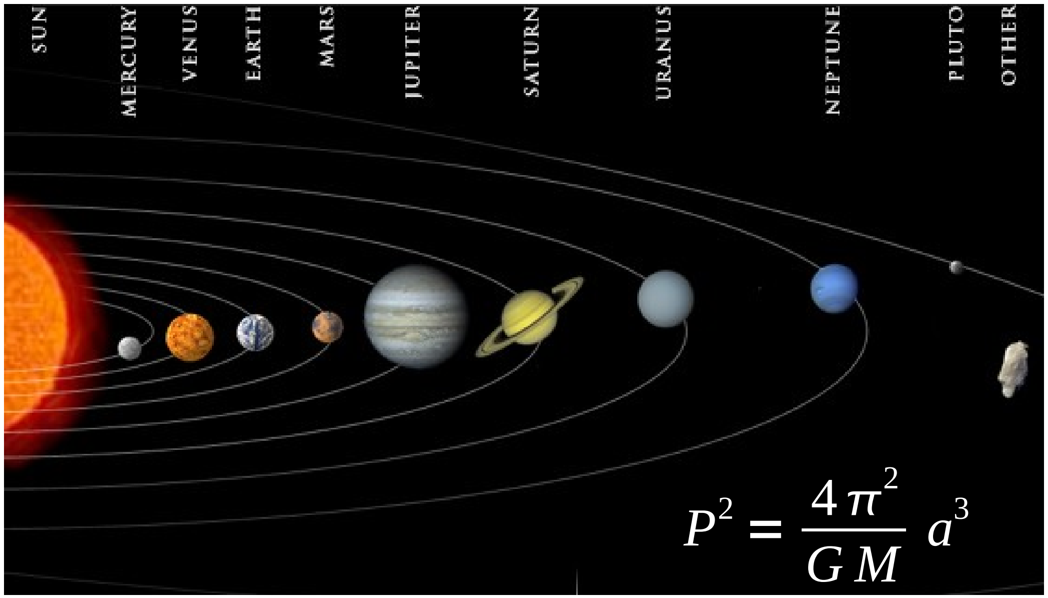
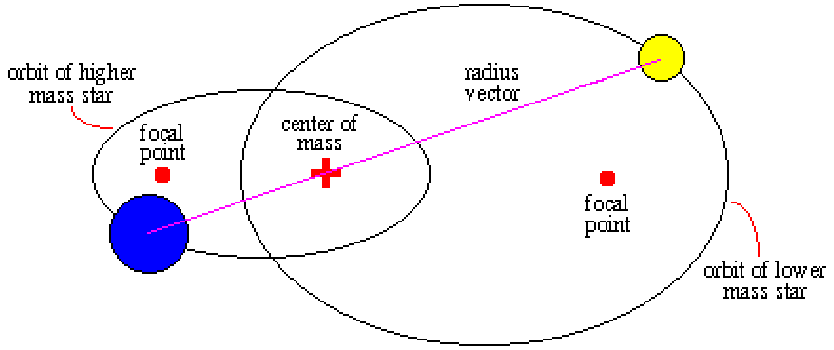
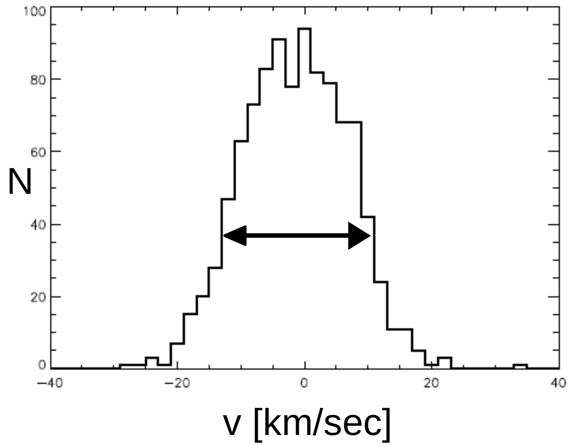
Physik des Universums

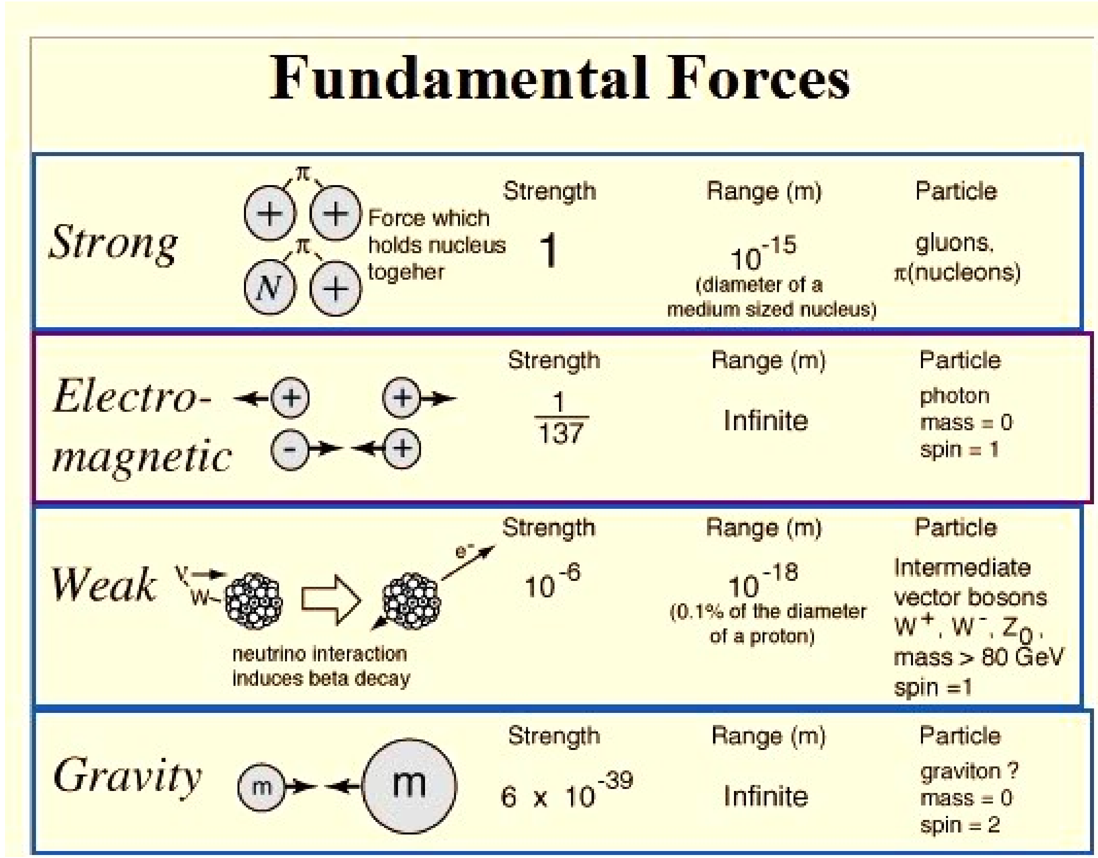
Kapitel 4: Gravitation – Bewegung – Masse







Relative Stärke der fundamentalen Kräfte



Fundamental Forces

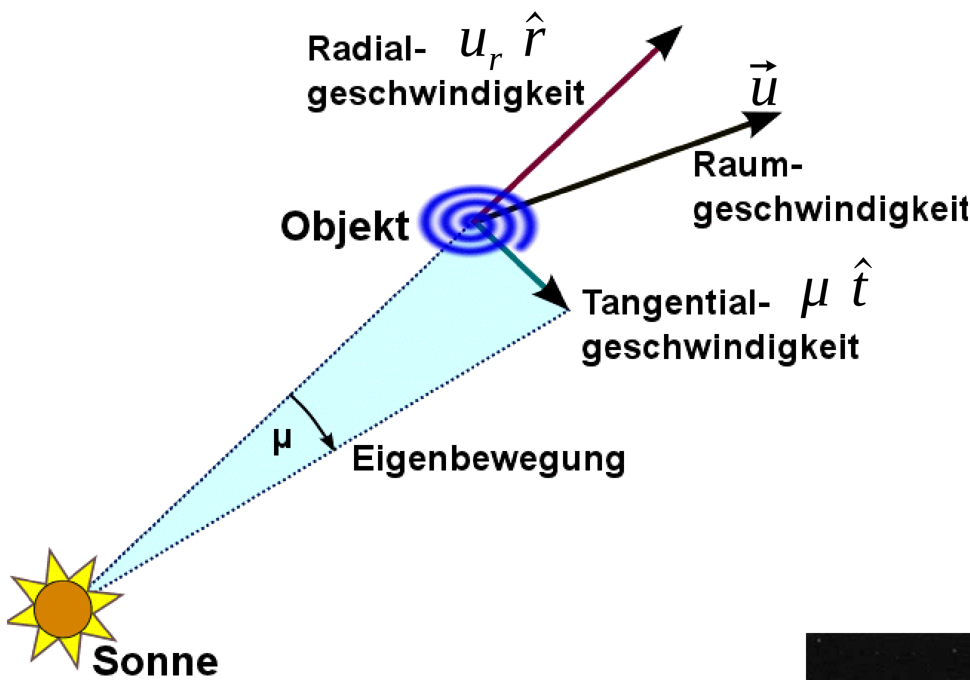
	Strength	Range (m)	Particle
Strong – Force which holds nucleus togeher	1	10^{-15} (diameter of a medium sized nucleus)	gluons, π(nucleons)
Electro-magnetic	$\frac{1}{137}$	Infinite	photon, mass = 0, spin = 1
Weak – neutrino interaction induces beta decay	10^{-6}	10^{-18} (0.1% of the diameter of a proton)	Intermediate vector bosons W^+, W^-, Z_0, mass > 80 GeV, spin =1
Gravity	6×10^{-39}	Infinite	graviton ?, mass = 0, spin = 2

Kräftevergleich im Wasserstoff-Atom:

$$\frac{F(\mathrm{Coulomb})}{F(\mathrm{Newton})} = \frac{q_\mathrm{e}\, q_\mathrm{p}}{4\pi\epsilon_0\, G\, m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}} = \mathbf{2.27 \cdot 10^{39}}$$

Die Stärke der elektromagnetischen Kraft verhindert die Bildung von starken Ladungen; Dipol- (und höhere Ordnungen) Felder fallen schnell ab: $F(\mathrm{Dipol}) \propto r^{-3}$

Messung von Bewegungen



$$\vec{u} = u_r \, \hat{r} + \mu \, \hat{t}$$

1 km/sec ≈ 1 pc/MJ

Messung:

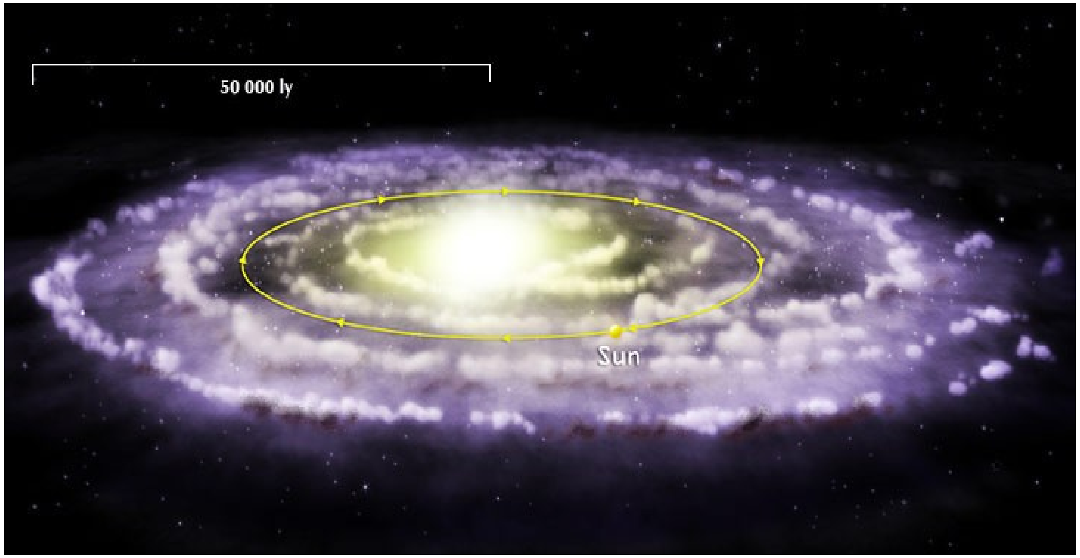
- **Eigenbewegung**: Positionsverschiebung (relativ zum Hintergrund der weit entfernten = praktisch unbewegten Sterne)

- **Radialgeschwindigkeit:** Dopplereffekt

Barnard's Stern: μ = 10.3″ /Jahr (90 km/sec)
u_r = −110 km/sec → u = 142 km/sec

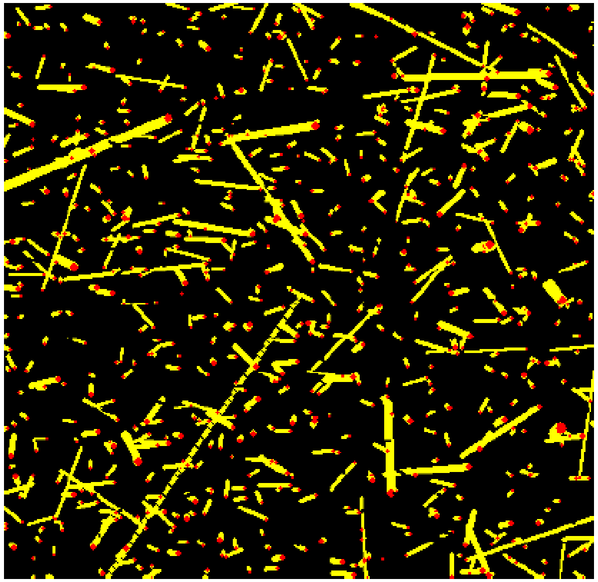
Typische Geschwindigkeiten in der Galaxis

Erde um Sonne: $u \approx 30$ km/sec



Sonne um galaktisches Zentrum:
$u \approx 225$ km/sec

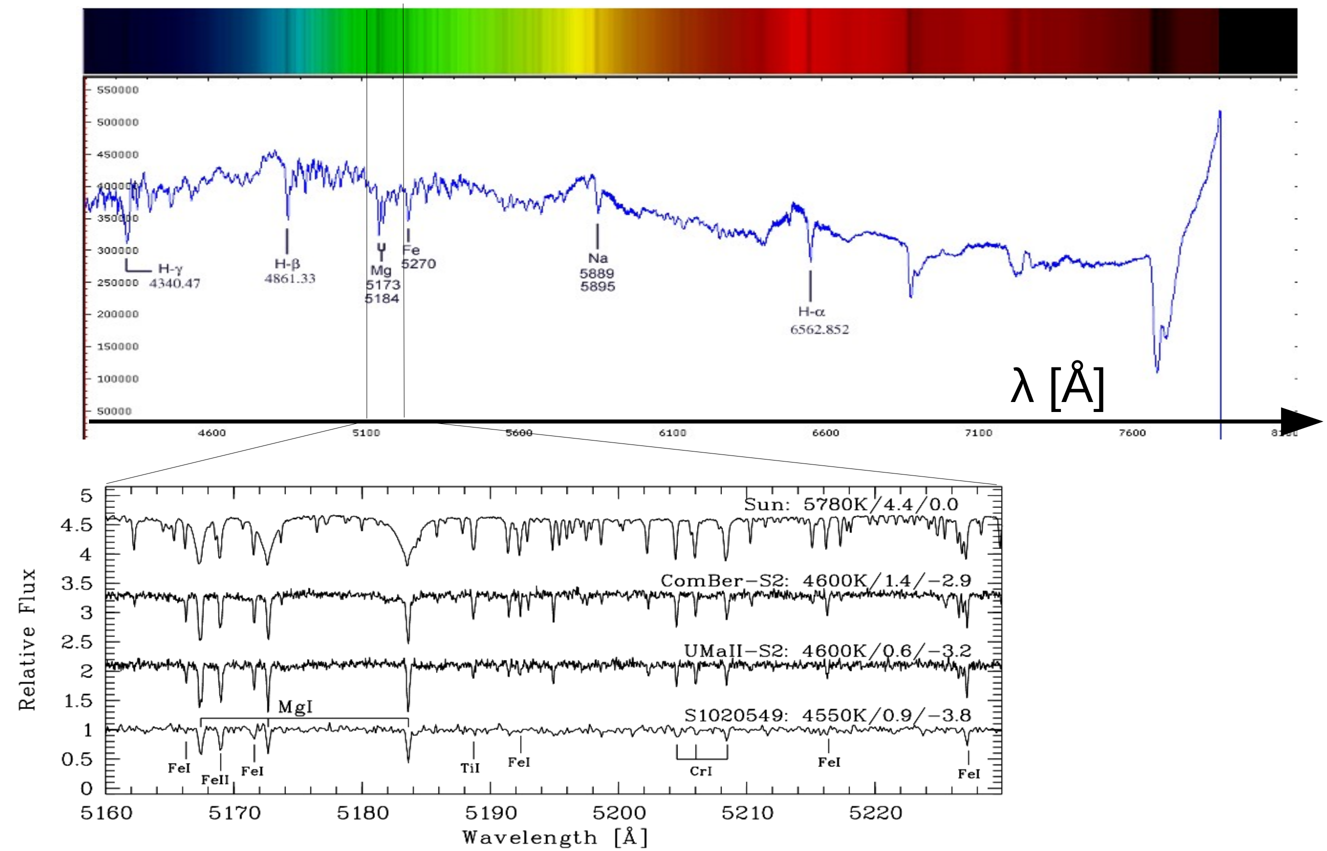
Geschwindigkeitsdispersion der Sterne im galaktischen Feld:



typisch: einige km/sec

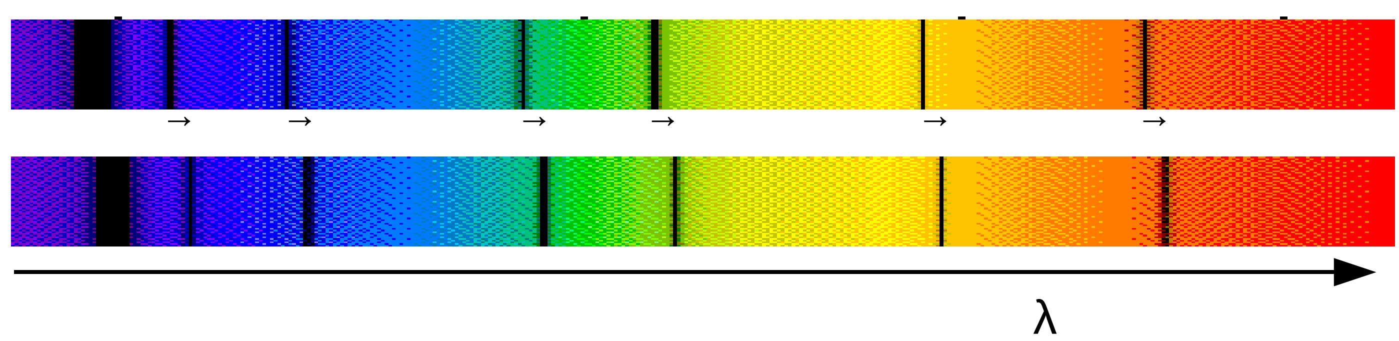
einige Sterne: mehrere 100 km/sec

Messung der Radialgeschwindigkeit über die Linienverschiebung in Sternspektren



Referenzspektrum (unbewegt)

