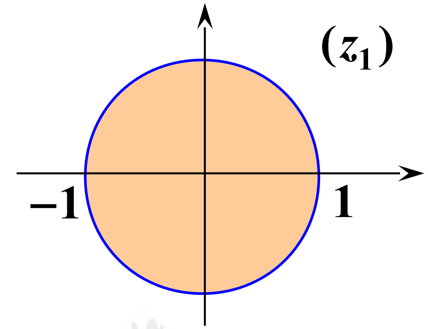
$w=\mathrm{e}^{i\theta_0}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$. (由附加条件确定 θ_0 , z_0)

例 设区域 $D=\{z:|z|<1,\operatorname{Im} z>0\}$，求一共形映射将 D 映射成单位圆域。 P162 例 6.18

解



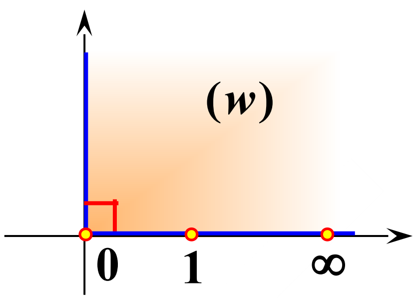
$w=z^2$?(错!!)



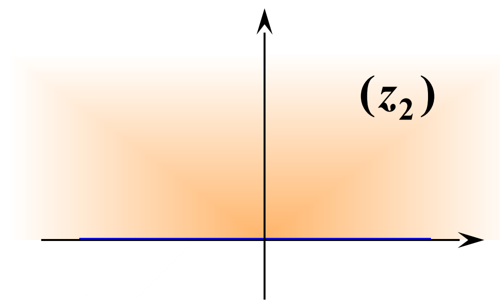
$$z_1=-\frac{z+1}{z-1}$$

$$w=\frac{\left(-\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2-i}{\left(-\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2+i}$$

$$w=\frac{z_2-i}{z_2+i}$$



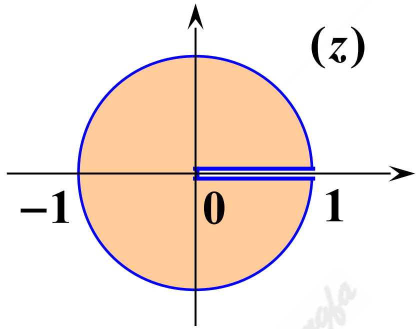
$$z_2=z_1^2$$



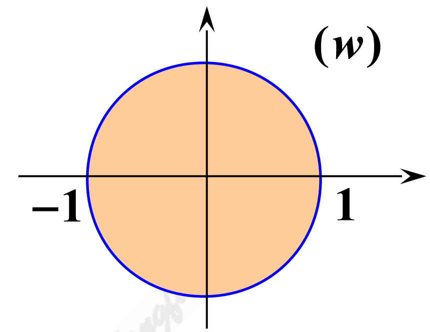
注 从上半单位圆域到上半平面的映射为 $w=\left(-\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

例 设区域 $D=\{z:|z|<1,\ \text{沿0到1有割痕}\}$，求一共形映射，将 D 映射成单位圆域。

解

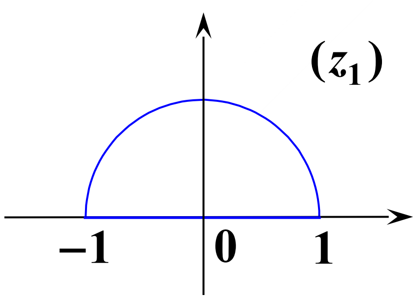


$$w=\frac{\left(-\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2-i}{\left(-\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2+i}$$

