
华中科技大学
复变函数与积分变换

复 变 函 数

与 积 分 变 换

华中科技大学数学与统计学院

http://www.icourses.cn/coursestatic/course_2561.html

一、教学及考核方式

课堂教学：　40 学时

答疑：　每周一次

作业：　每周交作业一次

考试方式：　闭卷

考试成绩：　作业占 20%，考试占 80%

主要参考书（略）

二、教学内容

复变函数与积分变换课程是工科各专业必修的重要基础理论课，是工程数学的主要课程之一复变函数与积分变换在科学研究、工程技术等各行各业中有着广泛的应用。

本课程由复变函数与积分变换两个部分组成。

复变函数的内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、留数及其应用、共形映射以及解析函数在平面场的应用。

积分变换的内容包括：傅里叶变换和拉普拉斯变换。

其中，带 “*” 号的内容本课堂不需要掌握。

第一章 复数与复变函数

复数的产生最早可以追溯到十六世纪中期。但直到十八世纪末期，经过了卡尔丹、笛卡尔、欧拉以及高斯等许多人的长期努力，复数的地位才被确立下来。

复变函数理论产生于十八世纪，在十九世纪得到了全面发展。为复变函数理论的创建做了早期工作的是欧拉、达朗贝尔、拉普拉斯等。为这门学科的发展作了大量奠基工作的则是柯西、黎曼和维尔斯特拉斯等。

复变函数理论中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域的推广和发展。

（虚数史话）

第一章 复数与复变函数

§1.1 复数

§1.2 复数的几种表示

§1.3 平面点集的一般概念

§1.4 无穷大与复球面

§1.5 复变函数

§1.1 复数

一、复数及其运算

二、共轭复数

一、复数及其运算

1. 复数的基本概念 P1

定义 (1) 设 x 和 y 是任意两个实数，将形如

$$z = x + iy \ (\text{或者} z = x + yi)$$

的数称为复数。其中 i 称为虚数单位，即 $i = \sqrt{-1}$.

(2) x 和 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，并分别表示为：

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(3) 当 $x = 0$ 时，$z = 0 + iy = iy$ 称为纯虚数；

当 $y = 0$ 时 $z = x + i0 = x$ 就是实数。

因此，实数可以看作是复数的特殊情形。

一、复数及其运算

1. 复数的基本概念

相等 设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，

如果 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，则称 z_1 与 z_2 相等。

特别地，$z = x + iy = 0$ 当且仅当 $x = y = 0$.

注 复数与实数不同，两个复数（虚部不为零）不能比较大小，它们之间只有相等与不相等的关系。

一、复数及其运算

2. 复数的四则运算 P2

设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，

(1) 复数的加减法

加法 $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2);$

减法 $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2).$

(2) 复数的乘除法

乘法 $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$

除法 如果存在复数 z，使得 $= z_2 \cdot z$，则 $z = \dfrac{z_1}{z_2}.$

一、复数及其运算

2. 复数的四则运算

(3) 运算法则

交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$;

$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

结合律 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;

$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

分配律 $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

二、共轭复数

1. 共轭复数的定义 P2

定义 设 $z=x+iy$ 是一个复数，称 $\bar{z}=x-iy$ 为 z 的共轭复数，记作 $\bar{z}$。

注 共轭复数有许多用途。

比如 $z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

二、共轭复数

2. 共轭复数的性质 P3

性质 (1) $\overline{\overline{z}} = z$;

(2) $\overline{z_1 \circ z_2} = \overline{z_1} \circ \overline{z_2}$,

其中, “$\circ$” 可以是$-$, $\times$, $\div$;

(3) $z \cdot \overline{z} = [\mathrm{Re}\, z]^2 + [\mathrm{Im}\, z]^2 = x^2 + y^2$;

(4) $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \mathrm{Re}\, z = x$,

$\dfrac{z - \overline{z}}{2i} = \mathrm{Im}\, z = y$.

例 已知 $z_1 = 5-5i$，$z_1 = -3+4i$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$，$\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

解 (1) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$

$$= \frac{-35-5i}{25} = -\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i.$$

(2) $$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$$

例 证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$.

P4 例 1.1

证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}\overline{\overline{z_2}}$

$=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}$

$=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$.

轻松一下吧……

附：历史知识 —— 虚数史话

- 1545 年，卡尔丹第一个认真地讨论了虚数，他在《大术》中求解这样的问题：

  $\boxed{\text{两数的和是 10，积是 40，求这两数}}$

  卡尔丹发现只要把 10 分成 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 即可。

- 卡尔丹称它们为“虚构的量”或“诡辩的量”。他还把它们与负数统称为“虚伪数”；把正数称为“证实数”。

- 卡尔丹的这种处理，遭到了当时的代数学权威韦达和他的学生哈里奥特的责难。

附：历史知识 —— 虚数史话

- 整个十七世纪，很少有人理睬这种“虚构的量”
- 仅有极少数的数学家对其存在性问题争论不休。
- 1632 年，笛卡尔在《几何学》中首先把这种“虚构的量”改称为“虚数”，与“实数”相对应。同时，还给出了如今意义下的“复数”的名称。

附：历史知识 —— 虚数史话

- 到了十八世纪，虚数才开始被关注起来。
- 1722 年，法国数学家德摩佛给出德摩佛定理：

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta,$$

其中 n 是大于零的整数。

- 1748 年，欧拉给出了著名的公式：

$$e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x,$$

并证明了德摩佛定理对 n 是实数时也成立。

- 1777 年，欧拉在递交给彼德堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 i 来表示 $\sqrt{-1}$.

附：历史知识 —— 虚数史话

- 十八世纪末，高斯的出现使得复数的地位被确立下来。
- 1797 年，当时年仅 20 岁的高斯在他的博士论文中证明了代数基本定理。即 任何多项式在复数域里必有根而且 n 次多项式恰好有 n 个根。
- 高斯在证明中巧妙地给出了复数的几何表示，使得人们直观地理解了复数的真实意义。
- 十九世纪中叶以后，复变函数论开始形成，并逐渐发展成为一个庞大的数学分支。

附：人物介绍 —— 高斯

高 斯

Johann Carl Friedrich Gauss

(1777 ～ 1855)

德国数学家、物理学家、天文学家

- 许多数学学科的开创者和奠基人。
- 几乎对数学的所有领域都做出了重大贡献
- 享有数学王子的美誉。

附：人物介绍 —— 高斯

- 高斯去世后，哥廷根大学对高斯的文稿进行了整理，历时 67 年，出版了《高斯全集》，共 12 卷。
- 在哥廷根大学的广场上，矗立着一座用白色大理石砌成的纪念碑，它的底座砌成 正十七边形，纪念碑上是高斯的青铜雕像。

18 岁

（返回）