Spektrum mit Rotverschiebung



Definition der Rotverschiebung z :

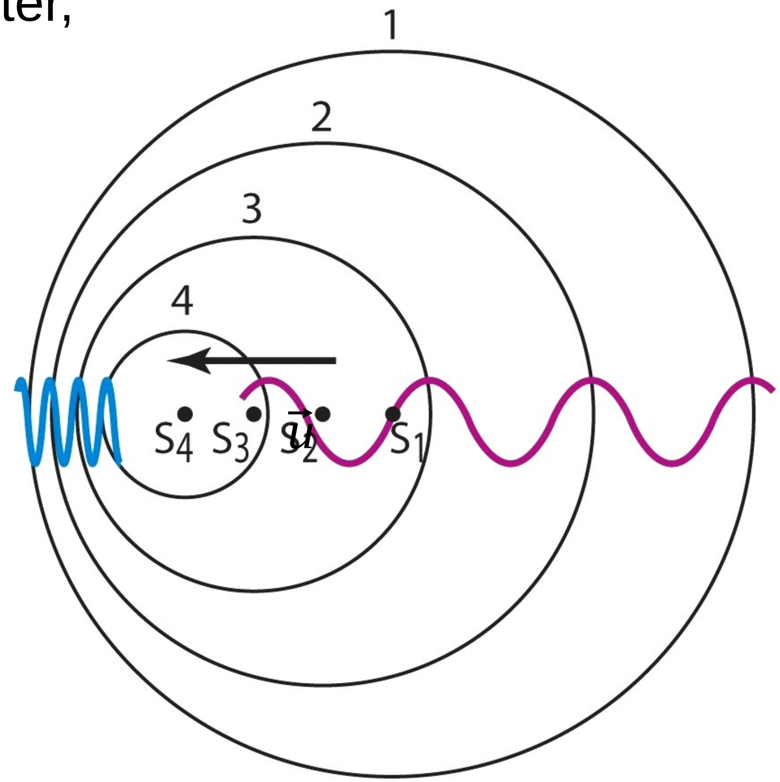
$$\boxed{z := \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}} - \lambda_{\mathrm{em}}}{\lambda_{\mathrm{em}}}} \qquad 1 + z = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}}}{\lambda_{\mathrm{em}}}$$

A) Dopplereffekt bei *Schallwellen*

$$P_{\text{em}} = \frac{1}{f} \qquad \lambda \cdot f = c_s$$

c_s = Schallgeschwindigkeit

Fall 1: ruhender Beobachter,
bewegte Quelle



Annäherung:
$u < 0$

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} \left(1 - \frac{|u|}{c_s}\right)$$

Entfernung:
$u > 0$

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} \left(1 + \frac{|u|}{c_s}\right)$$

Während einer Periode entfernt sich die Quelle um
(nähert)

$$\Delta r = P_{\text{em}} \cdot u$$

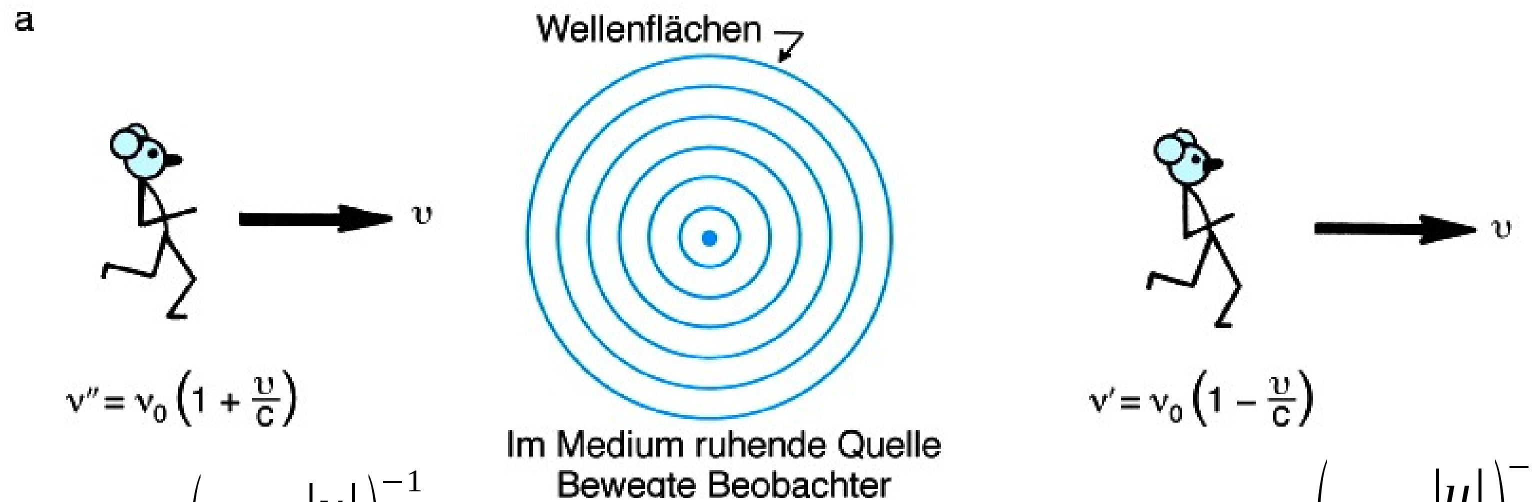
und hat somit eine zusätzliche Laufzeit zum Beobachter von
(geringere)

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{c}$$

Vom Beobachter
wahrgenommene Wellenperiode:

$$P_{\text{obs}} = P_{\text{em}} + \Delta t = P_{\text{em}} + \frac{P_{\text{em}} u}{c} = P_{\text{em}} \left(1 + \frac{u}{c}\right)$$

Fall 2: ruhende Quelle, bewegter Beobachter



$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} \left(1 + \frac{|u|}{c_s}\right)^{-1}$$

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} \left(1 - \frac{|u|}{c_s}\right)^{-1}$$

Asymmetrie:

- Schallquelle bewegt sich auf ruhenden Beobachter mit $u = -c$ zu:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} \left(1 - \frac{|u|}{c_s}\right) \to 0$$

→ Schockwelle, Überschallknall

- Beobachter bewegt sich mit $u = -c$ auf Quelle zu:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} \left(1 + \frac{|u|}{c_s}\right)^{-1} = \lambda_{\text{em}}/2$$

→ Frequenzverdoppelung

B) **Dopplereffekt** bei *elektromagnetischen Wellen*

Zusätzlich zum Effekt der wachsenden Distanz bei Entfernung kommt die relativistische *Zeitdilatation* (γ)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\frac{\lambda_{\mathrm{obs}}}{\lambda_{\mathrm{em}}} = \left(1+\frac{u}{c}\right)\gamma = \frac{1+u/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

Zusammenhang mit Rotverschiebung z im Grenzfall für kleine Geschwindigkeiten:

$$1+z = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}}}{\lambda_{\mathrm{em}}} \rightarrow \simeq 1+\frac{u}{c} \quad \text{für } u \ll c$$

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}}-\lambda_{\mathrm{em}}}{\lambda_{\mathrm{em}}} \rightarrow \simeq \frac{u}{c} \quad \text{für } u \ll c$$

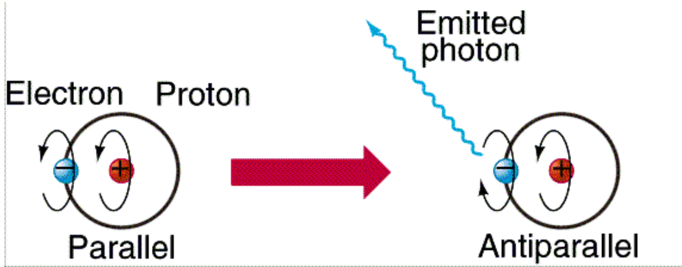
Berechnung der Radialgeschwindigkeit aus der Rotverschiebung:

$$\frac{u(z)}{c} = \frac{2z+z^2}{2+2z+z^2} \simeq z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4}-\ldots \qquad \rightarrow u \simeq c\,z \quad \text{für } z \ll 1$$

Anwendungsbeispiel: Rotation von Galaxien

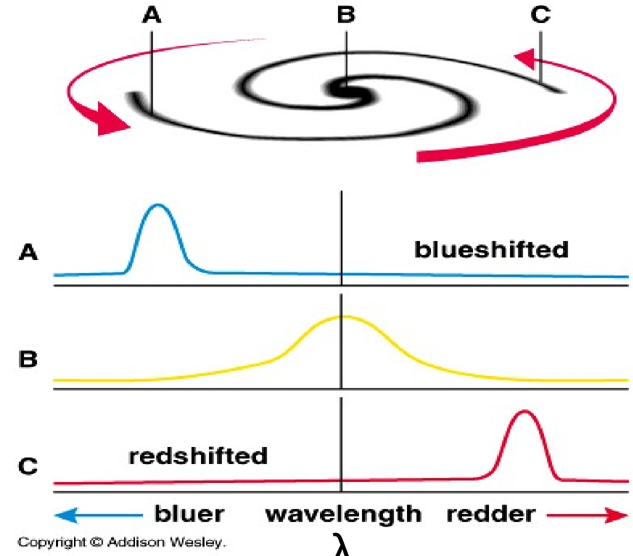
21 cm Line von Wasserstoff:

$\Delta E = 5.9 \cdot 10^{-6}$ eV



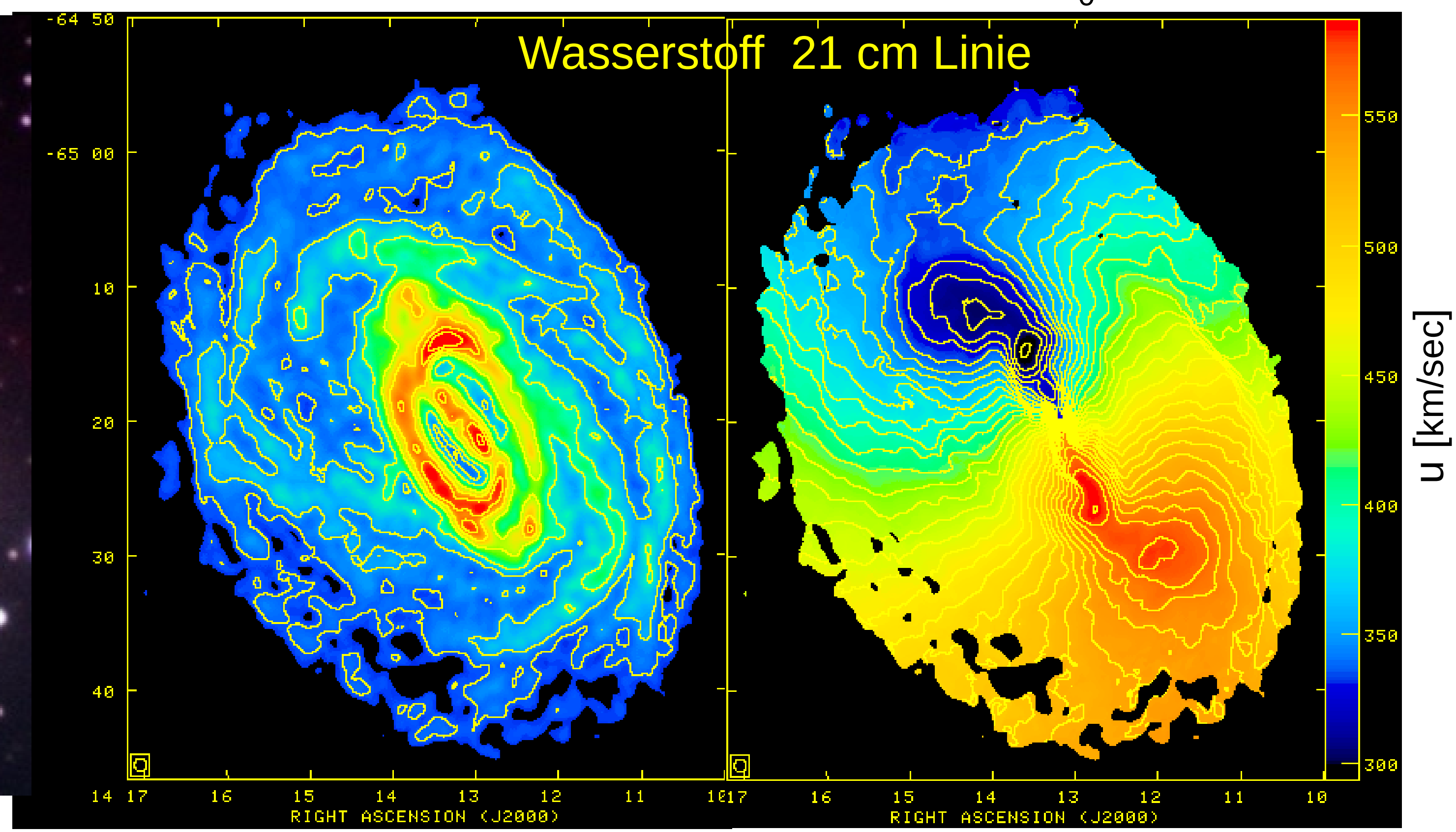
$\nu_0 = 1420.4057517667$ MHz

$\lambda_0 = 21.1061140542$ cm



λ_0

Circinius Galaxy

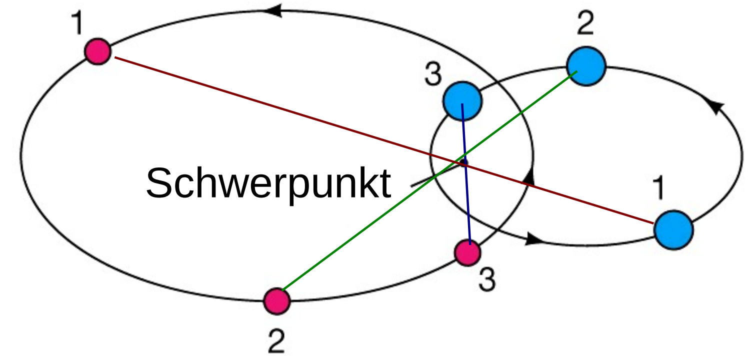


Intensität

Wellenlängenverschiebung

Das Zwei-Körper Problem

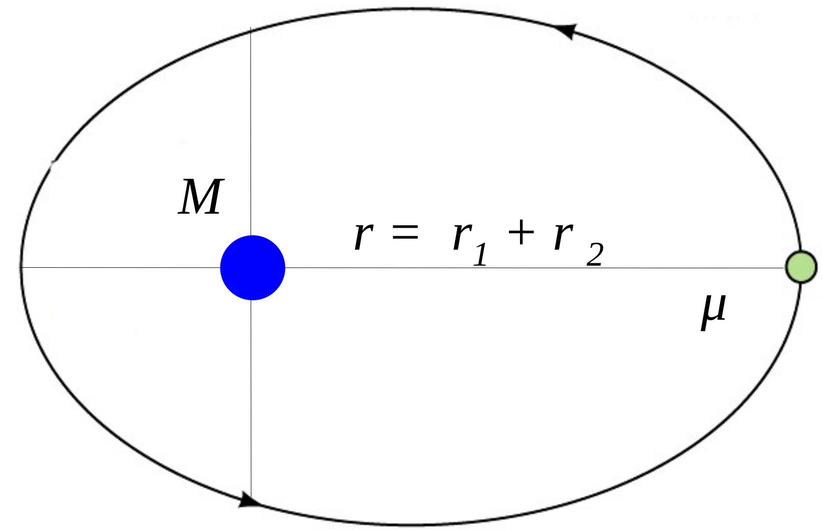
Schwerpunkt $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} := 0 \qquad m_1 r_1 = m_2 r_2$



- Grenzfall:

  Für $m_2 \gg m_1$: $r_2 \to r$, $r_1 \to 0$

  Teilchen der Masse m_1 bewegt sich um (nahezu) ortsfesten Körper mit Masse m_2



- Allgemein: Für beliebige Massen m_1, m_2 gilt:

  Bewegung eines 2-Körper Systems ohne äußere Kraft lässt sich auf das äquivalente Ein-Körperproblem reduzieren:

Teilchen mit ***reduzierter Masse*** $\mu = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}$