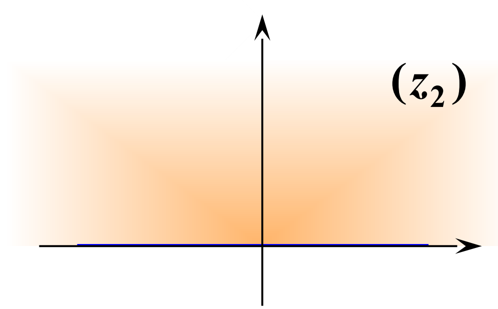


$$z_1=\sqrt{z}$$

$$w=\frac{z_2-i}{z_2+i}$$

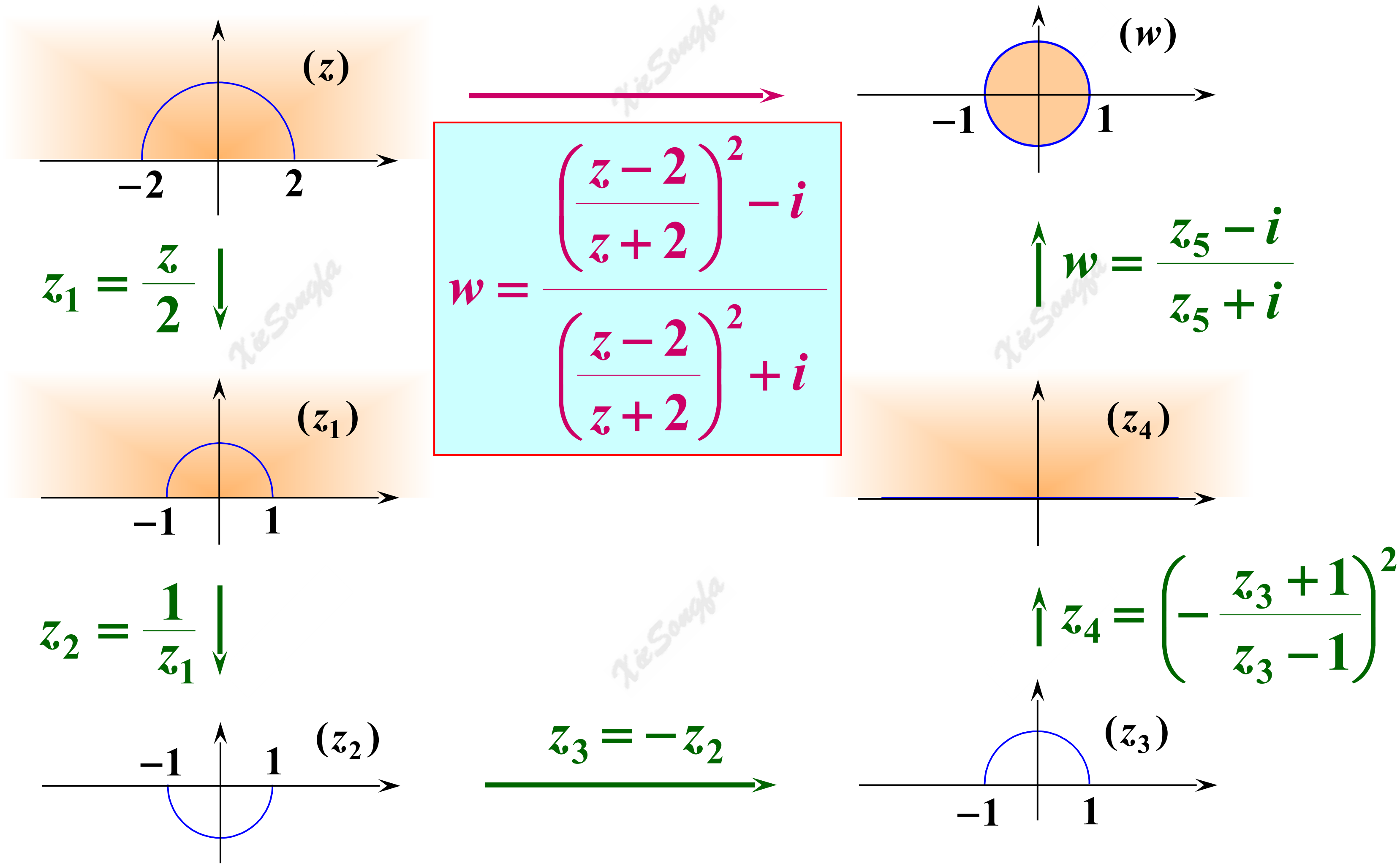


$$z_2=\left(-\frac{z_1+1}{z_1-1}\right)^2$$



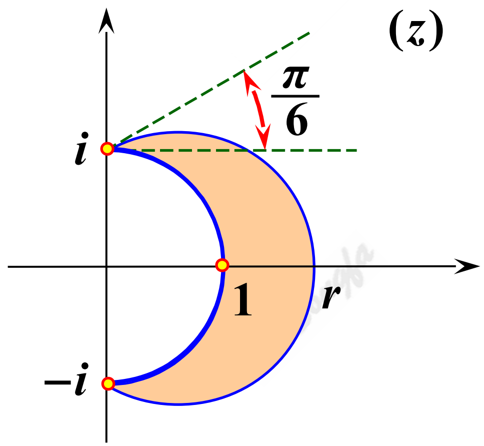
例 设区域 $D=\{z:|z|>2,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$，求一共形映射将 D 映射成单位圆域。

