§2.3 初等函数

一、指数函数

二、对数函数

三、幂函数

四、三角函数

五、反三角函数

六、双曲函数与反双曲函数

§2.3 初等函数

- 复变函数中的初等函数是实数域中初等函数的推广，它们的定义方式尽可能保持一致。特别是当自变量取实值时，两者是一样的。

- 本节主要从下面几个方面来讨论复变函数中的初等函数：定义、定义域、运算法则、连续性、解析性、单值性以及映射关系等等。特别要注意与实初等函数的区别。

一、指数函数

定义 对于复数$z=x+iy$，称 $w=e^x(\cos y+i\sin y)$ 为<u>指数函数</u>，

P41 定义2.5

记为 $w=\exp z$ 或 $w=e^z$.

注 (1) 指数函数是初等函数中最重要的函数，其余的初等函数都通过指数函数来定义。

(2) 借助欧拉公式，指数函数可以这样来记忆：

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

(3) 但事实上，从定义本身来看 e^z 应理解为仅仅是一种记号或者规定，仅仅作为代替 $\exp z$ 的符号使用。

一、指数函数

性质 (1) e^z 是单值函数。

事实上，对于给定的复数$=x+iy$,

定义中的$e^x, \cos y, \sin y$ 均为单值函数。

(2) e^z 除无穷远点外，处处有定义。

事实上，在无穷远点有

当 $y=0, x\to+\infty$ 时, $e^z\to+\infty$;

当 $y=0, x\to-\infty$ 时, $e^z\to 0$.

(3) $e^z\neq 0$. 因为 $e^x>0$, $\cos y+i\sin y\neq 0$.

(4) e^z 在复平面上处处解析，且 $(e^z)'=e^z$.

一、指数函数

性质 (5) $\forall z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$，有 $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

事实上，

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) +$$

$$i(\sin y_1 \cos_2 + \cos y_1 \sin y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

(6) e^z 是以$2k\pi i$ 为周期的周期函数

。 事实上，由$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$,

有

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z.$$

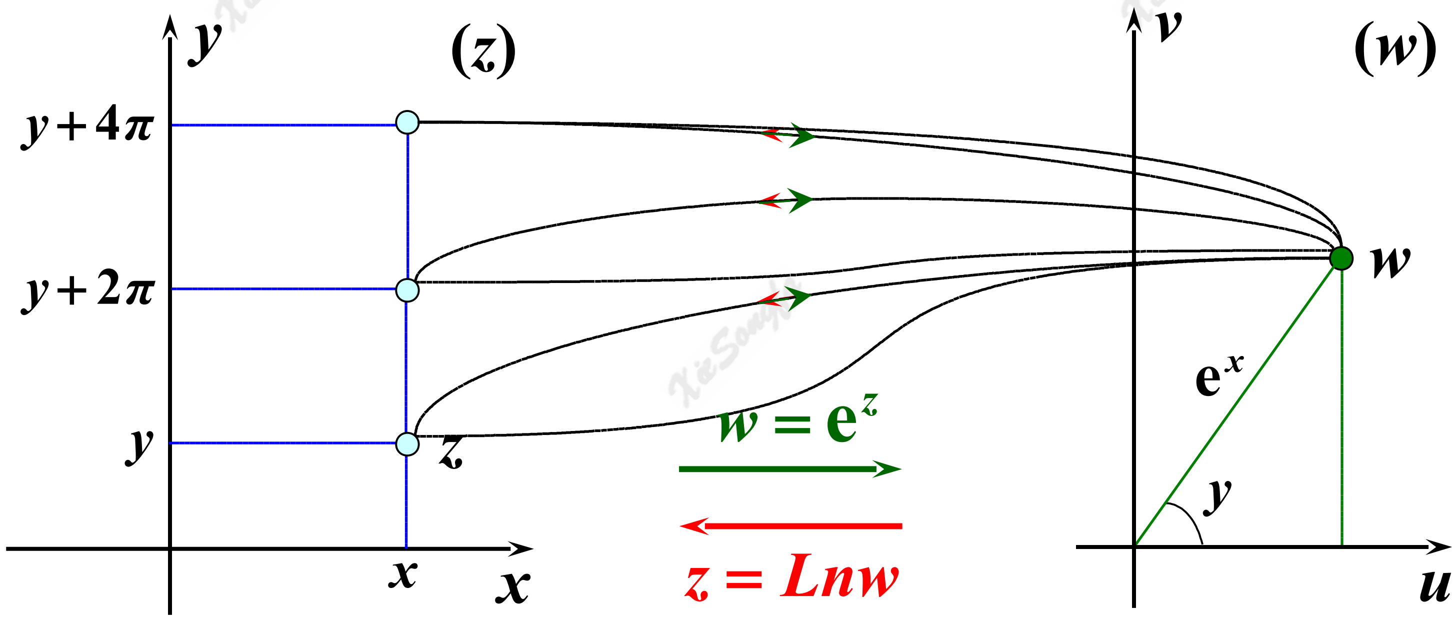
一、指数函数

性质 (6) 映射关系：由 $w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{iy}$，有

$$\begin{cases} |w|=e^x, \\ \operatorname{Arg} w = y+2k\pi, \end{cases} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$|w|=e^x$ —— 由 z 的实部得到 w 的模；

$\operatorname{Arg} w = y+2k\pi$ —— 由 z 的虚部得到 w 的辐角。



二、对数函数

- 对数函数定义为指数函数的反函数。

定义 满足方程 $e^{w}=z$ 的函数 $w=f(z)$ 称为对数函数，

P43 定义2.6

记作 $w=\mathrm{Ln}\,z$.

