[Poj 1459] 网络流(一) {基本概念与算法} - Master_Chivu

{

凸包的内容还欠整理

先来侃侃一个月以前就想写写的网络流

本文介绍网络流 网络流的算法 及其应用

这些问题没事想想还是很有意思的

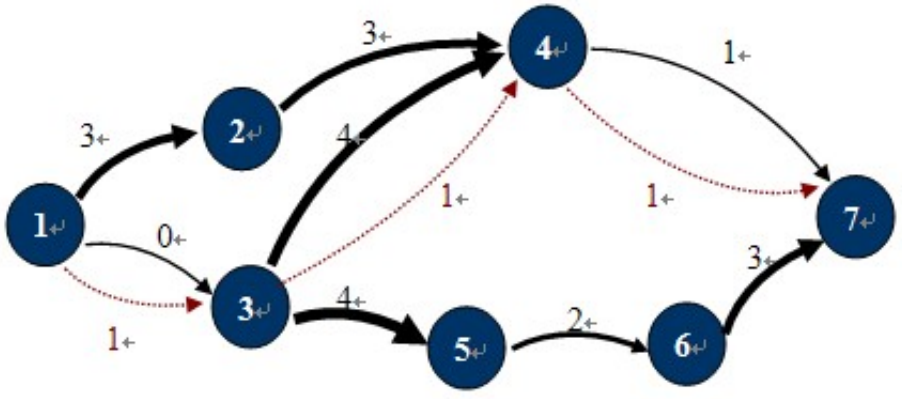
}

==========

一.网络流:流&网络&割

1.网络流问题(NetWork Flow Problem):
给定指定的一个有向图,其中有两个特殊的点源S(Sources)和汇T(Sinks),每条边有指定的容量(Capacity),求满足条件的从S到T的最大流(MaxFlow).

The network flow problem considers a graph G with a set of sources S and sinks T and for which each edge has an assigned capacity (weight), and then asks to find the maximum flow that can be routed from S to T while respecting the given edge capacities.



下面给出一个通俗点的解释

(下文基本避开形式化的证明 基本都用此类描述叙述)

好比你家是汇 自来水厂(有需要的同学可以把自来水厂当成银行之类 以下类似)是源

然后自来水厂和你家之间修了很多条水管子接在一起 水管子规格不一 有的容量大 有的容量小

然后问自来水厂开闸放水 你家收到水的最大流量是多少

如果自来水厂停水了 你家那的流量就是0 当然不是最大的流量

但是你给自来水厂交了100w美金 自来水厂拼命水管里通水 但是你家的流量也就那么多不变了 这时就达到了最大流

2.三个基本的性质:
如果 C代表每条边的容量 F代表每条边的流量

一个显然的实事是F小于等于C 不然水管子就爆了

这就是网络流的第一条性质 容量限制(Capacity Constraints):$F\langle x,y\rangle \leqslant C\langle x,y\rangle$

再考虑节点任意一个节点 流入量总是等于流出的量 否则就会蓄水(爆炸危险...)或者平白无故多出水(有地下水涌出?)

这是第二条性质 流量守恒(Flow Conservation):$\Sigma\ F\langle v,x\rangle = \Sigma\ F\langle x,u\rangle$

当然源和汇不用满足流量守恒 我们不用去关心自来水厂的水是河里的 还是江里的

(插播广告: 节约水资源 人人有责!)
最后一个不是很显然的性质 是斜对称性(Skew Symmetry): $F\langle x,y\rangle = -F\langle y,x\rangle$