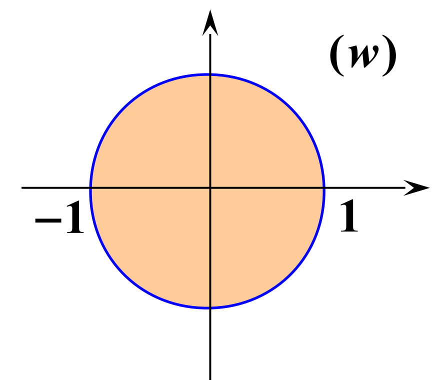
解



例 设区域 D 由两个圆弧围成（如图所示）其中 $r>1$, 求一共形映射将 D 映射成单位圆域 P161 例 6.17

解

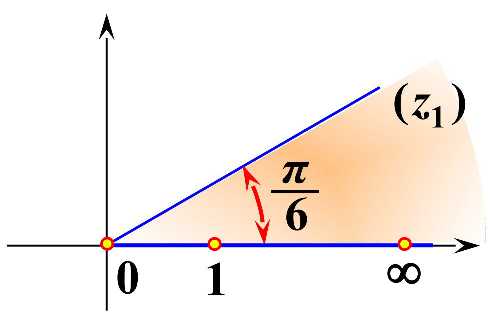




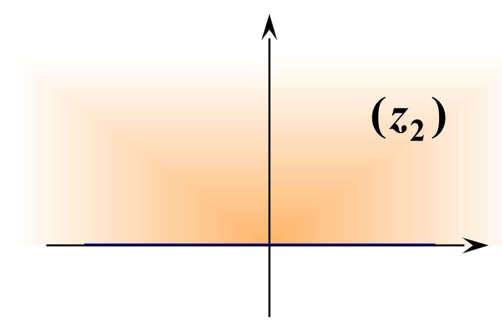
$$w=\frac{\left(i\,\dfrac{z-i}{z+i}\right)^6-i}{\left(i\,\dfrac{z-i}{z+i}\right)^6+i}$$