计算 令 $z=|z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}=r\,e^{i\theta}$, $w=u+iv$,

由 $e^{w}=z$, 有 $e^{u}\cdot e^{iv}=r\cdot e^{i\theta}$,

$$\Rightarrow\begin{cases}u=\ln r=\ln|z|, & \text{—— 由 } z \text{ 的模得到 } w \text{ 的实部}\\ v=\theta=\mathrm{Arg}\,z. & \text{—— 由 } z \text{ 的辐角得到 } w \text{ 的虚部}\end{cases}$$

即 $w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\,Arg\,z$ 。

$$=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

二、对数函数

$$\boxed{w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).}$$

- 显然对数函数为多值函数。

主值(枝) 称 $w = \ln|z| + i\arg z$ 为 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 的主值(枝)，

记为 $w = \ln z$.

故有 $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

特别地，当 $z = x > 0$ 时，$\mathrm{Ln}\, z$ 的主值 $\ln z = \ln x$ 就是实对数函数。

分支(枝) 对于任意一个固定的 k，称 $z + 2k\pi i$ 为 $\mathrm{Ln}\, z$ 的一个分支(枝)。

二、对数函数

性质 (1) $w=\mathrm{Ln}\,z$ 在原点无定义，故它的定义域为 $z\neq 0$.

注意到，函数 $\arg z$ 在原点无定义；

或者指数函数 $e^{w}\neq 0$.

(2) $\mathrm{Ln}\,z$ 的各分支在除去原点及负实轴的复平面内连续；

特别地，$\ln z$ 在除去原点及负实轴的平面内连续。

注意到，函数 $\arg z$ 在原点及负实轴上不连续。

二、对数函数

性质 (3) $\operatorname{Ln} z$ 的各分支在除去原点及负实轴的复平面内解析；

特别地，$\ln z$ 在除去原点及负实轴的平面内解析。

由反函数求导法则可得 $\dfrac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{(\mathrm{e}^{w})'_{w}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{w}}=\dfrac{1}{z}.$

进一步有 $\dfrac{\mathrm{d}\operatorname{Ln} z}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\mathrm{d}(\ln z+2k\pi i)}{\mathrm{d}z}=\dfrac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{z}.$

(4) $\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2$;

$\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2$.

（在集合意义下）

例 求下列对数以及它们的主值。

(1) $\mathrm{Ln}(-i)$; (2) $\mathrm{Ln}(1+i)$.

解 (1) $\mathrm{Ln}(-i)=\ln|-i|+i\arg(-i)+2k\pi i$

$$=\ln 1+i(-\frac{\pi}{2})+2k\pi i=-\frac{\pi}{2}i+2k\pi i,$$

主值 $\ln(-i)=-\dfrac{\pi}{2}i.$

(2) $\mathrm{Ln}(1+i)=\ln|1+i|+i\arg(1+i)+2k\pi i$

$$=\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4})+2k\pi i,$$

主值 $\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i(\dfrac{\pi}{4}).$

例 求对数 $\mathrm{Ln}(-1)$ 以及它的主值 P43 例 2.11
。

解 $\mathrm{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) + 2k\pi i$

$$= \ln 1 + i\pi + 2k\pi i = (2k+1)\pi i;$$

主值 $\ln(-1) = \pi i.$

- 可见，在复数域内，负实数是可以求对数的。

例 求对数 $\mathrm{Ln}\,2$ 以及它的主值。

解 $\mathrm{Ln}\,2=\ln|2|+i\arg 2+2k\pi i=\ln 2+2k\pi i$;

主值 $\ln 2=\ln 2.$

$$\underbrace{\ln 2}_{\text{在复数范围内}}=\underbrace{\ln 2}_{\text{在实数范围内}}$$

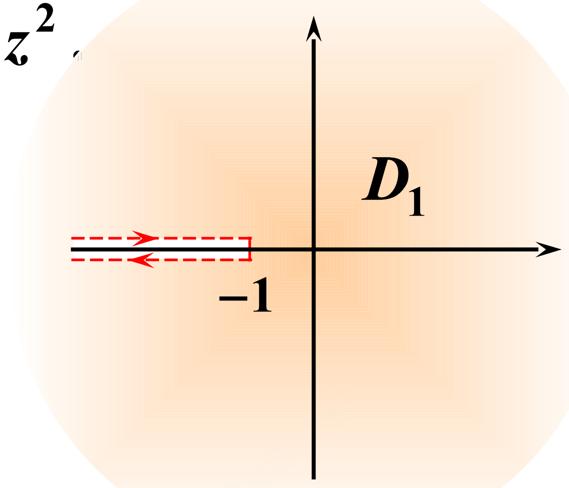
- 可见，当 z 为正实数时，$\ln z$ 与实对数函数是一致的。

例 求下列函数的导数。

(1) $f(z)=\ln(1+z)$; (2) $g(z)=\ln z^2$.

