2007～2008 学年第一学期
《复变函数与积分变换》课程考试试卷(B 卷)

院(系)_________专业班级__________学号_______________姓名__________

考试日期： 年 月 日　　　　**考试时间：**0:00~0:00

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

得　分	
评卷人	

一、选择题 (每题 2 分，共 20 分)

1、复数 $\left(\frac{3+4i}{1+2i}\right)^2$ 的模为 **(　)**

A. $\sqrt{5}$；　B. $5\sqrt{5}$；　C. 5 .

2、复数 $-1-3i$ 的主辐角为 **(　)**

A. $\arctan 3$；　B. $\arctan 3+\pi$；　C. $\arctan 3-\pi$.

3、$|z+i|>|z-i|$ 所表示的平面区域为 **(　)**

A. 上半平面；　B. 下半平面；　C. 单位圆的内部.

4、$\mathrm{Ln}(-1)$ 的值为 **(　)**

A. $(2k+1)\pi i$；　B. $2k\pi i$；　C. 无意义.

5、方程 $z^2-2i=0$ 的根为 **(　)**

A. $z_1=1+i,\ z_2=-1-i$；

B. $z_1=1+i,\ z_2=-1+i$；

C. $z_1=1+i,\ z_2=1-i$.

6、函数 $f(z)=2xy-ix^2$ ( )

A. 处处可导； B. 仅在 $y=0$ 上可导； C. 处处不可导.

7、设 $f(z)=2xy+i(y^2-x^2)$，则 $f'(z)=$ ( )

A. $2x+2yi$； B. $2y-2xi$； C. $2x-2yi$.

8、级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{i}{n}$ ( )

A. 绝对收敛； B. 条件收敛； C. 发散.

9、$z=0$ 是函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$ 的 ( )

A. 可去奇点； B. 二阶极点； C. 一阶极点.

10、区域 $D=\{z:\ 0<\operatorname{Im}z<\pi\}$ 在映射 $w=\mathrm{e}^z$ 下的像为 ( )

A. 单位圆的内部； B. 下半平面； C. 上半平面.

得 分	
评卷人	

二、填空题 (每题 2 分，共 10 分)

1、函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=i$ 点展开成泰勒 (Taylor) 级数的收敛半径为___.

2、积分 $\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}\mathrm{d}z=$____.

3、映射 $f(z)=z^2+4z$ 在 $z=-1+i$ 处的旋转角为___.

4、函数 $f(t)=\cos 2t$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega)=$________.

5、函数 $F(s)=\frac{1}{s(s-1)}$ 的 Laplace 逆变换为 $f(t)=$_______.

得　分	
评卷人	

三、计算题 (每题 5 分，共 20 分)

1、$\oint_{|z|=2} \dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z$

2、$\oint_{|z|=2} z^3 \cos\dfrac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

3、$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

4、$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin\theta} \mathrm{d}\theta$

得 分	
评卷人	

四、(12 分)已知调和函数 $u(x,y)=x^2-y^2+2xy$，求函数 $v(x,y)$，使函数 $f(z)=u+iv$ 解析且满足 $f(i)=-1+i$．

得　分	
评卷人	

五、(12 分)将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 点展开为洛朗(Laurent)级数.

得　分	
评卷人	

六、(14 分)求把区域 $D=\{z: |z|>1,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ 映射到单位圆内部的共形映射.

得　分	
评卷人	

七、(12 分)利用 Laplace 变换求解微分方程组:

$$\begin{cases} x'(t)+y(t)=1, & x(0)=0, \\ x(t)-y'(t)=t, & y(0)=1. \end{cases}$$

2007～2008 学年第一学期
《复变函数与积分变换》课程考试试卷(B 卷)解答

院(系)_________专业班级__________学号_______________姓名__________

考试日期： 年 月 日　　　　　　**考试时间：**0:00~0:00

题号	一	二	三	四	五	六	七	**总分**
得分								

得　分	
评卷人	

一、选择题 (每题 2 分，共 20 分)