$$z_1=i\,\frac{z-i}{z+i}$$

$$w=\frac{z_2-i}{z_2+i}$$

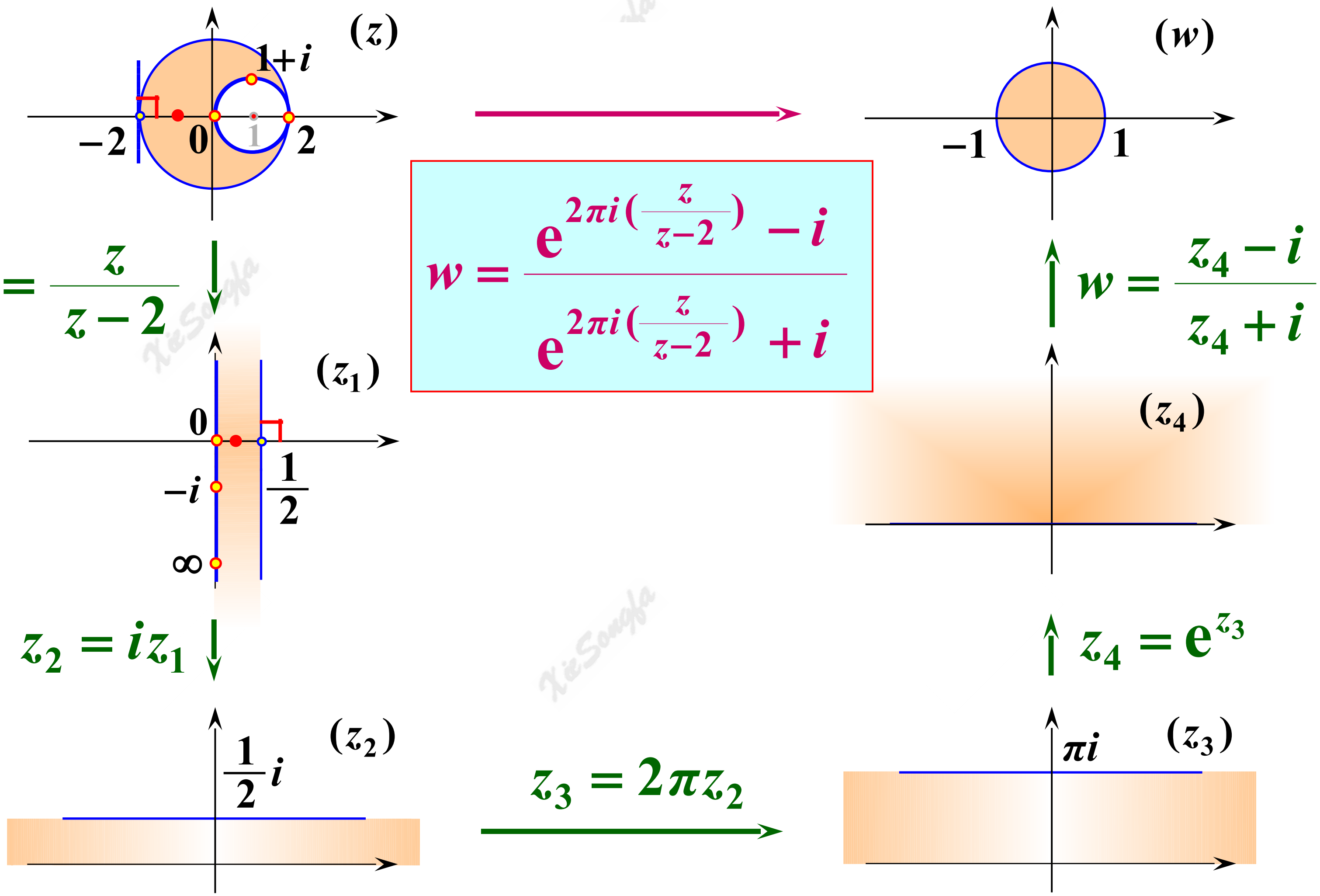


$$z_2=z_1^6$$



例 设区域 $D=\{z:|z|<2,|z-1|>1\}$，求一共形映射将 D 映射成单位圆域。 P160 例 6.16

解



$z_1=\dfrac{z}{z-2}$

$z_2=iz_1$

$z_3=2\pi z_2$

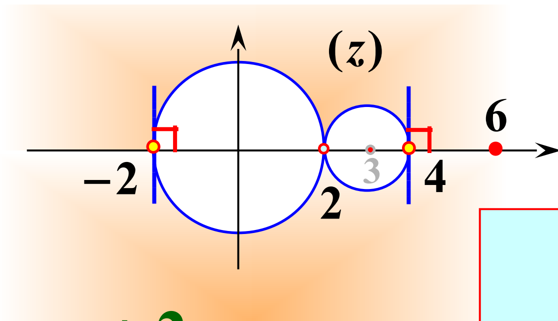
$z_4=e^{z_3}$

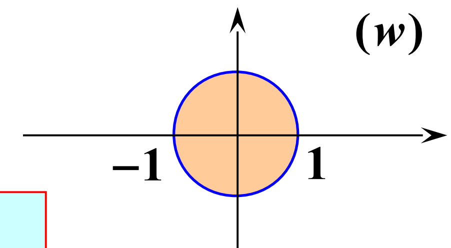
$w=\dfrac{z_4-i}{z_4+i}$

$$w=\frac{e^{2\pi i\left(\frac{z}{z-2}\right)}-i}{e^{2\pi i\left(\frac{z}{z-2}\right)}+i}$$