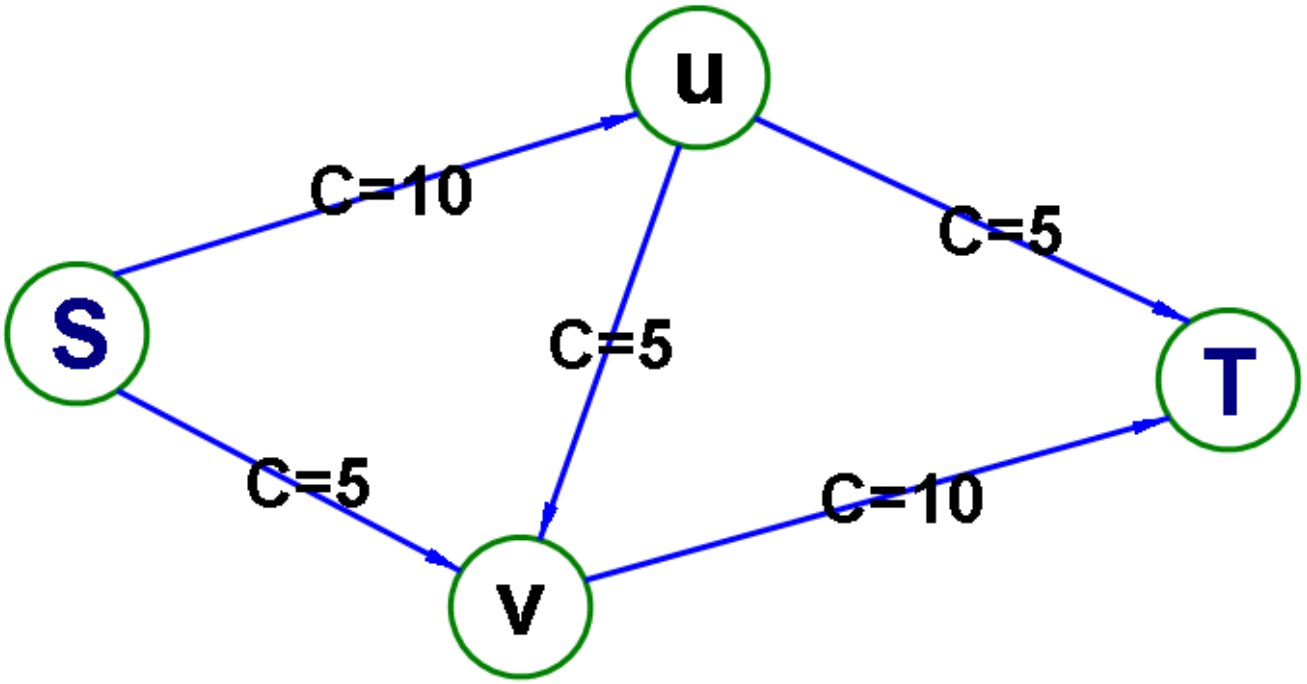
这其实是完善的网络流理论不可缺少的 就好比中学物理里用正负数来定义一维的位移一样

百米起点到百米终点的位移是100m的话 那么终点到起点的位移就是-100m

同样的 x向y流了F的流 y就向x流了-F的流

3.容量网络&流量网络&残留网络:
网络就是有源汇的有向图 关于什么就是指边权的含义是什么

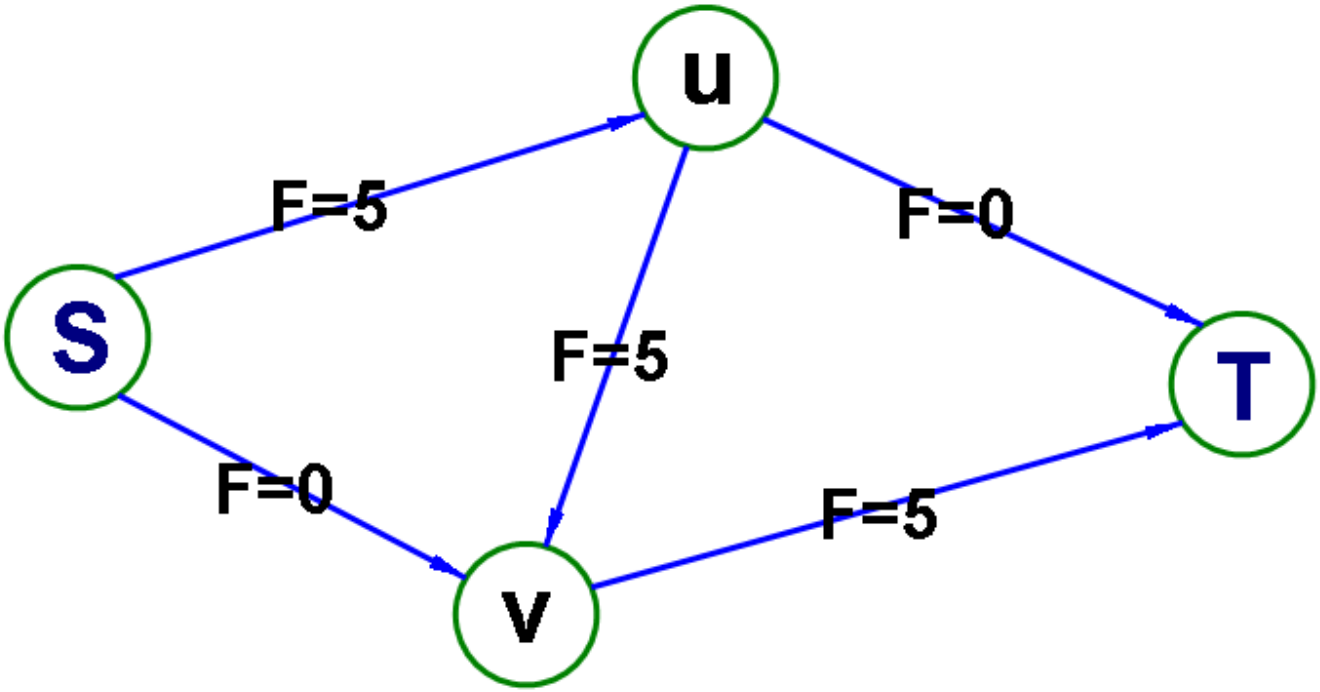
容量网络就是关于容量的网络 基本是不改变的(极少数问题需要变动)



