§5.3 留数在定积分计算中的应用

一、形如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

二、形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

三、形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$ 的积分

一、形如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

要求 $R(u,v)$是 u,v 的有理函数,即$R(u,v)$ 是以 u,v 为变量的二元多项式函数或者分式函数。

方法 (1) 令$z=\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,

则 $\mathrm{d}z=i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=iz\,\mathrm{d}\theta$, $\Rightarrow$ $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$,

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz},$$

一、形如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

要求 $R(u,v)$是 u,v 的有理函数,即$R(u,v)$ 是以 u,v 为变量的二元多项式函数或者分式函数。

方法 (2) $$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \boxed{R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}}\,\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \boxed{f(z)}$$

$$= 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

其中，z_k 是$f(z)$ 在$|z|<1$ 内的孤立奇点。

例 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta\ (0<p<1)$ 的值。

P121 例 5.24

解 由 $1-2p\cos\theta+p^2=(1-p)^2+2p(1-\cos\theta)$ 及 $0<p<1$,

可知被积函数的分母不为零因而积分是有意义的。

(1) 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$,

则 $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$, $\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$,

$$\cos 2\theta=\frac{\mathrm{e}^{i2\theta}+\mathrm{e}^{-i2\theta}}{2}=\frac{z^2+z^{-2}}{2},$$

例 计算 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta\ (0<p<1)$ 的值。

解 (2) $I=\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\dfrac{1}{1-2p\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$

$$=\oint\limits_{|z|=1}\boxed{\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}}\mathrm{d}z=\oint\limits_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z.$$

在 $|z|<1$ 内函数 $f(z)$ 有两个孤立奇点：

二阶极点 $z_1=0$，一阶极点 $z_2=p$.

(注意：一阶极点 $z_3=1/p$ 不在 $|z|<1$ 内)

例 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta\ (0<p<1)$ 的值。

解 (3) $\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(z-pz^2-p+p^2z)4z^3-(1+z^4)(1-2pz+p^2)}{2i(z-pz^2-p+p^2z)^2}$$

$$=-\frac{1+p^2}{2ip^2},$$

- 事实上，可直接用洛朗展开的方法来求该点的留数。

利用洛朗展开求该点的留数

例 计算 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta\ (0<p<1)$ 的值。

解 (3) $\operatorname{Res}[f(z),p]=\lim\limits_{z\to p}\left[(z-p)\cdot\dfrac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$

$$=\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)},$$

$$I=2\pi i\left(\operatorname{Res}[f(z),p]+\operatorname{Res}[f(z),p]\right)$$

$$=2\pi i\left[-\frac{1+p^2}{2ip^2}+\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}\right]=\frac{2\pi p^2}{1-p^2}.$$

例 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值。

解 由于 $\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}$ 为偶函数，$I_1=2I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta.$

(1) 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$，$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，

$$I_1=\oint_{|z|=1}\frac{z+z^{-1}}{2}\cdot\frac{1}{5+4\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\boxed{\frac{1+z^2}{4iz(z+1/2)(z+2)}}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z.$$

例 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值。

解 (2) 在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 有两个一阶极点 $z_1=0$，$z_2=-\frac{1}{2}$.

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z f(z)=\left.\frac{1+z^2}{4i(z+1/2)(z+2)}\right|_{z=0}=\frac{1}{4i};$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-\frac{1}{2}]=\lim_{z\to -\frac{1}{2}} z f(z)=\left.\frac{1+z^2}{4iz(z+2)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{5}{12i}.$$

$$I=\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\frac{1}{4i}-\frac{5}{12i}\right]=-\frac{\pi}{6}.$$ （实数）

二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) □□ $Q(x)$ □□□□□□ $P(x)$ □□□□□高二次；

(3) □□ $Q(x)$ 无实零点。

方法 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k].$

其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

推导 （略）（进入推导？）

例 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,\mathrm{d}x.$ P123 例 5.25

解 (1) 令 $R(z)=\dfrac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}=\dfrac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)}$

在上半平面内，i 与 $3i$ 为 $R(z)$ 一阶极点。

(2) $\operatorname{Res}[R(z),i]=\dfrac{z^2-z+2}{(z+i)(z^2+9)}\bigg|_{z=i}=-\dfrac{1+i}{16},$

$\operatorname{Res}[R(z),3i]=\dfrac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z+3i)}\bigg|_{z=3i}=\dfrac{3-7i}{48}.$

(3) $I=2\pi i\left(-\dfrac{1+i}{16}+\dfrac{3-7i}{48}\right)=\dfrac{5\pi}{12}.$

例 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$，$(a>0,\ b>0,\ a\neq b)$.