例 设区域 $D=\{z:|z|>2,|z-3|>1\}$，求一共形映射将 D 映射成单位圆域。

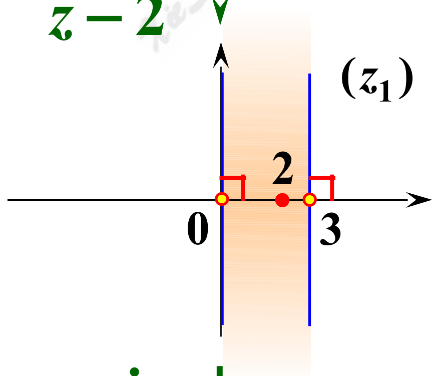
解



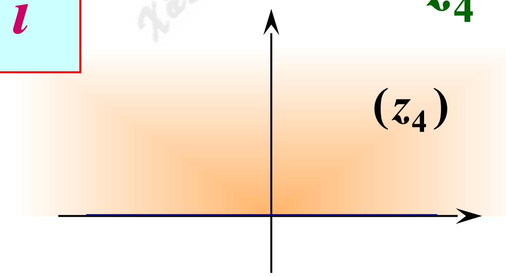


$$w=\frac{e^{\frac{\pi}{3}i\left(\frac{z+2}{z-2}\right)}-i}{e^{\frac{\pi}{3}i\left(\frac{z+2}{z-2}\right)}+i}$$