流量网络就是关于流量的网络 在求解问题的过程中

通常在不断的改变 但是总是满足上述三个性质

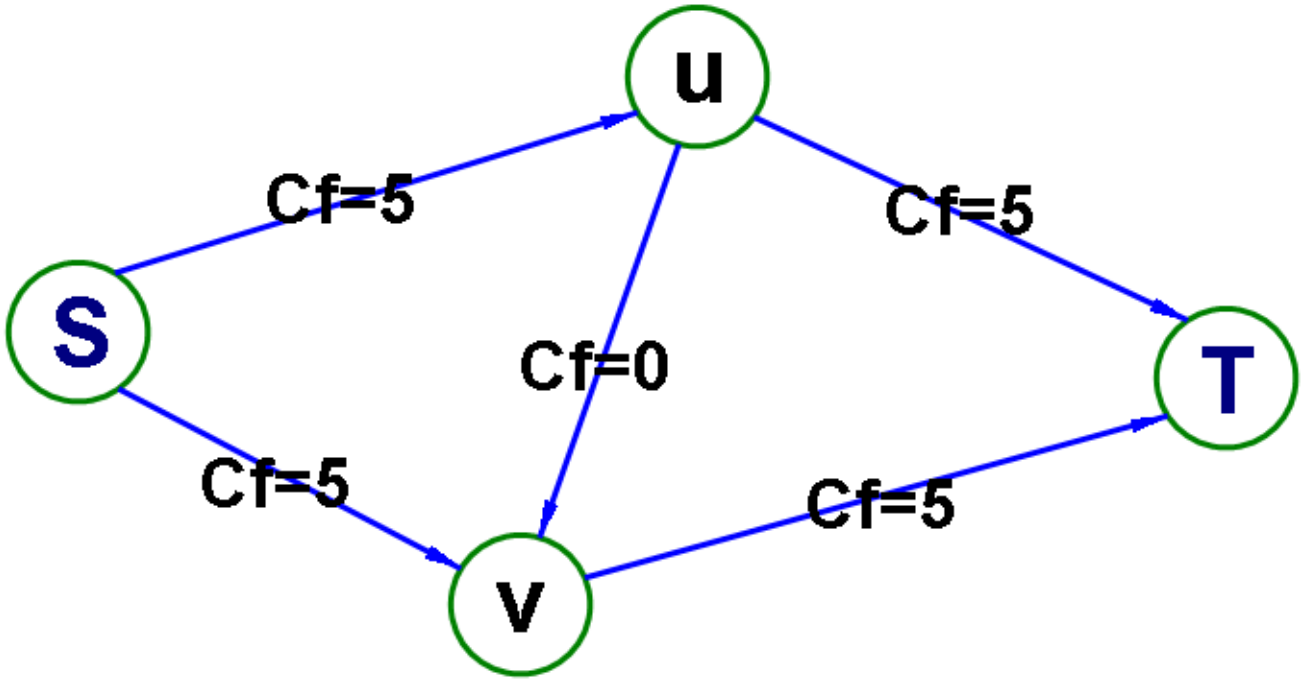
调整到最后就是最大流网络 同时也可以得到最大流值



残留网络往往概括了容量网络和流量网络 是最为常用的

残留网络=容量网络-流量网络
这个等式是始终成立的 残留值当流量值为负时甚至会大于容量值

流量值为什么会为负?有正必有负,记住斜对称性!



