2010～2011学年第一学期
《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A卷)

院(系)_________**专业班级**__________**学号**_______________**姓名**__________

考试日期: 2010年11月29日　　　　　**考试时间:** 晚上7:00~9:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得　分	
评卷人	

一、填空题 (每题3分，共24分)

1．复数 $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^4}{(1+i)^2}$ 的模为_____，辐角主值为_____.

2．满足 $|z-3|\le \operatorname{Re}(z+1)$ 的点集所形成的平面图形为________，
该图形是否为区域________.

3．$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ 的值为___________，主值为______.

4．函数 $f(z)=x^2+2ixy$ 在何处可导？______________，
何处解析?___________.

5．设 $f(z)=\oint\limits_{|\xi|=2}\dfrac{3\xi^2-2\xi+1}{\xi-z}d\xi$，则 $f(1)=$_______，$f'(1+i)=$_______.

6．函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8}$ 在 $z=i$ 点展成泰勒级数的收敛半径为___.

7．$z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^6}$ 的_____阶极点；在该点处的留数为_____
_.

8．函数 $f(t)=\sin^2 t$ 的Fourier变换为__________.

得　分	
评卷人	

二、计算题 (每题 5 分，共 20 分)

1． $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z - 1}{z^2(z-1)}\,dz$

2． $\oint\limits_{|z|=2} z^2(\sin\dfrac{1}{z})^3\,dz$

3． $\int_0^{\pi}\dfrac{\cos 4\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$

4． $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{(x^2+1)(x^2+4)} \mathrm{d}x$

得　分	
评卷人	

三、(8 分)已知 $v(x,y)=x^2+ay^2$，求常数 a 以及二元函数 $u(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(0)=1$．

得 分	
评卷人	

四、(12 分)将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z}$ 分别在点 $z=0$ 和 $z=2$ 展开为洛朗(Laurent)级数.

得　分	
评卷人	

五、(8 分)求区域 $D=\{z:\ 0<\operatorname{Re}z<\pi, \operatorname{Im}z>0\}$ 在映射 $w=\dfrac{e^{iz}+1}{e^{iz}-1}$ 下的像.

得　分	
评卷人	

六、(10 分)求将区域 $D=\{z:|z+i|<\sqrt{2}, \operatorname{Im}z>0\}$ 映射到单位圆内部的共形映射.

得 分	
评卷人	

七、(12 分)利用 Laplace 变换求解微分方程:

$$x''(t)+4x'(t)+3x(t)=e^{-t}, x(0)=0, x'(0)=1.$$

得 分	
评卷人	

八、(6 分) 设函数 $f(z)$ 在区域 $|z|<R$ 内处处解析,

$f(z)$ 在 $|z|<r\ (r<R)$ 内仅有 z_0 一个三级零点,

证明: $\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{z^2 f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=6\pi i z_0^2$.