复变函数与积分变换试题（一）

一、填空题

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3}$ 的模为__，辐角主值为__ 。

(2) $\mathrm{Ln}(-1)$ 的值为__________，$\mathrm{e}^{-3+\frac{\pi}{4}i}$ 的值为__________ 。

(3) 映射 $w=z^3-z$ 在 $z=i$ 处的旋转角为___，伸缩率为__ 。

(4) 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析的

充要条件为____________________ 。

(5) $\dfrac{1}{z(4-3z)}$ 在 $z_0=1+i$处展开成泰勒级数的收敛半径为____ 。

(6) $z=0$ 是$f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$的何种类型的奇点？________ 。

(7) $\oint_{|z|=\frac{1}{4}} \dfrac{e^z}{(z-\pi)^3(z+1/2)}\,dz=$ ____ 。

(8) 已知 $f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)+\delta(t+\dfrac{t_0}{2})+\delta(t-\dfrac{t_0}{2})]$，

求$\mathcal{F}[f(t)]=$ ____________ 。

二、验证 $u(x,y)=2(x-1)y$ 是 z 平面上的调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数，使 $f(2)=-i$.

三、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在 $z=1$ 与 $z=2$ 处展开为洛朗级数。

四、计算下列各题

1. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z\sin z}{z^3}\,dz$

2. $\oint_{|z|=2} z\,e^{\frac{1}{z-1}}\,dz$

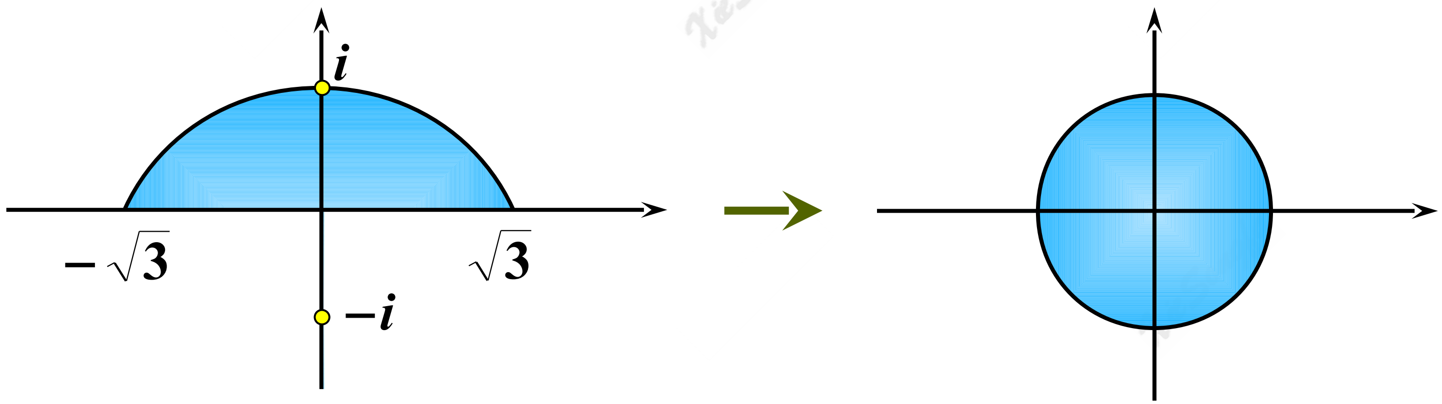
3. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$

5. 已知 $f_1(t)=e^{-t}u(t)$，$f_2(t)=t\,u(t)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$。

五、求区域$D=\{z:\mathrm{Re}\,z>0,\ 0<\mathrm{Im}\,z<1\}$在映射$w=\dfrac{i}{z}$下的像。

六、求把下图阴影部分映射到单位圆内部的保形映射。



七、用拉氏变换求解微分方程$''+y=t$，$y(0)=1$，$y'(0)=-2$.