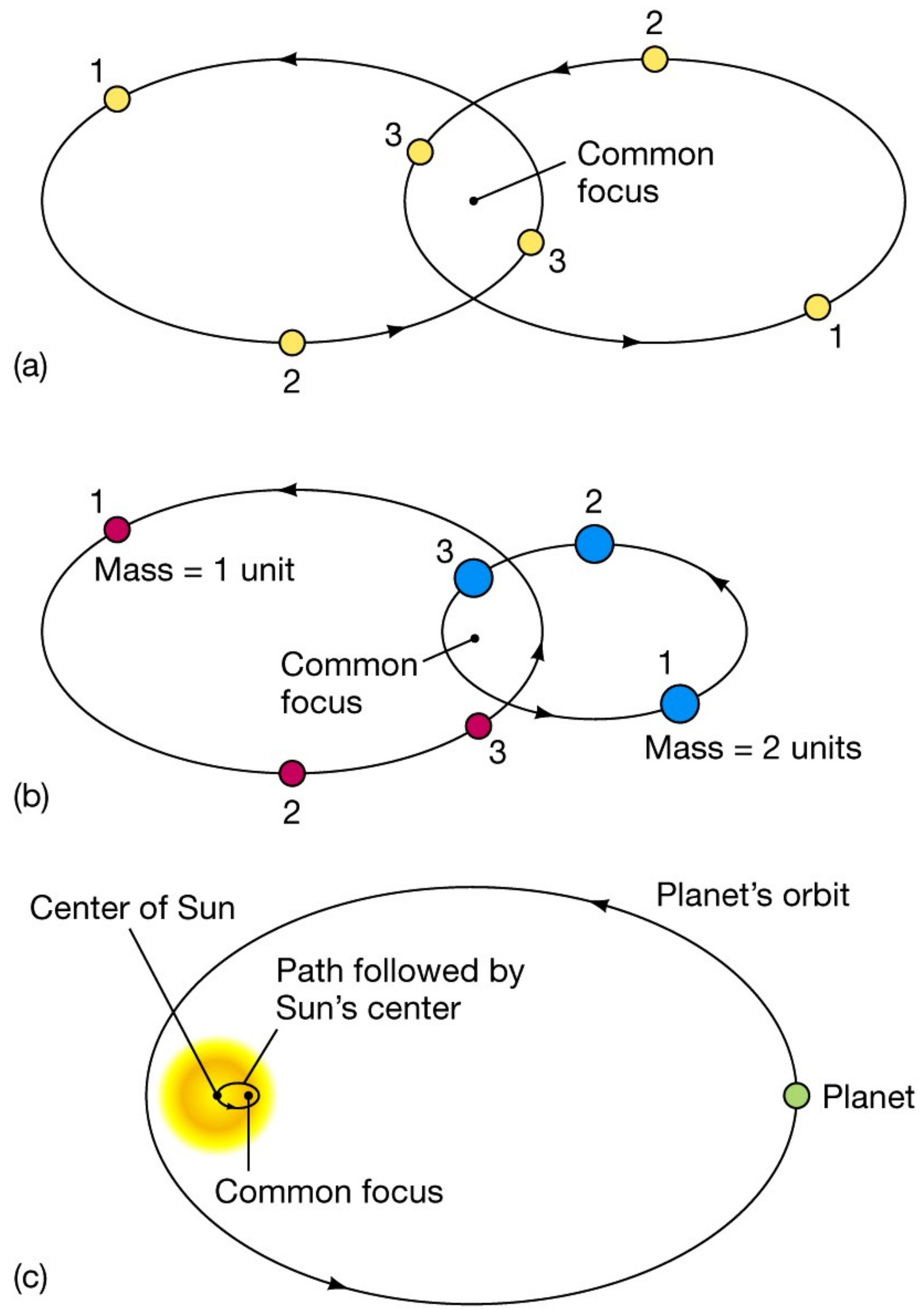
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

bewegt sich im relativen Abstand $r = r_1 + r_2$

$$\mu \cdot M = m_1 \cdot m_2$$

um **festen Schwerpunkt** der Masse $M = m_1 + m_2$

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$



Sonne – Jupiter: $a_2 = 5.2$ AU,

$M_\odot = 1048\ M_{Jupiter}$

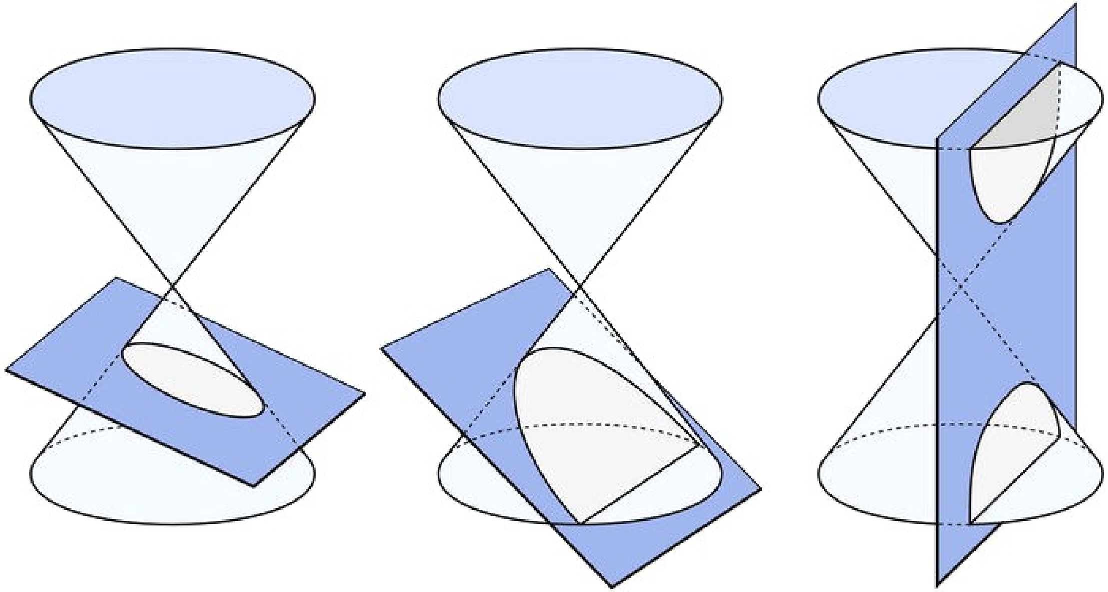
$a_1 = 742\ 290$ km $= 1.0665\ R_\odot$

Sonne – Erde: $a_2 = 1$ AU,

$M_\odot = 332\ 981\ M_{Erde}$

$a_1 = 449$ km $= 0.00065\ R_\odot$

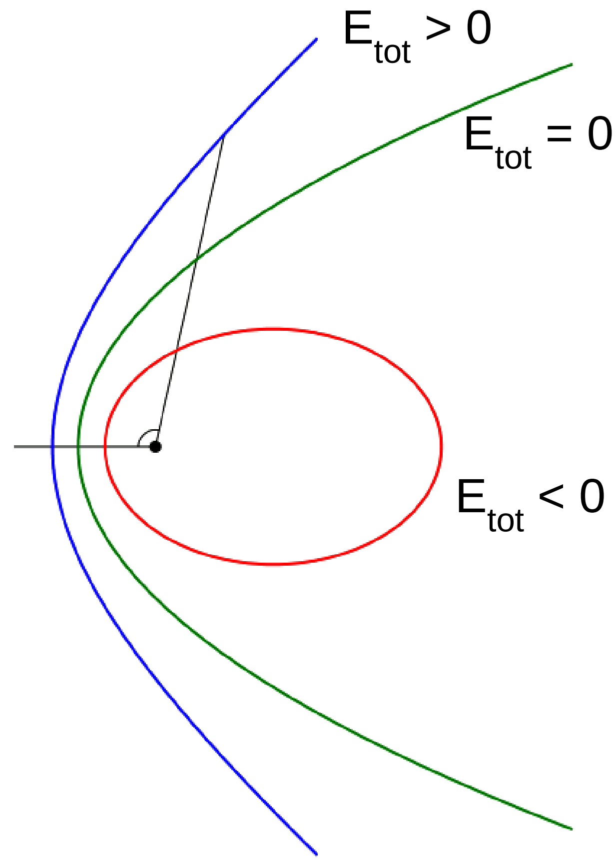
Bahnformen = Kegelschnitte



Ellipse
$E < 0$

Parabel
$E = 0$

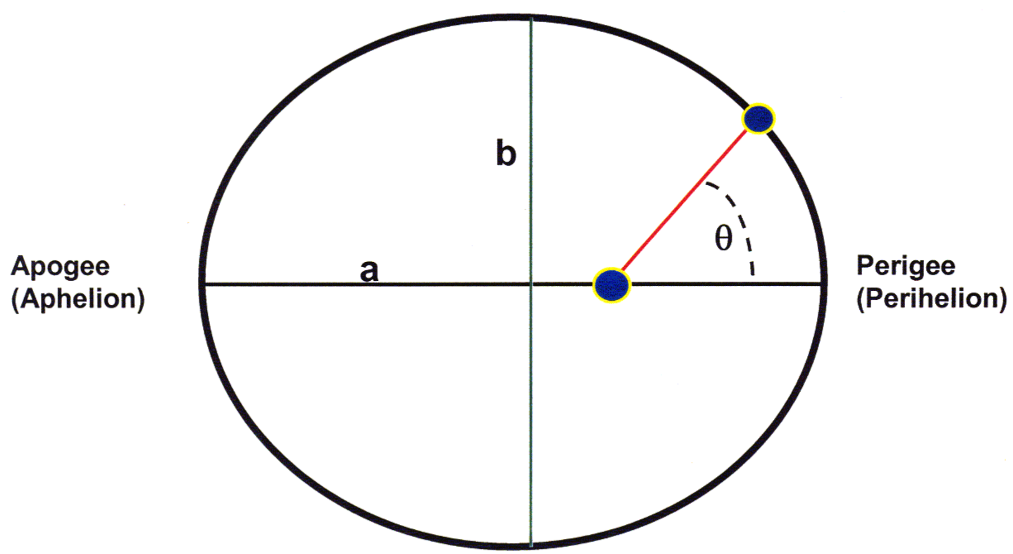
Hyperbel
$E > 0$



Ellipse:

a: große Halbachse

b: kleine Halbachse



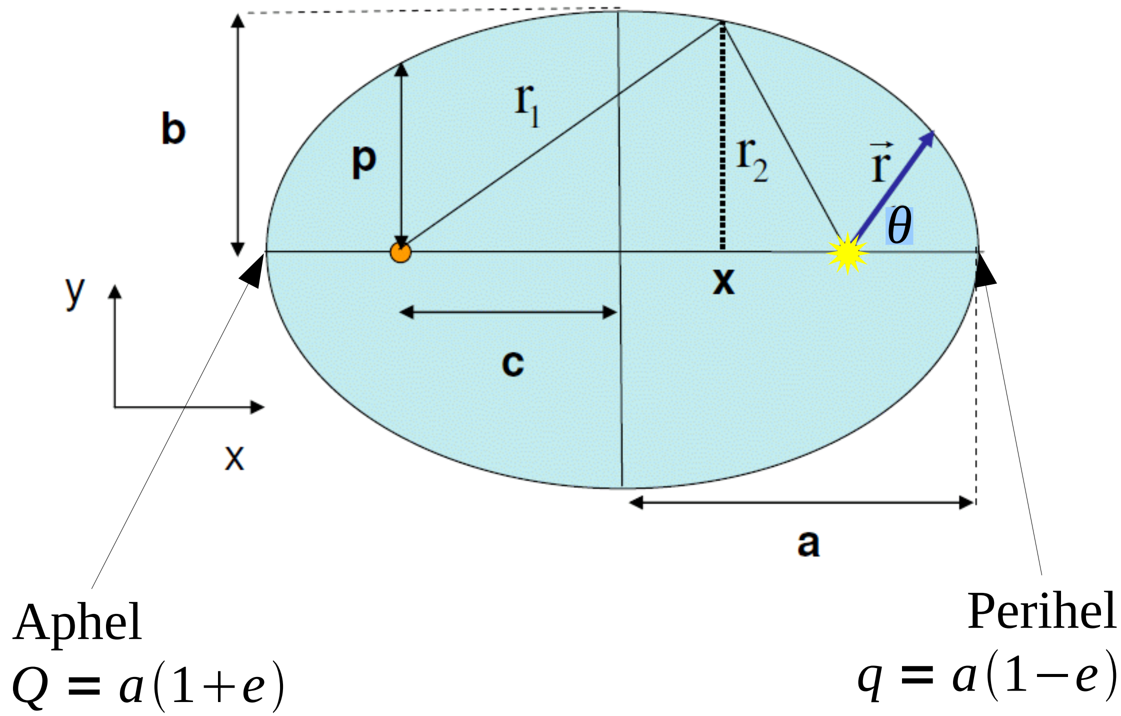
1. Kepler Gesetz: Planetenbahnen sind Ellipsen; Sonne im Fokuspunkt

Definition der Ellipse:

$$r_1 + r_2 = 2 \cdot a \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

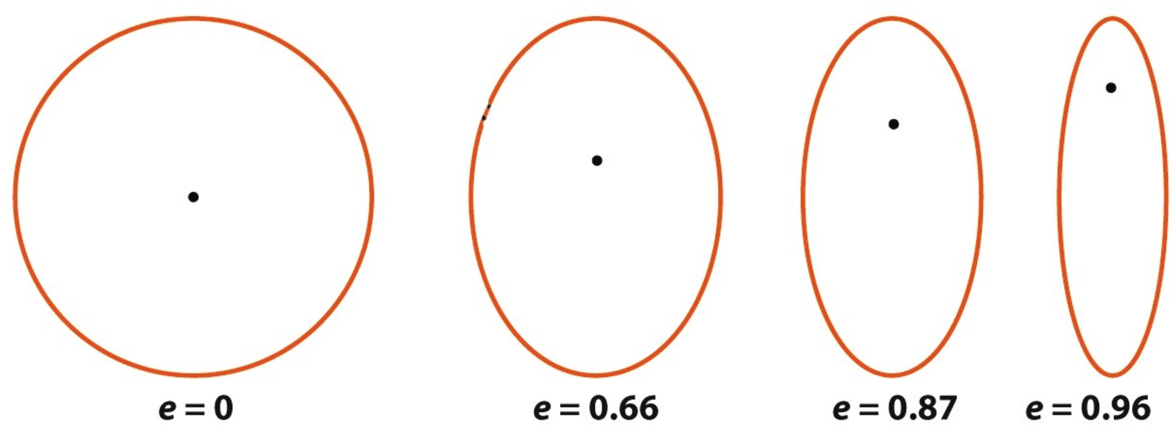
$$c = a \cdot e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\,\cos\theta}$$



Exzentrizität e

Merkur	e = 0.206
Venus	e = 0.0068
Erde	e = 0.0167
Mars	e = 0.0934
Jupiter	e = 0.0485
Saturn	e = 0.0556
Uranus	e = 0.0472
Neptun	e = 0.001
Pluto	e = 0.25



2. Kepler Gesetz: In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl gleiche Flächen

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

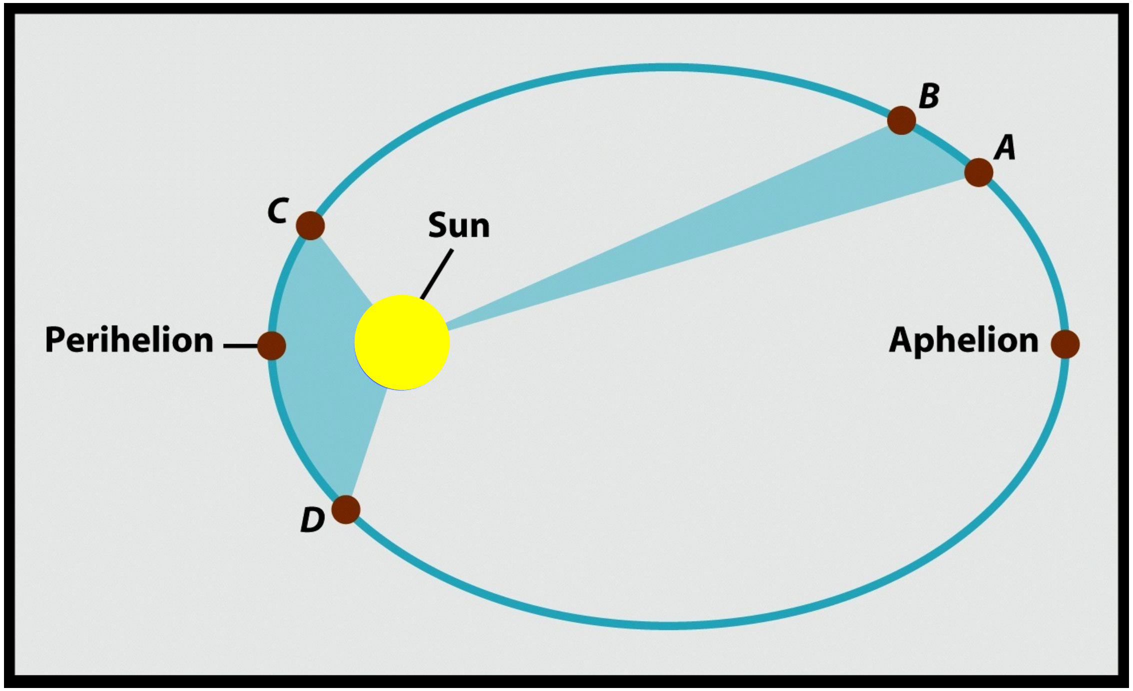
$$L = \mu \, \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \mu \, r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

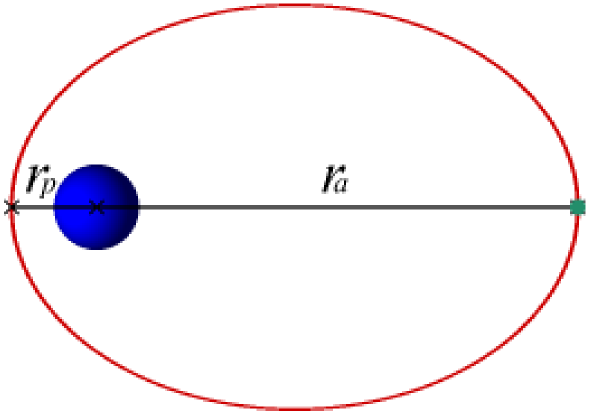
$$\downarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} = \text{const.}}$$