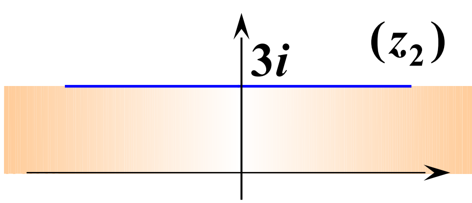
$$z_1=\frac{z+2}{z-2}$$



$$w=\frac{z_4-i}{z_4+i}$$

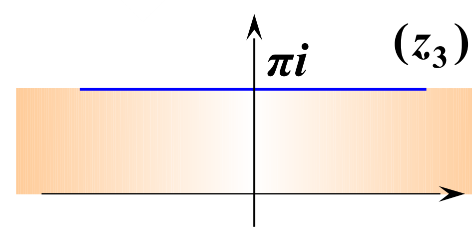


$$z_2=iz_1$$



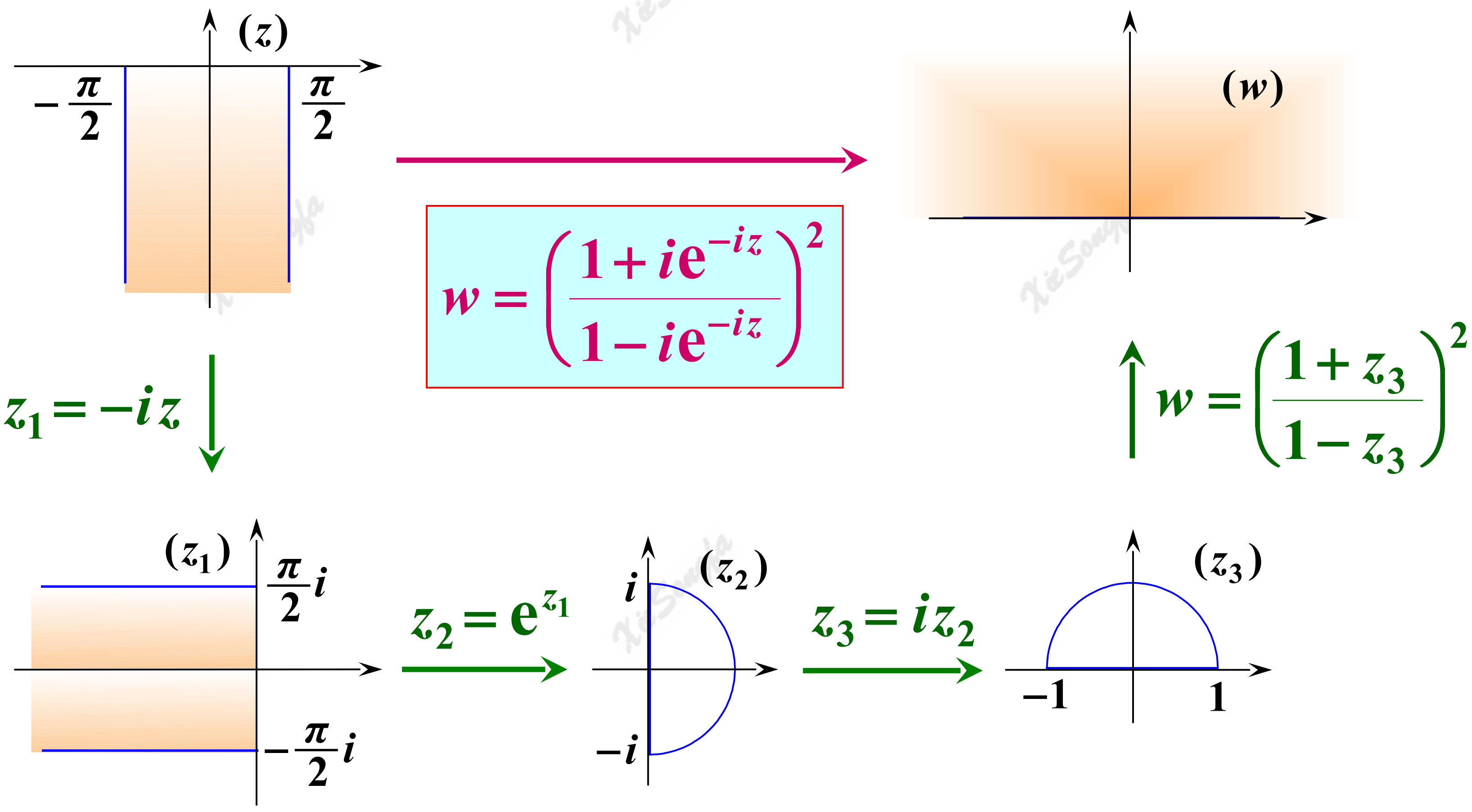
$$z_3=\frac{\pi}{3}z_2$$

$$z_4=e^{z_3}$$



例 设区域 $D=\{z:-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Re}\,z<\dfrac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}\,z<0\}$，求一共形映射将 D 映射成上半平面。 P163 例 6.19

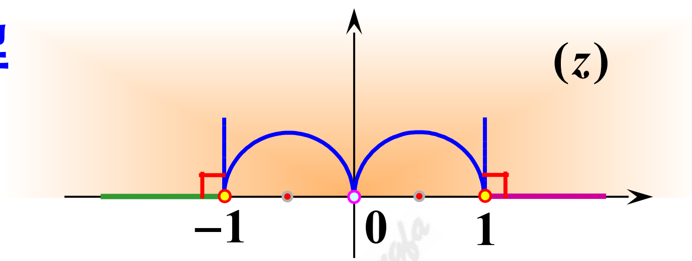
解



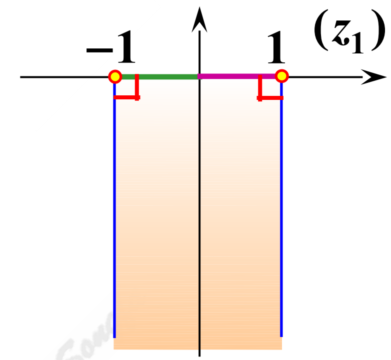
*例 设区域 $D=\{z: \operatorname{Im} z>0, |z-\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}, |z+\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}\}$,

映射将 D 映射成上半平面 P163 例 6.20

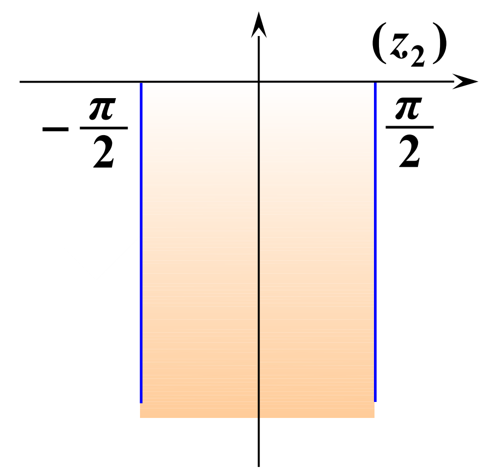
解



$$z_1=\frac{1}{z}$$



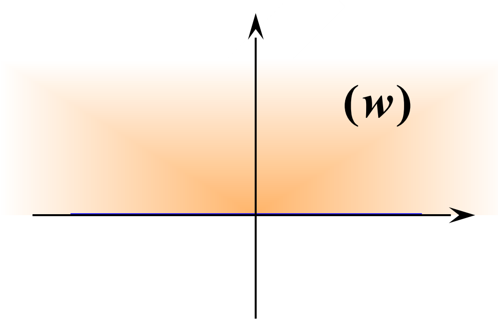
$$z_2=\frac{\pi}{2}z_1$$



$$\boxed{w=\left(\frac{1+ie^{-\frac{\pi i}{2z}}}{1-ie^{-\frac{\pi i}{2z}}}\right)^2}$$