4.割&割集:

无向图的割集(Cut Set):C[A,B]是将图G分为A和B两个点集 A和B之间的边的全集

A set of edges of a graph which, if removed (or "cut"), disconnects the graph (i.e., forms a disconnected graph).

网络的割集:C[S,T]是将网络G分为s和t两部分点集 S属于s且T属于t 从S到T的边的全集

带权图的割(Cut)就是割集中边或者有向边的权和

Given a weighted, undirected graph G=(V,E) and a graphical partition of V into two sets A and B, the cut of G with respect to A and B is defined as cut(A,B)=sum_(i in A,j in B)W(i,j),where W(i,j) denotes the weight for the edge connecting vertices i and j. The weight of the cut is the sum of weights of edges crossing the cut.

通俗的理解一下:

割集好比是一个恐怖分子 把你家和自来水厂之间的水管网络砍断了一些

然后自来水厂无论怎么放水 水都只能从水管断口哗哗流走了 你家就停水了

(插播广告: 节约水资源 人人有责!)
割的大小应该是恐怖分子应该关心的事 毕竟细管子好割一些

而最小割花的力气最小

==========

二.计算最大流的基本算法
那么怎么求出一个网络的最大流呢?

这里介绍一个最简单的算法:Edmonds-Karp算法 即最短路径增广算法 简称EK算法

EK算法基于一个基本的方法:Ford-Fulkerson方法 即增广路方法 简称FF方法

增广路方法是很多网络流算法的基础 一般都在残留网络中实现

其思路是每次找出一条从源到汇的能够增加流的路径 调整流值和残留网络 不断调整直到没有增广路为止

FF方法的基础是增广路定理(Augmenting Path Theorem):网络达到最大流当且仅当残留网络中没有增广路

证明略 这个定理应该能够接受的吧

EK算法就是不断的找最短路 找的方法就是每次找一条边数最少的增广 也就是最短路径增广

这样就产生了三个问题:

1.最多要增广多少次?
可以证明 最多O(VE)次增广 可以达到最大流 证明略

2.如何找到一条增广路?
先明确什么是增广路 增广路是这样一条从s到t的路径 路径上每条边残留容量都为正

把残留容量为正的边设为可行的边 那么我们就可以用简单的BFS得到边数最少的增广路

3.如何增广?
BFS得到增广路之后 这条增广路能够增广的流值 是路径上最小残留容量边决定的

把这个最小残留容量MinCap值加到最大流值Flow上 同时路径上每条边的残留容量值减去MinCap

最后 路径上每条边的反向边残留容量值要加上MinCap 为什么? 下面会具体解释

这样每次增广的复杂度为O(E) EK算法的总复杂度就是O(VE^2)

事实上 大多数网络的增广次数很少 EK算法能处理绝大多数问题

平均意义下增广路算法都是很快的

增广路算法好比是自来水公司不断的往水管网里一条一条的通水

上面还遗留了一个反向边的问题：为什么增广路径上每条边的反向边残留容量值要加上MinCap?

因为斜对称性！由于残留网络=容量网络-流量网络

容量网络不改变的情况下

由于增广好比给增广路上通了一条流 路径说所有边流量加MinCap

流量网络中路径上边的流量加MinCap 反向边流量减去MinCap

相对应的残留网络就发生相反的改变

这样我们就完成了EK算法 具体实现可以用邻接表存图 也可以用邻接矩阵存图

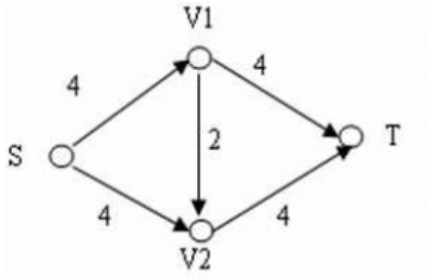
邻接表存图 由于流量同时存在于边与反向边 为了方便求取反向边 建图把一对互为反向边的边建在一起