1、复数 $\left(\dfrac{3+4i}{1+2i}\right)^2$ 的模为 **(C)**

A. $\sqrt{5}$； B. $5\sqrt{5}$； C. 5 **.**

2、复数 $-1-3i$ 的主辐角为 **(C)**

A. $\arctan 3$； B. $\arctan 3+\pi$； C. $\arctan 3-\pi$ **.**

3、$|z+i|>|z-i|$ 所表示的平面区域为 **(A)**

A. 上半平面； B. 下半平面； C. 单位圆的内部**.**

4、$\mathrm{Ln}(-1)$ 的值为 **(A)**

A. $(2k+1)\pi i$； B. $2k\pi i$； C. 无意义**.**

5、方程 $z^2-2i=0$ 的根为 **(A)**

A. $z_1 = 1+i,\ z_2 = -1-i$；

B. $z_1 = 1+i,\ z_2 = -1+i$；

C. $z_1 = 1+i,\ z_2 = 1-i$.

6、函数 $f(z) = 2xy - ix^2$ **(B)**

A. 处处可导；　B. 仅在 $y=0$ 上可导；　C. 处处不可导.

7、设 $f(z) = 2xy + i(y^2 - x^2)$，则 $f'(z) =$ **(B)**

A. $2x + 2yi$；　B. $2y - 2xi$；　C. $2x - 2yi$.

8、级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{i}{n}$ **(B)**

A. 绝对收敛；　B. 条件收敛；　C. 发散.

9、$z=0$ 是函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ 的 **(C)**

A. 可去奇点；　B. 二阶极点；　C. 一阶极点.

10、区域 $D = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ 在映射 $w = \mathrm{e}^z$ 下的像为 **(C)**

A. 单位圆的内部；　B. 下半平面；　C. 上半平面.

得　分	
评卷人	

二、填空题 (每题 2 分，共 10 分)

1、函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=i$ 点展开成泰勒 (Taylor) 级数的收敛半径为 $\underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$.

2、积分 $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{(z-\pi)^2} \mathrm{d}z = \underline{\boldsymbol{-2\pi i}}$.

3、映射 $f(z) = z^2 + 4z$ 在 $z = -1+i$ 处的旋转角为 $\underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}}$.

$\boldsymbol{\pi(\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2))}$

4、函数 $f(t)=\cos 2t$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega)=$__________.

5、函数 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)}$ 的 Laplace 逆变换为 $f(t)=$ $\mathbf{e}^{t}-\mathbf{1}$.

得 分	
评卷人	

三、计算题 (每题 5 分，共 20 分)

1、$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z$

解： 令 $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}$，在 $|z|=2$ 内，函数 $f(z)$ 有两个奇点.

$z=0$ 为可去奇点， $\mathrm{Res}[f(z),0]=0$ ，

$z=1$ 为一阶极点， $\displaystyle\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)$

$$=\left.\frac{\sin^2 z}{z^2}\right|_{z=1}=\sin^2 1\,,$$

原式 $=2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1])=2\pi i\sin^2 1$.

2、$\displaystyle\oint_{|z|=2}z^3\cos\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

解： 令 $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z}$ ，在 $|z|=2$ 内， $z=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，

$$z^3\cos\frac{1}{z}=z^3\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\cdots\right)=\cdots+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z}+\cdots\,,$$

原式 $=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=\dfrac{2\pi i}{4!}=\dfrac{\pi i}{12}$.

3、$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

解： 令 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+4}$ ，它在上半平面只有一个简单极点 $z=2i$ ，

$$\operatorname{Res}[f(z),2i]=\left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=2i}=\frac{e^{-2}}{4i},$$

$$原式=\operatorname{Re}(2\pi i\operatorname{Res}[f(z),2i])=\frac{\pi e^{-2}}{2}=\frac{\pi}{2e^2}.$$

4、$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\sin\theta}\mathrm{d}\theta$

解： 令 $z=e^{i\theta}$，则 $\sin\theta=\dfrac{z^2-1}{2iz}$， $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$，

$$原式=\oint_{|z|=1}\frac{1}{\left(5+\frac{4(z^2-1)}{2iz}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z^2+5iz-2}\mathrm{d}z.$$

令 $f(z)=\dfrac{1}{2z^2+5iz-2}$，

可知它在 $|z|=1$ 内只有一个简单极点 $z_0=-\dfrac{i}{2}$，

$$原式=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{2\pi i}{4z+5i}\right|_{z=z_0}=\frac{2\pi}{3}.$$

得 分	
评卷人	

四、(12 分)已知调和函数 $u(x,y)=x^2-y^2+2xy$，求函数 $v(x,y)$，使函数 $f(z)=u+iv$ 解析且满足 $f(i)=-1+i$.