解 (1) 令 $R(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$,

在上半平面内，ai 与 bi 为一阶极点。

(2) $\mathrm{Res}[R(z),ai]=\lim\limits_{z\to ai}\big((z-ai)R(z)\big)=\dfrac{a}{2i(a^2-b^2)}$,

$\mathrm{Res}[R(z),bi]=\lim\limits_{z\to ai}\big((z-bi)R(z)\big)=\dfrac{b}{2i(b^2-a^2)}$.

(3) $I=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}R(z)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\frac{a}{2i(a^2-b^2)}+\frac{b}{2i(b^2-a^2)}\right)=\frac{\pi}{2(a+b)}.$$

例 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

解 (1) 记 $I_1=2I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$，令 $R(z)=\frac{z^2}{z^4+1}$，

在上半平面内，$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i}$，$z_2=e^{\frac{3\pi}{4}i}$ 为两个一阶极

(2) $\operatorname{Res}[R(z),z_1]=\left.\frac{z^2}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_1}=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}$，

$\operatorname{Res}[R(z),z_2]=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_2}=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{4}i}.$

(3) $I_1=2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，$\Rightarrow\quad I=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$

三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$ 的积分

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) □□ $Q(x)$ □□□□□□ $P(x)$ □□□□□高一次；

(3) □□ $Q(x)$ 无实零点。

方法 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k}\mathrm{Res}[\,R(z)\,\mathrm{e}^{iaz},\ z_k\,].$

其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点。

三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx\ (a>0)$ 的积分

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) □□ $Q(x)$ □□□□□□ $P(x)$ □□□□□高一次；

(3) □□ $Q(x)$ 无实零点。

方法 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_{k}\mathrm{Res}[R(z)\,e^{iaz}, z_k] \xlongequal{\text{记为}} A+iB.$

特别 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,dx = A$; $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,dx = B.$

推导 (略) (进入推导?)

例 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x.$

解 (1) 令 $f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{z^2-2z+10}=\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{(z-1-3i)(z-1+3i)},$

在上半平面内， $1+3i$ 为一阶极点。

$$\mathrm{Res}[f(z),1+3i]=\left.\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{2z-2}\right|_{z=1+3i}=\frac{1+3i}{6i}\mathrm{e}^{-3+i}.$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x=2\pi i\cdot\frac{1+3i}{6i}\mathrm{e}^{-3+i}$

$$=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(1+3i)(\cos 1+i\sin 1).$$

例 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x.$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(1+3i)(\cos 1+i\sin 1).$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(\cos 1-3\sin 1);$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{-3}(3\cos 1+\sin 1).$$

例 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2+1}\mathrm{d}x,\quad (a>0,\ b>0).$

解 (1) 令 $f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z^2+1}$，在上半平面内， i 为一阶极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i}=\frac{e^{-a}}{2i}.$$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}\mathrm{d}x=2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2i}=\pi e^{-a},$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi e^{-a}}{2}$; 同理 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi e^{-b}}{2}.$

(3) $I=\dfrac{\pi}{2}(e^{-a}-e^{-b}).$

附：关于第二、三型积分中$R(z)$ 有实孤立奇点的情况

□□ 若 $R(z)$ 在上半平面有孤立奇点$z_1, z_2, \cdots z_m$，在实轴上有孤立奇点$x_1, x_2, \cdots x_n$，则

P127

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}[f(z), x_k].$$

其中，$f(x)$ 为第二、三型积分中的被积函数。

附：关于第二、三型积分中$R(z)$有实孤立奇点的情况

例 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$ P127 例 5.27

解 (1) 令 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$，在实轴上，$z=0$ 为一阶极点，

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=e^{iz}\Big|_{z=0}=1.$$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x=\pi i\cdot\operatorname{Res}[f(z),0]=\pi i,$$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{2}.$$