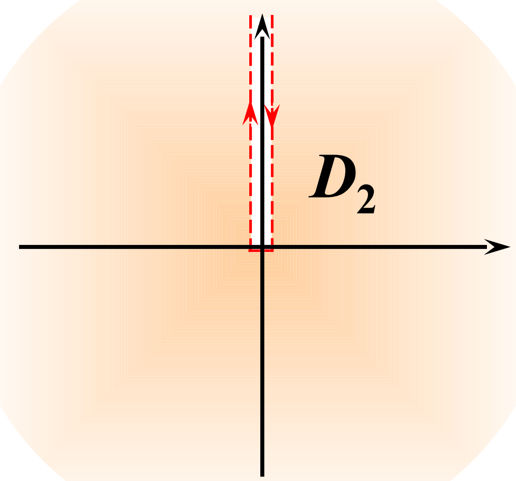
解 (1) $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}$,

其中，$z\in D_1$（如图）。



(2) $g'(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot 2z=\dfrac{2}{z}$,

其中，$z\in D_2$（如图）。



三、幂函数

定义 P45 定义2.7

函数 $w = z^{\alpha}$ 为 **规定** $z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ (α 为复常数，$z \neq 0$)

称为复变量 z 的幂函数。

还**规定**：当 α 为正实数，且 $z = 0$ 时，$z^{\alpha} = 0$.

注意 上面利用指数函数以一种“规定”的方式定义了幂函数，

但不要将这种“规定”方式反过来作用于指数函数，

即 $\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{\operatorname{Ln} \mathrm{e}^{z}} \overset{?}{=} \mathrm{e}^{z \operatorname{Ln} \mathrm{e}}$.

三、幂函数

讨论 (1) 当 α 为正整数时，$z^n = \mathrm{e}^{n\,\mathrm{Ln}\,z} = \mathrm{e}^{n\ln z}$. (单值)

此时，z^α 处处解析，且 $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$.

(2) 当 α 为负整数时，$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$. (单值)

此时，z^α 除原点外处处解析，且 $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$.

(3) 当 $\alpha = 0$ 时，$z^0 = 1$.

三、幂函数

讨论 (4) 当α 为有理数时，$z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{z^m}$.（$n$值）

其中，m 与 n 为互质的整数，$n\geq 1$. 且

此时，z^{α} 除原点与负实轴外处处解析，

且 $(z^{\alpha})'=\alpha z^{\alpha-1}$.

(5) 当α 为无理数或复数 ($\mathrm{Im}\,\alpha\neq 0$) 时，

一般为无穷多值。

此时，z^{α} 除原点与负实轴外处处解析。

例 求 i^i 的值。P46

解 $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

- 可见，i^i 是正实数，它的主值是 $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 的值。

解 $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{\sqrt{2}[0+i(0+2k\pi)]} = e^{2\sqrt{2}k\pi i}$

$$= \cos(2\sqrt{2}\,k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}\,k\pi),\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

- 可见，不要想当然地认为 $1^\alpha = 1$.

四、三角函数

启示 由欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，有 $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$，

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}),\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}).$$

定义 余弦函数 $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$;

P47 定义 2.8

正弦函数 $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$.

其它三角函数 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$,

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}.$$

四、三角函数

性质（略）

- 周期性、可导性、奇偶性、零点等与实函数一样；
- 各种三角公式以及求导公式可以照搬；
- 有界性（即 $|\sin z|\le 1, |\cos z|\le 1$ ）不成立。

例 求 $\cos i$.

解 根据定义，有$\cos i=\dfrac{e^{ii}+e^{-ii}}{2}=\dfrac{e^{-1}+e}{2}$.

例 求 $\sin(1+2i)$.

解 根据定义，有

$$\sin(1+2i)=\frac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i}$$

$$=\frac{e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)-e^{2}(\cos 1-i\sin 1)}{2i}$$

$$=\boxed{\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}}\sin 1+i\boxed{\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}}\cos 1.$$

五、反三角函数

定义 如果 $\cos w = z$，则称 w 为复变量 z 的反余弦函数

P48 定义 2.9

记为 $w = \mathrm{Arc}\cos z$.

计算 由 $z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$， $\Rightarrow (e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$,

$$\Rightarrow e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}, \quad \Rightarrow iw = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\Rightarrow w = \mathrm{Arc}\cos z = -i\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 同理可得 $\mathrm{Arc}\sin z = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$;

$$\mathrm{Arc}\tan z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i + z}{i - z}.$$

六、双曲函数与反双曲函数

定义 P49 定义2.10

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$;

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$;

双曲正切函数 $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$;

双曲余切函数 $\operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

六、双曲函数与反双曲函数

定义 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right);$

P50

反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right);$

反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z};$

反双曲余切函数 $\operatorname{Arcoth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}.$

休息一下 ……