解： (1) 由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+2y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，有

$$v=\int(2x+2y)\mathrm{d}y=2xy+y^2+\varphi(x),$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y+2x=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y-\varphi'(x)$，有 $\varphi'(x)=-2x$，

$$\Rightarrow\ \varphi(x)=\int(-2x)\mathrm{d}x=-x^2+c,$$

即得 $v(x,y)=2xy+y^2-x^2+c$，

$$f(z)=x^2-y^2+2xy+i(2xy+y^2-x^2+c)\text{；}$$

(2) 由 $f(i)=-1+i \Rightarrow c=0$，

故 $f(z)=x^2-y^2+2xy+i(2xy+y^2-x^2)$

$=(1-i)z^2$.

得 分	
评卷人	

五、(12 分)将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 点展开为洛朗(Laurent)级数.

解： $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=-\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}$，

在复平面上以原点为中心分为三个解析环:

$0\le|z|<1$， $1<|z|<2$， $2<|z|<+\infty$.

(1) 在 $0\le|z|<1$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

(2) 在 $1<|z|<2$ 内，

$$f(z)=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(3) 在 $2<|z|<+\infty$ 内，

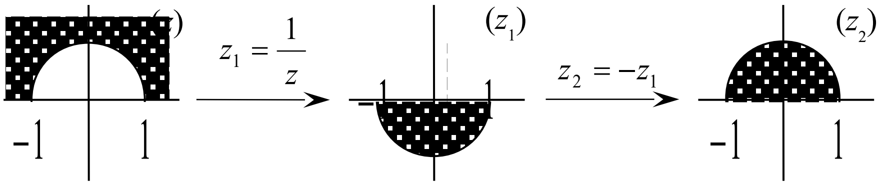
$$f(z)=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}$$

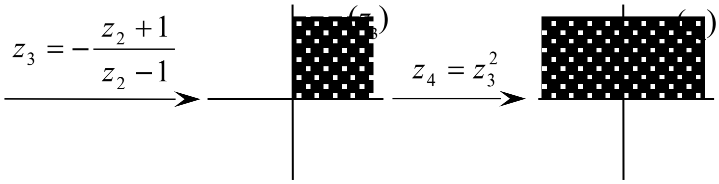
$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

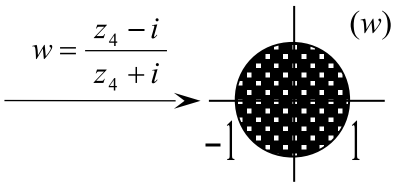
得　分	
评卷人	

六、(14 分)求把区域 $D=\{z:|z|>1,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ 映射到单位圆内部的共形映射.

解:







$$w=\frac{\left(\frac{-(1/z)+1}{-(1/z)-1}\right)^2-i}{\left(\frac{-(1/z)+1}{-(1/z)-1}\right)^2+i}=\frac{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2-i}{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2+i}$$

得　分	
评卷人	

七、(12 分)利用 Laplace 变换求解微分方程组:

$$\begin{cases} x'(t)+y(t)=1, & x(0)=0, \\ x(t)-y'(t)=t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解: 对方程两边取拉氏变换并代入初值得

$$\begin{cases} sX(s)+Y(s)=\dfrac{1}{s}, \\ X(s)-(sY(s)-1)=\dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$ 求解得 $$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}, \\ Y(s)=\dfrac{s}{s^2+1}. \end{cases}$$

求拉氏逆变换得 $\begin{cases} x(t)=t-\sin t, \\ y(t)=\cos t. \end{cases}$