休息一下 ……

附： 求函数 $f(z)=\dfrac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}$ 在 $=0$ 点的留数。

$$f(z)=-\frac{1}{2ip}\cdot\left(\frac{1}{z^2}+z^2\right)\cdot\frac{1}{1-pz}\cdot\frac{1}{1-z/p}$$

$$=-\frac{1}{2ip}\cdot\left(\frac{1}{z^2}+z^2\right)\cdot(1+pz+pz^2\cdots)\cdot\left(1+\frac{z}{p}+\frac{z^2}{p^2}+\cdots\right)$$

$$=\cdots\cdots-\frac{1}{2ip}\left(p+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{z}+\cdots\cdots$$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{1+p^2}{2ip^2}.$$

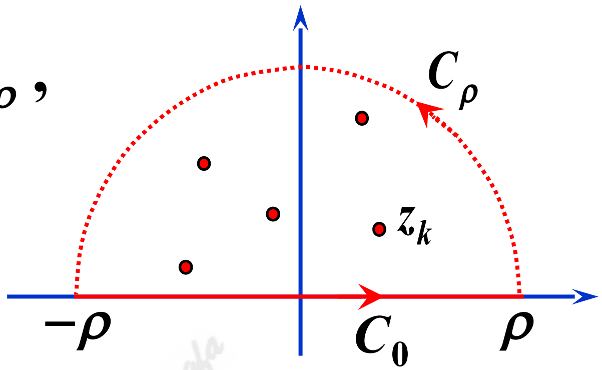
附：关于$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$ 型积分的公式推导

P122

推导（思路）

(1) 如图，取积分路径为$C=C_0+C_\rho$，

其中C_ρ 的半径为$\rho>\max\limits_k|z_k|$.



(2) 根据留数定理有

$$\oint_C R(z)\mathrm{d}z=\int_{C_0}R(z)\mathrm{d}z+\int_{C_\rho}R(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-\rho}^{\rho}R(x)\mathrm{d}x+\underline{\int_{C_\rho}R(z)\mathrm{d}z}$$

$$=2\pi i\sum_k\mathrm{Res}[R(z),z_k].$$

附：关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 型积分的公式推导

推导（思路） (3) $|R(z)| \overset{\text{不妨设}}{=\!=} \dfrac{|z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n|}{|z^m + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_m|}$

$$= \frac{1}{|z|^2} \cdot \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

$$\le \frac{1}{|z|^2} \cdot \frac{|1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}||}{|1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}||}$$

$$< \frac{1}{|z|^2} \cdot \frac{1+0.5}{1-0.5} = \frac{3}{|z|^2}.$$ （当 $|z|$ 足够大）

附：关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 型积分的公式推导

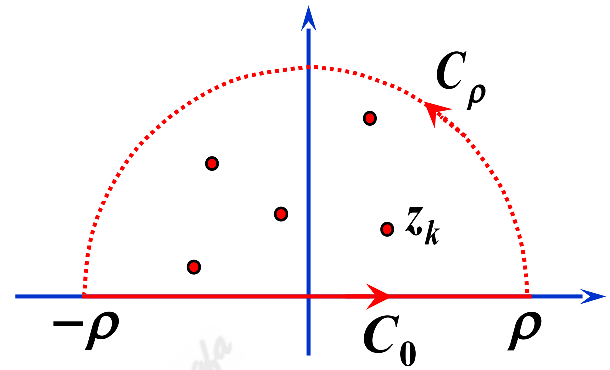
□□

（思路）

(4) $$\left|\oint_{C_\rho} R(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \oint_{C_\rho} |R(z)|\cdot|\mathrm{d}z|$$

$$\le \oint_{C_\rho} \frac{3}{|z|^2}\cdot|\mathrm{d}z|$$

$$\le \frac{3}{\rho^2}\cdot\pi\rho = \frac{3\pi}{\rho} \to 0,\ (\rho\to+\infty).$$



(5) 由 $$\int_{-\rho}^{\rho} R(x)\,\mathrm{d}x + \oint_{C_\rho} R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k],$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k].$$

（返回）

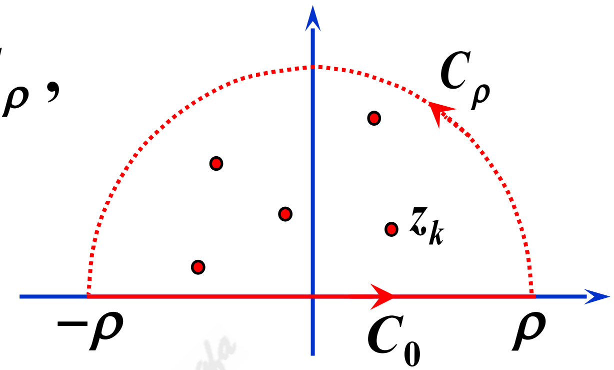
附： 关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$ 型积分的公式推导

P123

推导（思路）

(1) 如图，取积分路径为 $C = C_0 + C_\rho$，

其中 C_ρ 的半径为 $\rho > \max\limits_k |z_k|$.