Drehimpulserhaltung





Einschub: Langfristige Variationen des Erdorbits und ihre Konsequenzen

Momentane Bahnparameter: $e = 0.0167$

Perihel (2016: 2. Januar, 22:49 UTC):

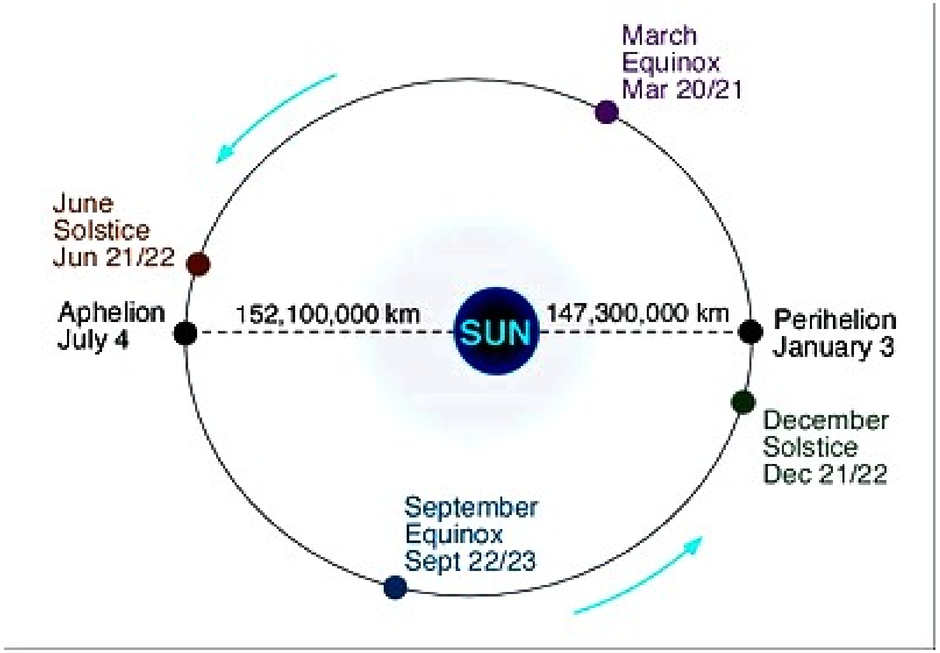
147 100 176 km

Aphel (2016: 4. Juli, 16:24 UTC):

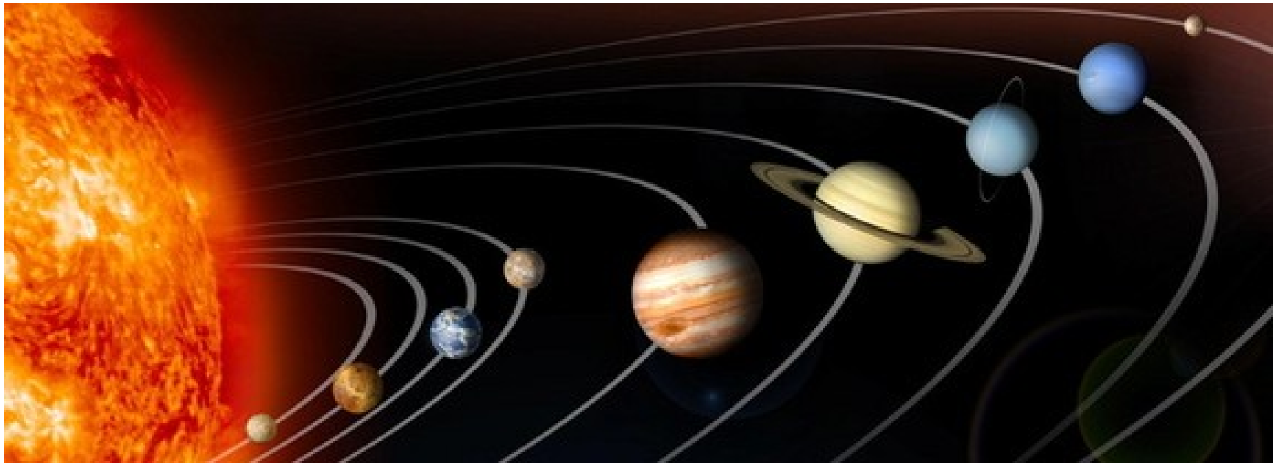
152 103 775 km

→ Δ a / a = 3.4%,

solare Bestrahlungsstärke variiert um 6.9%



Gravitative Wechselwirkung mit anderen Planeten und Mond führt zu ***Orbitvariationen*** und ***Präzession der Erdachse***

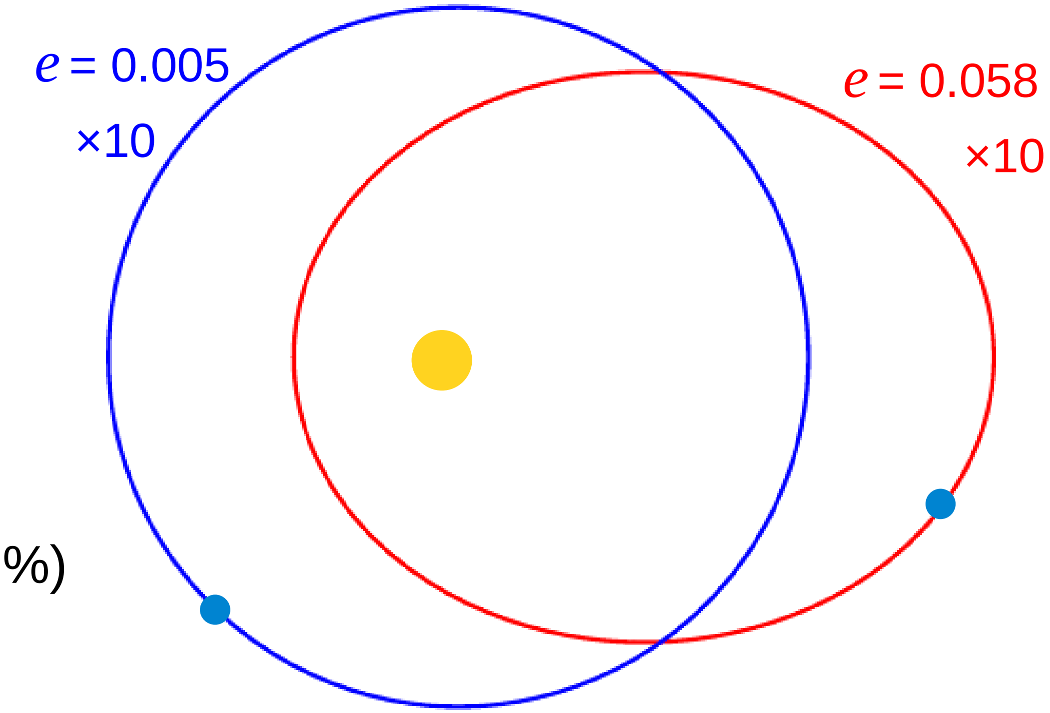


a) Änderung der Exzentrizität

$e_{min} = 0.005$, $e_{max} = 0.058$

Periode: ~ 100 000 Jahre

→ Jährliche relative Variation der solaren Bestrahlungsstärke (heute 6.9%) schwankt zwischen 1.4% und 25%.



Beeinflusst auch die gesamte jährliche Sonneneinstrahlung:

$$\langle E \rangle = \int_{\text{Jahr}} S_\odot \,\mathrm{d}t \propto \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\langle E \rangle (e = e_{\text{min}}) = 1.0000125 \,\langle E \rangle (e = 0)$$

$$\langle E \rangle (e = e_{\text{max}}) = 1.001674 \,\langle E \rangle (e = 0)$$

Präzession der Erdachse

b) Präzession verschiebt Datum von Perihel und Aphel

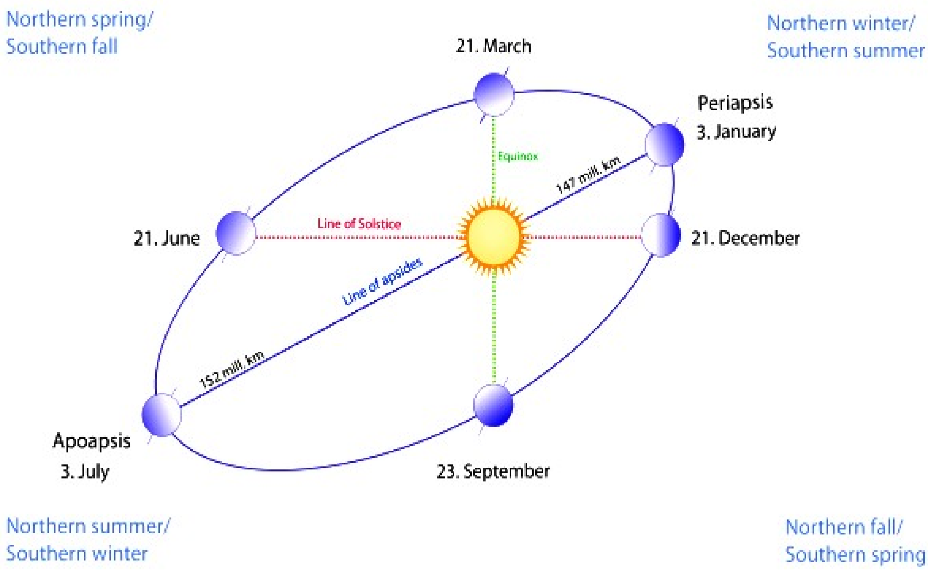
(Periode ~ 18 000 bis 23 000 Jahre)

2016: Perihel am 2. Januar,
Aphel am 4. Juli

In ~ 11 000 Jahren: Perihel ~ 4. Juli,
Aphel ~ 2. Januar

→ *Sommer auf Nordhalbkugel wärmer,*
Winter auf Nordhalbkugel kälter

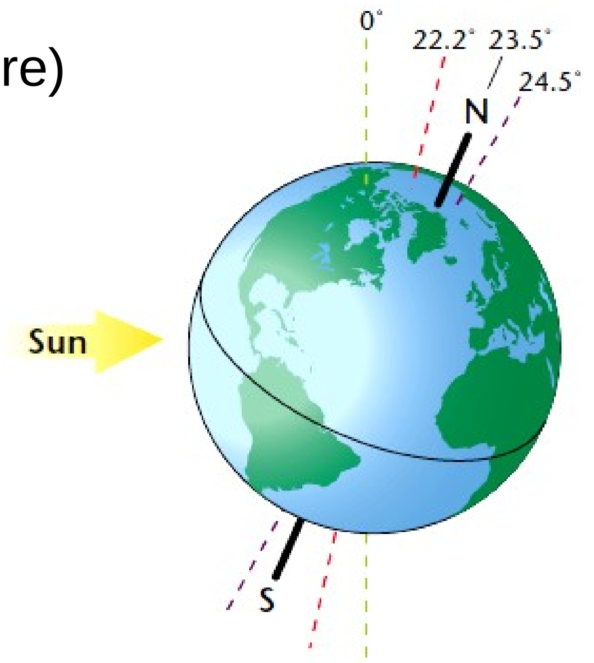
= „*Climatic Precession*"



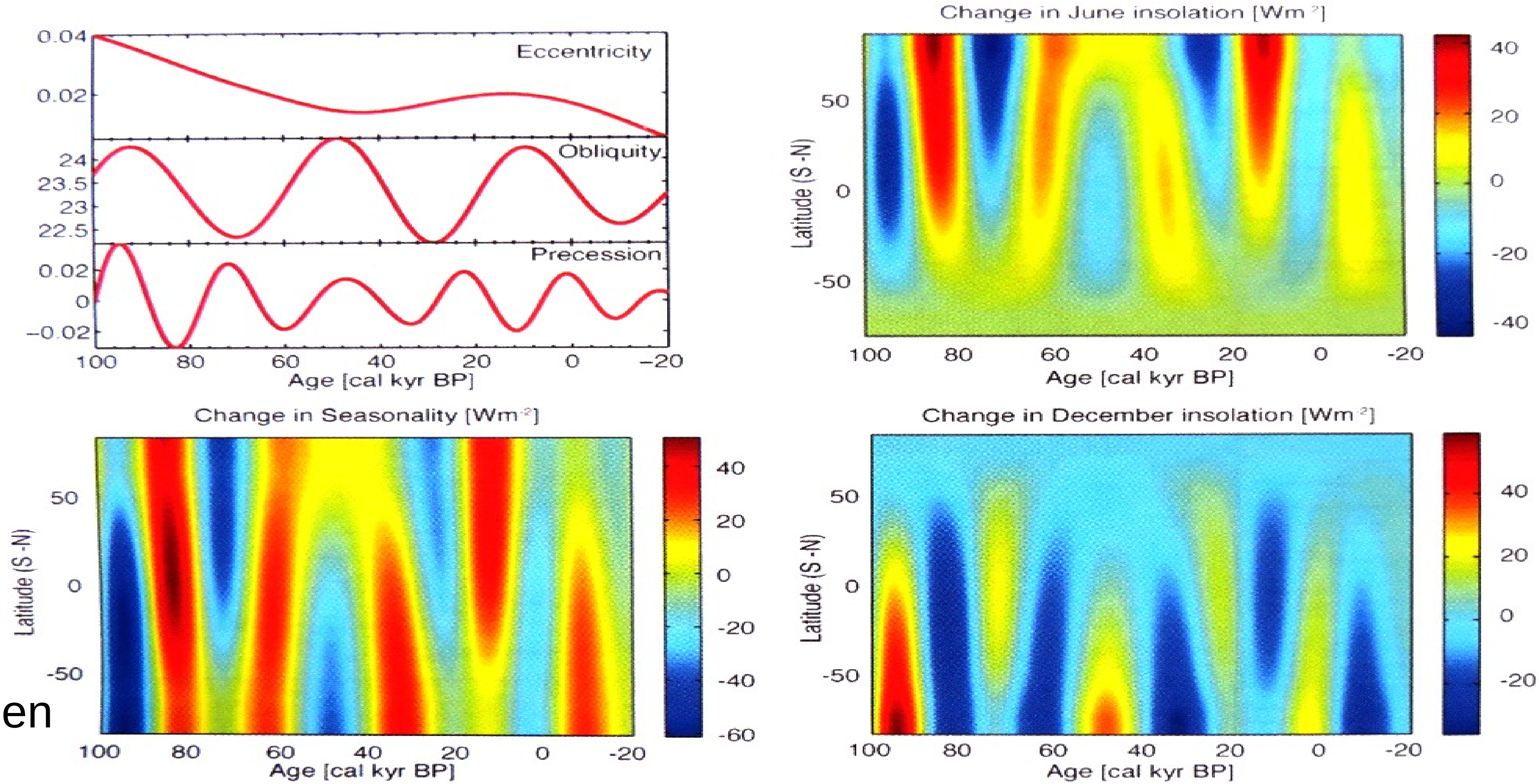
c) Änderung des Präzessions-Winkels (P ~ 41 000 Jahre)

Zwischen maximal 24.5° und minimal 22.1°

Momentan: 23.5° , Änderung: −0.47″ / Jahr



Je größer der Präzessions-Winkel, desto stärker ist der Kontrast zwischen Sommer und Winter.