八、设函数$f(z)$在$|z|\le R$上解析，证明

$$\frac{R^2-|z|^2}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\bar{z}\xi)}\mathrm{d}\xi=f(z),\quad(|z|<R).$$

复变函数与积分变换试题(一)解答

一、填空题

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$ 的模为 1，辐角主值为 π 。

(2) $\mathrm{Ln}(-1)$ 的值为 $(2k+1)\pi i$ ，$e^{-3+\frac{\pi}{4}i}$ 的值为 $e^{-3}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$ 。

(3) 映射 $w=z^3-z$ 在 $z=i$ 处的旋转角为 π ，伸缩率为 4 。

(4) 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件为 u,v 在 D 内可微，且满足 C-R 方程。

(5) $\dfrac{1}{z(4-3z)}$ 在 $z_0=1+i$处展开成泰勒级数的收敛半径为 $\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{3}}$ 。

(6) $z=0$ 是$f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$的何种类型的奇点？ 可去奇点 。

(7) $\oint_{|z|=\frac{1}{4}} \dfrac{e^z}{(z-\pi)^3(z+1/2)}\,dz=$ $\underline{0}$ 。

(8) 已知 $f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)+\delta(t+\dfrac{t_0}{2})+\delta(t-\dfrac{t_0}{2})]$，

求$\mathscr{F}[f(t)]=$ $\underline{\cos\omega t_0+\cos\dfrac{\omega t_0}{2}}$ 。

2002

二、验证 $u(x,y)=2(x-1)y$ 是 z 平面上的调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数，使 $f(2)=-i$.

解 (1) $u_{xx}=0,\quad u_{yy}=0,\quad \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0,$

故 $u(x,y)$ 为调和函数。

(2) 方法一：偏微分法

由 $u_x=2y=v_y,\quad \Rightarrow \quad v=\int 2y\,\mathrm{d}y\ =y^2+\varphi(x),$

由 $u_y=2x-2=-v_x=-\varphi'(x),\quad \Rightarrow \quad \varphi(x)=-x^2+2x+c,$

即得 $v(x,\ y)=-x^2+2x+y^2+c,$

$$f(z)=2(x-1)y+i(-x^2+2x+y^2+c).$$

二、验证 $u(x,y)=2(x-1)y$ 是 z 平面上的调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数，使 $f(2)=-i$.

解 (2) 方法二：全微分法

由 $u_x=2y=v_y$， $u_y=2x-2=-v_x$，

有 $dv=(-2x+2)dx+2ydy=d(-x^2+2x+y^2)$，

即得 $v(x, y)=-x^2+2x+y^2+c$，

$$f(z)=2(x-1)y+i(-x^2+2x+y^2+c).$$

(3) 由 $f(2)=-i$， $\Rightarrow c=-1$，

$$f(z)=2(x-1)y+i(-x^2+2x+y^2-1).$$

三、将函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$为分别在$z=1$与$z=2$处展开为洛朗级数。