代码很简单 最好自己实现一下

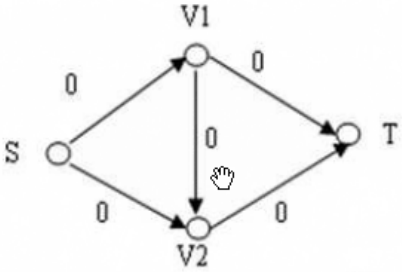
⊞

EK

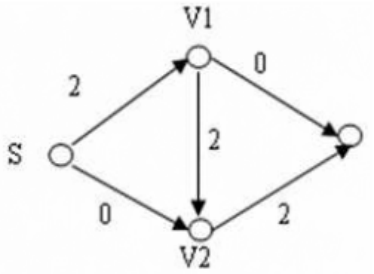
看一个具体的增广路算法的例子吧



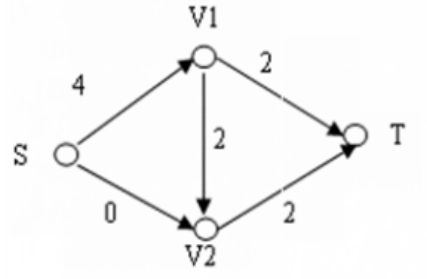
一个简单的网络流图



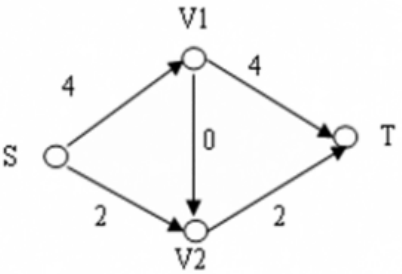
取一个初始可能流（零流）



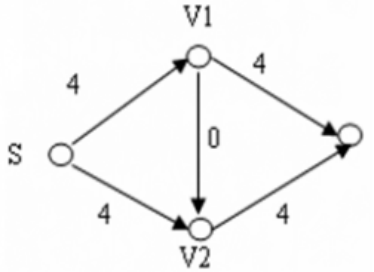
第1次增广(S,V1,V2,T)



第二次增广(S,V1,T)



第三增广(S,V2, V1,T)



第四次增广(S,V2,T)

==========

三.最大流最小割定理

下面介绍网络流理论中一个最为重要的定理

最大流最小割定理(Maximum Flow, Minimum Cut Theorem):网络的最大流等于最小割
The maximum flow between vertices v_i and v_j in a graph G is exactly the weight of the smallest set of edges to disconnect G with v_i and v_j in different components.

具体的证明分三部分

1.任意一个流都小于等于任意一个割
这个很好理解 自来水公司随便给你家通点水 构成一个流

恐怖分子随便砍几刀 砍出一个割

由于容量限制 每一根的被砍的水管子流出的水流量都小于管子的容量

每一根被砍的水管的水本来都要到你家的 现在流到外面 加起来得到的流量还是等于原来的流

管子的容量加起来就是割 所以流小于等于割

由于上面的流和割都是任意构造的 所以任意一个流小于任意一个割

2.构造出一个流等于一个割
当达到最大流时 根据增广路定理

残留网络中s到t已经没有通路了 否则还能继续增广

我们把s能到的的点集设为S 不能到的点集为T

构造出一个割集C[S,T] S到T的边必然满流 否则就能继续增广

这些满流边的流量和就是当前的流即最大流

把这些满流边作为割 就构造出了一个和最大流相等的割

3.最大流等于最小割
设相等的流和割分别为Fm和Cm

则因为任意一个流小于等于任意一个割

任意F≤Fm=Cm≤任意C

定理说明完成

==========

四.简单的应用
Poj 1459是一个很典型的网络流应用

把电流想象成水流

u	type	s(u)	p(u)	c(u)	d(u)
0	power station	0	4	0	4
1		2	2	0	4
3	consumer	4	0	2	2
4		5	0	1	4
5		3	0	3	0
2	dispatcher	6	0	0	6
6		0	0	0	0

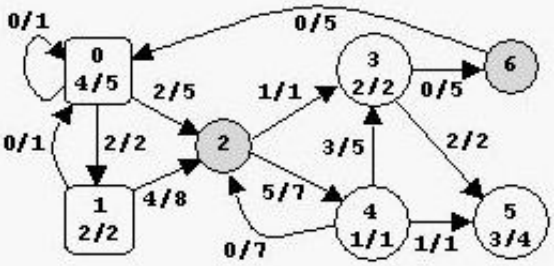


Figure 1. A power network

注意把多源多汇转化为单源单汇即可利用EK算法解决问题

网络流的应用还有很多 化归的思想是网络流最具魅力的地方

代码如下:

⊞

PowerNet

==========

本文部分图片来源:

http://wenku.baidu.com/view/65a8290d4a7302768e99395a.html

http://wenku.baidu.com/view/6b4baf1ffc4ffe473368ab25.html

http://www.cppblog.com/mythit/archive/2009/04/19/80470.aspx

BOB HAN 原创 转载请注明出处 http://www.cnblogs.com/Booble/