Kombination
der Variationen
von

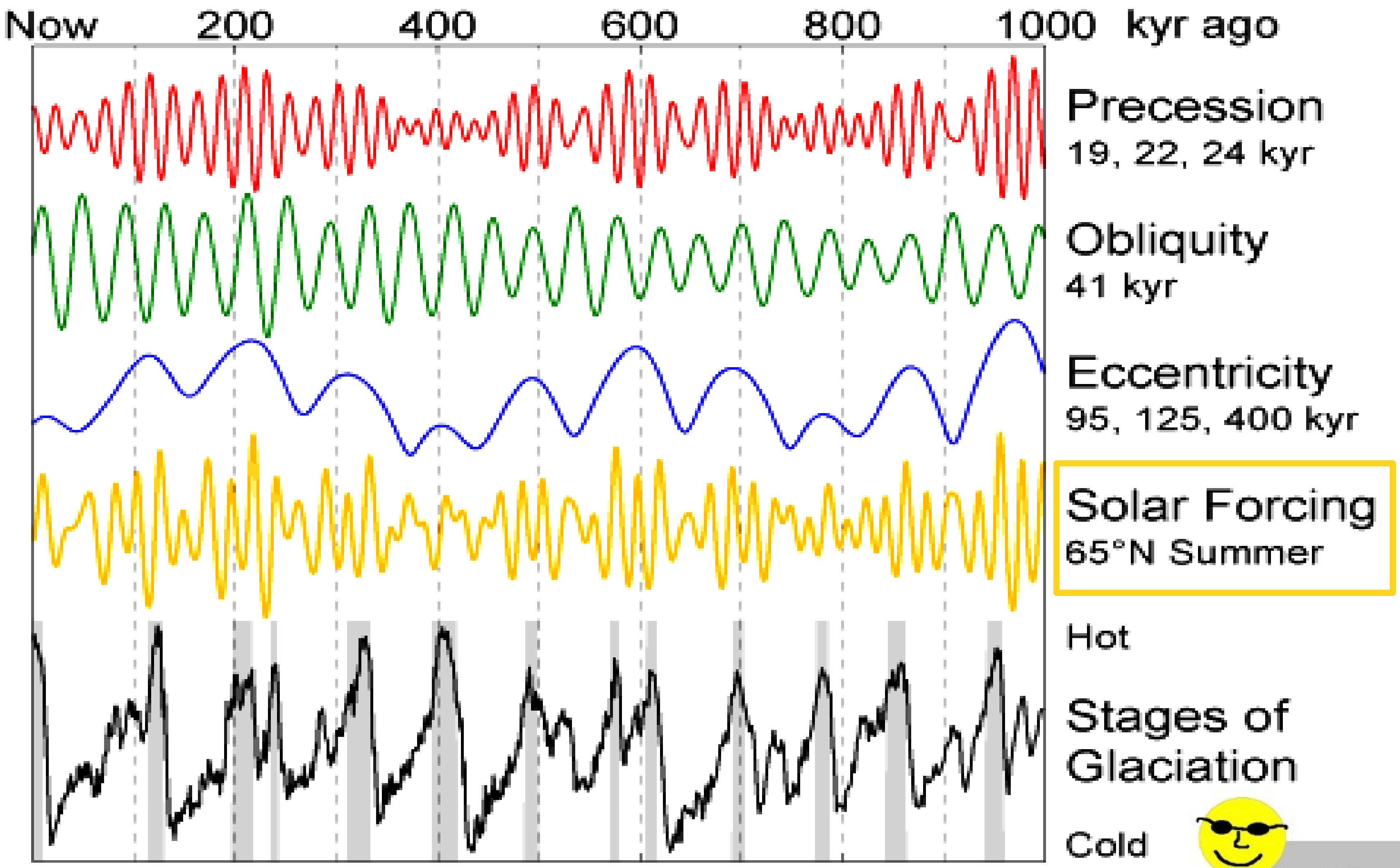
- Exzentrizität (P ~100 000 a) - Präzessionswinkel (P ~41 000 a) - Perihel Datum (P ~21 000 a)

bildet die ***Milankovitch Zyklen***

und führt zu Änderung der

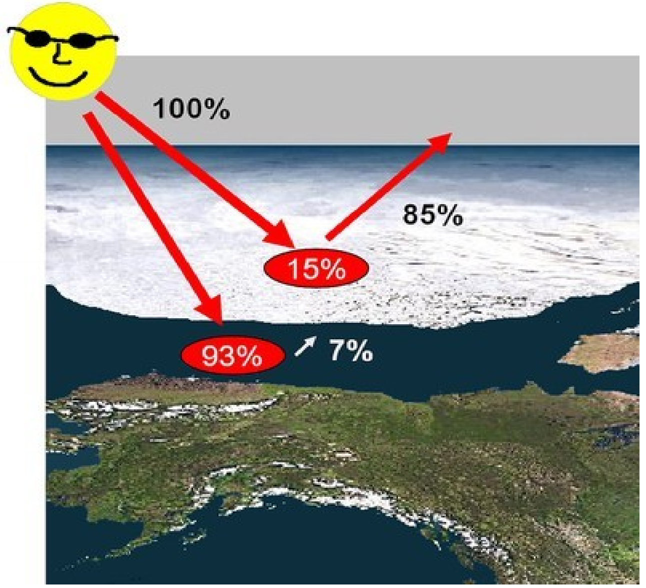
- **gesamten jährlichen solaren Einstrahlung** (‰ -Bereich)
- ***jahreszeitlichen Verteilung* der solaren Einstrahlung** (% -Bereich)

auf die Erde.

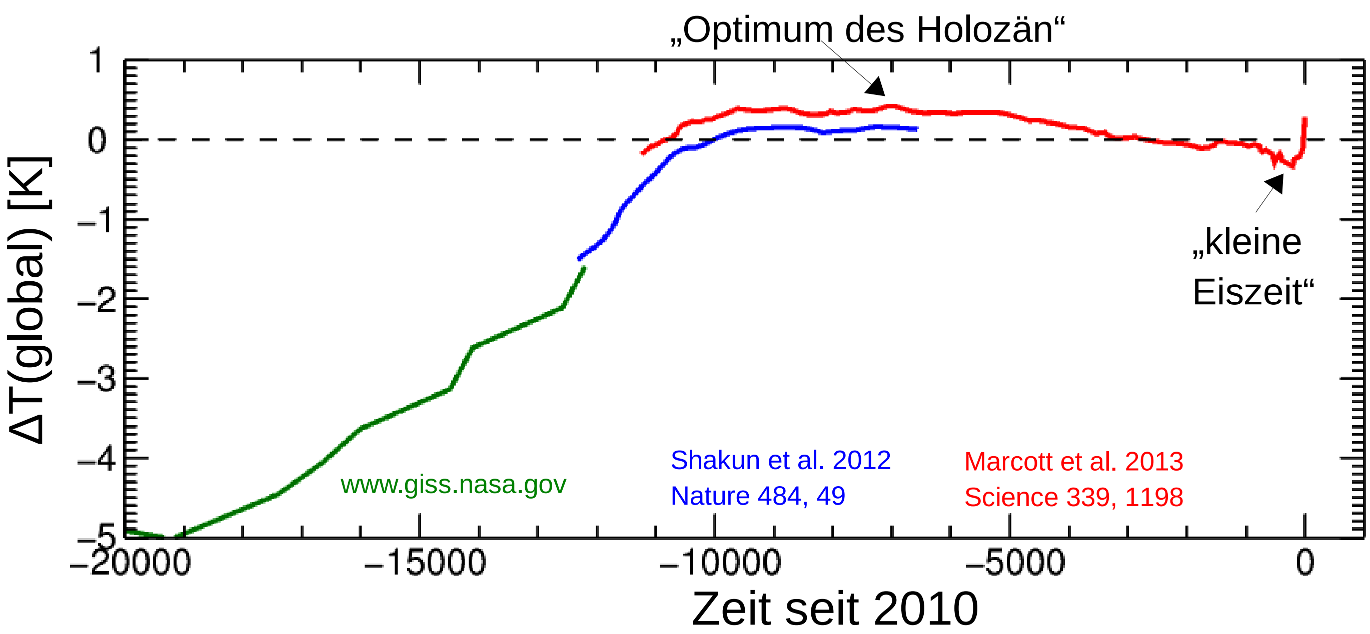


Bei der momentanen kontinentalen Konfiguration der Erde ist die Einstrahlung bei hohen nördlichen Breiten (~ 65°Nord) der entscheidende Trigger für die Eiszeitzyklen (~ 100 000 a)

Verstärkung. z.B. durch Eis-Albedo Feedback:



Erklärung für das Ende der letzten Kaltzeit („Eiszeit")



Vor ~ 12 000 Jahren war:

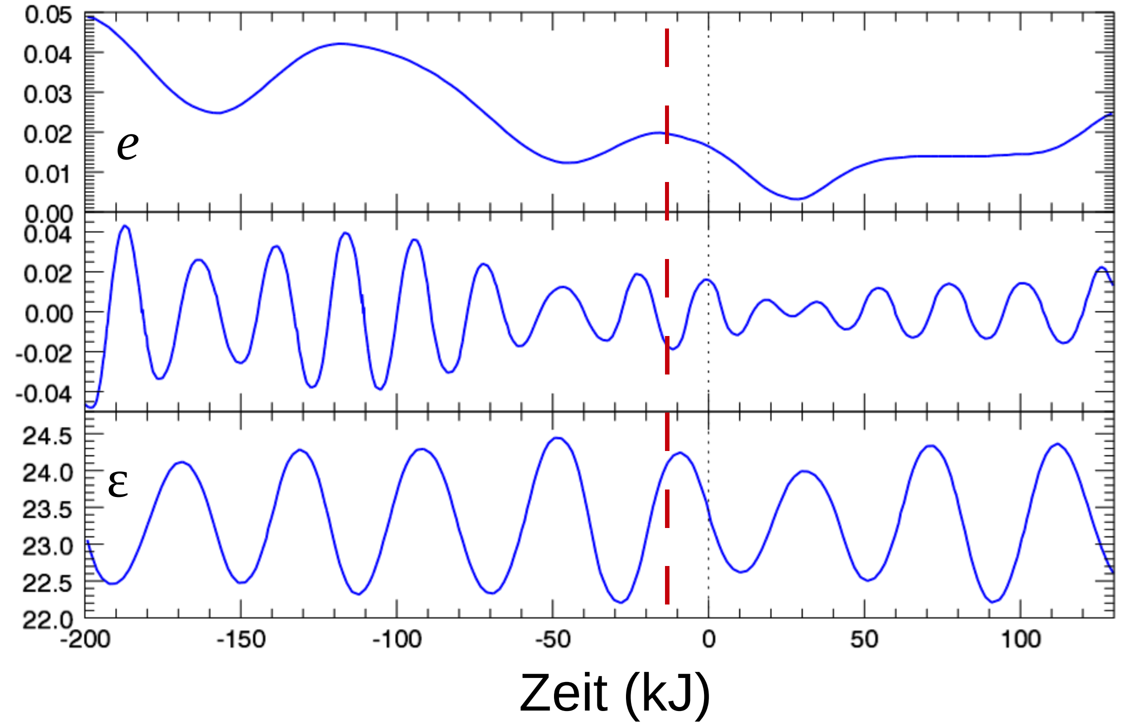
- *Exzentrizität größer*
- → mehr Sonneneinstrahlung

- *Perihel im Nordsommer*

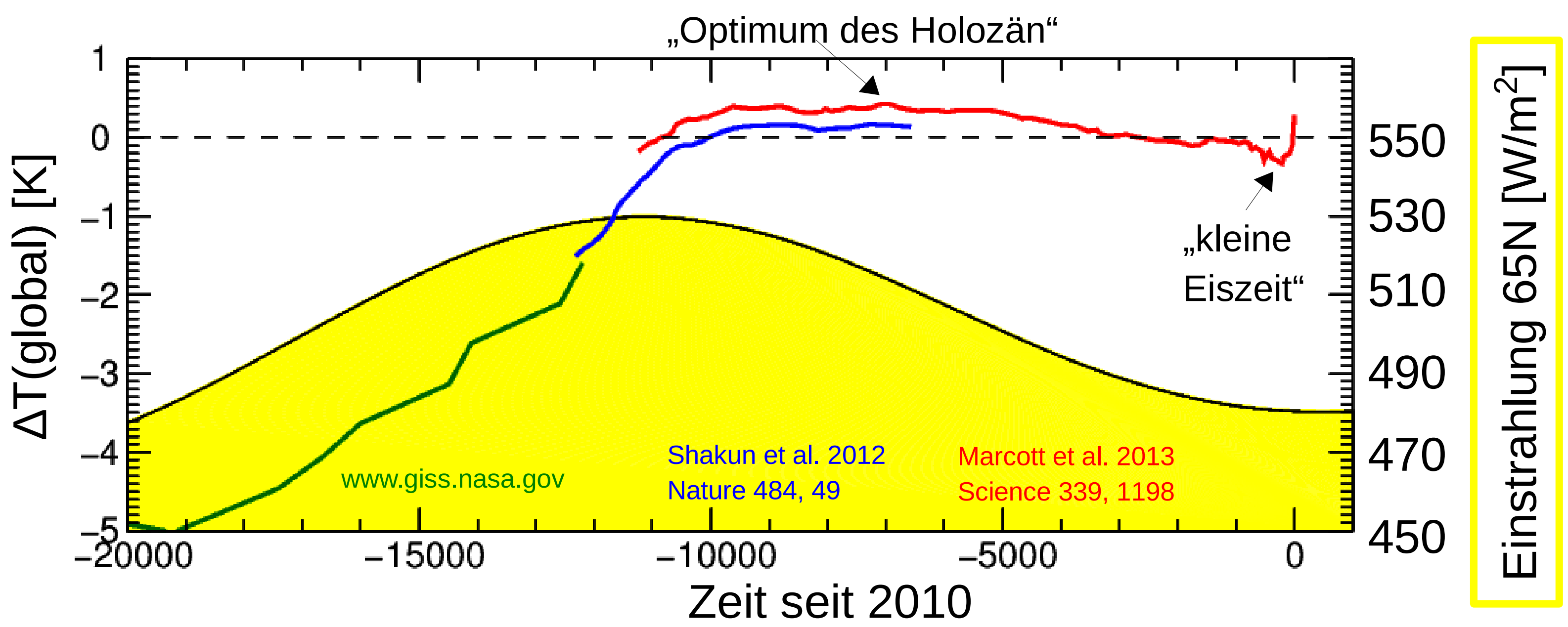
→ wärmere Sommer im Norden

- *Achsenneigung größer*

→ stärkerer jahreszeitlicher Kontrast



Erklärung für das Ende der letzten Kaltzeit („Eiszeit“)



Vor ~ 12 000 Jahren war:

- *Exzentrizität größer*

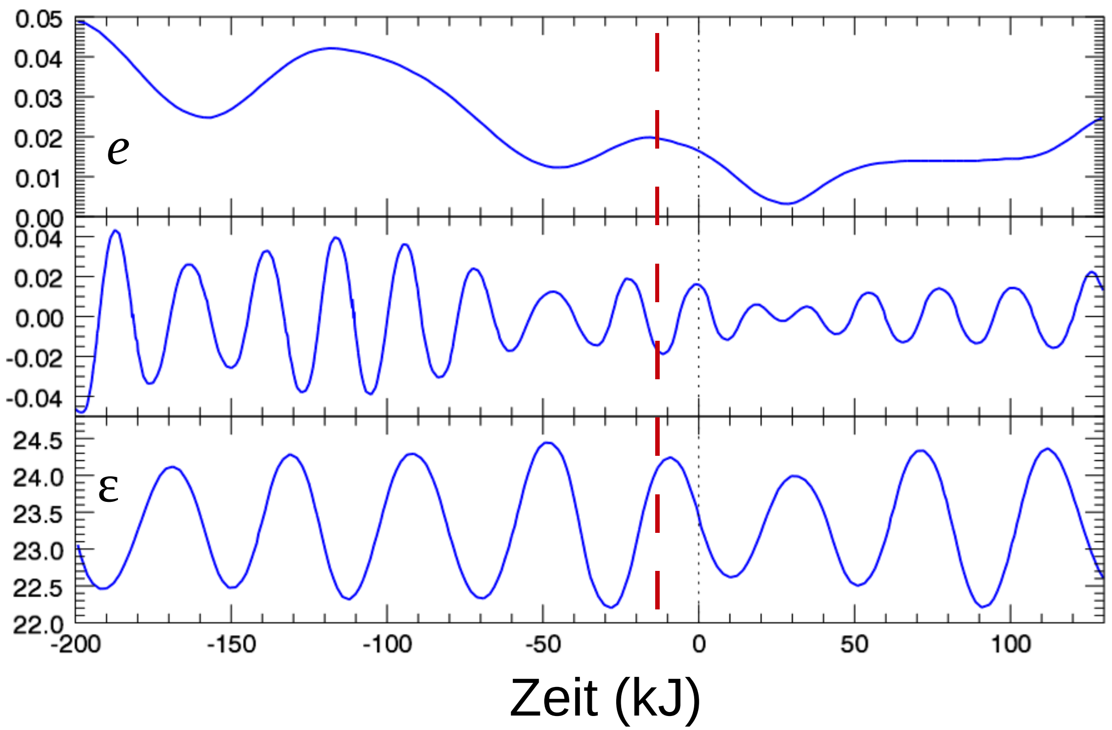
  → mehr Sonneneinstrahlung

- *Perihel im Nordsommer*

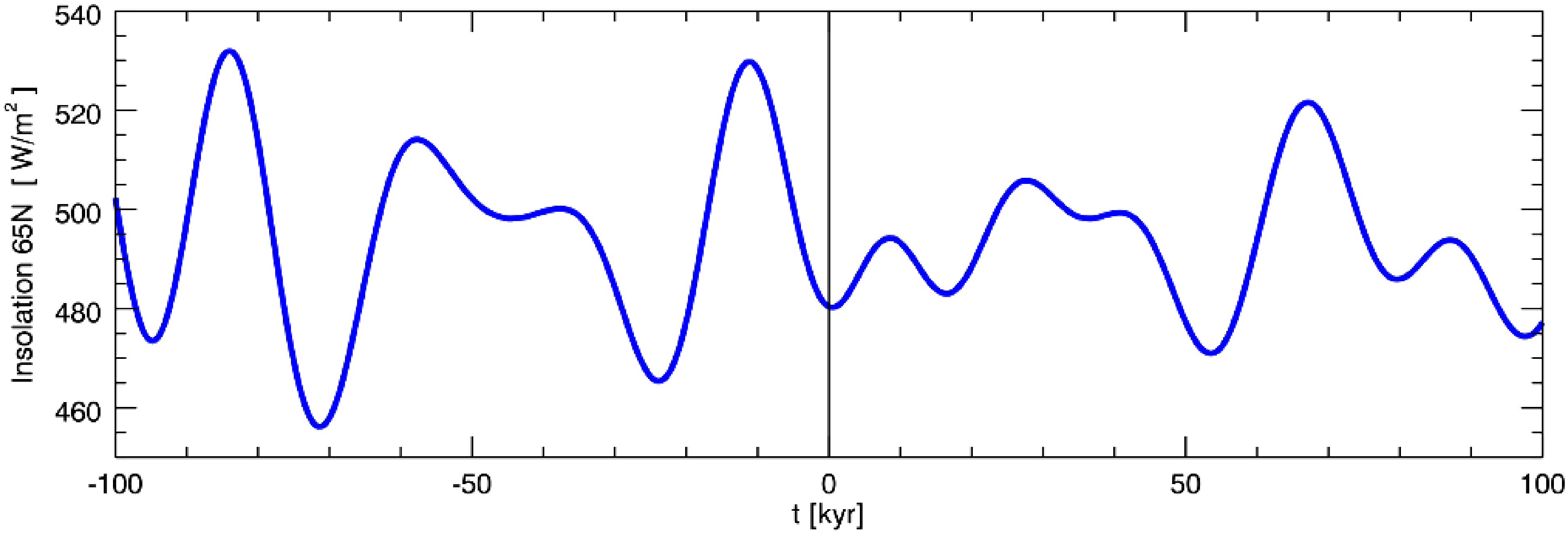
  → wärmere Sommer im Norden

- *Achsenneigung größer*

  → stärkerer jahreszeitlicher Kontrast



Vorhersage für die kommende Jahrtausende:



- Während der nächsten ~10 000 Jahre: natürlicher Erwärmungstrend (<< anthropogener Treibhauseffekt)

- Nächste deutliche Abkühlung in ~ 15 000 Jahren

- Nächste Eiszeit in ~ 50 000 Jahren

3. Kepler Gesetz: Quadrate der Umlaufzeiten sind proportional zur 3. Potenz der großen Halbachsen

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\, a^3}$$

für Planetenbahnen um sonnenähnliche Sterne (d.h. $M_* = M_\odot$) gilt also:

$$\left(\frac{P}{[\mathrm{Jahre}]}\right)^2 = \left(\frac{a}{[\mathrm{AU}]}\right)^3$$

Mittlere Bahngeschwindigkeit:

$$\langle u \rangle \simeq \frac{2\pi a}{P} = \frac{2\pi a}{\sqrt{4\pi^2 a^3/GM}} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Messung von Bahnradius und Geschwindigkeit ergibt Masse des Zentralobjekts !