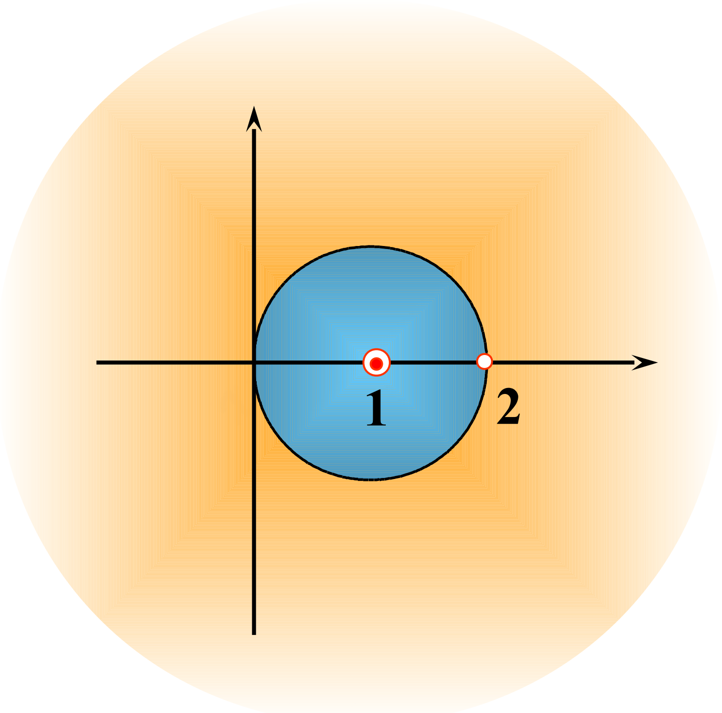
解 (1) 在 $z=1$ 处展开

① 当$0<|z-1|<1$时，

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-(z-1)}$$

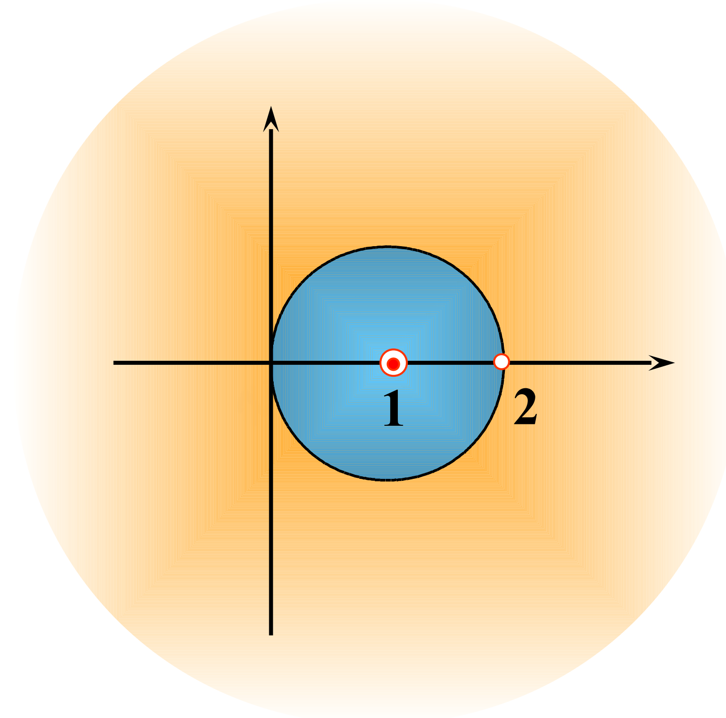
$$=-\frac{1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}.$$



三、将函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$为分别在$z=1$与$z=2$处展开为洛朗级数。

解 (1) 在 $z=1$ 处展开



② 当$|z-1|>1$时，

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}.$$

三、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在 $z=1$ 与 $z=2$ 处展开为洛朗级数。

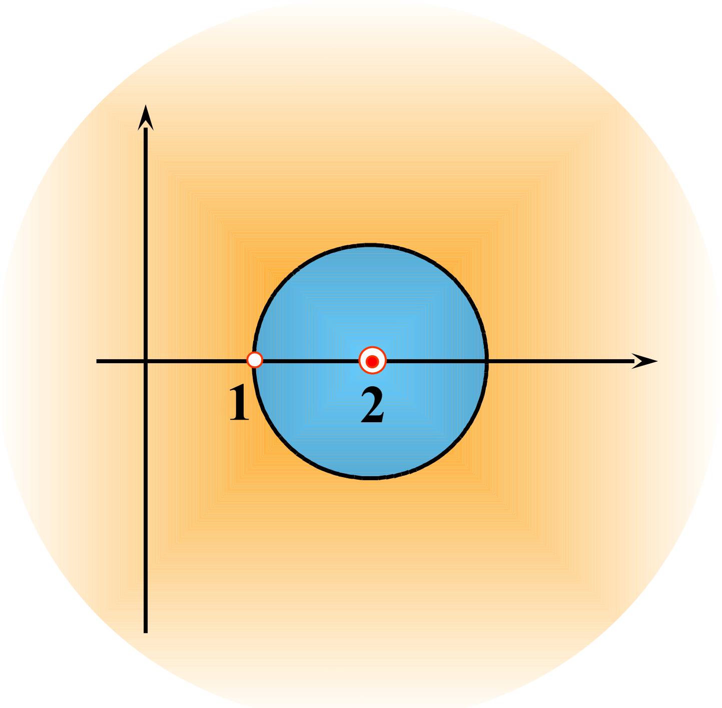
解 (2) 在 $z=2$ 处展开

① 当 $0<|z-2|<1$ 时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^{n-1}.$$

② 当 $|z-2|>1$ 时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+2}}.$$



四、1. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z\sin z}{z^3}\,dz$

解 方法一 利用留数求解

$z=0$ 为二级极点,

$$原式=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{e^z\sin z}{z^3}\right)'=1.$$

方法二 利用高阶导数公式求解

$$原式=\frac{1}{2!}(e^z\sin z)''\Big|_{z=0}=1.$$

四、2. $\oint_{|z|=2} z\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}\,\mathrm{d}z$

解 $z=1$ 为本性奇点,

$$z\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}=[(z-1)+1](1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots)$$

$$=\cdots+(\frac{1}{2!}+1)\frac{1}{z-1}+\cdots,$$

原式 $=2\pi i\cdot\dfrac{3}{2}=3\pi i.$

四、3. $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$

解 (1) 原式 $=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(2\theta)}{3-\cos 2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\cos\theta}$,

令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, 则 $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$, $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$,

原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\left(3-\frac{z^2+1}{2z}\right)iz}=2i\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-6z+1}$.

