

## 1 equation

### 1.1 30% 数据

暴力，这时答案本身很小，所以只需要写一个 dfs。

### 1.2 70% 数据

这个问题等价于“将  $m$  个相同的球放进  $n$  个不同的盒子中”的方案数，所以：

$$ans = \binom{n+m-1}{m}$$

(记得课上讲的夹棍法吗?)

后者可以用递推公式算：

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

也可以暴力乘+逆元。

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

复杂度后者好点（因为模数不同，前者每次都要推一遍）

### 1.3 余下 30% 数据

用公式推应该会超时，只能用后面那个，求逆元可以用扩展欧几里得，也可以用欧拉定理（注意题目中  $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ ）。当然也可以在模  $p$  和模  $q$  时答案求出来，再用中国剩余定理合并。

## **2 power**

### **2.1 10% 数据**

暴力循环

### **2.2 30% 数据**

普通二进制快速幂

### **2.3 70% 数据**

高精度 + 二进制快速幂

### **2.4 100% 数据**

十进制快速幂，类比二进制，从低到高维护好  $3^{10^i}$ 。

### 3 comb

#### 3.1 30% 数据

暴力算出组合数，用递推公式

#### 3.2 100% 数据

题目就是求：

$$p \mid \binom{n}{i}$$

即：

$$\binom{n}{i} \equiv 0 \pmod{p}$$

的  $i$  的个数。想到可能和 Lucas 有关，我们先把问题转化成求：

$$p \nmid \binom{n}{i}$$

的  $i$  的个数。由 Lucas 定理：

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{n_1}{m_1} \binom{n_2}{m_2} \cdots \binom{n_s}{m_s} \pmod{p}$$

其中  $n_1 n_2 \dots n_s$  和  $m_1 m_2 \dots m_s$  是  $n$  和  $m$  的  $p$  进制分解。容易发现：只要右边每一项模意义下都非 0，那么右边乘起来都非零，这样的数  $m$  有：

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_s + 1)$$

个，这就是不满足条件的数的个数，那么答案就是：

$$(n + 1) - (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_s + 1)$$

## 4 derange

### 4.1 30% 数据

用 `next_permutation` 枚举排列，然后暴力 check。

### 4.2 70% 数据

我们用  $D[n]$  表示  $n$  个元素的错排数量，那么我们可以通过枚举不合法的排列重合的个数来算出  $D[n]$ ：

$$D[n] = n! - \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} D[n-i]$$

初始值是：

$$D[0] = 1$$

我们可以先处理出组合数，再跑这个递推，就行了。

### 4.3 100% 数据

$D[n]$  中，我们先选择  $n$  号元素的位置，有  $n-1$  种选择  $([1, n-1])$ ，假设  $n$  放在了  $i$  号位置，我们再考虑  $i$  号元素放哪，此时分两种情况：

- $i$  放在  $n$  号位置，此时有  $D[n-2]$  种放法。
- $i$  号元素不放在  $n$  号位置，问题就转化成了：我要将  $[1, n-1]$  这  $n-1$  个元素放进  $[1, i-1], [i+1, n]$  这些位置，并且每个元素都有且仅有一个位置不能放（1 不能放在 1，2 不能放在 2，...  $i$  不能放在  $n$  ...）。这不就是  $n-1$  个元素的错排吗？（将  $n$  号位置看成  $i$  号元素本来的位置）。此时有  $D[n-1]$  种放法。

## 5 mulfunc

我们先证明一下题目中给出的结论吧：

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

假设  $n$  有质因分解：  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ 。从而：

$$g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}) = \sum_{d|p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}} f(d) = \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \sum_{i_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{i_s=0}^{\alpha_s} f(p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_s^{i_s})$$

因为  $f(n)$  是积性函数，我们可以继续：

$$= \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \sum_{i_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{i_s=0}^{\alpha_s} f(p_1^{i_1}) f(p_2^{i_2}) \dots f(p_s^{i_s})$$

由求和的性质，又有：

$$\begin{aligned} &= \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} f(p_1^{i_1}) \sum_{i_2=0}^{\alpha_2} f(p_2^{i_2}) \dots \sum_{i_s=0}^{\alpha_s} f(p_s^{i_s}) = \left( \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} f(p_1^{i_1}) \right) \left( \sum_{i_2=0}^{\alpha_2} f(p_2^{i_2}) \right) \dots \left( \sum_{i_s=0}^{\alpha_s} f(p_s^{i_s}) \right) \\ &= g(p_1^{\alpha_1}) g(p_2^{\alpha_2}) \dots g(p_s^{\alpha_s}) \end{aligned}$$

从而有：

$$g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}) = g(p_1^{\alpha_1}) g(p_2^{\alpha_2}) \dots g(p_s^{\alpha_s})$$

就证明了  $g(n)$  的积性。

所以，关于  $\tau(n)$  和  $\sigma(n)$  又有下面的定义：

$$\begin{aligned} \tau(n) &= \sum_{d|n} 1 \\ \sigma(n) &= \sum_{d|n} d \end{aligned}$$

显然  $f(n) = 1$  和  $g(n) = n$  都是积性函数，所以  $\tau(n)$  和  $\sigma(n)$  是积性函数。

由上面的结论，我们要求一个积性函数的值，只需要弄清楚  $f(p^\alpha)$  的值就行了。

$$\begin{aligned} \tau(p^\alpha) &= \alpha + 1 \\ \sigma(p^\alpha) &= 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha = \frac{(1+p^{\alpha+1})}{2} \\ \mu(p) &= -1 \\ \mu(p^\alpha) &= 0 \quad (\alpha \geq 2) \\ \phi(p^\alpha) &= p^\alpha - p^{\alpha-1} \end{aligned}$$

因为我们线性筛的时候会找到每个数的最小素因子，所以可以在线性筛是算出所有数的函数值，具体参见代码。