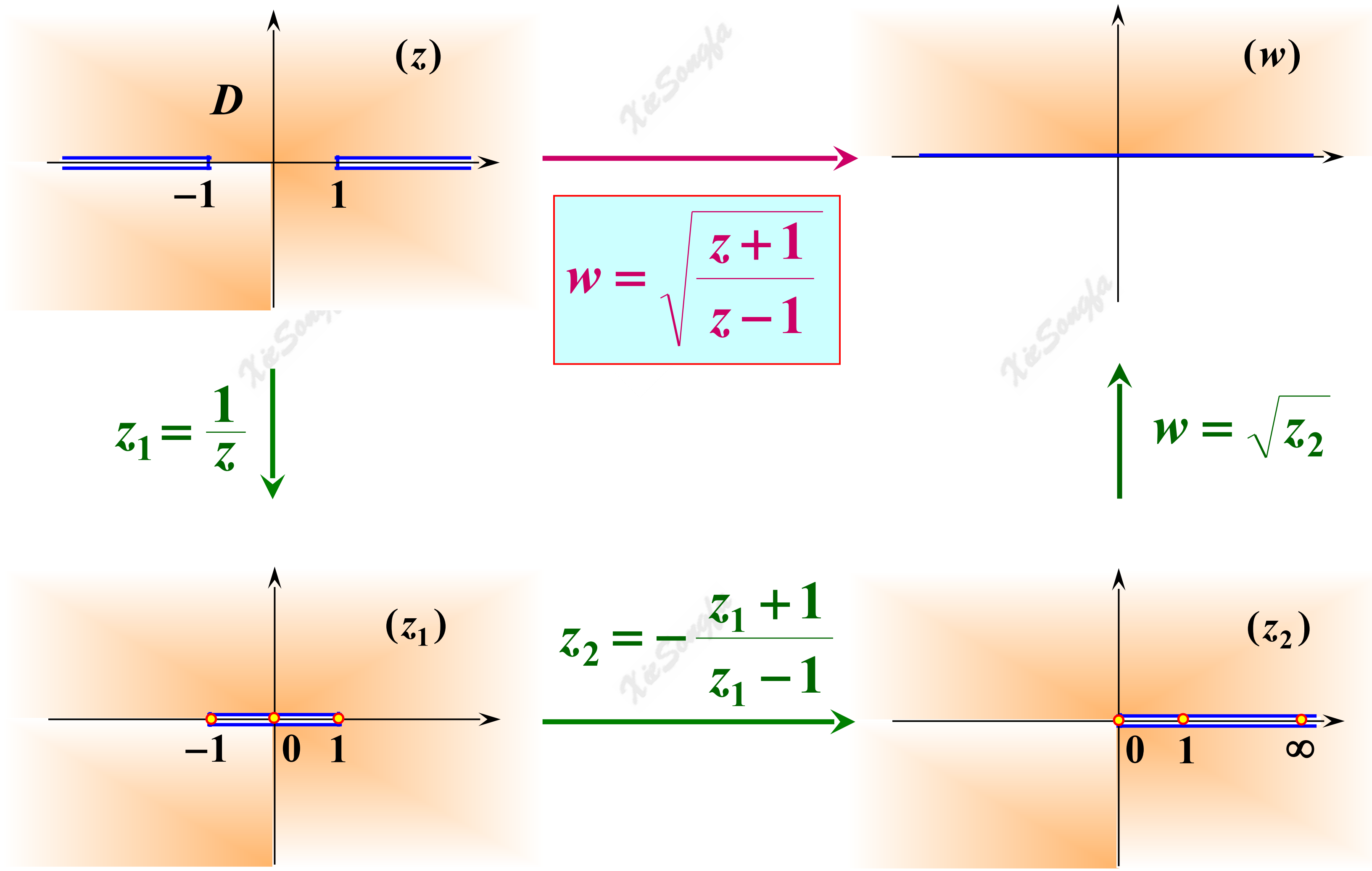
$$w=\left(\frac{1+ie^{-iz_2}}{1-ie^{-iz_2}}\right)^2$$