四、3. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$

解 (1) 原式 $\displaystyle=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\left(3-\dfrac{z^2+1}{2z}\right)iz}=2i\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-6z+1}.$

(2) 记 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-6z+1}$，则 $f(z)$ 有两个一级极点：

$z_1=3-2\sqrt{2}$，$z_2=3+2\sqrt{2}$. (z_2不在 $|z|=1$ 内)

原式 $\displaystyle=2i\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),z_1]=-4\pi\cdot\left.\frac{1}{2z-6}\right|_{z=z_1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

四、4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$

解 令 $\displaystyle f(z)=\frac{\mathrm{e}^{iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}$,

在上半平面有两个一级极点 $z_1=i,\ z_2=3i$,

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\frac{\mathrm{e}^{iz}}{[(z^2+1)(z^2+9)]'}\bigg|_{z=i}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{16i},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_2]=\frac{\mathrm{e}^{-3}}{-48i},$$

$$原式=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi i\left(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{16i}-\frac{\mathrm{e}^{-3}}{48i}\right)\right]=\frac{\pi(3\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-3})}{48}.$$

四、5. 已知$f_1(t)=\mathrm{e}^{-t}\,u(t)$，$f_2(t)=t\,u(t)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$。

解 $$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\underline{f_2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\underline{f_2[-(\tau-t)]}\mathrm{d}\tau,$$

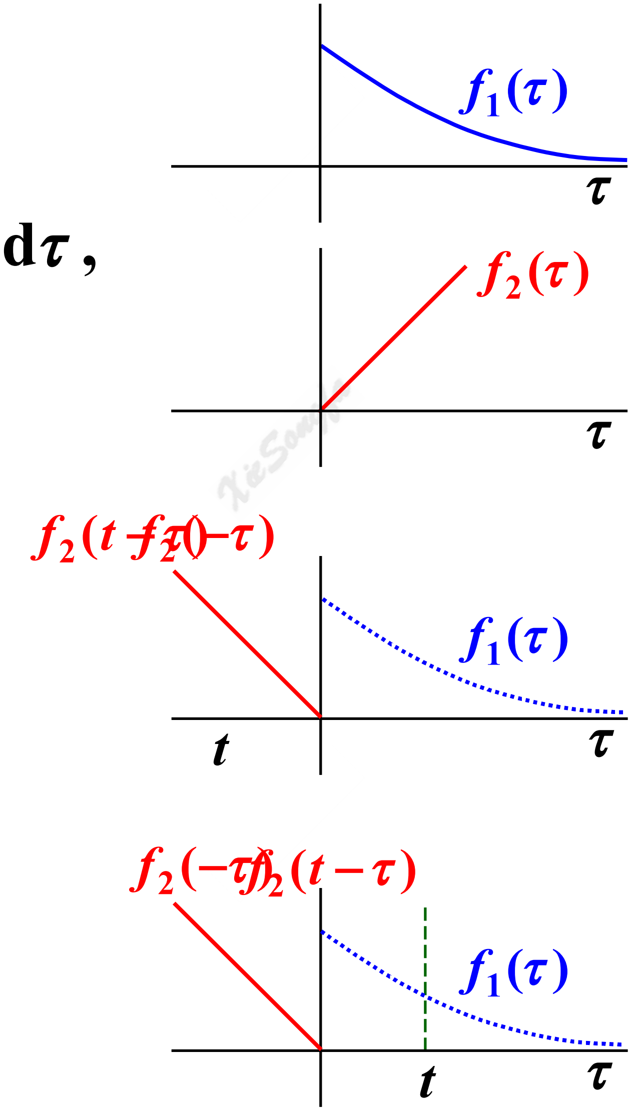
(1) 当$t\le 0$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=0;$$

(2) 当$t>0$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t e^{-\tau}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=(t-1)+\mathrm{e}^{-t}.$$