(2) 根据留数定理有

$$\oint_C R(z)\mathrm{e}^{iaz}\,\mathrm{d}z = \int_{C_0} R(z)\mathrm{e}^{iaz}\,\mathrm{d}z + \int_{C_\rho} R(z)\mathrm{e}^{iaz}\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-\rho}^{\rho} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x + \underline{\int_{C_\rho} R(z)\mathrm{e}^{iaz}\,\mathrm{d}z}$$

$$= 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{iaz}, z_k].$$

附：关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx \ (a>0)$ 型积分的公式推导

推导（思路）(3) $|R(z)| \overset{\text{不妨设}}{=\!=} \dfrac{|z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n|}{|z^m+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_m|}$

$$= \frac{1}{|z|}\cdot\frac{|1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}{|1+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}$$

$$\le \frac{1}{|z|}\cdot\frac{|1+|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}||}{|1-|b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}||}$$

$$< \frac{1}{|z|}\cdot\frac{1+0.5}{1-0.5}=\frac{3}{|z|}.$$

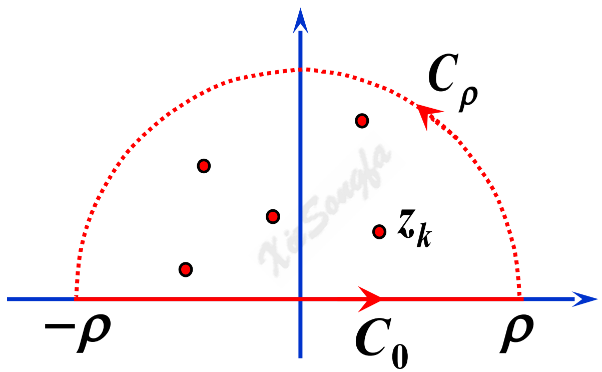
（当 $|z|$ 足够大）

附： 关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$ 型积分的公式推导

□□

（思路）

(4) $\left|\int_{C_\rho} R(z)\mathrm{e}^{iaz}\mathrm{d}z\right| \le \int_{C_\rho} |R(z)|\cdot|\mathrm{e}^{iaz}|\cdot|\mathrm{d}z|$



$$\le \frac{3}{\rho}\int_{C_\rho} \mathrm{e}^{-ay}\mathrm{d}s$$

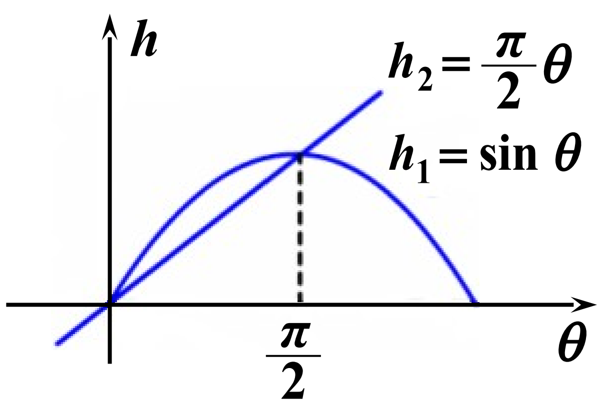
$y=\rho\sin\theta$

$$\le \frac{3}{\rho}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-a\rho\sin\theta}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$\sin\theta$ 关于 $\pi/2$ 对称

$$= 6\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-a\rho\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$\sin\theta \le \frac{\pi}{2}\theta$



$$\le 6\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-a\rho\frac{\pi}{2}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3\pi}{a\rho}(1-\mathrm{e}^{-a\rho}) \to 0,\ (\rho\to+\infty).$$

附：关于 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$ 型积分的公式推导

□□

（思路）

(5) 由 $\displaystyle\int_{-\rho}^{\rho} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x + \int_{C_\rho} R(z)\mathrm{e}^{iaz}\,\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[\,R(z)\mathrm{e}^{iaz},\ z_k\,],$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[\,R(z)\mathrm{e}^{iaz},\ z_k\,].$$

（返回）