（利用前例的结果）



*例 设区域 D 如图所示，求一共形映射将 D 映射成单位圆

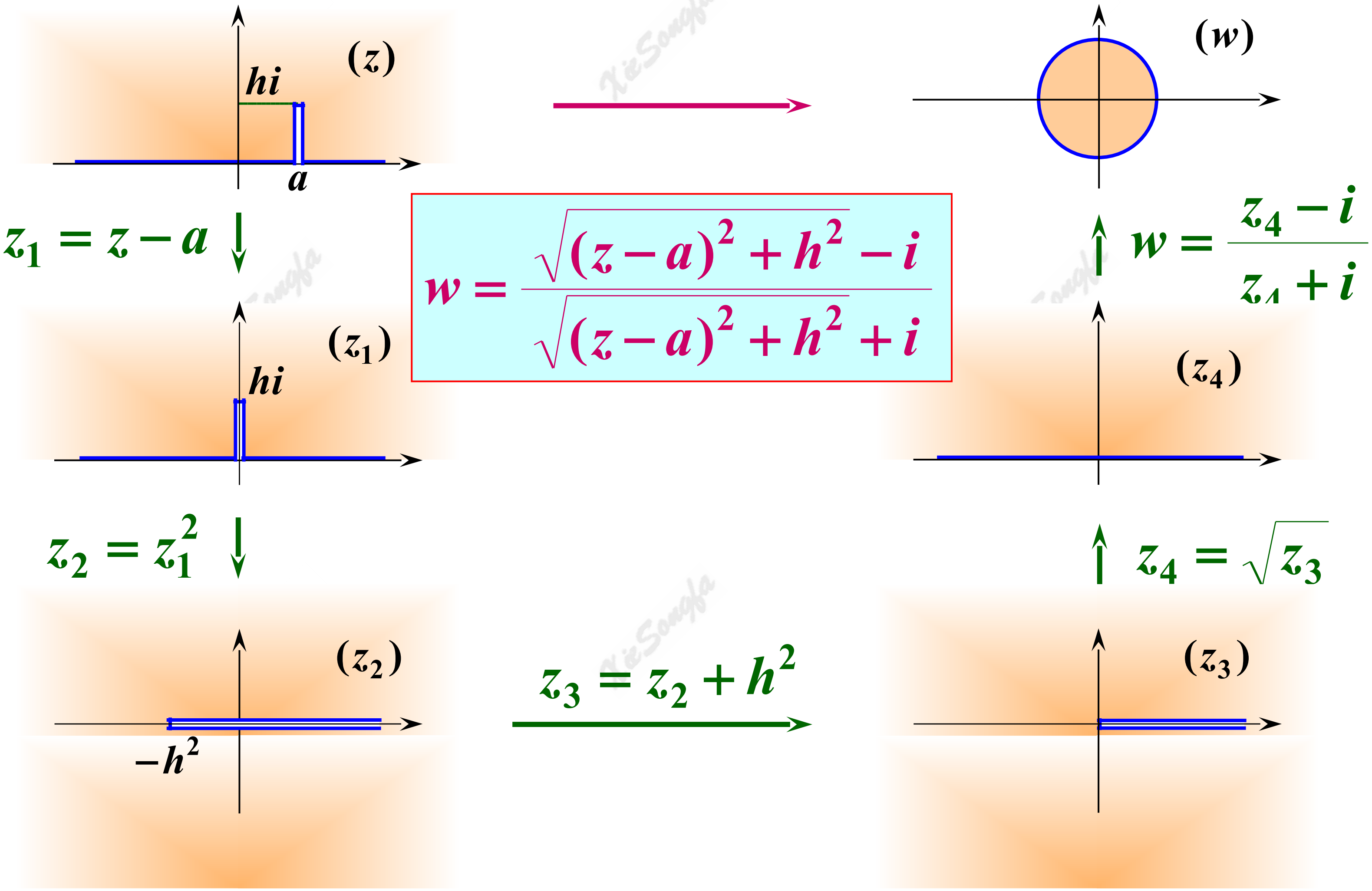
解



*例 求一共形映射，将有割痕 $\operatorname{Re} z = a,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le h$ 的上

映射成单位圆域。

解



$$w = \frac{\sqrt{(z-a)^2 + h^2} - i}{\sqrt{(z-a)^2 + h^2} + i}$$

休息一下 ……