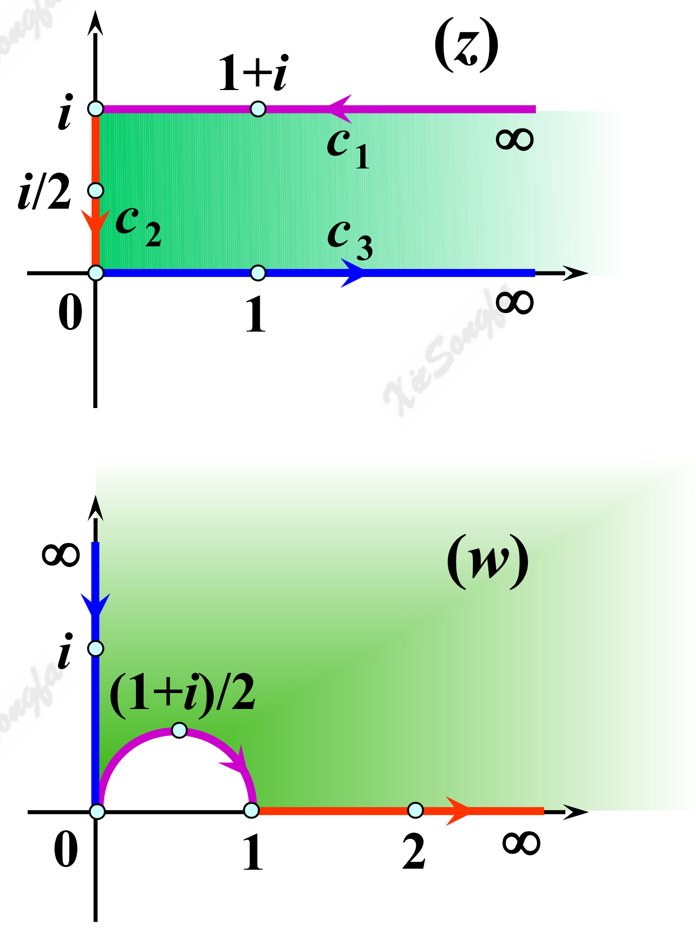
五、求区域$D=\{z:\operatorname{Re}z>0,\ 0<\operatorname{Im}z<1\}$在映射$w=\dfrac{i}{z}$下的像。

解

$$c_1\begin{cases}\infty & \to & 0\\ 1+i & \to & (1+i)/2\\ i & \to & 1\end{cases}$$

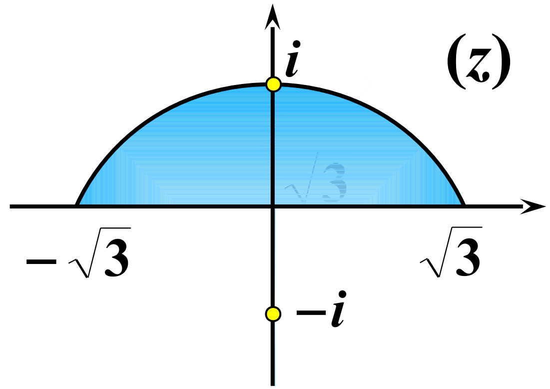
$$c_2\begin{cases}i & \to 1\\ i/2 & \to 2\\ 0 & \to \infty\end{cases}$$

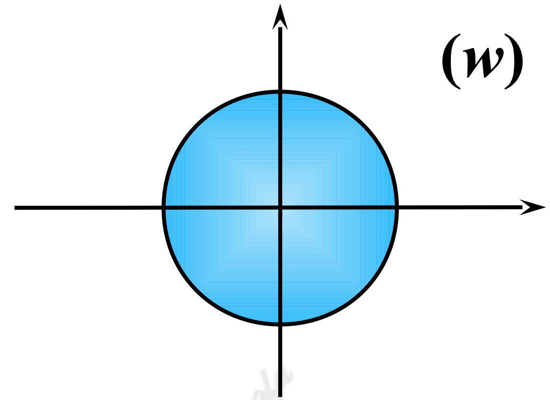
$$c_3\begin{cases}0 \to \infty\\ 1 \to i\\ \infty \to 0\end{cases}$$



