练　习　八

1．求下列函数在指定点 z_0 处的 Taylor 展式。

（1）$\dfrac{1}{4-3z}, z_0=1+i$

解：$f(z)$ 只有一个奇点 $z=\dfrac{4}{3}$，其收敛半径为　$R=\left|\dfrac{4}{3}-1-i\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

则 $\dfrac{1}{4-3z}=\dfrac{1}{1-3i-3(z-1-i)}=\dfrac{1}{1-3i}=\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{1-3i}(z-1-i)}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n,\quad |z-(1+i)|<\frac{\sqrt{10}}{3}$$

（2）$\sin z, z_0=1$

解：$\sin z=\sin(z-1+1)=\sin(z-1)\cos 1+\sin 1\cos(z-1)$

$$=\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{2n!}$$

或：$(\sin z)^{(n)}=\sin(z+n\cdot\dfrac{\pi}{2})\quad ,(\sin z)^{(n)}\Big|_{z=1}=\sin(1+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$

故　$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\sin(\dfrac{n\pi}{2}+1)(z-1)^n, |z-1|<\infty$

2．将下列各函数在指定圆环域内展为 Laurent 级数。

（1）$z^2e^{\frac{1}{z}},\quad 0<|z|<\infty$

解：$z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{z^{-2}}{2!}+\cdots)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{-n+2}}{n!}$

（2）$\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}, 1<|z|<2$

解：奇点为 $z=2,\pm i$，故可在 $1<|z|<2$ 中展开为洛朗级数。

$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}=-\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}-\frac{2}{z^2(1+\frac{1}{z^2})}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{z^2})^n$$

3．将$\frac{1}{(z^2+1)^2}$，在$z=i$的去心邻域内展为$Laurent$级数。

解：因 $\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^{n+1}}$

所以 $\frac{1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{(z+i)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}(\frac{-1}{(z+i)})'=\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(z-i)^{n-3}}{2^{n+1}}i^{n-1}$

4．证明在$f(z)=\cos(z+\frac{1}{z})$以z的各幂表出的Lanrent展开式中的各系数为：

$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta, n=0,\pm1,\cdots\cdots$

提示：令C为单位圆$|z|=1$，在C上取积分变量$z=e^{i\theta}$，则$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta, dz=ie^{i\theta}d\theta$。

证明：$f(z)$在$0<|z|<1$上解析，令$c:|z|=1$

在c上取$z=e^{i\theta}$则$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \quad dz=ie^{j\theta}d\theta$

$$\therefore C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{(n+1)i\theta}}ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

而$\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta=0$

$$\therefore c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$$

*5.思考题

（1）实变函数中函数展成Taylor级数和复变量函数中函数展开为Taylor级数的条件有什么不同?

答：在实变量函数的情形下，即使$f(x)$的各阶导数都存在，欲把函数展开成幂级数

也未必可能。这是因为在实变量函数里，函数 $f(x)$ 展开成 Taylor 级数的条件既要求 $f(x)$ 具有各阶导函数，还要求所展成的 Taylor 级数的余项趋向于零，对于一个具体的函数来说，要证明其各阶导数都存在，已不容易，要证明其级数的余项趋近于零就更困难了。而对复变函数来讲，只要函数在 z_0 的邻域内处处解析，不仅有一阶导数，且有各阶导数。而实函数的可导性不能保证导数的连续性，因而不能保证高阶导数的存在。

（2）确定 $f(z)$ 的 Taylor 级数的收敛半径时，应注意什么？奇点为什么在收敛圆周上?

答：一般地，$f(z)$ 在解析区域 D 内一点 z_0 的 Taylor 级数的收敛半径，等于 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离。但 $f(z)$ 在 D 内有奇点时，$R=|\alpha-z_0|,\alpha$ 是 $f(z)$ 的距 z_0 最近的一个奇点。因此，在确定 $f(z)$ 的 Taylor 级数的收敛半径时，要确定 $f(z)$ 在 D 内有无奇点，并找出距 z_0 距离最近的一个奇点。

奇点总是落在收敛圆周上，因为若在收敛圆内，则在圆内出现 $f(z)$ 的不解析点；若在圆外，则收敛圆还可扩大。

（3）Laurent 级数与 Taylor 级数有何关系?

答：Laurent 级数与 Taylor 级数的关系是：当已给函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析时，中心在 z_0，半径等于由 z_0 到函数 $f(z)$ 的最近奇点的距离的那个圆域可以看成圆环域的特殊情形。在其中就可以作出罗伦级数展开式，根据柯西积分定理，这个展式的所有系数 $C_{-n}(n=1,2,\cdots)$ 都等于零。在此情形下，计算罗伦级数的系数公式与 Taylor 级数的系数公式相同，所以罗伦级数就转化为 Taylor 级数。因此，Taylor 级数是罗伦级数的特殊情形。