Merkur	48 km/sec
Venus	35 km/sec
Erde	30 km/sec
Mars	24 km/sec
Jupiter	13 km/sec
Saturn	9.7 km/sec
Uranus	6.8 km/sec
Neptun	5.4 km/sec

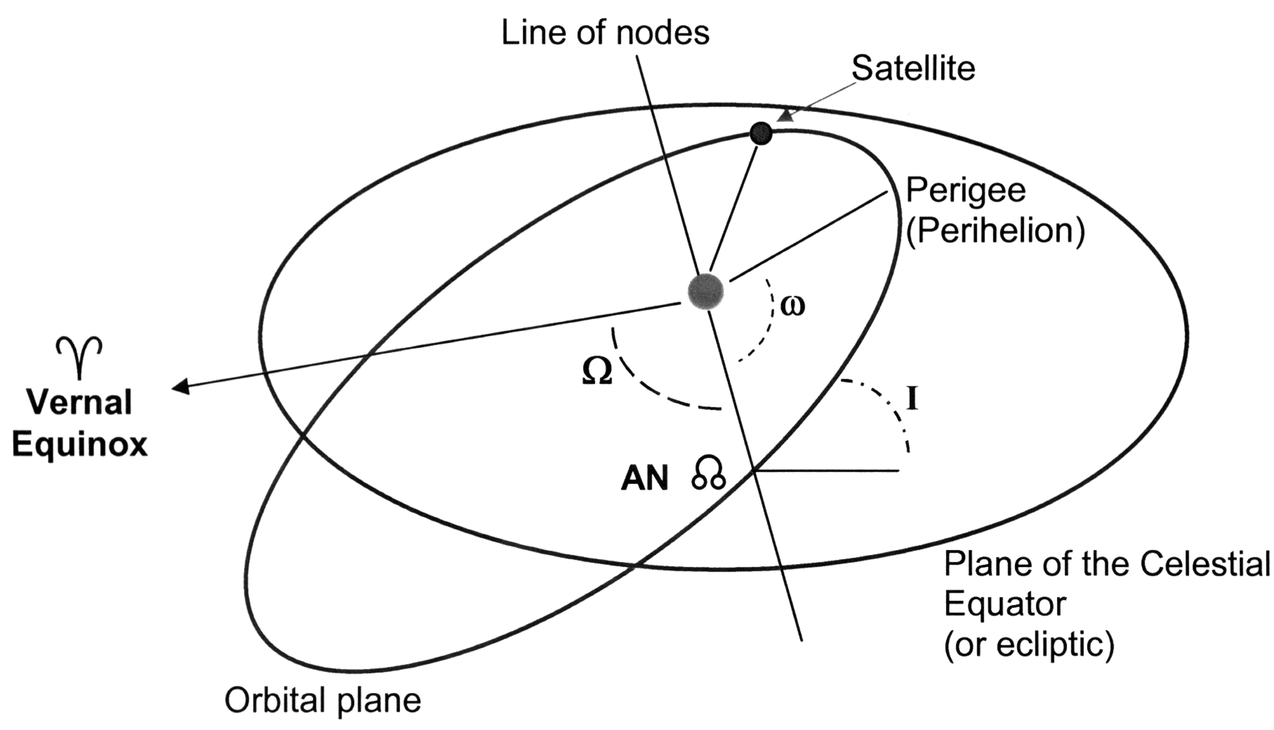
Beobachtung von Doppelsternen

$$P^2 = \frac{4\pi}{G(m_1+m_2)}\, a^3 \qquad \frac{m_1+m_2}{M_{\text{Sonne}}} = \frac{(a[\text{AU}])^3}{(P[\text{Jahre}])^2}$$

kennt man außer a auch noch a_1 und a_2 → $\frac{a_1}{a} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \qquad \frac{a_2}{a} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$

Praktische Probleme:

- Weite = leicht trennbare Systeme haben lange Perioden (> 100 Jahre)
- Systeme mit kurzen Perioden sind sehr eng = schwer trennbar
- Bahn-Inklination



Beispiel:
visueller Doppelstern η Cas

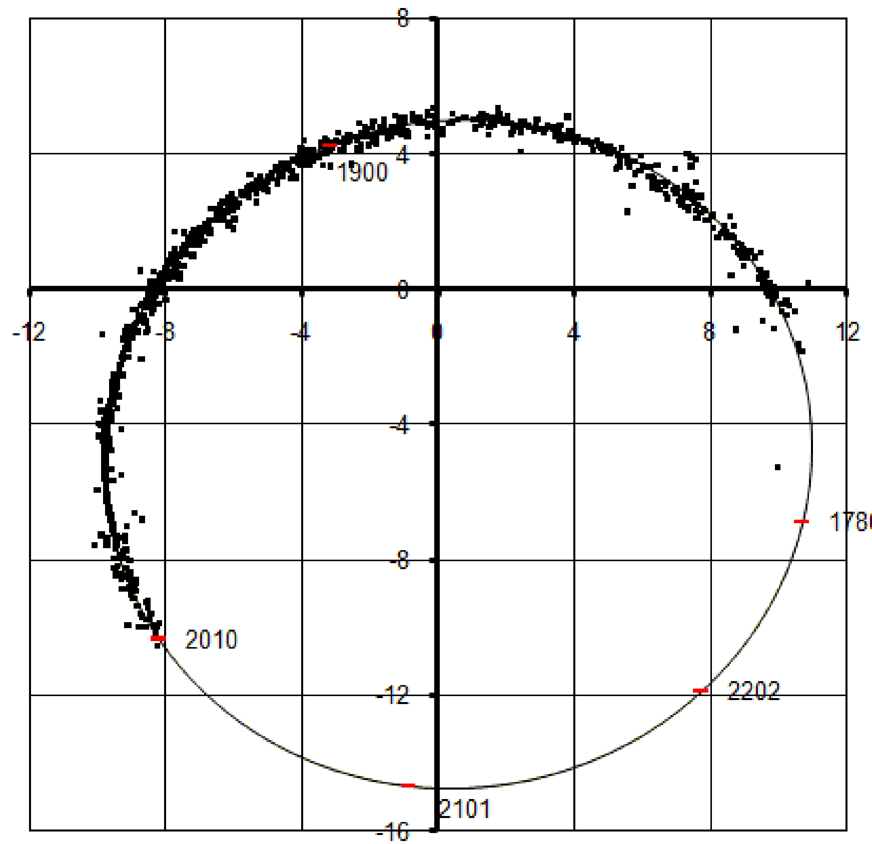
$\rho = 12''$

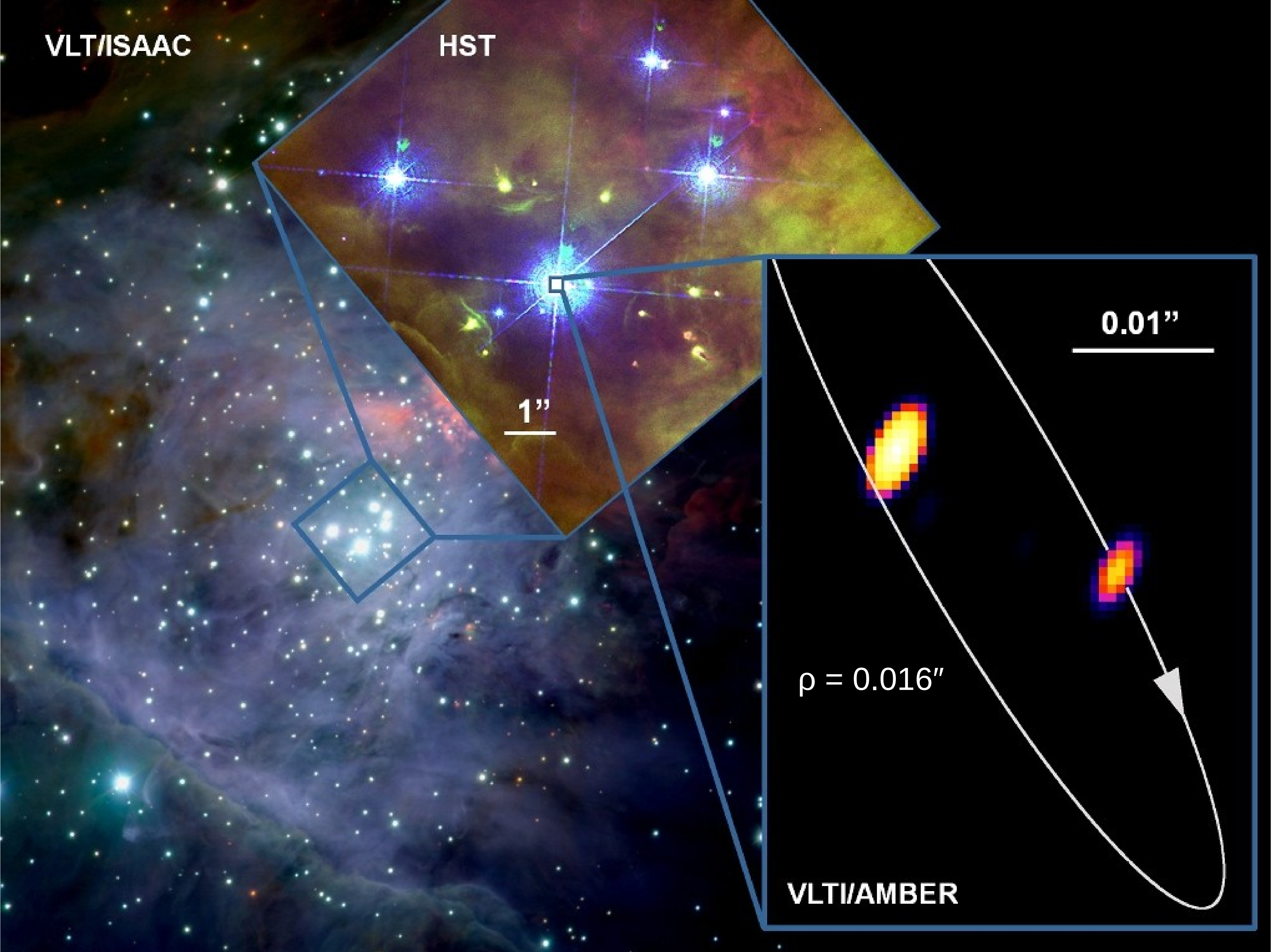
$P = 480$ a

$a = 71$ AU

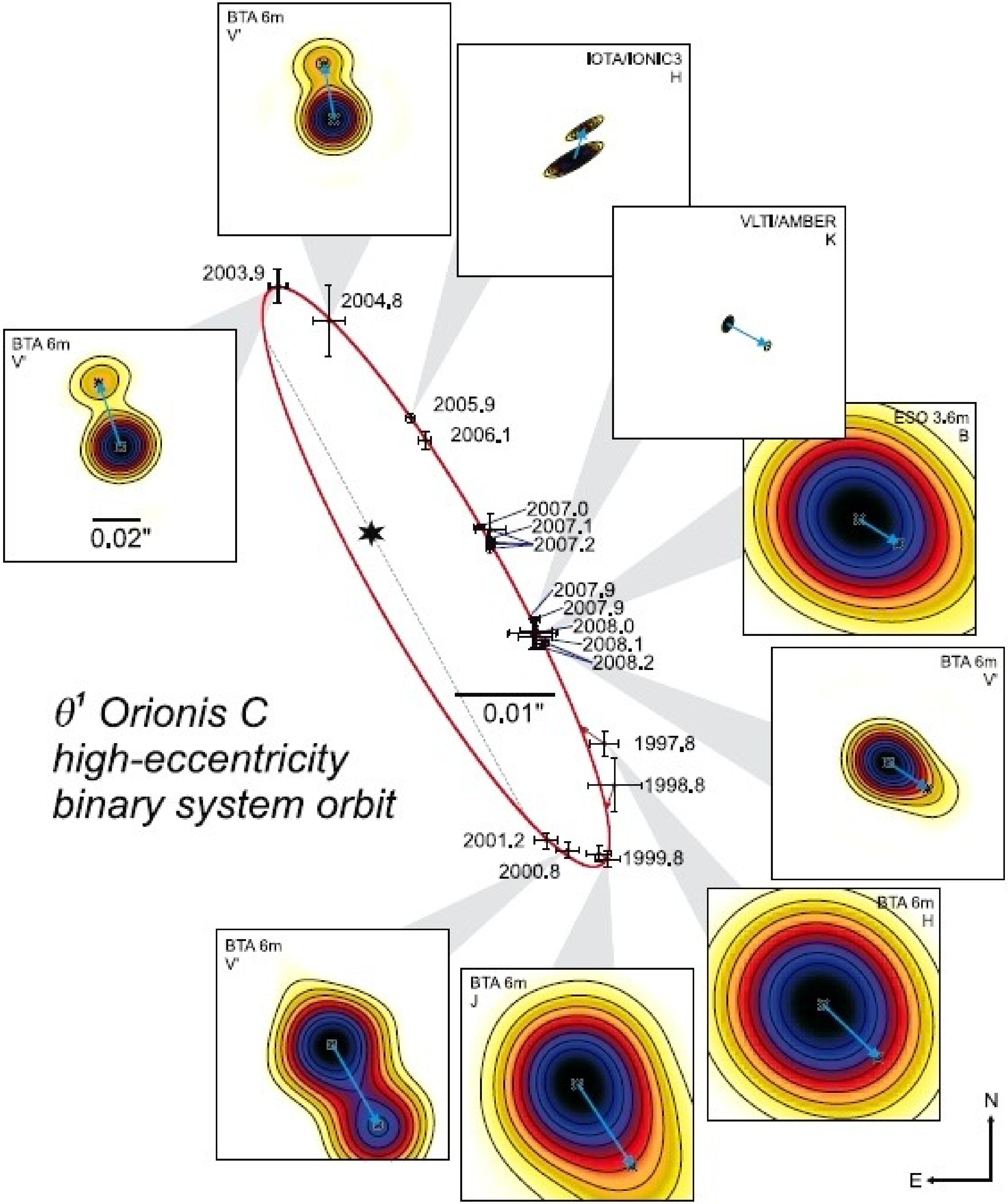
$m_1 = 0.91\ M_\odot$

$m_2 = 0.56\ M_\odot$





VLT/ISAAC
HST
1"
0.01"
ρ = 0.016″
VLTI/AMBER



Orbit:

P = 11.26 ± 0.5 yrs

a = 43.6 mas = 18 AU

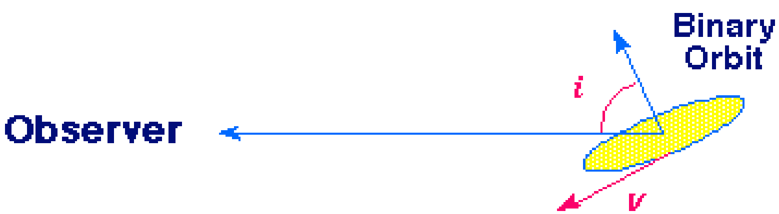
e = 0.592 ± 0.07

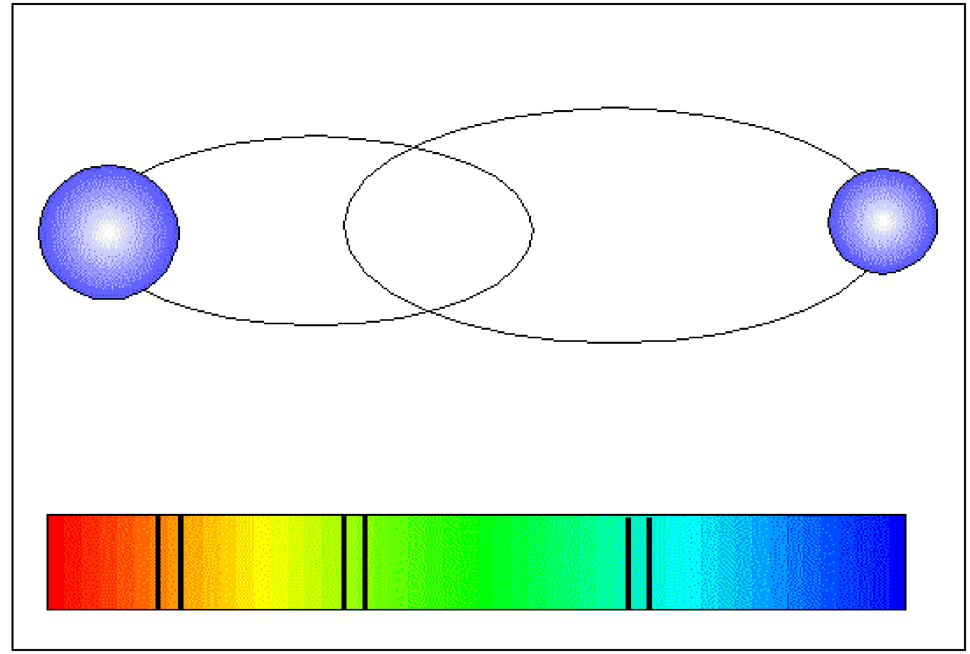
M_1 = 39.5 $M_\odot$

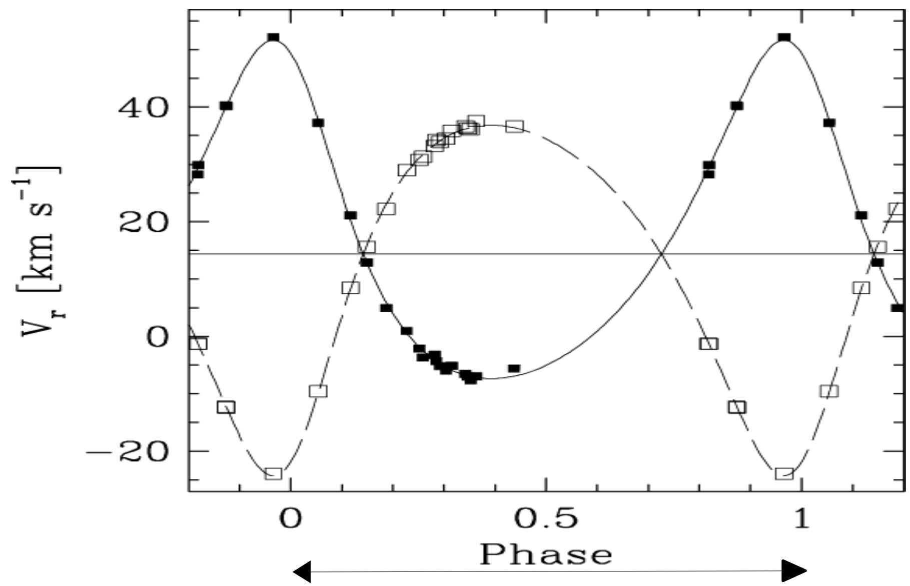
M_2 = 7.5 $M_\odot$

Spektroskopische Doppelsterne

$$\text{für} \quad e \ll 1 \;\rightarrow\; \frac{m_1}{m_2} = \frac{u_2}{u_1}$$







Periode P

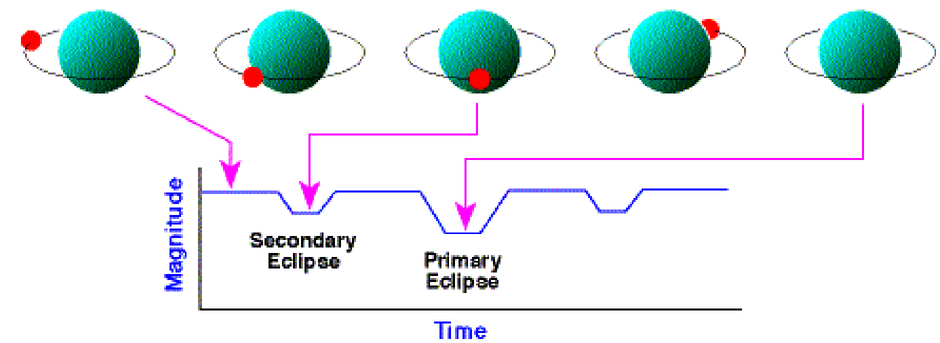
Inklination (Winkel zwischen Orbit-Achse und Sichtlinie) i

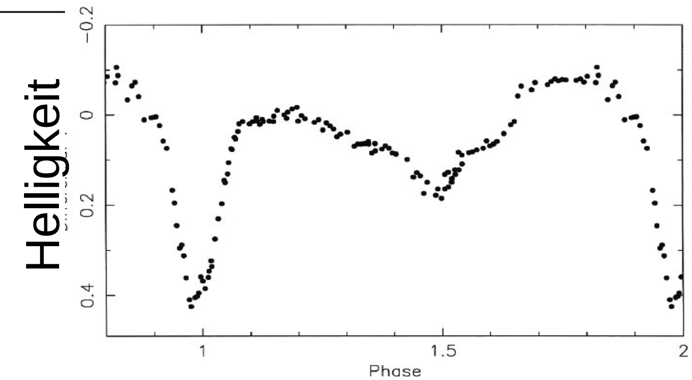
Gemessen wird nicht u sondern

$$u \sin i$$

• Eclipsing Binaries

$i \cong 90°$





• Kombination: Spektroskopie + Bildinformation

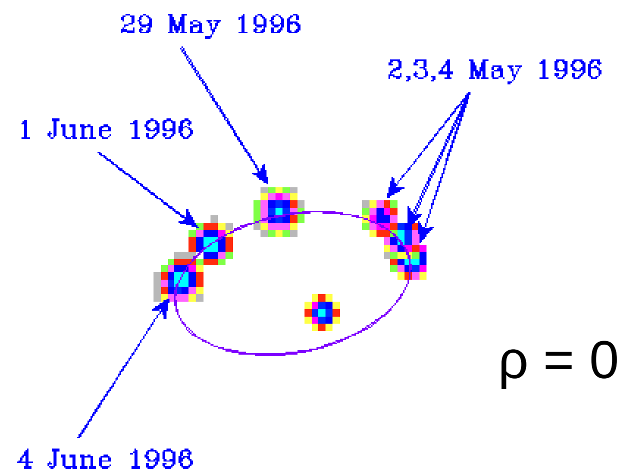
Mizar: Spektroskopische Doppelstern, zusätzlich durch interferometrische Bildgebung aufgelöst.

$P = 20.5$ Tage

$a = 0.25$ AU

$m_1 = 2.50\ M_\odot$

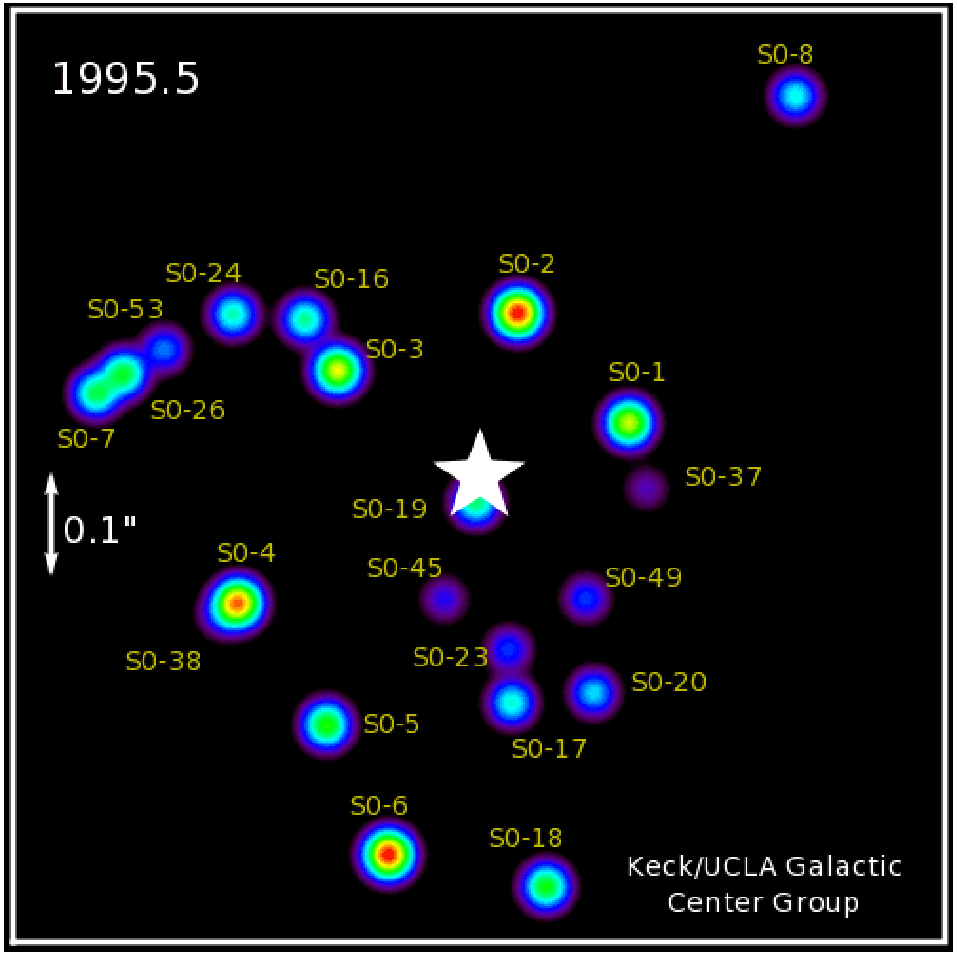
$m_2 = 2.43\ M_\odot$

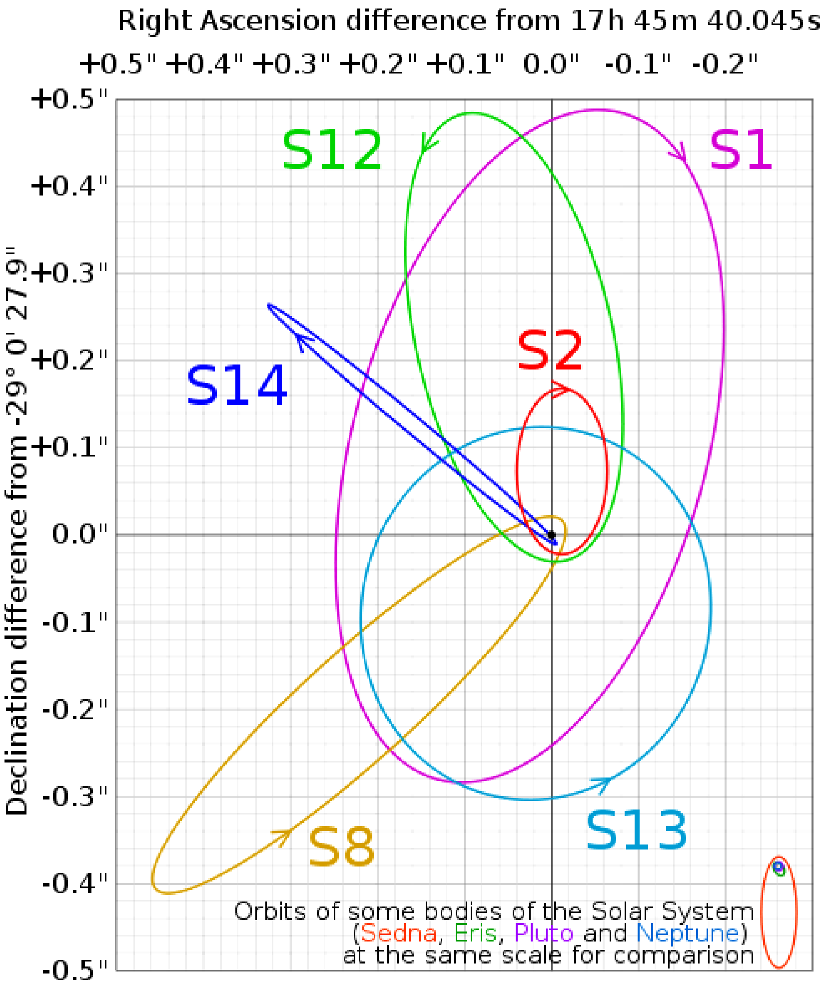


$\rho = 0.0098''$

$e = 0.53$

Das Objekt im Zentrum unserer Galaxis



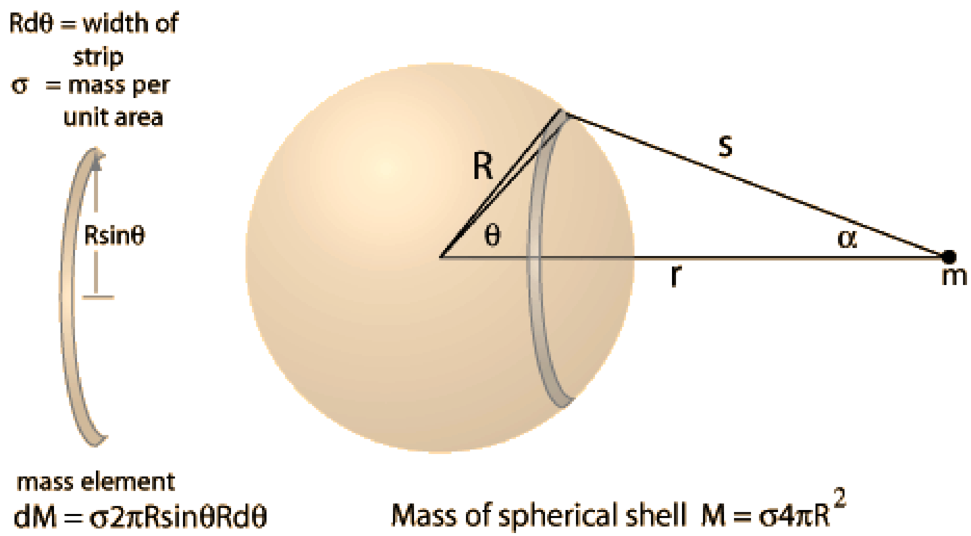


$$M \approx 4 \cdot 10^6 \, M_\odot$$

$$R < 122 \text{ AU}$$

$\longrightarrow$ Supermassives Schwarzes Loch

Massenbestimmung für Sternhaufen und Galaxien



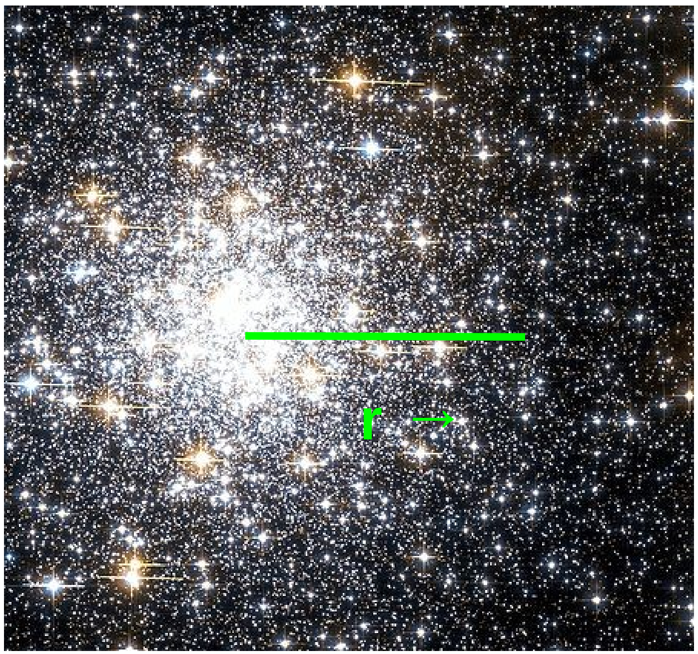
Gravitative Wirkung einer sphärischen Massenverteilung entspricht der einer Punktmasse im Zentrum.

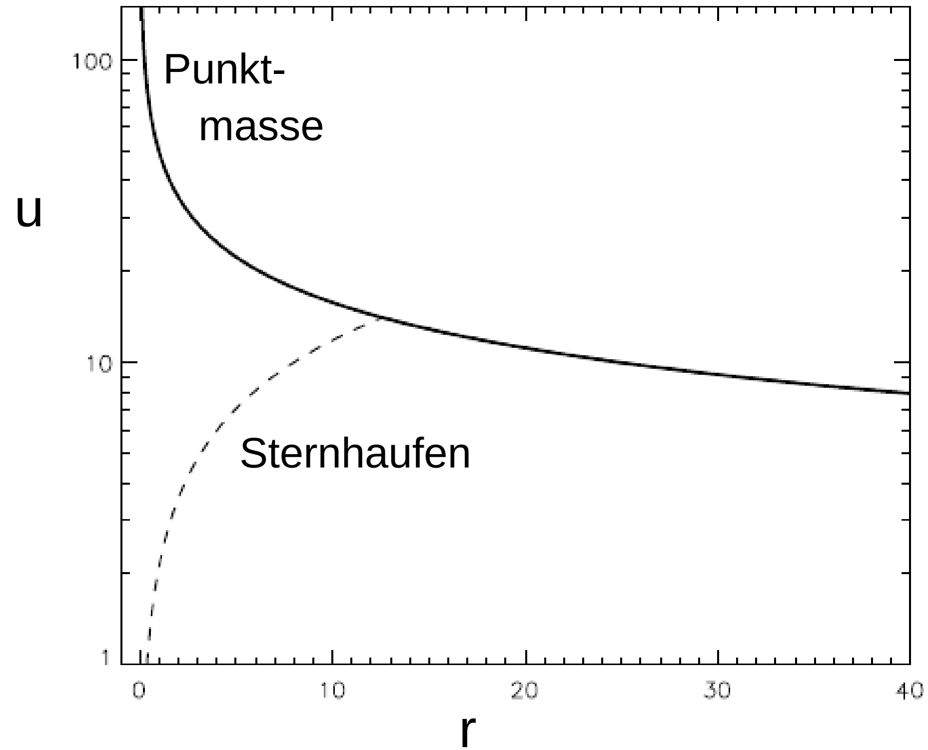
$$\langle u \rangle \simeq \frac{2\pi a}{P} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

→ Messung von Geschwindigkeit und Abstand eines die Massenverteilung umkreisenden Teilchens ergibt die *eingeschlossene Masse*.