六、求把下图阴影部分映射到单位圆内部的保形映射。

解

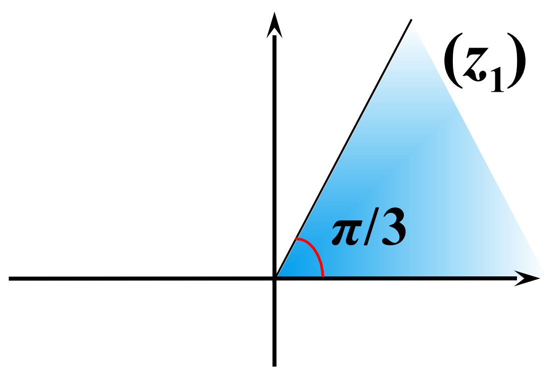




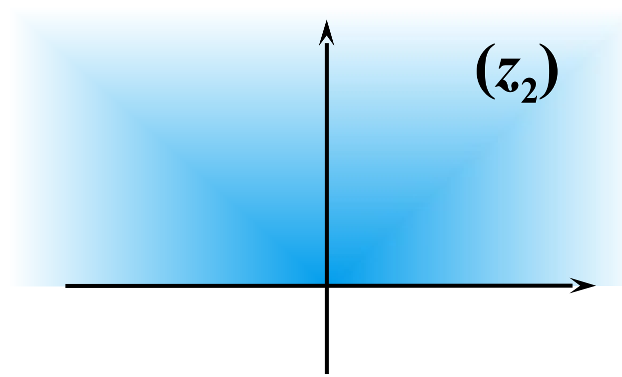
$$z_1 = -\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$$

$$w = \frac{\left(-\dfrac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right)^3 - i}{\left(-\dfrac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right)^3 + i}$$

$$w = \frac{z_2 - i}{z_2 + i}$$



$$z_2 = z_1^3$$



七、用拉氏变换求解微分方程$''+y=t$，$y(0)=1$，$y'(0)=-2$.

解 (1) 令$Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程两边取拉氏变换得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{1}{s^2},$$

代入初值得

$$s^2Y(s)-s+2+Y(s)=\frac{1}{s^2},$$

求解得

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}.$$

七、用拉氏变换求解微分方程$y''+y=t$，$y(0)=1$，$y'(0)=-2$.

解 (2) 求拉氏逆变换

方法一　利用部分分式求解

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

$$=\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}$$

$$=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s^2+1},$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=\cos t+t-3\sin t.$$

七、用拉氏变换求解微分方程$y''+y=t$，$y(0)=1$，$y'(0)=-2$.

解 (2) 求拉氏逆变换

方法二　利用留数求解

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{s^3-2s^2+1}{s^2(s^2+1)},$$

有一个二阶极点$s_1=0$, 两个一阶极点$s_{2,3}=\pm i$,

$$\mathrm{Res}[Y(s)\mathrm{e}^{st},0]=\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s^2\cdot\frac{(s^3-2s^2+1)\mathrm{e}^{st}}{s^2(s^2+1)}\right)=t;$$

七、用拉氏变换求解微分方程$'' + y = t$，$y(0) = 1$，$y'(0) = -2$.

解 (2) 求拉氏逆变换

方法二 利用留数求解

$$\operatorname{Res}[Y(s)\mathrm{e}^{st}, i] = \left(\frac{(s^3 - 2s^2 + 1)\mathrm{e}^{st}}{s^2(s+i)}\right)\Bigg|_{s=i} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2i}\right)\mathrm{e}^{it};$$

$$\operatorname{Res}[Y(s)\mathrm{e}^{st}, -i] = \left(\frac{(s^3 - 2s^2 + 1)\mathrm{e}^{st}}{s^2(s-i)}\right)\Bigg|_{s=-i} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2i}\right)\mathrm{e}^{-it};$$

$$y(t) = t + \left(\frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}\right) - 3\left(\frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}\right) = \cos t + t - 3\sin t.$$

八、设函数$f(z)$在$|z|\leq R$上解析，证明

$$\frac{R^2-|z|^2}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\bar{z}\xi)}\mathrm{d}\xi=f(z),\quad (|z|<R).$$

证明 (1) 被积函数有两个一阶极点$\xi_1=z,\ \xi_2=\dfrac{R^2}{\bar{z}}$,

由于$|z|<R$，故 ξ_2 在$|\xi|=R$ 之外；

(2) 左边 $=\dfrac{R^2-|z|^2}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R}\dfrac{1}{(\xi-z)}\left(\dfrac{f(\xi)}{R^2-\bar{z}\xi}\right)\mathrm{d}\xi$

$$=\frac{R^2-|z|^2}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot\left(\frac{f(\xi)}{R^2-\bar{z}\xi}\right)\Bigg|_{\xi=z}=f(z).$$

休息一下 ……