Rotationsprofil von Sternhaufen

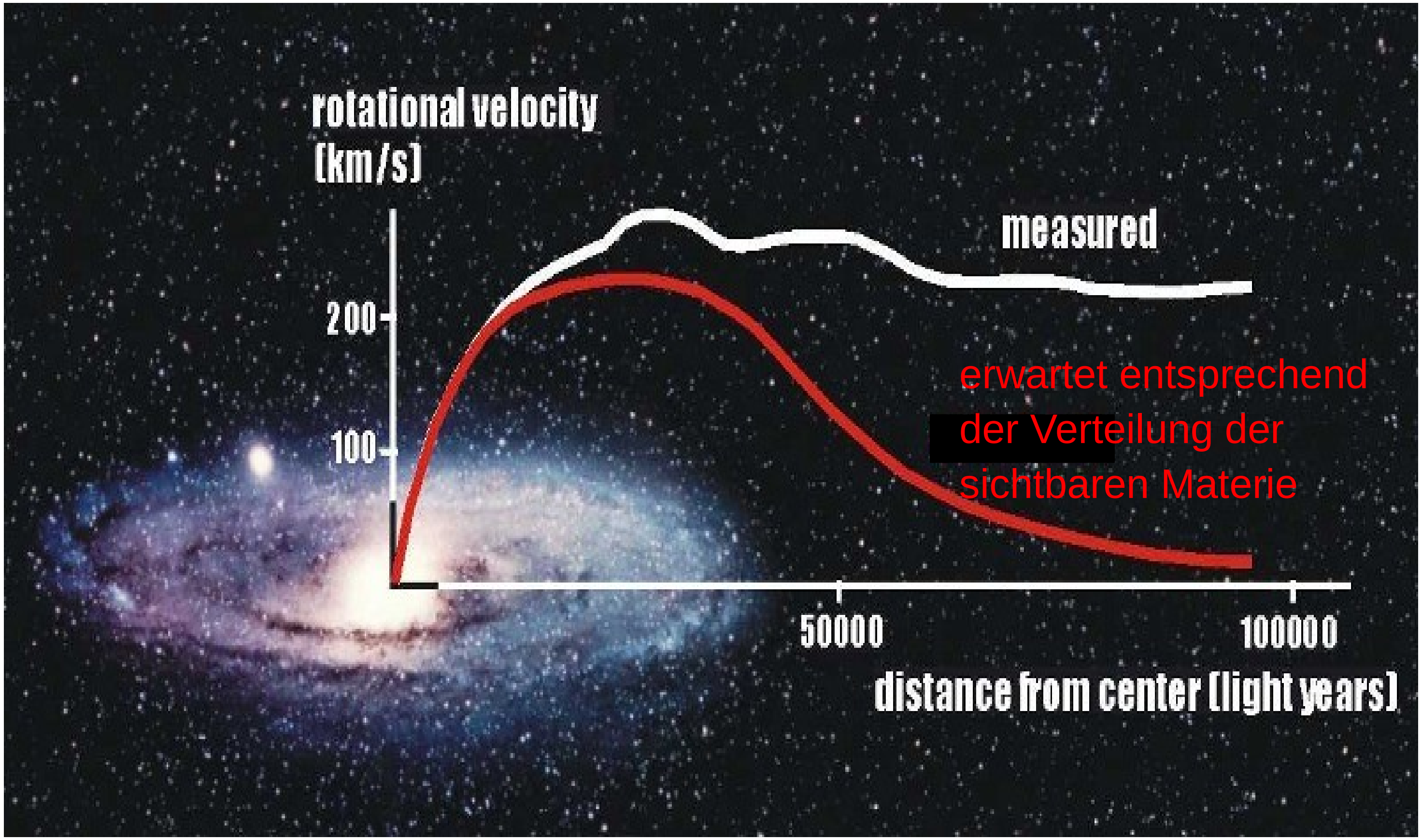
$$\langle u(r)\rangle \simeq \sqrt{\frac{G\ M(r)}{r}}$$





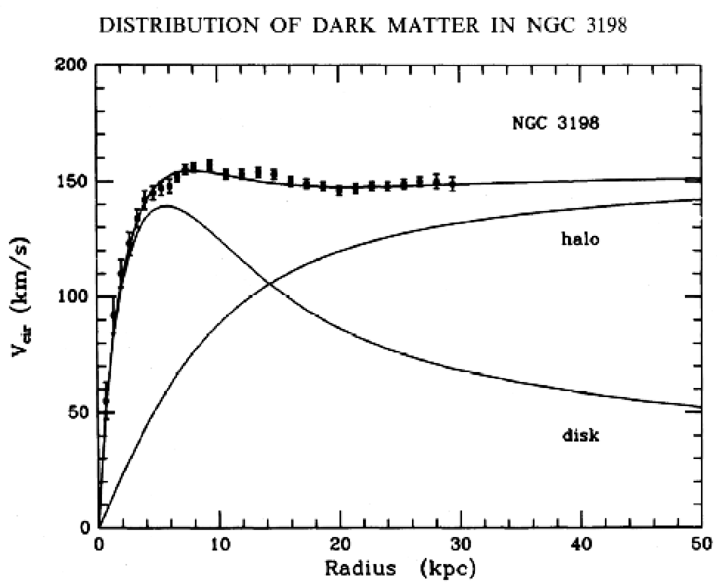
Modell: $\rho(r) \propto r^{-1/2}$

Rotationsprofil von Galaxien



→ „**Dunkle Materie**“

Gesamtmasse von Galaxien ist
~ 5−10 × größer als die sichtbare Materie



Dunkle Materie im Halo

Sichtbare Materie in der Scheibe

Virialsatz

In einem abgeschlossenen physikalischen System
aus gravitierenden Massepunkten gilt folgende Beziehung
zwischen dem <u>*zeitlichen Mittelwert der kinetischen Energie*</u> E_{kin}
und dem <u>*zeitlichen Mittelwert der potentiellen Energie*</u> E_{pot} :

$$\boxed{E_{\mathrm{kin}} = -\frac{1}{2} E_{\mathrm{pot}} \qquad \longleftrightarrow \qquad 2 E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = 0}$$

Gesamtenergie: $$E_{\mathrm{tot}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} E_{\mathrm{pot}}$$ in gebundenen Systemen negativ !

$$E_{\mathrm{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \langle |\vec{u}_i|^2 \rangle \qquad E_{\mathrm{pot}} = -\frac{G\ M^2}{\alpha R} \qquad M = \sum_i m_i$$

Anwendungen des Virialsatzes: $E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} E_{\text{pot}}$ $\quad E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} E_{\text{pot}}$

Anwendung 1: Planetenbahn, Planetenmasse m, Sternmasse M

$$\langle u \rangle \simeq \frac{2\pi a}{P} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

$$\uparrow$$

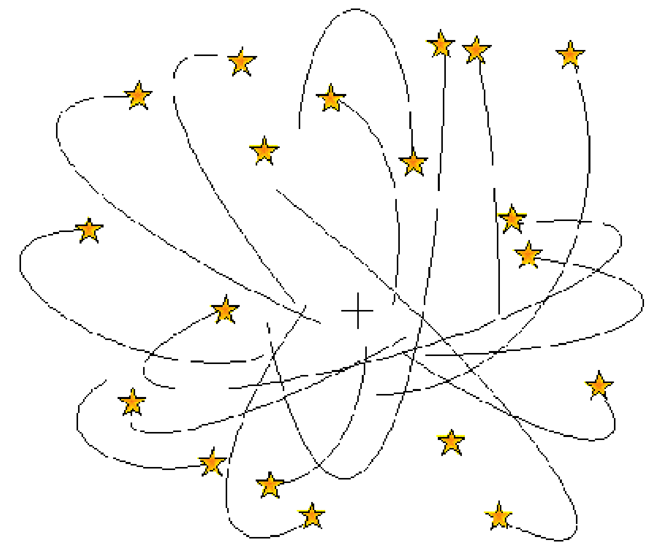
Kepler 3: $P^2 = \frac{4\pi^2}{G M} a^3$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM}{a}$$

$$E_{\text{pot}} = -\frac{GMm}{a}$$

$$\rightarrow E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} E_{\text{pot}} \;✓$$

Anwendung 2: Massenbestimmung von Sternhaufen



$$E_{\mathrm{kin}} = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i \, \langle |\vec{u}_i|^2 \rangle$$

Messgröße: Radialgeschwindigkeit *oder* Eigenbewegung

Geschwindigkeitskomponenten sind gleichverteilt:

$$\langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle \qquad \langle |\vec{u}|^2 \rangle = 3\, \langle u_{\mathrm{rad}}^2 \rangle$$

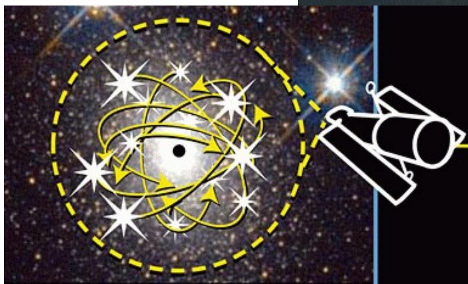
$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{3}{2}\, M \, \langle u_{\mathrm{rad}}^2 \rangle \qquad E_{\mathrm{pot}} = -\frac{G\, M^2}{\alpha\, R}$$

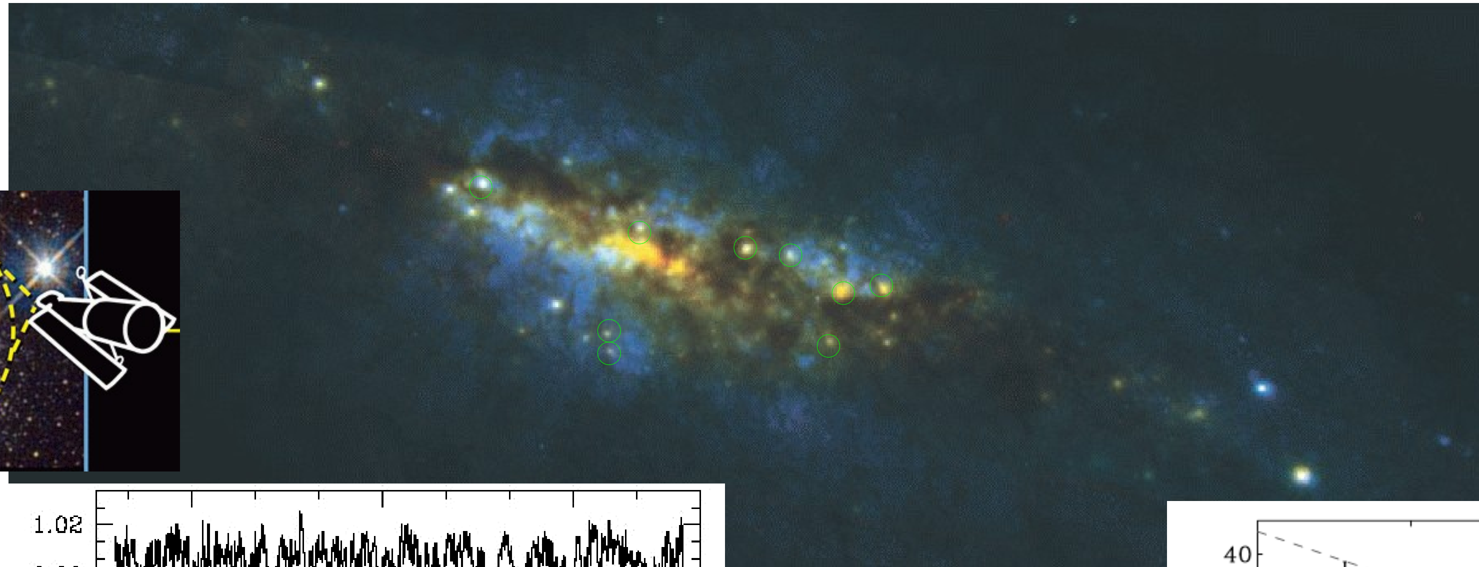
Gleichverteilung im Radius R:

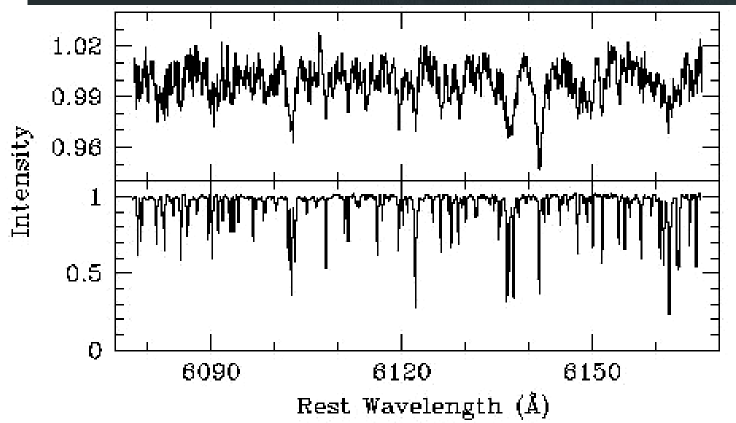
$\alpha = 5/3$

$$\boxed{M = \frac{5\,R}{G}\, \langle u_{\mathrm{rad}}^2 \rangle}$$

Geschwindigkeits-
dispersion



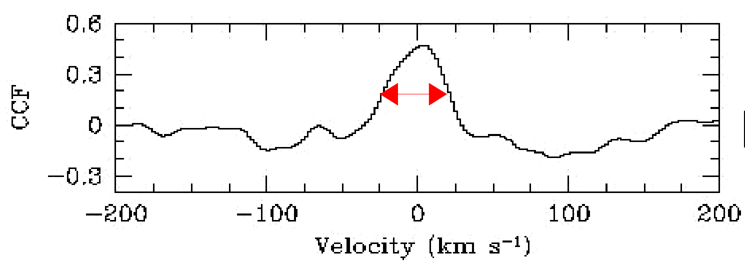




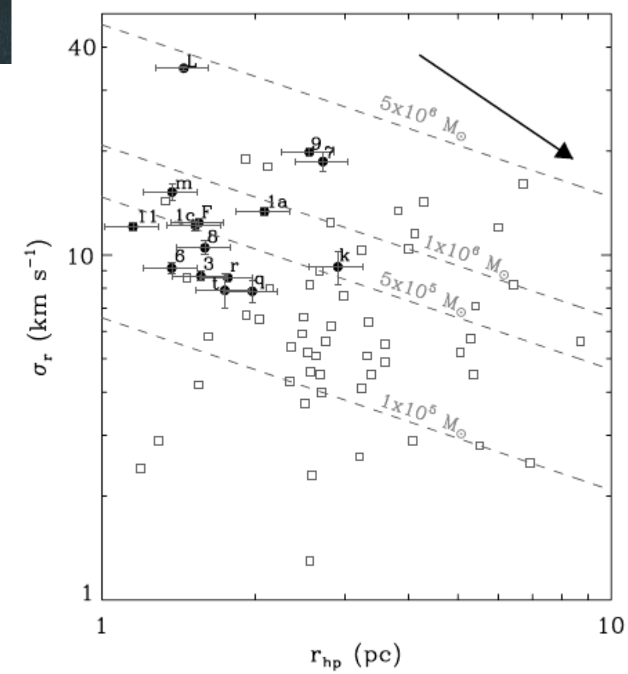
Sternhaufen

Referenzstern

$$\langle u_{\mathrm{rad}}^2 \rangle$$



Kreuz-Korrelation



Über Virialsatz bestimmte Massen stimmen gut mit Massenabschätzung aus dem sichtbaren Spektrum überein.

$$M = \frac{5\,R}{G}\,\langle u_{\mathrm{rad}}^2 \rangle$$

Anwendung 3: Massenbestimmung von Galaxienhaufen

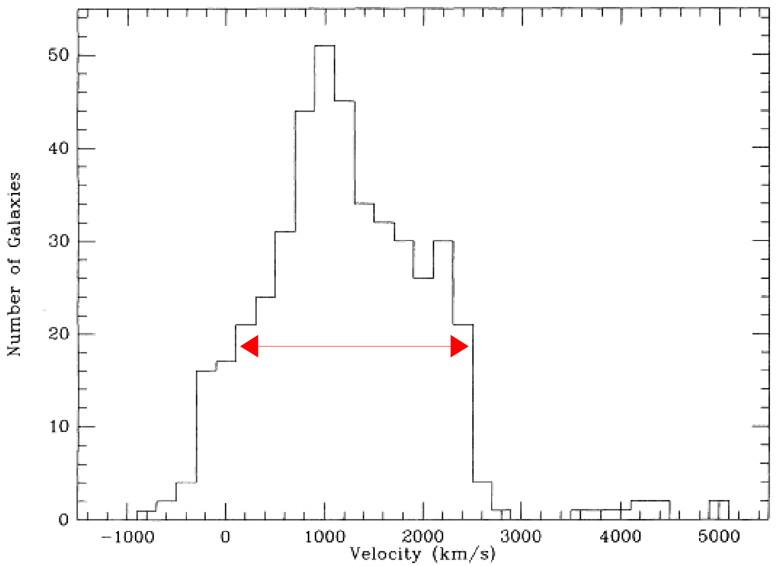


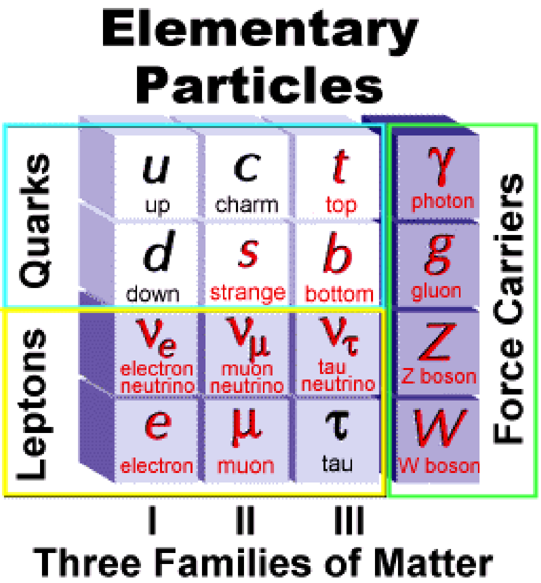
FIG. 1.—Velocity histogram for the Virgo Cluster. Notice the obvious background group at ~4000 km s⁻¹.

$\sigma(v_r) \sim 750$ km/sec

Virial Masse > 10 × sichtbare Masse

→ ***Dunkle Materie***

Blau: rekonstruierte Verteilung der dunklen Materie



+ WIMPS (?)

Weakly **I**nteracting

Massive **P**articles